

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA



**ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE DUCTOS PARA
TRANSPORTE DE PETRÓLEO EN ALTA MAR**

TESIS

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO NAVAL**

ABEL TORRES ANDREWS

PROMOCION 2002-2

LIMA-PERU

2009

TABLA DE CONTENIDO

Prólogo	1
CAPITULO 1	4
Introducción	4
CAPITULO 2	8
Sistemas y Ductos de Producción Marítima	8
2.1 Países Productores de Petróleo - Situación del Perú	8
2.2 Sistemas de Producción Marítima de Petróleo	12
2.3 Ductos para Transporte de Producción de Petróleo	20
2.3.1 Tipos de Ductos para Transporte de Petróleo	20
2.3.1.1 Ductos Rígidos	20
2.3.1.2 Ductos Flexibles	21
2.3.2 Configuraciones de Ductos para Transporte de Petróleo	22
CAPITULO 3	25
Comportamiento de Ductos para Transporte de Petróleo	25
3.1 No-linealidades del Comportamiento Estructural de Ductos	25
3.2 Descripción del Movimiento	29
3.3 Ecuaciones de Equilibrio	32
3.3.1 Descomposición Incremental y Linealización	37
3.4 Discretización de la Estructura	38

5.4	Comportamiento de un Ducto Rígido en Catenaria	132
5.5	Comportamiento de un Ducto Flexible en Configuración <i>Lazy-Wave</i>	149
	Conclusiones	166
	Bibliografía	168
	Apéndice A	172
A1	Desarrollo de Ecuaciones para Análisis Incremental No-Lineal	172
A2	Costos de Ductos Rígidos para Producción y Transporte de Petróleo	176
	Planos	178
P1	Esquemas de un Sistema de Ductos de Producción de Petróleo de un navio FPSO	178
P2	Esquema Detallado del Sistema de Conexión de un Ducto Flexible de Producción de Petróleo de un navio FPSO	181

LISTA DE TABLAS

2.1	Paises Miembros de la OPEP	8
2.2	Producción de área y reservas comprobadas de petróleo en Sudamérica	9
2.3	Tipos de unidades estacionarias de producción	13
5.1.1	Parámetros físicos del ducto	107
5.2.1	Características del ducto flexible y del refuerzo de acero inoxidable	114
5.2.2	Perfil de velocidades de la corriente marina	115
5.2.3	Valores de la fuerza de tracción en la conexión del ducto con el flotante	121
5.3.1	características físicas y geométricas del ducto y de los flotadores	124
5.3.2	Perfil de velocidades de la corriente marina	127
5.4.1	Propiedades mecánicas y geométricas del ducto	134
5.4.2	Comparación de los resultados de algunos parámetros del ducto rígido	136
5.4.3	Parámetros de corriente y del movimiento de la extremidad superior del ducto rígido	138
5.5.1	Parámetros físicos del ducto flexible	151
5.5.2	Parámetros de corriente marina y movimiento impuesto en la extremidad A	152
5.5.3	Comparación de resultados numéricos obtenidos en el análisis estático sin corriente marina con diversos programas	154
5.5.4	Comparación de resultados numéricos obtenidos en el análisis estático con corriente marina con diversos programas	155
5.5.5	Análisis dinámico – Tracción (T) en el punto superior de conexión	159

LISTA DE FIGURAS

2.1	Principales cuencas de Sudamérica y Centroamérica	10
2.2	Empresas petroleras actuantes en el Perú	11
2.3	Sistema de unidades de producción en alta mar	13
2.4	Plataformas fijas: Jacket	14
2.5	Plataforma fija auto-elevable	15
2.6	Plataforma fija por gravedad	16
2.7	Plataforma de piernas tensionadas (TLP)	17
2.8	Plataforma Spar Buoy	17
2.9	Plataforma semi-sumergible	19
2.10	Plataforma FPSO	20
2.11	Ducto rígido monofunción	21
2.12	Sección típica de un <i>riser</i> flexible	22
2.13	Tipos de configuraciones de los ductos	24
3.1	Descripción del movimiento de un cuerpo usando un sistema de coordenadas convectivo co-rotacionado (x,y,z)	32
3.2	Movimiento de un cuerpo deformable en un sistema de coordenadas estacionario	34
3.3	elemento de 2 nodos en los instantes t y t+dt representados en el sistema de coordenadas co-rotacionada correspondiente al instante t	40
3.4	Cinemática de deformación de la estructura unidimensional	42
3.5	Elemento (m) y las variables de estado nodales	43

3.6	Estiramiento da línea neutra debido al desplazamiento transversal $v(x)$ de un segmento infinitesimal	46
3.7	Variación de la aceleración en la regla trapezoidal	66
3.8	Determinación de la rotación de cuerpo rígido del elemento (m) a partir de los incrementos de traslación nodales	81
4.1	Riser y suelo marino	87
4.2	Configuración inicial considerada en el análisis numérico	88
4.3	Interpolación de la geometría en un elemento del suelo marino	91
4.4	Nodo K del <i>riser</i> en contacto con el elemento j	93
4.5	Condición de contacto deslizante en el nodo K del <i>riser</i>	96
4.6	Diagrama de cuerpo libre: Cargas equivalentes de contacto ${}^{t+\Delta t}\lambda_k^{(i-1)}$ y ${}^{t+\Delta t}\mu_K^{(i-1)}$ en los nodos del <i>riser</i> (I y K) y del suelo marino (A y B)	98
5.1.1	Configuración inicial del ducto en catenaria	107
5.1.2	Deformadas del ducto: Catenaria inicial y deformada con corriente	108
5.1.3	Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto	110
5.1.4	Distribución del momento flector a lo largo de la longitud del ducto	110
5.1.5	Variación del radio de curvatura a lo largo de la longitud del ducto	111
5.2.1	Ducto flexible de 8" en catenaria	112
5.2.2	Deformada inicial considerandose el peso propio del ducto flexible y el empuje	115
5.2.3	Deformadas del ducto flexible incluida una corriente positiva (<i>Far</i>)	117
5.2.4	Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud con corriente positiva	118

5.2.5	Deformadas del Ducto Flexible cuando aplicada una corriente negativa (<i>Near</i>)	119
5.2.6	Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud con corriente negativa	120
5.3.1	Ducto flexible en la configuración <i>Steep-Wave</i>	122
5.3.2	Discretización del modelo utilizado	123
5.3.3	Secuencia de las configuraciones deformadas del ducto flexible comenzando con una catenaria simple	125
5.3.4	Comparación de las configuraciones de equilibrio obtenidas sin la aplicación de corriente marina	126
5.3.5	Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto sin corriente marina	126
5.3.6	Deformada del ducto flexible obtenida después de la aplicación de una corriente positiva	129
5.3.7	Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible después de la aplicación de una corriente positiva	129
5.3.8	Deformada del ducto flexible después de la aplicación de una corriente negativa	130
5.3.9	Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible después de la aplicación de una corriente negativa	130
5.4.1	Ducto rígido en catenaria ($S =$ Coordenada local a lo largo del ducto)	133
5.4.2	Deformadas sucesivas de la catenaria inicial generadas por la imposición del contacto con el suelo marino	136

5.4.3	Comparación de las soluciones para las deformadas obtenidas de los diversos modelos de análisis (Peso + Empuje + Contacto)	137
5.4.4	Variación de la fuerza de tracción a lo largo del ducto - Carga estática	139
5.4.5	Deformadas del ducto considerando los efectos del <i>offset</i> estático y de la corriente marina	141
5.4.6	Deformadas del ducto correspondientes a los instantes 2.5, 5.0, 7.5 y 10.0 s	143
5.4.7	Deformadas del ducto correspondientes a los instantes 12.5, 15.0 y 17.5 s	144
5.4.8	Deformadas del ducto correspondientes a los instantes 42.5, 45.0, 47.5 y 50.0 s	145
5.4.9	Fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto correspondiente a los instantes 2.5, 5.0 y 7.5 s	146
5.4.10	Fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto correspondiente a los instantes 10.0, 12.5 y 15.0 s	147
5.4.11	Fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto correspondiente a los instantes 45.0, 47.5 y 50.0 s	147
5.4.12	Variación en el tiempo del radio de curvatura en el <i>TDP</i>	148
5.5.1	Configuración <i>Lazy-Wave</i> del ducto flexible	150
5.5.2	Deformada estática del ducto flexible con y sin corriente marina	157
5.5.3	Fuerza de tracción estática a lo largo de la longitud del ducto flexible	158
5.5.4	Deformada dinámica del ducto flexible en los instantes 6.0, 9.0 y 12.0 segundos	160
5.5.5	Deformada dinámica del ducto flexible en los instantes 12.0, 15.0, 18.0, 21.0	

y 24.0 segundos	161
5.5.6 Deformada dinámica del ducto flexible en los instantes 24.0, 27.0 y 30.0 segundos	162
5.5.7 Tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible en los instantes 6.0, 9.0 y 12.0 segundos	164
5.5.8 Tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible en los instantes 12.0, 15.0, 18.0 y 21.0 segundos	164
5.5.9 Tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible en los instantes 21.0, 24.0, 27.0 y 30.0 segundos	165
A.1 Procedimiento incremental iterativo	175
A.2 Costo Total para Ducto de Importación (8 5/8") - 10000psi y 2500m de Profundidad	177
A.3 Costo Total para Ducto de Exportación (20")	177
A.4 Costos para Diversos Dutos Soldados	178
A.5 Costos para um Ducto de Importación (8 5/8") para diversas Profundidades	178

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN

La extracción de petróleo en el mar tuvo inicio en 1889 en Luisiana y avanzó para el Golfo de México, en aguas con profundidades de hasta 60m. Las sucesivas crisis del petróleo iniciadas en 1973, bien como el rápido crecimiento de la demanda acompañado de la escasez de los pozos en tierra, posibilitaron las dificultades inherentes a la exploración en el mar, en profundidades cada vez mayores.

En el Perú se comenzó a producir petróleo en el año de 1860 al norte del país, en la ciudad de Zorritos. Actualmente la región norte es el mayor polo de petróleo del país. Actualmente, el Perú posee una de las mayores reservas de gas natural a nivel mundial (Camisea). El yacimiento de gas natural de Camisea está localizado en la cuenca de Ucayali – Cuzco, fué descubierto en 1983 por la empresa Shell.

En la actualidad, con inversiones de empresas privadas en el país, están siendo descubiertos nuevas áreas de producción de petróleo y gas, las cuales son económicamente viables de producir debido a las condiciones actuales de la economía mundial. Estas nuevas descubiertas están localizadas principalmente en campos de tierra firme (campos *onshore*). Algunas nuevas áreas están siendo descubiertas campos en alta mar (campos *offshore*). Una importante área de gas localizada en el mar de Piura, bahía de Bayobar, fué anunciada por la empresa Petro-

Tech, cuya capacidad de producción es estimada en 20 millones de pies cúbicos por día.

Actualmente, la exploración de petróleo en el mar es una práctica común en el Golfo de Mexico, Mar del Norte, costa de Brasil y África y en otras regiones del mundo. Teniendo sistemas operando en profundidades superiores de 2000 m. Entre los principales agentes que permitieron este desenvolvimiento tecnológico, están los ductos flexibles y rígidos, utilizados en la producción y transporte del petróleo y gas desde el pozo hasta la unidad flotante (embarcación, boya, etc), en el anclaje y en el control electro-hidráulico de la operación (Lustosa, 2000). La creciente demanda por operaciones de producción y transporte de petróleo y gas en profundidades cada vez mayores requiere la utilización de ductos rígidos y flexibles como solución a los complejos problemas de ingeniería submarina *offshore* (características naturales del ambiente oceánico) en el uso de plataformas semi-submersibles y de otros tipos.

El sistema unidad flotante y ducto (flexible o rígido) son sometidos a cargas ambientales como corrientes marinas y ondas. Este, por presentar movimiento, provoca variaciones temporales de los esfuerzos en la estructura que compone el ducto, siendo susceptible a daños o fallas por fatiga y de otros tipos. En tales condiciones de operación, la demanda por innovaciones tecnológicas y soluciones de desafiantes problemas de ingeniería imponen una necesidad de grandes inversiones en investigación y formación calificada de recursos humanos en el país.

Del punto de vista estructural los ductos (rígidos y flexibles) son componentes con la característica geométrica principal de poseer una de sus dimensiones, la longitud, típicamente con dos a cuatro órdenes de grandeza mayores que el diámetro, permitiendo clasificarlos como líneas, pudiéndose de esta forma, analizar los

respectivos comportamientos dinámicos utilizándose un mismo modelo matemático. Esta pronunciada esbeltez resulta que los ductos presenten el comportamiento no-lineal geométrico correspondiente a la ocurrencia de grandes desplazamientos, con acoplamiento entre los esfuerzos axial e transversal (Mourelle, 1993). Con eso, los ductos de producción y transporte de petróleo y gas en alta mar deben ser proyectados especialmente para soportar grandes desplazamientos, en condiciones dinámicas de cargas y vinculación.

Delante de esta realidad, el presente trabajo tiene el objetivo de explicar sobre las diferentes unidades de producción de petróleo y gas en alta mar utilizadas en la actualidad, así como de los ductos (rígidos y flexibles) utilizados en conjunto con estos sistemas de producción. Se presenta una metodología numérica para el análisis estático y dinámico bidimensional del comportamiento de ductos de producción y transporte de petróleo y gas en condiciones ambientales de alta mar, en que el contacto del ducto con el suelo marino es considerado, empleándose el método de los elementos finitos. Estos ductos son conocidos como *risers*, los cuales según el método de construcción pueden ser de dos tipos: los ductos rígidos que consisten en una serie de tubos de acero unidos por medio de soldadura o conexiones mecánicas y los ductos flexibles que son constituidos por una serie de capas superpuestas de diversos materiales.

El modelo implementado no son considerados los efectos de las fuerzas de atrito con el fondo marino, cuya rigidez es considerada muy superior a la del cable. El problema de contacto es entonces tratado, similarmente, al de dos cuerpos en contacto unilateral, siendo uno de ellos considerado rígido. Utilizase aquí la representación propuesta en (Chaudary, 1985; Yau, 1982) donde permítese la interpenetración entre

los cuerpos y un algoritmo interactivo de aplicación de esfuerzos restituye las superficies a mantenerse sobre una línea (superficie) común.

CAPITULO 2

SISTEMAS Y DUCTOS DE PRODUCCIÓN MARÍTIMA

2.1 PAISES PRODUCTORES DE PETRÓLEO – SITUACIÓN DEL PERÚ

La Organización de Países Exportadores de Petróleo está formada por los países que exportan más petróleo a nivel mundial. Esta organización fue creada en el año 1960 por los siguientes países: Venezuela, Arabia Saudita, Irán, Irak y Kuwait, con la finalidad de controlar los precios del petróleo para defender los intereses de los países asociados.

Los países miembros de esta organización en la actualidad son:

Tabla 2.1 Países miembros de la OPEP

País	Localización	Año de Ingreso
Arabia Saudita *	Medio Oriente	1960
Argelia	Africa	1969
Emiratos Árabes Unidos	Medio Oriente	1967
Indonesia	Asia	1962
Irán *	Medio Oriente	1960
Iraq *	Medio Oriente	1960
Kuwait *	Medio Oriente	1960
Libia	Africa	1962
Nigeria	Africa	1971
Qatar	Medio Oriente	1961
Venezuela *	Sur América	1960

*Miembros fundadores

Fuente: <http://www.opec.org/aboutus/history/history.htm>

En Sudamérica, el Perú es un país productor de petróleo y gas juntamente con Venezuela, Brasil, Argentina, Colombia, Ecuador y Bolivia de los cuales se tiene como Venezuela el principal país de productor de petróleo (PDVSA) seguido por el Brasil (PETROBRAS).

Tabla 2.2 Producción diaria y reservas comprobadas de petróleo en Sudamérica

Países	Producción diaria [bbl/día]	Reservas comprobadas [bbl]
Argentina	801700 (2005)	2.086 Billones (2007)
Bolivia	41570 (2007)	440.5 millones (1 Enero 2006)
Brasil	1.59 millones (2006)	13.9 Billones (2007)*
Chile	15100 (2006)	150 millones (1 enero 2006)
Colombia	539000 (2005)	1.4 Billones (2007)
Ecuador	538000 (2005)	4.7 Billones (2007)
Guyana	0 (2005)	0 (2006)
Paraguay	0 (2007)	0 (2006)
Perú	110700 (2005)	431 Millones (2007)
Surinam	9461 (2005)	111 millones (1 enero 2006)
Uruguay	27830 (2007)	-
Venezuela	2.802 millones (2006)	79.14 Billones (2007)

* Este dato no contempla los 49 billones de barriles estimados de la última descubierta en aguas brasileras y capas de pre sal de subsuelo del campo de Tupi.

Referencia: Central Intelligence Agency, 7 Agosto 2008

La figura 2.1 muestra las cuencas de reservas de petróleo y gas existentes en Sudamérica y Centroamérica.

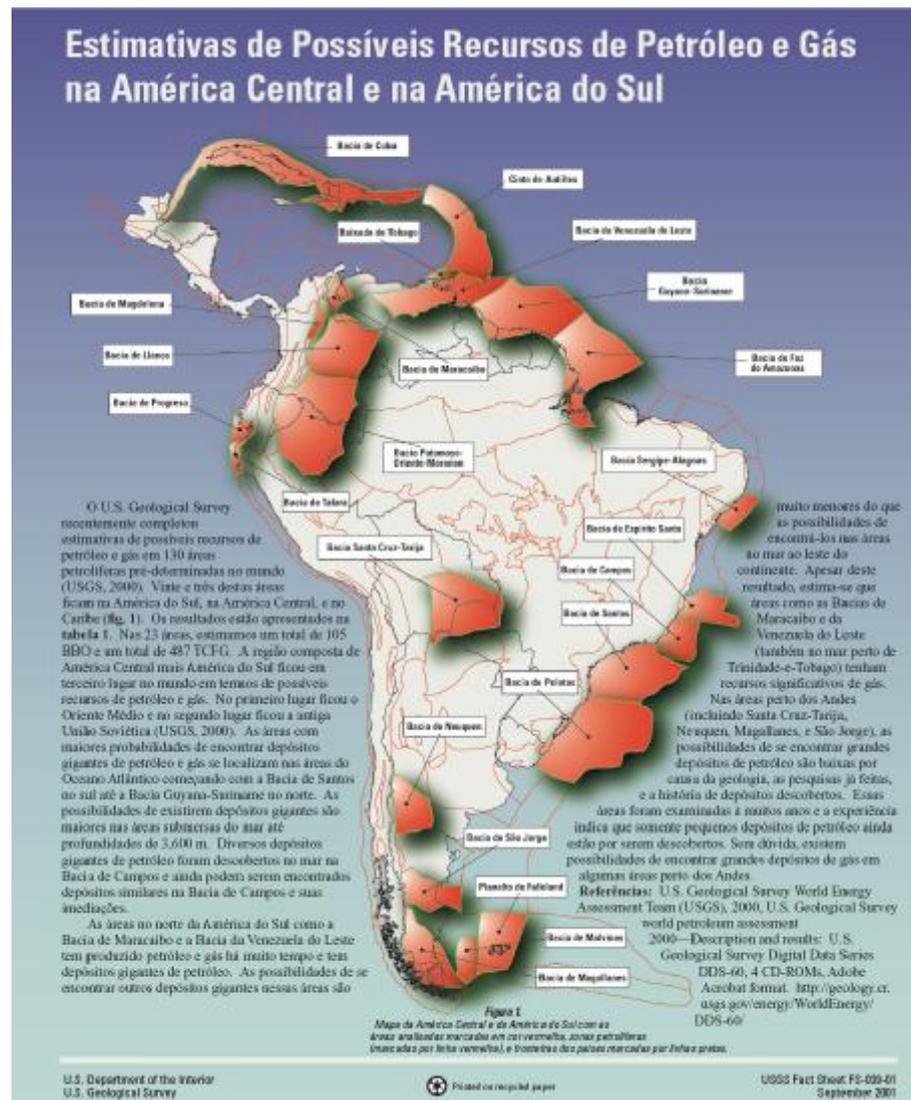


Figura 2.1 Principales Cuencas de Sudamérica y Centroamérica

El Perú posee dos (2) grandes cuencas de reservas de petróleo y gas: la cuenca de Talara y la de Putumayo-Oriente Marañón. Siendo por este motivo que grandes empresas internacionales están interesándose cada vez mas en desenvolver o desarrollar la exploración y producción de petróleo y gas en nuestro país. En la figura 2.2 son mostradas las áreas en desarrollo de

producción de petróleo y gas en el país, así como las empresas operadoras de estas áreas.

Es posible observar que el litoral norte del país está siendo explorado para la producción de petróleo y gas. De esta manera, se demuestra la tendencia y el interés del desenvolvimiento de la producción, en un futuro próximo, de petróleo y gas en alta mar, siendo necesario el desenvolvimiento de la ingeniería *offshore* y formación calificada de recursos humanos en el Perú, encontrando así las soluciones de problemas desafiantes de ingeniería para las condiciones marítimas locales.

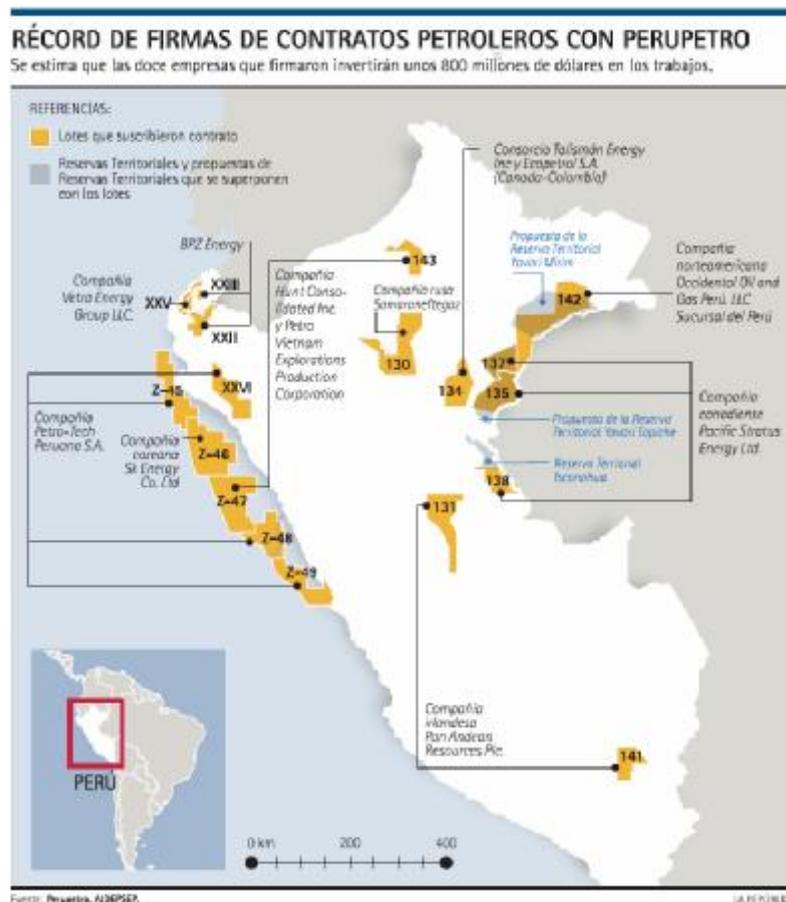


Figura 1.2 Empresas petroleras actuantes en el Perú

2.2 SISTEMAS DE PRODUCCIÓN MARÍTIMA DE PETRÓLEO

La producción del campo de petróleo o gas en alta mar depende de la selección de diversas variables tales como: el número de pozos, posicionamiento de ellos, longitudes y diámetros de los ductos de producción, posición de las Unidades Estacionarias de Producción flotante (UEP), tipo de anclaje, métodos de instalación de equipos y ductos, medios de elevación artificial del petróleo, etc. Cada área presenta desafíos particulares por lo que es recomendable una evaluación competente y objetiva sobre el tipo de equipos que serán instalados desde la cabeza del pozo de petróleo o gas hasta la unidad estacionaria de producción.

Es realizada una evaluación técnico-económica durante el proceso de optimización donde son abordadas y seleccionadas las mejores soluciones para las condiciones establecidas.

Una de las principales variables a ser considerado durante la evaluación técnico-económica es el tipo de unidades estacionarias de producción que será utilizada durante la fase de explotación del campo.

Las unidades estacionarias de producción son embarcaciones o plataformas que permanecen posicionadas en un mismo lugar recibiendo la producción de los pozos productores y inyectando fluidos en el reservorio. Generalmente estas UEPs permanecen en el mismo lugar por algunos años (25 años en promedio) ya sean ancladas o usando un sistema de posicionamiento dinámico (sensores que corrigen la posición para que la embarcación permanezca en un lugar fijo).

Tabla 2.3 Tipos de Unidades Estacionaria de Producción

Fijas	Adaptables	Flotantes
-Plataformas Jacket	-Plataforma de piernas tensionadas (TLP)	-Semi-sumergibles
-Por Gravedad		-Floating Production, Storage & Offloading (FPSO)
-Plataformas Auto- Elevable (Jack-up)	- Spar Buoy	-Floating Storage & Offloading (FSO)
-Torre Guía		- Barcazas

La Figura 2.3 muestra de forma general los diversos tipos de unidades de producción de petróleo y gas.

**Figura 2.3** Sistemas de unidades de producción en alta mar

Plataformas fijas

Conocidas como Jackets son usadas en laminas de agua de hasta 300 metros y son responsable en gran parte, hasta el momento, por la producción de petróleo en alta mar. Estas plataformas son estructuras hechas de acero, instaladas en el local de operación con estacas clavadas en el fondo del mar.

Debido a los altos costos de proyecto, construcción e instalación de la plataforma, su uso es restringido a la producción de crudo en campos ya conocidos. Las plataformas fijas son proyectadas para recibir todos los equipos de perforación, almacenamiento y traslado de materiales, alojamiento de personal así como todas las instalaciones necesarias para la producción de pozos.



Figura 2.4 Plataformas fijas: Jacket

Plataformas Auto-Elevable

Compuestas de una balsa equipada con una estructura de apoyo o piernas, las cuales son accionadas de forma mecánica o hidráulica, son sumergidas hasta alcanzar el fondo del mar. La plataforma es elevada sobre el nivel del agua hasta una altura segura, fuera de la acción de las olas. Estas plataformas son móviles, pueden ser transportadas por remolcadores o por propulsión propia. Son destinadas para la perforación de pozos exploratorios en la plataforma continental, hasta una profundidad de 130 m y no poseen capacidad de almacenamiento.

Estas plataformas son muy estables dinamicamente y las operaciones de perforación realizadas en esta plataforma son similares a las realizadas en tierra (*onshore*). Las operaciones de elevación o descenso de la plataforma es fuertemente influenciadas por las condiciones ambientales.

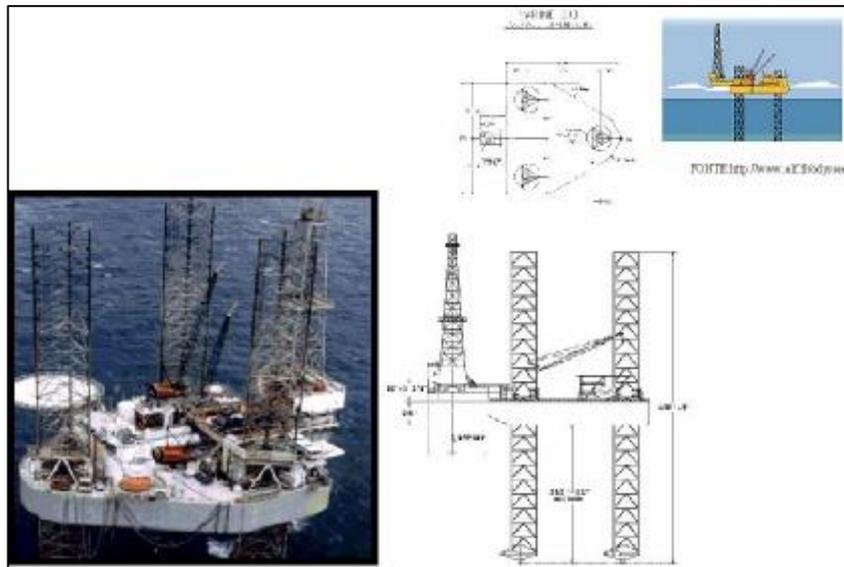


Figura 2.5 Plataforma fija auto-elevable

Plataforma por Gravedad

Esta es una plataforma fija (cimientos de concreto en su base), sirven para condiciones de mar extremas debido a que posee buena estabilidad y trabaja en profundidades de hasta 100m.

Su capacidad de almacenamiento es reducida pero son de gran utilidad en las operaciones marítimas.



Figura 2.6 Plataforma fija por gravedad

Plataforma de Piernas Tensionadas (Tension Leg Platform:TLP)

Plataforma usada para el desarrollo de campos. Su estructura es muy similar a la de una plataforma semi-sumergible, siendo que sus piernas principales son ancladas en el fondo del mar por medio de cabos tubulares y debido a la flotabilidad de la plataforma, sus piernas se mantienen constantemente en tracción, reduciendo severamente el movimiento de la plataforma. Por esta razón no tienen compensador de movimiento. Las operaciones de perforación y de producción son iguales a la de una plataforma fija, presenta buen desenvolvimiento para trabajar en profundidades mayores de 1000m y no posee capacidad para almacenamiento pudiendo usar un navío aliviador para su producción.

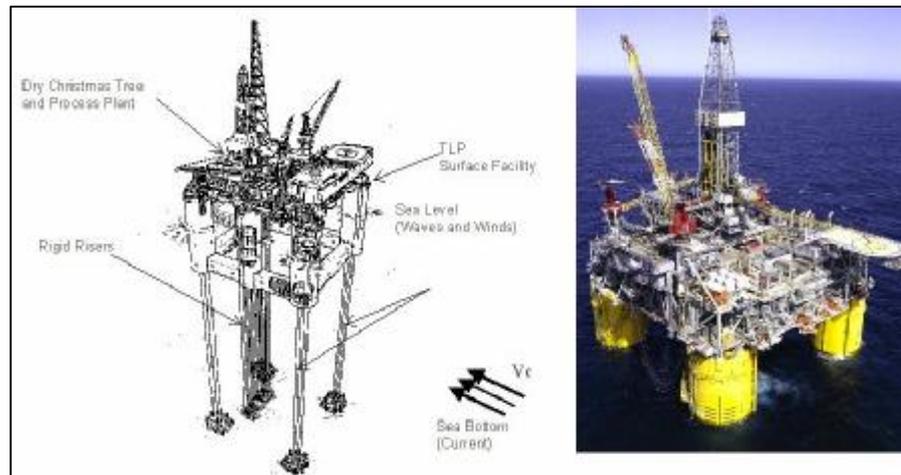


Figura 2.7 Plataforma de piernas tensionadas (TLP)

Plataforma Spar Buoy

Es una plataforma flotante de calado profundo que posee un casco cilíndrico anclado en el fondo del mar a través de cabos o líneas de anclaje, el cual después del anclaje es montada una plataforma encima del casco, poseen compensadores de movimiento.

Tiene un excelente comportamiento en mares severos, usados en profundidades superiores a 1000 m, presentan también una buena área de convés. Tiene como ventaja que es una tecnología relativamente nueva.



Figura 2.8 Plataforma Spar Buoy

Plataforma Semi-Sumergible

Las plataformas semi-sumergibles son compuestas de una estructura con una o varias cubiertas, apoyadas en flotadores sumergidos. La unidad flotante sufre movimientos debido a la acción de las olas, corrientes y vientos, los que pueden dañar los equipos que van a instalarse en el pozo. Por ello, es imprescindible que la plataforma permanezca en posición sobre la superficie del mar. Los tipos de sistema responsables de la posición de la unidad flotante son dos: el sistema de anclaje y el sistema de posicionamiento dinámico.

El sistema de anclaje se compone de 8 a 12 anclas y cables y/o cadenas, que actúan como resortes y producen esfuerzos capaces de restaurar la posición de la plataforma flotante cuando ésta es modificada por la acción de las olas, vientos y corrientes marinas.

En el sistema de posicionamiento dinámico no existe una conexión física de la plataforma con el suelo marino, excepto la de los equipos de perforación. Los sensores acústicos determinan la posición, y los propulsores ubicados en el casco son accionados por computadoras las cuales controlan y restauran la posición de la plataforma.

Las plataformas semi-sumergibles pueden tener o no propulsión propia para su desplazamiento. Son las preferidas para la perforación de pozos exploratorios.



Figura 2.9 Plataforma Semi-Sumergible

Floating Production, Storage & Offloading (FPSO)

Los buques FPSO (Floating, Production, Storage and Offloading) son embarcaciones con capacidad para procesar y almacenar petróleo, así como también proveer la transferencia de petróleo y/o gas natural a otro navío llamado de navio aliviador (navio cisterna). En la cubierta del buque existe una planta de procesamiento y tanques de almacenamiento para el petróleo y/o gas producido.

Las mayores plataformas FPSO tienen capacidad de procesar alrededor de 200 mil barriles de petróleo por día, con una producción asociada de gas de aproximadamente 2 millones de metros cúbicos diarios.

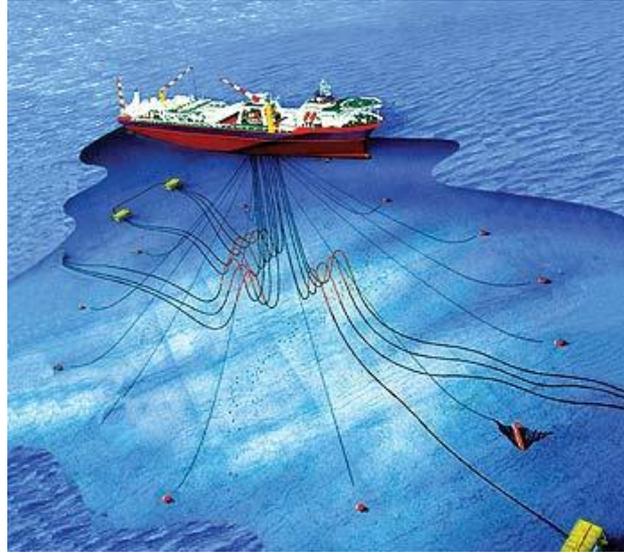


Figura 2.10 Plataforma FPSO

2.3 DUCTOS PARA TRANSPORTE DE PRODUCCIÓN DE PETRÓLEO

Los ductos de producción tienen la finalidad de transportar el fluido producido desde la cabeza de pozo hasta la Unidad Estacionaria de Producción y por su constitución pueden ser rígidas o flexibles. La parte suspensa de un ducto de producción es conocida como *riser* y son componentes críticos de un sistema submarino de producción por estar sometidos a elevados esfuerzos de fatiga debido a la acción de la corriente, olas y movimientos de la unidad estacionaria de flotación.

2.3.1 Tipos de Ductos para Transporte de Petróleo

Los ductos pueden ser clasificados como: rígidos y flexibles.

2.3.1.1 Ductos Rígidos

Son los ductos constituidos de tubos de acero acoplados entre si por medio de soldadura o conexiones mecánicas, con longitudes de aproximadamente 12 metros. Pueden ser utilizados en actividades de

perforación y también en producción, en plataformas fijas o TLPs, que presentan desplazamientos pequeños en comparación a los que ocurren en plataformas semi-sumergibles o buques. Generalmente asumen la configuración aproximadamente vertical; recientemente, están siendo utilizadas configuraciones en catenaria en plataformas semi-sumergibles con grande suceso y estudios están siendo realizados para la utilización de este tipo de configuración en navios FPSO.

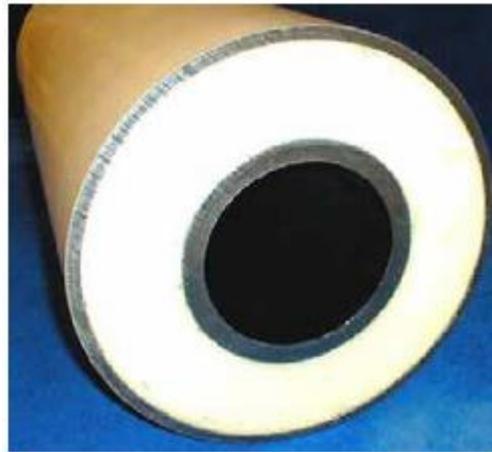


Figura 2.11 Ducto rígido mono función

2.3.1.2 Ductos Flexibles

Son empleados en actividades de producción, en plataformas semi-sumergibles o navios. Son constituidos por una serie de capas superpuestas de diversos materiales, posibilitando una baja rigidez a la flexión. Este tipo de configuración permite alcanzar un radio de curvatura mucho menor que un ducto rígido. Un ducto rígido presenta una rigidez a la flexión 100 veces menor que un ducto rígido y rigidez axial aproximadamente 10 veces menor.

Dependiendo de su fabricación los *riser* flexibles pueden ser clasificados de *bonded* o *unbonded*: *unbonded* cuando las capas no son pegadas y por lo tanto poseen movimiento relativos y *bonded* cuando las capas son pegadas e integradas por un material elastomérico.



Figura 2.12 Sección típica de un *riser* flexible

2.3.1 Configuraciones de Ductos para Transporte de Petróleo

Los *riser* pueden ser clasificados con base a su configuración como verticales, en catenaria y complejos (usan flotadores).

a) Verticales

En esta configuración es aplicada una fuerza de tracción en el topo, con la finalidad de mantener el *riser* siempre en tracción, evitando que éste se doble. Esta configuración demanda el uso de plataformas con baja respuesta dinamica, normalmente pueden ser plataformas del tipo piernas tensionadas (TLP) o Spar buoy.

b) Catenaria

En la mayoría de estas configuraciones no es aplicada una fuerza de tracción de topo. Los extremos de esta línea (superior y inferior) no necesariamente están en el mismo alineamiento.

c) Complejas

Esta configuración deriva de la configuración en catenaria, el *riser* asume una geometría en forma de catenaria doble a través de la instalación de flotadores o boyas mantenidas suspendidas dentro del mar.

La Figura 1.10 muestra de forma general los diferentes tipos de configuración de los *risers*.

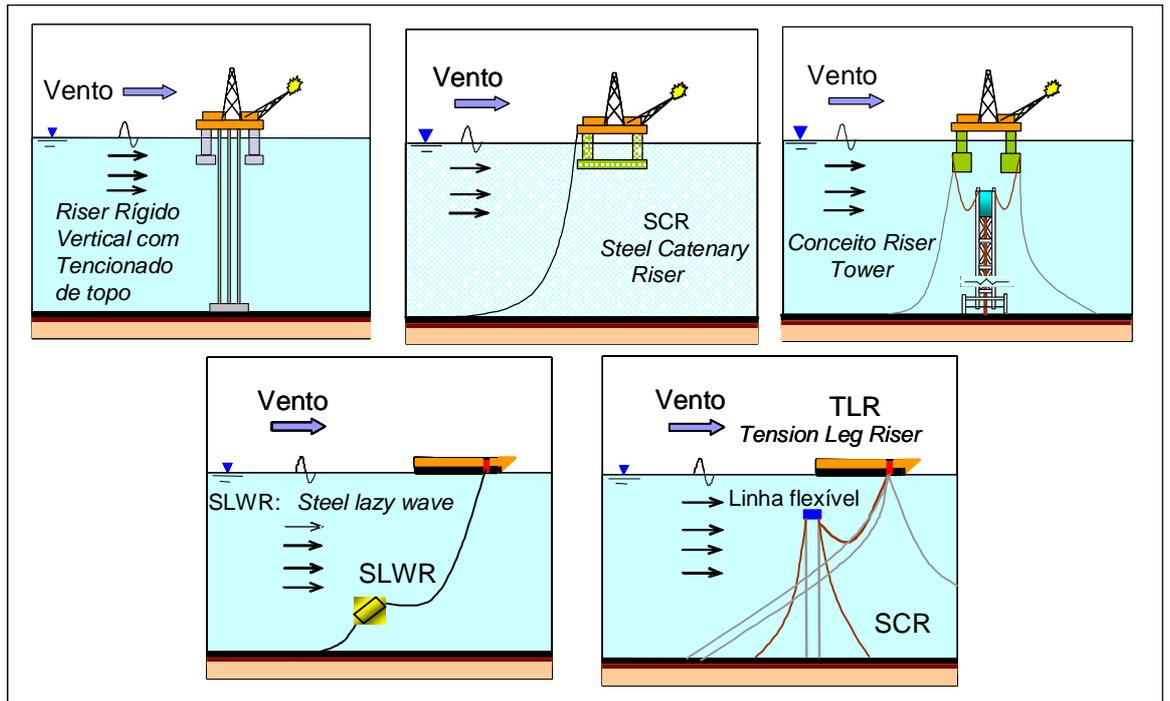


Figura 2.13 Tipos de configurações de los ductos

CAPITULO 3

COMPORTAMIENTO DE DUCTOS PARA TRANSPORTE DE PETRÓLEO

3.1 NO-LINEALIDADES DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE DUCTOS

En el análisis estructural pueden ser clasificados cuatro (4) condicionantes para el comportamiento no-lineal. Sus efectos son identificados en términos de material, de geometría, de fuerza e de desplazamiento.

El comportamiento no-lineal puede ser de origen geométrica o física. La no linealidad física resulta del comportamiento del material de la estructura que, cuando sometido a tensiones crecientes cuyas condiciones de escurrimiento son alcanzadas y hasta ultrapasadas, pasa a acumular deformaciones permanentes, plasticándose, y de esta forma acumulando tensiones residuales.

La no linealidad geométrica resulta, básicamente, de grandes desplazamientos y de la interacción axial-transversal, la cual es introducida en la teoría de la elasticidad, a través de las ecuaciones de equilibrio, por los términos de alto orden de las relaciones de compatibilidad geométrica (Bathe, 1996). Tales efectos son más acentuados en sistemas estructurales del tipo línea de anclaje y *risers*, en los cuales la configuración deformada debe ser considerada en la imposición de las condiciones de equilibrio. Un segundo efecto importante de

no linealidad geométrica es la inestabilidad por compresión o flambagem estática (Fujarra et al., 2003; Simos et al., 2003; Aranha et al., 2001; Palmer-Jones et al, 1998; Greenwood, 1965). El análisis no-lineal geométrico envuelve la solución de problemas con pequeñas/grandes deformaciones, asociadas a grandes desplazamientos, a través del empleo de modelos matemáticos y computacionales.

El método de los elementos finitos es uno de los más adecuados para la discretización de las ecuaciones que rigen el comportamiento estructural (Malvern, 1969) debido a su versatilidad, fácil empleo y caracterización física de los procedimientos. El análisis no-lineal de estructuras, herramienta utilizada en este trabajo, posibilita la evaluación de las tensiones en función de una carga impuesta a la estructura que deberá soportarla antes que fallas globales puedan ocurrir. Este análisis posibilita aun que se establezca la deformada de la estructura sujeta a las cargas aplicadas y a sus límites operacionales (condiciones de contorno).

Un procedimiento numérico adoptado para los análisis no-lineales consiste en subdividir la carga externa en incrementos y realizar una secuencia de análisis lineales a través de un proceso iterativo, visando obtener las mejores aproximaciones de la solución para cada nuevo incremento. La carga a ser aplicada a cada nuevo incremento es medida por la diferencia entre la carga actual aplicada y las fuerzas resistentes, resultantes del estado actual de deformación de la estructura (vector de desequilibrio, de desbalanceamiento o de residuo).

El análisis de estructuras marítimas está invariablemente asociado a consideraciones de los efectos de olas que inducen en la estructura cargas variables en el tiempo, de carácter periódico. La respuesta de una estructura a una dada carga periódica depende de sus características intrínsecas, que pueden ser traducidas por sus modos y frecuencias naturales de vibración (desde que la respuesta lineal sea considerada). Un sistema estructural presenta respuesta dinámica significativa cuando la carga se da a una frecuencia o componente armónico próximo a una de sus frecuencias naturales y en una distribución espacial no ortogonal al modo natural correspondiente. En el caso específico de *risers*, debido al comportamiento no-lineal, los modos y las frecuencias naturales del sistema estructural son modificados, a medida que este responde a la carga (modulados en el tiempo y en el espacio).

Las cargas inducidas por el pasaje de un fluido en superficies cilíndricas esbeltas son generalmente representadas por la fórmula de Morison, que corresponde a tres términos de esfuerzos en la ecuación de equilibrio (Huang, 1987): inercia, que es función lineal de la aceleración de la estructura; masa adicional, que es proporcional a la aceleración del fluido; e, arrastre en las direcciones normal y tangencial, que son funciones del cuadrado de la velocidad relativa fluido-estructura, en las direcciones correspondientes.

