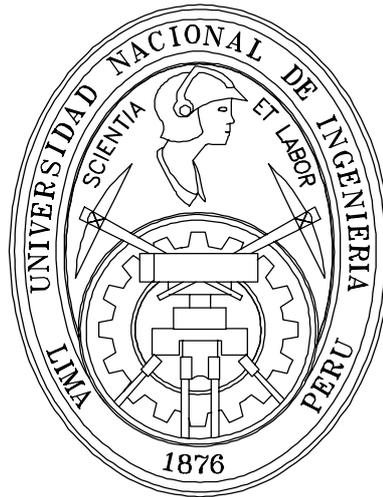


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**



**“Estudio del Efecto del Espesor de Álabes y la  
Contracción de la Vena en el Diseño de  
Turbinas Hidráulicas de Flujo Cruzado”**

**TESIS**

*Para optar el Título Profesional de*

**INGENIERO MECÁNICO**

**Rommel Benjamin COTACALLAPA VERA**

*Promoción 2000-II*

Lima – Perú

2005

A Dios, por permitirme  
existir en este tiempo  
y lugar.

A mis Padres, Pedro Rubén  
y Agripina por su apoyo  
incondicional, quienes  
desde siempre fueron mi  
motivación.

A Atalia Paula por  
saber ser una hermana  
y por sólo serlo.

## PRÓLOGO

---

El presente tema de tesis aborda dos aspectos de la investigación científica, la *generación del conocimiento científico* (estudio de fenómenos para establecer leyes que rijan su ocurrencia; con el objeto de controlarlos, optimizarlos, evitar su ocurrencia, prolongar o disminuir su duración, entre otros) y el *empleo del conocimiento científico para validar la generación de si mismo*, como característica inherente a la investigación científica.

En el contexto planteado, la estructura general del documento se divide en tres partes, relacionándose la primera y la segunda, con la *generación del conocimiento científico*, al desarrollarse en éstos modelos teóricos, que desde una “nueva perspectiva teórica” (modificación de principios y supuestos de la concepción del funcionamiento de la turbina hidráulica de flujo cruzado con respecto de los convencionales), a lo que se denomina *investigación científica de adecuación tecnológica*; mientras que en la tercera parte, se pretende validar el desempeño de la propuesta tecnológica “adecuada para la realidad planteada” (aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas), empleando el modelamiento de flujos

basado en técnicas computacionales, que se resumen en el *conocimiento científico validando la generación de si mismo*.

En la primera parte se establece “*El proyecto de investigación y el marco teórico*”, conformado por los dos primeros capítulos; en el capítulo I se plantea el problema y se establece el marco de referencia dentro del cual se llevará adelante la investigación; en el capítulo II se efectúa la revisión de literatura relacionada al desarrollo histórico y tecnológico de la turbina hidráulica de flujo cruzado.

En la segunda parte “*Formulación de modelos teóricos que rigen el diseño y predicen el comportamiento de la turbina hidráulica de flujo cruzado; y su aplicación para el diseño de una turbina de 50 kW*”, constituye el corazón mismo de la investigación, en él se formulan los modelos teóricos (considerando la modificación de principios y supuestos en relación a la concepción de su funcionamiento), que trae consigo innovaciones en el diseño (verificado en la evaluación numérica de los modelos teóricos y en su aplicación al efectuar el diseño de una turbina para un caso específico); el contenido referencial de los capítulos que conforman ésta parte es como sigue:

a) En el capítulo III se efectúa una revisión y reformulación de principios, supuestos y relaciones que rigen el diseño y predicen el comportamiento de la turbina, se consideran efectos inherentes a su funcionamiento, antes dejados de lado y/o bajo un enfoque diferente, como son el efecto del espesor de los álabes y la contracción de la vena líquida al interior de la turbina.

b) En el capítulo IV se formulan los modelos teóricos que rigen el diseño y predicen el comportamiento de la turbina (como consecuencia de un manejo algebraico de las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior), se proponen tres modelos teóricos, que plantean modificaciones en el diseño de la turbina (conclusión a la que se arriba luego de efectuar una evaluación numérica de los mismos); al finalizar el capítulo se decide emplear el modelo teórico de optimización del comportamiento ideal para efectuar el diseño de una turbina hidráulica de flujo cruzado de 50 kW.

c) En el capítulo V se presenta la metodología seguida para efectuar el diseño de la turbina hidráulica de flujo cruzado (a partir de la disponibilidad del recurso

hídrico del proyecto caudal y altura), para la minicentral hidroeléctrica de “La Raya”, un centro de investigación de la Universidad Nacional del Altiplano.

En la tercera parte “*Modelamiento del comportamiento de la turbina hidráulica de flujo cruzado empleando el método de los elementos finitos*”, se complementa el desarrollo de la propuesta tecnológica, al evaluar su desempeño para diferentes condiciones de operación (caudal, altura neta y revoluciones del rotor variables), empleando la metodología basada en la dinámica de fluidos computacional (previamente validada); el contenido referencial de los capítulos que la conforman es como sigue:

a) En el capítulo VI se analizan dos casos de referencia, con la finalidad de validar la metodología empleada para modelar el flujo de fluidos, la pérdida de carga del flujo entre dos placas de ancho infinito que se encuentran a una determinada distancia y el coeficiente de arrastre de una corriente libre sobre un cilindro bidimensional, la comparación de resultados numéricos con soluciones analíticas y experimentales validan el procedimiento propuesto.

b) En el capítulo VII se presenta el desarrollo y los resultados del modelamiento del flujo a través del inyector directriz, empleando la metodología desarrollada en el capítulo anterior; se obtiene la distribución de los vectores velocidad a lo largo del arco de admisión de la turbina, de la misma manera la eficiencia del inyector en función del número de Reynold.

c) En el capítulo VIII se presenta el desarrollo y los resultados del modelamiento del flujo en el rodete, para el primer y segundo efecto, considerando la geometría establecida en el diseño de la turbina para la minicentral hidroeléctrica “La Raya” y la metodología desarrollada en el capítulo VI; se obtienen indicadores de comportamiento y curvas características inherentes al diseño de la turbina, que son empleadas para obtener las curvas características de la turbina unidad, buscando generalizar los resultados.

El autor desea agradecer, a todas las personas que apoyaron directa o indirectamente en la ejecución del presente trabajo.

El autor.

## Capítulo 1: INTRODUCCIÓN

---

Las características principales del motor hidráulico conocido con los nombres de turbina Hidráulica de Flujo Cruzado, turbina Hidráulica de Flujo Transversal, turbina Michell – Banki, turbina Michell o por su nombre en inglés Cross Flow Turbine, son su rango de aplicación ( $Q = 0.02$  a  $8 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $H = 1$  a  $200 \text{ m}$ ), su versatilidad (operan eficientemente para un amplio rango de caudales, desde un 20% a más del 100% del caudal de diseño), su simplicidad constructiva y por ende su bajo costo de manufactura; haciéndola ideal para ser utilizada en el aprovechamiento de micro y mini – saltos hidráulicos.

Desde su difusión en nuestro medio alrededor del año 1961 **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, ha sido considerada como una de las mejores alternativas desde el punto de vista técnico y económico, en comparación a posibilidades más comerciales y convencionales (turbinas Pelton o turbinas Francis) para el aprovechamiento de micro y mini saltos hidráulicos en la generación de energía eléctrica, destinado principalmente a la electrificación rural y a la promoción del desarrollo sostenible a través del empleo de energías limpias.

A pesar de todas sus bondades, en adición a la enorme disponibilidad del recurso hídrico de determinadas zonas del país<sup>1</sup>, el recurso hídrico no es explotado o se efectúa de manera deficiente, principalmente, a criterio del autor, debido a:

- i. La relativa baja rentabilidad relacionada a éste tipo de proyectos hidroenergéticos en micro y mini escalas.
- ii. La deficiente difusión de la tecnología en el ambiente académico y comercial, que reduce las posibilidades en su empleo, y
- iii. La reducida y casi inexistente adecuación tecnológica para la realidad peruana en relación con la disponibilidad del recurso hídrico del país<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Zonas principalmente ubicadas en “ceja de selva”, donde los accidentes geográficos proveen de caídas apreciables, de la misma manera que el recurso hídrico en estas zonas es abundante.

<sup>2</sup> Caracterizado por ser muy variable entre, principalmente aprovechables en micro y mini escalas, con caudales entre  $0.02$  a  $2 \text{ m}^3/\text{s}$  y alturas brutas entre  $1$  y  $80 \text{ m}$ , ubicados en un mayor porcentaje en las

La primera razón que explica la deficiente explotación del recurso hídrico en el contexto planteado, se debe a la naturaleza del proyecto (relación entre ingresos y los costos calculados), poco o nada se puede hacer para mejorar esta situación, sino más bien disminuir los costos de inversión (generación de tecnología barata, entre otras alternativas), para mejorar su rentabilidad.

La segunda razón del déficit en el empleo de la tecnología para el aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas, fácilmente puede ser solucionado con programas de capacitación, siempre y cuando se cuente con tecnología debidamente adecuada y validada a la realidad nacional; es en este punto, donde los dos últimos aspectos confluyen, la situación tecnológica de la turbina no ha cambiado significativamente en los últimos 30 años, por lo menos para la realidad nacional, la difusión de una tecnología parcial o casi nada adecuada, como es su caso, no implican mejoras en el aprovechamiento del recurso hídrico, aquí se evidencia la necesidad de efectuar una revisión y replanteamiento de los principios, supuestos y relaciones que determinan el diseño y predicen el comportamiento de la turbina, con la finalidad de mejorar la tecnología para la realidad nacional, esta es la razón de ser del presente tema de tesis.

### ***1.1 ANTECEDENTES***

La turbina hidráulica de flujo transversal o turbina hidráulica de flujo cruzado (Cross Flow Turbine) mas conocida en nuestro medio como Turbina Michell – Banki o simplemente Turbina Michell fue concebida y patentada por el Ingeniero australiano Anthony George Maldon Michell en 1903, posteriormente el profesor Donat Banki de la Universidad Técnica de Budapest la desarrollo y difundió entre 1917 y 1919; la turbina fue perfeccionada posteriormente tanto hidráulica como mecánicamente por la casa Ossberger de Baviera – Alemania Occidental, quienes desarrollaron el modelo Michell – Ossberger de la turbina.

En el país, la turbina hidráulica de flujo cruzado no se encuentra tan difundida como las turbinas Pelton, Francis o Kaplan, de aquí que difícilmente la información técnica – comercial para su diseño o selección esté disponible; en el aspecto constructivo se presenta una situación semejante, existen algunos pocos fabricantes especializados en el tema, quienes basan su manufactura en el conocimiento práctico – empírico, producto de la experiencia adquirida; en cuanto a estudios realizados sobre comportamiento y diseño de la turbina la situación no es diferente; se consideran los siguientes trabajos como los más relevantes:

- *Diseño de una Turbina Michell – Banki* (1961) de A. F. Coz Pancorbo **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, quizá sea el primer trabajo relacionado a la turbina y su adecuación a la realidad nacional, que presenta un diseño básico.
- *Diseño, construcción y ensayo de Turbinas de Flujo Transversal para microcentrales hidroeléctricas* (1980), de C. A. Hernández Bazo **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, propone una configuración geométrica diferente para toberas o inyectores de la turbina, basado en un análisis teórico experimental de la pérdidas de carga en ductos cerrados, empleando la ecuación de Darcy – Weisbach.
- *Turbinas hidráulicas de flujo transversal* (1984) de A. F. Coz Pancorbo **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, resume las principales relaciones que rigen el diseño y predicen el comportamiento de la turbina; probablemente a nivel nacional sea el trabajo que mayor información abarca en relación al diseño de la turbina.

A nivel sudamericano las referencias más destacadas en relación a estudios de la turbina son las siguientes:

- *Estandarización de Turbinas tipo Michell Banki* (1986) del Instituto Nacional de Energía (INE) del Ecuador **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, busca realizar la estandarización de turbinas tipo Michell – Banki, incluye información técnica necesaria para efectuar su construcción y la selección de equipos complementarios; se propone que la estandarización se base en consideraciones estructurales.

- *Microturbinas Hidráulicas CFT – Caracterización* (1998) desarrollado por J. Gilli, F. Massaro y M. Pagnola **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, hace referencia al desarrollo de un programa para modelar el comportamiento de las turbinas CFT (Cross Flow Turbine), éste quizá sea el único trabajo a nivel sudamericano que pretende modelar numéricamente el comportamiento de la turbina.
- En los *apuntes del curso pequeñas centrales hidráulicas* de A. R. Marchegiani **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se propone un procedimiento para realizar el diseño hidráulico de la turbina basado en la recopilación de información teórico – experimental de estudios efectuados.

Otros trabajos destacables que presentan información importante para el diseño de la turbina son:

- *The Banki Water Turbine* (1949) de F. Merryfield y C. A. Mockmore **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, efectúan un análisis teórico basado en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento angular deduciendo relaciones que determinan el diseño de la turbina.
- *Análise Computacional Bidimensional de Turbinas Cross – Flow* (1995) de N. H. Costa Pereira y J. E. B. Teixeira Borges **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, quienes desarrollan un método para determinar las líneas de corriente a lo largo de la trayectoria del flujo en el inyector, empleando la teoría de flujo potencial.
- *Study of the Nozzle Flow in a Cross – Flow Turbine* (1994) desarrollado por N. H. Costa Pereira y J. E. B. Teixeira Borges **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, del Technical University of Lisboa, detallan el procedimiento empleado para efectuar el modelamiento numérico – experimental del flujo en inyectores de turbinas Cross Flow, se propone que el tramo final del inyector sea descrito por una función logarítmica espiral para el modelamiento, se obtienen resultados numéricos empleando la teoría de flujo potencial bidimensional que son comparados con resultados experimentales de testar el inyector directriz en un banco de pruebas.

- *Simulación for the Flow around Cross Flow Turbine with end plates* (2000) de K. Ishimatsu, K. Kage y T. Okubayashi **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, trabajo presentado en el congreso de dinámica computacional de fluidos del Japón el año 2000, en el que se modela el flujo a través del rodete de la turbina, con un diseño donde los álabes poseen planchas terminales (end plates) unidas en su tramo final.

Existe considerable información relacionada a la elaboración de proyectos hidráulicos para aprovechar pequeños saltos, en los se recomienda principalmente las turbinas Pelton, Francis, Turgo y también la Cross Flow; es común encontrar en estas publicaciones las principales relaciones constructivas para efectuar un dimensionamiento básico (dimensiones del rotor y ángulos de los álabes), mas no un diseño completo; al respecto, entre la información revisada más importantes se menciona a T. Nozaki en *Datos para la Elaboración de Proyectos de Pequeñas y Medianas Centrales Hidroeléctricas* **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, el *Manual de las Micro y minicentrales Hidroeléctricas* publicado por I. T. D. G. Perú **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y el Manual de Pequeña Hidráulica publicado por la European Small Hydropower Association **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

El interés por el estudio de la turbina hidráulica de flujo cruzado comienza con la necesidad de diseñar, una turbina Michell – Banki como una tarea del curso de Diseño Mecánico I (MC-633) que se dicta en la Universidad Nacional de Ingeniería, pero aun mejor fue la motivación por la cual se pretendía ejecutar tal labor, concebida el semestre anterior en el curso de Proyectos de Ingeniería (MC-613), buscando seleccionar una turbina para la “Micro – Central de 16 kW – Banco de Pruebas de Diversas Aplicaciones” del laboratorio N° 5 de Máquinas Térmicas e Hidráulicas de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería, que se resume en los siguientes guiones:

- Electrificar zonas rurales, que cuenten con el recurso hídrico y por motivos técnicos o económicos, ninguna otra posibilidad (mini o micro central térmica, tendido de una red de distribución, energías no convencionales), podría superar a una mini o micro central hidroeléctrica.

- Fomentar la utilización de la turbina, en zonas potencialmente productivas<sup>3</sup>, con el desarrollo de la tecnología respectiva, buscando implementar, desarrollar o mejorar los procesos productivos que se practican en la zona; cuyo resultado inmediato sea el incremento del valor agregado de la materia prima producida en la zona, a través del “uso productivo de la energía”; y finalmente,
- Desarrollar una turbina “ideal para la realidad nacional”, de construcción sencilla, bajo costo de fabricación, manufactura nacional y con posibilidades de exportación, como una turbina modelo peruano.

Con el tiempo, la idea fue desarrollada hasta concretarse en el presente tema de tesis, donde se pretende actualizar la teoría relacionada con la turbina hidráulica de flujo cruzado bajo un enfoque teórico y la respectiva validación de las modificaciones propuestas empleando un enfoque numérico – experimental (Computing Fluid Dynamics o Dinámica computacional de fluidos), de modo que al final del proceso, no solo se podría referir a una turbina hidráulica de flujo cruzado modelo Michell – Banki o modelo Michell – Ossberger, sino a una turbina hidráulica de flujo cruzado modelo Peruano, juzgará el lector la validez de los resultados obtenidos y la aplicación del conocimiento generado.

## ***1.2 . PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA***

### **Formulación del Problema**

#### **El contexto de la explotación de los recursos naturales en el país**

Es bien conocido que el Perú posee variedad y cantidad de recursos naturales no explotados o explotados inadecuadamente, sean éstos renovables o no renovables, bien afirmaba Antonio Raymondi: “El Perú es un mendigo sentado en un banco de oro”, afirmación que, en la mayoría de los casos por falta de tecnología, restricción

---

<sup>3</sup> Zona potencialmente productiva en el contexto mencionado significa que cuente con (1) los recursos energéticos necesarios para implementar algún proceso que requiera energía y (2) produzca algún tipo de materia prima (perecible o no perecible), susceptible de ser industrializada o semiindustrializada.

de capital y principalmente capacidad emprendedora y administrativa, se transforma en una verdad; en contraposición, la tendencia de los últimos gobiernos ha sido emprender programas de privatización para que instituciones nacionales o internacionales administren los recursos del estado, creyéndose que de alguna u otra manera, los beneficios generados producto de la actividad económica desarrollada, alcanzarán en menor o mayor grado a los individuos que forman parte de la nación y de los cuales es propiedad la materia prima explotada, siendo por lo general los más beneficiados las entidades extranjeras; no se pretende discutir la política emprendida por el estado, menos sus impactos parcialmente logrados, dado que no es objeto de estudio del presente tema; lo que se pretende es retratar la realidad nacional en lo referente a la explotación de los recursos del país.

### **La explotación del recurso hídrico en macro, micro y mini escalas**

La situación del recurso hídrico empleada en la generación de energía eléctrica del país, en este contexto macro, no es la excepción, se puede apreciar que de todas las centrales hidroeléctricas existentes a la fecha más del 50% pertenecen a empresas privadas, solo la central hidroeléctrica del Mantaro y algunas otras pequeñas centrales hidroeléctricas aun no han sido concesionadas por el estado peruano a empresas transnacionales, que “administran mejor” los recursos de la nación; en resumen el recurso hídrico del país en la escala macro a pesar de toda su potencialidad no es aprovechada y el actualmente utilizado es administrado en su mayoría por transnacionales, tampoco se plantea la ejecución de proyectos de envergadura para los próximos años que cambien la situación descrita, el déficit de la explotación del recurso hídrico; toda la política energética del país depende exclusivamente del gobierno, poco o nada se puede hacer para modificar esta situación si no se tiene ingerencia en estos niveles.

En el contexto micro, la situación se agudiza, dado que los proyectos de explotación hidroenergéticos en micro y mini escalas de aprovechamiento se caracterizan por:

1. La relativa “baja rentabilidad” y por tanto la disminución del interés de invertir en éste tipo de proyectos, explicado principalmente por las economías de escala.

2. El desconocimiento de las tecnologías más adecuadas para llevar adelante esta explotación, en el ámbito académico y comercial (profesionales, inversionistas y/o fabricantes); que disminuye las posibilidades de explotación.
3. La carencia de tecnología específica o tecnología adecuada a la realidad del país en el contexto de micro y mini explotación, empleándose si se diera el caso:
  - a. Principalmente tecnología importada con elevados costos de inversión, lo que hace aun menos atractivo el proyecto, sobre todo si se posee restricción de capital y la población beneficiaria es muy pequeña.
  - b. Tecnología no adecuada o empíricamente desarrollada, relacionada con una inversión pequeña pero a su vez de funcionamiento sumamente ineficiente desde el punto de vista tecnológico, último aspecto atribuible al conocimiento superficial de las opciones tecnológicas.

En parte, estas razones explican la existencia de un mayor déficit de explotación del recurso hídrico en micro y mini escalas, en comparación con la explotación en gran escala; considerando estos aspectos, a diferencia del primero, los restantes se resumen en la deficiente disponibilidad tecnológica o deficiente oferta tecnológica y su difusión, lo que se verifica cuando se efectúa una revisión de la literatura y se investiga en el mercado de turbinas para micro y mini centrales hidroeléctricas, descubriéndose en primer lugar que se dispone de tecnología no apropiada para la realidad del país, en este sentido por ejemplo, se prefiere en muchas oportunidades las turbinas Pelton o Francis, dejando de lado las tecnologías no convencionales y que para las características del recurso hídrico del país, se constituyen como las más recomendables, en este caso la turbina hidráulica de flujo cruzado o Cross Flow Turbine por las bondades que presenta.

### **1.2.1.3. La turbina hidráulica de flujo cruzado en el contexto de la explotación del recurso hídrico**

En general la situación tecnológica de la turbina hidráulica de flujo cruzado y las demás turbinas convencionales y no convencionales, empleadas en los micro y mini aprovechamientos de energía hidráulica, no es la más adecuada, dado que su diseño:

- i. No consideran la revisión de los principios y supuestos en los que se basa la concepción del funcionamiento de la turbina y constituye el cimiento de los modelos teóricos del diseño de la turbina.
- ii. No responden a estudios meticulosos para pequeños aprovechamientos, se deja de lado o simplifican aspectos relacionados a la concepción del funcionamiento de la turbina y que influyen sensiblemente en el diseño, que al ser abordados proponen mejoras en el diseño de la turbina.
- iii. Se encuentran desfasados en el tiempo, porque se deja de lado las tendencias modernas en los procesos de diseño, técnicas como el modelamiento empleando CFD para optimizar el diseño de las turbinas.
- iv. No se experimenta en pequeña escala por considerar a la micro y mini generación de energía como una actividad no “muy rentable”, principalmente atribuido a las economías de escala.

El resultado final de esta situación se resume en las relativamente menores eficiencias logradas en comparación con los estándares obtenidos en centrales hidroeléctricas de mayor envergadura, en contraposición se tienen bajos costos de inversión relacionados con el empleo de éstas tecnologías; sin embargo todo lo descrito no mella las ventajas competitivas de la Cross Flow Turbine en contraste con tecnologías similares (turbinas Pelton, Francis o Turgo). En lo concerniente a la situación tecnológica de la turbina hidráulica de flujo cruzado, se presentan éstas mismas características y adicionalmente se agrega lo siguiente:

- i. Revisión de los principios y supuestos, desde su difusión en el país en 1961, los principios y supuestos en los que se basa el diseño de la turbina, no han sufrido modificaciones.

- ii. Estudios meticulosos del diseño, en todos los estudios efectuados se han dejado de lado aspectos como la influencia del espesor de los álabes y la contracción de la vena al interior de la turbina, por mencionar algunos.
- iii. Diseño desfasado en el tiempo, no se tiene conocimiento del empleo de técnicas modernas para optimizar el diseño de la turbina en el ámbito académico nacional (modelamiento del flujo a través de la turbina), la mayoría de los modelamientos efectuados se ciñen al flujo que atraviesa el inyector y sus consecuencias.
- iv. Experimentación del diseño, se cuenta con escasos estudios relacionados a la experimentación de la turbina para el país.