En función, principalmente, del movimiento inducido por la unidad flotante, los efectos de la cinética debidos a las velocidades y aceleraciones no pueden ser despreciados, viniendo a ser poco precisa una evaluación de las cargas

actuantes, considerándose el análisis estático apenas. Así, aun en situaciones en que la amplificación dinámica no es apreciable, como en las soluciones dinámicas alrededor de la posición de equilibrio estática (quasi-estática), la consideración de los efectos de la dinámica se hace necesaria.

En el movimiento de un *riser* se pueden identificar comportamientos clasificados en tres categorías, diferenciadas por las escalas de tiempo resultantes de las características físicas y de carga a que está sometida:

- Movimientos causados por la respuesta quasi-estática de la estructura flotante a las cargas de corriente (y ocasionalmente de viento);
- Movimientos asociados a la respuesta dinámica de una estructura flotante y del propio *riser* a la carga de ondas;
- Movimientos inducidos por vórtices.

Dos abordajes son usualmente empleadas en el análisis dinámico de sistemas estructurales de *risers* utilizándose la discretización espacial de las ecuaciones de equilibrio por el método de los elementos finitos: a) el análisis por solución directa o por superposición modal e b) la integración temporal directa. En la primera, considerándose la hipótesis en que la estructura presenta respuesta quasi-estática no lineal, a pesar de requerir un menor tiempo computacional, es adecuada en las condiciones de pequeños desplazamientos (que caracteriza el comportamiento dinámico) alrededor de la configuración estática obtenida. Las ecuaciones diferenciales de equilibrio son linealizadas con relación a la rigidez, inercia y fuerzas hidrodinámicas. En condiciones extremas o mismo en aquellas operacionales en que ocurren

oscilaciones de gran amplitud se hace necesario un estudio que considere las no linealidades estructurales y de carga provenientes de los grandes desplazamientos. En este caso, la integración temporal directa de las ecuaciones diferenciales de equilibrio viene a ser la mas adecuada ya que posibilita la representación de estos efectos no-lineales. La solución a traves de la integración temporal puede ser tambien obtenida tambien empleandose la superposición modal.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO

En mecánica de los sólidos la descripción referencial es generalmente la mas adecuada forma de representación de las ecuaciones de movimiento. La configuración en un determinado instante es utilizada como referencia para los demas: descripción Lagrangeana. De esta manera, en la formulación Lagrangeana Total todas las grandezas estáticas y cinemáticas son referenciadas a la configuración inicial indeformada de la estructura, siendo que en la formulación Lagrangeana Actualizada las grandezas estáticas y cinemáticas son referenciadas a la configuración de la estructura en el instante inmediatamente anterior al instante considerado. Ambas son formulaciones equivalentes, diferenciandose esencialmente en la configuración de referencia, lo que envuelve la utilización de tensores constitutivos apropiados para cada caso. La principal ventaja al utilizarse la formulación Lagrangeana actualizada viene del hecho de que las expresiones que determinan las matrices y vectores del elemento en relación al sistema local son matematicamente mas simples de que las expresiones correspondientes para

el sistema local fijo de la formulación Lagrangeana Total (Mourelle, 1993).

En ambas abordajes, con el vector incremento de desplazamiento - \mathbf{U} - son obtenidos los incrementos de las deformaciones y los incrementos de las componentes de deformación y de tensión, empleándose las ecuaciones de compatibilidad geométrica y constitutivas del material, respectivamente.

En el presente trabajo se utiliza una abordaje Lagrangeana co-rotacionada (Lustosa, 2000; Mourelle, 1993). En esta formulación las grandezas estáticas y cinemáticas del cuerpo considerado son referenciadas a una configuración indeformada obtenida de transformaciones de movimiento de cuerpo rígido asociadas a la traslación y a la rotación de la configuración indeformada para una posición muy próxima de aquella en el instante t , como está mostrado en la figura 3.1. Así, un nuevo sistema de referencia es definido para cada elemento de tal forma que las deformaciones obtenidas, referenciadas a este referencial, son –en una forma aproximada– libres de los movimientos de cuerpo rígido asociados. La formulación Lagrangeana co-rotacionada es esencialmente idéntica a la formulación Lagrangeana total, removidos los movimientos de cuerpo rígido, por también emplear una configuración de referencia indeformada (Mourelle, 1993). Algunas simplificaciones en la formulación Lagrangeana actualizada son utilizadas ya que el sistema de referencia indeformado se mueve juntamente con el elemento. Por lo tanto, las siguientes características la distinguen de las formulaciones Lagrangeanas tradicionales:

- a) Las tensiones y deformaciones acumuladas en el cuerpo, referenciadas a este sistema de ejes co-rotacionados, no necesitan ser obtenidas en incrementos y

contabilizadas a lo largo del análisis, pero si integralmente calculadas a cada paso de tiempo.

- b) Para cada elemento en la configuración final deformada referenciada a la configuración indeformada co-rotacionada, la adopción del tensor de deformación de Cauchy en la formulación del elemento se hace de forma consistente y independiente del tamaño del incremento de desplazamiento porque las deformaciones admitidas son infinitesimales y los movimientos de cuerpo rígido son removidos (Mourelle, 1993).

Estas características hacen con que esta formulación co-rotacionada sea menos susceptible al tamaño del incremento de desplazamiento nodales de la estructura, lo que posibilita que sean empleados intervalos de tiempos mayores en el análisis dinámico (Mourelle, 1993).

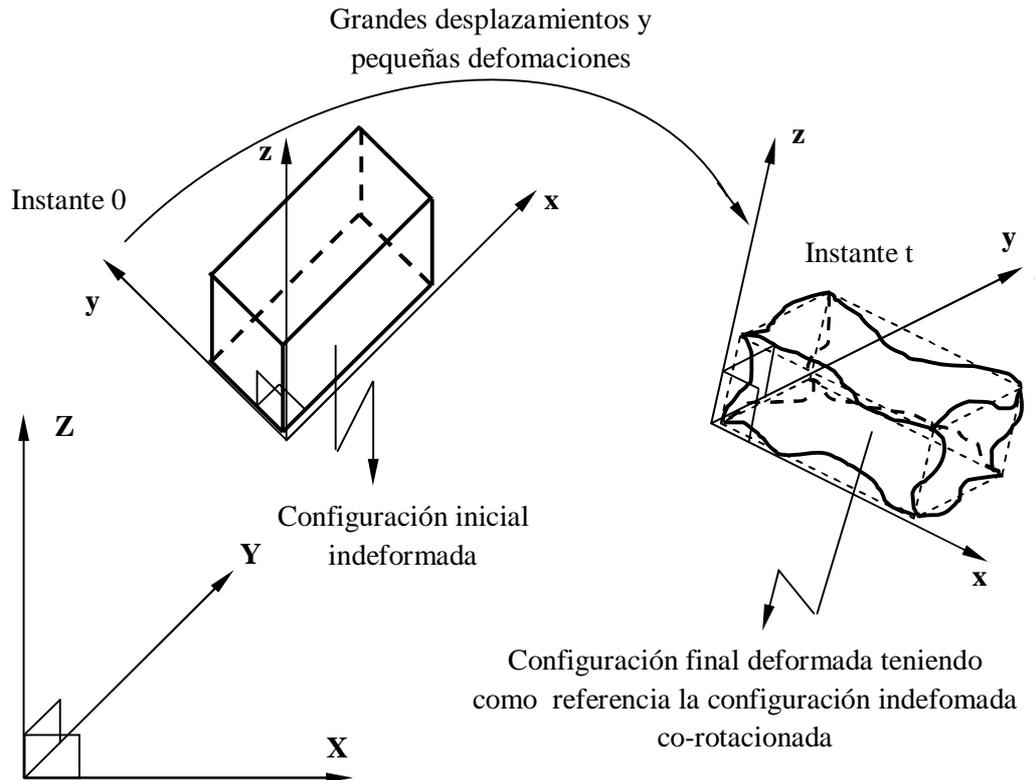


Figura 3.1 Descripción del movimiento de un cuerpo usando un sistema de coordenadas convectivo co-rotacionado (x, y, z)

3.3 ECUACIONES DE EQUILIBRIO

La ecuación representativa de las sucesivas configuraciones de equilibrio de una estructura genérica deformable sujeta a grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones, cuya evolución temporal es mostrada en la figura 3.2 y cuyo material tiene comportamiento lineal, puede ser obtenida de la estacionaridad de un potencial π , en relación a sus variables de estado. El potencial para un instante genérico t , presentase en la forma:

$$\pi = \int_0^t \left(E_{\text{def}} - E_{\text{cin}} - W_{\text{ext}}^{\text{B}} - W_{\text{ext}}^{\text{S}} - W_{\text{ext}}^{\text{C}} \right) dt \quad (3.3.1)$$

cuyos terminos de la integral corresponden a:

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_{\forall} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\tau} d\forall : \text{Energia de deformaci3n el3stica, donde } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ y } \boldsymbol{\tau} \text{ son,}$$

respectivamente, los vectores de deformaciones y de

tensiones definidos puntualmente en la estructura;

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_{\forall} \rho \mathbf{U}^T \mathbf{U} d\forall : \text{Energia cin3tica, donde } \rho \text{ es la funci3n distribuci3n}$$

de masa espec3fica en el volumen de la estructura;

$$W_{\text{ext}}^{\text{B}} = \int_{\forall} \mathbf{U}^T \mathbf{f}^{\text{B}} d\forall : \text{Trabajo de las fuerzas del cuerpo } \mathbf{f}^{\text{B}} \text{ distribuidas en}$$

el volumen de la estructura;

$$W_{\text{ext}}^{\text{S}} = \int_{\text{S}} \mathbf{U}^{\text{S}T} \mathbf{f}^{\text{S}} d\text{S} : \text{Trabajo de las fuerzas de superficie } \mathbf{f}^{\text{S}} \text{ distribuidas}$$

en la superficie de la estructura;

$$W_{\text{ext}}^{\text{C}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{U}_{\text{C}}^{(i)T} \mathbf{R}_{\text{C}}^{(i)} : \text{Trabajo de las fuerzas concentradas } \mathbf{R}_{\text{C}}^{(i)} \text{ actuantes}$$

en los puntos $i = 1 \dots m$.

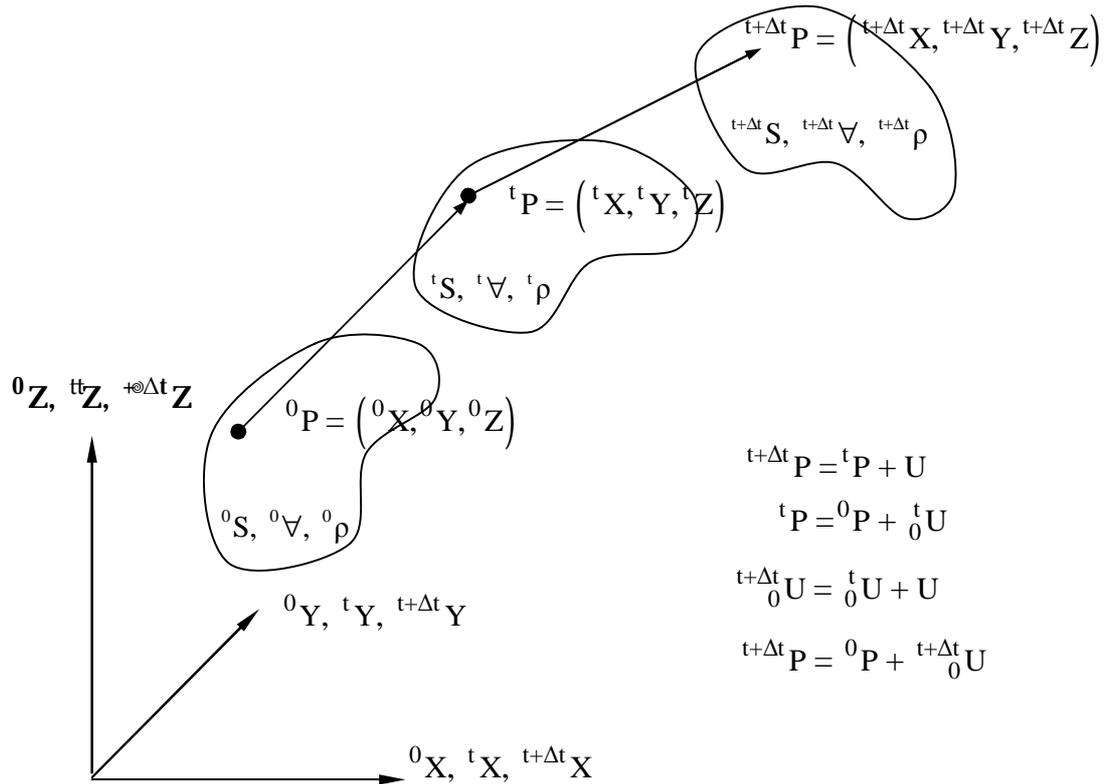


Figura 3.2 Movimiento de un cuerpo deformable en un sistema de coordenadas estacionario

La representación de la energía de deformación de la estructura en función de los desplazamientos de la estructura necesita que sean conocidas:

- **Ecuaciones de compatibilidad geométrica**, que relacionan el campo de desplazamientos al estado de deformaciones en el cuerpo. En la condición de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones son consideradas relaciones lineales. Sin embargo, en el caso mas general, dos tipos de no linealidades pueden ocurrir, de acuerdo con el grado de generalidad exigido del problema:

a) Grandes desplazamientos y grandes rotaciones, pero con pequeñas deformaciones;

b) Grandes desplazamientos, grandes rotaciones y grandes deformaciones.

En el presente estudio, análisis de estructuras flexibles unidimensionales, el primero es el caso mas adecuado, debido a las dimensiones relativas del cuerpo. El material es sometido a deformaciones infinitesimales medidas en un sistema de coordenadas convectivo fijo a la geometria de cuerpo, mientras este sistema de referencia sufre grandes desplazamientos y rotaciones de cuerpo rígido. Las relaciones de compatibilidad geométrica son entonces divididas en dos parcelas correspondientes a terminos lineales \mathbf{e} y no-lineales \mathbf{h} de la deformación en la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta} \quad (3.3.2)$$

Expresiones de esas parcelas de deformación expresas en función de los desplazamientos estan explicitadas en la sección 3.6.

- **Ecuaciones constitutivas del material**, que relacionan las deformaciones infinitesimales a las tensiones correspondientes en un punto. En este caso

$$\boldsymbol{\tau} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.3.3)$$

donde $\underline{\mathbf{C}}$ es la matriz de elasticidad o constitutiva del material. Para el comportamiento del material en el regimen elástico, la matriz constitutiva independe del estado de deformaciones del cuerpo. Al contrario, para el material con comportamiento no-lineal, esta matriz es función de las componentes de deformación o de sus derivadas temporales.

De esta manera, sustituyendose la ecuación (3.3.3) en la ecuación (3.3.1) e imponiendose la condición de estacionaridad de ese potencial se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^t \int_{\forall} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon} d\forall dt - \int_0^t \int_{\forall} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\sigma} d\forall dt - \int_0^t \int_{\forall} \rho \delta \mathbf{U} \mathbf{f}^B d\forall dt - \\ & - \int_0^t \int_S \rho \delta \mathbf{U}^S \mathbf{f}^S dS dt - \int_0^t \sum_{i=1}^m \delta \mathbf{U}_C^{(i)T} \mathbf{R}_C^{(i)} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Empleandose las ecuaciones constitutivas del material, despues algunas manipulaciones algebraicas en el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.3.4), las cuales estan especificadas en (Lustosa, 2000), y imponiendose la condición de estacionaridad de ese potencial ($\delta\pi=0$) se obtiene

$$\int_{\forall} [\rho \boldsymbol{\sigma}^T \delta \mathbf{U}]_0^t d\forall = 0 \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{\forall} \rho \delta \mathbf{U}^T \boldsymbol{\sigma} d\forall + \int_{\forall} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\tau} d\forall - \int_{\forall} \rho \delta \mathbf{U}^T \mathbf{f}^B d\forall - \int_S \rho \delta \mathbf{U}^S \mathbf{f}^S dS - \\ - \sum_{i=1}^m \delta \mathbf{U}_C^{(i)T} \mathbf{R}_C^{(i)} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

La ecuación (3.3.5) representa las condiciones de contorno temporales y la ecuación (3.3.6) la condición de equilibrio del problema.

3.3.1 Descomposición Incremental y Linealización

En esta sección es presentada la formulación del equilibrio descrito en la ecuación (3.3.6) en el instante $t+\Delta t$ utilizandose la configuración de la estructura en el instante t como referencia (formulación Lagrangeana Actualizada).

La ecuación constitutiva representada en el instante $t+\Delta t$ para el regimen elástico del material, asume la forma

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \left[\begin{matrix} {}^{t+\Delta t} \\ {}^t \end{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} + {}^t \boldsymbol{\varepsilon} \right] = \underline{\mathbf{C}} \cdot {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} + {}^t \boldsymbol{\tau} \quad (3.3.7)$$

donde el índice inferior en el vector de deformación indica el instante correspondiente a la configuración de referencia y los índices superiores indican los instantes en que las deformaciones y tensiones estan representadas. Siguiendose la nomenclatura propuesta en (Bathe, 1996) se tiene para el incremento de la deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{matrix} {}^{t+\Delta t} \\ {}^t \end{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.3.8)$$

Reescribiendose la ecuación de equilibrio (3.3.6) en la forma incremental, usandose la notación simplificada en (3.3.8) y, ademas de eso, considerandose las siguientes aproximaciones:

$$\underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{e} \quad \text{y} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \mathbf{e},$$

substituyendo este resultado en el segundo término de la ecuación

(3.3.6) resulta en la siguiente forma incremental linealizada

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_V}^t \rho \cdot \delta \mathbf{U}^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{B} \cdot d^t \forall + \int_{t_V} \delta \mathbf{e}^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{e} \cdot d^t \forall + \int_{t_V} \delta \boldsymbol{\eta}^T \cdot {}^t \boldsymbol{\tau} \cdot d^t \forall = \\
 & = \int_{t_V} \delta \mathbf{U}^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B \cdot d^t \forall + \int_{t_S} \delta \mathbf{U}^{S^T} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S \cdot d^t S + \sum_{i=1}^m \delta \mathbf{U}_C^{(i)^T} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_C^{(i)} - \\
 & - \int_{t_V} \delta \mathbf{e}^T \cdot {}^t \boldsymbol{\tau} \cdot d^t \forall
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

3.4 DISCRETIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA

En esta sección son presentadas: la metodología de discretización de la estructura, la formulación del elemento utilizado en el presente estudio y las matrices resultantes de la imposición de la condición de equilibrio de la estructura discretizada.

La discretización de la estructura resulta de la subdivisión en elementos interconectados por puntos nodales en los contornos de los elementos. En la figura 3.3 están mostradas las configuraciones de un elemento de 2 nodos en los instantes t y $t+\Delta t$ a partir de la configuración indeformada co-rotacionada del elemento en el instante t . Para indicar la utilización del sistema co-rotacionado como referencia de las grandezas presentadas en este trabajo, el índice inferior izquierdo aparece entre paréntesis.

El campo de desplazamientos a lo largo de la longitud de un elemento (m) en el instante $t + \Delta t$ medido a partir de la configuración indeformada co-

rotacionada en el instante t es función de los desplazamientos nodales

${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(m)}$. Así, para un elemento (m) :

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(m)}(x,y,z) = {}^t \mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{u}^{(m)} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(m)}(x,y,z) \left({}^t \hat{\mathbf{u}}^{(m)} + \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \right) \quad (3.4.1)$$

donde $\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(m)}$ es la matriz de interpolación de los desplazamientos, ${}^t \hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ es el vector de los desplazamientos nodales del elemento (m) , medido a partir de la configuración indeformada co-rotacionada referenciada al instante t hasta la configuración deformada en este mismo instante, y $\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ es el vector incremento de desplazamiento ocurrido en el intervalo Δt referenciado al sistema de coordenadas co-rotacionado del elemento (m) en el instante t . Este vector contiene las variables de estado del problema a ser determinadas al imponerse la condición de equilibrio de la estructura global en el instante $t + \Delta t$.

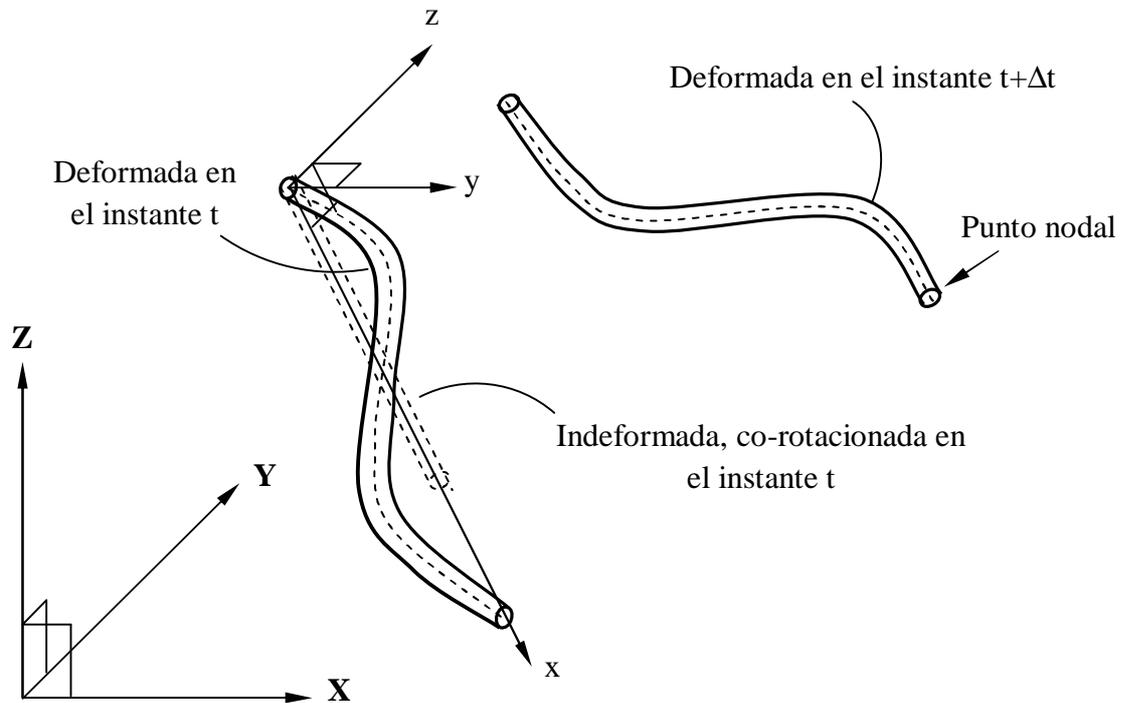


Figura 3.3 Elemento de 2 nodos en los instantes t y $t + \Delta t$, representados en el sistema de coordenadas co-rotacionado correspondiente al instante t

Estructuras unidimensionales presentan rigidez a momentos flectores y torcionales, así como a esfuerzos cortantes y de tracción. La rigidez asociada a cada uno de esos esfuerzos es modelada sobre las siguientes hipótesis fundamentadas en la observación del problema específico de ingeniería:

- El material es lineal elástico.
- En el cuerpo ocurren apenas pequeñas deformaciones.
- La no linealidad geométrica es resultante de:
 - a) Grandes desplazamientos donde la rigidez de la estructura es dependiente de la configuración geométrica a cada instante.

- b) Acoplamiento entre los mecanismos de rigidez a la tracción e a la flexión. Mismo para desplazamientos relativamente pequeños, pero no infinitesimales, la tracción tiene efecto enrijecedor sobre los desplazamientos transversales.
- Las secciones transversales se mantienen planas sobre acción de cizallamiento causado por torsión. Esta hipótesis solo implica en simplificación cuando las secciones transversales no son circulares.
 - Secciones rectas de la estructura inicialmente planas permanecen planas y perpendiculares a la línea central cuando sobre la flexión (figura 3.4) – modelo de viga de Euler-Bernouille (Bathe, 1996).

Por esta hipótesis, la presencia de deformaciones cizallantes causadas por esfuerzos cortantes es desconsiderada. En estructuras esbeltas, donde es grande la razón entre longitud y altura, esa hipótesis puede ser aplicada sin pérdida de precisión de los resultados.

Para representarse la respuesta de la estructura de un riser o ducto, objeto de este trabajo, se emplea el elemento unidimensional de viga con dos nodos mostrado en la figura 3.5, de longitud inicial indeformado L . Considerándose las hipótesis especificadas en esta sección, el equilibrio del elemento queda entonces, determinado en función de las variables de estado representadas en el sistema de coordenadas co-rotacionado y correspondientes a los desplazamientos y rotaciones de la línea neutra (Lustosa, 2000):

1. $v^{(m)}(x)$: es la distribución, a lo largo del elemento (m), de los desplazamientos transversales de la línea neutra, en la dirección y ;

2. $w^{(m)}(x)$: es la distribución, a lo largo del elemento (m), de los desplazamientos transversales de la línea neutra, en la dirección z;
3. $u^{(m)}(x)$: es la distribución, a lo largo del elemento (m), de los desplazamientos axiales de la línea neutra;
4. $\theta^{(m)}(x)$: es la distribución, a lo largo del elemento (m), de la rotación de la sección recta alrededor del eje x (torción).

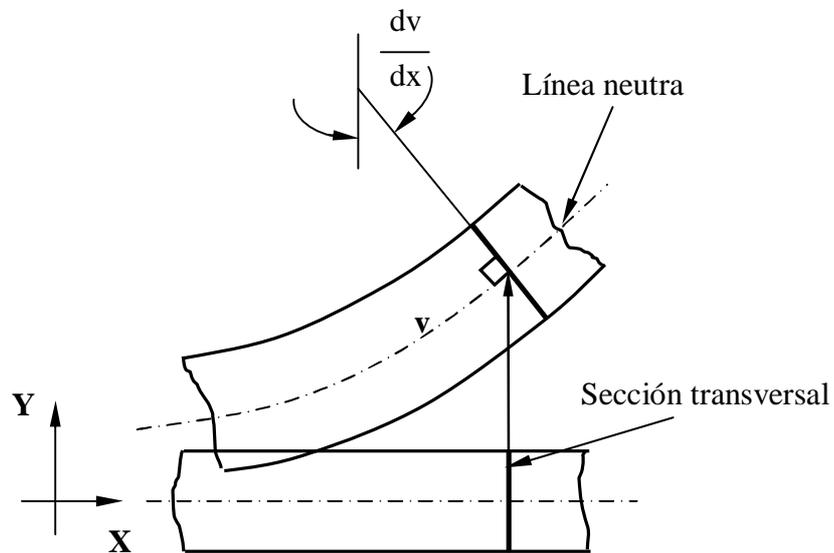


Figura 3.4 Cinemática de deformación de la estructura unidimensional

Estos campos de desplazamiento son interpolados a partir de los valores nodales de los desplazamientos y rotaciones mostrados en la figura 3.5, empleándose las funciones de interpolación de Hermite (orden 3) para las deflexiones y funciones lineales para los desplazamientos axiales y rotacionales debidos a la torsión. Así, se tiene:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(m)}(x) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_x^1 \Phi_1^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_x^2 \Phi_2^{(m)}(x)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(m)}(x) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_y^1 \Phi_3^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_y^2 \Phi_4^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t} \beta_z^1 \Phi_5^{(m)}(x) - {}^{t+\Delta t} \beta_z^2 \Phi_6^{(m)}(x)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{w}^{(m)}(x) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_z^1 \Phi_3^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_z^2 \Phi_4^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t} \beta_y^1 \Phi_5^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t} \beta_y^2 \Phi_6^{(m)}(x)$$

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(m)}(x) = {}^{t+\Delta t} \beta_x^1 \Phi_1^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t} \beta_x^2 \Phi_2^{(m)}(x) \quad (3.4.2)$$

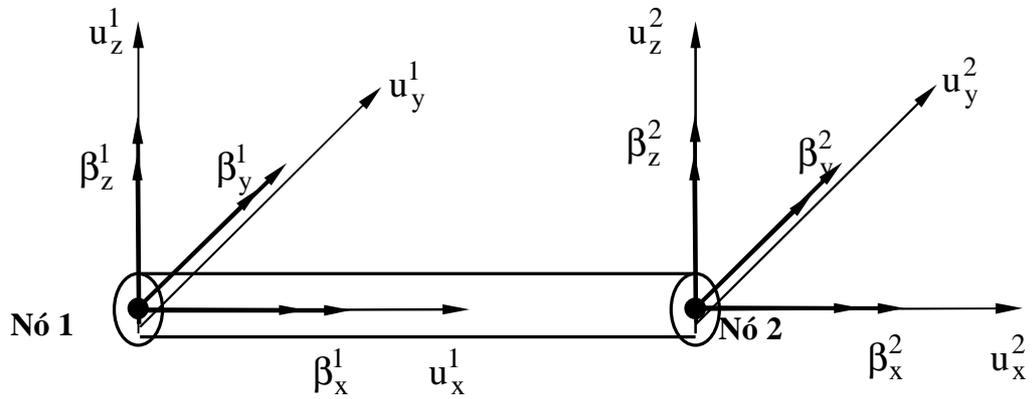


Figura 3.5 Elemento (m) y las variables de estado nodales

donde:

$\beta_{x,y,z}^{1,2}$ son las rotaciones nodales asociadas a los nodos 1 y 2 en las

direcciones x, y, z del sistema de coordenadas co-rotacionado;

$$\Phi_1^{(m)}(x) = 1 - a; \quad \Phi_2^{(m)}(x) = a$$

$$\Phi_3^{(m)}(x) = 1 - 3a^2 + 2a^3; \quad \Phi_4^{(m)}(x) = 3a^2 + 2a^3$$

$$\Phi_5^{(m)}(x) = x - 2b + a.b; \Phi_6^{(m)}(x) = b - a.b \quad (3.4.3)$$

$$a = x/L^{(m)} \quad y \quad b = x^2/L^{(m)}$$

en que $L^{(m)}$ es la longitud del elemento (m). Matricialmente se tiene de la ecuación (3.4.1) para la dirección x co-rotacionada

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(m)}(x) = \underline{\mathbf{H}}^{(m)}(x) \cdot {}^t \hat{\mathbf{u}}^{(m)}(x) \quad (3.4.4)$$

donde:

$$\underline{\mathbf{H}}^{(m)} = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3a^2+2a^3 & 0 & 0 & 0 & x-2b+ab & 0 & 3a^2-2a^3 & 0 & 0 & 0 & -b+ab \\ 0 & 0 & 1-3a^2+2a^3 & 0 & -x+2b-ab & 0 & 0 & 0 & 3a^2-2a^3 & 0 & b-ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

que es la matriz de interpolación de desplazamientos nodales en el sistema coordinado convectivo.

Las relaciones de compatibilidad geométrica, entre el campo de desplazamientos definido en (3.4.4) y las deformaciones, son expresadas considerando dos parcelas, agrupandose los términos lineales y no-lineales. Para las hipótesis de cinemática de deformación del elemento, esas dos parcelas se reducen a (Lustosa, 2000):

1. Componentes lineales en la forma

$${}^{t+\Delta t} e_{xx}^{(m)}(x, yz) = \frac{d}{dx} \left({}^{t+\Delta t} u^{(m)}(x) \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left({}^{t+\Delta t} v^{(m)}(x) \right) \cdot y + \frac{d^2}{dx^2} \left({}^{t+\Delta t} w^{(m)}(x) \right) \cdot z \quad (3.4.5)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\gamma_{\theta x}^{(m)} = r \frac{d}{dx} {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\theta(x) \quad (3.4.6)$$

Donde ${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}e_{xx}^{(m)}$ es la deformación lineal en la dirección longitudinal del elemento (m) debida a la tracción y flexión, ${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\gamma_{\theta x}^{(m)}$ es la deformación cizallante debido a la torsión del elemento (m), r es la distancia radial del punto en relación al centro de la sección transversal correspondiente.

2. Componentes no-lineales debidas al estiramiento adicional de la línea neutra causada por los desplazamientos transversales ($v(x)$ y $w(x)$). Esta es obtenida de la variación de la longitud de un elemento infinitesimal en deflexión. Así, de la figura 3.6 y después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\frac{ds}{dx} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} + 2\frac{du}{dx} - 1 \right) \quad (3.4.7)$$

Tomandose

$$\xi = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + 2\frac{du}{dx} \quad (3.4.8)$$

y usando la aproximación de la expansión en serie de Taylor para los términos hasta primera orden de la función $f(\xi) = \sqrt{1+\xi}$, se obtiene

$$\sqrt{1+\xi} = 1 + \frac{1}{2}\xi$$

De esta manera, incluyendose también los efectos del desplazamiento w en la dirección z, la ecuación (3.4.7) resulta en

$$\frac{ds}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.4.9)$$

Esta ecuación presenta la medida de la deformación lineal debida al mecanismo de estiramiento de la línea central del elemento. En el lado derecho, el primer término correspondiente a la parte lineal del mecanismo de deformación considerado (ecuación 3.4.5), y el segundo término representa la correspondiente parte no-lineal, definida como

$${}^{t+\Delta t}_{(t)} \eta_{xx}^{(m)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dx} {}^{t+\Delta t}_{(t)} u \right)^2 + \left(\frac{d}{dx} {}^{t+\Delta t}_{(t)} v \right)^2 + \left(\frac{d}{dx} {}^{t+\Delta t}_{(t)} w \right)^2 \right] \quad (3.4.10)$$

que es el término cuadrático del tensor de deformación lineal de Green, cuya formulación general está presentada en (Malvern, 1969).

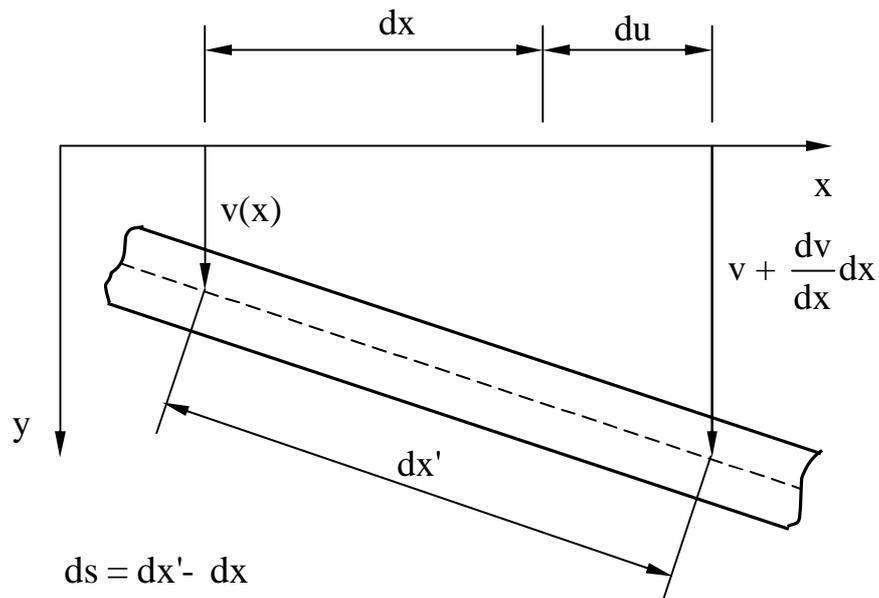


Figura 3.6 Estiramiento da línea neutra debido al desplazamiento transversal

$v(x)$ de un segmento infinitesimal

Así, la deformación quasi-lineal en el elemento (m) resulta en considerarse los resultados presentados en la ecuación (3.4.5) con las parcelas en la ecuación (3.4.10):

$${}^{t+\Delta t}_{(t)}\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{(m)}(x, y, z) = {}^{t+\Delta t}_{(t)}\mathbf{e}_{xx}^{(m)} + {}^{t+\Delta t}_{(t)}\boldsymbol{\eta}_{xx}^{(m)} \quad (3.4.11)$$

Aplicandose las ecuaciones de discretización (3.4.2) en (3.4.5), (3.4.6) y (3.4.11), se obtiene la distribución de deformaciones en el volumen del elemento en función de los desplazamientos nodales:

$${}^{t+\Delta t}_{(t)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \begin{matrix} {}^{t+\Delta t}_{(t)} \\ \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\gamma}_{x\theta} \end{array} \right] \end{matrix} = \underline{\mathbf{B}}_L^{(m)} \cdot {}^{t+\Delta t}_{(t)}\hat{\mathbf{u}}^{(m)} + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_{(t)}\hat{\mathbf{u}}^{(m)\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)\text{T}} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} \cdot {}^{t+\Delta t}_{(t)}\hat{\mathbf{u}}^{(m)} \\ 0 \end{array} \right] \quad (3.4.12)$$

En esta ecuación, la matriz deformación-desplazamiento lineal $\underline{\mathbf{B}}_L^{(m)}$ puede ser descompuesta en la siguiente forma:

$$\underline{\mathbf{B}}_L^{(m)} (2 \times 12) = \underline{\mathbf{B}}_{uL}^{(m)} + y \cdot \underline{\mathbf{B}}_{vL}^{(m)} + z \cdot \underline{\mathbf{B}}_{wL}^{(m)} + r \cdot \underline{\mathbf{B}}_{\theta L}^{(m)} \quad (3.4.13)$$

mientras,

$$\underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} (3 \times 12) = \left[\begin{array}{c} \frac{d}{dx} H_u^{(m)} \\ \frac{d}{dx} H_v^{(m)} \\ \frac{d}{dx} H_w^{(m)} \end{array} \right] \quad (3.4.14)$$

$$\mathbf{H}_u^{(m)} = [\Phi_1^{(m)}(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad \Phi_2^{(m)}(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{H}_v^{(m)} = [0 \quad \Phi_3^{(m)}(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Phi_5^{(m)}(x) \mid 0 \quad \Phi_4^{(m)}(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\Phi_6^{(m)}(x)]$$

$$\mathbf{H}_w^{(m)} = [0 \quad 0 \quad \Phi_3^{(m)}(x) \quad 0 \quad -\Phi_5^{(m)}(x) \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad \Phi_4^{(m)}(x) \quad 0 \quad \Phi_6^{(m)}(x) \quad 0]$$

$$\mathbf{H}_\theta^{(m)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \Phi_1^{(m)}(x) \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Phi_2^{(m)}(x) \quad 0 \quad 0]$$

Con los resultados en (3.4.4) se pueden explicitar las ecuaciones (3.4.13) y

(3.4.14):

$$\underline{\mathbf{B}}_{uL}^{(m)} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline L^{(m)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L^{(m)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.4.15)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{vL}^{(m)} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & \left(-\frac{6}{L^{(m)^2}} + \frac{12x}{L^{(m)^3}}\right) & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-4}{L^{(m)}} + \frac{6x}{L^{(m)^2}}\right) & 0 & \left(\frac{6}{L^{(m)^2}} - \frac{12x}{L^{(m)^3}}\right) & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{L^{(m)}} + \frac{6x}{L^{(m)^2}}\right) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.4.16)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{wL}^{(m)} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & \left(\frac{6}{L^{(m)^2}} + \frac{12x}{L^{(m)^3}}\right) & 0 & \left(\frac{4}{L^{(m)}} - \frac{6x}{L^{(m)^2}}\right) & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{6}{L^{(m)^2}} - \frac{12x}{L^{(m)^3}}\right) & 0 & \left(\frac{2}{L^{(m)}} - \frac{6x}{L^{(m)^2}}\right) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.4.17)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{\theta L}^{(m)} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{L^{(m)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L^{(m)}} & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.4.18)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline L^{(m)} & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & L^{(m)} & 0 & b_1 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & b_3 \end{array} \right] \quad (3.4.19)$$

Donde:

$$b_1 = 6 \left(\frac{x}{L^{(m)^2}} - \frac{x^2}{L^{(m)^3}} \right); \quad b_2 = 1 - 4 \frac{x}{L^{(m)}} + 3 \frac{x^2}{L^{(m)^2}}; \quad b_3 = 2 \frac{x}{L^{(m)}} - 3 \frac{x^2}{L^{(m)^2}}$$

Substituyendo el resultado de (3.4.1) en la ecuación (3.4.12), se descompone el vector de las deformaciones en dos parcelas, siendo incógnita la correspondiente al incremento de deformación. De esta manera, se tiene:

$${}^{t+\Delta t}_{(t)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = {}^t_{(t)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \quad (3.4.20)$$

Donde:

$${}^t_{(t)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \underline{\mathbf{B}}_L^{(m)} \cdot {}^t_{(t)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} {}^t_{(t)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)T} \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} \cdot {}^t_{(t)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \\ 0 \end{array} \right]$$

$${}^{t+\Delta t}_{(t)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} = {}^t_{(t)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} + \mathbf{u}^{(m)} \quad \text{y}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \mathbf{e}^{(m)} + \boldsymbol{\eta}^{(m)} = \underline{\mathbf{B}}_L^{(m)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} + \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)T} \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} \cdot {}^t_{(t)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)T} \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \\ 0 \end{array} \right]$$

(3.4.21)

Después de las operaciones algebraicas para todos los términos de la ecuación (3.3.9), se llega a la siguiente forma, con todos los términos representados en el sistema co-rotacionado del respectivo elemento:

$$\begin{aligned}
& \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t_{\nabla^{(m)}}}^t \rho^{(m)} \left(\mathbf{H}_u^{(m)T} \cdot \mathbf{H}_u^{(m)} + \mathbf{H}_v^{(m)T} \cdot \mathbf{H}_v^{(m)} + \mathbf{H}_w^{(m)T} \cdot \mathbf{H}_w^{(m)} + r^2 \cdot \mathbf{H}_\theta^{(m)T} \cdot \mathbf{H}_\theta^{(m)} \right) d^t \nabla^{(m)t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}^{(m)} \right) + \\
& + \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t_{\nabla^{(m)}}}^t \left(\underline{\mathbf{B}}_{u_L}^{(m)T} \cdot \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{B}}_{u_L}^{(m)} + y^2 \underline{\mathbf{B}}_{v_L}^{(m)T} \cdot \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{B}}_{v_L}^{(m)} + z^2 \underline{\mathbf{B}}_{w_L}^{(m)T} \cdot \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{B}}_{w_L}^{(m)} + r^2 \underline{\mathbf{B}}_{\theta_L}^{(m)T} \cdot \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{B}}_{\theta_L}^{(m)} \right) d^t \nabla^{(m)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \right) + \\
& + \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t_{\nabla^{(m)}}}^t \sigma_{xx}^{(m)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)T} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} d^t \nabla^{(m)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \right) = \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t_{\nabla^{(m)}}}^t \mathbf{H}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B d^t \nabla^{(m)} \right) + \\
& \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t_{S^{(m)}}}^t \mathbf{H}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S d^t S^{(m)} \right) + \\
& \sum_i \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}_C^{(i)} \right) - \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \left(\int_{t_{\nabla^{(m)}}}^t \underline{\mathbf{B}}_L^{(m)T} \cdot {}^t \boldsymbol{\tau}^{(m)} d^t \nabla^{(m)} \cdot + \int_{t_{\nabla^{(m)}}}^t \sigma_{xx}^{(m)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)T} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} d^t \nabla^{(m)} \cdot {}^t \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

Donde:

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

es la matriz constitutiva. E y G son respectivamente el módulo de Young y de cizallamiento del material. Utilizandose la condición de continuidad entre los elementos y transformandose los resultados de las integrales para coordenadas globales, se obtienen de los términos de la ecuación (3.4.22), las matrices de masa, de rigidez elástica, de rigidez geométrica, los vectores de esfuerzos externos y de esfuerzos internos asociados a la estructura global, los cuales son mostrados a seguir.

3.5 MATRIZES Y VECTORES DE LOS ESFUERZOS EXTERNOS E INTERNOS

En consideración a la hipótesis de que ocurren en el cuerpo pequeñas deformaciones entre los instantes correspondientes al incremento temporal se pueden despreciar las variaciones geométricas en los elementos. Así, se tiene:

$${}^t\mathbf{S}^{(m)} = \mathbf{S}^{(m)}, \quad {}^t\mathbf{V}^{(m)} = \mathbf{V}^{(m)}, \quad {}^t\rho^{(m)} = \rho^{(m)}$$

que aplicadas en (3.4.22) resultan en simplificaciones en las evaluaciones numéricas de las respectivas partes.

a) Matriz de Masa

Considerandose la masa específica del material de la estructura constante en el volumen del elemento (m), se obtiene a partir del primer término de la ecuación (3.4.22) la matriz de masa de la estructura (Lustosa, 2000):

$$\underline{\hat{M}}^{(m)} = \rho^{(m)} \left(A^{(m)} \int_0^{L^{(m)}} (H_u^{(m)T} H_u^{(m)} + H_v^{(m)T} H_v^{(m)} + H_w^{(m)T} H_w^{(m)}) dx + I_p^{(m)} \int_0^{L^{(m)}} H_\theta^{(m)T} H_\theta^{(m)} dx \right) \quad (3.5.1)$$

donde $A^{(m)}$ y $I_p^{(m)}$ son respectivamente área y momento polar de inercia de la sección transversal.

b) Masa Adicional

Las fuerzas del fluido sobre el elemento resultan de la adición de una fuerza inercial, en que una de las parcelas actúa en fase con la aceleración del fluido, y de una fuerza de arrastre, en fase con la velocidad del fluido. La

parcela inercial de la fuerza es compuesta de dos componentes representando la fuerza aplicada por la masa de un fluido acelerado que pasa por un cilindro fijo y la fuerza inercial provocada por un cilindro acelerado en un fluido en reposo. Mientras la primera es una acción aplicada, la segunda es una resistencia inercial. Esta resistencia inercial puede ser interpretada físicamente como una masa adicional correspondiente a un volumen de agua que debe ser acelerado juntamente con la masa de la estructura (Gonzales, 1990). Por tanto, la masa adicional es proporcional a la aceleración normal relativa entre las partículas del fluido en contacto con la estructura. Una característica importante de la masa adicional es la de resultar en la dirección normal a los elementos de cables, barras o ductos. Así, la masa adicional por unidad de longitud de una estructura esbelta de sección transversal circular de radio externo r_o , sumersa en un fluido de masa específica ρ_w , es considerada moviéndose en la dirección perpendicular al eje, es dada por (Lustosa, 2000)

$$m_a = \rho_w \cdot \pi \cdot r_o^2 \quad (3.5.2)$$

Utilizándose la ecuación (3.5.2) para modelar la inercia adicional aplicada a los desplazamientos transversales del elemento (m), se obtiene la formulación de la matriz de masa adicional del elemento (m) (Lustosa, 2000) en la forma:

$$\hat{M}_a^{(m)} = m_a^{(m)} \left(\int_0^{L^{(m)}} \mathbf{H}_v^T \mathbf{H}_v dx + \int_0^{L^{(m)}} \mathbf{H}_w^T \mathbf{H}_w dx \right) \quad (3.5.3)$$

El efecto de masa adicional es por lo tanto incorporado en la análisis adicionandose a la matriz de masa de la estructura (ducto o *riser*) la matriz $\hat{\underline{M}}_a$ asociada a las componentes de la aceleración de los puntos nodales a lo largo de la línea central, resultando en la matriz de masa consistente total del elemento.

c) Matriz de Rigidez Elástica

De la integración en el área del elemento del segundo término de la ecuación (3.4.22), se obtiene

$$\hat{\underline{K}}_L^{(m)} = \int_0^{L^{(m)}} \left(A^{(m)} \underline{B}_{u_L}^{(m)T} \underline{C} \underline{B}_{u_L}^{(m)} + I_{zz}^{(m)} \underline{B}_{v_L}^{(m)T} \underline{C} \underline{B}_{v_L}^{(m)} + I_{yy}^{(m)} \underline{B}_{w_L}^{(m)T} \underline{C} \underline{B}_{w_L}^{(m)} + I_P \underline{B}_{\theta_L}^{(m)T} \underline{C} \underline{B}_{\theta_L}^{(m)} \right) dx \quad (3.5.4)$$

$$\text{donde } I_{zz} = \int_{A^{(m)}} y^2 dA, \quad I_{yy} = \int_{A^{(m)}} z^2 dA \quad \text{e} \quad I_P = \int_{A^{(m)}} r^2 dA$$

d) Matriz de Rigidez Geométrica

El enrijecimiento de la estructura debido a la tensión axial (*stress stiffening*) o enrijecimiento geométrico (*geometric stiffening*), es debido al estado de tensiones (resultante de la carga de tracción). Este efecto de enrijecimiento se vuelve predominante en estructuras esbeltas cuya rigidez a flexión es pequeña en relación a la rigidez axial, como ocurre, generalmente, en cables, ejes delgados y placas. El efecto del enrijecimiento debido a la tensión axial es obtenido en el análisis por el método dos elementos finitos a través de la Matriz de Enrijecimiento Geométrica, adicionada a la usual matriz de rigidez elástica (*geometric stiffening matrix*) (Rodrigues da Silveira, 1992).

Analogamente a la obtención de la matriz de rigidez elástica del material del elemento, la matriz de rigidez geométrica resulta del trabajo interno realizado cuando el elemento es sometido a flexión combinada con tracción, representada por el tercer término de la ecuación (3.4.22),

$${}^t \hat{\mathbf{K}}_G^{(m)} = \mathbf{A}^{(m)} \int_0^{L^{(m)}} {}^t \sigma^{(m)} \mathbf{B}_{NL}^{(m)T} \mathbf{B}_{NL}^{(m)} dx \quad (3.5.5)$$

donde ${}^t \sigma^{(m)}$ es la tensión normal debida al esfuerzo de tracción en el instante t , cuyo valor en los puntos nodales es evaluado a partir de la medida de elongación de los elementos vecinos al elemento (m) (Lustosa, 2000):

$${}^t \sigma_{(1)}^{(m)} = \frac{E}{2} \left(\frac{\left(L^{(m-1)} - L_0^{(m-1)} \right)}{L_0^{(m-1)}} + \frac{\left(L^{(m)} - L_0^{(m)} \right)}{L_0^{(m)}} \right)$$

$${}^t \sigma_{(2)}^{(m)} = \frac{E}{2} \left(\frac{\left(L^{(m)} - L_0^{(m)} \right)}{L_0^{(m)}} + \frac{\left(L^{(m+1)} - L_0^{(m+1)} \right)}{L_0^{(m+1)}} \right) \quad (3.5.6)$$

donde $L_0^{(\dots)}$ y $L^{(\dots)}$ son las longitudes del elemento, indicado en el índice superior, en la configuración indeformada y en el instante t , respectivamente. Se considera también que las tensiones normales longitudinales (causadas por esfuerzos de tracción) varían linealmente a lo largo del elemento. Se obtiene para el elemento (m) la distribución de tensiones en la forma:

$${}^t \sigma^{(m)}(x) = \left({}^t \sigma_{(1)}^{(m)} \cdot \left(1 - \frac{x}{L^{(m)}} \right) + {}^t \sigma_{(2)}^{(m)} \cdot \frac{x}{L^{(m)}} \right) \quad 0 \leq x \leq L^{(m)} \quad (3.5.7)$$

que al substituirse en la ecuación (3.5.5) define la matriz de rigidez geométrica utilizada en el presente trabajo.

e) **Vector de Esfuerzos Externos**

El trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo y de superficie del elemento es equivalente al trabajo realizado por el vector de esfuerzos externos nodales equivalentes representado en el sistema de coordenadas del elemento. Los esfuerzos equivalentes son directamente obtenidos del cuarto al sexto término de la ecuación (3.4.22) en la forma

$${}^{t+\Delta t} \hat{\underline{R}}^{(m)} = \int_{\underline{V}^{(m)}} \underline{\underline{H}}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{f}^B d\underline{V}^{(m)} + \int_{\underline{S}^{(m)}} \underline{\underline{H}}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{f}^S d\underline{S}^{(m)} + {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{R}}_C^{(i)} \quad (3.5.8)$$

donde $i = 1, 2$ (nodos del elemento (m)).

Las cargas aplicadas a la estructura y consideradas en este trabajo incluyen peso propio, empuje hidrostático, cargas concentradas, cargas distribuidas causadas por flotadores (McNamara et al., 1987), por el arrastre hidrodinámico y por el amortecimiento estructural:

- **Peso Propio**

La fuerza de cuerpo distribuida por unidad de longitud del elemento (m) es debido al peso del material de la estructura e es representada en coordenadas globais en la forma:

$$\underline{f}_P^{B(m)} = -\rho^{(m)} g A^{(m)} \mathbf{k} \quad (3.5.9)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y \mathbf{k} es el vector unitario en la dirección del eje global Z. Esta fuerza distribuida es, por conveniencia, transformada para el sistema local de coordenadas y adicionada a las fuerzas abajo presentadas en el cálculo de los esfuerzos nodales equivalentes de la ecuación (3.5.8).

- **Fluido Interno y Presión Hidrostática**

Un tubo sumergido y conteniendo fluido en su interior sufre acción de fuerzas debido al volumen del fluido externo desplazado y al peso del fluido interno. Estas fuerzas son expresadas en la forma:

$$f_b^{B(m)} = g \cdot (A_o^{(m)} \rho_o - A_i^{(m)} \rho_i) \cdot \mathbf{k} \quad (3.5.10)$$

donde A_o es el área de la sección transversal circular definida por el radio externo del ducto o *riser*; A_i es el área de la sección transversal circular definida por el radio interno del tubo flexible; ρ_o es la densidad de masa del fluido en que la estructura está sumergido (agua de mar); y ρ_i es la masa específica del fluido interno.

- **Corriente Marítima**

La corriente marítima tiene dos efectos importantes en los ductos: el arrastre hidrodinámico y las vibraciones inducidas por vórtices (VIV). Consideraciones sobre este último efecto no hacen parte del objetivo de este trabajo. Por tanto, la corriente es definida en el modelo a través de un perfil poligonal, en que son producidos valores de velocidad y ángulos de ataque correspondientes a valores de coordenada z global del

suelo marino para la superficie. Los ángulos de ataque son referidos al eje x-global y contados en el sentido anti-horario. Para cada elemento el ángulo de ataque es considerado constante y, para el caso de problemas bi-dimensionales el ángulo de ataque tiene valores 0° o 180° .

La carga de la corriente tiene carácter estático, siendo usualmente aplicada incrementalmente a la estructura. En el presente modelo, la corriente es considerada constante durante todo el análisis numérico. Las velocidades de corriente son vectorialmente sumadas a las velocidades de la onda (no consideradas en este trabajo) para en seguida ser proyectadas en la fórmula de Morison.

- **Interacción Fluido-Estructura**

Se consideran las componentes de la fuerza de arrastre hidrodinámico por unidad de longitud, actuantes en el nodo i en la dirección normal y tangencial al elemento (m). En el caso específico de *risers*, estas son caracterizadas por el escurrimiento uniforme de un fluido real viscoso con aceleración nula, incidiendo sobre un cilindro estacionario y son dadas según la ecuación de Morison, conforme (Huston, 1981; Lustosa, 2000):

$$f_{d_n}^{S^{(m,i)}} = \frac{1}{2} \rho_o D_o C_{DN}^{(m,i)} \cdot v_{r_n}^{(m,i)} \cdot \left\| v_{r_n}^{(m,i)} \right\|$$

$$f_{d_x}^{S^{(m,i)}} = \frac{1}{2} \rho_o D_o C_{DT}^{(m,i)} \cdot v_{r_x}^{(m,i)} \cdot \left\| v_{r_x}^{(m,i)} \right\| \quad (3.5.11)$$

donde $C_{DT}^{(m,i)}$ y $C_{DN}^{(m,i)}$ son los coeficientes de arrastre hidrodinámico medidos en el nodo i del elemento (m) , respectivamente correspondientes a las direcciones tangencial y normal al elemento. Estos coeficientes también dependen de la velocidad relativa del fluido en la siguiente forma, obtenida empíricamente por Webster, para *risers* (Webster, 1976):

$$C_{DN}^{(m,i)} = \begin{cases} 0.00 & \text{para } Re_N^{(m,i)} \leq 0.1 \\ 0.45 + \frac{5.93}{\left(Re_N^{(m,i)}\right)^{0.33}} & \text{para } 0.1 < Re_N^{(m,i)} \leq 400 \\ 1.27 & \text{para } 400 < Re_N^{(m,i)} \leq 10^5 \\ 0.30 & \text{para } Re_N^{(m,i)} > 10^5 \end{cases} \quad (3.5.12)$$

$$C_{DT}^{(m,i)} = \begin{cases} \frac{1.88}{\left(Re_T^{(m,i)}\right)^{0.74}} & \text{para } 0.1 < Re_T^{(m,i)} \leq 100.55 \\ 0.062 & \text{para } Re_T^{(m,i)} > 100.55 \end{cases} \quad (3.5.13)$$

donde:

$$Re_N^{(m,i)} = \frac{\rho_o D_o}{\mu} \|v_{r_n}\| \quad \text{y} \quad Re_T^{(m,i)} = \frac{\rho_o D_o}{\mu} \|v_{r_x}\|$$

son los números de Reynolds en la dos direcciones de movimiento, μ es la viscosidad cinemática del fluido, v_{r_n} y v_{r_x} son las componentes normal y tangencial de la velocidad relativa del fluido a la estructura.

La carga hidrodinámica es función de la velocidad del fluido relativamente a la estructura. Como la longitud de los elementos en el

análisis es pequeña en relación a la longitud del *riser*, la velocidad relativa entre los dos nodos del elemento es esencialmente la misma. Así, los esfuerzos por unidad de longitud del elemento (m) pueden ser aproximados por una interpolación lineal usando las ecuaciones (3.5.11) (Lustosa, 2000):

$$f_{D_n}^{S(m)}(x) = \left(1 - \frac{x}{L^{(m)}}\right) f_{D_n}^{S(m,1)} + \left(\frac{x}{L^{(m)}}\right) f_{D_n}^{S(m,2)}$$

$$f_{D_x}^{S(m)}(x) = \left(1 - \frac{x}{L^{(m)}}\right) f_{D_x}^{S(m,1)} + \left(\frac{x}{L^{(m)}}\right) f_{D_x}^{S(m,2)} \quad (3.5.14)$$

Para el caso de escurrimiento uniformemente acelerado, bi-dimensional de un fluido ideal (no viscoso) incidiendo sobre una sección circular, además de estas actúa la fuerza de inercia, por unidad de longitud, resultante de las presiones hidrostáticas con intensidad proporcional a la aceleración de la masa fluida dada por:

$$F_I = C_m \rho_o \frac{\pi D_o^2}{4} \ddot{w}$$

Donde $C_m \frac{\pi D_o^2}{4}$ es la masa (inercia) adicional resultado de la integración de las presiones actuantes en el contorno del cilindro no representando por lo tanto masa fluida.

En estructuras esbeltas donde la velocidad y la aceleración de la estructura poseen valores importantes, una modificación de la ecuación de Morison se vuelve necesaria, considerándose el efecto de la velocidad y

de la aceleración relativo, como propuesto por Berge y Penzien (Sattamini, 1992), como sigue:

$$F_o(x, t) = C_m \rho_o \frac{\pi D_o^2}{4} \ddot{v}_w + C_a \rho_o \frac{\pi D_o^2}{4} (\ddot{v}_w - \ddot{u}) + \frac{1}{2} C_D \rho_o D_o (v_w - u) \|v_w - u\| \quad (3.5.15)$$

donde:

$\|v_w - u\|$: valor absoluto de la velocidad relativa entre el fluido y la estructura;

v_w : velocidad de la partícula fluida;

\ddot{v}_w : aceleración de la partícula fluida;

u : velocidad de la estructura;

\ddot{u} : aceleración da estructura;

C_m : coeficiente de inercia;

C_a : coeficiente de masa adicional ($C_a = C_m - 1$);

C_D : coeficiente de arrastre.

Las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie estan representadas como una distribución unidimensional a lo largo del eje x del elemento (m) y, por tanto, las integrales de la ecuación (3.5.8) se reduzem a una única integral a lo largo del eje x, así

$$\int_{V^{(m)}} \underline{H}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} f^B {}^{(m)} dV^{(m)} + \int_{S^{(m)}} \underline{H}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} f^S {}^{(m)} dS^{(m)} = \int_0^{L^{(m)}} \underline{H}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} f^{(m)}(x) dx$$

(3.5.16)

donde ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}^{(m)}(\mathbf{x})$ es el sumatorio de las fuerzas distribuidas de peso, empuje, fuerzas hidrodinámicas y fuerzas ejercidas por flotadores.

f) Vector de Fuerzas Internas Acumuladas

Considerandose que ${}^t\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{B}}_L^{(m)} {}^t\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$, el último término de la ecuación (3.4.22) queda definido como:

$${}^t\hat{\mathbf{F}}^{(m)} = \left(\int_{\nabla^{(m)}} \underline{\mathbf{B}}_L^{(m)\text{T}} \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{B}}_L^{(m)} d^t\nabla^{(m)} + \int_{\nabla^{(m)}} {}^t\sigma_{xx}^{(m)} \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)\text{T}} \underline{\mathbf{B}}_{NL}^{(m)} d^t\nabla^{(m)} \right) {}^t\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$$

o aún

$${}^t\hat{\mathbf{F}}^{(m)} = \left({}^t\underline{\mathbf{K}}_L^{(m)} + {}^t\underline{\mathbf{K}}_G^{(m)} \right) {}^t\hat{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (3.5.17)$$

3.5.1 Representación en el Sistema Global

El proceso de obtención de las ecuaciones de equilibrio de la estructura discretizada requiere que las matrices y vectores de cada elemento sean representados en el sistema global de coordenadas. Esa representación es obtenida a través de transformaciones lineales de cambios de base (rotaciones) descritas en las ecuaciones a seguir:

$$\begin{aligned} {}^t\hat{\underline{\mathbf{M}}}^{(m)} &= {}^t\underline{\mathbf{T}}^{(m)\text{T}} \cdot {}^t\hat{\underline{\mathbf{M}}}^{(m)} \cdot {}^t\underline{\mathbf{T}}^{(m)} \\ {}^t\hat{\underline{\mathbf{K}}}_L^{(m)} &= {}^t\underline{\mathbf{T}}^{(m)\text{T}} \cdot {}^t\hat{\underline{\mathbf{K}}}_L^{(m)} \cdot {}^t\underline{\mathbf{T}}^{(m)} \\ {}^t\hat{\underline{\mathbf{K}}}_G^{(m)} &= {}^t\underline{\mathbf{T}}^{(m)\text{T}} \cdot {}^t\hat{\underline{\mathbf{K}}}_G^{(m)} \cdot {}^t\underline{\mathbf{T}}^{(m)} \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\underline{\mathbf{R}}}^{(m)} = {}^t\underline{\mathbf{T}}^{(m)\text{T}} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{\underline{\mathbf{R}}}^{(m)}$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{F}}^{(m)} = {}^t \mathbf{T}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{F}}^{(m)}$$

donde ${}^t \mathbf{T}^{(m)}$ es la matriz cambio de base del elemento (m) representada en el instante t, dependiente de la orientación espacial del elemento en relación al sistema de coordenadas global, en cada instante de tiempo.

3.5.2 Ecuaciones Incrementales de Equilibrio

Después de la realización de los procedimientos descritos en la sección 3.5, e imponiéndose la condición de continuidad entre elementos, se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio incremental de la estructura, discretizada en el instante $t + \Delta t$, (Bathe, 1996):

$${}^t \hat{\mathbf{M}} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}} + {}^t \hat{\mathbf{K}}_{tg} \hat{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} - {}^t \hat{\mathbf{F}} \quad (3.5.19)$$

donde ${}^t \hat{\mathbf{K}}_{tg} = {}^t \hat{\mathbf{K}}_L + {}^t \hat{\mathbf{K}}_G$.

3.6 SOLUCIÓN INCREMENTAL DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINÁMICO

En el proceso de integración directa en el tiempo pueden ser utilizadas dos diferentes tipos de técnicas numéricas: la explícita y la implícita. La primera se basa en la utilización de la condición de equilibrio en el instante actual t del análisis para obtener la respuesta de la estructura en el instante inmediatamente posterior $t+\Delta t$, y es usada extensivamente en análisis de propagación de onda. Un algoritmo explícito frecuentemente empleado en la

solución de problemas estructurales es el método de las diferencias centrales. En la integración implícita las aceleraciones, velocidades y desplazamientos para el instante $t+\Delta t$ son obtenidos utilizándose la ecuación de equilibrio referida al propio instante $t+\Delta t$. Esta es empleada, principalmente, en problemas de vibraciones estructurales donde la frecuencia de excitación es generalmente mucho menor que las frecuencias naturales de la estructura. El algoritmo implícito de gran aplicación en el análisis estructural es el de Newmark y, en este trabajo, debido a las características dinámicas del comportamiento del riser en el medio marino el segundo tipo de integración directa es utilizado.

La integración numérica temporal se basa en dos principios básicos:

- El equilibrio dinámico es satisfecho apenas en algunos instantes del intervalo de análisis espaciados de incrementos Δt . Así, en análisis numérico-temporales, de integración en el tiempo, se emplea el mismo procedimiento utilizado en el análisis estático incremental, diferenciándose en la inclusión de las fuerzas de inercia y de amortecimiento.
- Considerase la variación temporal de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en cada intervalo de tiempo Δt resultante del procedimiento de integración en el tiempo. La función temporal adoptada en el intervalo Δt , caracteriza la precisión, la estabilidad y el costo de la solución (Gonzalez, 1990).

De esta forma, el procedimiento general del método consiste en dividirse el intervalo de tiempo en estudio, 0 a t_{\max} , en n intervalos iguales a Δt y con la

integración numérica en el tiempo se obtiene una solución aproximada en los instantes $0, \Delta t, 2 \Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, t_{\max}$. El algoritmo de integración paso-a-paso permite obtenerse la solución en el instante $t + \Delta t$, conocidas las soluciones en todos los instantes anteriores de evaluación, i.e. $0, \Delta t, \dots, t$. Así, queda establecido el algoritmo a ser utilizado para la obtención de la solución en todos los puntos discretos de tiempo.

La estabilidad del método de integración directa es evaluada considerándose el comportamiento de la solución numérica para condiciones generales. Este es incondicionalmente estable cuando la estabilidad -numérica- de la solución independe del incremento temporal adoptado, no resultando en valores de difícil representación numérica, debido al acumulo de errores en la integración imprecisa de las respuestas asociadas a los modos de vibración en altas frecuencias.

3.6.1 El Método de Newmark

Com los vectores de los desplazamientos ${}^{t+\Delta t} \hat{U}$, de las velocidades ${}^{t+\Delta t} \dot{U}$ y de las aceleraciones ${}^{t+\Delta t} \ddot{U}$ de la estructura desconocidos en la ecuación de equilibrio expresada en el instante $t + \Delta t$, algunas hipótesis y/o aproximaciones son necesarias para resolverse el sistema de ecuaciones resultante. La técnica de integración temporal de Newmark pre-supone la condición de aceleración constante en el intervalo Δt , cuya integración temporal resulta en los vectores velocidad y incremento de desplazamiento en el instante $t+\Delta t$. La ecuación de equilibrio a ser empleada en la deducción del método,

siendo este implícito, debe estar referida al instante $t+\Delta t$. Para la obtención de estas funciones, el operador de integración sobre la expresión de la aceleración resulta en las siguientes aproximaciones (Lustosa, 2000; Bathe, 1996)

$${}^{t+\Delta t}\hat{U} = {}^t\hat{U} + [(1-\delta) \cdot {}^t\ddot{U} + \delta \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{U}] \cdot \Delta t \quad (3.6.1)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{U} = {}^t\hat{U} + {}^t\dot{U} \cdot \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \cdot {}^t\ddot{U} + \alpha \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \cdot \Delta t^2 \quad (3.6.2)$$

donde α y δ son los parámetros de integración característicos de la estabilidad y precisión de la integración. El método es incondicionalmente estable para los siguientes intervalos de valores numéricos: $0.5 \leq \delta \leq 1.0$ y $\alpha \geq 0.25 \cdot (\delta + 0.5)^2$ o $0.25 \leq \alpha \leq 0.56$. Al utilizarse los valores $\delta = 1/2$ y $\alpha = 1/4$, el método también se reduce al método de aceleración media constante o regla trapezoidal de integración conforme mostrado en la figura 3.7. Este es uno de los métodos implícitos más utilizados en problemas de dinámica estructural (Huang, 1987).

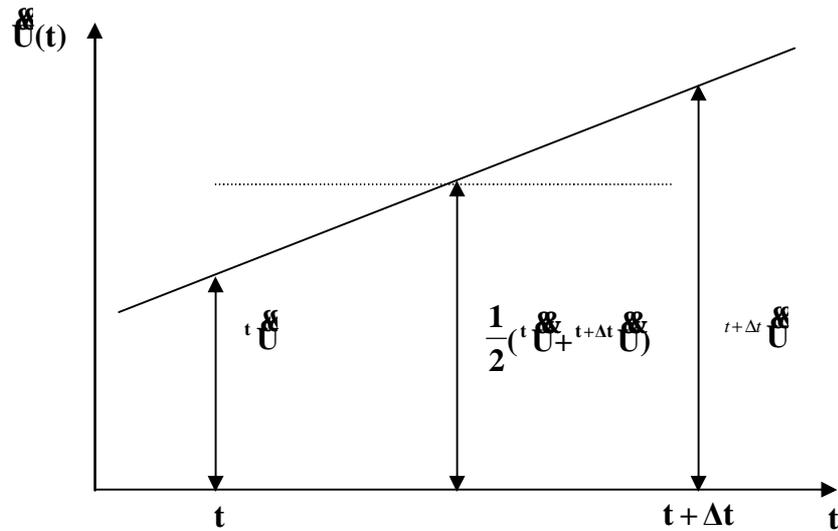


Figura 3.7 Variación de la aceleración en la regla trapezoidal

Para δ y α fuera del intervalo de valores arriba el algoritmo es *condicionalmente estable* y estabilidad de la solución numérica solamente es garantida para incrementos temporales inferiores a un valor crítico Δt_{cr} (Huang, 1987),

$$\Delta t_{cr} = \frac{T}{\pi} \quad (3.6.3)$$

siendo T el menor periodo de vibración.

En el análisis numérico los parámetros del algoritmo de Newmark deben ser criteriosamente escogidos a fin de obtenerse un mejor *amortecimiento numérico*, definido como la capacidad de un algoritmo en reducir la amplitud de la respuesta dinámica, independientemente del *amortecimiento estructural*. Este tipo de amortecimiento es deseado por actuar como filtro sobre las respuestas de vibración de los modos de alta frecuencia, -“frecuencias espurias”-.

Recientemente, algunos métodos de integración han sido desarrollados, presentando capacidad disipativa mas eficiente de que el método de Newmark. Uno de estos es el método HHT (Hilber et al., 1977), en que el amortecimiento numérico se presenta concentrado en los modos de alta frecuencia interfiriendo, con menor intensidad, en los modos de vibración relevantes.

En general, el método de Newmark se aplica cuando la carga en la estructura depende apenas del instante considerado t . En el caso de estructuras sumergidas en que la fuerza hidrodinámica es función de la velocidad relativa fluido-estructura, la velocidad del fluido es prescrita en $t + \Delta t$, lo mismo no ocurriendo con la estructura incógnita del sistema de ecuaciones. Así, una modificación envolviendo iteraciones internas adicionales se hace necesaria.

Las expresiones (3.6.1) y (3.6.2) dependen aun de las incógnitas desplazamientos y velocidades en el instante $t + \Delta t$. Después de algunas manipulaciones algebraicas, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ y ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}$ son expresadas en función de términos conocidos en el instante t , en la forma

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \hat{\mathbf{U}} - \frac{1}{\alpha \Delta t} \cdot {}^t \dot{\mathbf{U}} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \mathbf{U} \quad (3.6.4)$$

Substituyendo (3.6.4) en la ecuación (3.6.1) y agrupandose los términos llegase a:

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \hat{\mathbf{U}} - \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \cdot {}^t \dot{\mathbf{U}} - \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \Delta t \cdot {}^t \ddot{\mathbf{U}} \quad (3.6.5)$$

Sin considerarse la matriz de amortecimiento y después de algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene:

$${}^t \hat{\mathbf{K}}_{eq} \hat{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}_{eq} - {}^t \hat{\mathbf{F}} \quad (3.6.6)$$

Donde:

$${}^t \hat{\mathbf{K}}_{eq} = {}^t \hat{\mathbf{K}}_{tg} + \frac{4}{\Delta t^2} {}^t \hat{\mathbf{M}} \quad \text{y} \quad {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}_{eq} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} + \frac{4}{\Delta t} {}^t \hat{\mathbf{M}} \cdot \dot{\mathbf{U}} + {}^t \hat{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{U}}$$

La evaluación de la matriz de amortecimiento será mostrada en la sección 3.6.2. Obtenida la solución de la ecuación (3.6.6), para el vector incremento de desplazamiento $\hat{\mathbf{U}}$, la solución es utilizada para actualizar las coordenadas, velocidades y aceleraciones de los nodos de los elementos, en el instante $t+\Delta t$.

Conforme (Bathe, 1996), es natural que la convergencia en el análisis dinámico sea más rápida de que en el estático debido a la contribución de la matriz de masa en la formación de la matriz de rigidez efectiva. Esa contribución pasa a ser dominante cuando el intervalo de tiempo es pequeño. Desde que el incremento temporal sea suficientemente pequeño la convergencia en el análisis dinámico es siempre alcanzada. Otro punto importante en el análisis numérico es el reconocimiento de la importancia del método iterativo en el análisis dinámico no-lineal – el error en la solución en un determinado instante del proceso de resolución propagase afectando las soluciones en los instantes siguientes. Realmente, como la respuesta del análisis dinámico no-lineal es dependiente del paso empleado, hay la necesidad de un rigor

mayor de que en el análisis estático, en la evaluación de las soluciones, en las iteraciones a cada instante de tiempo.

3.6.2 Amortecimiento Estructural

Además de los efectos de inercia y de la rigidez, se observa que el comportamiento dinámico trae también asociado el efecto del amortecimiento. El fenómeno de amortecimiento estructural dinámico está asociado a la disipación de energía durante el movimiento. La energía mecánica (cinética y potencial) es transformada de forma incremental.

En estructuras offshore que presentan grandes desplazamientos, el amortecimiento causado por el pasaje del fluido envolvente presenta significativa importancia. Las fuerzas hidrodinámicas consideradas en el análisis del comportamiento de *risers* o ductos presentan una parcela proporcional a la velocidad relativa entre la estructura y el fluido (Lustosa, 2000). En el modelaje computacional ese efecto es tan pronunciado que no es inusual despreciarse el efecto del amortecimiento interno de la estructura en presencia de estos efectos viscosos.

Usualmente las propiedades de amortecimiento estructurales son establecidas por medio de comparación con el amortecimiento observado en estructuras semejantes, o aun por mediciones en modelos experimentales. En esos ensayos, el cuerpo de prueba es puesto a vibrar mientras se observa el número de ciclos transcurridos

para alcanzar el reposo, correspondiente a disipar toda la energía inicialmente dada.

Estructuras son en general gobernadas por amortecimientos subcríticos cuyos valores para factor de amortecimiento estructural llegan a máximo 5%. En el proyecto de plataformas fijas, los valores recomendados por normas son de 2 a 4% (Huang, 1987).

En el análisis de *risers* o ductos de transporte es usual utilizarse el modelo de amortecimiento viscoso o estructural, en que la fuerza de disipación es proporcional a la magnitud de la velocidad (Leonard et al., 1981; Huang, 1987). Así para cada elemento (m) se tiene:

$$\mathbf{R}_D^{(m)} = \int_{\mathbf{V}^{(m)}} \underline{\mathbf{H}}^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^{D^{(m)}} \cdot d\mathbf{V}^{(m)} = \kappa^{(m)} \cdot \int_{\mathbf{V}^{(m)}} \underline{\mathbf{H}}^{(m)T} \cdot \underline{\mathbf{H}}^{(m)} \cdot d\mathbf{V}^{(m)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (3.6.7)$$

donde $\kappa^{(m)}$ es el parámetro de amortecimiento del elemento (m). Re-escritiendo la ecuación (3.6.7), se obtiene:

$$\mathbf{R}_D^{(m)} = \underline{\mathbf{C}}^{(m)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(m)} \quad (3.6.8)$$

donde $\underline{\mathbf{C}}^{(m)}$ es la matriz de amortecimiento estructural del elemento (m), que compone la matriz global de amortecimiento $\underline{\mathbf{C}}$. Explicitandose el amortecimiento estructural en la ecuación (3.5.19) se obtiene:

$${}^t \hat{\mathbf{M}} \cdot {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + {}^t \underline{\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{U}} + {}^t \hat{\mathbf{K}}_{tg} \cdot \hat{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} - {}^t \hat{\mathbf{F}} \quad (3.6.9)$$

En la práctica, los parámetros de amortecimiento del elemento, determinados experimentalmente, son dependientes de la frecuencia

de vibración de la estructura global. Generalmente la matriz de amortecimiento es obtenida utilizándose las matrices de masa y de rigidez, junto con resultados experimentales sobre el amortecimiento de la estructura estudiada. Una forma usual de consideración del amortecimiento estructural es a través del modelo de Rayleigh. Por este modelo considerase que la matriz de amortecimiento \underline{C} es obtenida con una combinación lineal de las matrices de masa \underline{M} y de rigidez \underline{K} en la forma:

$$\underline{C} = \alpha_d \cdot \underline{M} + \beta_d \cdot \underline{K} \quad (3.6.10)$$

Considerandose que el amortecimiento estructural corresponde a la suma del amortecimiento asociado a cada modo de vibración independientemente y que la disipación de energía de cada modo es proporcional a la frecuencia natural correspondiente, puede obtenerse el comportamiento del amortecimiento de la estructura a partir de la verificación del decaimiento de amplitud ocurrido en la vibración libre de dos modos excitados separadamente.

Conociéndose dos valores del factor de amortecimiento crítico asociados a dos modos de vibración y sus respectivas frecuencias, de una estructura discretizada (Mourelle, 1993; Leonard et al., 1981, Huang, 1987), (ξ_1, ω_1) y (ξ_2, ω_2) , se obtienen los parámetros:

$$\alpha_d = \frac{2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot (\xi_1 \cdot \omega_2 - \xi_2 \cdot \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (3.6.11)$$

$$\beta_d = \frac{2.(\xi_2 \cdot \omega_2 - \xi_1 \cdot \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (3.6.12)$$

del modelo Rayleigh resultantes de la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_d + \beta_d \cdot \omega_1^2 &= 2 \cdot \omega_1 \cdot \xi_1 \\ \alpha_d + \beta_d \cdot \omega_2^2 &= 2 \cdot \omega_2 \cdot \xi_2 \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Así, el factor de amortecimiento correspondiente a cualquier frecuencia natural ω_i queda determinado:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_d}{\omega_i} + \beta_d + \omega_i \right) \quad (3.6.14)$$

En la ecuación (3.6.10) el término $\alpha_d \cdot \underline{M}$ contribuye con el amortecimiento a bajas frecuencias siendo α_d la constante de amortecimiento viscoso (proporcional a la inercia), importante en la parcela de la respuesta asociada a bajas frecuencias (la respuesta sería dominada por los últimos modos), mientras el segundo término $\beta_d \cdot \underline{K}$, contribuye con el amortecimiento a altas frecuencias siendo β_d la constante de amortecimiento estructural (proporcional a la rigidez), que responde por el amortecimiento de las altas frecuencias (la respuesta sería dominada por los primeros modos).

Una contribución importante al amortecimiento total del sistema estructural es el hidrodinámico. Este tipo de amortecimiento es representado por el término de fuerza de arrastre en la fórmula de

Morison, proporcional al cuadrado de la velocidad relativa entre la partícula fluida y la estructura.

En estructuras offshore considerandose las vibraciones transversales, el amortecimiento hidrodinámico es significativamente mayor que el interno, de otra manera en las vibraciones axiales, de alta frecuencia y pequeña amplitud, la contribución del arrastre hidrodinámico es pequeña.

La utilización del método de Newmark normalmente conduce a la necesidad de se hacer uso del amortecimiento estructural, para limitar o hasta mismo eliminar respuestas en altas frecuencias (vibraciones axiales), porque estas no presentan importancia significativa en la respuesta global de la estructura y, aun pueden venir a comprometer el buen condicionamiento del algoritmo de integración. Algunos autores aun alertan para el hecho de que el amortecimiento estructural asociado al método de Newmark no es confiable para eliminación de frecuencias espurias.

En el presente estudio el modelo de amortecimiento de Rayleigh es empleado, estableciendose frecuencias de corte o límites de frecuencias entre las cuales se realiza la resosta dinámica de la estructura. De esa forma, el modelo opera como un filtro de las frecuencias que esten fuera del intervalo seleccionado.

3.6.3 Método Newton-Raphson - Análisis Dinámico No-Linear

Considerandose la no-linealidad del sistema de ecuaciones definido en (3.5.19), la solución requiere la utilización de un proceso iterativo para la obtención del vector incremento temporal del desplazamiento \hat{U} , correspondiente al equilibrio en cada instante del tiempo. Ahora, es presentado el método de integración implícita de Newmark acoplado al método iterativo de Newton-Raphson.

Re-escribiendose las ecuaciones (3.5.19) y (3.6.4) en la forma iterativa presentada en el Apéndice A1 se obtiene, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t} \hat{M}^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{U}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \hat{K}_{tg}^{(k-1)} \cdot \hat{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \hat{R}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \hat{F}^{(k-1)} \quad (3.6.15)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{U}^{(k)} = \frac{4}{\Delta t^2} \cdot \sum_{j=1}^k {}^t \hat{U}^{(j)} - \frac{4}{\Delta t} \cdot {}^t \hat{U} - {}^t \hat{U} \quad (3.6.16)$$

(donde $k = 1, 2, \dots, n$). Substituyendose, ahora, (3.6.16) en (3.6.15), se obtiene:

$$\left({}^{t+\Delta t} \hat{K}_{tg}^{(k-1)} + \frac{4}{\Delta t^2} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{M}^{(k-1)} \right) \cdot \hat{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \hat{R}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \hat{M}^{(k-1)} \left(\frac{4}{\Delta t} \cdot {}^t \hat{U} + {}^t \hat{U} - \frac{4}{\Delta t^2} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \hat{U}^{(j)} \right) - {}^{t+\Delta t} \hat{F}^{(k-1)} \quad (3.6.17)$$

o

$${}^{t+\Delta t} \hat{K}_{eq}^{(k-1)} \cdot \hat{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \hat{R}_{eq}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \hat{F}^{(k-1)} \quad (3.6.18)$$

Donde:

$${}^{t+\Delta t} \hat{K}_{eq}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t} \hat{K}_{tg}^{(k-1)} + \frac{4}{\Delta t^2} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{M}^{(k-1)} \quad (3.6.19)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}_{\text{eq}}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{M}}^{(k-1)} \left(\frac{4}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}} - \frac{4}{\Delta t^2} \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^{(j)} \right) \quad (3.6.20)$$

con

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}^{(0)} = {}^t\hat{\mathbf{F}} \quad (3.6.21)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(0)} = {}^t\hat{\mathbf{K}} \quad \text{y} \quad (3.6.22)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{M}}^{(0)} = {}^t\hat{\mathbf{M}} \quad (3.6.23)$$

La ecuación incremental iterativa en (3.6.18) se presenta en la forma análoga a la ecuación obtenida en el análisis estático, excepto por la presencia de términos de inercia en las matrices de rigidez y vector carga externa.

Utilizándose parámetros α y δ de Newmark y, considerándose el amortecimiento interno $\underline{\mathbf{C}}$, la matriz de rigidez y el vector de fuerza externa equivalentes presentan la siguiente forma, respectivamente (Bathe, 1996)

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}_{\text{eq}}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}_{\text{tg}}^{(k-1)} + a_0 \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{M}}^{(k-1)} + a_1 \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{C}}^{(k-1)} \quad (3.6.24)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}_{\text{eq}}^{(k-1)} = & {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{M}}^{(k-1)} \cdot (a_2 \cdot {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 \cdot {}^t\ddot{\mathbf{U}} - a_0 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^{(j)}) + \\ & + {}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{C}}^{(k-1)} \cdot (a_4 \cdot {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 \cdot {}^t\ddot{\mathbf{U}} - a_1 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^{(j)}) \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} - 1; \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \left(\frac{\delta}{2 \cdot \alpha} - 1 \right) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

3.6.4 Prescripción de Movimientos

La flexión de los *risers* o ductos en la región próxima a la superficie del agua, en consecuencia de la acción de la onda, puede ser aliviada y combinada por el efecto de la embarcación y por los movimientos *offset* (movimientos de paseo) de la embarcación. Las diferencias entre los movimientos de la embarcación y la respuesta del *riser* pueden conducir a momentos de flexión elevados en la sección cerca del punto donde el *riser* es conectado a la embarcación.

Considerandose el análisis dinámico de *risers* y la diferencia de inercias involucradas en el punto de acoplamiento a la plataforma, generalmente la fuerza aplicada en esta extremidad no es conocida. Las informaciones disponibles son, generalmente, las características cinemáticas del movimiento de la embarcación (o unidad flotante) a que el *riser* está acoplada. Así, es de extrema importancia en el análisis los movimientos de la extremidad del *riser*, para simular la carga impuesta por la plataforma o monoboya, debido a los desplazamientos cíclicos inducidos por las ondas en la unidad flotante. En el presente estudio estos movimientos son considerados desacoplados. Implementose la eliminación del grado de libertad que sufre la prescripción de desplazamiento con la debida aplicación de esfuerzos equivalentes provenientes de esta prescripción. Re-escrivandose la ecuación general del equilibrio dinámico incremental (3.6.9) en su forma iterativa:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\underline{M}}^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{U}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{C}}^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{U}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{K}}_{tg}^{(k-1)} \cdot \hat{\underline{U}}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{R}}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{F}}^{(k-1)} \quad (3.6.27)$$

y considerandose una malla de elementos finitos con n grados de libertad, las multiplicaciones entre matrices y vectores en esta ecuación se presentan en la forma:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1i} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2i} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ a_{i1} & a_{i2} & \mathbf{L} & a_{ii} & \mathbf{L} & a_{in} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \mathbf{L} & a_{ni} & \mathbf{L} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \mathbf{M} \\ \delta_i \\ \mathbf{M} \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (3.6.28)$$

donde $\underline{\underline{A}}$, representa la matriz de masa, de amortecimiento o de rigidez y, respectivamente, el vector Δ representa el vector de aceleración, velocidad o de incremento de desplazamiento de la ecuación (3.6.27). Considerandose el i-ésimo grado-de-libertad prescrito, este puede ser retirado de la ecuación de equilibrio eliminandose, en la matriz $\underline{\underline{A}}$, y en el vector Δ , línea y columna correspondientes. Para efectuarse esta reducción de orden, de forma algebraicamente consistente, se suma al lado derecho de la ecuación reducida, el vector de fuerza equivalente de orden (n-1) x 1:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \mathbf{M} \\ a_{(i-2)i} \\ a_{(i-1)i} \\ a_{(i+1)i} \\ a_{(i+2)i} \\ \mathbf{M} \\ a_{ni} \end{bmatrix} \cdot \delta_i \quad (3.6.29)$$

Así, de cada multiplicación de la equação (3.6.27),

$${}^{t+\Delta t} \hat{\underline{M}}^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{U}}^{(k)}, \quad {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{C}}^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{U}}^{(k)} \quad e \quad {}^{t+\Delta t} \hat{\underline{K}}_{tg}^{(k-1)} \cdot \hat{\underline{U}}^{(k)},$$

Se obtiene un vector de esfuerzo equivalente Γ a ser sumado a la ecuación de equilibrio con orden reducida. Es importante notar que el vector de fuerza equivalente proveniente de la reducción de orden de la multiplicación ${}^{t+\Delta t} \hat{\underline{K}}_{tg}^{(k-1)} \cdot \hat{\underline{U}}^{(k)}$ solo deberá estar presente en la ecuación de equilibrio en la primera iteración de cada paso de tiempo, cuando el desplazamiento prescrito es impuesto. Los otros de los vectores son sumados a la ecuación de equilibrio en todas las iteraciones.

El procedimiento de imposición de movimiento induce en la estructura, excitaciones de alta frecuencia sin significado físico (excitaciones espurias) (Mourelle, 1993). Notese que este procedimiento es equivalente, en el método de penalidades, la imposición de un elemento elástico con alto parámetro de rigidez y, por tanto con frecuencia natural artificialmente elevada. Por este

motivo en análisis con prescripción de movimientos es necesario la utilización de procedimientos de amortecimiento numérico para altas frecuencias, lo que puede ser obtenido manipulándose los parámetros de integración numérica de Newmark o utilizándose el amortecimiento β_d de Rayleigh.

La imposición del movimiento en el análisis dinámico debe ser hecha de forma gradual y creciente, sobre pena del sistema no conseguir superar la etapa transiente o mismo no alcanzar la convergencia (Mourelle, 1993). Por tanto, la aceleración debe ser tomada inicialmente nula y aumentada gradativamente. En el caso de la aceleración inicial no ser nula, el movimiento inicial irá equivaler a una carga de impacto en la dirección del grado de libertad prescrito, las aproximaciones generadas para las aceleraciones alcanzan valores irreales comprometiendo el análisis; con esta forma de carga todas las frecuencias naturales transientes son excitadas, generando ruido (numérico) en la solución y dificultando su convergencia numérica. En el presente estudio se emplean funciones de transición para introducir gradualmente el movimiento prescrito, evitándose discontinuidades en la velocidad y/o en la aceleración prescritas, lo que viabiliza el análisis cuya solución presente reducción pronunciada de las vibraciones de alta frecuencia, como aquella obtenida cuando el amortecimiento proporcional a la rigidez es usado.