#### **1.2.1.4. Conclusión**

El estado tecnológico de la turbina hidráulica de flujo cruzado se caracteriza por la disponibilidad de diseños inadecuados<sup>4</sup>, que influye, pero no de manera determinante, en la oferta tecnológica empleada en el aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas, aspecto que pretende ser abordado en el presente tema de tesis, respondiendo a las siguientes preguntas:

##### Preguntas Descriptivas

¿Cuál es la disponibilidad tecnológica para su aprovechamiento en el mismo contexto y cuál es la tecnología más apropiada para el aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas?

##### Pregunta General

¿Qué procedimiento se debería emplear para que la tecnología más apropiada en el aprovechamiento del recurso hídrico a nivel de micro y mini escalas, la turbina hidráulica de flujo cruzado, sea adecuada y validada en el contexto planteado?

##### Preguntas Específicas

¿Qué adecuaciones requiere la turbina hidráulica de flujo cruzado para conseguir un mejor aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas?

---

<sup>4</sup> Caracterizado por (1) principios y supuestos no innovados, (2) diseño responde a estudios simplificados que dejan de lado aspectos del funcionamiento importantes, (3) diseño no responde a tendencias modernas para su optimización, y (4) diseño no responde a la experimentación.

¿Qué ventaja tecnológica presentará la nueva propuesta tecnológica, la turbina hidráulica de flujo cruzado modificada, respecto de tecnologías similares?

### **1.3 OBJETIVOS**

#### **1.3.1 Objetivos Descriptivos**

Describir y caracterizar la disponibilidad tecnológica u “oferta tecnológica”, para el aprovechamiento del recurso hídrico y establecer la más apropiada para la explotación en del recurso hídrico en micro y mini escalas, en el contexto de la generación de energía eléctrica.

#### **1.3.2. Objetivo General**

Proponer un diseño modificado de la turbina hidráulica de flujo cruzado (Cross Flow Turbine Modified), basado en la revisión, reformulación y replanteamiento de principios y supuestos que rigen su diseño y funcionamiento; debidamente validado empleando métodos numéricos, para modelar su comportamiento en el contexto del aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas.

#### **1.3.3. Objetivos Específicos**

Revisar, reformular y replantear los principios y supuestos y relaciones que rigen el diseño y funcionamiento de la turbina hidráulica de flujo cruzado (Cross Flow Turbine) empleada en el aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas para la generación de energía eléctrica.

Determinar la ventaja tecnológica que presentará la propuesta denominada turbina hidráulica de flujo cruzado modificada (Cross Flow Turbine modified), respecto de sus similares, empleando métodos numéricos, en el contexto del aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas para la generación de energía eléctrica.

## **1.4. HIPÓTESIS**

### **1.4.1. Hipótesis Descriptiva**

La oferta tecnológica para el aprovechamiento del recurso hídrico (turbinas Francis, Pelton, Cross Flow y Turgo) en micro y mini escalas se caracteriza principalmente por ser tecnología importada, confiable en operación pero de elevado costo y en menor porcentaje las de manufacturación nacional con niveles de desarrollo tecnológico bajo a medio, obteniéndose en ambos casos un performance de comportamiento de las turbinas relativamente deficiente para las características con que cuenta el recurso hídrico en el país, de todas ellas la tecnología más apropiada (a pesar de las desventajas para la situación actual) es la turbina Cross Flow o de flujo cruzado.

### **1.4.2. Hipótesis General**

Los principios, supuestos y relaciones que rigen el diseño y predicen el funcionamiento de la Cross Flow Turbine, no han sufrido modificaciones y mejoras sensibles en años, de ello, que el diseño de la turbina no sea el mas adecuado para el presente, a pesar que su difusión como tal en el ámbito académico y comercial implique el empleo de este diseño (desfasado en el tiempo) en realidades donde se recomiende su uso (por sus bondades); por tanto una revisión de éstos principios y supuestos, trae consigo como consecuencia la adecuación de ésta tecnología en el tiempo, demandando además que las innovaciones propuestas, sean debidamente validadas, empleando técnicas numéricas para modelar su influencia en el comportamiento de la turbina.

### **1.4.3. Hipótesis Específica**

La revisión y replanteamiento de los principios, supuestos relaciones que rigen el diseño y predicen el comportamiento de la Cross Flow Turbine, se traduce en mejoras tecnológicas respecto de diseños anteriores de la misma y de tecnologías similares, empleadas en el aprovechamiento del recurso hídrico en micro y mini escalas, principalmente atribuible a (1) la modificación en la concepción de los triángulos de velocidad al ingreso del rodete, (2) la consideración del efecto del

espesor de los álabes, y (3) la cuantificación del efecto de la contracción de la vena al interior del rodete de la turbina, todos ellos como efectos inherentes al diseño y al comportamiento de la turbina.

Las ventajas tecnológicas de la propuesta tecnológica, la Cross Flow Turbine modified, respecto de tecnologías similares, se resumen en (1) la obtención de mejores indicadores de operación (eficiencia en esencia, ligado a las modificaciones en el diseño de la turbina), resultado de efectuar una revisión y reformulación de principios y supuestos que rigen su diseño y predicen su comportamiento, y la validación de las modificaciones del diseño empleando simulación numérica a través del método de los elementos finitos; y (2) el bajo costo de manufacturación, afín a la simplicidad de su diseño, la consideración y aplicación de estudios teórico – experimentales efectuados y concernientes a la turbina por otros autores.

## **Capítulo 2: LA TURBINA HIDRÁULICA DE FLUJO CRUZADO Y LOS MOTORES HIDRÁULICOS**

---

### **2.1. GENERALIDADES**

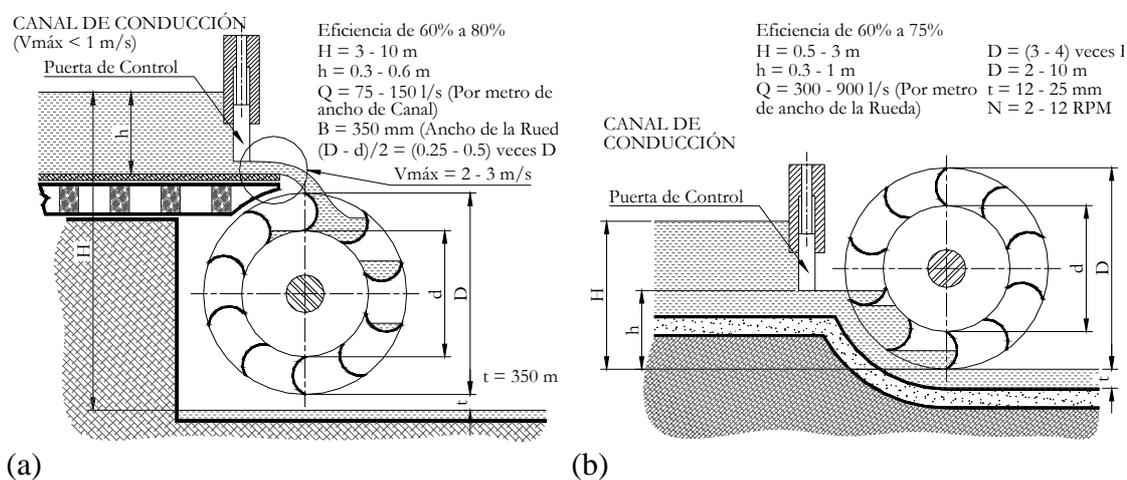
Antes de desarrollar el uso del vapor como fuente de energía, se empleaban inicialmente las ruedas hidráulicas de considerable tamaño y capacidad, y posteriormente las turbinas hidráulicas a partir del siglo XVII; todo esto impulsó el desarrollo de pequeñas industrias que empleaban la energía mecánica generada por éstas máquinas hidráulicas, este auge industrial se localizó principalmente en ciertas regiones de Europa y Norte América, donde la industria crecía en gran medida.

Las ruedas hidráulicas en orden de aparición son la rueda hidráulica de paletas, la rueda hidráulica horizontal, la rueda hidráulica vertical (ver Figura 0.1), los molinos flotantes (537 d. C.), los molinos de marea (1130 d. C.) y finalmente las turbinas (1826 d. C.); todas ellas empleadas para aprovechar el recurso hídrico, buscando facilitar el trabajo que se realizaba fundamentalmente en las labores relacionadas a la agricultura (molienda de granos, entre otros); éstas ruedas obraban principalmente por efecto de la gravedad, por ello fueron fácilmente construidas por el hombre

Algunos hechos relevantes relacionados al desarrollo y empleo de las ruedas hidráulicas son: la atribución de la construcción de la primera rueda hidráulica de 0.5 CV y eje vertical, a los griegos, en el siglo I a. C., empleada para obtener harina a través de la molienda de los granos de trigo, una alusión al invento se registra en un

documento del año 80 a. C. realizado por Antipartes de Tesalónica; la rueda de eje horizontal y de impulso inferior fue descrito por el arquitecto e ingeniero romano Marco Vitrubio Polión (70 a. C.-25 a. C.) en el siglo I a. C., quien posiblemente recopiló información de tratadistas griegos; en el siglo IV d. C., el molino de Barbegal en Roma fue una de las mas grandes construcciones hidráulicas, constituido por 8 ruedas hidráulicas de 2.2 m de diámetro y 0.7 m de ancho, conectadas a molinos de granos, alimentadas con agua transportada por un canal de 2 m de ancho, 5.6 m de alto y una pendiente aproximada de 30°, cuya producción total diaria de harina se estimaba en 2.8 toneladas; para el año 1086 se registraron en el Reino Unido 5 624 molinos de grano que trabajaban con ruedas hidráulicas.

El primer estudio referente al estudio de las ruedas hidráulicas se atribuye al físico y matemático francés Parent (1666-1716), miembro de la Real Academia de Ciencias, quien genialmente predijo una relación óptima entre la velocidad de la rueda y la velocidad de la corriente del agua; el primer intento de formular la base teórica para el diseño de ruedas hidráulicas en el siglo XVIII corresponde al ingeniero civil británico John Smeaton, que demostró que la rueda de empuje superior era más eficaz; sin embargo, el ingeniero militar francés Jean Victor Poncelet diseñó una rueda de empuje inferior cuyas palas curvadas aumentaban el rendimiento casi un 70%; otros estudios teórico – matemáticos fueron realizados por Leonardo da Vinci (1452-1519), Galileo Galilei (1564-1642), René Descartes (1596-1650), entre otros.



**Figura 0.1 - Rueda hidráulica: (a) vertical de alimentación superior (over shoot water wheel), y (b) vertical de alimentación inferior (under shoot water wheel)**

Las desventajas principales que presentaban las ruedas hidráulicas en su diseño y funcionamiento eran: (1) rendimiento bajo, (2) velocidad de rotación muy lenta (4 a 10 revoluciones por minuto) y (3) el aprovechamiento solo de la circunferencia de la rueda; las mejoras conseguidas a raíz de los estudios de las ruedas hidráulicas, dieron como resultado la construcción de ruedas de impulso y de reacción predecesoras de las turbinas, cuya ventaja principal fue la de aprovechar la energía cinética del agua y por tanto resultaron ser de menor tamaño.

El estudio de las turbinas tiene su origen en el año 1754, cuando Leonhard Euler (1707-1783) publica su famosa memoria de Berlín sobre maquinaria hidráulica “*Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la reaction de l’ eau*”,<sup>5</sup> en la que expone su teoría sobre las máquinas de reacción y se presenta por primera vez la ecuación fundamental de las turbomáquinas, deducida al igualar la variación de la cantidad de movimiento del fluido en su paso por el rotor, con el par que se generaba, inclusive Euler propuso su propia máquina hidráulica que trabajaba empleando la impulsión de varios chorros de agua (ver Figura 0.3).

Hasta el año en que Euler desarrolló su teoría, el término *turbina* aun no era empleado, fue el ingeniero teórico francés Claude Burdin, profesor de la escuela de minas de Saint Étienne, en su célebre obra de la academia de ciencias “*des turbine hydrauliques ou machines rotatoire á grande vitesse*”,<sup>6</sup> quien acuñó por primera vez la palabra *turbina* para el vocabulario técnico, palabra que proviene del latín *turbo-inem* que significa rotación o giro, como parte de un análisis teórico en que se daba una gran importancia a la velocidad de rotación.

La primera turbina fue inventada en Francia en 1826, por el ingeniero Benoît Fourneyron (1802-1867) motivado por el concurso convocado por una sociedad científica que estimulaba el desarrollo de la industria nacional de Francia, y obteniendo el premio al “mejor diseño industrial de la rueda hidráulica”; con su diseño denominado *turbina Fourneyron* (ver Figura 0.2), adoptando la palabra *turbina* concebida por su profesor Burdin; su diseño consistía en dos ruedas

---

<sup>5</sup> Teoría más completa de máquinas que son puestas en movimiento por la reacción del agua.

<sup>6</sup> Teoría de turbinas hidráulicas o máquinas rotatorias a gran velocidad.

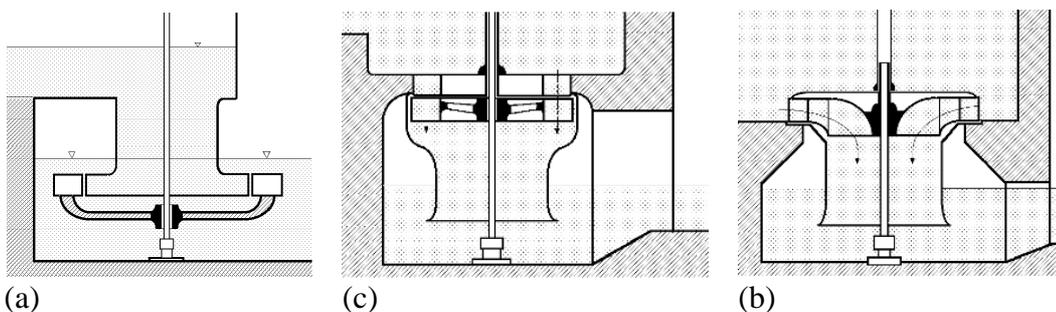
hidráulicas concéntricas (la rueda interior era estacionaria y la rueda exterior era móvil); Benoît Fourneyron, predijo que su máquina alcanzaría una eficiencia del 80%, pero cuando fue construida y puesta en marcha en 1827, debido a la disminución de la carga, el flujo centrífugo provocó inconvenientes no consiguiendo su objetivo; posteriormente la turbina fue mejorada y en 1835 fue instalada la primera turbina Fourneyron para uso industrial.

Hasta 1837 se inventaron y desarrollaron la *turbina de Heuschel* y la *turbina de Jonval* como competidoras de la turbina Fourneyron como turbinas de reacción, posterior a esta fecha también se desarrollaron otras máquinas hidráulicas, como la *turbina de Fontaine*, la *turbina Schwamkrug* inventada en 1850 y clasificada como turbina de acción radial y centrífuga, la *turbina Girard* inventada en 1863 clasificada como turbina de acción e inyección total, que alcanzó gran difusión en Europa; todas estas máquinas hidráulicas lograron sobrevivir y es posible, en algunos casos, que aun se encuentren operando, pero dejaron de ser construidas por las siguientes razones fundamentales:

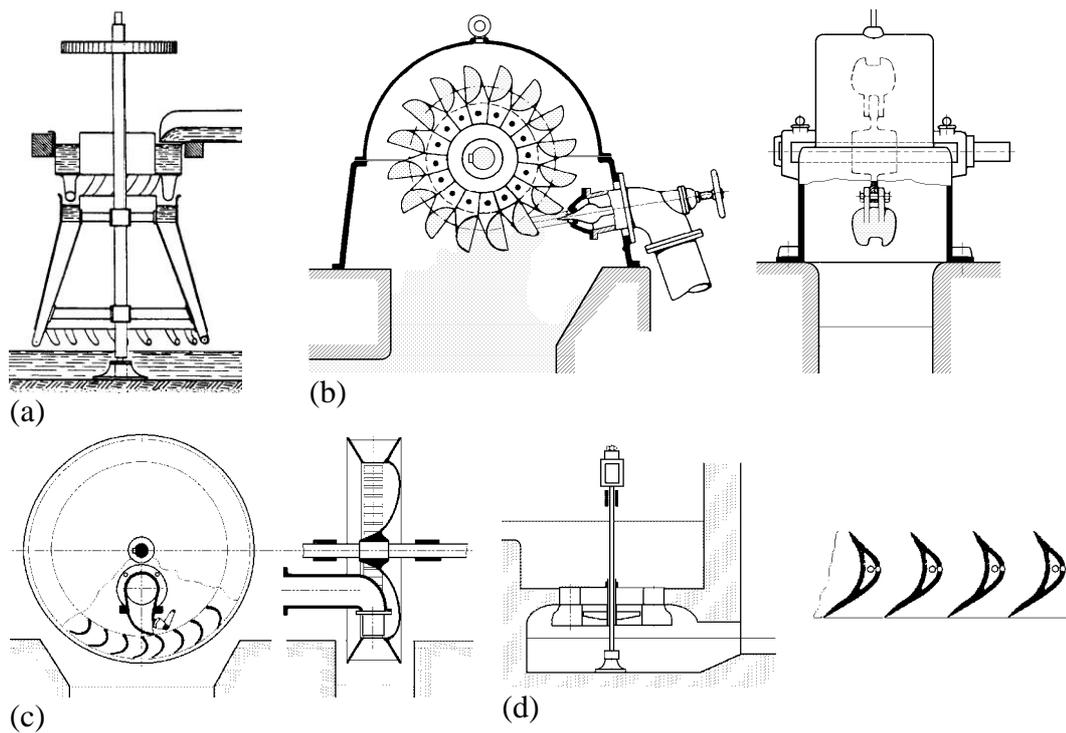
- Rendimiento bajo, sobre todo a cargas parciales, una eficiencia del 70 al 75% a plena carga y del 50 al 55% con el 50% de la carga.
- Velocidad de giro muy lenta y por ende
- Potencia específica (potencia por unidad) muy baja.

La *turbina Francis* fue propuesta por el Francés Jean Poncelet Delgado en 1820, patentada por el Americano Samuel B. Howd en 1838 y popularizada por James B. Francis en 1860, esta turbina emplazó a las ruedas hidráulicas empleadas hasta ese entonces y sobresalió por su performance entre las turbinas existentes hasta ese año. La *turbina de Pelton* fue concebida por el Ingeniero de Minas en California, Lester Allen Pelton en 1870 al observar la aceleración e inclusive hasta el estallido de una rueda hidráulica de álabes cóncavos, golpeados accidentalmente por un rocío de agua; la fabricación industrial empezó a partir en la década de 1880. La *turbina de Kaplan* fue propuesta del Austríaco Víctor Kaplan en 1910, en su afán de mejorar el rendimiento sobre la turbina Francis, en el caso de saltos bajos; la primera turbina de Kaplan fue instalada, en una fábrica del textil de Velm, Osterreich en 1919; el desarrollo de la turbina Kaplan fue detenido por el fenómeno de cavitación hasta

1926, cuando una Sociedad Sueca resuelve el problema al diseñar un servo – motor para los álabes modificando su posición en función de la carga.



**Figura 0.2 - Evolución de las turbinas de reacción (a) turbina Fourneyron, (b) turbina Henschel – Jonval, y (c) turbina Francis**



**Figura 0.3 - Evolución de las turbinas de acción (a) turbina Euler, (b) turbina Pelton, (c) turbina Schwamkrug, y (d) turbina Girard**

En resumen, el desarrollo de las turbinas se puede sintetizar en tres periodos.

- El primer periodo o periodo de la gestación, el cual se extendió durante todo el siglo XVIII,

- El segundo periodo, abarca parte el siglo XIX y los primeros años del siglo XX, tiempo en el que se inventaron la mayoría de las turbinas; y es finalmente,
- El tercer periodo, o el periodo del desarrollo tecnológico de las turbinas.

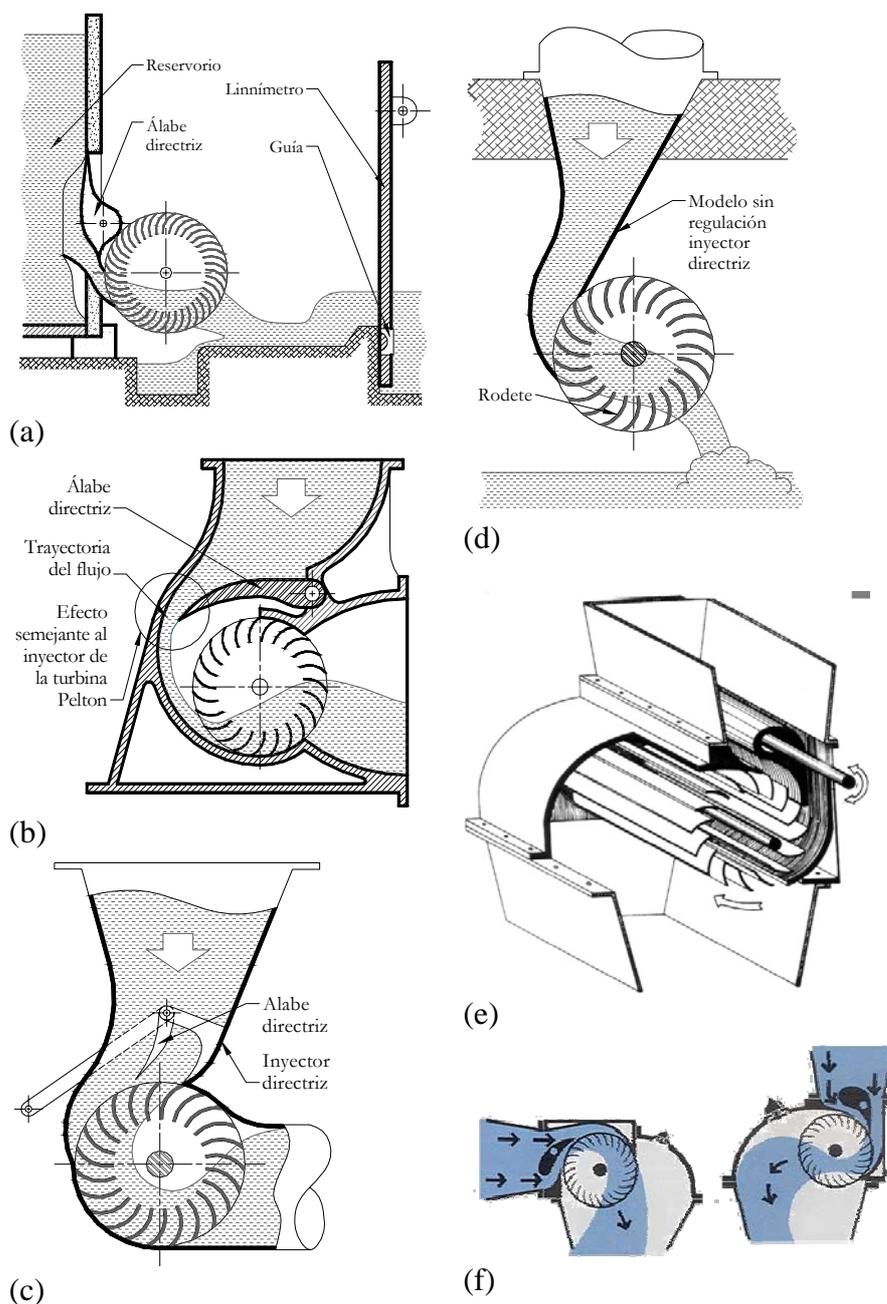
El lento progreso de las ruedas hidráulicas y de las turbinas hidráulicas se explica en el hecho que las máquinas hidráulicas debían ubicarse en las riveras de los ríos para aprovechar la energía hidráulica, desventaja frente a otras fuentes de energía como el vapor, pues las máquinas que empleaban ésta fuente de energía podían ser instaladas en cualquier lugar y sin restricción, sin embargo la evolución de la transmisión eléctrica permitió el auge de las plantas hidroeléctricas y por ende el perfeccionamiento de las turbinas hidráulicas.

## ***2.2. DESARROLLO HISTÓRICO***

La turbina hidráulica de flujo cruzado o turbina hidráulica de flujo transversal mas conocida en nuestro medio como Turbina Michell – Banki, Turbina Michell o por su nombre en ingles Cross Flow Turbine, cuya invención y desarrollo puede atribuirse a dos personas, el Ingeniero Australiano Anthony George Maldon Michell quien la inventó y la patentó en 1903; y posteriormente en Alemania el Profesor Húngaro Donat Banki la reinventó en 1917, y entre 1917 a 1919 la desarrollo y difundió por medio de artículos técnicos; un modelo de la Turbina concebida por Donat Banki (1959-1922) es exhibida en el Museo de Munich en Alemania, su rotor tiene un diámetro de 8 pulgadas (203.2 mm), el ancho del mismo tiene una longitud de 4 pulgadas (101.6 mm) y además posee 40 álabes (ver Figura 0.4.a).

La turbina fue perfeccionada posteriormente tanto hidráulica como mecánicamente por la casa Ossberger, en Weissenburg, Baviera; Alemania Occidental, quienes desarrollaron la turbina Michell – Ossberger como consecuencia de numerosas investigaciones (ver Figura 0.4.e y Figura 0.4.f), resultado de ello se modificó el diseño de Michell, se empleo el tubo de succión con la finalidad de mejorar el aprovechamiento del recurso hídrico y por ende mejorar los indicadores

de operación de la turbina, innovación que tal vez se constituya en la más importante efectuada en el desarrollo de la turbina, adicionalmente la casa Ossberger debido a la investigación efectuada realizó muchas patentes de los diferentes diseños por ende parte de la gran difusión que la turbina tiene hoy en día puede atribuirse a esta casa.



**Figura 0.4 - Diversos modelos de la turbina (a) diseño original de Donat Banki, (b) diseño a presión constante, (c) y (d) primeros diseños de la turbina con y sin álabes directriz, (e) diseño de la casa Ossberger, (f) diversos tipos de configuración del modelo Ossberger**

Actualmente la turbina hidráulica de flujo cruzado es clasificada como una turbina límite, en parte como turbina de impulso y en parte como turbina de reacción, dado que posee ambas características, aunque en sus primeros diseños esta clasificación estrictamente no era correcta, fue diseñada como una turbina de presión constante o turbina de acción, posible debido al amplio espacio entre el dispositivo de regulación del flujo el álabe directriz y el rodete (ver Figura 0.4.b), cumpliendo entonces el inyector directriz una función semejante al inyector de la turbina Pelton, estrangular el flujo desde la presión en la tubería forzada hasta la presión al interior de la carcasa.

En los diseños actuales, el inyector está muy cercano al rodete, lo que provoca que la presión del fluido en los canales del rodete (formado por los alabes y los platos), sea mayor que su entorno, se obtengan valores ligeramente mayores a la presión del interior de la carcasa (situación completamente adversa a la presentada en los primeros diseños de presión constante); ésta afirmación se confirma con los resultados obtenidos de estudios efectuados respecto a la distribución de presiones en el rodete de la turbina; por tanto la suposición de la presión constante en el fluido en su paso por el rodete puede considerarse válida, pero para el segundo efecto solamente, mas no para el primer efecto; la situación descrita explica la actual clasificación que se le da a la turbina.

La turbina hidráulica de flujo cruzado (Cross Flow Turbine) fue extremadamente popular algunos años atrás en Europa, donde se construyeron unas 4000 turbinas, diseñadas para cubrir saltos hidráulicos de hasta 600 pies (180 m), desde los 30 pies (9 m) de altura bruta, y hasta 400 pies<sup>3</sup>/s (10 m<sup>3</sup>/s) de caudal, con potencias de hasta 2500 HP (1900 kW).

### ***2.3. CARACTERÍSTICAS DE LA TURBINA***

#### **2.3.1. Relacionadas al Funcionamiento**

La admisión del flujo de agua en la turbina es parcial.

El chorro de agua que incide en el rotor de la turbina posee sección rectangular y atraviesa el rotor dos veces; a cada paso del fluido por el rodete se denomina efecto, por cuanto la turbina es de doble efecto.

El flujo en la turbina es centrípeto – centrífugo; centrípeto en el primer efecto y centrífugo en el segundo efecto.

No existe deflexión axial en el flujo en su paso por la turbina, es decir los vectores velocidad son siempre perpendiculares al eje de la turbina.

La energía transferida en el primer efecto por el fluido al rotor está entre el 70% al 80% y en el segundo efecto los restantes 20% al 30% de la energía total aprovechada por la turbina.

Es considerada como una turbina que opera entre el límite de las turbinas de acción y reacción, dado que los canales del rotor están llenos de agua cuya presión es ligeramente superior a la atmosférica.

### **2.3.2. Ventajas**

Recomendada para pequeñas centrales hidráulicas.

Alto rendimiento a bajas cargas o cargas parciales, hasta con un 10% del factor de carga, se obtienen rendimientos aceptables.

La altura neta no influye en sobremanera en el rendimiento de la turbina, como en el caso de turbinas convencionales (turbinas Pelton, Francis o Kaplan).

Por su simplicidad constructiva, su costo de fabricación es bajo.

Se puede emplear una altura de succión hasta de un 50% de la altura disponible<sup>7</sup>, a pesar de ser posible un mayor porcentaje en el aprovechamiento y por razones de seguridad no se admite mayores valores (si  $H_{MONTAJE} = 1$  a 5 m, entonces  $H_{SUCCION} = 1$  a 3 m).

### **2.3.3. Campo de Utilización**

La Tabla 0.1 compara los rangos para los cuales la turbina hidráulica de flujo cruzado se recomienda en contraste con los demás tipo de turbinas de acción y reacción; la Tabla 0.2 resume el rango de valores para los diferentes parámetros que

---

<sup>7</sup> Altura disponible, generalmente es la altura de montaje.

caracterizan el comportamiento de la turbina y la Figura 0.5 resume la información recopilada en la Tabla 0.1 y en la Tabla 0.2, describiendo gráficamente el campo de acción recomendado para la turbina hidráulica de flujo cruzado.

**Tabla 0.1 - Características principales de turbina hidráulicas**

Tipo	Turbina	Invetor y Año Patente	$N_s$ (N en RPM, $P$ en HP y $H$ en m)	$Q$ en ( $m^3/s$ )	$H$ (m)	$P$ (kW)	$h$ (%)
A C C I Ó N	Pelton	Lester Pelton (EE. UU.), 1880	1 Ch: 30 2 Ch: 30-50 4 Ch: 30-50 6 Ch: 50-70	0.05-50	30-1800	2-300000	91
	Turgo	Eric Credwson, (Gran Bretaña) 1920	60-260	0.025-10	15-300	5-8 000	85
	Flujo Cruzado (Cross Flow)	A. G. Michell (Australia), 1903 D. Banki (Hungría), 1917-1919	20-200	0.02-5	1-200	1-1 000	85
	Bomba Roto Dinámica	Dionisio Papn (Francia), 1689	30-170	0.05-0.25	10-250	5-500	80
	Francis	James Francis, (Gran Bretaña) 1848	L: 60-150 N: 150-250 R: 250-400	1-500	2-750	2-750000	92
	Deriaz	P. Deriaz, (Suiza) 1956	60-400	500	30-130	100 000	92
R E A C C I Ó N	Kaplan y de Hélice	V. Kaplan, (Austria) 1912	300-800	1 000	5-80	2-200000	93

Tipo	Turbina	Invetor y Año Patente	$N_s$ (N en RPM, P en HP y H en m)	$Q$ en ( $m^3/s$ )	$H$ (m)	$P$ (kW)	$h$ (%)
	Axiales						
	Tubular	Kuhne, 1930					
	Bulbo	Hugenin, 1933	300-800	600	5-30	100 000	93
	Generador Periférico	Harza, 1919					

Fuente: Manual de las mini y microcentrales hidráulicas, I. T. D. G.

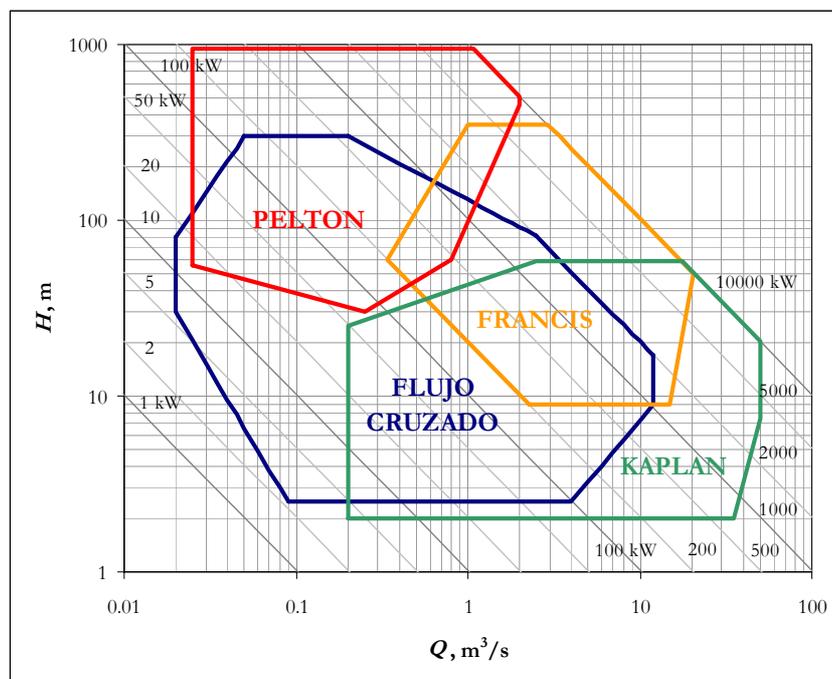
**Tabla 0.2 - Rangos de operación recomendados para la turbina hidráulica de flujo cruzado, varias referencias**

Parámetro	Unidad	Recomendado	Rango	Ref.
Altura	m	1 a 200 (hasta 300)	1 a 100 (hasta 200)	[a]
			1 a 200 (hasta 400)	[b]
			1 a 50 (hasta 200)	[d]
			1 a 200	[e]
			0.025 a 0.2 (hasta 0.4)	[a]
Caudal	$m^3/s$	0.02 a 5 (hasta 12)	0.02 a 7	[b]
			0.025 a 5	[d]
			0.02 a 8	[e]
			1.5 a 225 (2 a 300) hasta 750 (1 000)	[a]
Potencia	kW (HP)	Hasta 1,000 (1,350)	Hasta 750 (1 000)	[b]
			Hasta 150 (200)	[c]
			1 a 750 (1.5 a 1 000)	[d]
			60 a 85	[a]
Eficiencia	%	Alrededor de 85	Alrededor de 82	[d]
			Alrededor de 80	[e]
			60 a 2 000	[a]
Revoluciones	RPM	50 a 2 000	50 a 2 000	[b]
			0 a 50 (de 1 a 5 m)	[e]
Altura de Succión	$\%H_{LIBRE}$ (m)	0 a 50 (de 1 a 5)	0 a 50	[e]
			7 a 67	[b]
Cifra $Nq$	$H(m)$ , $Q(m^3/s)$ , $N(RPM)$	5 a 60	18 a 60	[c]
			40 a 150	[a]
Cifra $Ns$	$H$ (m), $P$ (HP), $N$ (RPM)	20 a 200	20 a 200	[b]
			60 a 200	[c]
			40 a 160	[d]
			40 a 160	[d]

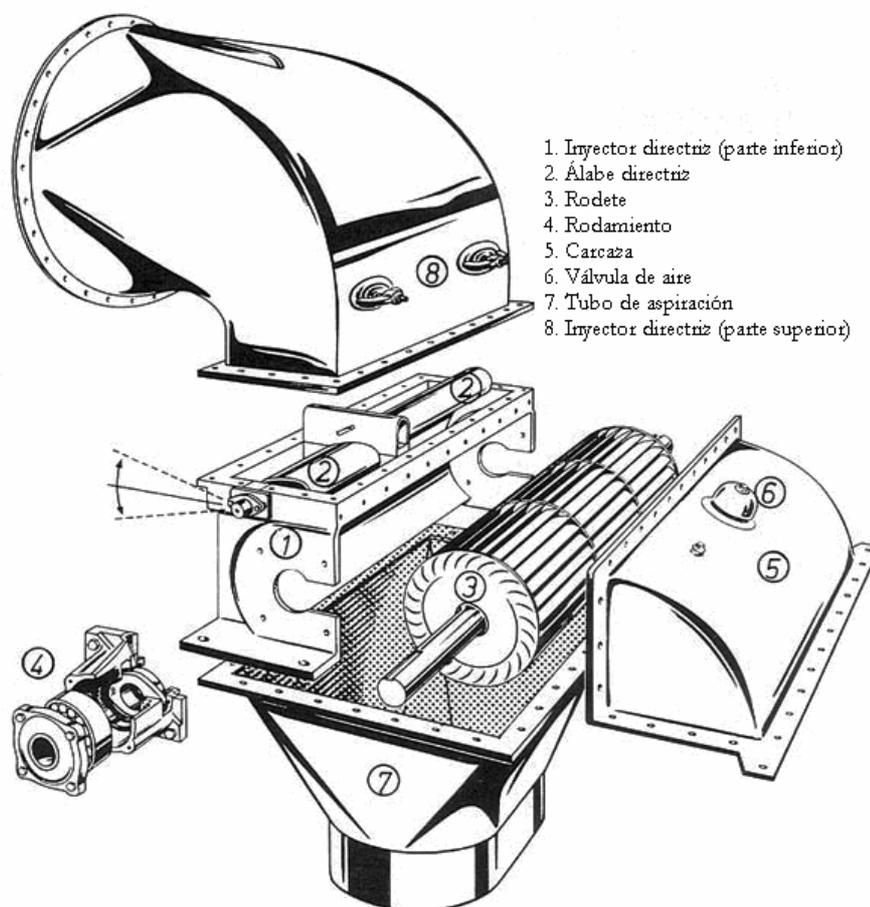
[a] COZ P., A. F.; 1961 (ver ref. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**); [b] HERNÁNDEZ B., C. A.; 1980 (ver ref. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**); [c] INE, 1986 (ver ref. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**); [d] ITDG Perú, 1995 (ver ref. **¡Error! No se encuentra el origen**

de la referencia.); [e] NOZAKI, T.; 1985 (ver ref. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 0.5 - Campo de utilización de la turbina hidráulica de flujo cruzado**



**Figura 0.6 - Conformación de la turbina hidráulica de flujo cruzado**

### **2.3.4. Conformación de la turbina**

#### **2.3.4.4. Distribuidor, tobera, inyector o inyector directriz**

El distribuidor, tobera, inyector o inyector directriz; es un ducto cuya única finalidad es conducir al flujo de la tubería de presión de la central, minicentral o microcentral hidroeléctrica al rodete; transformando la energía potencial del fluido en energía cinética, de modo que el rodete pueda aprovechar esta energía cinética.

#### **2.3.4.2. Álabes directrices, paleta directriz o compuerta de regulación**

Es un elemento prescindible de la turbina, cumple una función semejante al obturador en la turbina Pelton o a los álabes móviles en las turbinas Francis, la cual es regular la carga variando el caudal.

#### **2.3.4.3. Rotor o rodete**

Elemento principal de la turbina, cuya finalidad es transformar la energía cinética del fluido en energía mecánica de la manera más eficiente, aprovechando en forma óptima toda la energía cinética del fluido obtenida de la energía potencial del salto.

#### **2.3.4.4. Carcaza**

Elemento cuya finalidad fundamental es evitar el aspergeo del fluido en su trayectoria a través del rodete; dependiendo del modelo, otra finalidad puede ser, la de soportar la estructura de la turbina o parte de ella y transmitir los efectos o parte de ellos, a los apoyos o soportes de la turbina; en el caso de emplear el tubo de aspiración, el elemento especificado debe asegurar la hermeticidad correspondiente, para contar con la depresión requerida en toda la instalación.

#### **2.3.4.5. Tubo de aspiración**

Elemento cuya finalidad es semejante al tubo de aspiración de la turbina Francis, recuperar parte de la altura libre.

# Capítulo 3: REVISIÓN Y REFORMULACIÓN DE PRINCIPIOS, SUPUESTOS Y RELACIONES QUE RIGEN EL DISEÑO DE LA TURBINA

## 3.1. CONSIDERACIONES

### 3.1.1. Generalidades

La turbina hidráulica de flujo cruzado desde su difusión en el ámbito académico (1961) **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, no ha sufrido modificaciones sensibles en su diseño y menos aun se han revisado los principios y supuestos que rigen su diseño, los trabajos efectuados se han centran en dos temas de interés:

- i. El *mejoramiento u optimización del diseño de la turbina* (p. ej. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).
- ii. La *formulación de modelos teóricos que determinan el diseño de la turbina* (p. ej. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

La mayoría de los trabajos de investigación desarrollados en el país y de los difundidos a nivel de Sudamérica, se circunscriben en el primer tema de interés (establecen que el diseño de la turbina es definitivo); por tanto el segundo tema de interés es relegado; en ese sentido, el presente capítulo se enmarca en éste tópico, en la medida que supuestos, principios y relaciones que forman parte del modelo matemático teórico que determina el diseño actual de la turbina no han sufrido modificaciones, éstos pueden y deben ser estudiados desde una nueva perspectiva, lo que implica revisarlos y reformularlos, considerando los siguientes aspectos (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**):

- i. La modificación en la concepción de los triángulos de velocidad de la turbina como supuesto principal, y
- ii. La inclusión de efectos presentes en el funcionamiento de la misma, antes dejados de lado en la formulación de los modelos teóricos, como son (1) el efecto del espesor de los álabes, y (2) la contracción de la vena al interior de la turbina.

### 3.1.2. Principios

El diseño de una turbina hidráulica de flujo cruzado se basa en ecuaciones que conforman el *modelo teórico*. Un modelo teórico determina el diseño y predice el comportamiento de la turbina para las condiciones de operación para las cuales fue diseñada.

La obtención de las ecuaciones del modelo teórico se basa en la *concepción del funcionamiento* de la turbina y los *supuestos relacionados*, asimismo se consideran los *principios de turbomáquinas* que rigen el estudio de *rotores radiales*.

Al procedimiento empleado para obtener el conjunto de ecuaciones del modelo teórico (manipulación algebraica adecuada), se le denomina *formulación del modelo teórico*.

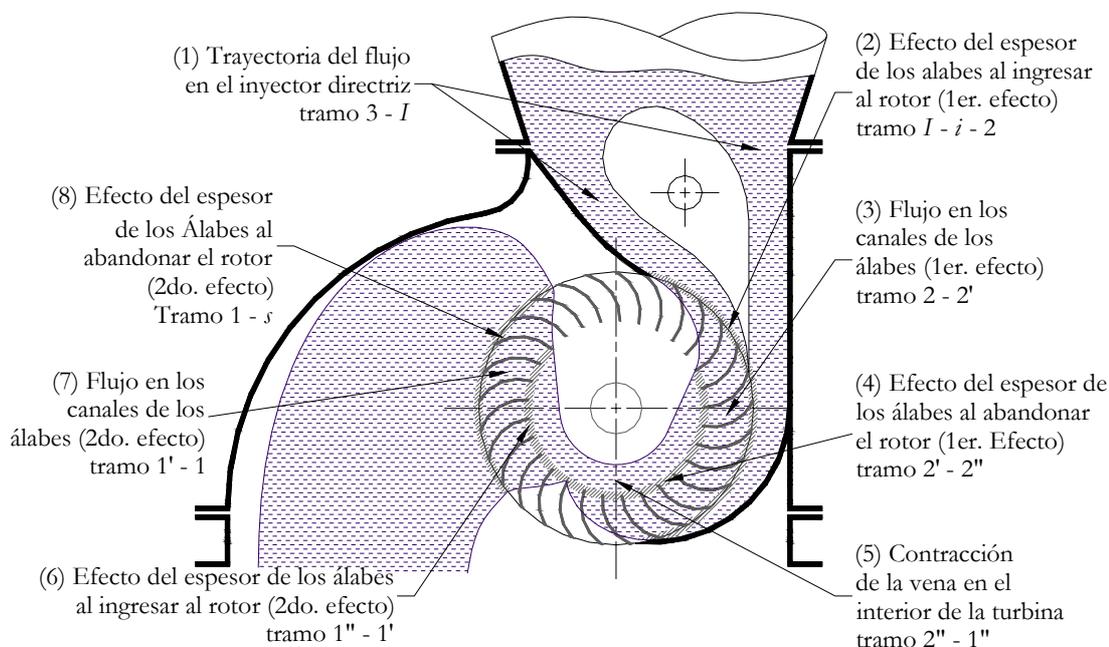
La formulación de un modelo teórico considera la maximización del aprovechamiento del recurso hídrico, por ende las ecuaciones que conforman el modelo teórico son resultado de un proceso de optimización, lo que implica que el *modelo teórico sea un modelo teórico optimizado*.

### 3.1.3. Supuestos

Flujo ideal, no existen pérdidas por fricción en el rodete, no existe choque, el resbalamiento es despreciable, el efecto de la viscosidad es pequeño.

El flujo al interior del rodete sigue estrictamente la trayectoria relativa dada por la forma de los álabes; el tiempo que transcurre entre el primer y segundo efecto asume pequeño, por lo que el efecto de la gravedad sobre la velocidad absoluta sea despreciable, que implica una trayectoria lineal; a su vez para evitar el choque del flujo con el rotor en el segundo efecto, el ángulo relativo debe ser 90°.

La altura teórica de Euler se produce en dos etapas; en la primera el fluido entrega entre un 70 a 80% de su energía al rotor y en la segunda etapa la energía restante.



**Figura 0.1 - Esquemización del principio de funcionamiento**

Las secciones de referencia consideradas en el análisis responden a la siguiente nomenclatura (ver Figura 0.1):

- Sección 3, ubicada aguas arriba del inyector, donde termina la tubería forzada.
- Sección I y sección i, ubicadas un tramo antes de abandonar el inyector directriz (presión del flujo aun no es la atmosférica o la que corresponde al interior de la carcasa) y un tramo después de abandonarlo (la presión del flujo es la correspondiente al interior de la carcasa).
- Sección 2, ubicada al interior del rodete (el flujo considera el efecto del espesor de los álabes).
- Sección 2' y sección 2'', corresponde respectivamente a las secciones antes y después de abandonar el rodete en el primer efecto (antes y después de sufrir los efectos del espesor de los álabes respectivamente).

- Sección 1" y sección 1', corresponde respectivamente a las secciones antes y después de ingresar por segunda vez al rodete para comenzar el segundo efecto (antes y después de sufrir los efectos del espesor de los álabes respectivamente).
- Sección 1 y sección s, corresponde respectivamente a las secciones antes y después de abandonar por segunda vez al rodete para finalizar el segundo efecto (antes y después de sufrir los efectos del espesor de los álabes respectivamente).

La distribución de los vectores velocidad en todas las secciones de referencia consideradas será siempre constante en magnitud y dirección.

#### **3.1.4. Descripción del principio de funcionamiento de la turbina**

El proceso de transformación de la energía hidráulica comienza en el inyector directriz (ver Figura 0.1), que conduce el fluido al rotor, acelerándolo como una tobera convergente; en éste tramo se presentan dos tipos de pérdida de energía: (1) *primarias debido a la fricción* por el contacto del flujo con superficies rugosas (inyector directriz) y la disipación de energía por efecto de la viscosidad; y (2) *secundarias por el cambio de dirección*; en éste tramo se define la *eficiencia del inyector* como el grado de eficacia de conducción del flujo sin provocar pérdidas de energía sensibles; el fluido abandona el inyector directriz con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de la altura neta suministrada a la turbina y su dirección esta determinada por el diseño del inyector directriz.