3.6.5 Rotación de Cuerpo Rígido y Rotación de Deformación

En el análisis bidimensional, las matrices de cambio de base ${}^t\mathbf{T}^{(m)}$ de un elemento (m) referenciadas en la sección 3.5.1 – (3.5.18), son obtenidas a partir de las coordenadas (X y Z) de los nodos del elemento y del vector de desplazamientos correspondiente, separándose las parcelas de la rotación: debido a la deformación y debido al movimiento de cuerpo rígido. En la presentación que sigue, métodos para la obtención de la matriz de cambio de base y para la separación de la rotación de cuerpo rígido del elemento (m) de su rotación de deformación son descritos; considerase el análisis bidimensional (Lustosa, 2000).

3.6.5.1 Análisis Bidimensional

En el proceso de solución numérica de la ecuación de equilibrio descrito en (3.6.18), se obtiene un vector de incremento de desplazamientos en coordenadas globales que, en el caso del análisis bidimensional del elemento (m) mostrado en la figura 3.7, da para cada nodo 1 y 2, dos translaciones nodales ($U_x^1, U_z^1, U_x^2, U_z^2$) y una rotación nodal (U_φ^1, U_φ^2). Estes, sumados a las coordenadas nodales obtenidas en la iteración anterior, resultan en:

$$\begin{bmatrix} t+\Delta t X_1^{(k)} \\ t+\Delta t Z_1^{(k)} \\ t+\Delta t \varphi_1^{(k)} \\ t+\Delta t X_2^{(k)} \\ t+\Delta t Z_2^{(k)} \\ t+\Delta t \varphi_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+\Delta t X_1^{(k-1)} \\ t+\Delta t Z_1^{(k-1)} \\ t+\Delta t \varphi_1^{(k-1)} \\ t+\Delta t X_2^{(k-1)} \\ t+\Delta t Z_2^{(k-1)} \\ t+\Delta t \varphi_2^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_x^1 \\ U_z^1 \\ U_\varphi^1 \\ U_x^2 \\ U_z^2 \\ U_\varphi^2 \end{bmatrix} \quad (3.6.30)$$

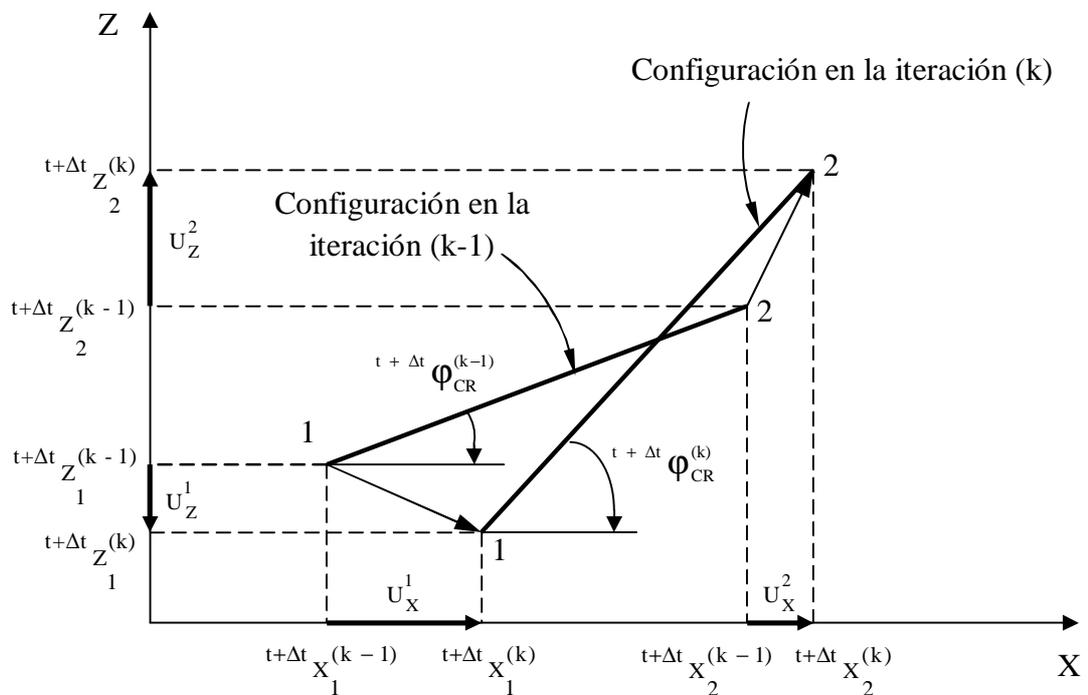


Figura 3.8 Determinación de la rotación de cuerpo rígido del elemento (m) a partir de los incrementos de traslación nodales

donde, por simplicidad, los índices indicativos del elemento (m) fueron omitidos. De las coordenadas actualizadas de cada nodo, se obtiene la orientación espacial del elemento (m) en la iteración (k). De esta manera, de las consideraciones geométricas en la figura 3.8 se obtiene:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_{CR}^{(k)} = \begin{cases} -\sin^{-1}\left(\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{Z}_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{Z}_1^{(k)}}{\sqrt{({}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_1^{(k)})^2 + ({}^{t+\Delta t}\mathbf{Z}_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{Z}_1^{(k)})^2}}\right) & \text{se } {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_2^{(k)} > {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_1^{(k)} \\ \sin^{-1}\left(\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{Z}_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{Z}_1^{(k)}}{\sqrt{({}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_1^{(k)})^2 + ({}^{t+\Delta t}\mathbf{Z}_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{Z}_1^{(k)})^2}}\right) - \pi & \text{se } {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_2^{(k)} \leq {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_1^{(k)} \end{cases} \quad (3.6.31)$$

parcela de la rotación nodal referente a la deformación de ese elemento es obtenida disminuyéndose de las coordenadas rotacionales de los nodos $({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_1^{(k)} \text{ y } {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_2^{(k)})$, obtenidas en la ecuación (3.6.30), el ángulo correspondiente a la orientación espacial del elemento obtenido en (3.6.31). De esta forma,

$$\beta^{1(k)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_1^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_{CR}^{(k)} \quad \text{y} \quad \beta^{2(k)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_1^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_{CR}^{(k)} \quad (3.6.32)$$

son las rotaciones nodales escritas a partir del sistema de referencia co-rotacionado en la iteración (k). El ángulo que define la orientación del eje x del sistema co-rotacionado ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}_{CR}^{(k)}$ no corresponde a la rotación de cuerpo rígido ocurrida durante el análisis, mas está acrecida de la orientación inicial del elemento. A excepción del desplazamiento en la dirección axial del segundo nodo del elemento que corresponde a la elongación del elemento:

$${}_{(t+\Delta t)}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{(k)T} = [0 \quad 0 \quad \beta^{1(k)} \quad (\mathbf{L}^{(k)} - \mathbf{L}_0) \quad 0 \quad \beta^{2(k)}] \quad (3.6.33)$$

las demás translaciones nodales escritas en el sistema de referencia corotacionado en la iteración (k) son nulas.

De esta manera, representandose las matrices de rigidez descritas en las ecuaciones (3.5.4) y (3.5.5) en el sistema de referencia corotacionado del instante $t+\Delta t$, se obtienen los esfuerzos internos presentes en el elemento en ese instante a través de la expresión:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}^{(k)} = \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{L}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{G}^{(k)} \right) {}_{(t+\Delta t)}\hat{\mathbf{u}}^{(k)} \quad (3.6.34)$$

Este vector, calculado para cada elemento, es transformado para el sistema global de referencia a través de la transformación presentadas en las ecuaciones (3.5.18), abajo reproducida en la forma adaptada al procedimiento iterativo:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}^{(m)(k)} = {}^t\mathbf{T}_{CR}^{(m)(k)T} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}^{(m)(k)} \quad (3.6.35)$$

La matriz de transformación ${}^t\mathbf{T}_{CR}^{(m)(k)T}$ es, en el problema bidimensional, fácilmente obtenida a través de la relación:

$${}^t\mathbf{T}_{CR}^{(k)T} = \begin{bmatrix} \cos({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & \sin({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & \cos({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & \sin({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & \cos({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6.36)$$

donde el índice (m), que indica el elemento correspondiente, fue omitido por simplicidad y ${}^{t+\Delta t}\Phi_{CR}^{(k)}$ está definido en la ecuación (3.6.31).

De la suma sobre todos los elementos de los vectores de fuerzas internas globales, presentados en la ecuación (3.6.35), se obtiene el vector de fuerzas internas global de la estructura utilizado en la imposición del equilibrio en la iteración k+1:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}_{eq}^{(k)} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}_{eq}^{(k+1)} - {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}^{(k)} \quad (3.6.37)$$

CAPITULO 4

CONTACTO DE DUCTOS CON EL SUELO MARINO

Condiciones de contacto entre dos cuerpos ocurren en un gran número de problemas de ingeniería y el análisis del comportamiento estructural con la identificación de la solución, generalmente numérica, requiere en la mayoría de las veces el empleo de sofisticadas herramientas computacionales. Como ejemplos de esta situación se tiene el análisis numérico de colisión entre vehículos – cuya simulación requiere consideraciones y conceptos de la integridad estructural, sobre severas condiciones de carga – lo que permite mejoras en el proyecto de las herramientas de embutido, visando el aumento de la resistencia estructural de los productos finales obtenidos (Chaudhary, 1985). Estos dos temas demandan el empleo de análisis numérica, cuya complejidad há sido un desafío al impulsamiento de las investigaciones en esta área.

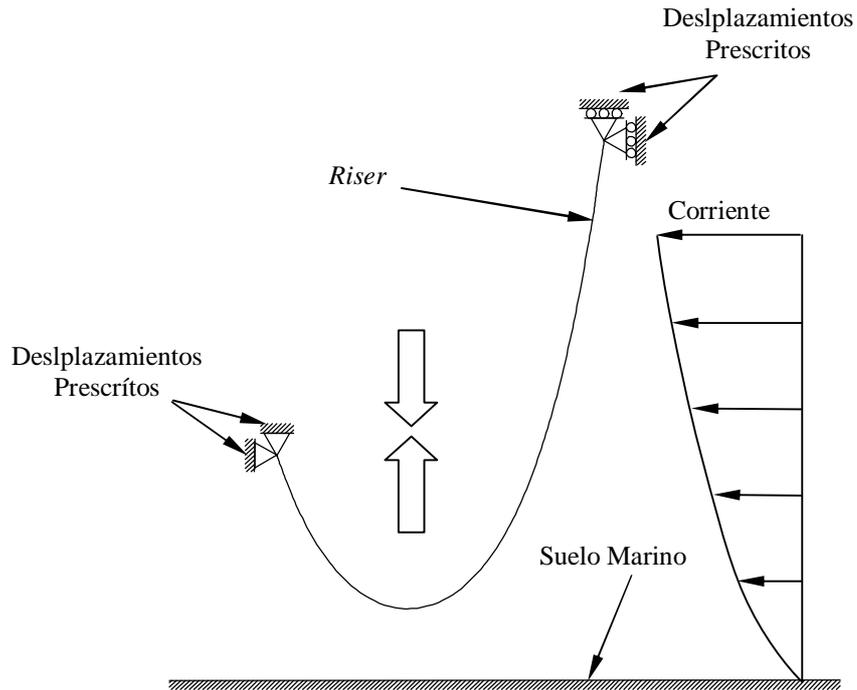
El modelaje y análisis de problemas de contacto presentan una sustancial dificultad debido a la ocurrencia simultánea de fenómenos físicos en el proceso de solución: la evolución de las fuerzas en el contacto es fuertemente influenciada por la rigidez relativa de los cuerpos involucrados, las cuales deben satisfacer las leyes de fricción entre las superficies en contacto. En los problemas mas complejos de contacto no há el conocimiento previo de las condiciones reales de contacto – sea de trabamiento o

de deslizamiento – y, típicamente, estas se desenvuelven durante la solución como una función de las fuerzas y momentos externos.

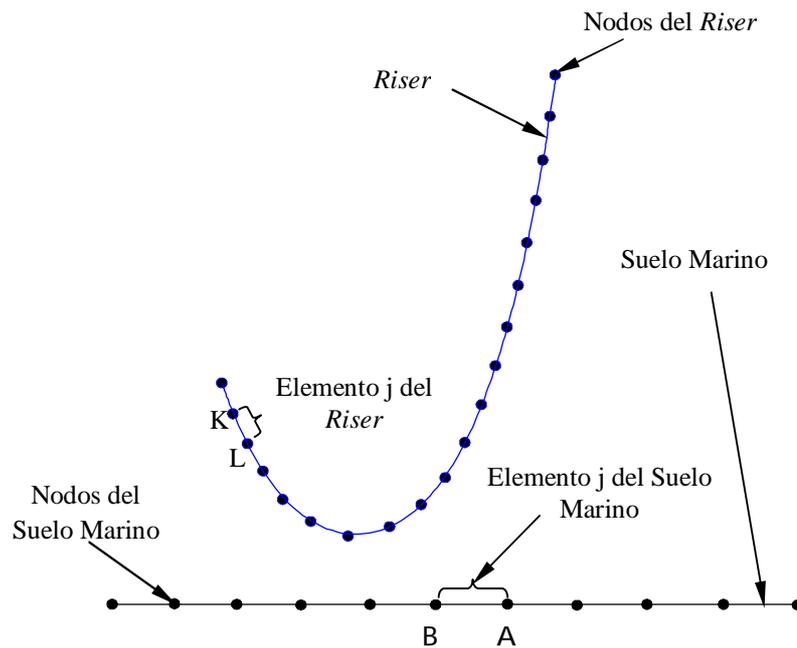
Debido a su importancia práctica, combinada con el desafío científico involucrado, el análisis de problemas de contacto es hoy un activo campo de investigación en Mecánica de Sólidos y Materiales (Goldsmith, 1960). La literatura técnica aborda un amplio conjunto de soluciones dirigidas al modelagem de la fenomenología de problemas de contacto. En este trabajo se objetiva el desenvolvimiento de una metodología de solución aplicable al análisis de problemas planos de contacto entre el *riser* y el suelo marino, sin la ocurrencia de fricción. Ninguna restricción se aplica al algoritmo cuanto a la posible geometría asumida por el *riser*, la localización y la extensión del contacto, y la naturaleza de la carga externa. También, no-linealidades geométricas en los cuerpos en contacto referentes a grandes desplazamientos, con pequeñas deformaciones, son contemplados por el análisis considerado.

Una de las técnicas utilizadas para analizar problemas de contacto consiste en utilizar elementos especiales de interface en la representación de la región de contacto previamente definida. Así, anteriormente a la ocurrencia de contacto, estos elementos no poseen rigidez y, al ocurrir el contacto, pasan a ser caracterizados por una rigidez elevada en la dirección normal a la región de contacto de forma a evitarse la superposición de material entre los cuerpos. Esta abordaje es particularmente efectiva cuando las regiones de posible contacto son, previamente, conocidas y la extensión del desplazamiento relativo entre los cuerpos sea pequeña. En este caso las ecuaciones de restricción son utilizadas en la prescripción de las condiciones de contacto, tanto en el trabamiento como en el deslizamiento. En el análisis estático, este procedimiento lleva la matriz de rigidez total y el vector de fuerza del sistema de

cuerpos a ser modificados a cada iteración, debido a las alteraciones de la región física de contacto. Este es efectivo apenas cuando el orden de las matrices involucradas es pequeña.

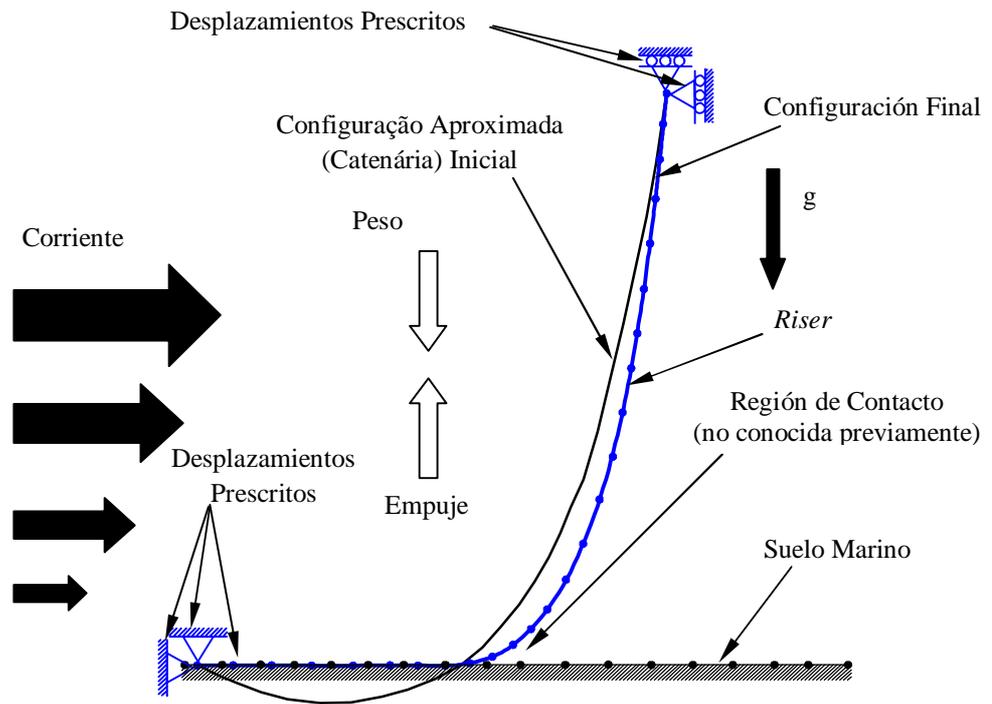


(a) – Posiciones relativas en la configuración inicial

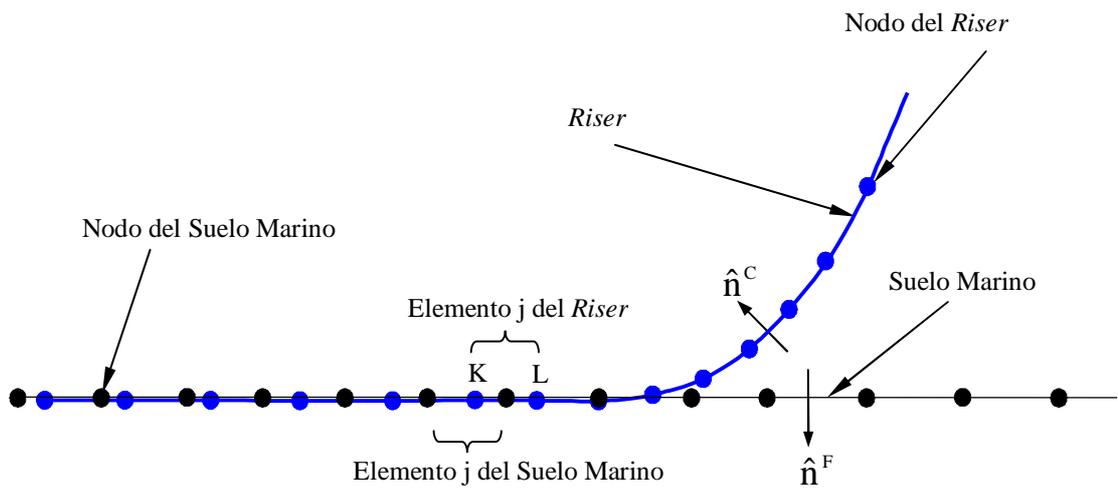


(b) – Discretización del *riser* y del suelo marino antes de ocurrir el contacto

Figura 4.1 *Riser* y Suelo Marino



(a) – Determinación de la Configuración Inicial del Riser (equilibrio estático)



(b) – Región de Contacto Detallada

Figura 4.2 Configuración inicial considerada en el análisis numérico

En una segunda abordaje, restricciones relativas a la compatibilidad de los desplazamientos incrementales debido al contacto son incluidas en la formulación usando una abordaje de penalización (Bathe, 1986). En este caso la matriz de rigidez resultante del problema es dependiente de un parámetro de penalidad, cuya selección debe ser cuidadosa con el fin de evitar el mal-condicionamiento en la matriz de los coeficientes (rigidez). La selección de este parámetro depende directamente de las características físicas y geométricas del problema y la generalización del abordaje para problemas con condiciones de deslizamiento o de trabamiento, incluyendo grandes desplazamientos, no es por lo tanto inmediata.

Una abordaje alternativa a esta última es la de imposición de las condiciones de contacto usándose la técnica de los multiplicadores de Lagrange (Chaudhary, 1985; Yau, 1982). Con esta técnica adicionanse al problema incógnitas asociadas a los esfuerzos internos incógnitos (multiplicadores de Lagrange) asociados a la condición de equilibrio referente al trabamiento y al deslizamiento, debidos al contacto, y que resultan en una matriz de rigidez cuyo orden es aumentado por el número de restricciones impuestas. Apesar del esfuerzo computacional adicional asociado, debido a la adición de grados-de-libertad al problema, esta técnica es numericamente atractiva considerandose la generalidad ofrecida y su eficacia numérica.

El algoritmo de solución utilizado en este trabajo considera el análisis de contacto del *riser* con el suelo marino en movimiento plano general, figuras (4.1) y (4.2). La ocurrencia de la región de contacto se dá en una localización arbitraria a lo largo del *riser* y la condición geométrica a ser impuesta corresponde a la superposición nula del *riser* con el suelo marino. Las fuerzas y los momentos de contacto, tanto en el

riser como en el suelo marino, son estaticamente equivalentes en la región o regiones en contacto.

Conforme mostrado en el Capítulo 3, el *riser* es numericamente representado por elementos espaciales de viga de dos nodos, mientras el suelo marino es considerado rígido y discretizado por segmentos lineales de dos nodos (figura 4.2) separadores de dos semiplanos en el análisis bi-dimensional.

4.1 DISCRETIZACIÓN DE LA ZONA DE CONTACTO

Considerandose el problema de contacto del *riser* con el suelo, los nodos del *riser* son tratados como los contactores y el suelo marino como objetivo. Se define que un elemento del *riser* está en contacto con el suelo si ambos nodos del elemento están en contacto con el suelo marino (figura 4.2.b, nodos K y L del *riser*).

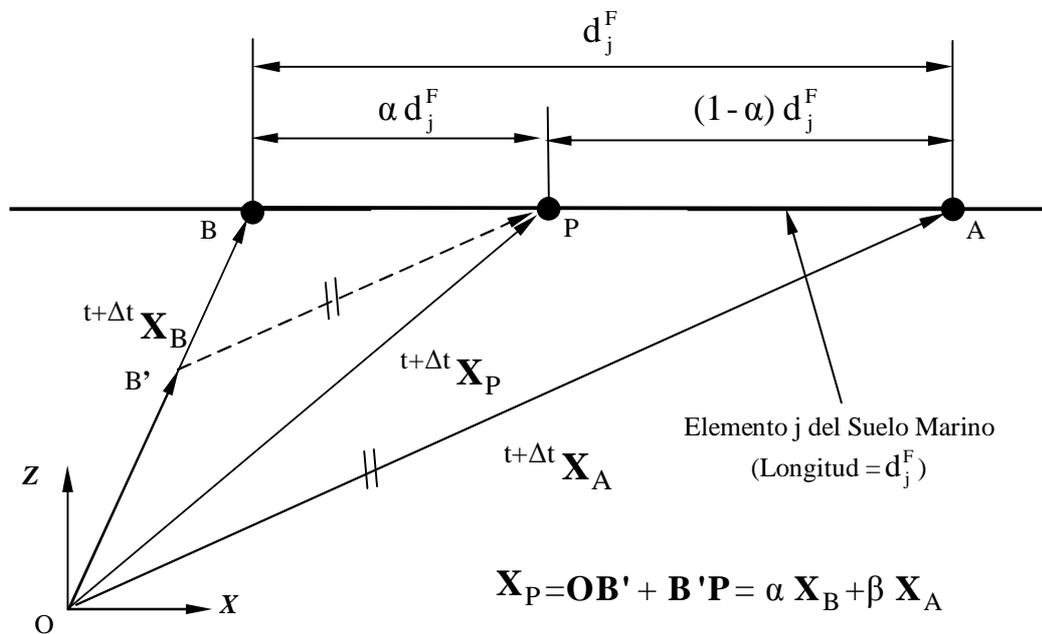
Para un elemento j del suelo marino que recibe el contacto de un punto K del *riser*, cuya proyección horizontal sobre el elemento j es el punto P, el vector posición del punto P, del dominio del elemento, es expresado en función de los vectores posición de los nodos del elemento a través de la expresión (Bathe, 1996), figuras 4.2 y 4.3,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_P = \alpha {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_B + \beta {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_A \quad (4.1.1)$$

donde:

α, β = parámetros de localización del punto P en el elemento j
del suelo marino relativamente a la posición de los
nodos A y B, en el instante $t+\Delta t$ [$\beta = 1 - \alpha$] (fig. 4.3).

${}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_P$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_A$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_B$ = vectores posición global del nodo P del riser y de los nodos A, B del elemento del suelo marino en el instante $t+\Delta t$.



De la semejanza de Δs : $\frac{BP}{AB} = \frac{B'B}{OB} = \frac{B'P}{OA} = \beta$

pero $B'B = OB - OB'$ o $\frac{OB - OB'}{OB} = 1 - \alpha = \beta$

Así, $\alpha + \beta = 1$ y

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_P = \alpha {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_B + (1-\alpha) {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_A$$

Figura 4.3 Interpolación de la geometría en un elemento del suelo marino

4.2 RESTRICCIONES DE LOS DESPLAZAMIENTOS INCREMENTALES DEBIDO AL CONTACTO

En la formulación aquí presentada se utiliza la hipótesis de que después a la ocurrencia del contacto sin fricción, condiciones de contacto de deslizamiento entre el nodo del *riser* y del suelo marino deben ser satisfechas. Así, una ecuación equivalente a la ecuación (4.1.1) define la relación entre los incrementos de los desplazamientos de los nodos después a la ocurrencia del contacto entre el *riser* y el suelo marino, $\Delta u_P = \alpha \Delta u_B + (1-\alpha) \Delta u_A$ porque los desplazamientos de los nodos del *riser* deben ser compatibles con la condición prescrita del suelo marino rígido. En la solución numérica, esta compatibilidad de los desplazamientos es impuesta en las posiciones discretas correspondientes a los nodos contactores (del *riser*). El suelo marino es considerado plano, horizontal y uniforme y, en una configuración de equilibrio, los nodos del *riser* son impedidos de avanzar después del nivel del suelo marino (no penetración), (figuras 4.2.a y 4.2.b).

Considerándose un nodo genérico K del *riser* que avanza sobre un elemento del suelo marino j definido por los nodos A y B; conforme mostrado en la figura 4.4, las restricciones del punto P, y del punto físico de contacto K, se tiene la relación:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{X}_P^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{X}_K^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_K^{(i-1)} \quad (4.2.1)$$

siendo,

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{X}_P^{(i-1)} = \text{vector posición global del punto P, después de (i-1)}$$

iteraciones, para la configuración de equilibrio correspondiente al instante $t+\Delta t$.

${}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_K^{(i-1)}$ = vector posición global del punto k, despues de (i-1)

iteraciones, para la configuración de equilibrio correspondiente al instante $t+\Delta t$.

${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_K^{(i-1)}$ = vector superposición del material asociado al nodo

contactor K, paralelo al vector unitario \mathbf{n}_j^F .

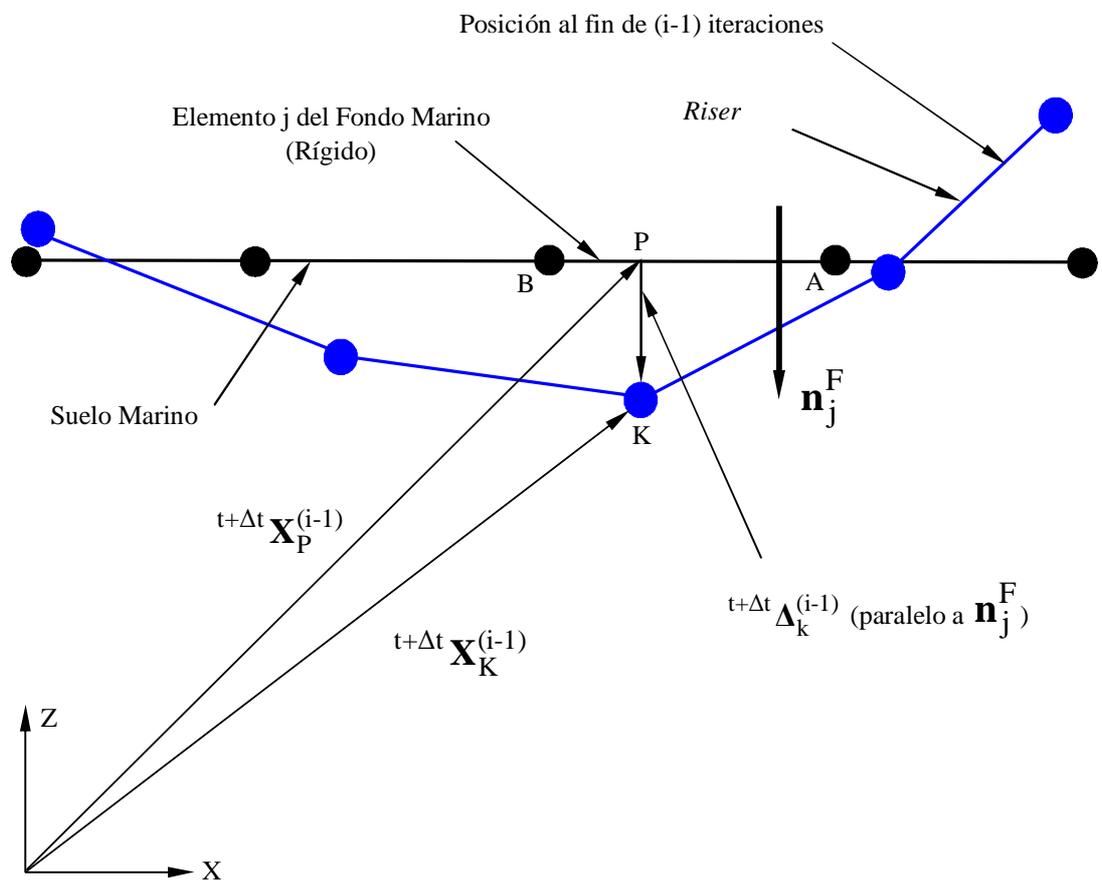


Figura 4.4 Nodo K del riser en contacto con el elemento j

Considerandose el nodo K en contacto deslizante, habiendo en la iteración (i-1) la penetración del *riser* en el semi-espacio del medio marino, las siguientes condiciones para los desplazamientos incrementales deben ser verificadas:

- La superposición del material medida por el vector $t+\Delta t \Delta_k^{(i-1)}$ es eliminada;
- El punto físico de contacto con el elemento del suelo marino no es necesariamente el punto P, conforme mostrado en la figura 4.5.

El parámetro $\alpha^{(i-1)}$, de localización del punto físico de contacto despues de la iteración (i), es obtenido a partir de las distancias relativas de P en relación a A e B. De esta forma se tiene en la iteración (i) que los puntos P y K son no coincidentes per estan sobre la misma superficie del suelo marino y, la siguiente ecuación de compatibilidad geométrica debe ser verificada, figuras 4.4 y 4.5,

$$(\mathbf{n}_j^F)^T \left[t+\Delta t \mathbf{X}_K^{(i)} \right] = (\mathbf{n}_j^F)^T \left[t+\Delta t \mathbf{X}_P^{(i)} \right] \quad (4.2.2)$$

Restandose $(\mathbf{n}_j^F)^T \left[t+\Delta t \mathbf{X}_P^{(i-1)} \right]$ de ambos términos de la ecuación arriba, la restricción de compatibilidad de los desplazamientos resulta en:

$$(\mathbf{n}_j^F)^T \left[t+\Delta t \mathbf{X}_K^{(i)} - t+\Delta t \mathbf{X}_P^{(i-1)} \right] = (\mathbf{n}_j^F)^T \cdot \left[t+\Delta t \mathbf{X}_P^{(i)} - t+\Delta t \mathbf{X}_P^{(i-1)} \right] \quad (4.2.3)$$

y, de la combinación de las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.4) con las definiciones,

$$\Delta \mathbf{u}_P^{(i)} = t+\Delta t \mathbf{X}_P^{(i)} - t+\Delta t \mathbf{X}_P^{(i-1)}$$

$$\Delta \mathbf{u}_k^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{X}_k^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{X}_k^{(i-1)} \quad (4.2.4)$$

resulta la condición de restricción:

$$(\mathbf{n}_j^F)^T \left[(\Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + \mathbf{D}_K^{(i-1)}) - \Delta \mathbf{u}_P^{(i)} \right] = 0 \quad (4.2.5)$$

expresada por los incrementos de los desplazamientos de los nodos P y K y el vector penetración del nodo K.

De la condición de contacto deslizante del *riser*, sobre el suelo marino – considerado una superficie rígida y inmóvil – el desplazamiento del punto P se dá en la dirección perpendicular a la normal y, por tanto,

$$(\mathbf{n}_j^F)^T \cdot \Delta \mathbf{u}_P^{(i)} = 0 \quad (4.2.6)$$

Así, la ecuación (4.6) se reduce a

$$(\mathbf{n}_j^F)^T \left[\Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_K^{(i-1)} \right] = 0 \quad (4.2.7)$$

que representa la restricción de la compatibilidad de los desplazamientos para el contacto deslizante entre el nodo contactor K del *riser* y el elemento j del suelo marino. Esta es la condición a ser impuesta en la formación del Indicador Variacional del problema para la prescripción de la condición de contacto.

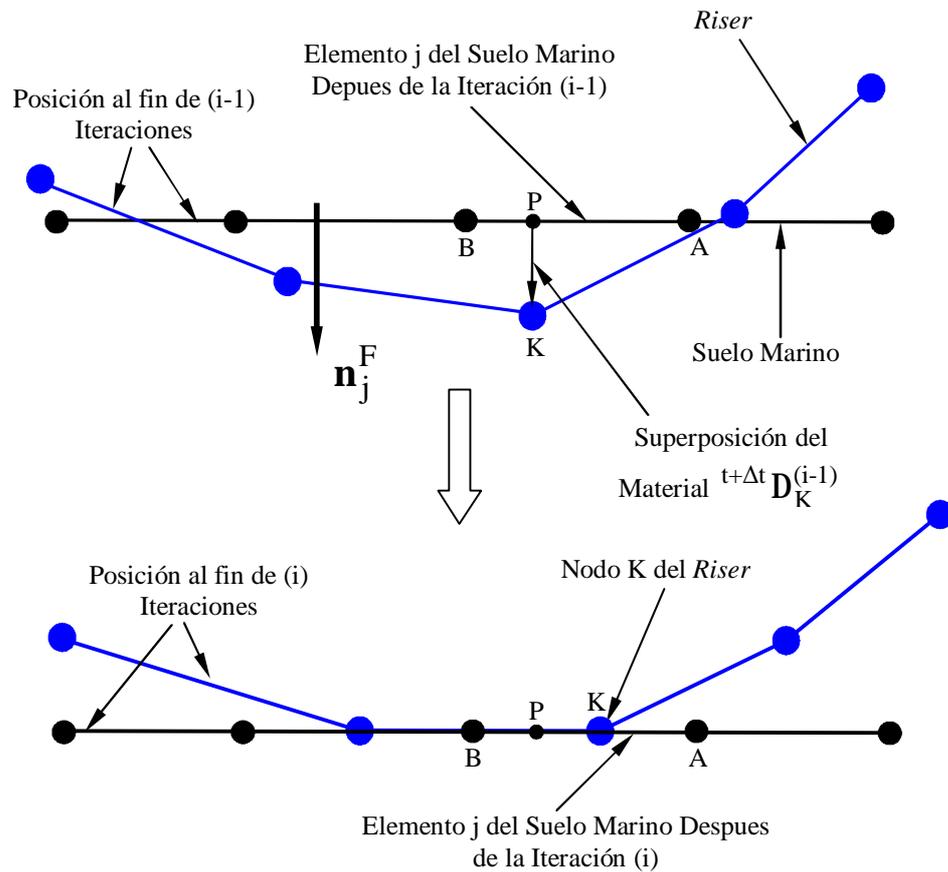


Figura 4.5 Condición de contacto deslizante en el nodo K del *riser*

4.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTACTO

Antes de ocurrir el contacto entre los nodos del *riser* con los elementos del suelo marino, las ecuaciones de movimiento del *riser* son derivadas empleándose los procedimientos descritos en (Bathe, 1996). En esta condición inicial las respuestas de los movimientos temporales del *riser* son independientes de las coordenadas del suelo marino y las variables de estado evaluadas en cada iteración son los incrementos de los desplazamientos nodales del *riser*.

Ocurriendo el contacto, las condiciones de restricciones sobre los incrementos de los desplazamientos nodales del *riser* (ecuación 4.2.7) deben ser incluidas en las ecuaciones de movimiento. En el presente estudio se empleó la técnica de los multiplicadores de Lagrange por presentar ventajas en la definición del modelo y eficiencia numérica. Así, para obtenerse las ecuaciones de equilibrio asociadas a la iteración (i), en el instante $t+\Delta t$, emplease la estacionaridad de un Indicador Variacional extendido, expresado por

$$\pi_1^{(i)} = \pi^{(i)} - \sum_K W_K^{(i)} \quad (4.3.1)$$

Donde $\pi^{(i)}$ es el potencial total usual que lleva a las ecuaciones de equilibrio incrementales, sin las condiciones de contacto para la iteración (i) en el instante $t+\Delta t$ y $W_K^{(i)}$ = Potencial total de los esfuerzos totales de contacto en la iteración (i) (sumatorio en todos los nodos K del *riser* en contacto con el suelo marino).

En este caso, considerandose la condición de contacto con deslizamiento entre el nodo K del *riser* y el elemento j del suelo marino (ecuaciones (4.2.7) y (4.3.1)) se tiene:

$$W_K^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda_K^{(i)T} \left[\Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + {}^{t+\Delta t} \Delta_K^{(i-1)} \right] \quad (4.3.2)$$

donde, ${}^{t+\Delta t} \lambda_K^{(i)}$ es la fuerza de contacto en el nodo K del *riser* al fin de la iteración (i).

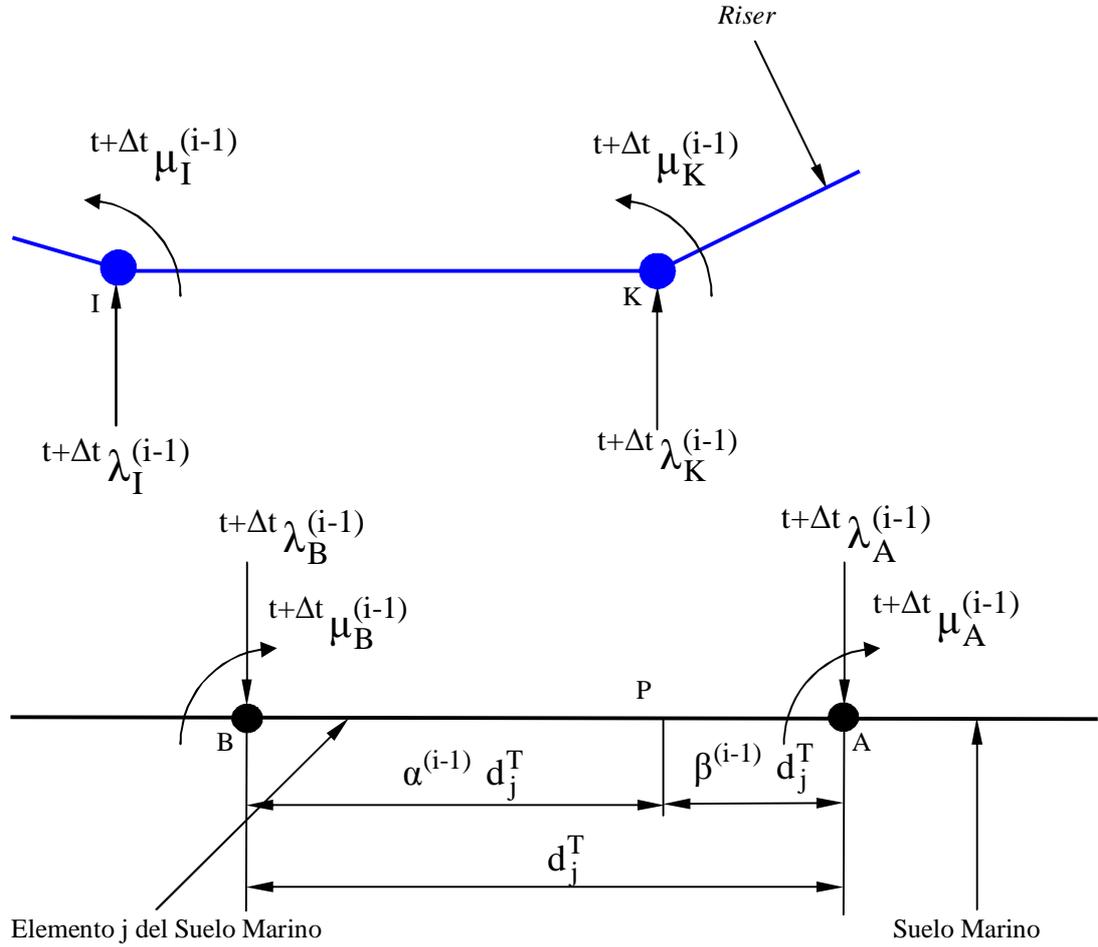


Figura 4.6 Diagrama de cuerpo libre: Cargas equivalentes de contacto $t+\Delta t \lambda_k^{(i-1)}$ y $t+\Delta t \mu_K^{(i-1)}$ en los nodos del riser (I y K) y del suelo marino (A y B)

De la variación del potencial total de las fuerzas de contacto – consideradas en el sentido contrario a la normal del suelo marino, por tanto

$\left(\mathbf{l}_K^{(i)} = \lambda_K^{(i)} \left(-\mathbf{n}_j^F \right) \right)$ – en relación a los desplazamientos asociados a los

nodos del riser se tiene, con $\Delta_K^{(i-1)} \rightarrow 0$,

$$\delta \sum W_K^{(i)} = \lambda_K^{(i)} \left(-\mathbf{n}_j^F \right)^T \delta \Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + \delta \lambda_K^{(i)} \left(-\mathbf{n}_j^F \right)^T \Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + \left(-\mathbf{n}_j^F \right) \mathbf{D}_K^{(i)} \delta \lambda_K^{(i)} \quad (4.3.3)$$

Adicionados a la variación de $\delta\pi(i)$, los dos primeros términos de la ecuación (4.3.3) representan la contribución al acoplamiento, en la matriz de rigidez del modelo del *riser*, entre los grados-de-libertad del modelo (los desplazamientos nodales) y los módulos de los esfuerzos nodales de contacto. El tercer término expresa la contribución al vector independiente de la ecuación, asociado a los grados-de-libertad que representan el módulo de los esfuerzos debidos al contacto del *riser* con el suelo marino.

De la substitución de los resultados de la ecuación (4.3.3) en la variación de la ecuación (4.3.1) y invocandose la estacionaridad del Indicador Variacional total, $\delta\pi_1^{(i)}=0$, se obtienen las ecuaciones de gobierno del modelo de elementos finitos. De esta manera, utilizandose el procedimiento usual de adición de las matrices referentes a las correspondientes variables-de-estado, las ecuaciones de equilibrio para la iteración (i) en el instante (t+ Δt) son obtenidas, en la forma:

$$\left\{ \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_C^{(i-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_\lambda^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_\lambda^{(i-1)T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}^{(i)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_C^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

donde,

${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_C^{(i-1)}$ = matriz de rigidez del *riser* al final de la iteración (i-1), como

obtenida en las ecuaciones (3.5.4) y (3.5.5);

${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{K}}_{\lambda}^{(i-1)}$ = matriz de contacto que incluye las restricciones de compatibilidad de los desplazamientos al final de la iteración (i-1);

${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ = vector de esfuerzos externos aplicados al final de la iteración (i-1);

${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$ = vector de esfuerzos internos aplicados al final de la iteración (i-1);

${}^{t+\Delta t}\Delta_{\mathbf{C}}^{(i-1)}$ = vector superposición material en los nodos del *riser* al final de la iteración (i-1);

$\Delta\mathbf{U}^{(i)}$ = vector de los incrementos de los desplazamientos nodales en la iteración (i);

$\lambda^{(i)}$ = vector de esfuerzos de contacto en la iteración (i) (multiplicadores de Lagrange);

Como observado en la ecuación (4.12) las matrices ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{K}}_{\lambda}^{(i-1)}$ y el vector ${}^{t+\Delta t}\Delta_{\mathbf{C}}^{(i-1)}$ están asociados a los esfuerzos nodales en el *riser* debidos al contacto con el suelo marino y representan las modificaciones a ser introducidas en el modelo numérico para la inclusión de los efectos del contacto con el suelo marino.