A continuación el flujo ingresa al rodete de la turbina, en ésta sección comienza el primer efecto, donde el flujo es acelerado por el efecto del espesor de los álabes (ver Figura 0.1 tramo  $I - i - 2$  y Figura 0.2.a); en general, se asume que en la formulación de los modelos teóricos, el flujo posee una distribución constante de los vectores velocidad en las secciones de referencia (ver acápite 0), en contraste a la realidad, donde la distribución depende de la posición, aspecto también abordado en el presente trabajo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Ver ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..

Modificadas las condiciones de ingreso del fluido al rotor, el flujo atraviesa un canal cerrado formado por los álabes y los platos (ver Figura 0.1 tramo 2 – 2'), tramo en el que se produce una disminución de la presión (flujo interno), al respecto ningún modelo teórico considera este efecto en su formulación por ser considerado despreciable. Al abandonar el fluido su primer contacto con el rodete (ver Figura 0.1 tramo 2' – 2'' y Figura 0.2.b), los vectores velocidad vuelven a sufrir modificaciones por efecto del espesor de los álabes, como en el ingreso, pero en este caso una desaceleración del flujo.

Entre el primer y segundo efecto del fluido sobre el rodete (ver Figura 0.1 tramo 2'' – 1''), se introduce el efecto denominado por el autor como la *contracción de la sección transversal* o *contracción de la vena líquida al interior de la turbina*<sup>2</sup>, atribuido principalmente (1) al efecto de la gravedad y (2) la concurrencia de las direcciones de los vectores velocidad; para abordar este aspecto, se adoptará una perspectiva macro, dejando de lado la perspectiva diferencial de la misma.

En seguida el flujo al ingresar por segunda vez al rotor y comenzar el segundo efecto (ver Figura 0.1 tramo 1'' – 1' y Figura 0.2.c), sufre por tercera vez el efecto del espesor de los álabes, en este caso una aceleración por disminución del área transversal. Luego el fluido atraviesa un canal cerrado de sección rectangular (ver Figura 0.1 tramo 1' – 1), se presente una pérdida de carga por efecto de la rugosidad y la curvatura del ducto, de manera semejante que en el primer efecto (tramo 2 - 2').

El fluido antes de abandonar el rodete en el segundo efecto, sufre por cuarta vez el efecto del espesor de los álabes (ver Figura 0.1 tramo 1 – s y Figura 0.2.d), la desaceleración del flujo por incremento del área transversal; con respecto a las condiciones en las que el flujo abandona el rodete se presentan dos posiciones: (1) el ángulo absoluto del triángulo de velocidades es menor a  $90^\circ$  y (2) para una situación ideal éste es igual a  $90^\circ$ ; las implicancias de estas consideraciones se reflejarán en las ecuaciones que conformen los modelos teóricos; finalmente el fluido al abandonar el

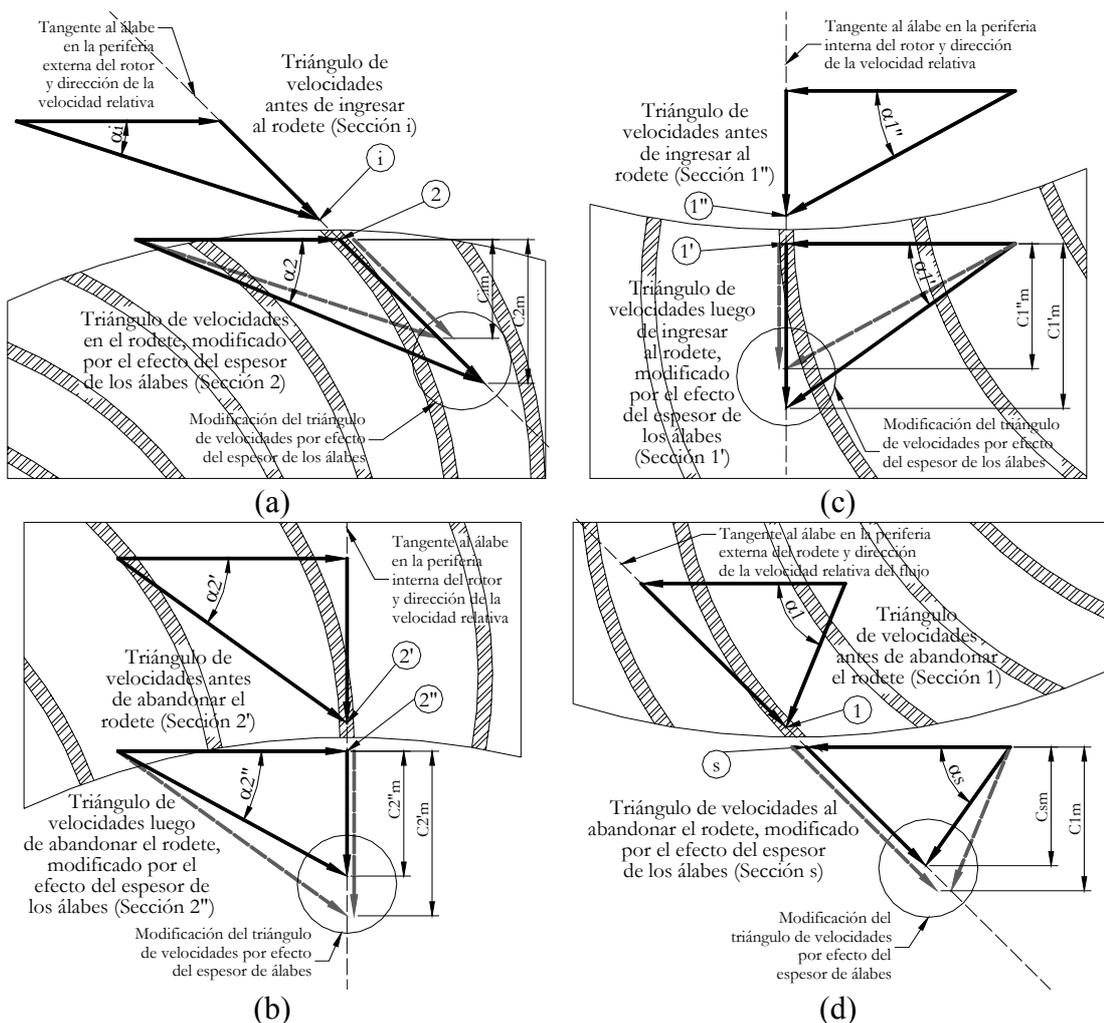
---

<sup>2</sup> La bibliografía no presenta un estudio de éste fenómeno, más se hace una referencia cualitativa, destacando su naturaleza compleja y porque evidentemente influye en el rendimiento de la turbina.

rodete pasa al canal de evacuación tras recorrer la caída libre entre el rotor y la superficie del agua del canal.

### 3.1.5 Triángulos de velocidad

Basados en la concepción del funcionamiento de la turbina, se establecen los triángulos de velocidad que se presentan en la Figura 0.2 y en la Figura 0.3, deducidos al considerar el enfoque propuesto por el autor, la aceleración o desaceleración del flujo por efecto del espesor de los álabes, se efectúa a lo largo de la trayectoria de la velocidad relativa **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.;** en contraste, el enfoque convencional asume la hipótesis que la componente tangencial de la velocidad absoluta no varía, modificándose entonces sólo la componente meridional debido al efecto del espesor de los álabes **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**



**Figura 0.2 - Triángulos de velocidades de la turbina hidráulica de flujo cruzado y el efecto del espesor de los álabes, una nueva propuesta**

**3.1.6. Cinemática del flujo en la turbina**

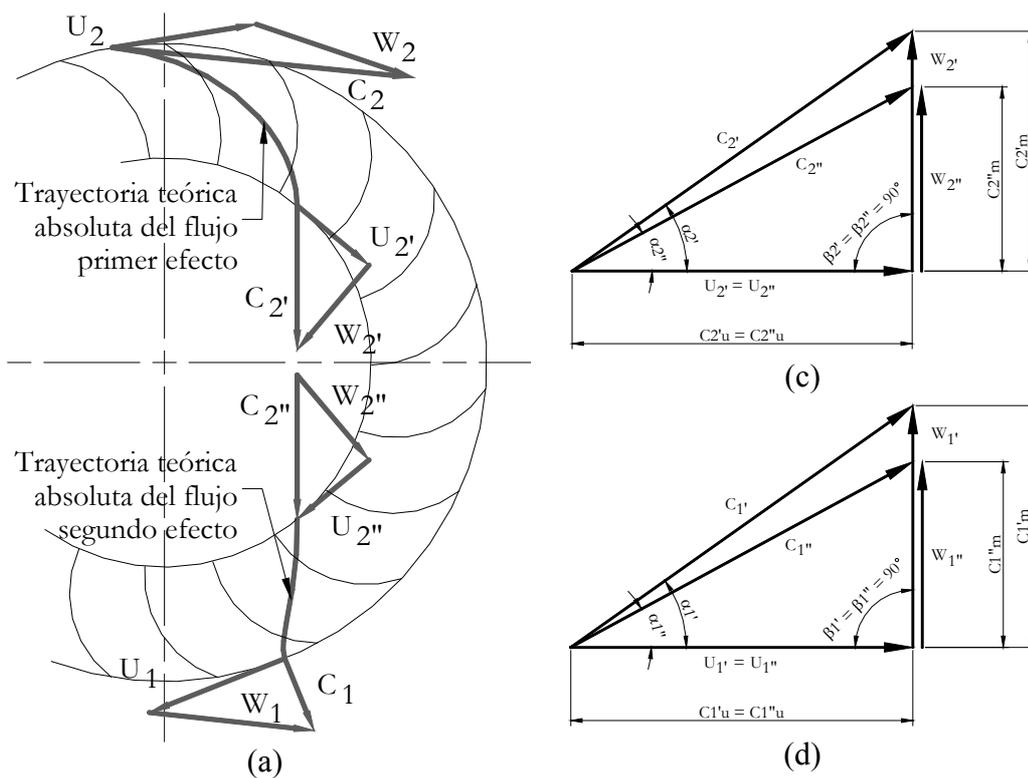
Determinados los triángulos de velocidad bajo el enfoque propuesto por el autor, se establecen las condiciones cinemáticas del flujo siguientes:

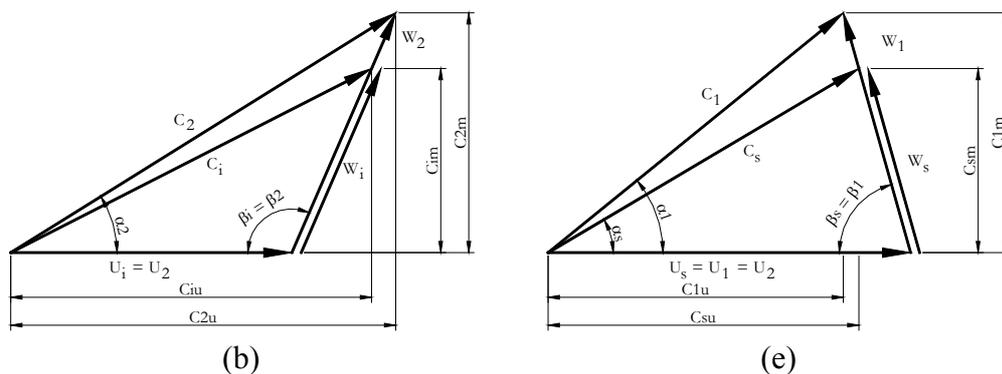
**Ingreso a la turbina**

$$C_2 = K_{ie} \sqrt{2gH} \tag{3.1}$$

$$C_{2m} = C_2 \sin \alpha_2 = K_{ie} \sin \alpha_2 \sqrt{2gH} \tag{3.2}$$

$$C_{2n} = C_2 \cos \alpha_2 = K_{ie} \cos \alpha_2 \sqrt{2gH} \tag{3.3}$$





**Figura 0.3 - (a) Diagrama simple de velocidades de la turbina hidráulica de flujo cruzado, (b), (c), (d) y (e) Triángulos de velocidades de las respectivas secciones de análisis considerados en la formulación del modelo teórico**

$$U_2 = \frac{\pi DN}{60} \tag{3.4}$$

$$W_2 = \frac{C_{2m}}{\tan \beta_1} = \frac{C_{2m}}{\tan(180 - \beta_2)} \tag{3.5}$$

### Salida de la turbina

$$C_1 = \sqrt{C_{1u}^2 + C_{1m}^2} \tag{3.6}$$

$$C_{1m} = \frac{C_{2m}}{K_c} = \frac{K_{ie}}{K_c} \sqrt{2gH} \sin \alpha_2 \tag{3.7}$$

$$C_{1u} = U_1 - \frac{C_{1m}}{\tan \beta_1} \tag{3.8}$$

$$U_1 = U_2 \tag{3.9}$$

$$W_1 = \frac{C_{1m}}{\sin \beta_1} \tag{3.10}$$

Reescribiendo la ecuación (3.8) se tiene que:

$$C_{1u} = U_1 - \frac{C_{2m}}{K_c \tan \beta_1} = U_1 - \frac{K_{ie} \sin \alpha_2 \sqrt{2gH}}{K_c \tan \beta_1} \tag{3.11}$$

### 3.2. COEFICIENTES EMPLEADOS EN EL ANÁLISIS

#### 3.2.1. Coeficiente de corrección por espesor de los álabes

El *coeficiente de corrección por espesor de los álabes*  $K_e$  cuantifica el incremento de la velocidad meridiana debido al efecto de la disminución de área meridional por la presencia de álabes de ancho finito (ver Figura 0.4.a), relaciona también la velocidad meridiana modificada con respecto de la velocidad meridiana no perturbada ( $K_e > 1$ ) y evalúa del mismo modo la disminución del área transversal al flujo por efecto del espesor de álabes; considerando la ecuación de continuidad para las secciones de referencia  $i$  y  $2$  (ver Figura 0.2.a, Figura 0.4.a y Figura 0.4.b) se tiene:

*Caudal en la sección de referencia  $i$  = Caudal en e la sección de referencia  $2$*

$$C_{im} \cdot z \cdot (t_2) \cdot B = C_{2m} \cdot z \cdot (t_2 - s_2) \cdot B$$

Donde,  $C$  es la velocidad absoluta, el subíndice  $m$  denota la componente meridiana de la velocidad absoluta precedido del subíndice que denota la sección de referencia considerada,  $z$  es el número de álabes,  $t_2$  es el espaciamiento entre álabes,  $s_2$  es el espesor de los álabes en la circunferencia del rodete y  $B$  es el ancho del rodete; con todas estas especificaciones el coeficiente de corrección por el espesor de álabes es:

$$K_e = \frac{C_{2m}}{C_{im}} = \left( \frac{t_2}{t_2 - s_2} \right) \quad (3.12)$$

Considerando la linealización del triángulo ABC de la Figura 0.4.b se deduce que  $s_2 = \frac{e}{\text{sen } \beta_1}$  y  $t_2 \cdot z = D_2$ ; donde  $e$  es el espesor promedio del álabe,  $\beta_1$  es el ángulo relativo en el triángulo de velocidades,  $(180 - \beta_1)$  es el ángulo agudo que determina la posición del álabe en el rodete y  $D_2$  es el diámetro exterior del rodete, por tanto:

$$K_e = \frac{\pi D_2}{\pi D_2 - \frac{z \cdot e}{\text{sen } \beta_1}} \quad (3.13)$$

La inversa de la ecuación (3.13) cuantifica fracción de la reducción del área por efecto de los álabes, es decir:

$$K_e = \frac{A_{NETA}}{A_{TOTAL}} = \frac{1}{K_e} = \frac{\pi D_2 - \frac{\xi \cdot e}{\sin \beta_1}}{\pi D_2} \quad (3.14)$$

### 3.2.2. Coeficiente del inyector

El *coeficiente del inyector*  $K_i$  es la relación entre velocidad real absoluta obtenida y la velocidad ideal absoluta teórica calculada que se podría obtener aprovechando el salto neto suministrado al inyector; para encontrar la ecuación del coeficiente del inyector, se analizará el flujo empleando la ecuación de Bernoulli modificada entre las secciones 3,  $I$  e  $i$  (ver Figura 0.4.b y Figura 0.4.c); para el tramo 3 –  $I$ :

$$\frac{P_3}{\gamma} + \frac{C_3^2}{2g} + Z_3 = \frac{P_I}{\gamma} + \frac{C_I^2}{2g} + Z_I + \Delta Hi$$

Donde,  $P$  es la presión absoluta,  $C$  es la velocidad absoluta,  $Z$  es la elevación respecto de un nivel de referencia de la sección analizada,  $\gamma$  es el peso específico del fluido,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\Delta Hi$  son las pérdidas primarias y secundarias en el inyector (por fricción y cambio de dirección respectivamente); además, considerando las secciones de referencia de la Figura 0.4.c; además que  $Z_3 - Z_I \approx 0$  (dado que la diferencia alcanza el orden de centímetros),  $A_3 \approx A_I$  como criterio de diseño para evitar turbulencia en el flujo por causa del inyector y relacionado a este criterio  $C_3^2 - C_I^2 \approx 0$  por la igualdad de áreas, y  $P_3$  como presión absoluta en la sección 3 es la presión estática de toda la columna de agua sobre la turbina, vale decir  $P_3 = \gamma H + P_{atm}$  el valor de la presión en la sección  $I$  será:

$$P_I = \gamma(H - \Delta Hi) + P_{atm}$$

Empleando la ecuación de Bernoulli modificada en el tramo  $I - i$  y obviando las pérdidas de carga por tratarse de la misma sección se puede escribir que:

$$\frac{C_i^2 - C_I^2}{2g} = \frac{P_I - P_i}{\gamma} + Z_I - Z_i \quad (3.15)$$

Teniendo en cuenta que  $Z_I = Z_i$ ,  $C_i \gg C_I$  por tanto  $C_i^2 - C_I^2 \approx C_i^2$  debido a que toda la energía en la sección  $I$  se transforma en energía cinética en la sección  $i$ , y

$P_i = 0$  por tratarse de un chorro libre, se obtiene:

$$\frac{C_i^2}{2g} = \frac{P_I}{\gamma} = (H - \Delta H_i) \quad (3.16)$$

Ordenando adecuadamente, se obtiene la siguiente igualdad:

$$C_i^2 = 2g(H - \Delta H_i) = 2gH \left( \frac{H - \Delta H_i}{H} \right)$$

De donde a la expresión del paréntesis es la *eficiencia del inyector* y conceptualmente sería la razón entre la presión manométrica a la salida del inyector y la presión manométrica al ingreso del mismo, es decir:

$$\eta_i = \frac{H - \Delta H_i}{H} \quad (3.17)$$

Éste parámetro es un indicador del “buen” diseño del inyector, dado que en términos generales cuantifica la eficiencia de transformación de energía piezométrica en energía cinética; finalmente la velocidad del fluido al abandonar el inyector directriz será:

$$C_i = \sqrt{\eta_i} \sqrt{2gH} = K_i \sqrt{2gH} \quad (3.18)$$

Donde,  $K_i$  se denota el término *coeficiente del inyector* y se define como:

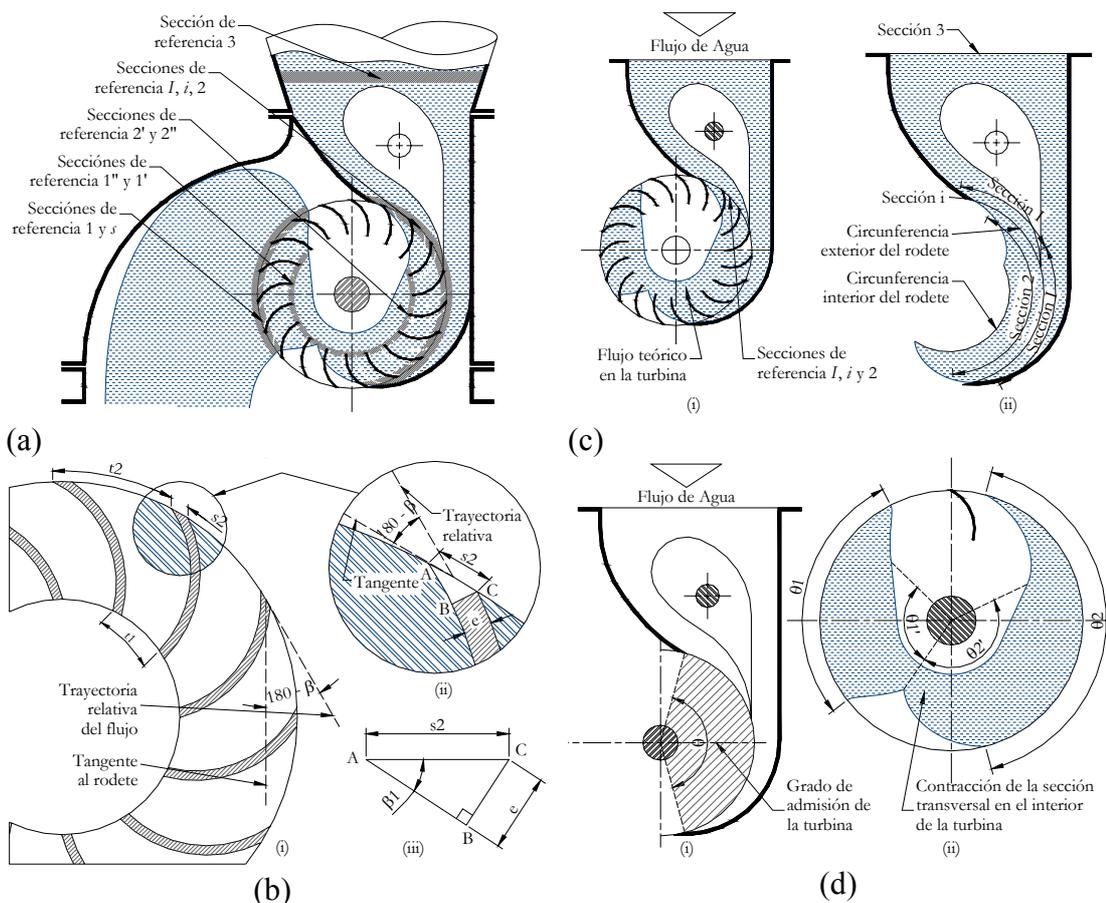
$$K_i = \sqrt{\eta_i} \quad (3.19)$$

### 3.2.3. Grado de Admisión de la Turbina

Se define al *grado de admisión de la turbina*  $K_o$  como el porcentaje del arco al cual el inyector suministra fluido (ver Figura 0.4.d.i), es decir:

$$K_o = \frac{\theta}{2\pi} \quad (3.20)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo de admisión expresado en radianes y  $2\pi$  representa la medida de la circunferencia del rodete.