La matriz ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{K}}^{(i-1)}$, y los vectores ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ y ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$ son obtenidos utilizando el procedimiento usual de elementos finitos, conforme descrito

en el Capítulo 3. Las matrices ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{K}}_{\lambda}^{(i-1)}$ y el vector ${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_C^{(i-1)}$ resultantes de la ecuación (4.11) para una región de contacto genérica en que un nodo típico K de *riser* se apoya en el elemento j del modelo del suelo marino (figura 4.4) son expresadas por:

$${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{K}}_{\lambda}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{n}_j^F \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_C^{(i-1)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{n}_j^F)^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_K^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

y, el vector solución para una iteración (i) es:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_K^{(i)} & \boldsymbol{\lambda}_K^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_K^{(i)}$ contiene las reacciones de esfuerzos y momentos nodales sobre el *riser* en la región de contacto con el suelo marino. Así, para imponer el contacto con deslizamiento, una ecuación es necesaria para limitar el desplazamiento incremental del nodo K a lo largo de la dirección \mathbf{n}_j^F al desplazamiento incremental del punto P a lo largo de la misma dirección \mathbf{n}_j^F . Obtenida la solución de la ecuación (4.3.4) en una iteración (i) hay necesidad de verificarse si la fuerza normal es de compresión con el suelo marino. Caso no sea, tenemos físicamente una condición de alejamiento del *riser* y por lo tanto la reacción de la superficie fija debe ser impuesta nula y, iteraciones suplementares deben ser realizadas hasta que la solución resulte en esfuerzos

no nulos de reacción del suelo sobre el *riser*. Así, al fin de cualquier iteración (i) debe ser verificado, para un nodo K en contacto con el elemento j,

$${}^{t+\Delta t}\lambda_K^{(i)T} \cdot \mathbf{n}_j^C < 0 \quad (4.3.8)$$

y en este caso se prescribe que

$${}^{t+\Delta t}\lambda_K^{(i)} = 0 \quad (4.3.9)$$

4.4 SOLUCIÓN DE CONTACTO DINÁMICO

La solución del problema de contacto en la dinámica bidimensional es obtenida empleandose el procedimiento discutido en las secciones 4.1 y 4.3, considerada la estática, pero ahora incluyendo los efectos de las fuerzas de inercia y amortecimiento.

Por lo tanto, las ecuaciones incrementales de equilibrio para la iteración (i), en el instante (t+Δt), pasan a la forma:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_\lambda^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_\lambda^{(i-1)T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i-1)} \\ \lambda^{(i)} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^{t+\Delta t}\Delta_C^{(i-1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

donde:

$\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ = vector incremento de velocidades, en la iteración (i);

$\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ = vector incremento de aceleraciones, en la iteración (i);

${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{v}}^{(i-1)}$ = vector de velocidades, en la iteración (i-1);

${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{a}}^{(i-1)}$ = vector de aceleraciones, en la iteración (i-1);

$\underline{\mathbf{M}}$ = matriz de masa del *riser*;

$\underline{\mathbf{C}}$ = matriz de amortecimiento viscoso del *riser*.

La evaluación de las matrices de contacto ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{K}}_{\lambda}^{(i-1)}$ y del vector

${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{D}}_C^{(i-1)}$ es obtenida como mostrado para el análisis estático y la técnica de

solución numérica empleada es la presentada en la sección 3.6.

CAPITULO 5

RESULTADOS Y DISCUSIONES

En este capítulo son presentados análisis numéricos de cinco ejemplos reproduciendo situaciones prácticas del comportamiento dinámico de ductos o *risers*. Los resultados numéricos obtenidos con el presente modelo son comparados con otros previamente publicados en la literatura o aun, obtenidos del análisis con modelos empleandose la versión 6.3 del programa ANFLEX. Para cada problema seleccionado, los modelos utilizados y los resultados presentados reproducen características peculiares del análisis y tiene la finalidad de demostrar las potencialidades de los procedimientos numéricos descritos en las secciones anteriores de este trabajo, referentes al modelaje y análisis de la dinámica de *risers* en medio *offshore* submarino, incluyendo el contacto con el suelo marino.

En todas las aplicaciones se buscó verificar la capacidad y la precisión de la técnica numérica empleandose, en el procedimiento iterativo de la solución de las ecuaciones no-lineales de movimiento, el método de Newton Raphson, padronizado con el control del módulo del vector desbalanceamiento (Lustosa, 2000) como criterio de convergencia.

5.1 DUCTO EN CATENARIA SOBRE CARGA DE CORRIENTE MARINA

En este primer ejemplo se consideró el problema de un ducto en que hay solamente un punto en contacto con el suelo marino. El objetivo es verificar la flexibilidad de aplicación del modelo en los diversos tipos de configuraciones y, también verificar los resultados obtenidos en el presente estudio cuando comparados con aquellos obtenidos utilizándose el modelaje con el programa ANFLEX, como referencia. En los ejemplos siguientes se consideran análisis más generales con *risers* rígidos y flexibles incluyéndose también el efecto del contacto con el suelo marino.

El problema propuesto consiste en el análisis estático de un ducto de longitud de 10.5 m, en una profundidad de 6.0 m, inicialmente en equilibrio estático sobre la acción del peso propio, del empuje y de las condiciones de contorno mostradas en la figura 5.1.1. Las características físicas y geométricas del ducto utilizado están presentadas en la tabla 5.1.1. Para el modelaje fue utilizado el elemento de viga de 2 nodos. El ducto fue discretizado con 20 elementos de igual longitud y el criterio de convergencia utilizado corresponde a 0.01 para la razón entre las normas de los vectores desbalanceamiento y carga externa.

La configuración inicial es obtenida considerándose solamente los efectos del peso propio del ducto y del empuje del fluido externo (agua de mar). Los resultados están mostrados en la figura 5.1.2, comparados con la configuración dada del modelo con el programa ANFLEX. Una buena

concordancia de los resultados numéricos es observada. En un segundo paso, se aumenta el efecto de la corriente marina, como definido en la figura 5.1.1. Los resultados de la deformada del *riser* están también mostrados en la figura 5.1.2, en que también hay una buena concordancia entre el resultado obtenido del presente estudio cuando en comparación al obtenido con el programa ANFLEX.

En la figura 5.1.3 está presentado el módulo de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del *riser*. Los resultados están en muy buena concordancia hasta la distancia de 3.7 m del punto de anclaje pero, es visible una diferencia entre los resultados de los modelos numéricos después de esta posición, probablemente debido a la forma como la fuerza de tracción es evaluada en el presente trabajo, empleándose una fórmula aproximada para las tensiones nodales, mostrada en la ecuación 3.5.6, y calculada elemento a elemento.

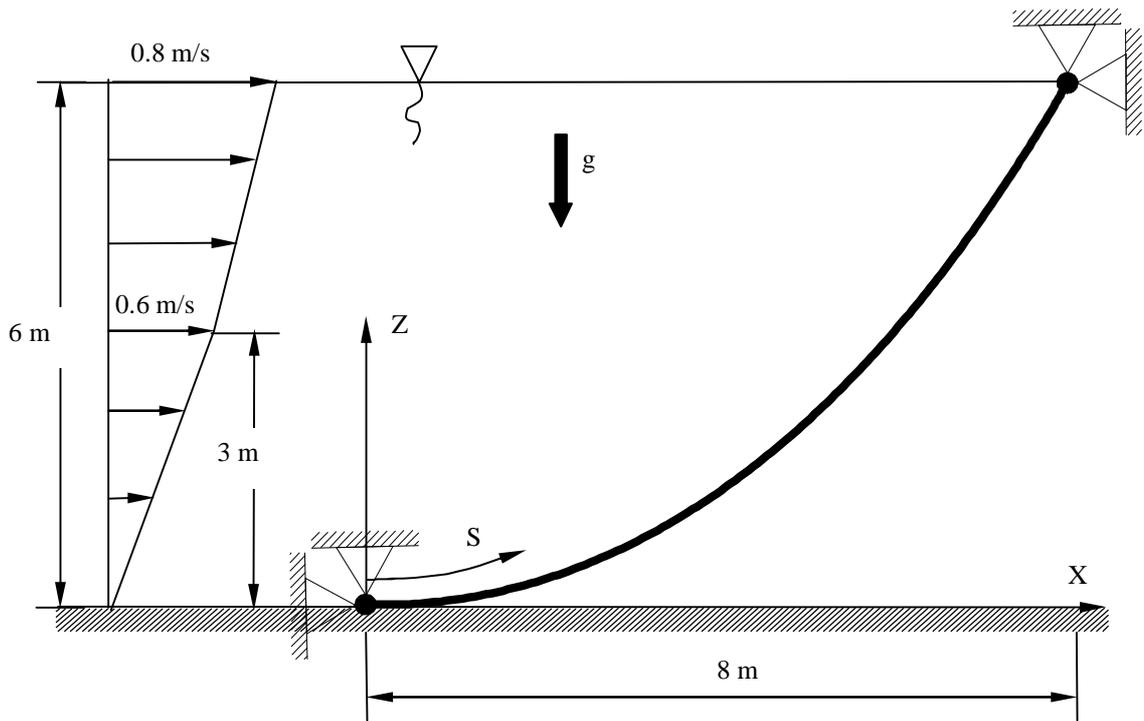


Figura 5.1.1 Configuración inicial del ducto en catenaria

Tabla 5.1.1 Parámetros físicos del ducto

Módulo de rigidez axial (EA)	6061 KN
Módulo de rigidez a flexión (EI)	67.58 KN*m ²
Módulo de rigidez torsional (GJ)	1000 KN*m ² /rad
Masa específica lineal del ducto	147.2 kg/m
Masa específica lineal del fluido interno	800 kg/m ³
Diametro externo	0.3378 m
Diametro interno	0.2536 m
Coficiente de inercia (CM)	2.0
Coficiente de arrastre normal(CDn)	1.2

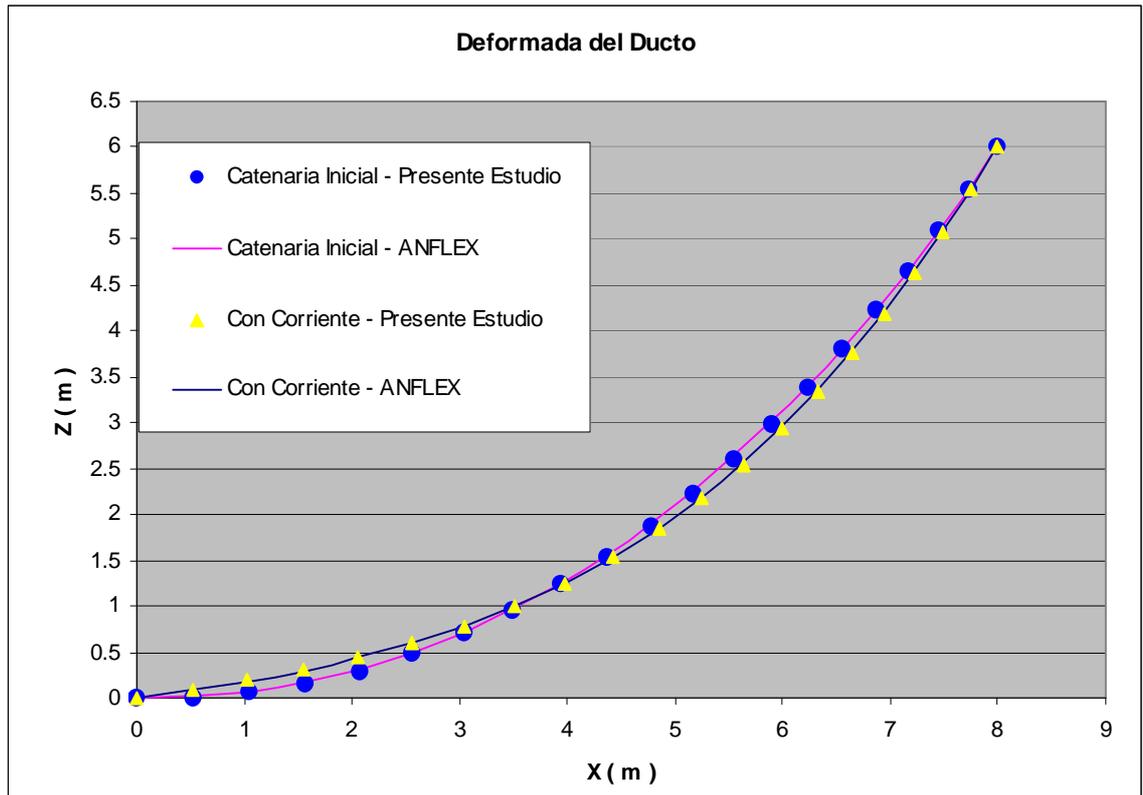


Figura 5.1.2 Deformadas del ducto: Catenaria inicial y deformada con corriente

El valor máximo de la fuerza de tracción real, como esperado, ocurre en el punto de conexión del *riser* con el flotante y el mínimo valor en el punto de anclaje. En este punto se observa la ocurrencia de compresión del *riser*, a lo largo de los primeros 3.4 m, aproximadamente. La línea punteada junto al punto de conexión del ducto con el flotante representa una extrapolación de los resultados numéricos, porque el procedimiento numérico adoptado por el algoritmo produce valores iguales para la fuerza de tracción en los dos nodos de los elementos en las extremidades del modelo (este detalle já está corregido en la versión actual del *software*). Es importante entender que la tracción real es aquella que considera los efectos de la presión del fluido externo y interno sobre el *riser* incluyendo los efectos de la presión en los

extremos y, la tracción efectiva es aquella que no considera los efectos de la presión externa y interna en los extremos del *riser*, por tanto el empuje resultante a lo largo del ducto es siempre perpendicular al eje de él.

La distribución del momento flector a lo largo de la longitud del ducto en la figura 5.1.4 es presentada. Se observa que los resultados numéricos se presentan en muy buena concordancia para los modelos de ambos programas. El valor del momento flector máximo ocurre aproximadamente a 4.7 m del punto de anclaje y el valor mínimo, como esperado, en los puntos extremos del ducto. De la misma forma en la figura 5.1.5 es presentada la distribución del radio de curvatura en los puntos nodales del *riser* a lo largo de su longitud. Obsérvese que los valores máximos ocurren en los puntos extremos del ducto cuya evaluación es imprecisa debido a la forma constructiva del modelo. Como en el resultado para los momentos flectores también el valor mínimo ocurre a 4.7 m del punto de anclaje. Una concordancia muy buena es observada entre los resultados obtenidos con el modelo implementado y el programa ANFLEX.

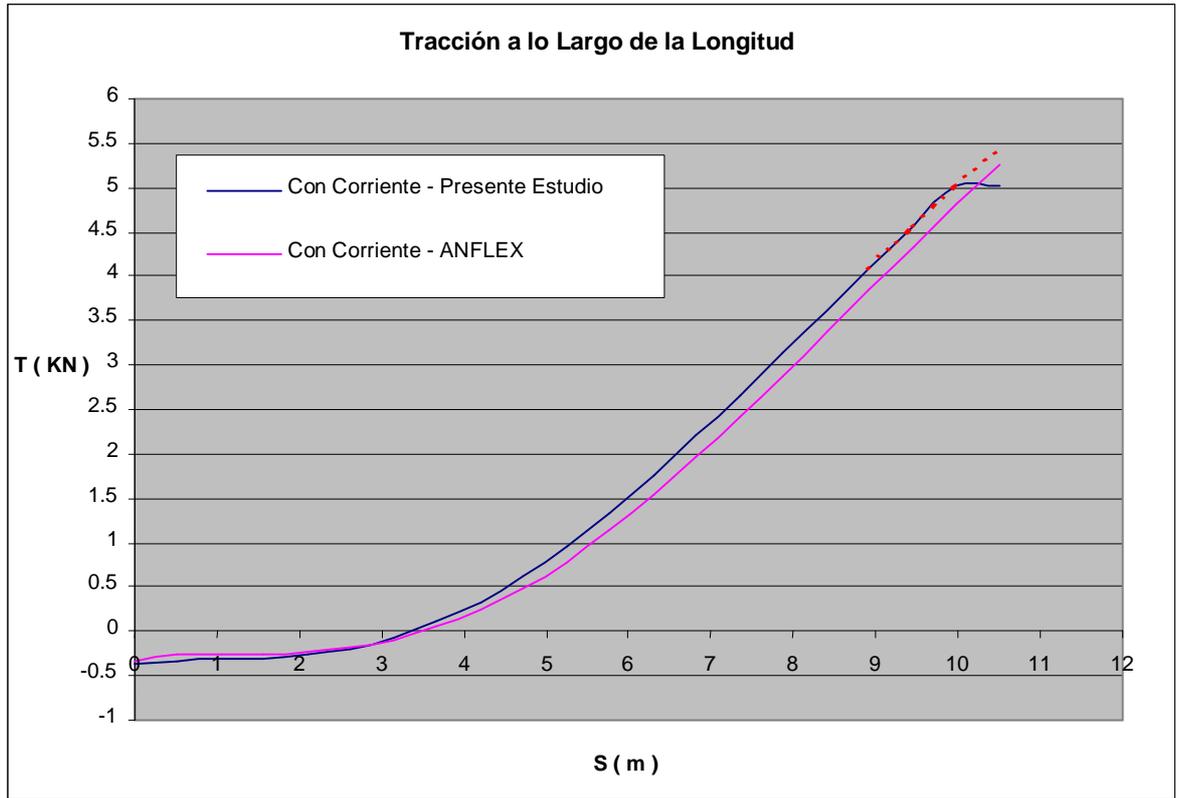


Figura 5.1.3 Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto

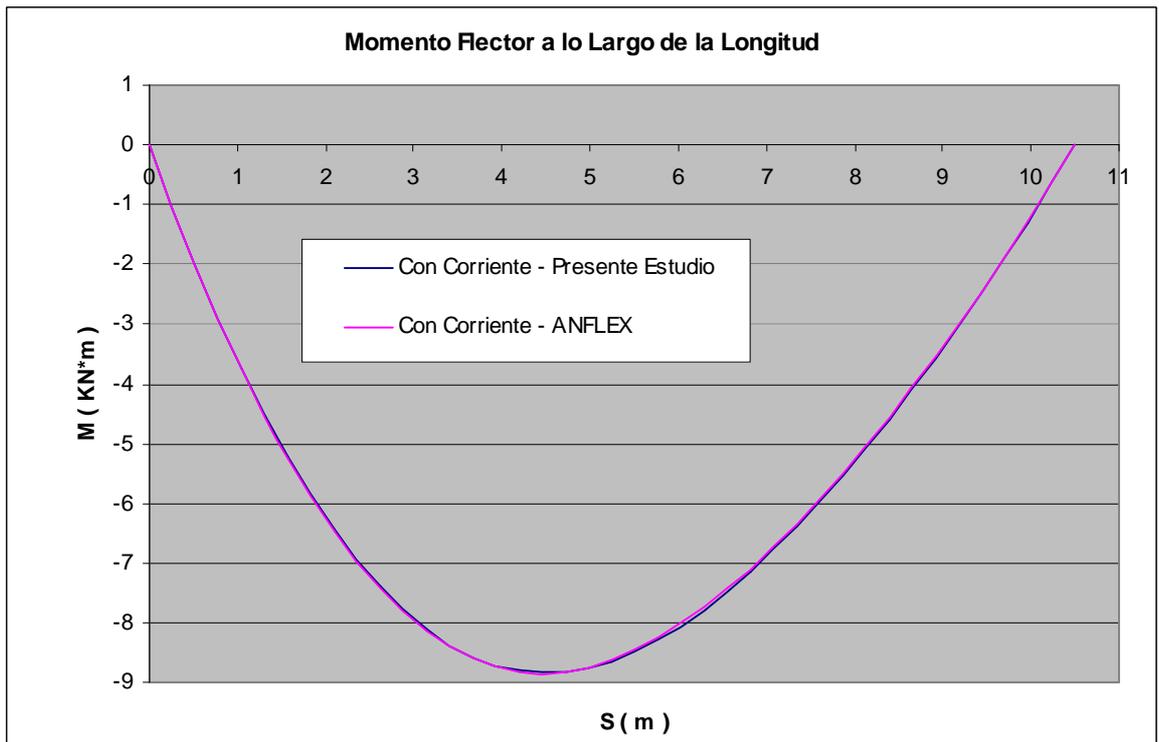


Figura 5.1.4 Distribución del momento flector a lo largo de la longitud del ducto

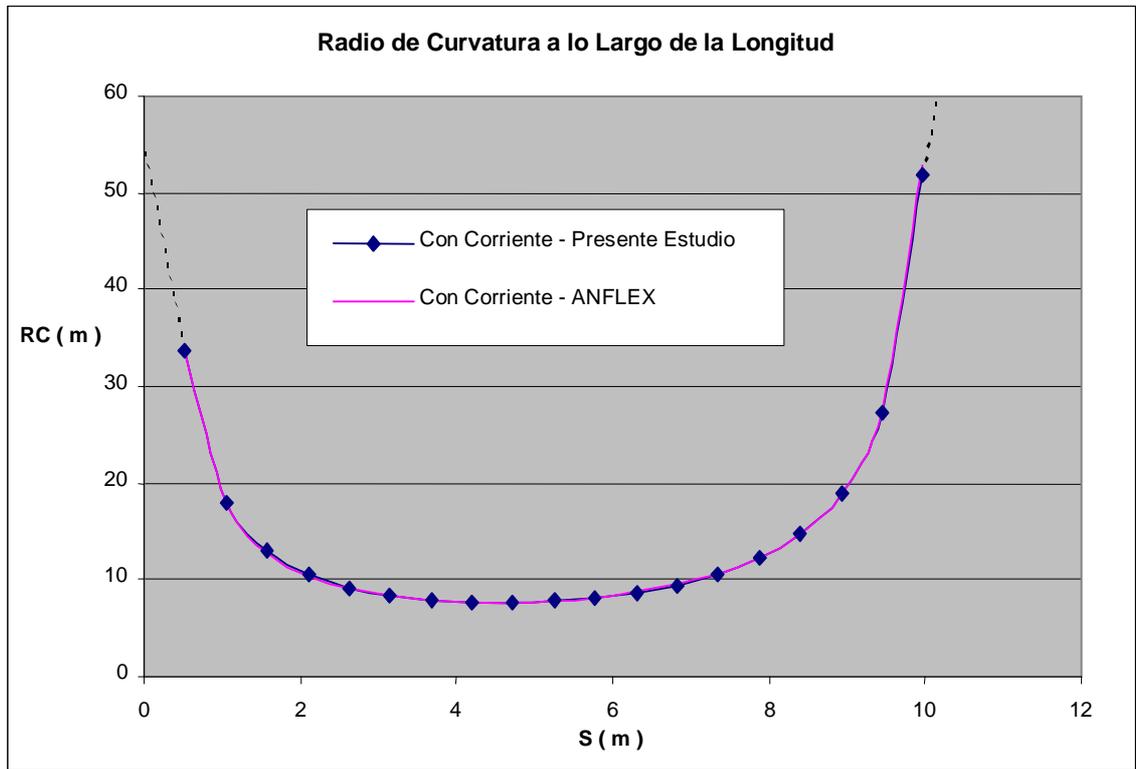


Figura 5.1.5 Variación del radio de curvatura a lo largo de la longitud del ducto

5.2 ANÁLISIS DE UN DUCTO FLEXIBLE

El presente análisis se basa en un ejemplo representativo de una situación real estudiado en (Mourelle, 1984). Se considera un ducto flexible con 419 m de longitud, cuyo extremo superior está conectado, 15 m arriba del nivel del mar, a una plataforma semi-sumergible, siendo que el otro extremo está anclado en el suelo marino a una profundidad de 243 m como mostrado en la figura 5.2.1. En ambos puntos de anclaje y conexión el *riser* es libre para girar. Se considera también, un refuerzo de acero inoxidable colocado junto al suelo marino para evitar el eventual desgaste del ducto provocado por la fricción.

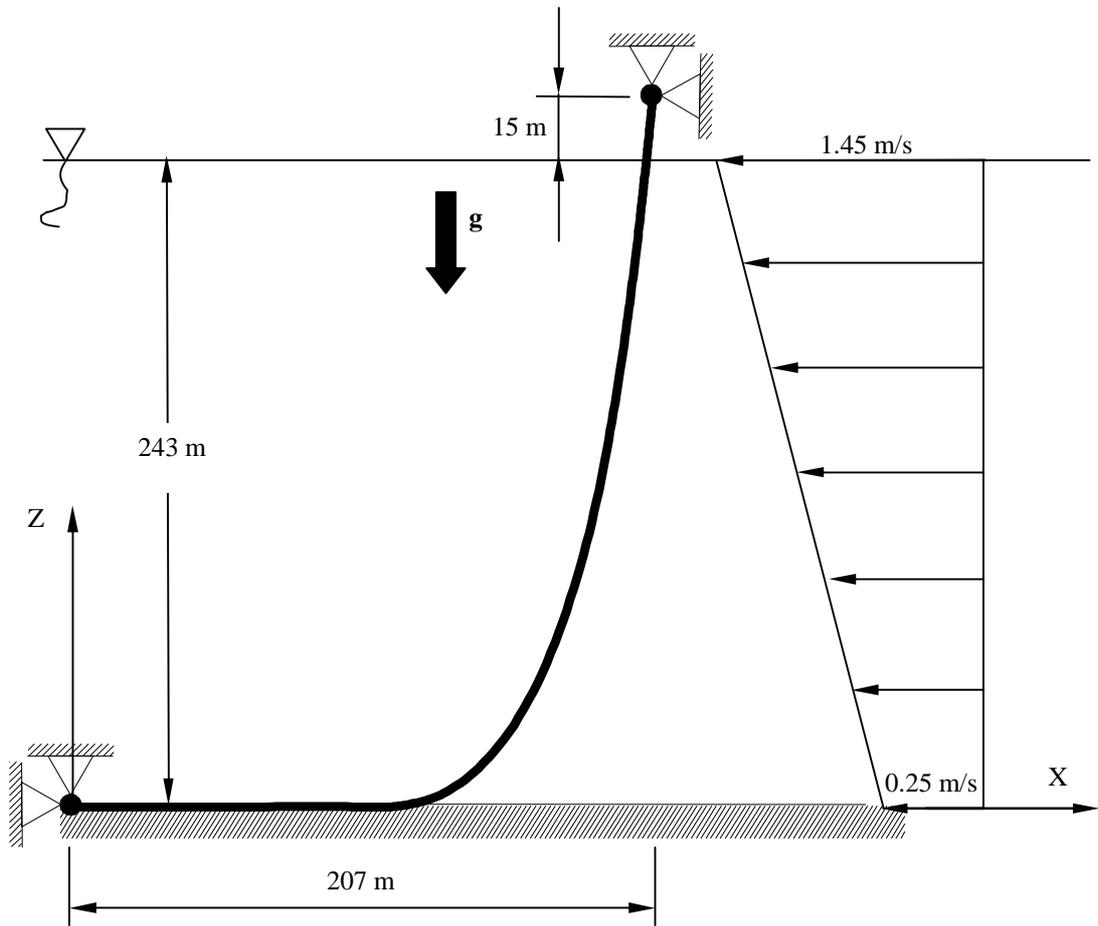


Figura 5.2.1 Ducto flexible de 8" en catenaria

En el modelo utilizado por Mourelle la representación del ducto es hecha por un elemento curvo, basado en las ecuaciones de catenaria y, para el modelaje del suelo marino, se utilizan resortes no-lineares, que permiten el libre movimiento en la dirección vertical para arriba y restringen el movimiento contrario al suelo. La rigidez de los resortes es representada por una función no-linear adecuada para representar la reacción del suelo cuando hay desplazamiento compresivo mayor de que la coordenada inicial del suelo marino, obteniéndose así, la fuerza del contacto entre el elemento y el suelo marino.

El ducto flexible está sometido a los efectos de corriente marina, peso propio, empuje y del peso adicional en la región del *riser* mas próxima al suelo (debido al refuerzo utilizado). Las características físicas y geométricas del riser estan presentadas en la Tabla 5.2.1.

En el modelo utilizado con el presente estudio el *riser* fue discretizado por 28 elementos, distribuidos en tres regiones: en la primera de 98 m, a partir del punto de anclaje, fueron utilizados 4 elementos con dos nodos; en la segunda región con 80 m fueron utilizados 10 elementos y en la tercera región del *riser*, con 241 m, el número de elementos es igual a 14. Los primeros 162 m de *riser* poseen el refuerzo de acero a partir del punto de anclaje.

Como está presentado en la figura 5.2.2, considerada inicialmente en análisis estático con las cargas de peso propio y empuje, fueron comparados los resultados del presente trabajo con los obtenidos con el modelo del programa ANFLEX. Para las deformadas iniciales obtenidas con ambos modelos numéricos se puede observar una concordancia muy buena de los resultados a lo largo de la longitud del ducto flexible. En el detalle 1, se observa la configuración junto a la zona correspondiente al punto de contacto con el suelo marino (*touch down point*), donde es observada la misma concordancia de los resultados para la deformada obtenida en el presente estudio y con el programa ANFLEX.

Tabla 5.2.1 Características del ducto flexible y del refuerzo de acero inoxidable

Rigidez Axial (EA)	3.982 x 10 ⁶ KN
Rigidez Flexional (EI)	26.92 x 10 ³ KN/m ²
Diámetro Externo del Ducto Flexible	0.2590 m
Diámetro Interno del Ducto Flexible	0.2032 m
Diámetro Externo del Refuerzo de Acero Inoxidable	0.2750 m
Masa por Unidad de Longitud Vazio en el Aire	66.2 kg/m
Masa por Unidad de Longitud Lleno en el Aire	99.4 kg/m
Masa por Unidad de Longitud Vazio en el Agua	12.1 kg/m
Masa por Unidad de Longitud Lleno en el Agua	45.3 kg/m
Masa Adicional del Refuerzo en el Aire	30 kg/m
Masa Adicional del Refuerzo en el Agua	26.2 kg/m

En la segunda etapa de este problema, fueron realizados análisis considerando la actuación de las cargas, además del peso propio y del empuje, provenientes de las corrientes marinas en 2 sentidos, 0° (*Far*) y 180° (*Near*), y variándose el coeficiente de arrastre normal padrón. Se adoptó aquí el valor mínimo recomendado por la DNV-OS-F201 (2001) de 0.7 y un valor conservador de 1.2 conforme recomendado en (Mourelle, 1984). La tabla 5.2.2 presenta el perfil de velocidades de la corriente utilizado en este problema, a lo largo de la profundidad.

Tabla 5.2.2 Perfil de Velocidades de la Corriente Marina

Profundidad (m)	Velocidad (m/s)
0	1.45
243	0.25

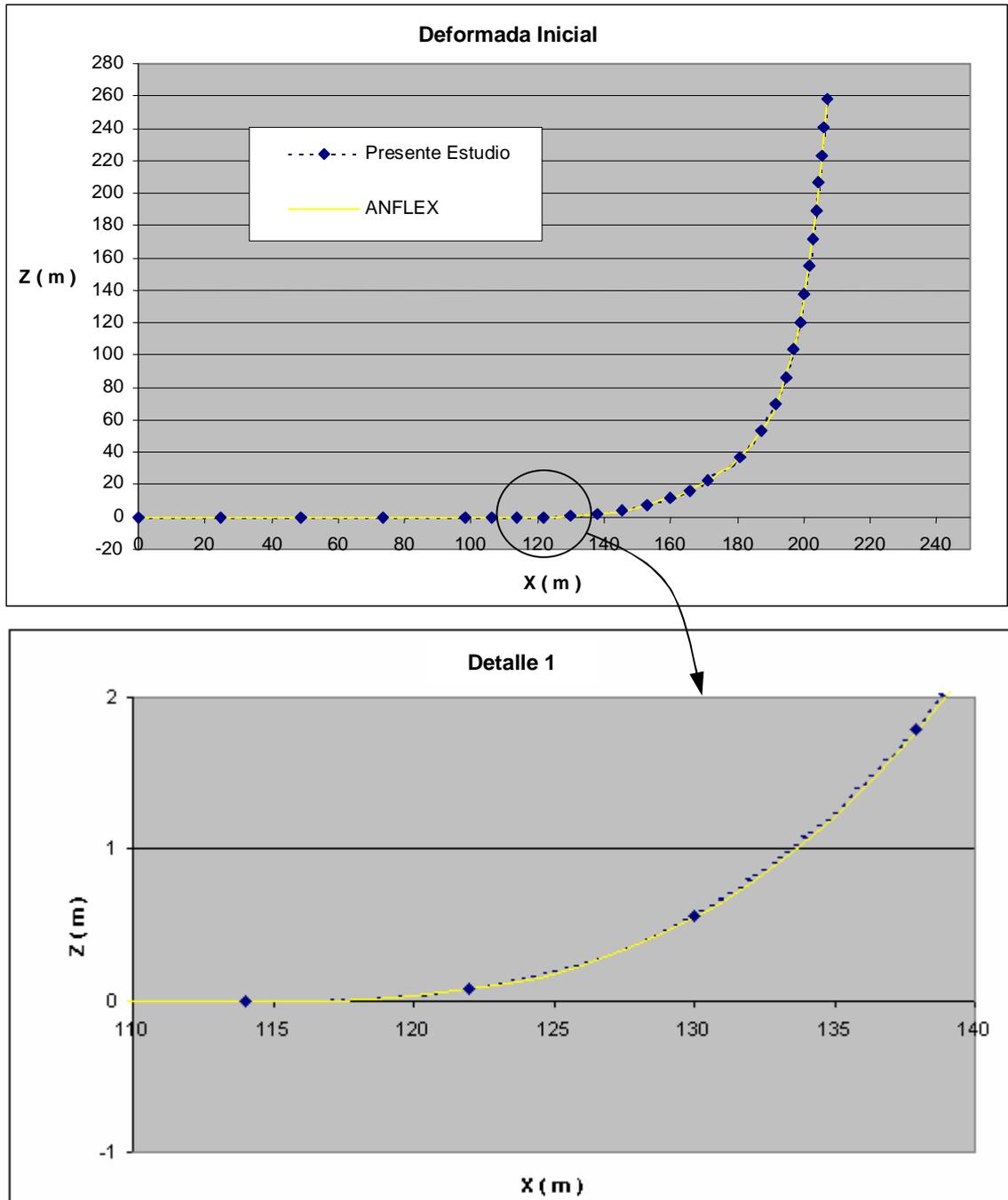


Figura 5.2.2 Deformada inicial considerando el peso propio del ducto flexible y el Empuje

Los resultados para las configuraciones de las deformadas obtenidas con el presente estudio y con el modelo empleando el programa ANFLEX, para el sentido positivo de la actuación de la corriente, están presentados en la figura 5.2.3. Se observa la buena concordancia entre las configuraciones obtenidas con ambos modelos numéricos, para los dos coeficientes de arrastre reportados. Para una mejor visualización en el detalle 1 se puede verificar que la ocurrencia de un mayor desplazamiento del *riser* flexible en su parte superior lleva al desplazamiento en el sentido opuesto del desplazamiento superior de la zona del punto de contacto con el suelo marino *touch down point* de aproximadamente 8 m.

La variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del *riser* flexible, es presentada en la figura 5.2.4 considerando los efectos de la corriente positiva, para ambos coeficientes de arrastre. De la comparación de los resultados obtenidos del presente estudio con los obtenidos con el programa ANFLEX, se observa una concordancia muy buena en la primera región del *riser*, correspondiente a la longitud de la zona que está en contacto con el suelo marino, para ambos coeficientes de arrastre. En las demás secciones del *riser* esta comparación no es tan buena pero los modelos presentan la misma tendencia. Como explicado en el problema anterior, fueron realizadas extrapolaciones de los resultados numéricos en el punto de conexión de la manguera con el flotante, mostrado en la figura 5.2.4 con las líneas punteadas.

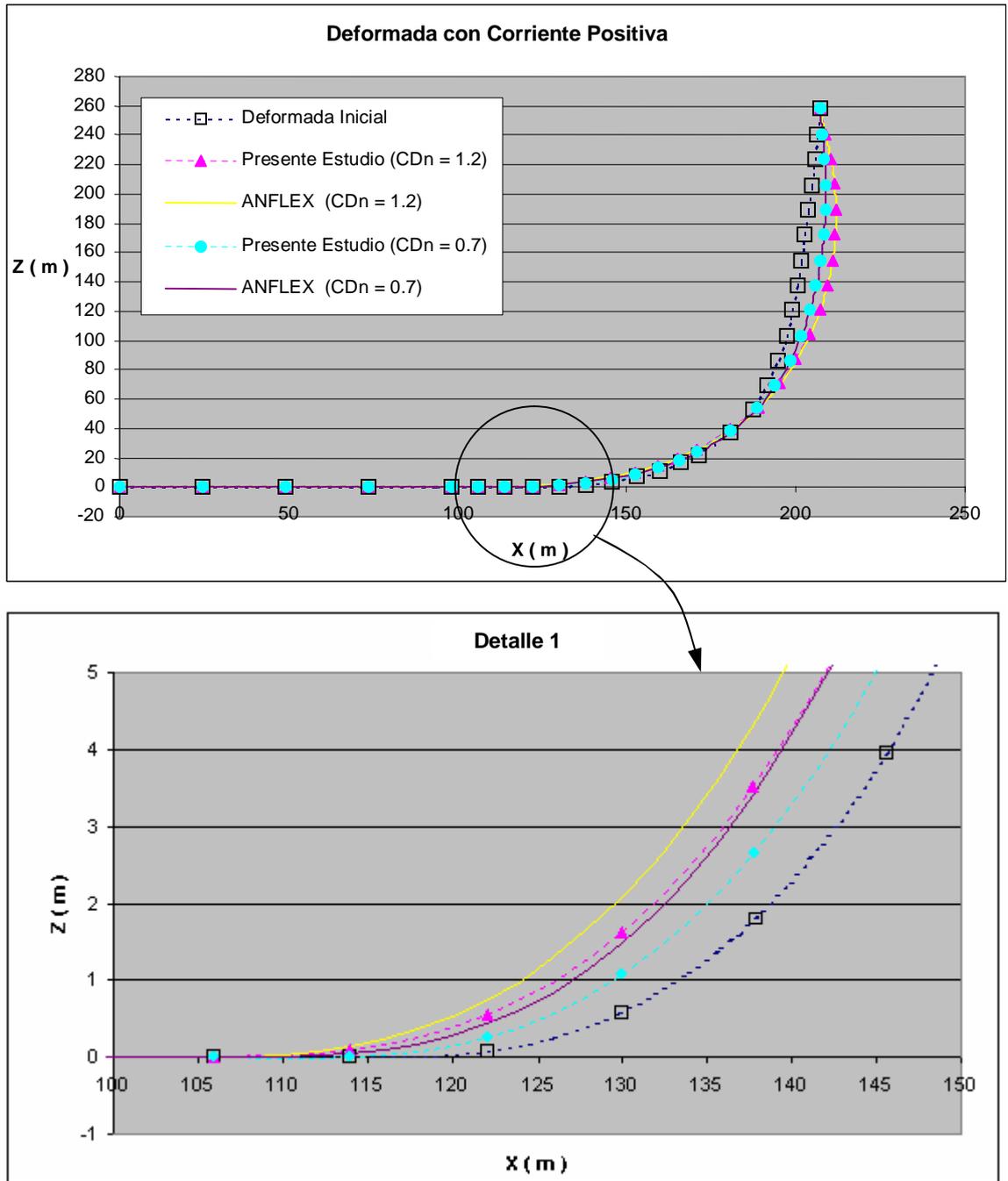


Figura 5.2.3 Deformadas del ducto flexible incluida una corriente positiva (*Far*)

En la figura 5.2.5 están presentadas las configuraciones deformadas del ducto, ahora sobre la acción de una corriente negativa. Se observa una concordancia muy buena entre los resultados numéricos pudiéndose aun observar, en el detalle 1, las diferencias para valores distintos de coeficiente de arrastre.

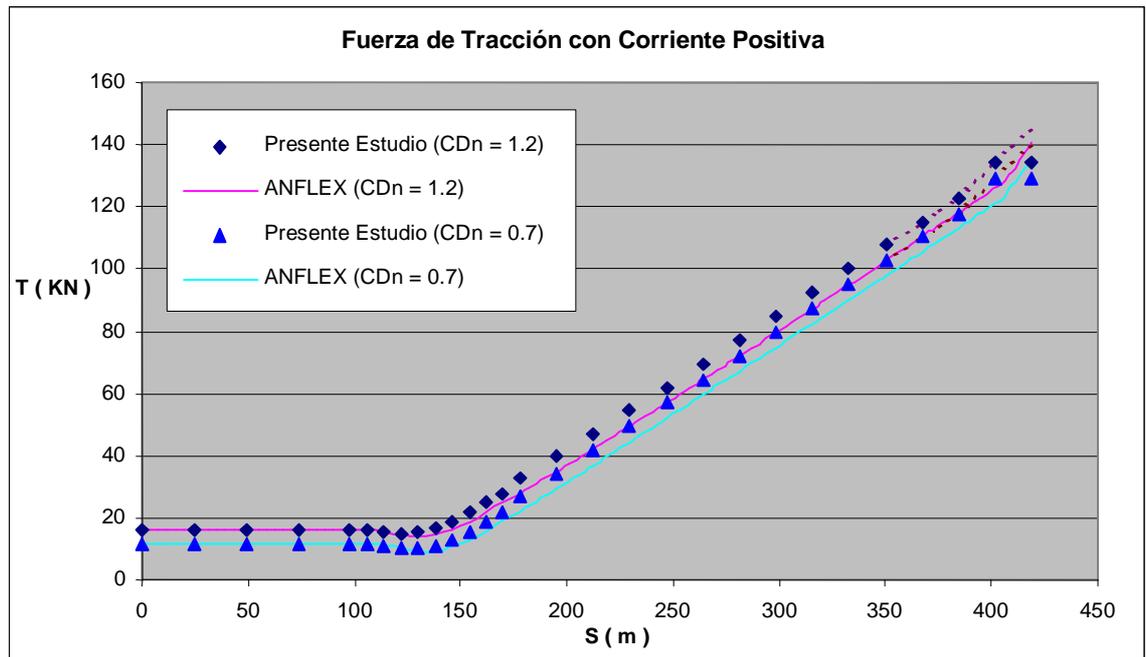


Figura 5.2.4 Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud con corriente positiva

Para este caso, también el mayor desplazamiento acontece en la deformada en la cual fue considerado un $CD_n = 1.2$, este desplazamiento acontece en el segmento superior del ducto.