**Figura 0.4 - Esquemas empleados en el análisis de los coeficientes: (a) Secciones de referencia, (b) Rodete con álabes de espesor finito, (c) Secciones de referencia para la deducción del coeficiente del inyector, y (d) Grado de admisión y contracción de la vena al interior de la turbina**

### 3.2.4. Coeficiente de contracción de la vena en el interior de la turbina

Se define el *coeficiente de contracción de la vena al interior de la turbina*  $K_c$  como la relación de los ángulos que subtiende en el rotor el fluido al atravesarlo en el segundo efecto y el primer efecto respectivamente (ver Figura 0.4.d.ii), es decir:

$$K_c = \frac{\theta_1}{\theta_2} \tag{3.21}$$

Considerando que los caudales para las secciones 2 y 1:

$$\theta_2 R_2 C_{2m} B = \theta_1 R_1 C_{1m} B \text{ (ver Figura 0.4.a y Figura 0.4.d.ii), a partir de la cual también}$$

se puede obtener:

$$K_c = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{C_{2m}}{C_{1m}} \tag{3.22}$$

### 3.2.5. Coeficiente efectivo de pérdidas por fricción en el inyector y el efecto del espesor de los álabes

El coeficiente efectivo de pérdidas por fricción en el inyector y el efecto del espesor de los álabes  $K_{ie}$  cuantifica el efecto neto provocado por la fricción en el inyector directriz y el número finito de los álabes del rotor cuando el fluido ingresa al rodete, por tanto el factor de proporcionalidad entre la velocidad absoluta en el rodete y la raíz cuadrada de la altura neta, será el coeficiente referido, de ello se deduce que:

$$C_2 = K_{ie} \sqrt{2gH} \quad (3.23)$$

Considerando la ecuación de continuidad para las secciones  $i$  y  $2$  se tiene que:

$$Q = K_o \pi DBC_{im} = \frac{K_o}{K_e} \pi DBC_{2m} \quad (3.24)$$

Tomando en cuenta que a partir de los triángulos de velocidad de la Figura

0.3.b, las velocidades meridianas son:  $C_{im} = K_i \text{sen } \alpha_i \sqrt{2gH}$  y

$$C_{2m} = K_{ie} \text{sen } \alpha_2 \sqrt{2gH}; \text{ y la igualdad: } U_2 = C_{im} - \frac{C_{im}}{\tan \beta_1} = C_{2m} - \frac{C_{2m}}{\tan \beta_1}; \text{ que}$$

reemplazadas en la ecuación (3.24) y despejando el coeficiente analizado, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$K_{ie} = K_e K_i \frac{\text{sen } \alpha_i}{\text{sen } \alpha_2} \quad (3.25)$$

$$K_{ie} = K_i \frac{\cos \alpha_i - \frac{\text{sen } \alpha_i}{\tan \beta_1}}{\cos \alpha_2 - \frac{\text{sen } \alpha_2}{\tan \beta_1}} \quad (3.26)$$

### 3.3. GENERALIZACIÓN DE LAS PRINCIPALES CIFRAS DE TURBOMÁQUINAS

#### 3.3.1. Cifra de Presión

Considerando los triángulos de velocidad de la Figura 0.2 y de la Figura 0.3:

$$U_2 = C_{2u} - \frac{C_{2m}}{\tan \beta_1} \quad (3.27)$$

Y a partir de la cinemática del flujo (ver el acápite 0), la igualdad que determina una expresión a partir de la cual se deducirá una ecuación para la cifra de

presión es:  $\frac{U_2}{\sqrt{2gH}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2gH}{U^2}}} = K_{ie} \left( \cos \alpha_2 - \frac{\text{sen } \alpha_2}{\tan \beta_1} \right)$ , dado que:  $\psi = \frac{2gH}{U_2^2}$ , se

obtiene:

$$\sqrt{\psi} = \frac{1}{K_{ie} \left( \cos \alpha_2 - \frac{\text{sen } \alpha_2}{\tan \beta_1} \right)} \quad (3.28)$$

Donde  $\psi$  es la cifra de presión,  $K_{ie}$  es el coeficiente efectivo de pérdidas del inyector,  $\alpha_2$  es el ángulo de la velocidad absoluto y  $\beta_1$  es el ángulo relativo del triángulo de velocidades al ingreso de la turbina.

#### 3.3.2. Cifra de caudal

Empleando la ecuación de continuidad para un flujo incompresible el caudal

es:  $Q = \left( \begin{matrix} \text{Área} \\ \text{flujo} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \text{Velocidad} \\ \text{meridiana} \end{matrix} \right)$ , donde  $A = \theta_i R_i B = 2\pi \left( \frac{\theta_i}{2\pi} \right) R_i = K_o \pi D_i$  y representa al

área transversal al flujo en la sección  $i$ , empleando la ecuación de continuidad para las

secciones  $i$  y  $2$  se obtiene que  $C_{im} K_o (\pi D_i) B = C_{2m} K_o \left( \pi D_2 - \frac{\tilde{\chi} \cdot \ell}{\text{sen } \beta_1} \right) B$ , cumpliéndose

además que  $D_i = D_2$ , y al introducir las ecuaciones (3.13) y (3.21) se obtiene:

$$C_{im} = \frac{C_{2m}}{\frac{\pi D_2 - \frac{z \cdot e}{\sin \beta_1}}{\pi D_2}} = \frac{C_{2m}}{K_e} \quad (3.29)$$

Que al ser combinada con la expresión del área transversal al flujo  $A$  y las velocidades meridianas  $C_{im}$  y  $C_{2m}$  presenta las dos formas siguientes:

$$Q = K_o \pi D_2 B C_{im} \quad (3.30)$$

$$Q = \frac{K_o}{K_e} \pi D_2 B C_{2m} \quad (3.31)$$

En adelante sólo se considerará a la velocidad  $C_2$  y sus componentes como referencia para el análisis<sup>3</sup>; desarrollando la ecuación (3.31) se tiene que:

$$Q = \frac{K_o K_{ie}}{K_e} \pi D_2 B \sin \alpha_2 \sqrt{2gH} \quad (3.32)$$

Que al ser multiplicada y dividiendo por la expresión  $4 D^{-1/2}$ , teniendo en cuenta además que  $C_{2m} = K_{ie} \sqrt{2gH} \sin \alpha_2$  y  $\phi = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} D_2^2 U_2}$ , se obtiene finalmente:

$$\phi = \frac{4 K_o K_{ie}}{K_e} \sin \alpha_2 \frac{B}{D_2} \sqrt{\psi} \quad (3.33)$$

Desarrollando la ecuación (3.30) considerando ahora a  $i$  como la sección de referencia para evaluar el caudal, se obtiene:

$$\phi = 4 K_i K_o \sin \alpha_i \frac{B}{D_2} \sqrt{\psi} \quad (3.34)$$

### 3.3.3. Número específico de revolución de caudal

Dado que  $Nq = \frac{N \sqrt{Q}}{H^{3/4}}$  y  $Q = \phi \frac{\pi}{4} D_2^2 U_2$ , considerando además las

ecuaciones (3.33) y (3.34); que al ser multiplicadas y divididas por la expresión

---

<sup>3</sup> Para conocer la altura teórica de Euler y demás parámetros de operación de la turbina, es necesario determinar la velocidad absoluta al interior de la turbina  $C_2$ .

$\frac{\pi}{60(2g)^{\frac{3}{4}}}$ , respectivamente resultan las siguientes identidades para el número

específico de revoluciones:

$$Nq = \frac{30}{\sqrt{\pi}} (2g)^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{\varphi}}{\psi^{\frac{3}{4}}} \quad (3.35)$$

$$Nq = \frac{60}{\sqrt{\pi}} (2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{K_o K_{ie}}{K_e}} \sqrt{\frac{B}{D_2}} \sqrt{\frac{\text{sen } \alpha_2}{\psi}} \quad (3.36)$$

$$Nq = \frac{60}{\sqrt{\pi}} (2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{K_o K_i} \sqrt{\frac{B}{D_2}} \sqrt{\frac{\text{sen } \alpha_i}{\psi}} \quad (3.37)$$

Siendo la expresión general para el número específico de revoluciones de caudal la ecuación (3.35), mientras que las ecuaciones (3.36) y (3.37) corresponden al caso particular de la turbina hidráulica de flujo cruzado.

### 3.3.4. Número específico de revoluciones de potencia

Dado que  $N_s = \frac{N \sqrt{\rho g \eta_b Q H}}{H^{\frac{5}{4}}} = \sqrt{\rho g \eta_b} Nq$ , la ecuación general para el número específico de revoluciones de potencia, considerando la ecuación (3.35), será:

$$N_s = 30(2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\rho g}{\pi}} \frac{\sqrt{\eta_b \varphi}}{\psi^{\frac{3}{4}}} \quad (3.38)$$

Para el caso particular de la turbina hidráulica de flujo, considerando las ecuaciones (3.36) y (3.37), se obtendrá que:

$$N_s = 60(2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\rho g}{\pi}} \sqrt{\frac{K_o K_{ie}}{K_e}} \sqrt{\frac{B}{D_2}} \sqrt{\frac{\eta_b \text{sen } \alpha_2}{\psi}} \quad (3.39)$$

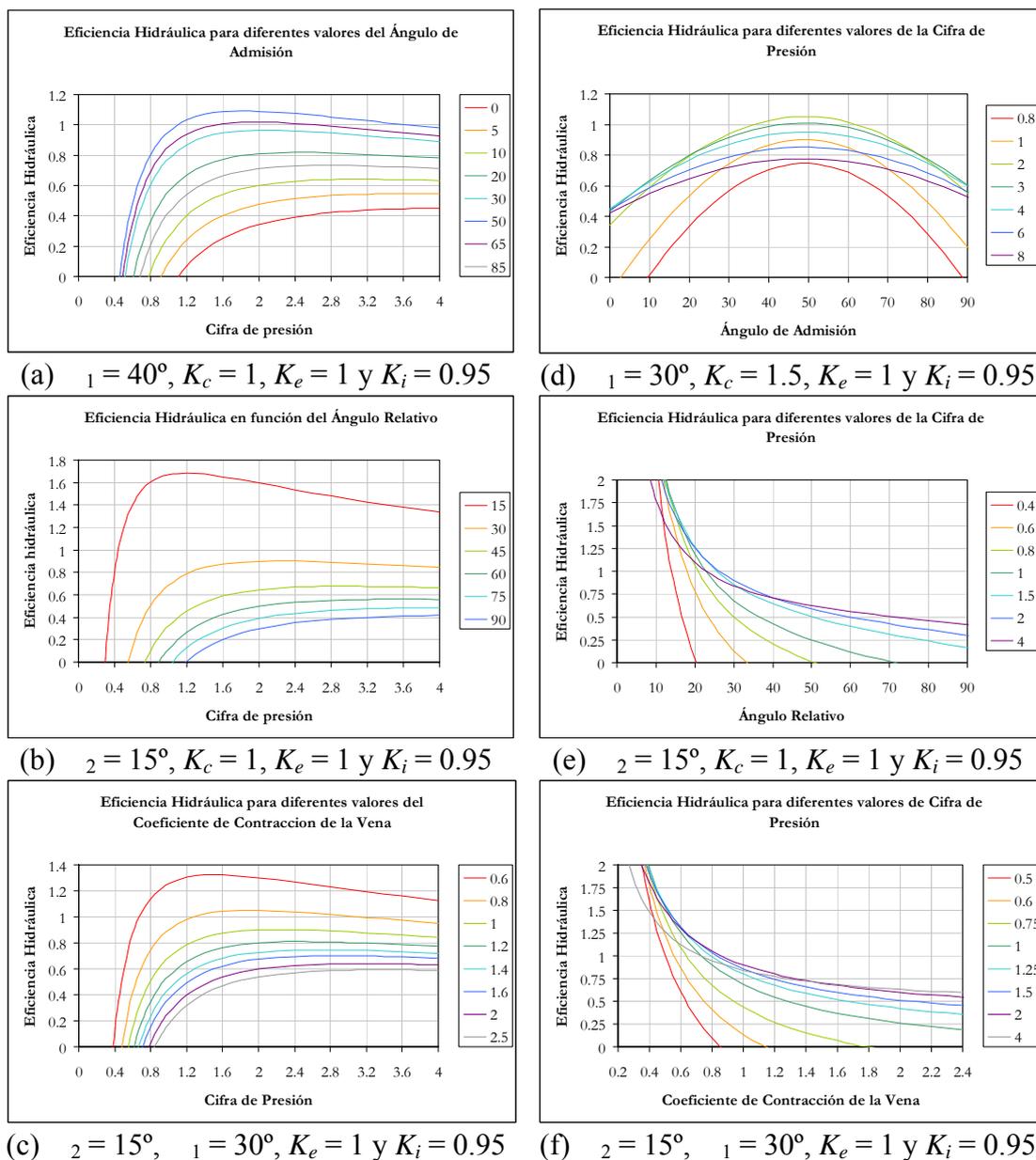
$$N_s = 60(2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\rho g}{\pi}} \sqrt{K_o K_i} \sqrt{\frac{B}{D_2}} \sqrt{\frac{\eta_b \text{sen } \alpha_i}{\psi}} \quad (3.40)$$

### 3.3.5. Grado de reacción

Se define el grado de reacción teórico  $R_\infty$  de la turbina como la fracción de la altura ideal de Euler lograda, que corresponde a la altura estática; aun no se

desarrollará una expresión particular para el caso de la turbina hidráulica de flujo cruzado.

$$R_{\infty} = \frac{(H_{R\infty})_{estática}}{H_{R\infty}}$$



**Figura 0.5 - Análisis gráfico de la función eficiencia hidráulica**

### 3.4. OPTIMIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO

#### 3.4.1. La función eficiencia hidráulica

Para el caso de estudio por motivos didácticos, se define a la *eficiencia hidráulica*  $\eta_h$  como la relación entre la energía aprovechada por la turbina  $H_R$ , expresada en metros de columna del fluido; y la energía total suministrada  $H$ , expresada también en metros de columna del fluido; de modo que:

$$\eta_h = \frac{H_R}{H} = \frac{\mu H_{R\infty}}{H} \quad (3.41)$$

Donde  $H_R$  es la altura real aprovechada por la turbomáquina,  $H_{R\infty}$  es la altura teórica de Euler para un número de álabes infinito,  $\mu$  es el coeficiente de resbalamiento dependiendo su valor del número de álabes, la vorticidad y/o remolinos del flujo debido al efecto de rotación ( $\mu = 1$  para turbinas,  $\mu \neq 1$  para bombas); por tanto, la eficiencia hidráulica para la turbina hidráulica de flujo cruzado será:

$$\eta_h = \frac{H_{R\infty}}{H}$$

Teniendo en cuenta que la turbina aprovecha la energía del fluido en dos efectos  $H_{R\infty} = (H_{R\infty})_I + (H_{R\infty})_{II}$ , la expresión de la altura teórica de Euler para cada efecto respectivamente  $(H_{R\infty})_I = \frac{C_{2u}U_2 - C_{2'u}U_{2'}}$  y  $(H_{R\infty})_{II} = \frac{C_{1'u}U_{1'} - C_{1u}U_1}{g}$ , y por ende la altura teórica de Euler para un número infinito de álabes  $H_{R\infty} = \frac{C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1}{g}$ ,<sup>4</sup> que al ser reemplazados en la expresión de la eficiencia hidráulica se obtiene:

$$\eta_h = \frac{H_R}{H} = \frac{C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1}{gH} \quad (3.42)$$

Además al considerar que la velocidad tangencial del rodete para las secciones 1 y 2 es la misma, y las ecuaciones determinadas por la cinemática del flujo en la turbina, la función eficiencia hidráulica puede desarrollarse como sigue:

---

<sup>4</sup> Al efectuar la suma de efectos  $(H_{R\infty})_I + (H_{R\infty})_{II}$ , los términos  $C_{2u}U_2$  y  $C_{1'u}U_{1'}$  se consideran son iguales.

$$\eta_b = \frac{U_2}{gH} \left[ \left( K_{ie} \cos \alpha_2 \sqrt{2gH} \right) - \left( U_1 - \frac{K_{ie} \operatorname{sen} \alpha_2 \sqrt{2gH}}{K_c \tan \beta_1} \right) \right]$$

$$\eta_b = 2K_{ie} \frac{U_2}{\sqrt{2gH}} \left( \cos \alpha_2 + \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right) - 2 \frac{U_2^2}{2gH}$$

Para finalmente obtener la ecuación (3.43) que determina una dependencia de la eficiencia hidráulica respecto de parámetros de diseño y parámetros de comportamiento; la cifra de presión  $\psi$ , el ángulo absoluto del triángulo de velocidades del flujo al ingresar al rodete  $\alpha_2$ , el ángulo relativo del triángulo de velocidades al abandonar el flujo el rodete  $\beta_1$  y el coeficiente de contracción de la vena al interior de la turbina  $K_c$ ; y que se resumen en la identidad

$$\eta_b = \Omega \left( \frac{2gH}{U_2^2}, \frac{\theta_1}{\theta_2}, \alpha_2, \beta_1 \right) = \Omega(\psi, K_c, \alpha_2, \beta_1), \text{ de manera general:}$$

$$\eta_b = \frac{2K_{ie}}{\sqrt{\psi}} \left( \cos \alpha_2 + \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right) - \frac{2}{\psi} \quad (3.43)$$

### 3.4.2. Optimización respecto de la cifra de presión

Se evidencia la posibilidad de efectuar la optimización de la función eficiencia hidráulica respecto de la cifra de presión  $\psi$  (condición de  $\frac{\partial \eta_b}{\partial \psi} = 0$  para maximizar  $\eta_b$ ), como consecuencia del análisis gráfico efectuado (ver Figura 0.5.a, Figura 0.5.b y Figura 0.5.c, valores de eficiencia mayores que el 100% responden a estimaciones irreales de los parámetros que no son la cifra de presión); la condición para obtener una máxima eficiencia considera:

$$\frac{\partial \eta_b}{\partial \psi} = -K_{ie} \psi^{-3/2} \left( \cos \alpha_2 + \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right) + 2\psi^{-2} = 0 \quad (3.44)$$

Las relaciones que establece esta condición son:

$$\sqrt{\psi} = \frac{2}{K_{ie} \left( \cos \alpha_2 + \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right)} \quad (3.45)$$

$$\psi \rightarrow \infty \quad (3.46)$$

Al respecto, la segunda consecuencia de la optimización determina condiciones de diseño imposible de ser cumplidas (dado que  $\sim D^{-2} N^2 H \rightarrow \infty$ , entonces  $DN \rightarrow 0$  ó  $H \rightarrow \infty$ ), por tanto se adopta como condición de maximización la primera ecuación denominada como *cifra de presión óptima*.

### 3.4.3. Optimización respecto del ángulo de ingreso de la velocidad absoluta

De manera análoga al caso anterior, el análisis gráfico (ver Figura 0.5.d, valores de eficiencia mayores al 100% responden a estimaciones irreales de los parámetros que no sea a partir del cual se efectúa la optimización), determina la posibilidad de optimización (condición para que  $\alpha_2$  maximice  $\eta_h$ ); convencionalmente el valor del ángulo de admisión absoluto  $\alpha_2$  es considerado constante, su magnitud se basa en la experimentación de turbinas tipo Cross Flow sugiriéndose asumir valores entre los 10 y 20° (asumiendo valores pequeños se logra mayores eficiencias); en ese sentido, la intención de efectuar la optimización respecto de éste parámetro es verificar desde una perspectiva teórica la validez de los valores asumidos; evidentemente ante una incongruencia de la perspectiva teórica con la perspectiva experimental primará la segunda; la condición de optimización establece que:

$$\frac{\partial \eta_h}{\partial \alpha_2} = \frac{2K_c}{\sqrt{\psi}} \left( -\operatorname{sen} \alpha_2 + \frac{\cos \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right) = 0 \quad (3.47)$$

A partir de la cual se obtiene la expresión denominada *ángulo de admisión óptimo*:

$$\tan \alpha_2 = \frac{1}{K_c \tan \beta_1} \quad (3.48)$$

### 3.4.4. Optimización respecto del ángulo de los álabes a la salida de la turbina

El análisis gráfico de la eficiencia hidráulica respecto de éste parámetro (ver Figura 0.5.e), no sugiere una posible optimización de la función eficiencia hidráulica, en su lugar se presentan dos situaciones extremas  $\eta_h \rightarrow \infty$  cuando  $\alpha_1 \rightarrow 0$  y  $\eta_h \ll 100\%$  cuando  $\alpha_1 \gg 0$ , última condición que implica una disminución sensible de la eficiencia cuando  $\alpha_1$  es grande, en respuesta al análisis teórico, se sugiere asumir

valores pequeños para  $\beta_1$  en pro de mejores eficiencias, constructivamente hablando la turbina hidráulica de flujo cruzado en apariencia sería cada vez más semejante a una turbina Turgo o a una turbina Pelton; la condición de optimización establece la siguiente ecuación:

$$\frac{2K_{ie}}{\sqrt{\psi}} \left( \frac{\text{sen } \alpha_2}{K_c} \text{csc}^2 \beta_1 \right) = 0 \quad (3.49)$$

### 3.4.5. Optimización respecto del coeficiente de contracción de la vena

De manera análoga al caso anterior, el análisis gráfico (comparar Figura 0.5.e con la Figura 0.5.f), determina la imposibilidad de optimizar la función eficiencia hidráulica respecto de éste parámetro, también se presentan dos condiciones límite cuando  $K_c \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow \infty$  y cuando  $K_c \gg 0$ ,  $h \ll 0$ ; la concepción teórica, sugiere entonces provocar una mayor contracción de la vena para mejorar el desempeño de la turbina, probablemente modificando los parámetros de diseño, en este caso desde una perspectiva experimental; la condición de optimización afirma que:

$$\frac{\partial \eta_h}{\partial K_c} = \frac{2K_{ie}}{\sqrt{\psi}} \left( -\frac{\text{sen } \alpha_2}{K_c^2 \tan \beta_1} \right) = 0 \quad (3.50)$$

### 3.4.6. Grado de reacción en la optimización

Considerando la segunda forma de la altura teórica de Euler dada por la expresión  $H_R = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g}$ , considerando además que la

altura estática para la turbina hidráulica de flujo cruzado es  $(H_R)_{estática} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g}$

(dado que  $U_1 = U_2$ ) y que la altura realmente aprovechada en función de la altura neta es  $H_R = hH$ ; la expresión del grado de reacción se simplifica a:

$$R = \frac{(H_R)_{estática}}{H_R} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2gH_R}$$

Considerando además los triángulos de velocidad de la turbina (ver Figura 0.3), se establecen las identidades correspondientes a las velocidades relativas para

las secciones 1 y 2,  $W_2^2 = C_{2m}^2 \left( 1 + \frac{1}{\tan^2 \beta_1} \right)$  y  $W_1^2 = \frac{C_{2m}^2}{K_c^2} \left( 1 + \frac{1}{\tan^2 \beta_1} \right)$ ; que al ser reemplazadas en la ecuación del grado de reacción finalmente resulta:

$$R = \frac{W_2^2}{2gH\eta_b} \left( \frac{1}{K_c^2} - 1 \right) \quad (3.51)$$

Y al considerar la igualdad  $W_2 = C_2 \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} = K_{ie} \sqrt{2gH} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1}$ , la ecuación

anterior determina que el grado de reacción sea:

$$R = \frac{K_{ie}^2}{\eta_b} \left( \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} \right)^2 \left( \frac{1}{K_c^2} - 1 \right) \quad (3.52)$$

### 3.5. RESUMEN

Se ha efectuado una revisión de principios y supuestos en los que se basa la formulación de un modelo teórico general, que determine el diseño de la turbina hidráulica de flujo cruzado; como consecuencia, se ha realizado el replantamiento y la reformulación de las ecuaciones que conforman dicho modelo teórico, bajo un enfoque propuesto por el autor, diferente de los convencionales, en relación a los siguientes aspectos:

- Modificación de la concepción de los triángulos de velocidad.
- Cuantificación del efecto del espesor de los álabes.
- Cuantificación de la contracción de la vena al interior de la turbina.
- Optimización de la eficiencia hidráulica respecto de los parámetros de los cuales dependen (ver Tabla 0.1).
- Replanteamiento general de las relaciones de turbomáquinas, generalizándolas para la turbina hidráulica de flujo cruzado (ver Tabla 0.2).

El resumen de los resultados hasta ahora obtenidos en la formulación de un modelo teórico general se presentan en la Tabla 0.1 y en la Tabla 0.2.