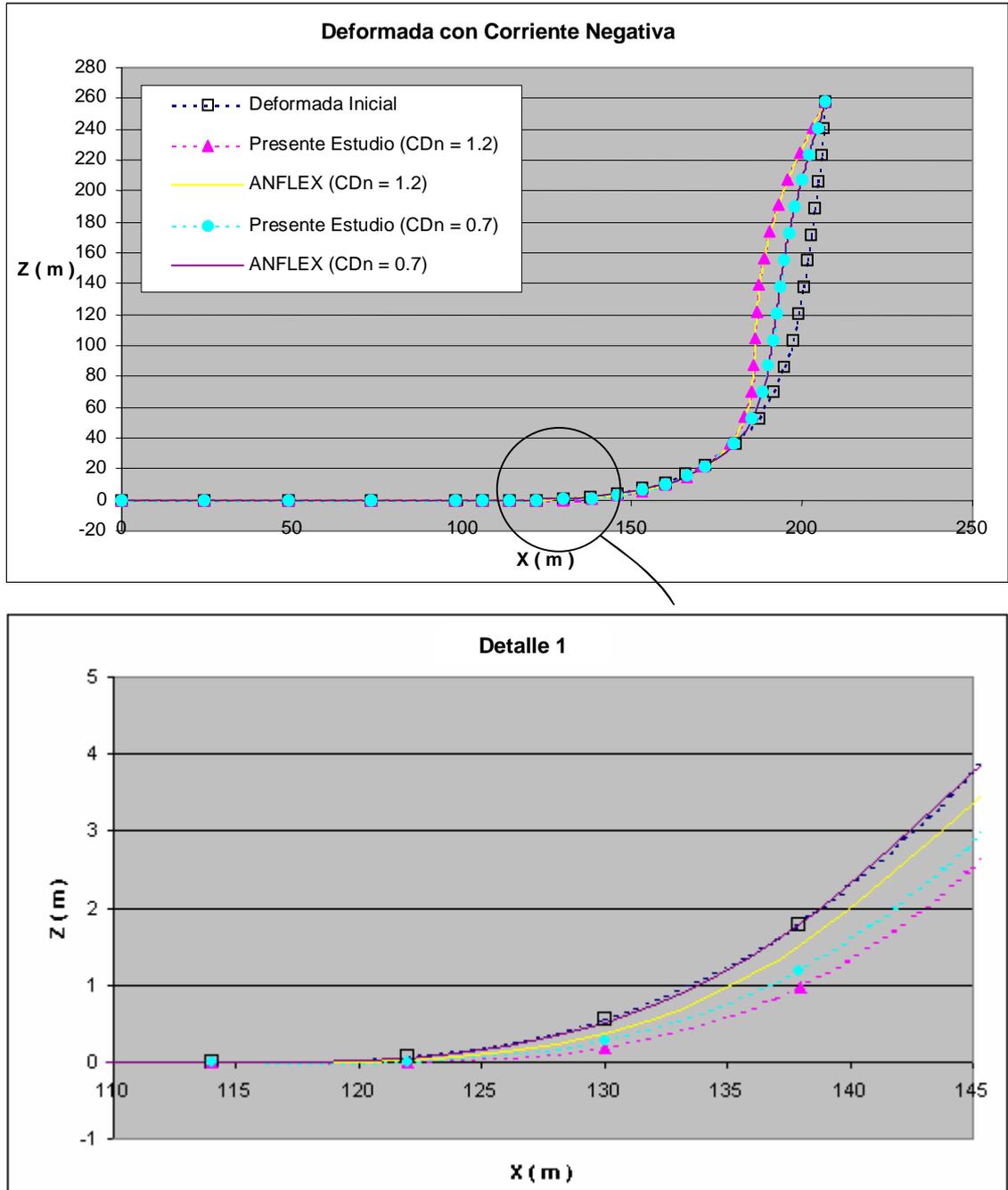


Figura 5.2.5 Deformadas del Ducto Flexible cuando aplicada una corriente negativa (*Near*)

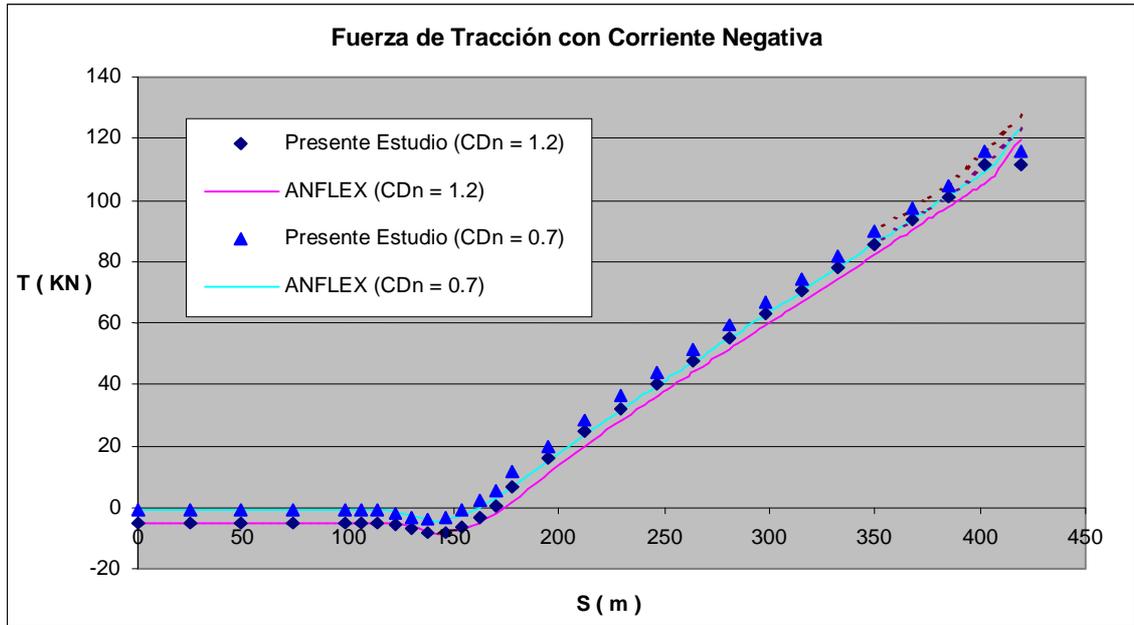


Figura 4.2.6 Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud con corriente negativa

El efecto de la corriente negativa en la definición de la zona del punto de contacto con el suelo marino es traducido por un “adelantamiento” del mismo, esto para ambos coeficientes de arrastre, como se observa en el detalle 1 de la figura, siendo este desplazamiento de aproximadamente 4 m. El mismo efecto fue observado en las deformadas obtenidas con el programa ANFLEX.

En la figura 5.2.6 está presentada la variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible, para la corriente negativa. Los resultados obtenidos en la sección inicial del *riser*, correspondiente a la zona en contacto con el suelo marino, están con muy buena concordancia con valores obtenidos con el programa ANFLEX. Para el resto del ducto, como mostrado en la figura 5.2.4, los valores de la fuerza de tracción obtenidos con el presente estudio divergen de los encontrados con el programa ANFLEX. En este caso, se puede observar que, debido al efecto de la corriente negativa,

la fuerza de tracción del ducto en la zona de contacto con el suelo marino es de compresión.

También, de la misma forma observada en el caso de corriente positiva, se verifica una gran sensibilidad de la fuerza de tracción en el *riser* a la variación del coeficiente de arrastre normal. De forma a presentarse este efecto, los valores de las fuerzas de tracción (máximos) en el punto de contacto del *riser* con el flotante, obtenidos en el presente estudio, son comparados con los obtenidos por (Mourelle, 1984) y con el modelo del programa ANFLEX en la Tabla 5.2.3.

Fuerza de Tracción T [MN]						
	(Mourelle, 1984)		ANFLEX		Presente Estudio	
	Corriente a 0°	Corriente a 180°	Corriente a 0°	Corriente a 180°	Corriente a 0°	Corriente a 180°
CDn = 0.7	0.1448 (3.32 %)	0.1276 (0.55%)	0.1357 (-3.14 %)	0.1234 (-2.76 %)	0.1401	0.1269
CDn = 1.2	0.1569 (8.07 %)	0.1329 (8.23 %)	0.1406 (-3.17 %)	0.1197 (-2.52 %)	0.1452	0.1228

Tabla 5.2.3 Valores de la fuerza de tracción en la conexión del ducto con el flotante

5.3 COMPORTAMIENTO DE UN DUCTO FLEXIBLE EN CONFIGURACIÓN *STEEP-WAVE*

En este ejemplo, se verifica la aplicabilidad del modelo desarrollado para el análisis de *risers* en contacto con el suelo marino para determinación de la configuración de equilibrio estático. Un *riser* flexible de 420 m de longitud como muestra la figura 5.3.1, fue analizado estáticamente. El punto superior del *riser* está conectado a un flotante, 22 m abajo del nivel del mar y sigue el movimiento del mismo cuando expuesto a la corriente marina. El otro extremo del ducto está anclado en un punto 9 m arriba del nivel del suelo marino. En ambos puntos el ducto puede girar libremente.

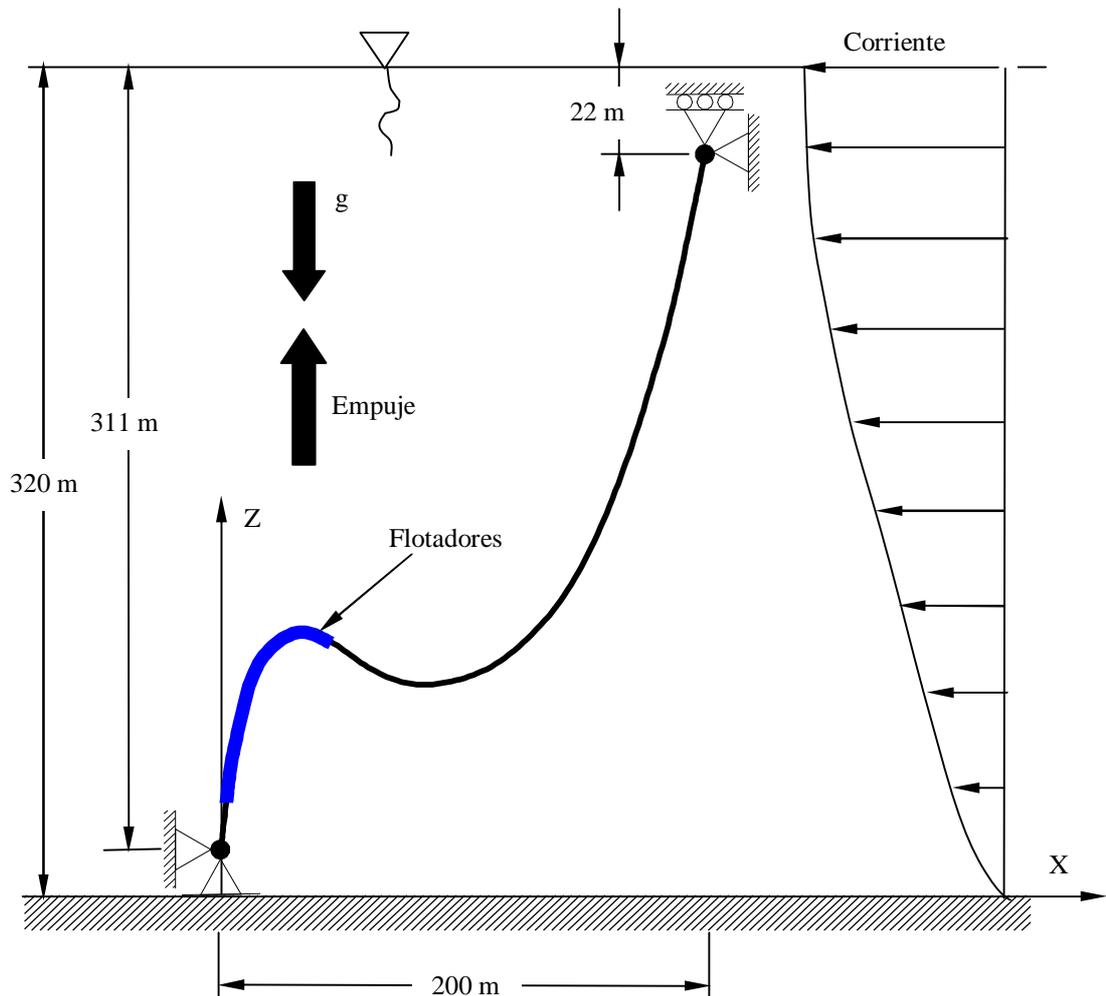


Figura 5.3.1 Ducto flexible en la configuración *Steep-Wave*

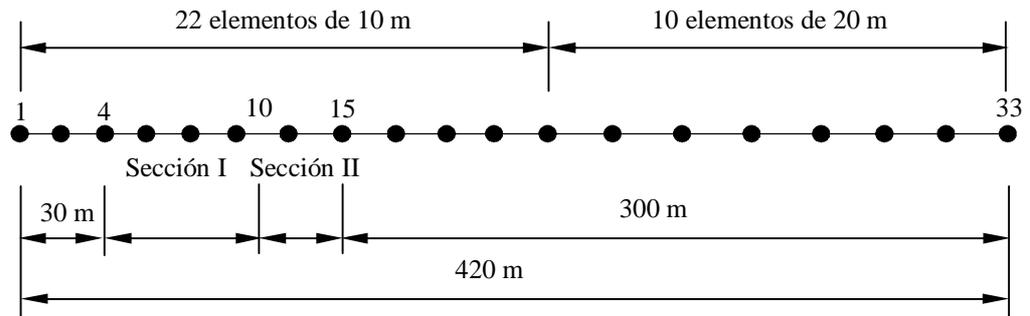


Figura 5.3.2 Discretización del modelo utilizado

Las características físicas y geométricas del *riser* y de los flotadores están presentadas en la tabla 5.3.1.

El presente problema está reportado en (Mathisen et al., 1986), para el análisis del problema del perfil estático de un *riser* flexible en la configuración *Steep-Wave*, utilizando una técnica de solución incremental para la obtención de la configuración final de equilibrio.

La discretización utilizada para representar el modelo utilizado en este problema es la misma reportada por (Mathisen et al., 1986) y está presentada en detalle en la figura 5.3.2. El *riser* fue dividido en cuatro secciones, en las cuales las secciones I y II corresponden a los segmentos donde están fijados los flotadores.

Inicialmente se consideran los resultados obtenidos en la condición de equilibrio estático, como mostrado en la figura 5.3.3, en que fueron considerados apenas el peso propio del ducto y el empuje, aplicados en su totalidad en un único paso del análisis, obteniéndose de esta manera la configuración de una catenaria simple. La carga proveniente de los flotadores son, en seguida, aplicados en 5 pasos, con el primero correspondiendo a 50 %

del valor total del empuje. En este fueron necesarios 15 iteraciones para alcanzarse la posición de equilibrio parcial, siendo que los restantes 50 % de empuje fueron divididos en cuatro pasos de igual intensidad, hasta llegar a la posición de equilibrio final de esta etapa del análisis, siendo para cada paso necesarios un número menor de iteraciones en comparación al primer paso, conforme mostrado en la figura.

Tabla 5.3.1 Características físicas y geométricas del ducto y de los flotadores

Características del Ducto Flexible	
Longitud Total	420 m
Rigidez Axial (EA)	9.60×10^6 N
Rigidez Flexional (EI)	3.417×10^4 Nm ²
Masa por Unidad de Longitud	112.4 kg/m
Empuje por Unidad de Longitud	599.4 N/m
Diámetro Externo	0.2755 m
Diámetro Interno	0.2008 m
Coefficiente de Arrastre Normal (CDn)	1.0
Características de los Flotadores	
Masa por Unidad de Longitud del Flotador de la Sección I	222.4 kg/m
Masa por Unidad de Longitud del Flotador de la Sección II	129.3 kg/m
Empuje del Flotador de la Sección I	4970.3 N/m
Empuje del Flotador de la Sección II	2889.7 N/m
Diámetro Hidrodinámico en la Sección de los Flotadores	0.9 m

Al final fueron realizadas 45 iteraciones durante el procedimiento de obtención de la configuración de equilibrio. Este número podría ser reducido caso la aplicación del empuje de los flotadores fuera impuesta en un número mayor de pasos. En las diversas configuraciones deformadas presentadas en la figura 5.3.3 se observa que los desplazamientos del *riser*, en el primer y

segundo paso, son mayores en relación a los pasos restantes, lo que justifica el alto número de iteraciones realizadas.

En la figura 5.3.4 están presentadas las configuraciones de la deformada obtenidas con el presente estudio en otras referencias. Se puede observar una concordancia muy buena entre los resultados. En la comparación con la deformada obtenida con el programa ANFLEX se observa, en la región entre los flotadores y el punto de anclaje con el suelo marino, una pequeña diferencia en los resultados, no comprometiendo los resultados para el restante del *riser* en que la convergencia entre ambos resultados es también muy buena.

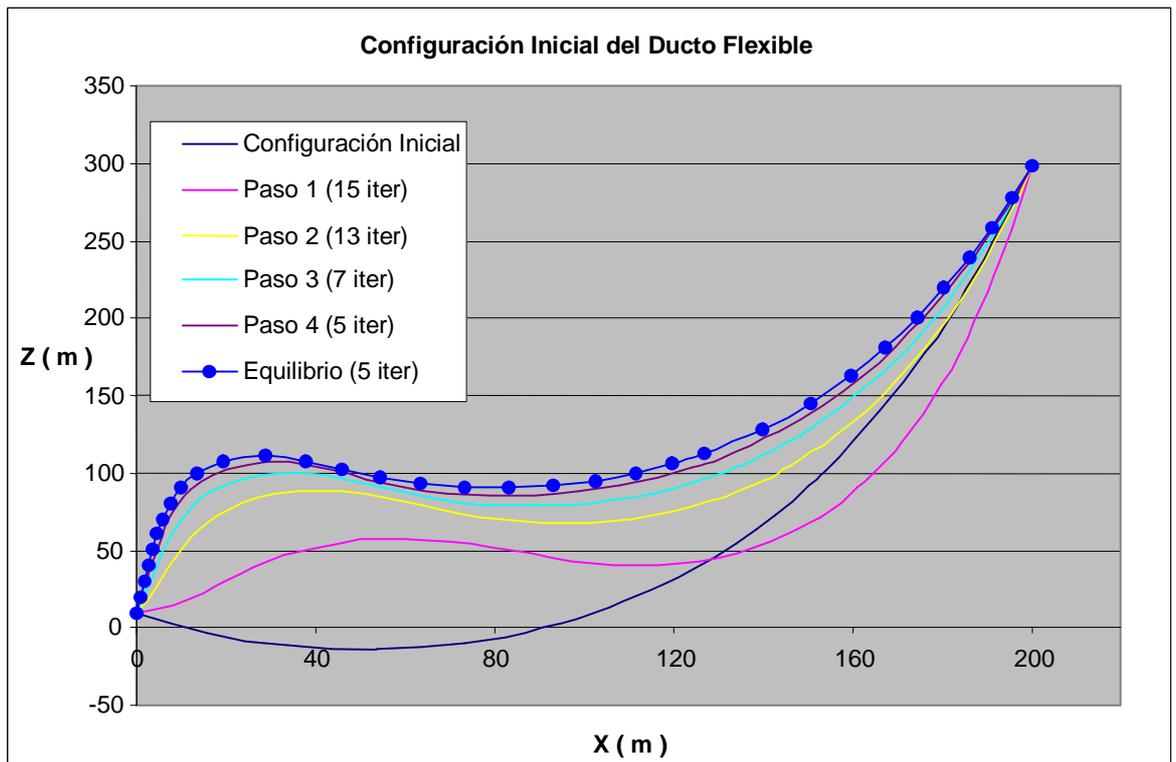


Figura 5.3.3 Secuencia de las configuraciones deformadas del ducto flexible comenzando con una catenaria simple

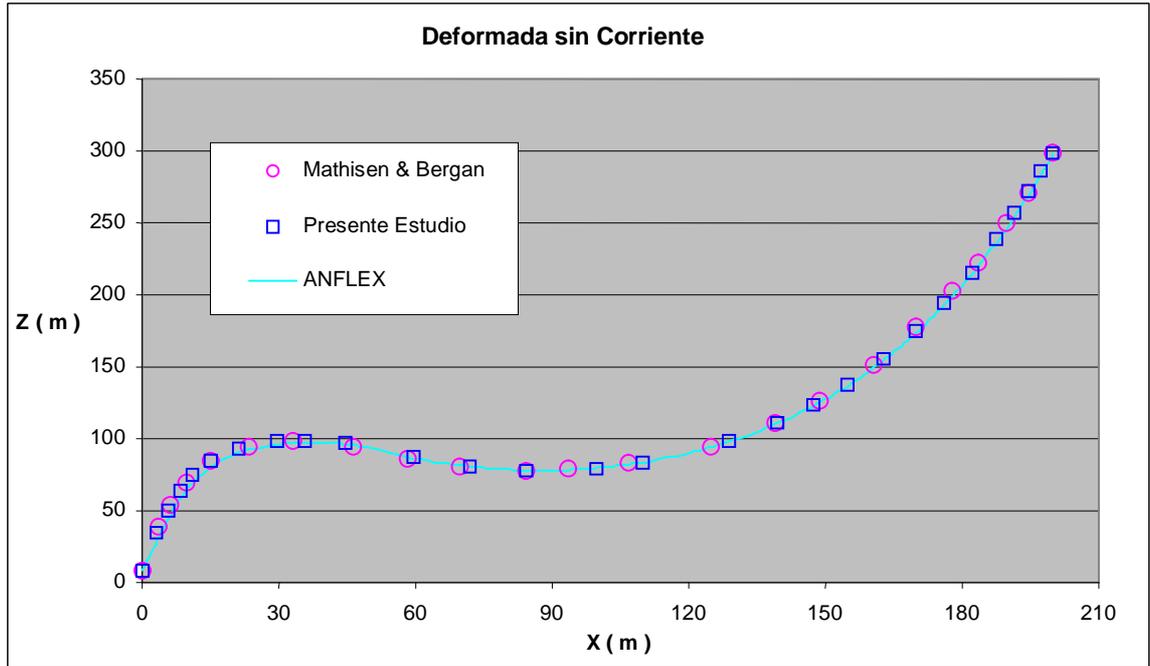


Figura 5.3.4 Comparación de las configuraciones de equilibrio obtenidas sin la aplicación de corriente marina

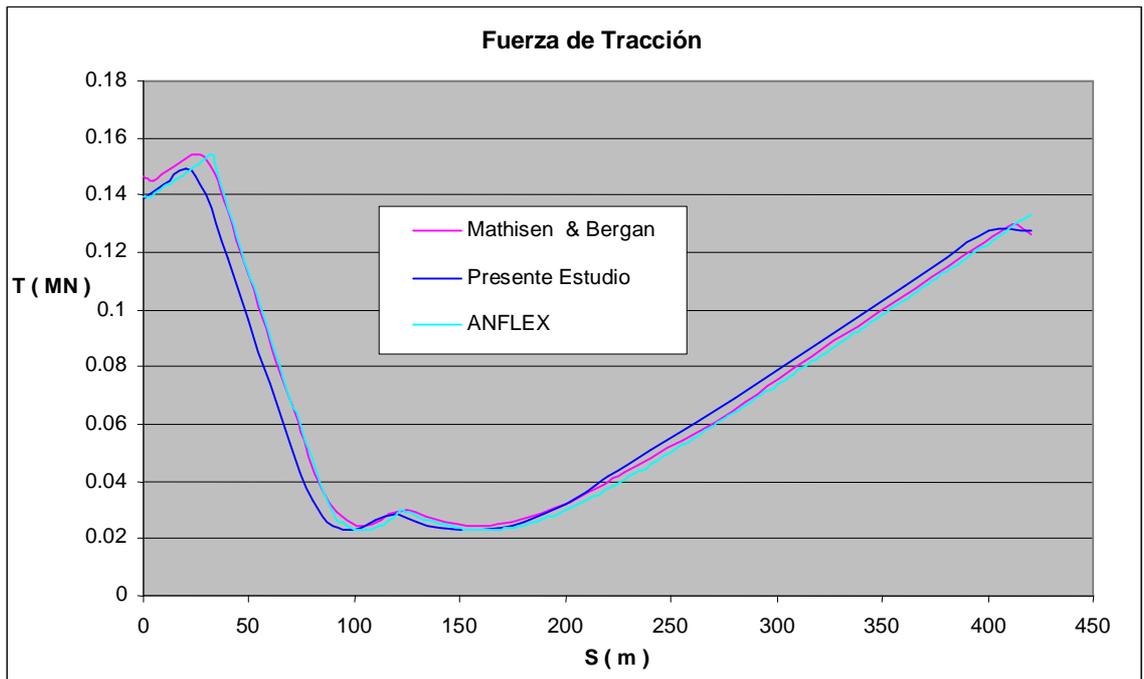


Figura 5.3.5 Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto sin corriente marina

La variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del *riser*, cuando esta no sufre los efectos de la corriente marina, es mostrada en la figura 5.3.5. Se puede observar en los resultados obtenidos por el análisis numérico con el presente modelo algunas diferencias, no comprometiendo la tendencia de los resultados reportados en (Mathisen et al., 1986) así como con el programa ANFLEX. Estas diferencias entre los valores numéricos máximos y mínimos son de 2.1 % y 8.3 %, respectivamente, no comprometiendo el buen resultado obtenido con el análisis y corresponden a los flotadores (entre los 30 y 90 m iniciales).

En la segunda etapa del análisis numérico son entonces añadidos los efectos de la corriente marina y de la excursión (*offset*) estático del flotante, de valor 25.7 m en el sentido del flujo de la corriente. El *riser* flexible es expuesto a una corriente positiva (*Far*) y otra negativa (*Near*), cuyo perfil de velocidades está presentado en la tabla 5.3.2.

Tabla 5.3.2 Perfil de velocidades de la corriente marina

Profundidad (m)	Velocidad (m/s)
0	1.71
25	1.42
50	1.25
100	0.85
200	0.70
317	0.50
320	0

Inicialmente se aplicaron los efectos de una corriente positiva, en que el flotante sufre una excursión (*offset*) de 25.7 m en el sentido positivo del eje x del sistema de referencia, mostrado en la figura 5.3.1. La deformada está

presentada en la figura 5.3.6, en que se comparan los resultados del presente estudio con los obtenidos en (Mathisen et al., 1986) y con el programa ANFLEX, resultando en una concordancia muy buena de los resultados. En la figura 5.3.7 se presenta la variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del *riser*, para este caso de análisis. Una diferencia entre los resultados obtenidos en el presente estudio con aquellos obtidos con los otros modelos numéricos es observada. De forma semejante al caso sin corriente, se obtuvo una diferencia mayor, entre los resultados con el presente modelo en la región del ducto flexible junto a los flotadores, cuando comparados con (Mathisen et al., 1986) pero, después de los primeros 100 m la concordancia entre los resultados es buena.

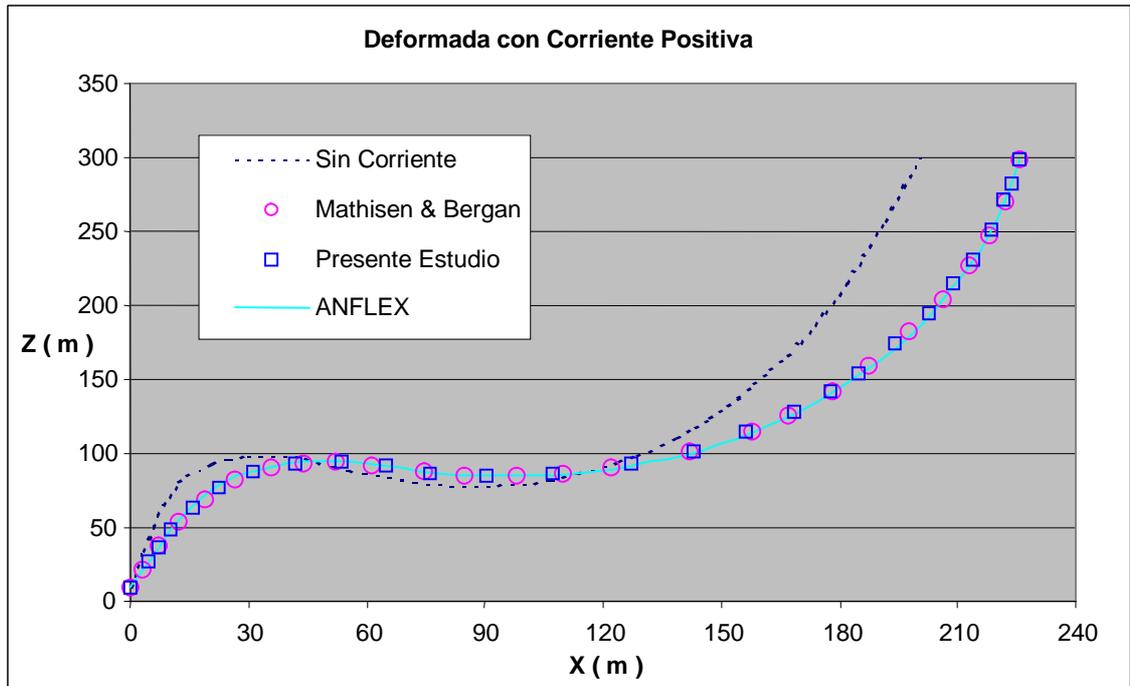


Figura 5.3.6 Deformada del ducto flexible obtenida después de la aplicación de una corriente positiva

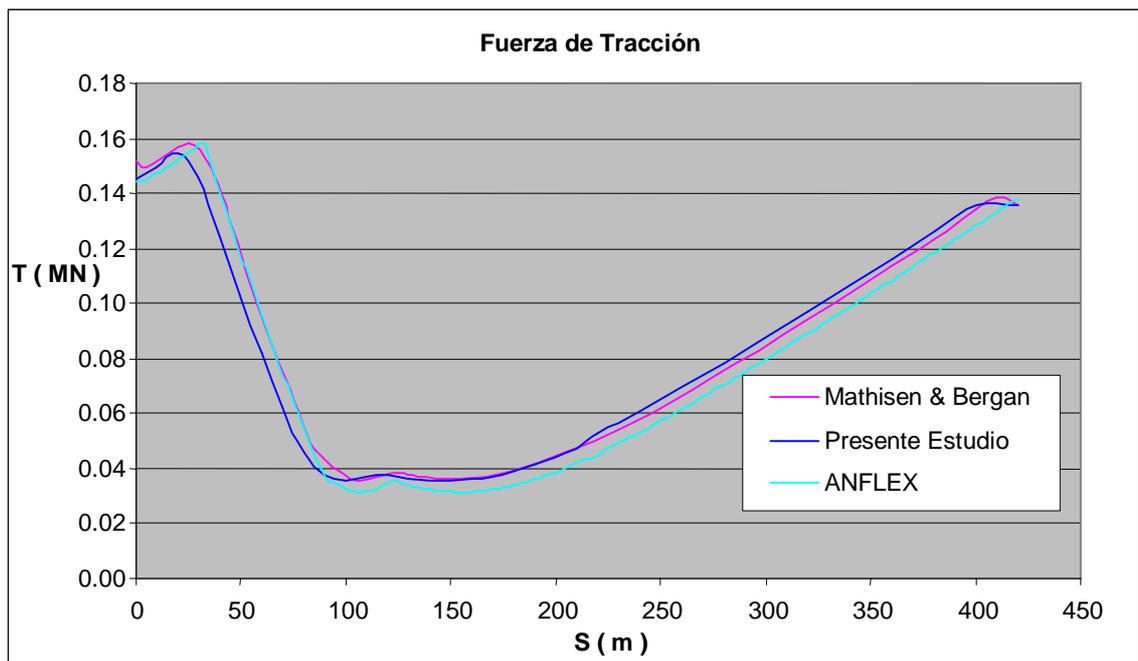


Figura 5.3.7 Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible después de la aplicación de una corriente positiva

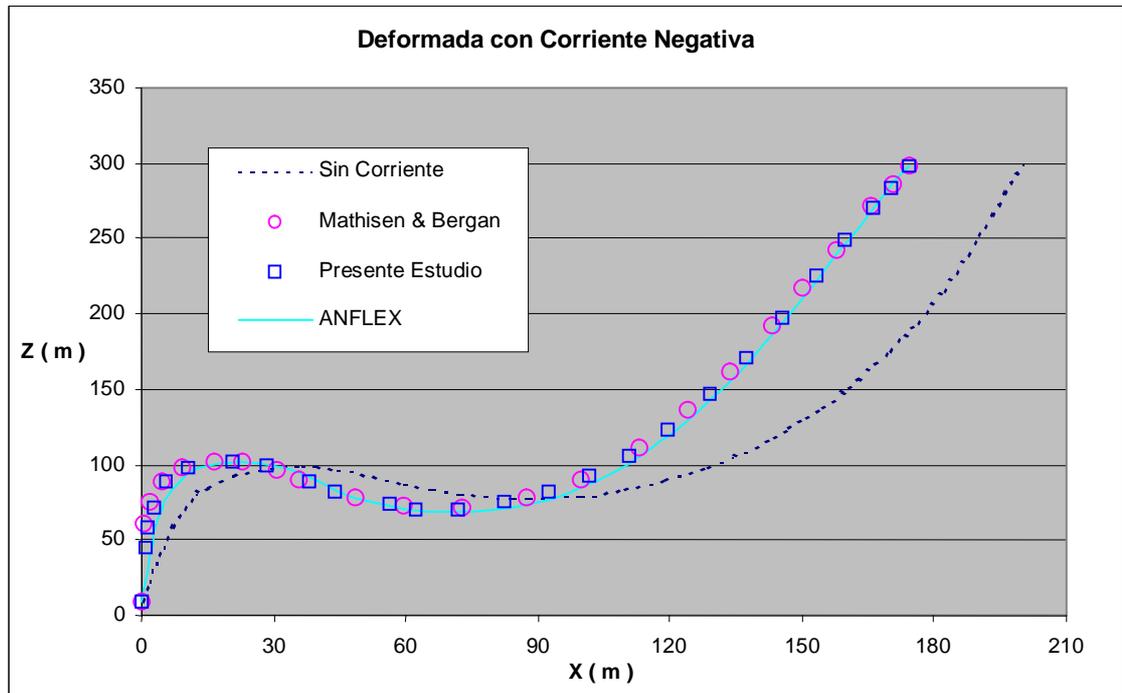


Figura 5.3.8 Deformada del ducto flexible después de la aplicación de una corriente negativa

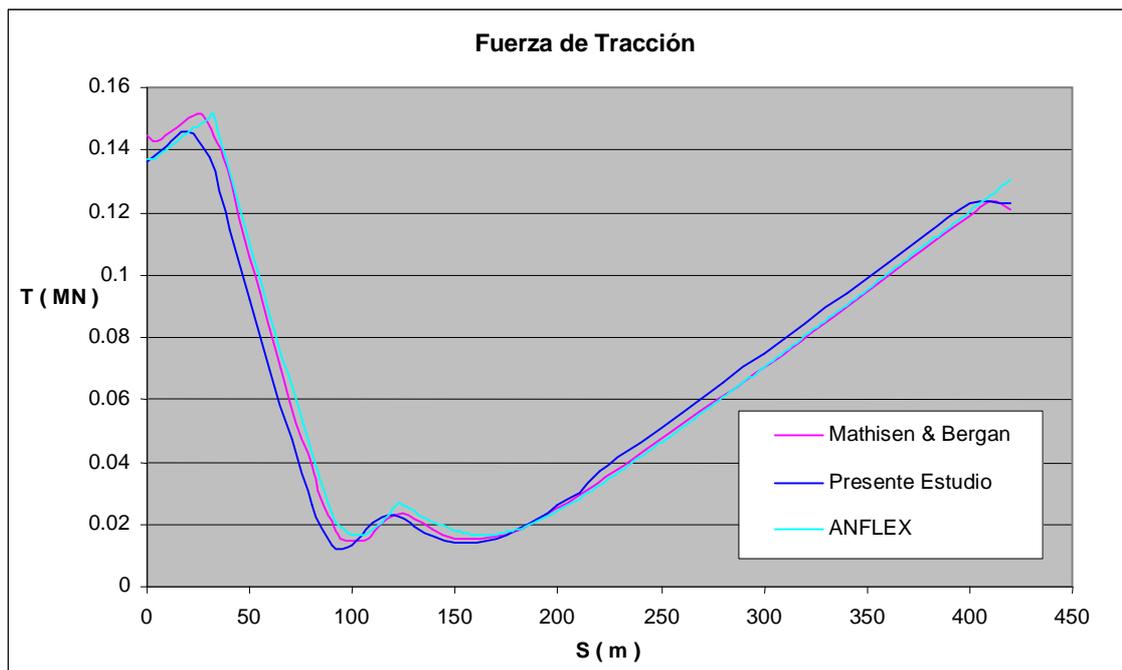


Figura 5.3.9 Variación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible después de la aplicación de una corriente negativa

Finalmente se aplica sobre el *riser* una corriente en el sentido negativo con el flotante sufriendo una excursión (*offset*) de 25.7 m en el sentido contrario al eje x (figura 4.3.1). Las configuraciones de las deformadas obtenidas con los tres modelos numéricos están presentadas en la figura 5.3.8. Se observa una buena concordancia entre las curvas pero, en la región correspondiente a los flotadores, en el caso del modelo con el programa ANFLEX, observase, de igual manera como en la figura 5.3.4, una pequeña diferencia entre los resultados en la zona anterior al inicio de los flotadores y, así como en la zona posterior al final de los flotadores.

La variación de la fuerza de tracción es mostrada en la figura 5.3.9. Los resultados numéricos obtenidos con el presente estudio, aquellos reportados en (Mathisen et al., 1986) y con el modelo del programa ANFLEX presentan tendencias semejantes, pero con diferencias cuya razón puede ser apuntada por la forma aproximada como las tensiones nodales son evaluadas para cada tipo de formulación.

5.4 COMPORTAMIENTO DE UN DUCTO RÍGIDO EN CATENARIA

Este análisis se basa en el ejemplo numérico presentado por (Ghadimi, 1988). En el modelo utilizado la discretización del ducto se da por elementos finitos asociados a un resorte linear elástico y por masas concentradas (*lumped mass*) se obteniendo las condiciones de movimiento del *riser*. Efectos de fricción entre el *riser* rígido y el suelo marino no son considerados.

Inicialmente se realiza el análisis estático del ducto, con las cargas de peso propio y de empuje. Se comparan los resultados obtenidos del programa desarrollado en el presente trabajo con el modelo numérico y la solución analítica (aproximada) para una catenaria biapoyada presentados por (Ghadimi, 1988) y también, con el modelo utilizado con el programa ANFLEX. En el análisis dinámico, la comparación ocurre entre los resultados del presente estudio con los producidos por el programa ANFLEX. La comparación con los resultados producidos en Ghadimi no fue posible porque incluían la carga debido a ondas, no disponible en el presente trabajo. Así, un análisis dinámico, considerando solo movimientos prescritos en la extremidad superior y un perfil de corriente, como está mostrado en la figura 5.4.1, es presentado en el presente trabajo.

El ducto rígido de 540 m de longitud en forma de una catenaria suspensa es mostrada en la figura 5.4.1, siendo representada por 35 elementos distribuidos en 3 segmentos definidos de la siguiente manera: un primer segmento con 80m es modelado con 4 elementos, este segmento está permanentemente en contacto con el suelo marino (los nodos se desplazan apenas

horizontalmente), el segundo segmento con 120m de longitud es representado por 10 elementos y es la región en que ocurre el contacto variable y un tercer segmento con 340m de longitud que está siempre suspenso en relación al suelo marino. Las propiedades mecánicas de la *riser* rígido y de los fluidos involucrados están presentadas en la tabla 5.4.1 a seguir,

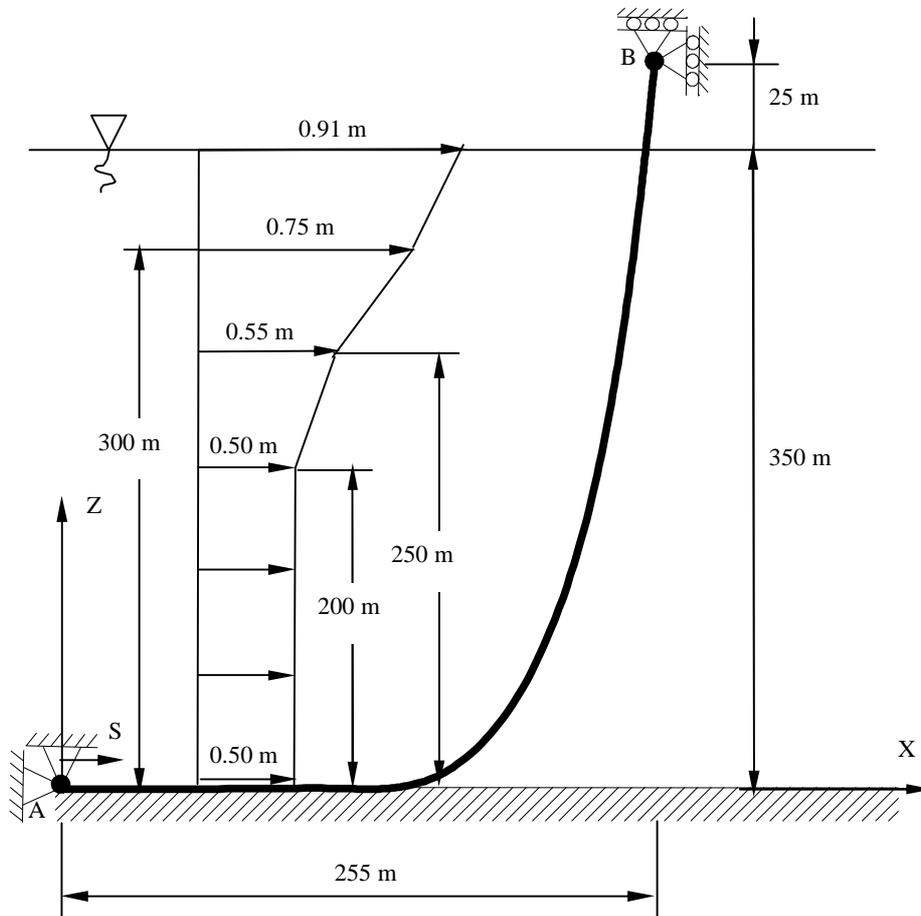


Figura 5.4.1 Ducto rígido en catenaria (S = Coordenada local a lo largo del ducto)

Tabla 5.4.1 Propiedades mecánicas y geométricas del ducto

Longitud total	540 m
Rigidez axial (EA)	$3.27 \cdot 10^8$ N
Rigidez flexional (EI)	$3.4 \cdot 10^4$ Nm ²
Masa específica lineal	102 Kg/m
Diámetro externo	0.2766 m
Diámetro interno	0.1630 m
Masa específica del fluido externo	1025 Kg/m ³
Masa específica del fluido interno	0.013 Kg/m ³
Coefficiente de arrastre hidrodinámico normal	0.9

En un primer paso del análisis estático se utilizó como solución la catenaria elástica, considerándose apenas la rigidez axial, la cual está sometida a las cargas del peso propio y del empuje. En el segundo paso se consideró, además de estas cargas, también los efectos del contacto con el suelo marino. De esta forma, manteniendo las extremidades del ducto fijas, son realizadas las iteraciones necesarias hasta que ninguno de los nodos del *riser* “penetren” el suelo marino o, equivalentemente, ningún nodo podrá estar abajo del nivel horizontal del suelo marino. En la figura 5.4.2 son mostradas las sucesivas configuraciones obtenidas del *riser*, a partir de la configuración de la catenaria inicial sin la consideración del contacto con el suelo marino hasta la convergencia de la solución, después de 31 iteraciones. Notese que, en la solución al final de la primera iteración, el ducto presenta una fuerte compresión (numérica) debido a la imposición de la restricción de los desplazamientos en el contacto. Sin embargo, debido al efecto del peso propio, en las iteraciones siguientes el *riser* vuelve a estar traccionada a lo

largo de su longitud. Y así, en las iteraciones siguientes se observa una fuerte disminución de este efecto de compresión (iteraciones 5-20), acompañado de una flexión del *riser*, especialmente junto a la región de inicio del contacto (*touch down point - tdp*). En el detalle 1 de la figura 5.4.2 son observadas las diversas soluciones obtenidas junto al punto de contacto con el suelo marino (*touch down point*).

En la figura 5.4.3 son comparados los resultados para la deformada de la línea en catenaria, considerados los efectos del peso propio, del empuje y del contacto con el suelo marino. Estos resultados incluyen los producidos por (Ghadimi, 1988), aquellos obtenidos con el programa ANFLEX y con el programa del presente estudio. Se observa que de una forma general, ocurre una buena concordancia entre las soluciones habiendo una mayor proximidad entre las configuraciones de la deformada obtenidos con el presente estudio y aquellas con el programa ANFLEX. Las diferencias de las soluciones con las producidas por Ghadimi pueden ser atribuidas a que la formulación considera el modelo simplificado con masas concentradas, y apenas los efectos de la rigidez axial del flexible. En (Ghadimi, 1988) son utilizados resultados obtenidos de la teoría de catenaria aproximada aplicada al presente problema, donde la condición del contacto es establecida a priori.

Valores numéricos obtenidos para la fuerza de tracción en la extremidad superior de la línea, la longitud de la línea en contacto con el suelo marino y la inclinación en la línea con la horizontal junto a la extremidad superior de la línea están mostrados en la tabla 5.4.2. Se observa una muy buena

concordancia – error menor de 1 % – para los valores obtenidos en el presente estudio en relación a los demás.

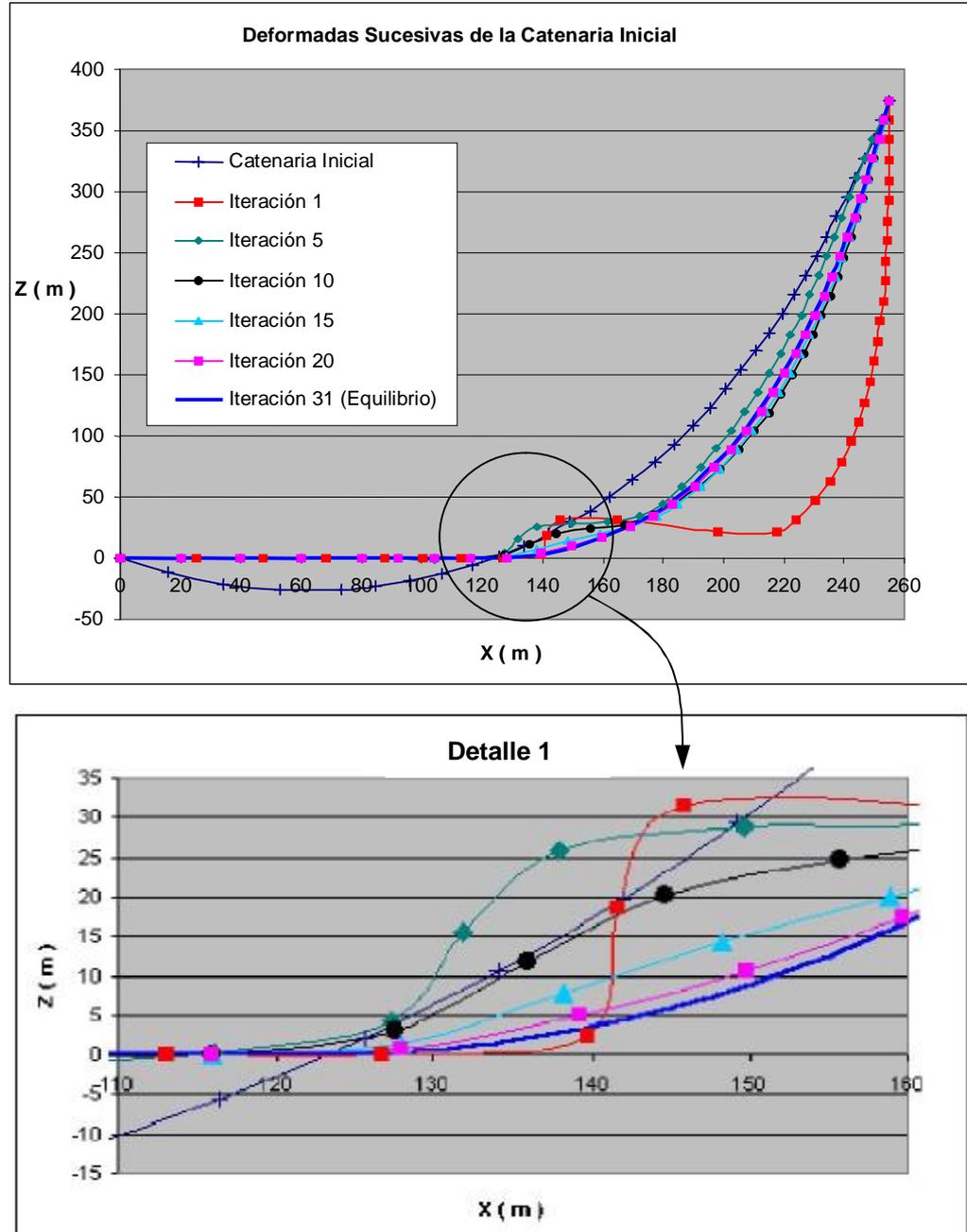
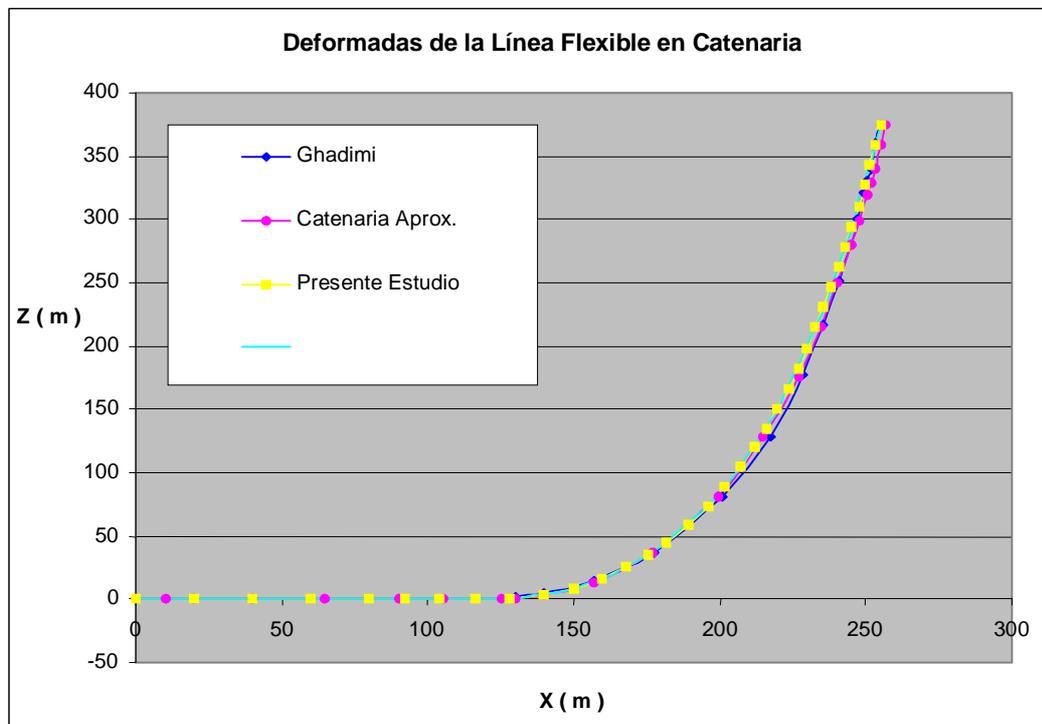


Figura 5.4.2 Deformadas sucesivas de la catenaria inicial generadas por la imposición del contacto con el suelo marino

Tabla 5.4.2 Comparación de los resultados de algunos parámetros del ducto rígido

Variable	Presente Estudio	ANFLEX	(Ghadimi, 1988)	Teoria de Catenaria Aproximada
Tracción en la Extremidad Superior del Ducto (KN)	166.67	166.84 (0.1 %)	165 (-1 %)	167 (0.2 %)
Longitud del Ducto en Contacto con el Suelo Marino (m)	120.51	119.89 (-0.5 %)	120 (-0.4 %)	121.5 (0.8 %)
Ángulo Relativo a la Horizontal de la Extremidad Superior del Ducto (Grados)	83.84	83.66 (-0.2 %)	84.6 (0.9 %)	83.7 (-0.2 %)

**Figura 5.4.3** Comparación de las soluciones para las deformadas obtenidas de los diversos modelos de análisis (Peso + Empuje + Contacto)

Además de estos, también se considera en el análisis estático otros dos efectos: un movimiento de excursión (offset) vertical (5m) y horizontal (11m) junto al punto superior B, en el sentido positivo de los ejes coordenados del sistema de referencia global, figura 5.4.1, en una representación aproximada

de los efectos de la marea y de los vientos sobre la plataforma. También la carga debido a la corriente cuyos parámetros característicos están presentados en la tabla 5.4.2, es considerada. Los resultados numéricos obtenidos para la validación de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del *riser*, sobre la carga estática, están presentados en la figura 5.4.4. De la comparación entre los resultados producidos por el programa ANFLEX y con el presente estudio, se observa una muy buena concordancia de los valores a lo largo de la longitud del ducto en contacto con el suelo marino, y una buena concordancia (error máximo de 4.7%) en el resto de la longitud. La línea punteada indica en el presente estudio una extrapolación de los valores numéricos obtenidos, debido a la aproximación utilizada en el cálculo de la tracción en el último elemento del modelo.

Tabla 5.4.3 Parámetros de corriente y del movimiento de la extremidad superior del ducto rígido

Perfil de la Corriente:	
Suelo 0.0 m	0.50 m/s
Nivel 200 m	0.50 m/s
Nivel 250 m	0.55 m/s
Nivel 300 m	0.75 m/s
Superficie	0.91 m/s
Movimiento en la dirección X:	
Periodo (T_x)	15 s
Amplitud (X_o)	10.0 m
Fase (ϕ_x)	0 °

La figura 5.4.5 presenta las deformadas obtenidas considerandose los efectos del peso propio del ducto, del empuje y de los movimientos de excursión (*offset*). Es visible, para todos los casos, una concordancia muy buena de los resultados numéricos obtenidos con el modelo del presente trabajo y con los presentados por el programa ANFLEX. En el detalle 1, resultados proximos a la región de inicio del contacto con el suelo marino *touch down point* son presentados después de aplicados los *offset* estáticos y de la corriente.

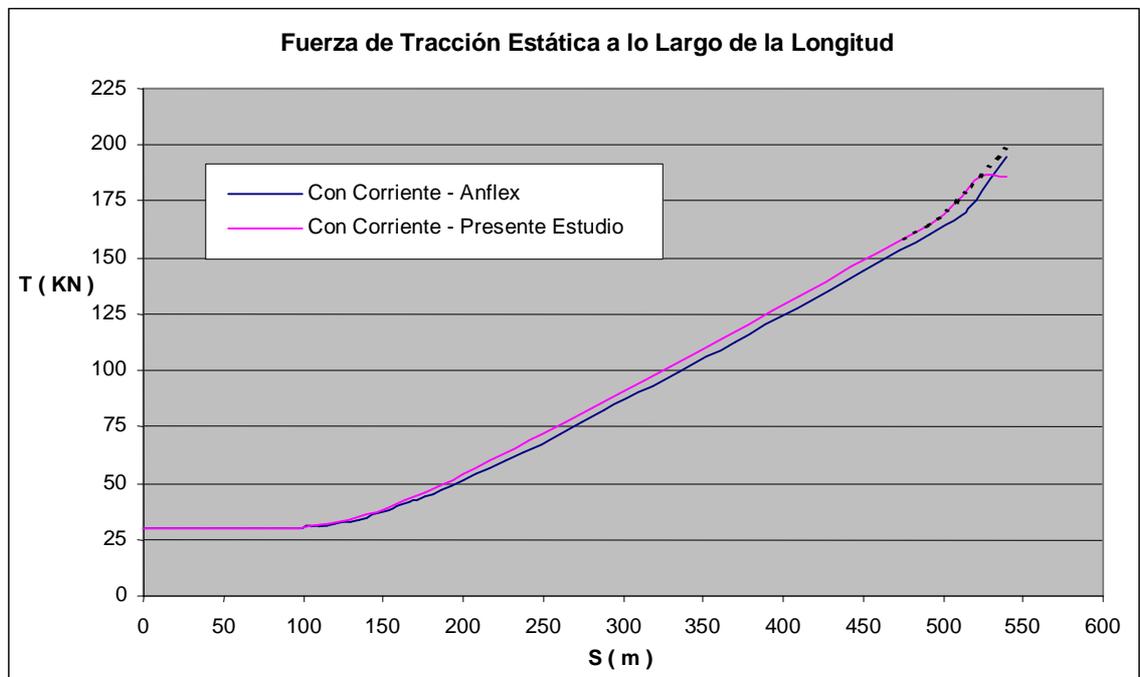


Figura 5.4.4 Variación de la fuerza de tracción a lo largo del ducto - Carga estática

La configuración estática después de aplicada la corriente es utilizada como inicial para el análisis dinámico con la velocidad del ducto impuesta como nula, en toda su extensión. La carga subsiguiente corresponde a la imposición de un movimiento horizontal armónico: $X(t) = X_0 \cos(2\pi t / T_x + \phi_x)$

prescrito en la extremidad superior del ducto, cuyos parámetros característicos están presentados en la tabla 5.4.2.

De forma a garantizar que el movimiento del ducto en los primeros instantes sea suave, minimizándose las vibraciones axiales transientes, se prescribe una función de transición (Lustosa, 2000; Mourelle, 1993) para la imposición del desplazamiento horizontal, aplicada en el intervalo de tiempo a partir del inicio del análisis dinámico hasta 11.25 segundos, que corresponde al instante especificado de conexión con la respectiva función senoidal del movimiento prescrito en régimen permanente.

Para el análisis dinámico fue utilizado un coeficiente de inercia $C_m=2.0$, ver sección 3.5, un incremento temporal de 0.05 segundos, recomendado en (Mourelle, 1993), un tiempo total integración de 50 segundos y el criterio de convergencia utilizado que corresponde a 0.01 para la proporción entre las normas de los vectores desbalanceamiento y carga externa. El método de integración utilizado fue el de Newmark en la forma implícita, con los parámetros de integración $\alpha = 0.25$ y $\delta = 0.5$ correspondientes a la condición de conservación de energía mecánica total (regla trapezoidal de integración) (Lustosa, 2000), y el amortecimiento estructural de Rayleigh $\beta_d = 0.05$.

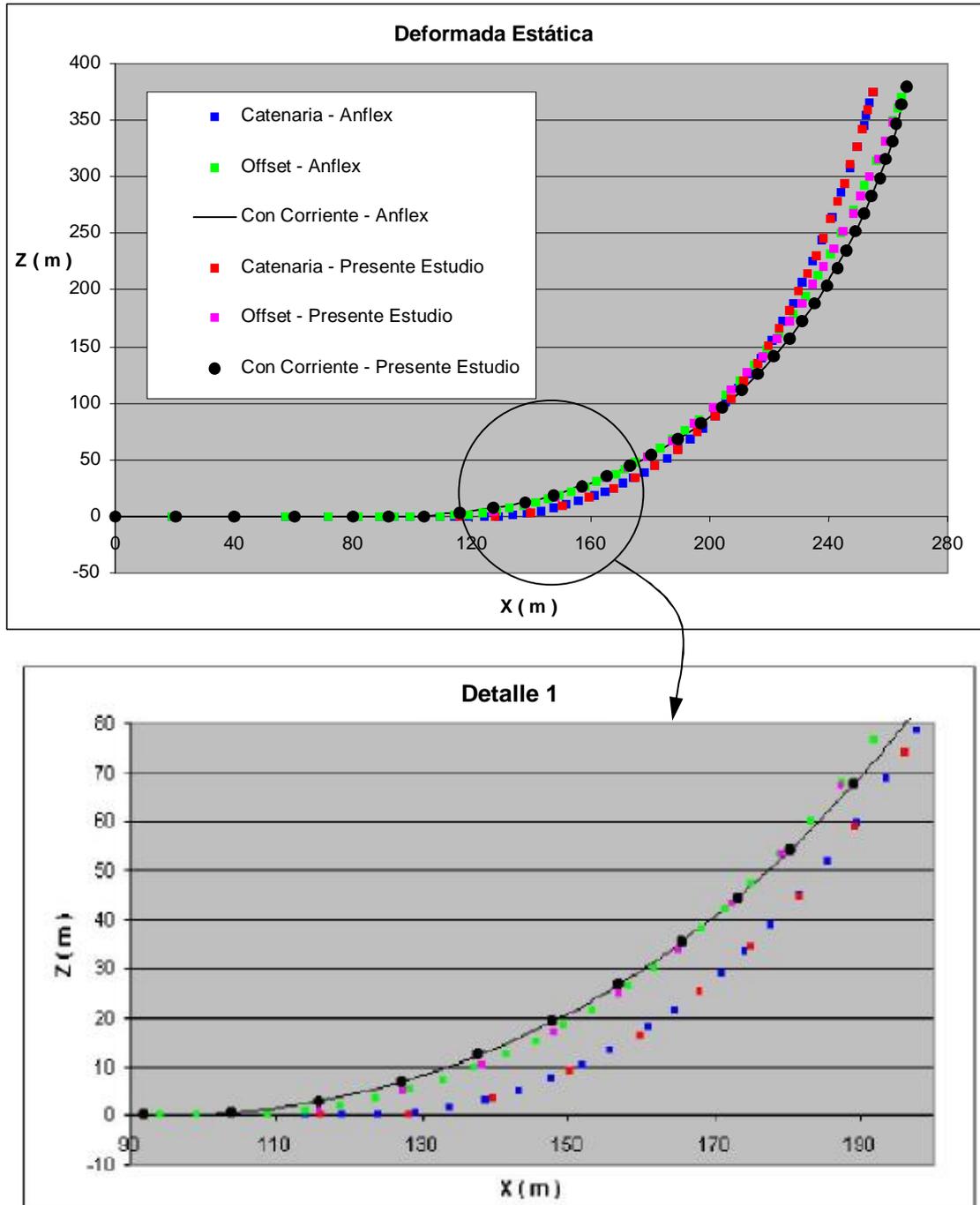


Figura 5.4.5 Deformadas del ducto considerando los efectos del *offset* estático y de la corriente marina

En las figuras 5.4.6 y 5.4.7 están presentados los resultados de las curvas deformadas obtenidas para los primeros instantes del análisis numérico y correspondientes a los instantes 2.5, 5, 7.5, 10, 12.5, 15 y 17.5 segundos. Una buena correspondencia entre los valores numéricos obtenidos es observada. En los dos primeros instantes mostrados en la figura 5.4.6 se puede visualizar una pequeña diferencia entre los resultados del presente modelo y los producidos con el programa ANFLEX. Esta diferencia se debe a que estos instantes están aun en el inicio del regimen transitorio del desplazamiento prescrito de esta análisis. Para los instantes siguientes se observa que las configuraciones pasan a tener una mejor concordancia, lo que puede ser verificado en el detalle 1, mostrado en esta misma figura, para la región superior del ducto que incluye el punto de conexión con la embarcación. Por otro lado, en la figura 5.4.7 se observa una concordancia muy buena para los tres instantes mostrados incluyendose la región superior del ducto, mostrado en el detalle 1 de esta figura.

En la figura 5.4.8 son presentadas las configuraciones deformadas correspondientes a los instantes finales del análisis numérico: 42.5, 45, 47.5 y 50 segundos. Los resultados numéricos obtenidos con el programa referente al presente estudio se mantienen en excelente concordancia con los resultados obtenidos con el modelo del programa ANFLEX. En el detalle 1, de esta misma figura, hay en escala mayor, la superposición de las deformadas obtenidas con el modelo del presente estudio y las obtenidas con el programa ANFLEX.

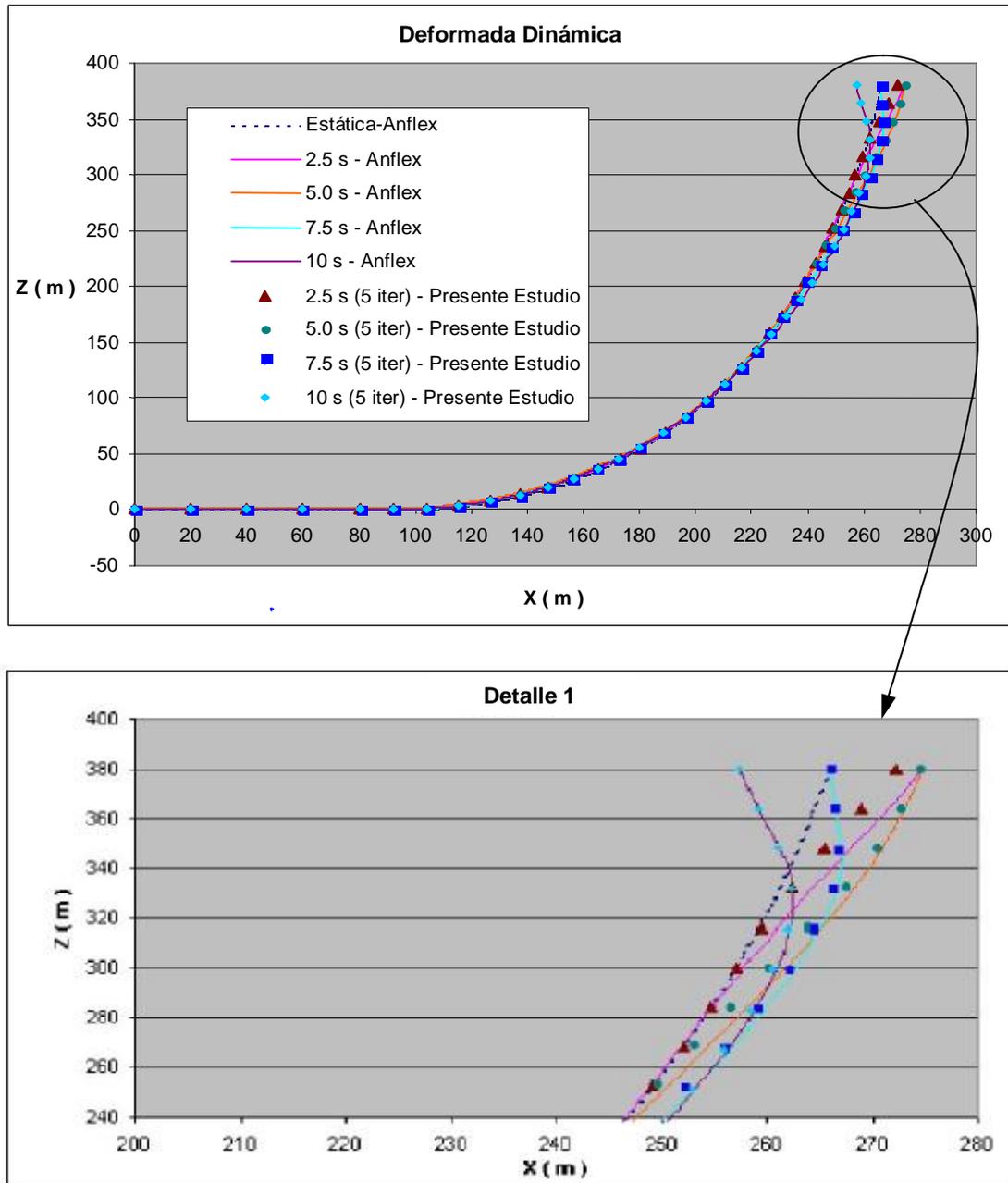


Figura 5.4.6 Deformadas del ducto correspondientes a los instantes 2.5, 5.0, 7.5 y 10.0 s

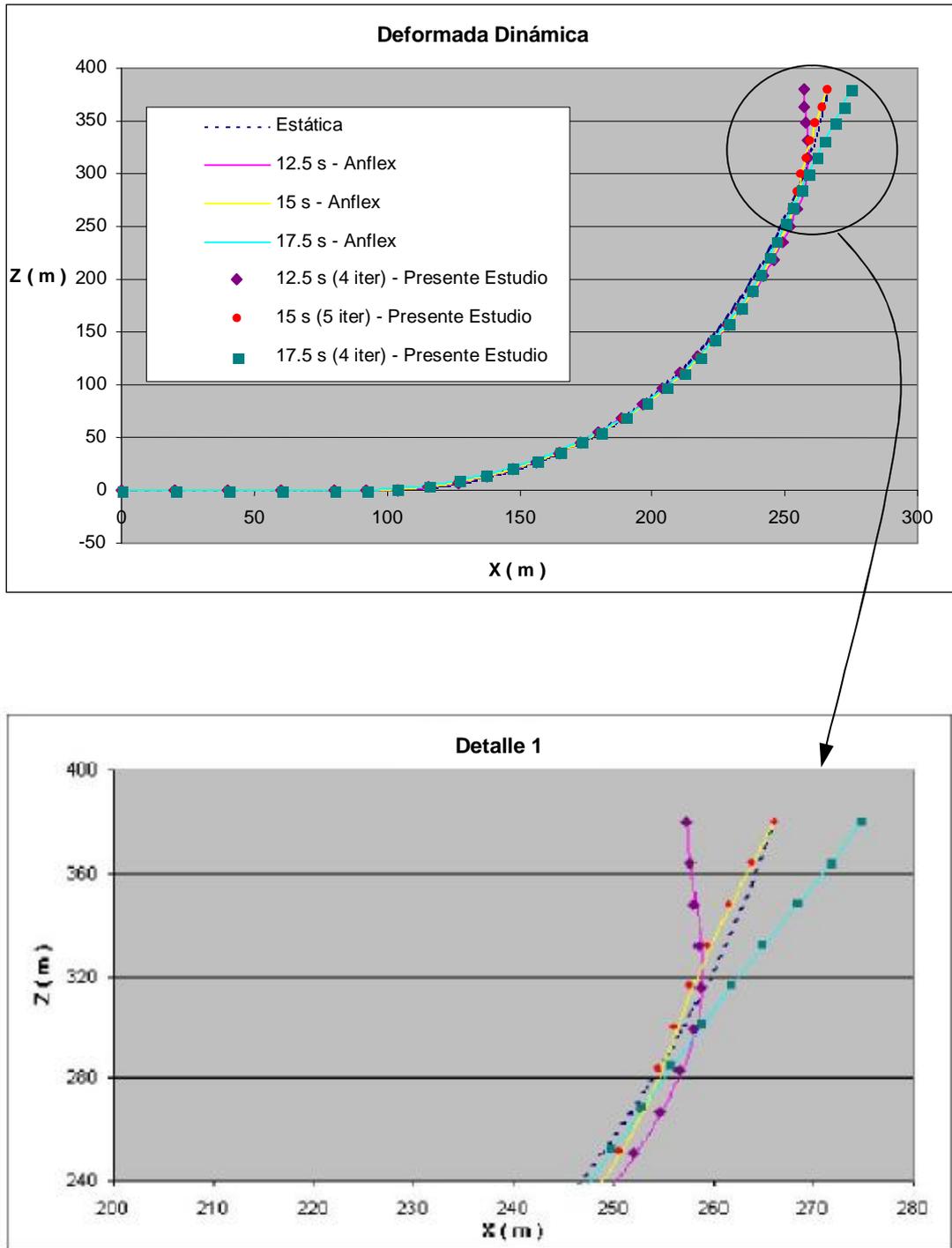


Figura 5.4.7 Deformadas del ducto correspondientes a los instantes 12.5, 15.0 y 17.5 s

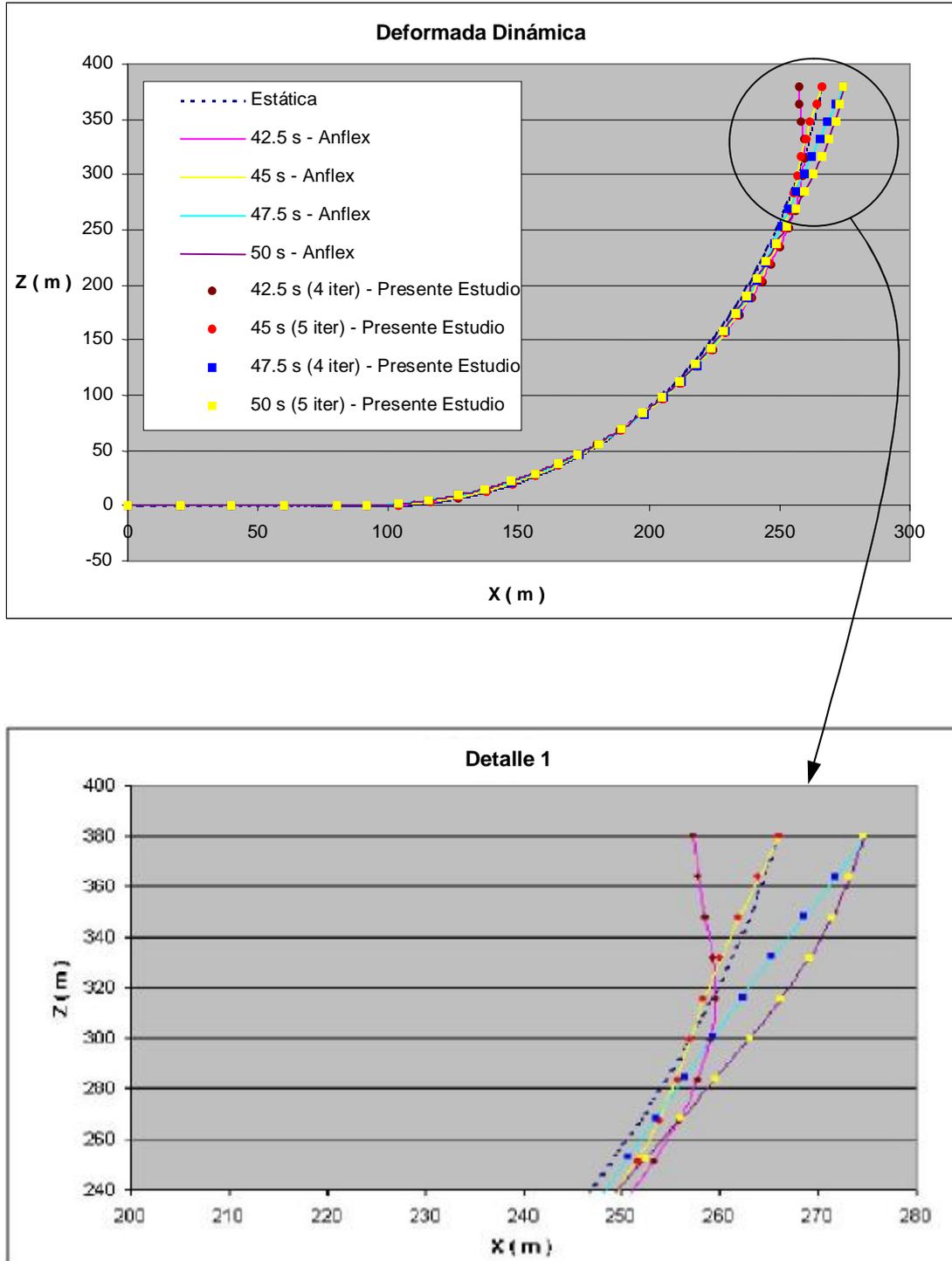


Figura 5.4.8 Deformadas del ducto correspondientes aos instantes 42.5, 45.0, 47.5 y 50.0 s

En las figuras 5.4.9 y 5.4.10 están presentadas las distribuciones de la fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto para los instantes de 2.5, 5.0, 7.5, 10.0, 12.5 y 15.0 segundos. Los resultados para el primer instante considerado (2.5 s) se presenta en diferencia (16.8 %) entre los valores numéricos obtenidos en el presente estudio y aquellos obtenidos con ANFLEX. Este hecho se debe, como ya mencionado, probablemente al transiente impuesto artificialmente en la prescripción del movimiento de la plataforma. Para los demás instantes presentados en estas figuras se puede observar una mejor concordancia entre los resultados obtenidos numericamente con el avance del análisis en el tiempo. Esta afirmación es verificada con los resultados de las figuras 5.4.10 y 5.4.11, donde la forma de las curvas es siempre próxima y los valores numéricos son mas próximos; nótese que el error en el punto próximo del valor máximo de la fuerza de tracción es 1.2 % y 1.5 % para los instantes correspondientes a 15.0 s y 45.0 s, respectivamente.

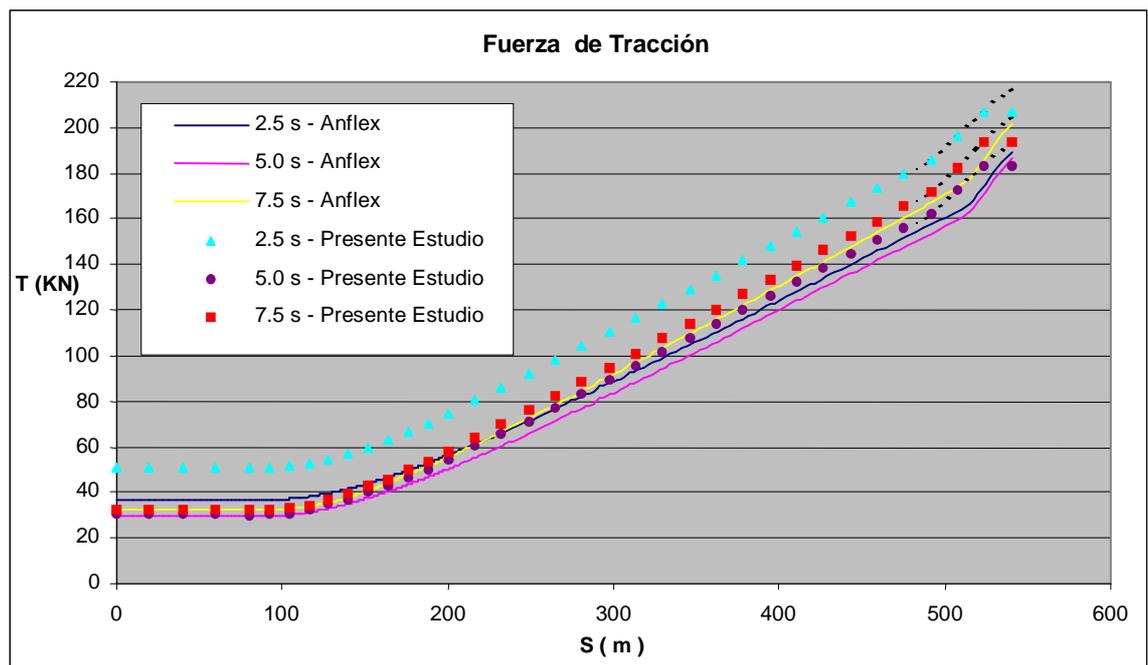


Figura 5.4.9 Fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto correspondiente a los instantes 2.5, 5.0 y 7.5 s

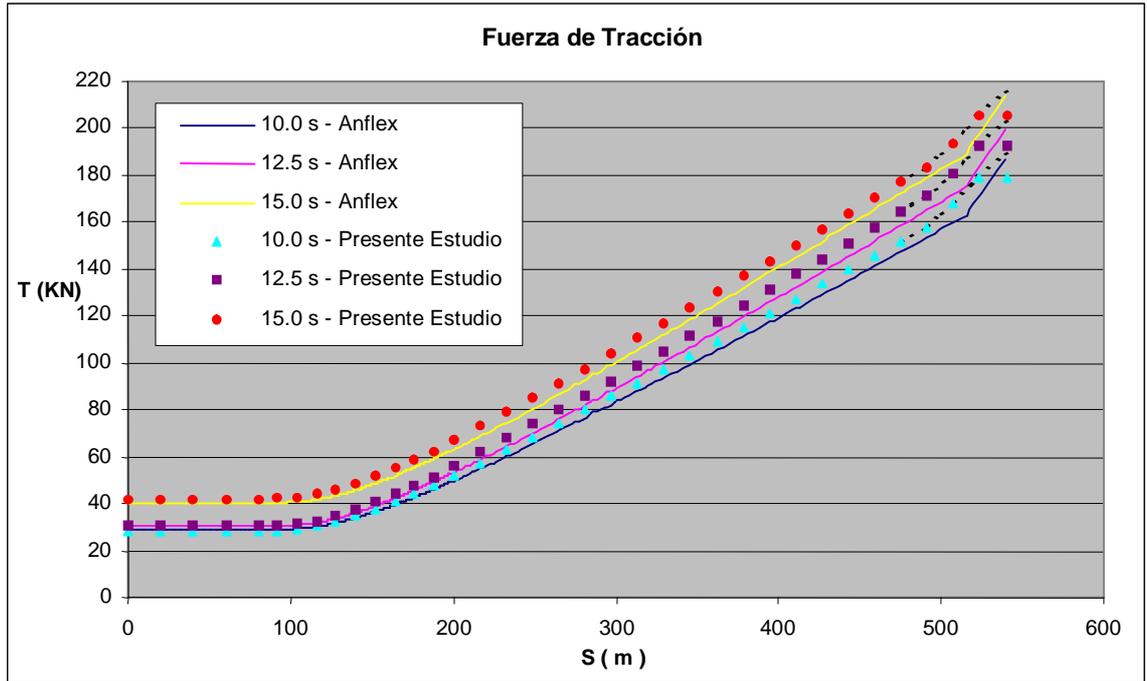


Figura 5.4.10 Fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto correspondiente a los instantes 10.0, 12.5 y 15.0 s

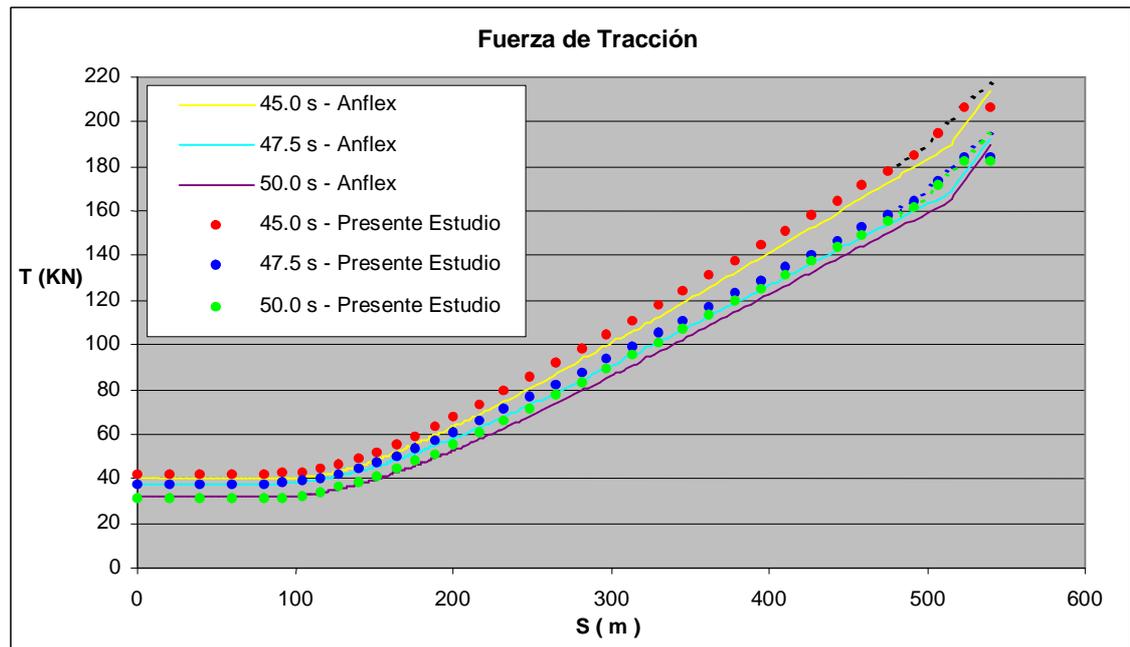


Figura 5.4.11 Fuerza de tracción a lo largo de la longitud del ducto correspondiente a los instantes 45.0, 47.5 y 50.0 s

En la figura 5.4.12 está presentada la variación en el tiempo del radio de curvatura en el *TDP* del ducto rígido, obtenida en el presente trabajo. Puese ver que para los primeros instantes el valor del radio de curvatura alcanza un valor máximo próximo de 1000 m, un valor muy alto, el cual puede ser debido a que estamos en el intervalo del transiente impuesto en la función de prescripción de desplazamiento en la extremidad superior del ducto. Posteriormente, para los instantes siguientes, después de pasar los primeros 11.25 s (tiempo de duración del transiente), observase una disminución de los valores máximos alcanzados, observándose de la misma forma que estos valores máximos van disminuyendo de valor con el transcurso del tiempo del análisis. La variación del radio de curvatura en el *TDP*, después de ultrapasado el tiempo del transiente, tiene una variación periódica, cuyo periodo es de 15 segundos, correspondiente al periodo del movimiento impuesto en la extremidad superior del ducto.

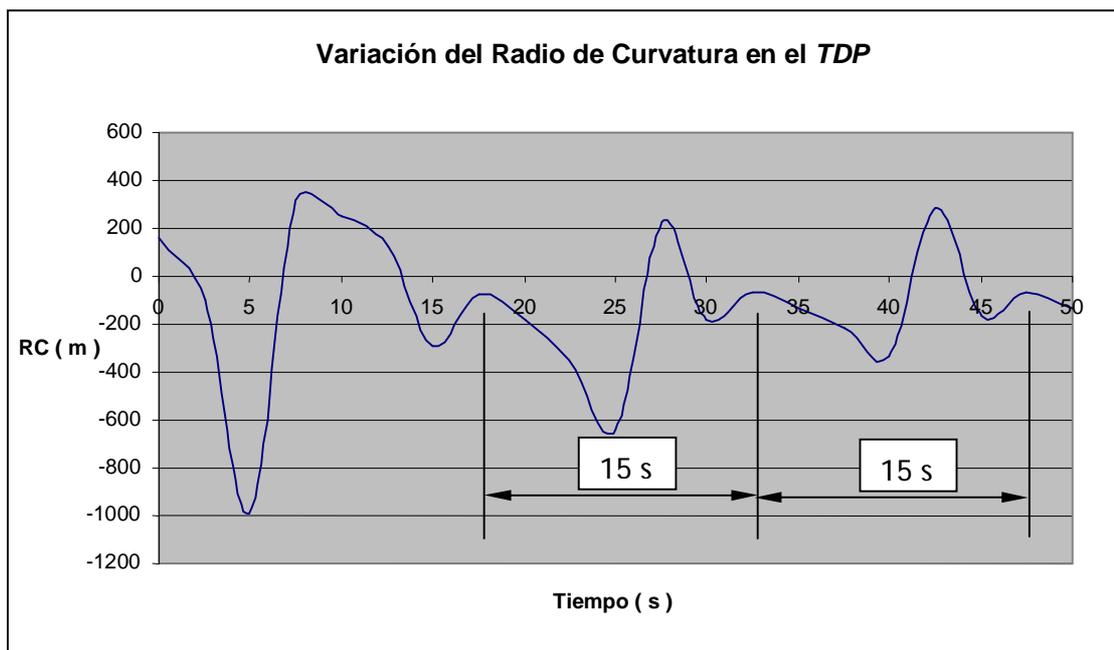


Figura 5.4.12 Variación en el tiempo del radio de curvatura en el *TDP*

5.5 COMPORTAMIENTO DE UN DUCTO FLEXIBLE EN CONFIGURACIÓN *LAZY-WAVE*

En un ducto flexible largo, la configuración en catenaria simple puede resultar en esfuerzos axiales muy elevados, especialmente en los puntos de conexión con la unidad flotante y próximo al contacto con el suelo marino (*TDP - touch down point*) (Lustosa, 2000). Para minimizarse estos efectos son adicionados al *riser* dispositivos para permitir configuraciones alternativas. De esta manera, para un ducto flexible que se presenta en catenaria con una región en contacto con el suelo marino, utilizarse flotadores a lo largo de una longitud intermediaria, localizados entre el punto de conexión superior y el punto de inicio del contacto con el suelo marino, conforme mostrado en la figura 5.5.1. Esta configuración fue también utilizada en (Mourelle, 1993) y se basa en los parámetros geométricos presentados en (Larsen, 1992), en el cual fueron reunidos los resultados obtenidos de análisis realizados en diferentes instituciones de investigación, empleando 10 programas comerciales para análisis de ductos rígidos y flexibles: *Riser*, *Flexcom-3D*, *Fenris*, *Flexan-F*, *Seapipe*, *Orcaflex*, *Aqwaflex*, *Riflex*, *Mobdex* y *Reflex*. Los resultados numéricos obtenidos con el presente estudio fueron comparados con los obtenidos por (Mourelle, 1993), (Larsen, 1992) y con el programa ANFLEX.

Una configuración estática típica de un flexible está presentada en la figura 5.5.1. A lo largo del segmento BC hay 31 flotadores de 1.0 m de longitud cada uno que están separados a cada 2.0 m. Las características físicas y

(c) los efectos de onda no son contemplados en este trabajo. Por lo tanto, las cargas consideradas incluyen el peso propio, el empuje, la corriente marina y los movimientos impuestos en el punto superior – punto A – del ducto. Los parámetros característicos de la corriente marina están mostrados en la tabla 5.5.2.

Tabla 5.5.1 Parámetros físicos del ducto flexible

Segmento del ducto flexible sin flotadores:	
Módulo de rigidez axial (EA)	10000 KN
Módulo de rigidez flexional (EI)	6.57 KN m ²
Módulo de rigidez torsional (GJ)	1000 KN m ² / rad
Peso seco, incluyendo fluido interno	0.87309 KN / m
Diámetro externo	0.2154 m
Segmento del ducto flexible con flotadores:	
Módulos de rigidez axial e torsional	Inalterados
Módulo de rigidez flexional del flotador (EI)	100 KN m ²
Peso seco, incluyendo fluido interno	3.453 KN / m
Coefficientes hidrodinámicos (ambas secciones)	
Coefficiente de inercia (CM)	2.0
Coefficiente de arrastre normal (CDn)	1.0
Coefficiente de arrastre tangencial (CDt)	0.05
Longitud de segmentos	
Segmento AB	360 m
Segmento BC	91 m
Segmento CD	200 m

Tabla 5.5.2 Parámetros de corriente marina y movimiento impuesto en la extremidad A

Perfil de la corriente marina:	
Suelo 0.0 m	0.0 m/s
Elevación 177.5 m	1.0 m/s
Superficie	1.0 m/s
Movimiento en la dirección X:	
Periodo (T_x)	12 s
Amplitud (X_o)	4.0 m
Fase (ϕ_x)	20.43°
Movimiento en la dirección Z:	
Periodo (T_z)	12 s\
Amplitud (Z_o)	6.0 m
Fase (ϕ_z)	-110.43°
Peso específico del agua	10.055 KN/m ³

- (d) los parámetros relativos a la fase y amplitud de los movimientos impuestos del flotante a la extremidad A – son los mismos dados por (Mourelle, 1993);
- (e) los efectos de la fricción entre el ducto y el suelo marino no son considerados.