**Tabla 0.1 - Resumen de expresiones debido a la optimización de eficiencia**

Acápí e	Condición	Expresión Obtenida
0	$\frac{\partial \eta_b}{\partial \psi} = 0$	$\frac{1}{\psi^2} \left[ K_{ie} \left( \cos \alpha_2 + \frac{\text{sen } \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right) \sqrt{\psi} - 2 \right] = 0$
0	$\frac{\partial \eta_b}{\partial \alpha_2} = 0$	$\frac{2K_{ie}}{\sqrt{\psi}} \left( -\text{sen } \alpha_2 + \frac{\cos \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right) = 0$
0	$\frac{\partial \eta_b}{\partial K_c} = 0$	$\frac{2K_{ie}}{\sqrt{\psi}} \left( -\frac{\text{sen } \alpha_2}{K_c^2 \tan \beta_1} \right) = 0$
0	$\frac{\partial \eta_b}{\partial \beta_1} = 0$	$\frac{2K_{ie}}{\sqrt{\psi}} \left( \frac{\text{sen } \alpha_2}{K_c} \csc \beta_1 \right) = 0$

Fuente: Elaborado por el Autor.

**Tabla 0.2 - Resumen de las expresiones que conforman el modelo teórico**

Acápi te	Descripción de la Ecuación	Expresión
0	Coefficiente de Corrección por Espesor de Álabes	$K_e = \pi D_2 - \frac{\tilde{x} \cdot e}{\text{sen } \beta_1}$
0	Coefficiente del Inyector	$K_i = \sqrt{\eta_i}$
0	Grado de Admisión	$K_o = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta_2}{2\pi}$
0	Coefficiente de Contracción de la Vena en el Interior de la Turbina	$K_c = \frac{C_{2m}}{C_{1m}}$
0	Coefficiente Efectivo de Pérdidas por Fricción en el Inyector y el Efecto del Espesor de los Álabes	$K_{ie} = K_e K_i \frac{\text{sen } \alpha_i}{\text{sen } \alpha_2}$ $K_{ie} = K_i \frac{\cos \alpha_i - \frac{\text{sen } \alpha_i}{\tan \beta_1}}{\cos \alpha_2 - \frac{\text{sen } \alpha_2}{\tan \beta_1}}$

Acápite	Descripción de la Ecuación	Expresión
0	Cifra de Presión (Obtenido a partir de las relaciones básicas de la Turbina)	$\sqrt{\psi} = \frac{1}{K_i \left( \sin \alpha_2 - \frac{\cos \alpha_2}{\tan \beta_1} \right)}$
0	Cifra de Caudal	$\phi = \frac{4K_o K_{ie}}{K_e} \sin \alpha_2 \frac{B}{D_2} \sqrt{\psi}$ $\phi = 4K_i K_o \sin \alpha_i \frac{B}{D_2} \sqrt{\psi}$
0	Número Específico de Revolución de Caudal	$Nq = \frac{30}{\sqrt{\pi}} (2g)^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{\phi}}{\psi^{\frac{3}{4}}}$ $Nq = \frac{60(2g)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{K_{ie} K_o}{K_e}} \sqrt{\frac{B}{D}} \sqrt{\frac{\sin \alpha_2}{\psi}}$ $Nq = \frac{60}{\sqrt{\pi}} (2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{K_o K_i} \sqrt{\frac{B}{D_2}} \sqrt{\frac{\sin \alpha_i}{\psi}}$
0	Número Específico de Revolución de Potencia	$Ns = 30(2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\rho g}{\pi}} \frac{\sqrt{\phi}}{\psi^{\frac{3}{4}}}$ $Ns = 60(2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\rho g}{\pi}} \sqrt{\frac{K_o K_{ie}}{K_e}} \sqrt{\frac{B}{D_2}} \sqrt{\frac{\eta_b \sin \alpha_2}{\psi}}$ $Ns = 60(2g)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\rho g}{\pi}} \sqrt{K_o K_i} \sqrt{\frac{B}{D_2}} \sqrt{\frac{\eta_b \sin \alpha_i}{\psi}}$
0 y 0	Grado de Reacción	$R = \frac{K_{ie}^2}{\eta_b} \left( \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} \right)^2 \left( \frac{1}{K_c^2} - 1 \right)$
0	Expresión General de la Eficiencia Hidráulica	$\eta_b = \frac{2K_{ie}}{\sqrt{\psi}} \left( \cos \alpha_2 + \frac{\sin \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right) - \frac{2}{\psi}$
0	Cifra de Presión Óptima	$\sqrt{\psi} = \frac{2}{K_{ie} \left( \cos \alpha_2 + \frac{\sin \alpha_2}{K_c \tan \beta_1} \right)}$
0	Ángulo de Admisión Óptimo	$\tan \alpha_2 = \frac{1}{K_c \tan \beta_1}$

Fuente: Elaborado por el Autor.

## Capítulo 6: VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA PARA EL MODELAMIENTO DE FLUJOS EMPLEANDO ELEMENTOS FINITOS (Casos de Referencia)

---

### 6.1. CONSIDERACIONES

Hasta el momento se han desarrollado modelos teóricos que plantean diseños modificados de la turbina hidráulica de flujo cruzado y empleando el modelo teórico de optimización del comportamiento ideal se ha efectuado el diseño de una turbina de 50 kW, que como se afirma, difiere en su diseño de las turbinas convencionales de éste tipo, producto de las innovaciones efectuadas (modificación de principios y supuestos) en el proceso de formulación del modelo teórico; a todo esto, las preguntas son lógicas:

- i. *¿Son los modelos teóricos obtenidos válidos?*, respondida afirmativamente desde la perspectiva teórica (ver tratado **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), como consecuencia de la comparación de los resultados proyectados con modelos teóricos semejantes.
- ii. *¿Presenta el diseño modificado de la turbina ventajas tecnológicas respecto de los modelos convencionales?*, para responder ésta pregunta se debería experimentar en torno al diseño de la turbina y evidenciar las ventajas y desventajas.

Una alternativa adoptada como válida y accesible para validar el comportamiento de la tecnología desarrollada y responder en parte a la segunda pregunta, que no cuenta con muchas restricciones, consiste en el modelamiento de flujos empleando elementos discretos para resolver las ecuaciones gobernantes del fenómeno (volúmenes finitos, elementos finitos o diferencias finitas); y es la opción elegida para modelar el comportamiento de la turbina, de manera que se contrastará los resultados de emplear la metodología empleada con resultados de casos de referencia obtenidos de la literatura (valores teóricos y valores experimentales).

### 6.1.1. Ecuaciones gobernantes<sup>5</sup>

En general, las ecuaciones gobernantes del movimiento de fluidos son las *leyes de conservación de masa, conservación de momentum y conservación de energía*; para los casos de referencia las ecuaciones específicas serán las ecuaciones *de conservación de masa* y las *de conservación de momentum*, o ecuaciones de Navier – Stokes, su formulación vectorial es:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} \end{cases}$$

Donde  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  es la ecuación de continuidad,  $\nabla$  es el operador gradiente dado por  $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ ,  $\frac{D}{Dt}$  es la derivada sustancial  $\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\mathbf{F}$  son las componentes de las fuerzas gravitacionales por unidad de volumen,  $\nabla^2$  es el operador laplace dado por  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\mu$  es la viscosidad absoluta del fluido,  $\rho$  es la densidad del fluido, y  $\mathbf{V}$  es el vector velocidad; desarrollando cada término para el caso bidimensional se tiene:

---

<sup>5</sup> Para tener un mayor criterio con respecto a la naturaleza de las ecuaciones gobernantes ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

### 6.1.2. Solver de las ecuaciones de Navier – Stokes

#### 6.1.2.1 Software ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.

Para resolver las ecuaciones de Navier – Stokes empleando *Direct Numeric Simulation* (DNS) se ha utilizado el programa FreeFEM+ for Macs, PCs, Linux, el cual emplea el método de los elementos finitos para resolver *Ecuaciones Diferenciales Parciales* (EDPs) o *Partial Diferencial Equations* (PDEs), distribuido desde 1995 con la ayuda de C. Prud'homme y P. Parole con el nombre de MacFEM; la versión actual del programa es FreeFEM 3.0 escrito en lenguaje C, algunas ventajas del programa son el manejo de múltiples mallas, la inclusión de un potente interpolador de mallas y la implementación de un robusto y versátil módulo de adaptación de mallas.

#### 6.1.2.2. Método numérico ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.

El programa FreeFEM+ emplea el método de los elementos finitos, considera un módulo para el mallado automático del dominio e incluye dentro de sus funciones una rutina específica para resolver el problema del acoplamiento presión – velocidad y los efectos convectivos de los términos  $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ ; éste método mejora en un paso el cálculo de los términos convectivos empleando el método Characteristics – Galerkin.

#### 6.1.3. Condiciones de contorno ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.

##### 6.1.3.1. Condición de “no deslizamiento” (no-slip wall)

La velocidad del fluido sobre una pared que carece de movimiento es cero, las fuerzas de presión serán normales y las fuerzas cortantes serán paralelas a las mismas (ver Figura 0.1.a y Figura 0.1.c).

### 6.1.3.2. Condición de ingreso del fluido (inlet)

La distribución de velocidades para un flujo interno dependerá del régimen, se considera una distribución parabólica para flujos laminares y para flujos turbulentos una distribución exponencial de grado mayor igual a 7 (ver Figura 0.1.b), es decir:

$$V = V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^n \right]$$

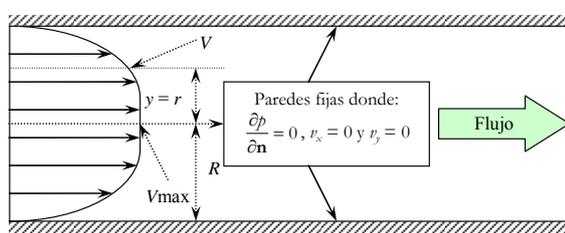
Donde  $V$  es la velocidad del flujo para la sección determinada por la coordenada  $r$ ,  $V_{max}$  es la velocidad máxima,  $r$  es la posición de la sección de referencia,  $R$  es la longitud característica del ducto y  $n$  es el grado de la distribución de velocidades,  $n = 2$  para régimen laminar y  $n = 7$  para régimen turbulento.

Para flujos externos, la velocidad viene determinada por la velocidad de corriente libre (ver Figura 0.1.d), constante en toda la sección.

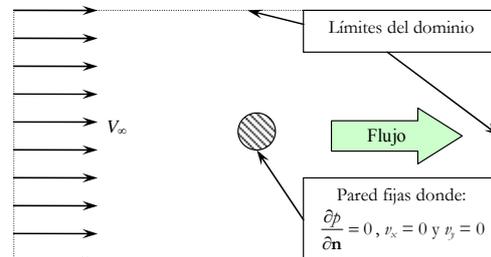
Para flujos externos o internos, la presión siempre será la atmosférica o algún valor dado en función de las características del flujo (p. ej. para el flujo entre dos placas de ancho infinito la presión es conocida, luego se evalúa la presión en la salida).

### 6.1.3.3. Condición de salida (outlet)

En todos los casos, la velocidad de salida y lo mismo para la presión, las condiciones son asumidas implícitamente como resultado del cálculo previo, es decir la condición de salida actual correspondió a un  $t$  anterior; esto describe un proceso de convergencia para las condiciones de salida del flujo, no importando las condiciones iniciales sino las finales, dado que éstas convergen a un valor determinado, el resultado siempre será el mismo, ésta técnica es muy empleada en el modelamiento de flujos, sobre todo cuando no se conocen las condiciones de salida.



(a) Condiciones de no deslizamiento



(c) Condiciones de no deslizamiento

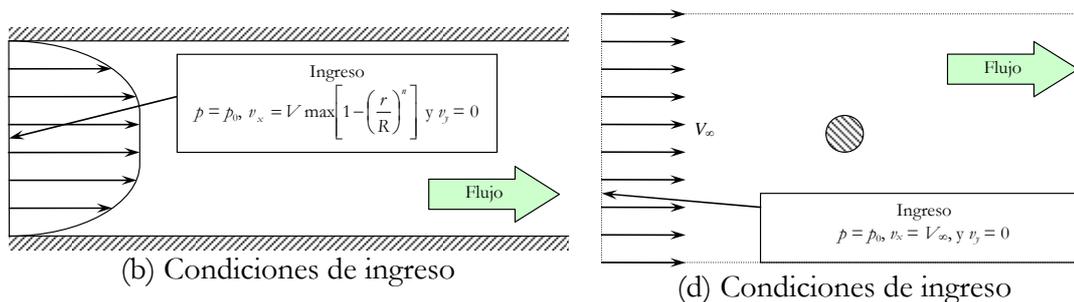


Figura 0.1 - Condición de contorno, (a) y (b) Flujo interno; (c) y (d) Flujo externo

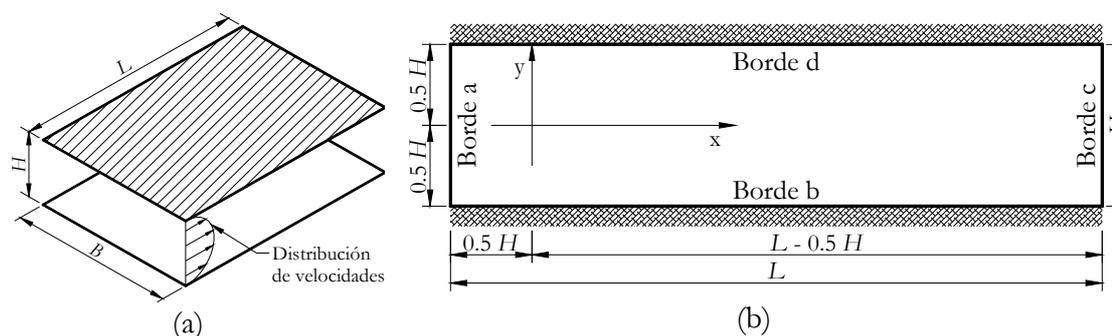


Figura 0.2 - Esquemización y geometría considerada del caso de referencia

## 6.2. FLUJO INTERNO, INCOMPRESIBLE Y PERMANENTE ENTRE DOS PLACAS DE ANCHO INFINITO

### 6.2.1. Descripción

Se analiza la pérdida de carga o gradiente de presión, para un fluido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  en flujo permanente, incompresible y unidimensional confinado entre dos placas de ancho infinito ( $B \rightarrow \infty$ ) y separados por una distancia  $H$ , en regímenes laminar, de transición y turbulento; empleando DNS (ver Figura 0.2).

### 6.2.2. Solución analítica

Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno son (continuidad y Navier – Stokes):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Asumiendo que en el fenómeno considerado se presenta:

- Flujo totalmente desarrollado o flujo permanente, implica  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .
- Flujo unidimensional (en la dirección  $x$ ), implica que  $v_y = 0$ , se obvie la segunda parte de la ecuación (6.2) y además  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$  para todas las variables excepto para la presión.

La ecuación final que gobierna el flujo entre las dos placas de ancho infinito

es:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.3)$$

Donde  $\frac{\partial p}{\partial x}$  es el gradiente de presión o pérdida de carga a lo largo del eje  $x$

(valor constante), de ello  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{\Delta x}$ , además  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$  es la razón de deformación

angular respecto del tiempo que depende solo de  $y$ , por tanto  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,

de modo que el perfil de velocidades, luego de emplear las condiciones de contorno respectivas (cuando  $y = -H/2$  o  $y = H/2$ ,  $v_x = 0$ ), resulta:

$$v_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H^2}{8} \left[ 1 - 4 \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right] \quad (6.4)$$

$$v_x = V \max \left[ 1 - 4 \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right] \quad (6.5)$$

El signo negativo en la función distribución de velocidades de la ecuación (6.4), implica un gradiente de presión negativo, además la velocidad media  $V$  en función de la velocidad máxima, establecida la ecuación (6.5), resulta ser:

$$V = \frac{\int v_x dA}{\int dA} = \frac{2}{3} V_{\max} \quad (6.6)$$

Por tanto, considerando la definición del número de Reynold ( $Re_H = VH/\mu$  o  $Re_h = 2 Re_H = 2 VH/\mu$ ), las ecuaciones (6.4), (6.5) y (6.6), el gradiente de presiones es:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{12\mu V}{H^2} = \frac{12\rho V^2}{H} \frac{1}{Re_H} = \frac{24\rho V^2}{H} \frac{1}{Re_h} \quad (6.7)$$

Además, considerando la ecuación de Darcy – Weisbach, la pérdida de carga es  $-\frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{\Delta x}{D_h} \frac{V^2}{2g}$ , donde  $\Delta p$  es la caída de presión en el tramo  $\Delta x$ ,  $f$  es el coeficiente de fricción,  $D_h$  es el diámetro hidráulico con  $D_h = \frac{4A}{P}$  (siendo  $A$  y  $P$ , el área y perímetro de la sección transversal al flujo respectivamente) y para el caso considerado  $D_h = 2H$ ; de modo que:

$$-\frac{\Delta p}{\Delta x} = f \frac{\rho}{2H} \frac{V^2}{2} = f \frac{\rho V^2}{4B} \quad (6.8)$$

Finalmente, igualando las ecuaciones (6.7) y (6.8), y despejando el coeficiente de fricción  $f$ , se obtienen las expresiones siguientes:

$$f = \frac{48}{Re_H} \quad (6.9)$$

$$f = \frac{96}{Re_h} \quad (6.10)$$

Ecuaciones que serán empleadas para comparar con los resultados numéricos de la simulación del flujo empleando FEM y DNS para diferentes regimenes del flujo determinados por el número de Reynold hidráulico.

### 6.2.3. Simulación

Las *ecuaciones gobernantes del fenómeno* son la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier – Stokes para un régimen bidimensional (ecuaciones 6.1 y 6.2), que serán resueltas empleando el método de los elementos finitos (FEM)

mediante simulación directa (DNS) con el programa FreeFEM+ utilizando el código del programa del **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, para ello se fijan las *propiedades del fluido* en valores constantes (viscosidad cinemática  $\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$  y densidad  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ).

La *geometría* considerada se muestran en la Figura 0.2; los bordes a y c representan las secciones de ingreso y salida del flujo respectivamente, los bordes b y d son las paredes (placas de ancho infinito) que delimitan el flujo (sin movimiento); para el caso de estudio  $H = 1 \text{ m}$  y  $L = 4 \text{ m}$ .

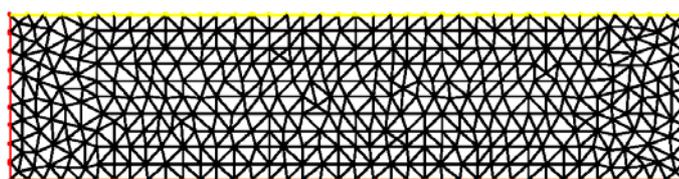
Para arribar a la solución numérica del fenómeno, se considera la evolución de un régimen transitorio a su estado estacionario, en todo momento las *condiciones de contorno* son invariables y se especifican a continuación:

- Para el borde a:  $v_x = V \max \left[ 1 - \left( \frac{2y}{H} \right)^2 \right]$ ,  $v_y = 0$ , la presión se determina a partir del paso anterior.
- Para los bordes b y d:  $v_x = 0$ ,  $v_y = 0$  y  $\frac{dp}{dn} = 0$ .
- Para el borde c:  $p = 0$  y las velocidades están determinadas por los valores del paso anterior.

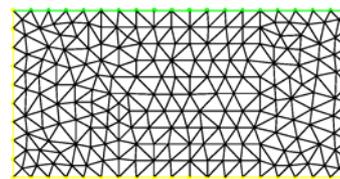
## 6.2.4. Resultados

### 6.2.4.1. Discretización del dominio

La Figura 0.3 muestra el resultado del mallado realizado por el programa en el proceso de solución de las ecuaciones gobernantes, cuya densidad no es la empleada en el proceso de solución (el elemento más grande mide 0.5 mm).



(a) Malla 1,  $H = 1 \text{ m}$  y  $L = 4 \text{ m}$

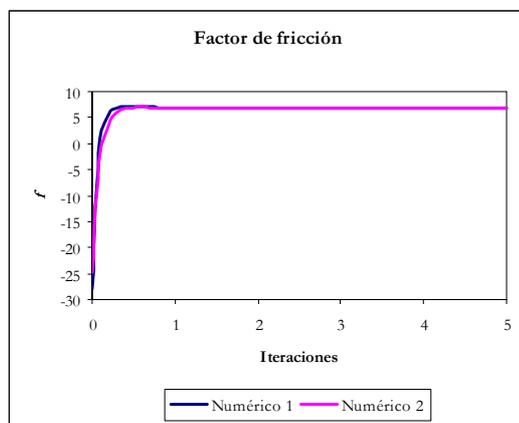


(b) Malla 2,  $H = 1 \text{ m}$  y  $L = 2 \text{ m}$

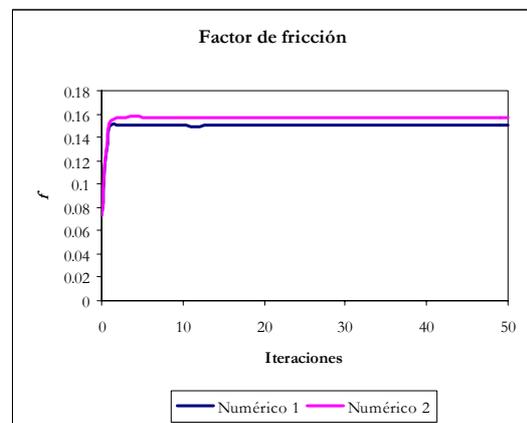
**Figura 0.3 - Densidad de mallado o discretización del dominio, (a) considera todo el dominio y (b) ampliación de la zona de entrada del ducto**

**6.2.4.2. Evolución del régimen transitorio a régimen permanente**

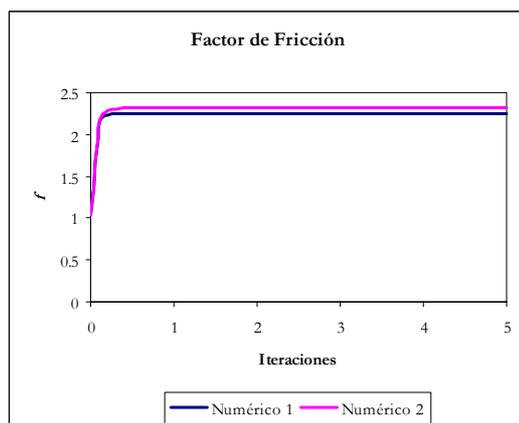
La Figura 0.4 presenta la evolución del factor de fricción en función del número de iteraciones y para diferentes regímenes analizados, la serie numérico 1 y numérico 2, corresponden respectivamente a la evaluación efectuada para una sección ubicada en la mitad del ducto y en la que corresponde a la salida; al respecto se puede observar que:



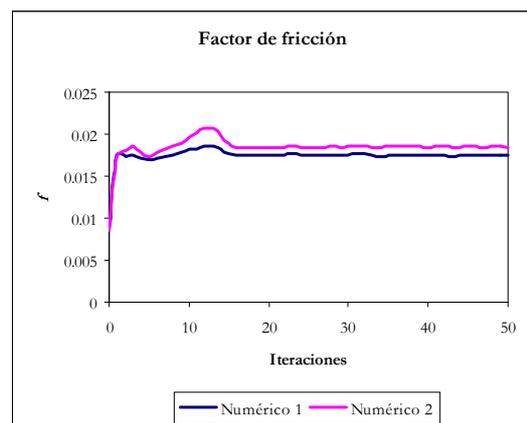
(a)  $Re_h = 13.33$ ,  $V = 0.067$  m/s y  $dt = 0.5$  s



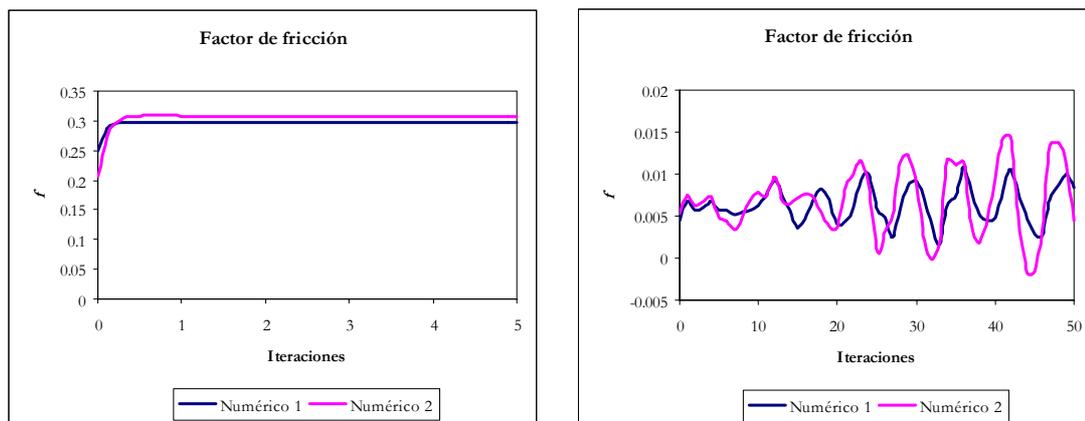
(d)  $Re_h = 600$ ,  $V = 3$  m/s y  $dt = 0.5$  s



(b)  $Re_b = 40$ ,  $V = 0.2$  m/s y  $dt = 0.5$  s



(e)  $Re_b = 5\ 000$ ,  $V = 25$  m/s y  $dt = 0.1$  s



(c)  $Re_h = 133.33$ ,  $V = 0.667$  m/s y  $dt = 0.5$  s

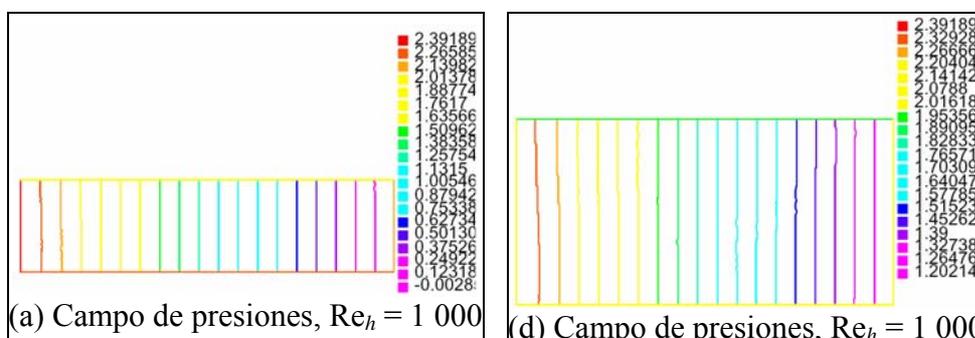
(f)  $Re_h = 14\ 000$ ,  $V = 70$  m/s y  $dt = 0.05$  s

**Figura 0.4 - Proceso de convergencia del factor de fricción para el caso de referencia**

- En régimen laminar ( $Re_h < 2\ 300$ ), las soluciones convergen sin mayores problemas (ver Figura 0.4 casos a, b, c y d), a diferencia de un régimen transitorio o un régimen turbulento (ver Figura 0.4 casos e y f).
- En régimen de transición y/o turbulento ( $Re_h > 2\ 300$ ), obtener las soluciones numéricas requiere una combinación adecuada de factores, un paso de tiempo  $dt$  (valores pequeños) y la densidad de mallado (dimensiones pequeñas).