El ducto flexible con 651 m de longitud fue modelada utilizándose 135 elementos distribuidos en 3 segmentos: el primero con 200 m de longitud es modelado con 20 elementos, el segundo segmento con 91 m de longitud es modelado con 91 elementos y corresponde a la región de los flotadores, y el tercer segmento con 360 m de longitud es modelado con 24 elementos.

Inicialmente se considera la obtención de la configuración del *riser*, resultante del equilibrio estático, utilizada como condición inicial para el análisis

dinámico. Así, como en (Larsen, 1992), fueron tomados algunos puntos a lo largo de la longitud del *riser*, para la evaluación de los resultados, ver figura 5.5.1: extremidad a la derecha (punto A), extremidad a la izquierda en el suelo marino (punto D), en el punto mas alto del segmento de flotadores (punto F) y en el punto de contacto con el suelo marino *touch down point* (punto G). En cada una de esas posiciones fueron considerados los resultados mas relevantes. Por lo tanto, en las extremidades A y D son reportados los esfuerzos de tracción, en el punto G se consideró la posición horizontal final y en el punto F son evaluadas las coordenadas de la posición final y el radio de curvatura del *riser* flexible. En la tabla 5.5.3 los resultados presentados por (Larsen, 1992), para los diversos programas comerciales considerados, son comparados con los obtenidos en (Mourelle, 1993) y por el presente estudio. En este análisis estático se consideran apenas los efectos del peso propio y del empuje. Los resultados del presente estudio presenta, para todas las características evaluadas, una buena concordancia con los obtenidos con ANFLEX y con las otras referencias. Sin embargo, es observada una fuerte dispersión de los resultados para la fuerza de tracción en el punto D.

Tabla 5.5.3 Comparación de resultados numéricos obtenidos en el análisis estático sin corriente marina con diversos programas

Análisis Realizados / Resultados Obtenidos	Tracción Punto A (KN)	Tracción Punto D (KN)	Coordenada x del Punto G (m)	Punto F		
				x (mm)	z (mm)	Curvatura $10^{-2}(1/m)$
(Larsen, 1992)	176.8 ± 3.26	19.0 ± 20.9	140.0 ± 7.42	225.1 ± 2.26	79.34 ± 2.01	3.57 ± 1.12
(Mourelle, 1993)	177.8 (0.75 %)	3.6 (-70.3 %)	145.0 (0.3 %)	224.0 (-0.05 %)	81.0 (-0.4 %)	3.73 (-2.6 %)
ANFLEX	176.10 (-0.2 %)	12.17 (0.6 %)	140.56 (-2.8 %)	224.67 (0.25 %)	81.97 (0.8 %)	3.66 (-4.4 %)
Presente Estudio	176.47	12.1	144.62	224.11	81.32	3.83

En una segunda etapa del análisis estático se adiciona el efecto de la corriente marina en el plano del ducto, conforme mostrado en la figura 5.5.1. Los resultados numéricos para estas magnitudes están mostrados en la tabla 5.5.4. Como en el análisis anterior, hay una buena concordancia de los resultados excepto para la gran dispersión en los valores de tracción evaluada en el punto D, que corresponde al punto de anclaje en el suelo marino. Configuraciones estáticas del *riser* en las dos etapas del análisis numérico están presentadas en la figura 5.5.2, comparándose el presente estudio con los resultados obtenidos con el programa ANFLEX. Se observa, que del número de iteraciones necesarias para convergencia con la metodología utilizada en el presente modelo hay un sustancial esfuerzo computacional involucrado para el posicionamiento inicial del *riser* flexible en contacto con el suelo marino. De esta manera, para minimizar las cargas de la corriente y de empuje del flotador podrían también ser aplicados gradualmente pero, en un número

mayor de pasos. Pruebas numéricas comprueban que de esta forma un menor número total de iteraciones es obtenido. Se observa una concordancia muy buena entre las configuraciones finales del *riser* producidos por el presente modelo y aquellas obtenidas con el programa ANFLEX. Los esfuerzos de tracción a lo largo de la longitud producidos por los modelos numéricos están presentados en la figura 5.5.3 y observase una buena concordancia entre las dos curvas. Una observación importante con respecto a los resultados obtenidos en el análisis, es la no inclusión de los efectos de fricción del *riser* flexible con el suelo marino para el presente estudio y para el modelo utilizado con el programa ANFLEX. Este efecto de fricción fue considerado en los análisis presentados en (Larsen, 1992; Mourelle, 1993). La gran proximidad de los resultados indica que para este caso bidimensional presentado, el efecto de la fricción longitudinal puede ser desconsiderado. La configuración del *riser*, obtenida al final de esta etapa, con velocidad nula corresponde a las condiciones iniciales utilizadas en el análisis dinámico.

Tabla 5.5.4 Comparación de resultados numéricos obtenidos en el análisis estático con corriente marina con diversos programas

Análisis Realizados / Resultados Obtenidos	Tracción Punto A (KN)	Tracción Punto D (KN)	Coordenada x del Punto G (m)	Punto F		
				x (mm)	z (mm)	Curvatura $10^{-2}(1/m)$
(Larsen, 1992)	173.7 ± 3.69	16.0 ± 19.8	142.0 ± 6.10	209.2 ± 3.08	88.24 ± 1.64	4.985 ± 2.46
(Mourelle, 1993)	176.1 (1.64 %)	2.3 (-71.1 %)	145.0 (0.3 %)	211.2 (-0.56 %)	89.5 (0.09 %)	5.13 (-5 %)
ANFLEX	174.33 (0.62 %)	7.75 (-2.76 %)	140.67 (-2.7 %)	212.76 (0.17 %)	89.17 (-0.28 %)	6.97 (29.3 %)
Presente Estudio	173.25	7.97	144.56	212.39	89.42	5.39

Considerándose el análisis dinámico del ducto flexible son adicionalmente incluidos al modelo las cargas correspondientes al movimiento impuesto en el punto A del *riser*, en la forma $X_A(t) = 350 + X_o \cos(2\pi t / T_x + \phi_x)$ e $Z(t) = 375 + Z_o \cos(2\pi t / T_z + \phi_z)$, cuyos parámetros de las funciones temporales están presentados en la tabla 5.5.2.

El incremento temporal empleado en el análisis fue de 0.05 segundos, conforme sugerido por las pruebas numéricas realizadas en (Mourelle, 1993), para un tiempo total de análisis de 30 segundos.

Cuando se comparan dos análisis numéricos considerándose en uno de ellos apenas el amortecimiento estructural de Rayleigh, sin ningún amortecimiento numérico, y en otro apenas el amortecimiento numérico, los resultados numéricos son esencialmente idénticos, pero con un costo computacional mayor en el primer análisis, traducido por necesitar de un número mayor de iteraciones. Sin embargo, cuando ambas formas de amortecimiento (numérico y computacional) están presentes en el análisis, además de ser eliminadas las vibraciones en alta frecuencia, es también observado que ocurre un significativo decaimiento de amplitud significativo en los modos de baja frecuencia y el número de iteraciones decrece en relación a los dos casos iniciales (Lustosa, 2000). De esta manera, en el presente análisis, para el análisis dinámico del ducto flexible se considera ambas formas de amortecimiento.

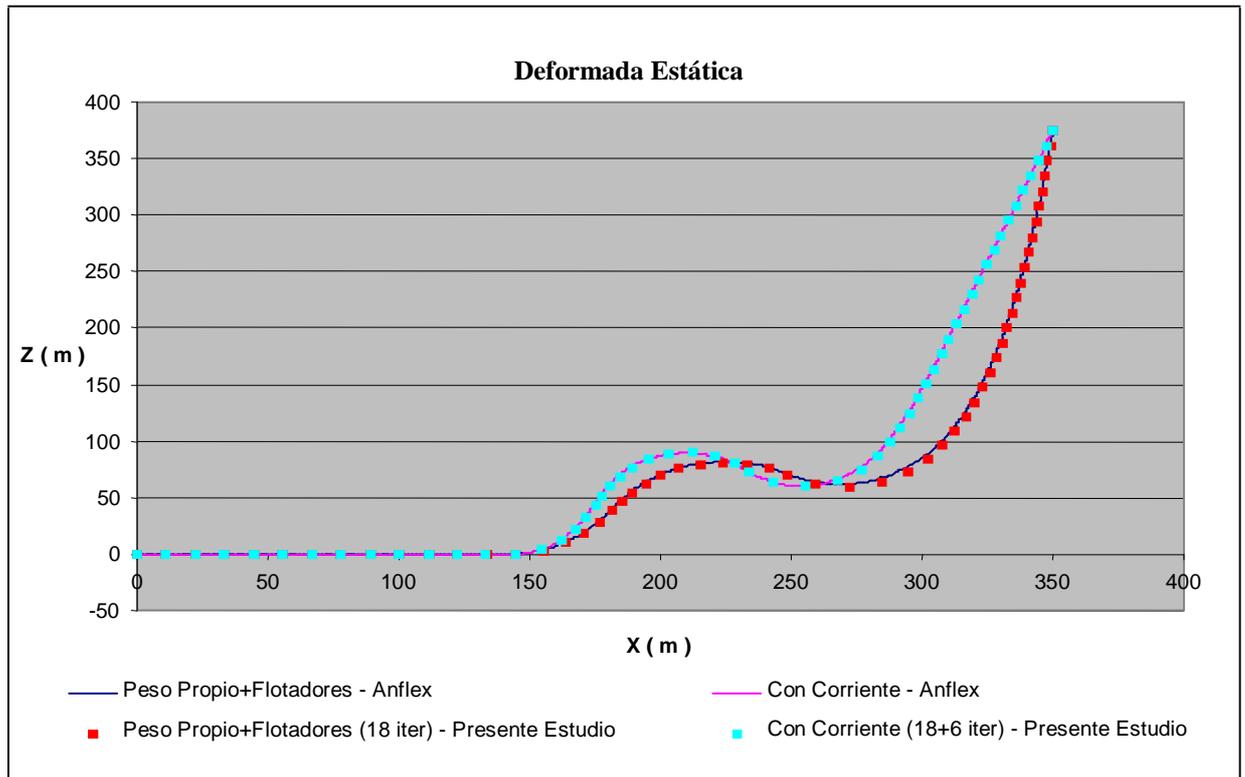


Figura 5.5.2 Deformada estática del ducto flexible con y sin corriente marina

El método de integración temporal utilizado es el de Newmark en la forma implícita con los parámetros: $\alpha = 0.5625$, $\delta = 1$ (límite máximo para la estabilidad del método de Newmark) y el amortecimiento estructural de Rayleigh $\beta_d = 0.05$.

Los valores máximos y mínimos para la fuerza de tracción en el punto A del ducto, obtenidos del análisis numérico están presentados en la tabla 5.5.5, donde son comparados con los producidos por el programa ANFLEX. También en esta tabla la variación media de estos valores son comparadas; todos los resultados presentando buena concordancia con error menor de 3.7%.

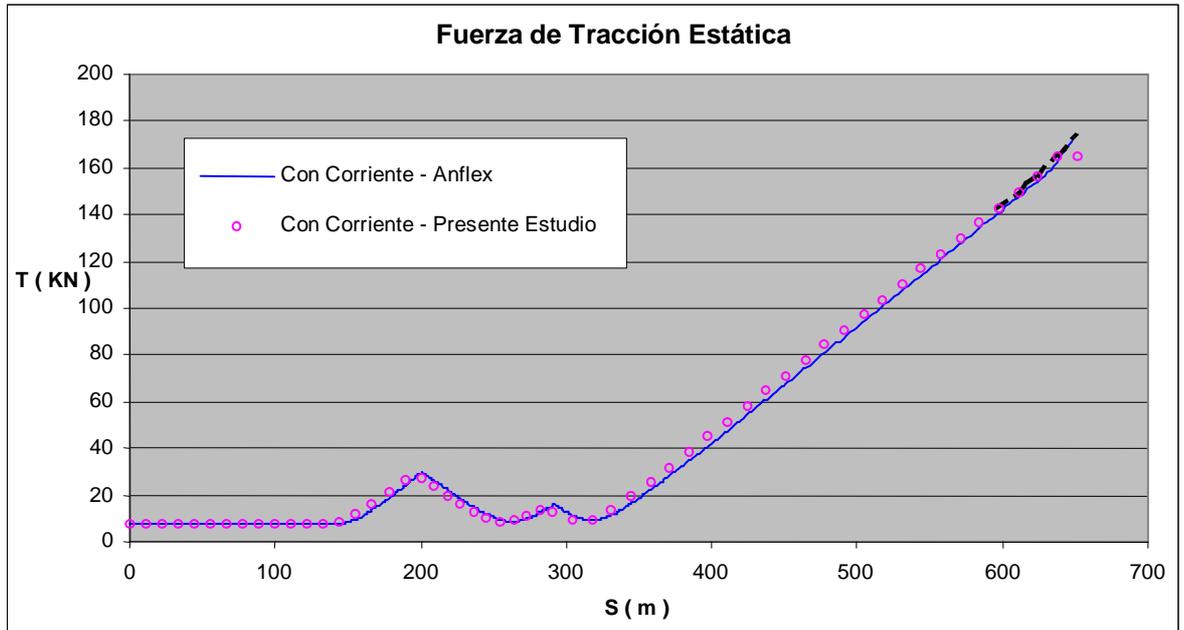


Figura 5.5.3 Fuerza de tracción estática a lo largo de la longitud del ducto flexible

En las figuras 4.5.4-6 se presentan configuraciones consecutivas del *riser* flexible obtenidas del análisis dinámico para instantes entre 6.0 y 30.0 segundos con muestras a cada 3.0 s. De la misma forma recomendada en (Lustosa, 2000; Mourelle, 1993) y discutido en la sección 3.6.4, fueron utilizadas funciones de transición para el movimiento impuesto del nodo correspondiente a la conexión con el flotante, con la finalidad de garantizarse una transición suave, evitándose la respuesta numérica a una carga brusca, de impacto. En estas figuras están también incluidas dos aproximaciones (en ampliación) de la forma del movimiento en la región de contacto con el suelo marino y junto a la conexión superior del ducto.

Tabla 5.5.5 Análisis dinámico/ Tracción (T) en el punto superior de conexión

Análisis Realizados/ Resultados Obtenidos	Tracción en el Punto A Corriente / Movimiento Impuesto (KN)		
	T _{Max}	T _{Min}	DT = T _{Max} - T _{Min}
ANFLEX	226.96 (-0.54 %)	116.43 (-3.7 %)	110.54 (3 %)
Presente Estudio	228.20	120.91	107.29

De la figura 5.5.4 se observan las configuraciones espaciales correspondientes a los instantes 6.0, 9.0 y 12.0 segundos; comparados a los resultados obtenidos con ANFLEX, los resultados del presente modelo se presentan en buena concordancia, teniéndose aun en el gráfico, como referencia, la configuración inicial del análisis del equilibrio estático. El número de iteraciones necesarias para convergencia está también presentado en la figura. En los detalles, son mostrados: la región de la configuración deformada que corresponde al punto de contacto con el suelo marino y la deformada que corresponde a la extremidad A, observándose una convergencia muy buena de los resultados numéricos para todos los instantes considerados.

Resultados para instantes posteriores del análisis son presentados en la figura 5.5.5, correspondientes a 12.0, 15.0, 18.0, 21.0 y 24.0 segundos. De la misma forma que en la figura 5.5.4, detalles de los análisis son también presentados apuntándose ahora la ocurrencia de una pequeña diferencia entre las deformadas obtenidas junto al contacto con el suelo marino. Las deformadas correspondientes a los instantes 12.0 y 24.0 segundos, se superponen debido al periodo del movimiento impuesto ser de 12.0 segundos.

Finalmente, en la figura 5.5.6 están presentadas las deformadas correspondientes a los instantes 24.0, 27.0 y 30.0 segundos. Los detalles indican haber una concordancia muy buena entre las soluciones, no siendo notada ninguna diferencia importante entre las configuraciones deformadas.

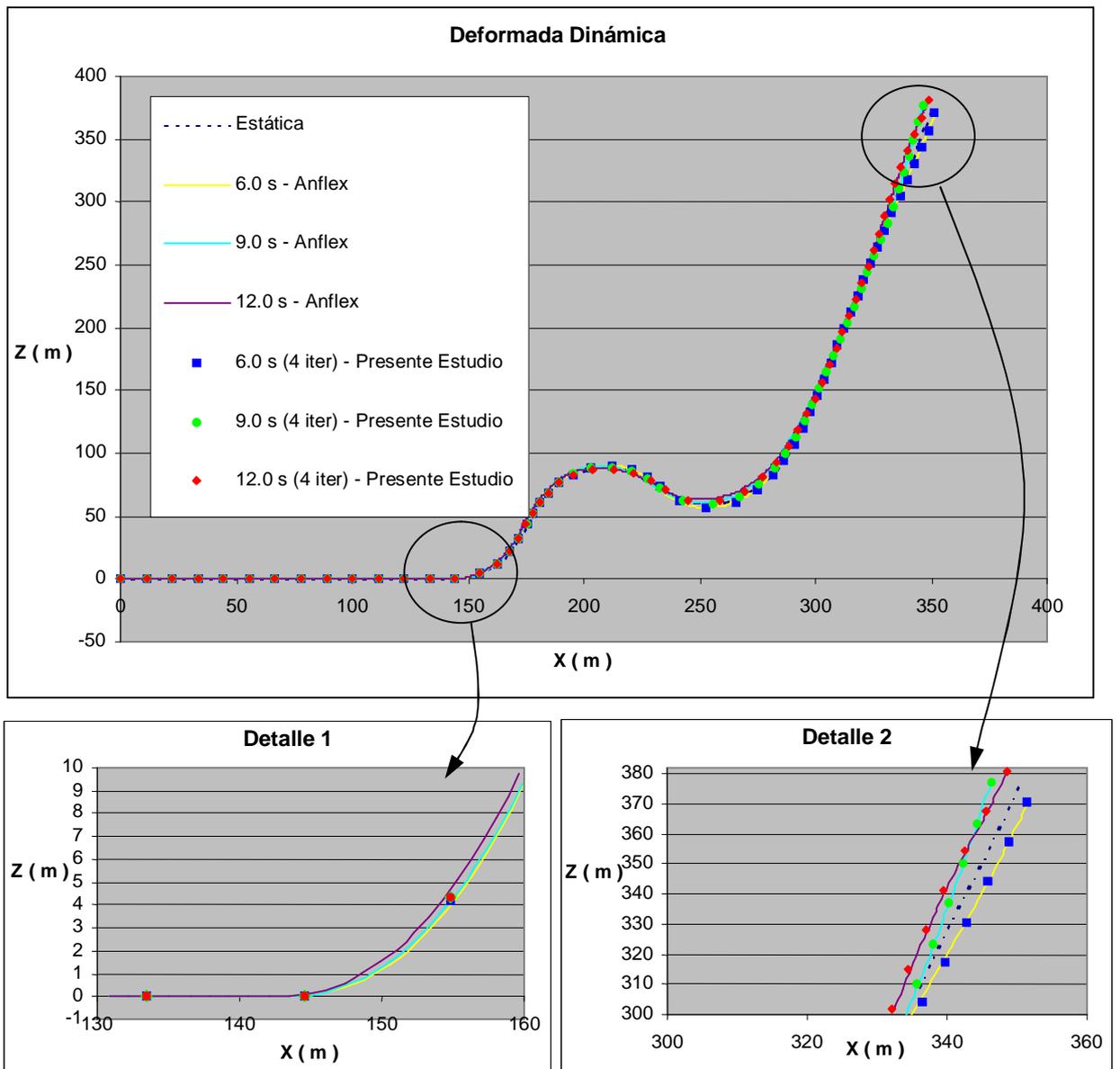


Figura 5.5.4 Deformada dinámica del ducto flexible en los instantes 6.0, 9.0 y 12.0 segundos

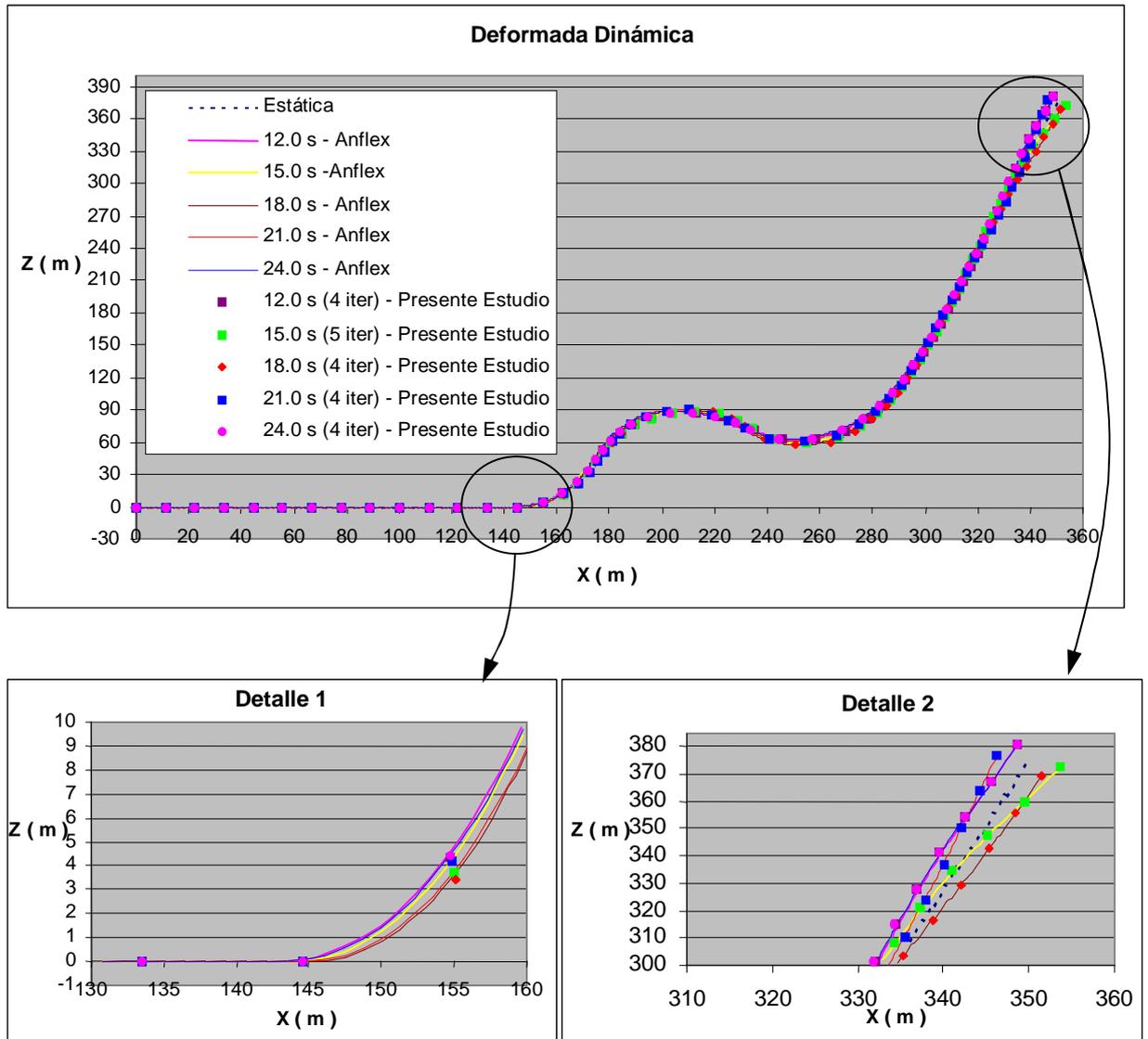


Figura 5.5.5 Deformada dinámica del ducto flexible en los instantes 12.0, 15.0, 18.0, 21.0 y 24.0 segundos

En las figuras siguientes, 5.5.7-9, están presentadas las distribuciones de los esfuerzos de la tracción a lo largo de la longitud del ducto. La figura 5.5.7 presenta las distribuciones de las fuerzas de tracción para los instantes de 6.0, 9.0 y 12.0 segundos. Son notadas diferencias significativas en los resultados correspondientes al instante de 6.0 s, específicamente para el segmento del *riser* entre 360 y 651 m, correspondiente desde el inicio de los flotadores

hasta el punto de conexión con el flotante. También, es observado que estas diferencias entre los resultados se reducen significativamente para los instantes siguientes considerados (9.0 y 12.0 s). Por otro lado, para los segmentos del *riser* desde el punto de conexión a la izquierda y hasta la posición 330 m los resultados son muy satisfactorios.

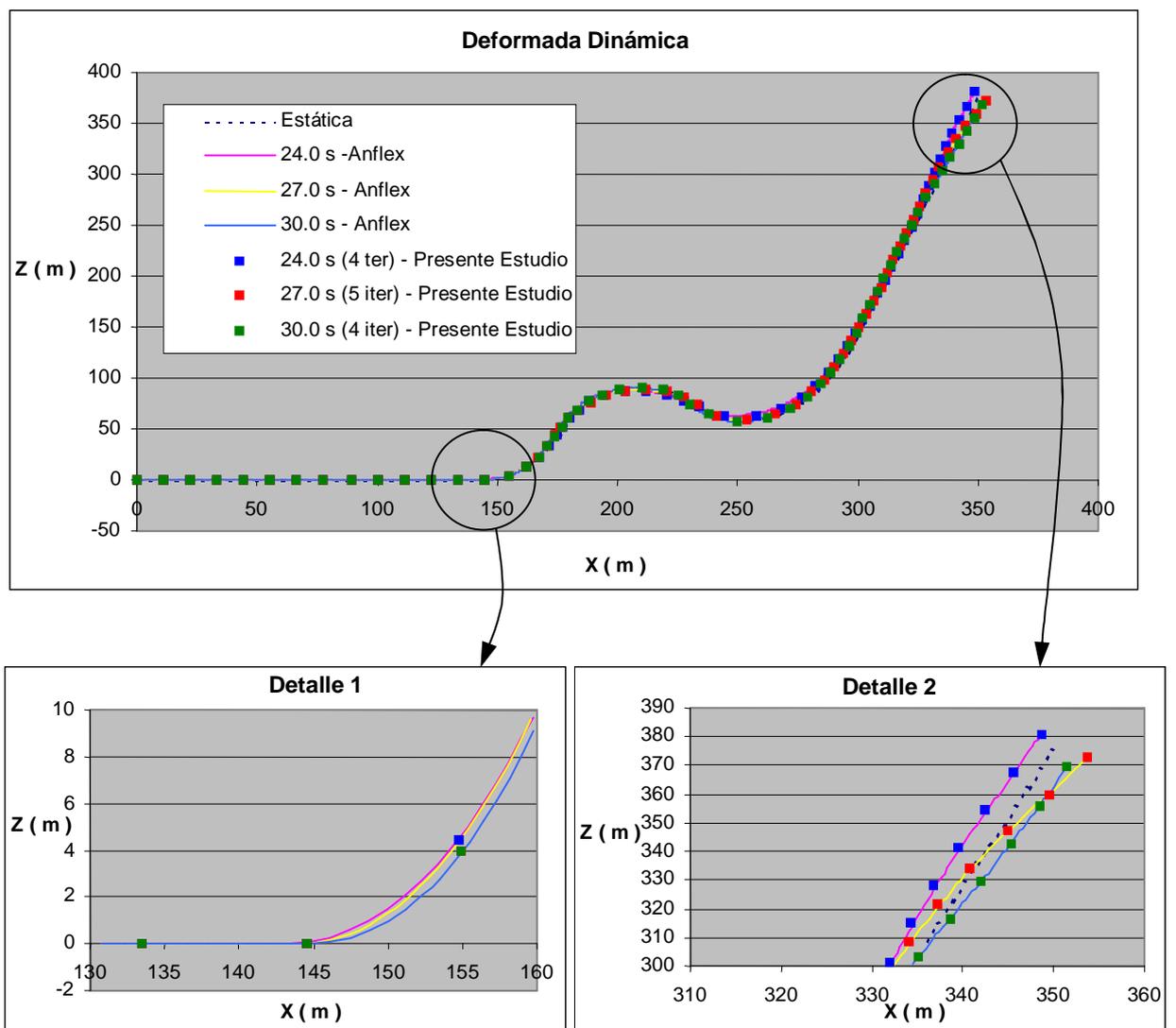


Figura 5.5.6 Deformada dinámica del ducto flexible en los instantes 24.0, 27.0 y 30.0 segundos

Estas diferencias observadas para los valores de tracción en estos primeros instantes del análisis pueden ser atribuidas a que el análisis tiene aun presente el transiente impuesto en la carga (Lustosa, 2000; Mourelle, 1993) de forma a disminuir el efecto de una carga de impacto (brusco).

En las figuras siguientes, 5.5.8-9, se pueden observar los resultados correspondientes a la fuerza de tracción para los instantes 12.0, 15.0, 18.0 y 21.0 segundos, y 21.0, 24.0, 27.0 y 30.0 segundos, respectivamente. En los instantes de 15.0 y 21.0 segundos hay una diferencia entre los resultados producidos por los dos programas. Por otro lado, para el instante 18.0 s la concordancia de los resultados es muy buena. Apesar de aun presentar diferencias de alguna intensidad es visible que estas son menores de que las presentadas en la figura 5.5.7, ciertamente debido a la reducción de los efectos del transiente aplicado al inicio de la carga dinámica, en este caso durante los primeros 5.2 s. Probablemente, este intervalo debe ser aumentado para un mejor resultado numérico.

En la figura 5.5.9 la variación espacial de la fuerza de tracción para los instantes 21.0, 24.0, 27.0 y 30.0 segundos es presentada. Es muy buena la concordancia de los resultados en el instante correspondiente a 24.0 segundos. Aunque en el instante siguiente, 27.0 segundos, aun es observada una diferencia entre las soluciones, pero de menor valor de la observada en 21.0 segundos, y finalmente para el instante 30.0 segundos la concordancia de los resultados vuelve a ser buena, compatible con las tendencias anteriores. De la misma forma que en las figuras anteriores, tambien fueron hechas extrapolaciones de los valores de la fuerza de tracción próximos al punto de

conexión con el flotante – punto A –, siendo estos muy próximos a los obtenidos con el programa ANFLEX.

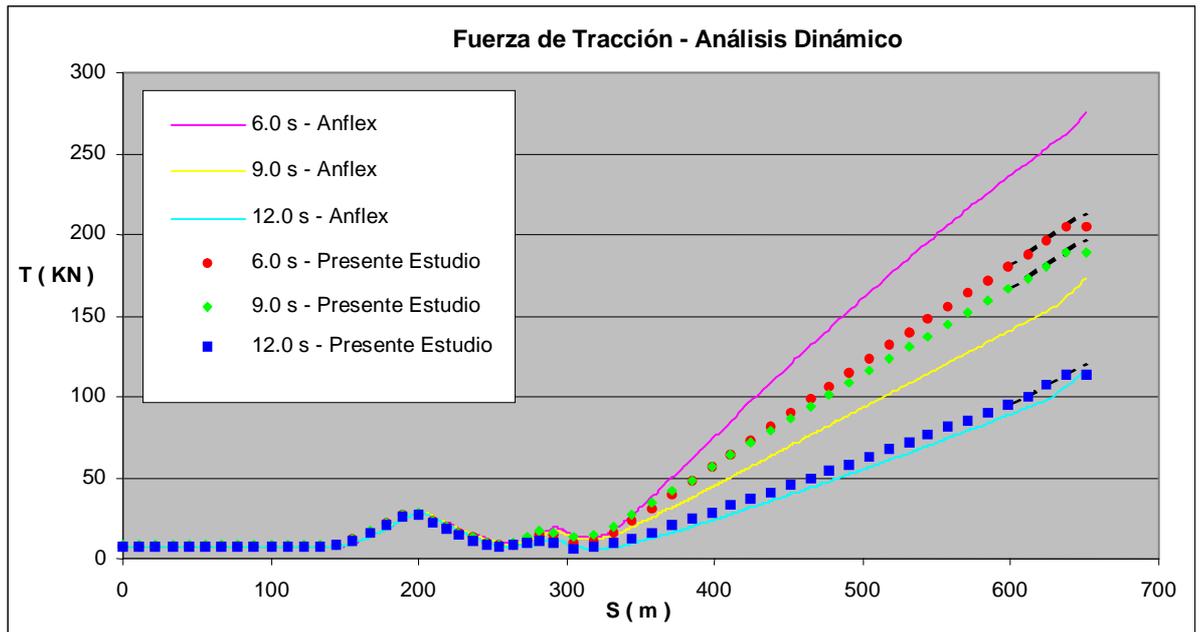


Figura 5.5.7 Tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible en los instantes 6.0, 9.0 y 12.0 segundos

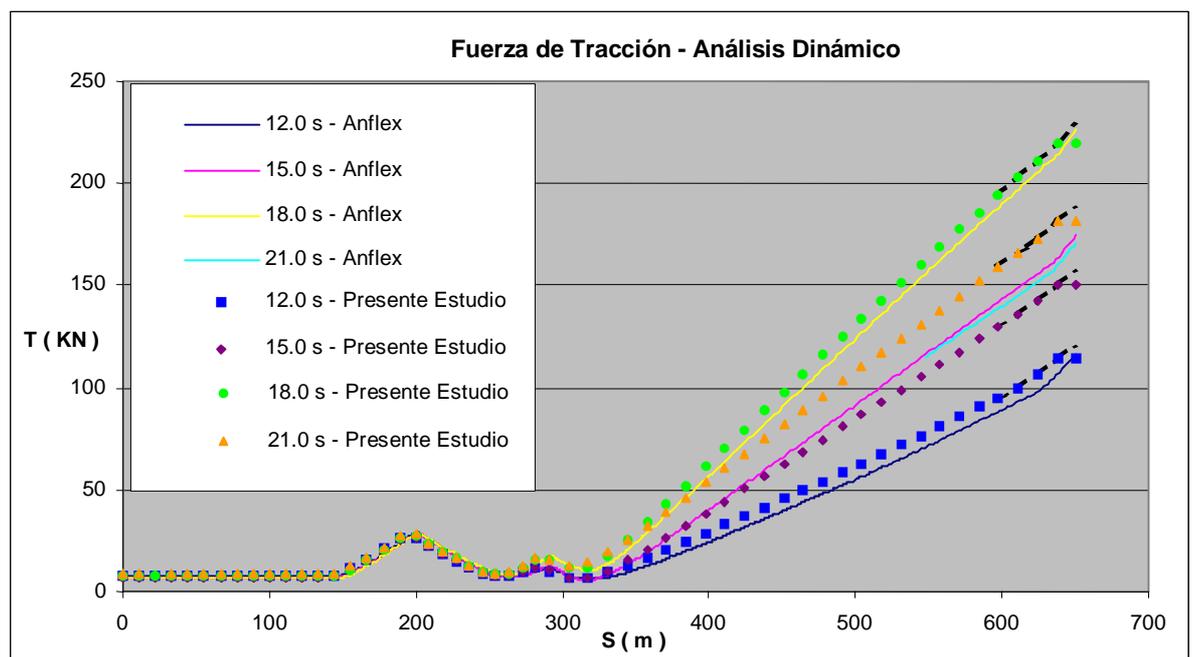


Figura 5.5.8 Tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible en los instantes 12.0, 15.0, 18.0 y 21.0 segundos

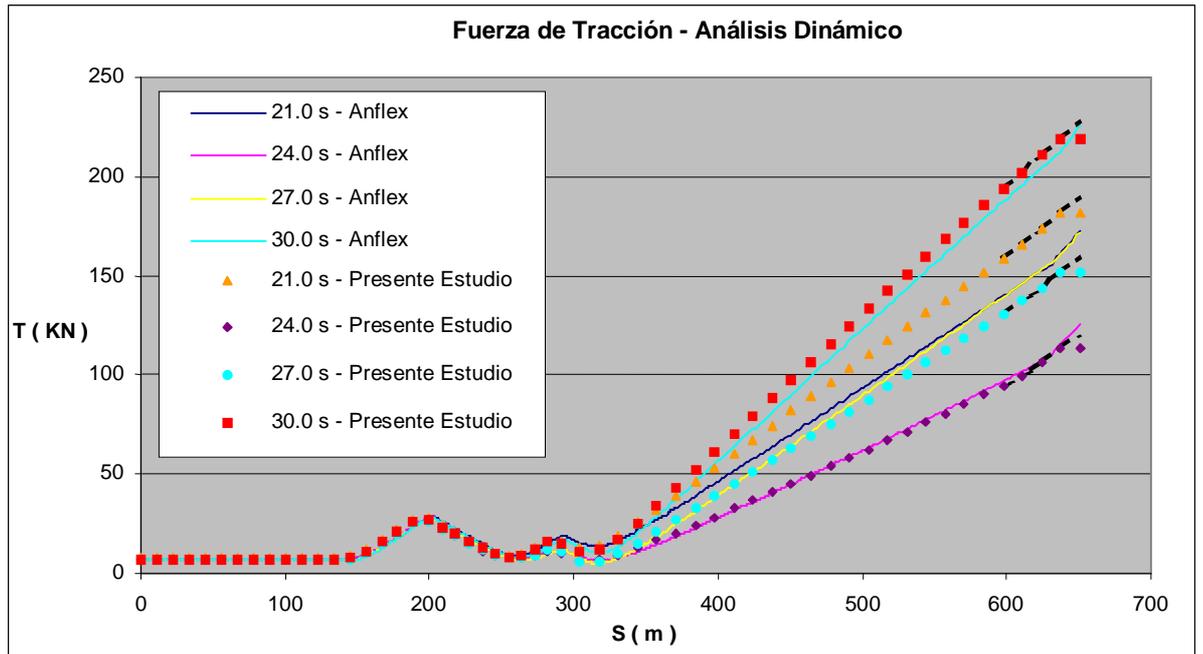


Figura 5.5.9 Tracción a lo largo de la longitud del ducto flexible en los instantes 21.0, 24.0, 27.0 y 30.0 segundos

CONCLUSIONES

1. Fue desarrollada una metodología para estudiar el comportamiento de ductos rígidos y flexibles usados en la producción y transporte de petróleo en alta mar.
2. Se concluye que existe la posibilidad de crearse en el Perú herramientas numéricas robustas capaces de analizar numericamente el comportamiento de este tipo de estructuras (ductos) con la misma precisión y eficiencia que los actuales programas comerciales (*softwares*) ampliamente utilizados a nivel mundial en el área de petróleo en alta mar.
3. La versatilidad y fácil empleo del método de los elementos finitos para la solución numérica del estudio del problema del comportamiento de ductos fue confirmada. El presente estudio incluye el análisis bidimensional estático/dinámico de ductos rígidos y flexibles considerando el contacto variable del ducto con el suelo marino sin los efectos de fricción.
4. La capacidad del método de los Multiplicadores de Lagrange como el método más adecuado de solución para el efecto de contacto entre el ducto y el suelo marino fue confirmada mediante las respuestas obtenidas de los ejemplos estudiados en el presente trabajo.
5. La flexibilidad del algoritmo desarrollado fue comprobada mediante el análisis de las principales configuraciones de ductos rígidos y flexibles actualmente utilizadas en la producción y transporte de petróleo en alta mar.

6. La precisión de la metodología desarrollada en el presente estudio fue verificada comparando los resultados de los ejemplos estudiados con los resultados obtenidos con el programa comercial ANFLEX.
7. Fue comprobada la gran importancia en la solución del comportamiento de ductos el empleo de amortiguamientos estructurales y numéricos, que eliminan las vibraciones en alta frecuencia y permiten que los modos de baja frecuencia tengan un significativo decaimiento de amplitud, teniéndose como consecuencia un bajo número de iteraciones requeridas para la convergencia de la solución numérica en todos los análisis dinámicos realizados.
8. La importancia del tiempo trasiente y de su incremento temporal al iniciar el movimiento impuesto suavemente fue comprobada, eliminando de esta manera la participación de frecuencias irreales en la solución, mejorando los resultados obtenidos mediante un tiempo mayor o menor de análisis.

BIBLIOGRAFIA

ARANHA, J.A.P.; PINTO, M.O.; DA SILVA, R.M.C.. On the dynamic compression of risers: an analytic expression for the critical load, Applied Ocean Research, 2001, v. 23, p.83-91.

BATHE, K. J.. Finite Element Procedures, Prentice-Hall, 1996.

CHAUDARY, A. B.. A Solution Method for Two and Three-Dimensional Contact Problems. Massachusetts, 1985. PhD. thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Det Norske Veritas, DNV-OS-F201: Dynamic Risers, 2001.

FUJARRA, A.L.C.; SIMOS, A.N.; YAMAMOTO, N.Y.. Dynamic Compression of Rigid and Flexible Risers. Part I: Experimental Results. In: International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE, Cancun - Mexico, Jun. 2003, 22, 2003, Proceedings.

GHADIMI, R.. A simple and efficient algorithm for the static and dynamic analysis of flexible marine risers, Computer & Structure, 1988, v. 29, 4, p.541 - 555.

GOLDSMITH, W.. Impact, Edward Arnold Publishers, 1960.

GONZALES, E. C.. Análise Estrutural de Risers para Águas Profundas. Rio de Janeiro, 1990. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ.

GREENWOOD, D. T.. Principles of Dynamics, 2 ed., Prentice-Hall.

HILBER, H. M.; HUGHES, T.J.R.; TAYLOR, R.L.. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, Earthquake and Structural Dynamics, 1977, v. 5, p.283-292.

HUANG, K. et al. A rational dynamic analysis procedure for turret mooring systems. In: Offshore Technology Conference, 19, 1987, p. 27-30.

HUSTON, R.L.; KAMMAN, W.. A representation of fluid forces in finite segment cable models, Computers and Structures, 1981, v. 14, p. 281-287.

LARSEN, C.M... Flexible riser analysis – comparison of results from computer programs. In: Journal of Marine Structures, 1992, v. 5, p. 103-119.

LEONARD, J. W.; NATH, J. H.. Comparison of finite element and lumped parameter methods for oceanic cables, Engineering Structures, July 1981, v. 3, p. 153-167.

LUSTOSA, E. M.. Dinâmica de Linhas Marítimas pelo Método dos Elementos Finitos. Rio de Janeiro, 2000. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio.

MALVERN, L. E.. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium Prentice-Hall, 1969.

MATHISEN, K. M.; BERGAN, P. G.. Nonlinear static analysis of flexible risers. In: Proceedings of The 9th International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, Tokyo – Japan, 1986, v. 3, p. 337-345.

McNAMARA, J.F.. O'BRIEN, P.J.; DUNNE, F.P.E., Three-dimensional nonlinear motions of risers and offshore loading towers. In: Proceedings of The 6th International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, 1987, v. 1, p. 171-176.

MOURELLE, M. M.. Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Constituídos por Linhas Marítimas. Rio de Janeiro, 1993. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

MOURELLE, M. M.. Análise de Estruturas Marítimas e Sistemas Flexíveis Constituídos por Cabos. Rio de Janeiro, 1984. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ.

PALMER-JONES, R.; TURNER, T.E.. Pipeline Buckling, Corrosion and Low Cycle Fatigue. In: International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE, Lisbon-Portugal, Jul. 1998, 17, Proceedings.

RODRIGUES DA SILVEIRA, M.. Análise Estática e Dinâmica Não-Linear de um Riser Flexível Durante Instalação. Rio de Janeiro, 1992. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ.

SATTAMINI, S. R.. Análise de Instalação e Desconexão de Riser. Rio de Janeiro, 1992. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ.

SIMOS, A.N.; FUJARRA, A.L.C.; ALVES, K.H.. Dynamic Compression of Rigid and Flexible Risers. Part II: Comparison of Theoretical and Experimental Results. In: International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE, Cancun-Mexico, Jun. 2003, 22, Proceedings.

WEBSTER, R.L.. An Application of the Finite Element Method to the Determination of Nonlinear Static and Dynamic Responses of Underwater Cable Structures, General Electric Technical Information Series Report N° R76EMH2, 1976, Syracuse, NY.

YAU, A. O.. Solution of 2-D Contact Problems Using a Variational Formulation with Lagrange Multipliers. Massachusetts, 1982. S.M. thesis, Massachusetts Institute of Technology.