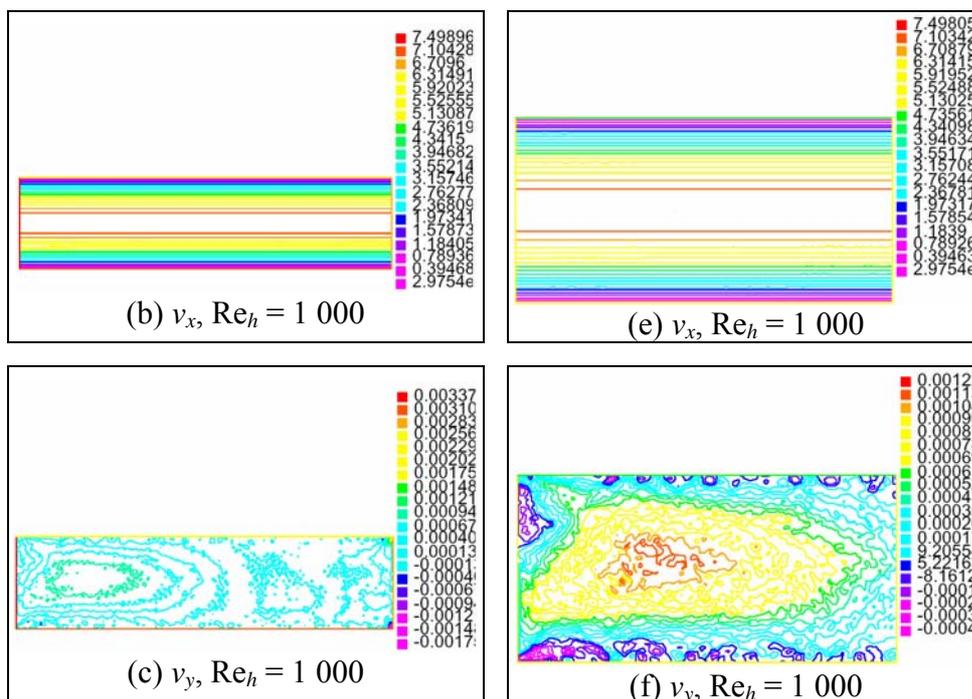
### 6.2.4.3. Campo de presiones y velocidades

La Figura 0.5 y la Figura 0.6 presentan respectivamente los campos de presiones y velocidades para un régimen laminar ( $Re_h = 1\ 000$ ,  $\rho = 1\ 000$  kg/m<sup>3</sup> y  $V_{med} = 5$  m/s) y un régimen turbulento ( $Re_h = 14\ 000$ ,  $\rho = 1\ 000$  kg/m<sup>3</sup> y  $V_{med} = 70$  m/s); al respecto se puede observar lo siguiente:



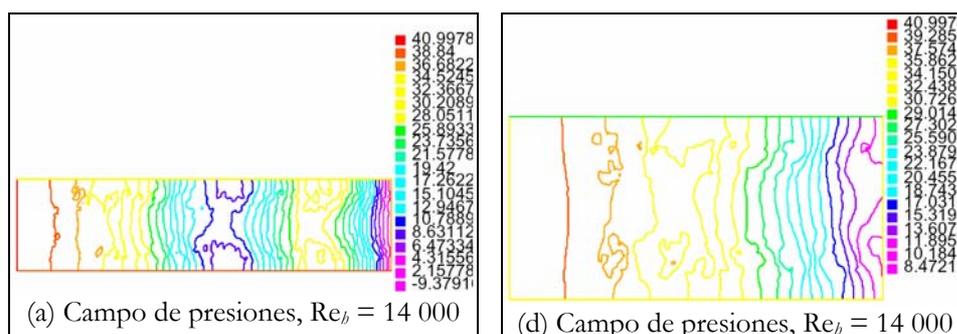
(a) Campo de presiones,  $Re_h = 1\ 000$

(d) Campo de presiones,  $Re_h = 14\ 000$



**Figura 0.5 - Campo de presiones y velocidades para régimen laminar, (a), (b) y (c) visualización malla 1, (d), (e) y (f) visualización malla 2**

- Existe coherencia en el campo de presiones obtenido (ver Figura 0.5.a, Figura 0.5.d, Figura 0.6.a y Figura 0.6.d), las isolíneas de presión son verticales y equidistantes (implica un gradiente de presiones constante), para ambos regímenes (laminar y turbulento).
- Del mismo modo, existe coherencia en el campo de velocidades obtenido (ver Figura 0.5.b, Figura 0.5.c, Figura 0.6.b y Figura 0.6.c), las isolíneas de velocidad axial  $v_x$  son horizontales, mientras que la componente vertical  $v_y$  es prácticamente cero para ambos regímenes (laminar y turbulento).



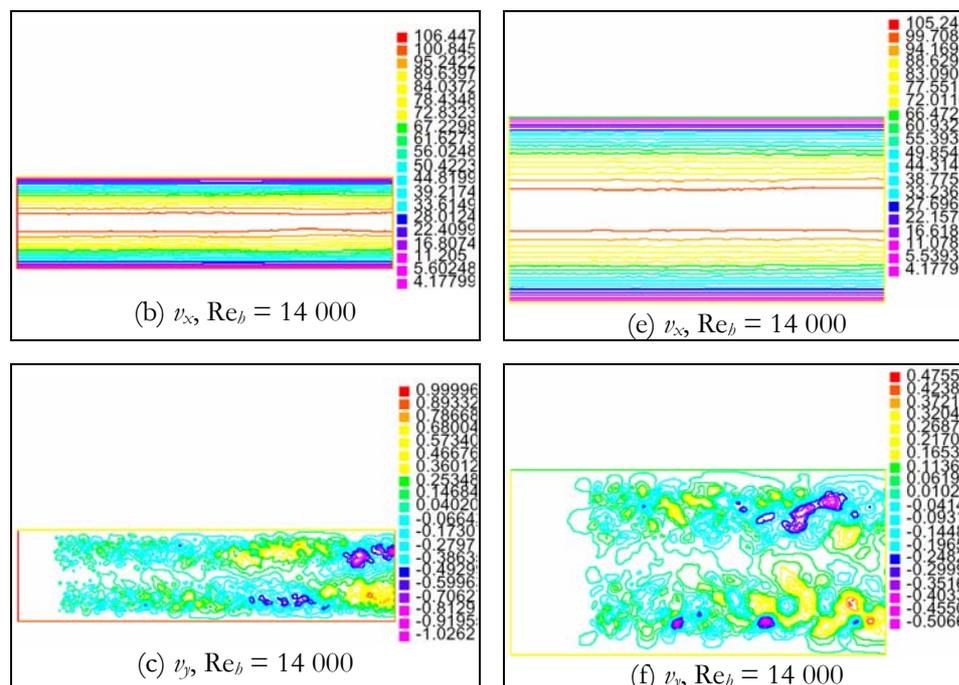
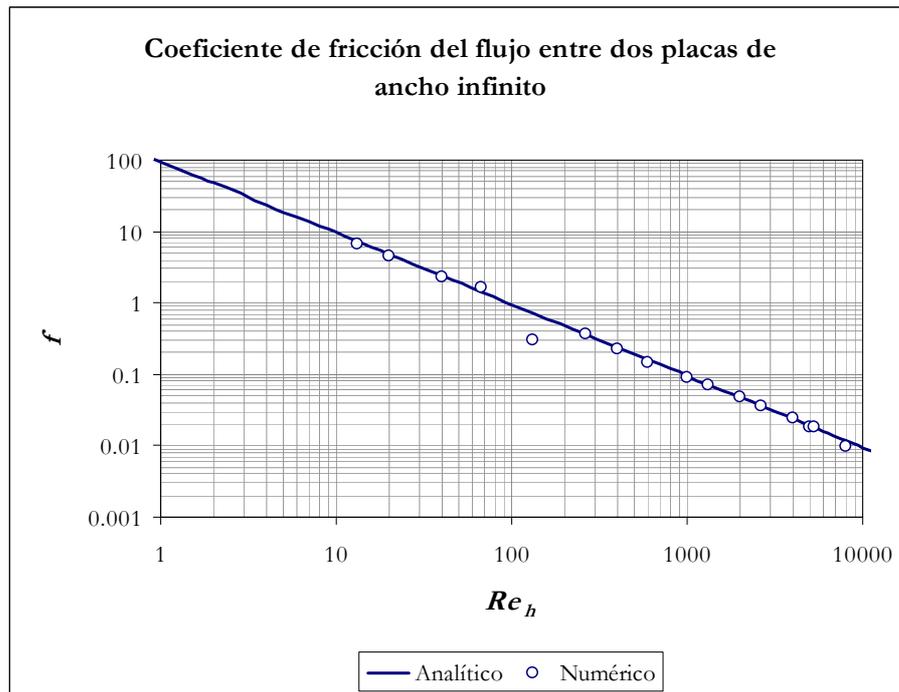


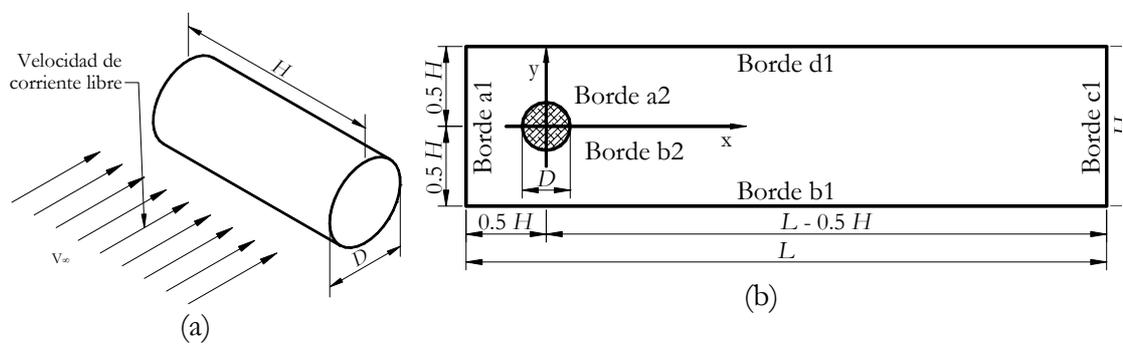
Figura 0.6 - Campo de presiones y velocidades para régimen turbulento, (a), (b) y (c) visualización malla 1, (d), (e) y (f) visualización malla 2

#### 6.2.4.4. Coeficiente de fricción

La Figura 0.7 presenta el factor de fricción, para diferentes regímenes, evaluado empleando la ecuación (6.7) con la solución numérica obtenida (campos de presión), en comparación con la solución analítica determinada por la ecuación (6.10); al respecto se puede afirmar que la solución numérica obtenida coincide en todo el rango analizado con la solución analítica (inclusive para la proyección de valores en regímenes turbulentos, evaluados son con el objeto de evidenciar los fenómenos de turbulencia).



**Figura 0.7 - Coeficiente de fricción para el flujo entre dos placas de ancho infinito (resultados analíticos y resultados numéricos)**



**Figura 0.8 - Esquematización y geometría considerada del caso de referencia**

### 6.3. FLUJO EXTERNO, INCOMPRESIBLE Y PERMANENTE SOBRE UN CILINDRO DE ALTURA INFINITA

#### 6.3.1. Descripción

Se analiza el coeficiente de arrastre de un fluido de densidad  $\rho$  y viscosidad cinemática  $\nu$  en flujo externo, incompresible y permanente sobre un cilindro de radio  $R$  y altura infinita  $H \rightarrow \infty$ ; en regímenes laminar, de transición y turbulento empleando MEF y DNS, considerando que la fuerza total esta dado por **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

$$\mathbf{F} = -\oint p \mathbf{n} dA + \oint \tau_w \mathbf{t} dA \quad (6.11)$$

Donde,  $\mathbf{F}$  es la fuerza total (composición de la *fuerza de arrastre* y la *fuerza de sustentación*) sobre la superficie de referencia,  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{t}$  son respectivamente los vectores normal y tangente al diferencial de superficie,  $p$  es la presión en el diferencial de superficie,  $\tau_w$  es el esfuerzo cortante sobre el diferencial de superficie, además **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

$$F_D = \oint (-p \cos \theta + \tau_w \sin \theta) dA \quad (6.12)$$

$$F_L = \oint (-p \sin \theta + \tau_w \cos \theta) dA \quad (6.13)$$

Donde,  $F_D$  es la *fuerza de arrastre* (drag) y  $F_L$  es la *fuerza de sustentación* (lift) y  $\theta$  es el ángulo formado por el vector normal a la superficie y el eje  $x$ ; además el *coeficiente de resistencia* o *arrastre*  $C_D$ , y del *coeficiente de sustentación*  $C_L$ , son respectivamente **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} \quad (6.14)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} \quad (6.15)$$

Donde,  $V_\infty$  es la velocidad de corriente libre o velocidad no perturbada del flujo y  $S$  es una superficie de referencia o la superficie o área que está en contacto con el flujo; la literatura (p. ej. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. y ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) presente valores y correlaciones del coeficiente de arrastre  $C_D$  determinados experimentalmente para diferentes regímenes (laminar, de transición o turbulento), los que serán empleados como criterio para validar los resultados numéricos al resolver las ecuaciones de Navier – Stokes en el programa FreeFEM+.

### Simulación

Las *ecuaciones gobernantes*, son las de continuidad y Navier – Stokes para el caso bidimensional, que serán resueltas numéricamente empleando FEM y DNS considerando el código del programa del **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** en el programa FreeFEM+.

Las *propiedades del fluido*, viscosidad cinemática y densidad consideran diferentes valores para cubrir una mayor variedad de regímenes (laminares, de transición y turbulentos), caracterizados por el número de Reynold.

La *geometría* considerada se muestra en la Figura 0.8, donde los bordes a1, b1, c1 y d1 corresponden a la porción del dominio total del flujo uniforme, mientras que los bordes a2 y b2 corresponde a la parte superior e inferior del cilindro; además se ha establecido que  $H$  es 4 m,  $L$  es 10 m y el diámetro  $D$  es 1 m.

El *procedimiento* contempla la evolución de un régimen transitorio a un régimen permanente (régimen en que ninguna propiedad depende del tiempo y es la solución del caso de referencia); las *condiciones de contorno* consideradas son:

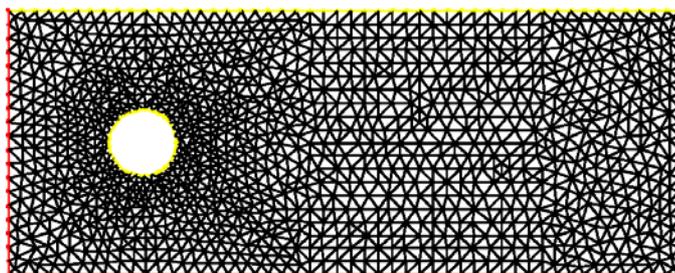
- Para el borde a1:  $v_x = V_\infty$ ,  $v_y = 0$  y la presión  $p$  estará determinada por los valores del paso anterior.
- Para los bordes b1 y d1:  $v_x = V_\infty$ ,  $v_y = 0$  y  $\frac{dp}{dn} = 0$ .

- Para el borde c1:  $p = 0$  y la velocidades determinadas por el paso anterior.
- Para los bordes a2 y b2:  $v_x = 0, v_y = 0$  y  $\frac{dp}{dn} = 0$ .

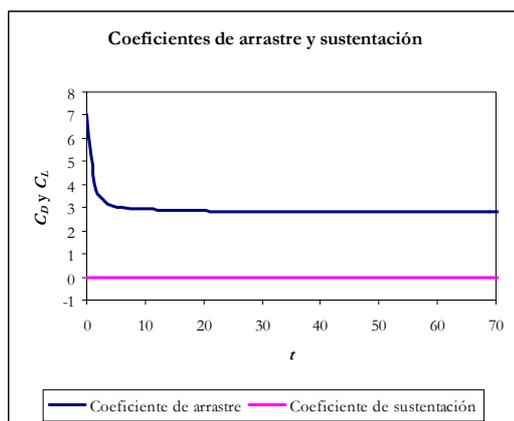
### 6.3.2. Resultados

#### 6.3.3.1 Discretización del dominio

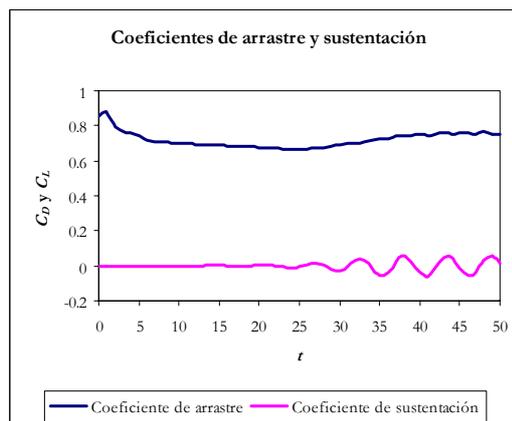
La Figura 0.9 muestra el resultado del mallado realizado por el programa en el proceso de solución de las ecuaciones gobernantes, la densidad de malla mostrada no es la empleada en la solución del problema, en el modelamiento efectuado el elemento más grande mide 0.1 mm.



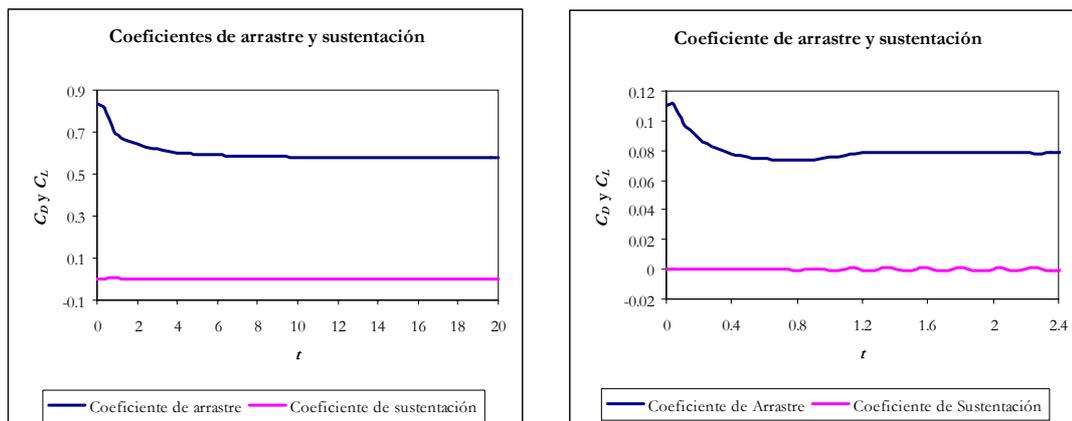
**Figura 0.9 - Densidad de mallado o discretización del dominio**



(a)  $Re_D = 20, \rho = 1 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}, D = 1 \text{ m}, V_\infty = 0.2 \text{ m/s}$  y  $dt = 1.5 \text{ s}$

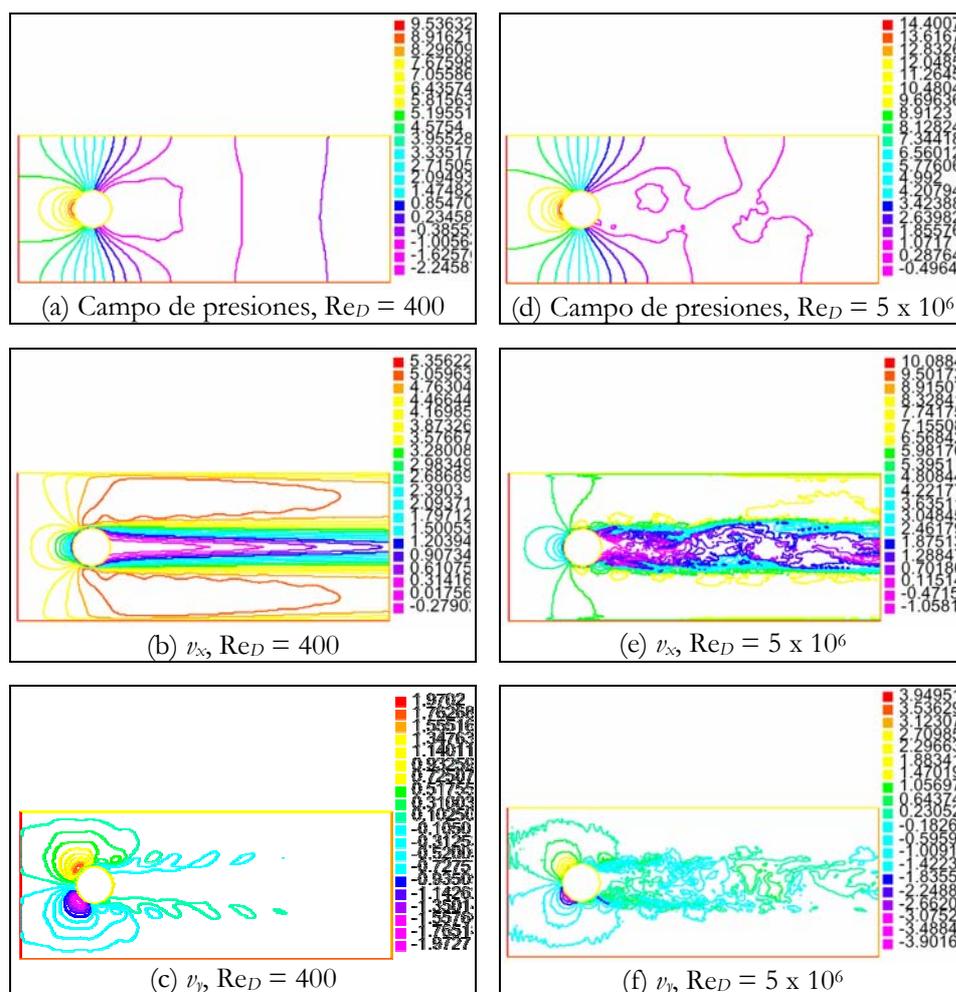


(c)  $Re_D = 2000, \rho = 1 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}, D = 1 \text{ m}, V_\infty = 2 \text{ m/s}$  y  $dt = 1 \text{ s}$



(b)  $Re_D = 500$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $D = 1 \text{ m}$ ,  $V_\infty = 5 \text{ m/s}$  y  $dt = 0.4 \text{ s}$   
 (d)  $Re_D = 7000$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $D = 1 \text{ m}$ ,  $V_\infty = 70 \text{ m/s}$  y  $dt = 0.05 \text{ s}$

**Figura 0.10 - Proceso de convergencia de los coeficientes de arrastre y sustentación del caso de referencia**



**Figura 0.11 - Campo de presiones y velocidades (a), (b) y (c) régimen laminar, (d), (e) y (f) régimen turbulento**

### 6.3.3.2 Evolución del régimen transitorio a régimen permanente

La Figura 0.10 muestra el proceso de convergencia de los coeficientes de sustentación y arrastre para diferentes regímenes analizados, las conclusiones a las que se arriba son semejantes a las del caso de referencia anterior:

- En regímenes laminares ( $Re_D < 2\ 300$ ), la convergencia no presenta muchos problemas, a pesar de las condiciones adversas ( $dt$  grande o una densidad de mallado gruesa, ver Figura 0.11.a), como naturaleza del fenómeno (no existe turbulencia).
- En regímenes de transición y turbulentos ( $Re_D > 2\ 300$ ), la convergencia si requiere de la combinación adecuada de factores ( $dt$  pequeño y un mallado fino), dado que se presenta el fenómeno de turbulencia (para captar su naturaleza, las dimensiones más pequeñas del mallado, deben corresponder a la amplitud de sus oscilaciones).

### 6.3.3.3. Campo de presiones y velocidades

La Figura 0.12 presenta los campos de presiones y velocidades para un régimen laminar ( $Re_D = 400$ ,  $\rho = 1\ \text{kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.01\ \text{m}^2/\text{s}$  y  $V_\infty = 4\ \text{m/s}$ ) y otro turbulento ( $Re_D = 5 \times 10^6$ ,  $\rho = 1\ \text{kg/m}^3$  y  $\nu = 1 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$ ,  $V_\infty = 5\ \text{m/s}$ ); se puede observar que:

- Las líneas de presión y velocidad constante, en esencia, para ambos regímenes sugiere una cierta semejanza, la diferencia radica en el ordenamiento de las isolíneas para un régimen laminar (una estela ordenada, líneas paralelas en su mayoría, ver Figura 0.11.b) y el desorden para uno turbulento (una estela desordena, ver Figura 0.11.e), características inherentes de los regímenes referidos
- La semejanza entre las líneas de presión y velocidad constante, implica también una consistencia de los resultados numéricos obtenidos, independientes de los regímenes analizados, los que sólo dependen de las condiciones de contorno.

- En resumen, una gráfica adimensional de los campos de presiones y velocidades, determina resultados numéricos muy parecidos, la diferencia se evidencia en la estela ordenada o desordenada, que caracteriza a cada régimen, laminares, y de transición o turbulentos respectivamente.

### **Coefficiente de arrastre**

La Figura 0.12 presenta el coeficiente de arrastre del flujo bidimensional sobre el cilindro calculado empleando las ecuaciones (6.12) y (6.14), considerando los campos de presión y velocidad obtenidos empleando FEM y DNS (series 1, 2, 3 y 4); en contraste con valores experimentales cuya correlación en función del número de Reynold para  $Re_D < 2 \times 10^5$  es (ver ref. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**):

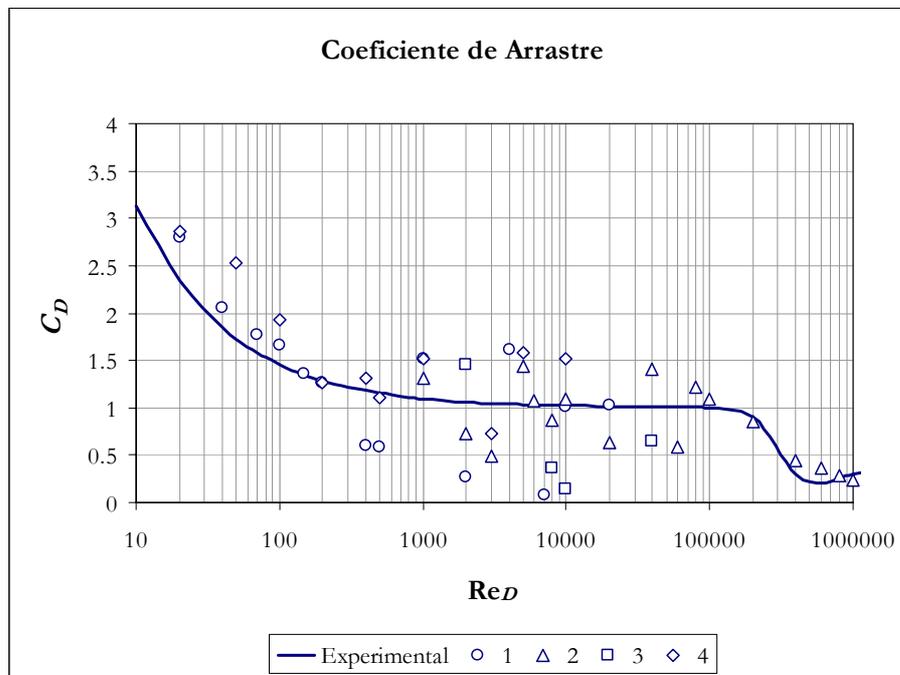
$$C_D = 1 + 10 Re_D^{-0.67}$$

Para valores del coeficiente de arrastre con  $Re_D > 2 \times 10^5$ , se considera la tendencia de la curva que describe su evolución en función de  $Re_D$ , presentada en la Figura 0.12 por la serie denominada experimental.

La solución numérica obtenida del coeficiente de arrastre es una buena aproximación a los valores experimentales encontrados en la literatura (ver Figura 0.12), la dispersión que se presenta en el rango que corresponde al régimen de transición y turbulento ( $Re_D > 2\ 300$ ) es característico de éstos regímenes, además si se efectúan mas pruebas numéricas la tendencia media será la descrita por la curva experimental; en contraste, el régimen laminar es más ordenado, aunque como en los regímenes de transición y turbulentos se presenta un cierto grado de dispersión, que no es más que el efecto de considerar valores diferentes para la viscosidad del fluido, que incide en la solución numérica del fenómeno a través de los términos convectivos.

En general, el algoritmo desarrollado puede ser empleado para evaluar el efecto de flujos sobre obstáculos (flujo sobre un cilindro bidimensional) y flujos en ductos bidimensionales (flujo entre dos placas de ancho infinito), con una buena aproximación a los resultados experimentales y sobre todo con los analíticos (caso de referencia anterior); en tal sentido, la metodología desarrollada será empleada para modelar el flujo que atraviesa al inyector y luego al rodete de la turbina, se espera

obtener una buena aproximación con los resultados reales en el comportamiento de la turbina.



**Figura 0.12 - Coeficiente de arrastre sobre un cilindro de ancho infinito, comparación entre resultados experimentales y numéricos vía modelamiento**

## CONCLUSIONES

---

Se han desarrollado tres modelos teóricos que proponen innovaciones en el diseño de la turbina hidráulica de flujo cruzado (ver Capítulo III y Capítulo IV), a los que se denomina *modelo teórico de optimización parcial*, *modelo teórico de optimización completa* y *modelo teórico de optimización del comportamiento ideal*; partiendo de principios y supuestos modificados (modificación del triángulo de velocidades por el efecto del espesor de los álabes y la inclusión del efecto de la contracción de la vena líquida al interior de la turbina), en contraste con la teoría de la turbina convencional; y la optimización del comportamiento de la turbina.

Las innovaciones propuestas por los modelos teóricos en el diseño del rotor, consisten en la modificación del *ángulo relativo del triángulo de velocidades del flujo en su ingreso del rodete* en la sección 2 y la modificación del *ángulo relativo del triángulo de velocidades cuando lo abandona* en la sección 1 ( $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$ ); los que traen como consecuencia una configuración geométrica diferente de la convencional (posicionamiento de los álabes en el rodete) y dependen del efecto del espesor de los álabes y de la contracción de la vena líquida al interior de la turbina, como era de esperarse.

Las innovaciones en el diseño de la turbina, considerando el *modelo teórico de optimización del comportamiento ideal* debido a sus ventajas respecto a los otros modelos, se materializan en la *propuesta tecnológica* del diseño hidráulico de una turbina de 50 kW para la Minicentral Hidroeléctrica “La Raya”, en el Centro de Investigación C. I. P. “La Raya” de la Universidad Nacional del Altiplano (ver

Capítulo V), para las condiciones de operación de la minicentral  $Q_D = 120$  l/s y  $H_N = 50$  m.

Se ha desarrollado una metodología (ver Capítulo VI) empleando *dinámica computacional de fluidos* (CFD) y *simulación numérica directa* (DNS) en la solución de las ecuaciones gobernantes (*continuidad* y *Navier – Stokes*), para flujos adiabáticos, bidimensionales, incompresibles, isentrópicos e isotérmicos, con fluidos isotrópicos y newtonianos, en regímenes laminares, de transición y turbulentos, por el *método de los elementos finitos* (FEM); para evaluar y evidenciar el efecto de las innovaciones de diseño de la turbina hidráulica de flujo cruzado de diseño modificado (Cross Flow Turbine modified) en su comportamiento; metodología que consiste en la parametrización de la geometría en el lenguaje del programa empleado, la discretización del dominio, el procesamiento, validación y post procesamiento de los resultados numéricos obtenidos.

Se ha validado la metodología propuesta, empleándola en la solución de casos de referencia que cuentan con solución analítica (flujo incompresible, permanente y desarrollado entre dos placas de ancho infinito) y solución experimental (flujo externo, permanente e incompresible sobre un cilindro bidimensional); y comparando las soluciones teóricas o experimentales con los obtenidos vía modelamiento, lográndose finalmente reproducir la ocurrencia del fenómeno en su totalidad (predicción del coeficiente de fricción para el flujo entre dos placas paralelas y el coeficiente de arrastre de un flujo en corriente libre sobre un cilindro de ancho infinito).

Empleando la metodología desarrollada en el análisis el flujo que atraviesa el inyector directriz (ver Capítulo VII), se obtiene *la función distribución del ángulo absoluto* del triángulo de velocidades del flujo cuando ingresa al rodete y la *distribución adimensional de la velocidad local* o *coeficiente de velocidad local*  $K_v$ , en función del arco de admisión  $\alpha$ , encontrándose, como era de esperar, que la suposición de una distribución constante del vector velocidad en toda la longitud del arco de admisión, no es correcta; por tanto en la concepción del principio de operación de la turbina y más específicamente en su diseño, debería considerarse el resultado anterior previamente validado de manera experimental.

---

Empleando la metodología desarrollada en el análisis del flujo que atraviesa el rodete de la turbina (ver Capítulo VIII), se evaluaron los principales parámetros de operación de la turbina (eficiencia hidráulica, potencia y torque), para diferentes condiciones de operación (altura neta constante, caudal y revoluciones del rotor variables), obteniéndose a continuación las curvas características de la turbina unidad.

El modelo teórico de optimización del comportamiento ideal proyecta los siguientes parámetros de diseño y comportamiento de la turbina para la minicentral hidroeléctrica “La Raya”:

- Caudal:  $Q = 120 \text{ l/s}$
- Altura:  $H = 50 \text{ m}$
- Dimensiones del rodete ( $D \times B$ ):  $\square 240 \times 120 \text{ mm}$
- Cifra de presión:  $\square = 4.3877$
- Eficiencia hidráulica:  $\square_h = 90.25\%$
- Potencia:  $P = 53.12 \text{ kW}$
- Revoluciones del rotor  $N = 1\ 189.89 \text{ rpm}$
- Torque:  $T = 0.4263 \text{ kN-m}$

De la misma manera, considerando el modelamiento del comportamiento de la turbina se obtienen los siguientes parámetros de operación:

- Caudal:  $Q = 120 \text{ l/s}$
- Altura:  $H = 50 \text{ m}$
- Eficiencia hidráulica:  $\square_h = 51.04\%$
- Potencia:  $P = 30.04 \text{ kW}$
- Revoluciones del rotor  $N = 743.71 \text{ rpm}$
- Torque:  $T = 0.3858 \text{ kN-m}$

En vista que el modelamiento incluye efectos como la viscosidad del fluido, pérdidas por choque cuando el flujo ingresa al rodete, el efecto de la fricción en los álabes de rodete y otros, los resultados proyectados por el modelamiento son mucho más conservadores que los proyectados por el modelo teórico; además éstos

---

resultados superan ampliamente al rango de valores comúnmente aceptado al evaluar éste tipo de turbinas (eficiencias por debajo al 50% atribuido a la escala de operación), de esta manera los valores proyectos por el modelamiento se acercan más a los valores reales.

De manera complementaria a los resultados obtenidos en el modelamiento del flujo del rotor de la turbina, el modelamiento del flujo en el inyector directriz provee las funciones de distribución de velocidad adimensional y el ángulo absoluto del triángulo de velocidades para el tramo de admisión 1, con  $0^\circ < \alpha < 36^\circ$ :

$$\begin{cases} \alpha_i = 0.01734 - 0.65570\lambda + 15.03807\lambda^2 \\ \frac{V}{V_{\max}} = -0.002379 + 0.08222\lambda + 0.217119\lambda^2 \end{cases}$$

Y el tramo de admisión 2, con  $36^\circ < \alpha < 90^\circ$ :

$$\begin{cases} \alpha_i = -0.00620 + 0.73506\lambda - 2.01705\lambda^2 \\ \frac{V}{V_{\max}} = -1.0984 \times 10^{-7} - 4.2654 \times 10^{-7} \lambda + 0.0186\lambda^2 - 0.10039\lambda^3 + 1.42569\lambda^4 \end{cases}$$

En resumen, los resultados obtenidos en relación al diseño de la turbina, consideran una propuesta tecnológica, basada en la modificación del ángulo del álabe en su posicionamiento sobre el rodete con respecto a los diseños tradicionales, que traería consigo implicancias como la mejora en el aprovechamiento del recurso hídrico, aspecto último abordado considerando el modelamiento de flujos, cuyos resultados indican una operación relativamente más eficiente, en sentido relativo mas no en sentido absoluto (los resultados alcanzados deberían ser finalmente validados desde el punto de vista experimental), antes de emplear la tecnología propuesta y explorando los modelos teóricos no considerados en el diseño de la turbina.

---

## IBLIOGRAFÍA

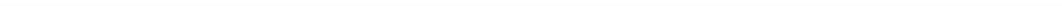
---

- [1] AVILÉS BONILLA, Rael; “Turbomáquinas I, Teoría y Problemas”, 2da. Edición. W. H. Editores, 1992, Lima – Perú.
  - [2] BCHYDRO, “Handbook for Developing Micro Hydro in British Columbia”. 2002, British Columbia.
  - [3] BERNARDI, Dominique; HECHT, Frederic; OHTSUKA, K.; PIRONNEAU Oliver; “FREEFEM+ for Macs, PCs, Linux”, 1998.
  - [4] CARSON, Art, “Small Hydro Systems”. Canoe Robson Education Development Association, 1991.
  - [5] COSTA PEREIRA, N. H.; TEXEIRA BORGES, J. E. B.; “Análise Computacional Bidimensional de Tuberías Cross – Flow”. Secção de Termodinâmica Aplicada, Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, 1994, Lisboa – Portugal.
  - [6] COSTA PEREIRA, N. H.; TEXEIRA BORGES, J. E. B.; “Study of the Nozzle Flow in a Cross – Flow Turbine”. Mechanical Engineering Department, Instituto Superior Técnico, Technical University of Lisboa, 1995, Lisboa – Portugal.
  - [7] COTACALLAPA VERA, Rommel Benjamin; “Modelamiento del Comportamiento de la Turbina Hidráulica de Flujo Cruzado (Cross Flow Turbine) empleando Elementos Finitos”. III Convención Nacional de
-

- Fenómenos de Transferencia, Universidad Nacional Jorge Basadre Grohman, 2005, Tacna – Perú.
- [8] COTACALLAPA VERA, Rommel Benjamin; “Nuevo modelo de la turbina hidráulica de flujo cruzado (Cross Flow Turbine) y su validación empleando elementos finitos”. IX Congreso de Estudiantes de Ingeniería Mecánica, Eléctrica, Electrónica y Ramas Afines – IX CONEIMERA, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2002, Lima – Perú.
- [9] COTACALLAPA VERA, Rommel Benjamin; “Replanteamiento de las Relaciones que Rigen el Diseño y Predicen el Comportamiento de la Turbina Hidráulica de Flujo Cruzado”. VII Congreso Nacional de Estudiantes de Ingeniería Mecánica Eléctrica, Electrónica y Ramas Afines (VII CONEIMERA), Universidad Nacional San Antonio Abad, Setiembre del 2000, Cuzco – Perú.
- [10] COZ PANCORBO, Andrés Federico, “Diseño de una Turbina Michell – Banki”. Tesis de Competencia Profesional, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Ingeniería, 1961, Lima – Perú.
- [11] COZ PANCORBO, Andrés Federico, “Turbinas Hidráulicas de Flujo Transversal”. IV CONIMERA, 1975, Lima – Perú.
- [12] ESHA – European Small Hydropower Association, “Layman’s Handbook on how to develop a Small Hydro”. Comisión de las Comunidades Europeas, Dirección General de Energía (DG XVII), 1993, Comunidad Europea.
- [13] FARHAT, Mohamet; “Contribution á l'érosion de cavitation: mécanismes hydrodynamiques et prediction”, Tesis Doctoral en Ciencia y Tecnología, Département de Génie Mécanique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [14] FERNÁNDEZ DÍEZ, Pedro; “Turbinas Hidráulicas”, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética”, Universidad de Cantabria, España.
- [15] GERHART, Philip M.; GROSS, Richard J. y HOCHSTEIN, John I.; “Fundamentos de Mecánica de Fluidos”, 2da. Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995, Estados Unidos.
-

- [16] GILLI, Jorge; MASSARO, Fernando; PAGNOLA, Marcelo; “Microturbinas Hidráulicas CFT – Caracterización”, Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Departamento de Ingeniería, 1998, Lomas de Zamora – Argentina.
- [17] HERNÁNDEZ BAZO, Carlos A.; “Diseño, Construcción y Ensayo de Turbinas de Flujo Transversal para Microcentrales Eléctricas”. Tesis de Competencia Profesional, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Ingeniería, 1980, Lima – Perú.
- [18] INE – Instituto Nacional de Energía, “Estandarización de Turbinas tipo Mitchell Banki”. 1986, Quito – Ecuador.
- [19] ISHIMATSU, Katsuya; KAGE, Kazuyuki; OKUBAYASHI, Toyoyasu; “Simulación for the Flow around Cross Flow Turbine with end plates”. Oita University, JSCFP, 2000, Tokio - Japón.
- [20] ITDG Perú – Intermediate Technology Development Group, “Manual de las Mini y Microcentrales Hidráulicas”, 1995, Lima – Perú.
- [21] KVICINSKY, Sonia; “Méthode d'analyse des Écoulements 3d à Surface Libre: Application aux Turbines Pelton”, Tesis Doctoral en Ciencia y Tecnología, Département de Génie Mécanique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2002.
- [22] MALISKA, Clovis R.; “Transferencia de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, fundamentos e coordenadas generalizadas”, Laboratorio de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferencia de Calor, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidad Federal de Santa Catarina, 1995, Río de Janeiro – Brasil.
- [23] MARCHEGIANI, Ariel R.; “Pequeñas Centrales Hidráulicas”, Laboratorio de Maquinas Hidraulicas (LA. M. HI.), Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional de Comahue, Patagonia, Buenos Aires, República de Argentina.
- [24] MAURI, Sebastiano; “Numerical Simulation and Flow Analysis of an Elbow Diffuser”, Tesis Doctoral en Ciencia y Tecnología, Département de Génie Mécanique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2002.
-

- [25] MOCKMORE, C. A. y MERRYFIELD, Fred; “The Banki Water Turbine”, Bulletin Series N° 25; Engineering Experiment Station, Oregon State College, 1949.
- [26] NOZAKI, Tsugo; “Datos para la Elaboración de Proyectos de Pequeñas y Medianas Centrales Hidroeléctricas”. 1985, Lima – Perú.
- [27] PATANKAR, Suhas V.; “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”. Hemisphere Publishing Corporation, 1980, United States of America.
- [28] PFLEIDERER, Carl; “Bombas Centrífugas y Turbocompresores”, traducción de la 4ta. Edición Alemana. Editorial Labor S. A., 1960, Madrid – España.
- [29] POTTER, Merle C. y WIGGERT, David C.; “Mecánica de Fluidos”, 3ra. Edición. International Thomson Editores, 2002, México D. F. – México.
- [30] SHAMES, Irving H.; “Mecánica de Fluidos”, 3ra. Edición. Mc Graw-Hill Interamericana, S. A., 1995, Santafé de Bogotá – Colombia.
- [31] SHANNON, Ron; “Water Wheel Engineering”. IPC-VI, Designing for a Sustainable Future.
- [32] SHAPIER, S. H.; “Hidrodinâmica”; 2000, Brasil.
- [33] SINMFLU, Grupo de Simulación Numérica en Mecánica de Fluidos y Transferencia de Calor; Apuntes del 1er. Curso Internacional en “Simulación Numérica de Flujo de Fluidos y Transferencia de Calor con Volúmenes Finitos”. Universidad Nacional de Ingeniería, 2001, Lima - Perú
- [34] TAKAHASHI, Naoya; CHOFUGAOKA, Chofu; YAMAMOTO, Kiyoshi; JINDAJI HIGASHIMASHI, Chofu; “Direct Numerical Simulation of Boundary Layer Transition”; University of Electro-Communications y National Aerospace Laboratory, 2000, Tokio – Japon.
- [35] UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO, Facultad de Ingeniería Agrícola; Apuntes del 1er. Curso a Nivel de Post Grado en “Metodología de la Investigación Científica aplicada a la Ingeniería”, 2001, Puno – Perú.
- [36] WHITAKER, Stephen; “Introduction to Fluid Mechanics”. Prentice Hall Inc., Robert E. Krieger Publishing Company Inc., 1981, Malabar – Florida.
-



# Apéndice A: DINÁMICA COMPUTACIONAL DE FLUIDOS (Computational Fluids Dynamics)

---

## A.1. ASPECTOS HISTÓRICOS<sup>1</sup>

El estudio del movimiento de los fluidos es una actividad de hace muchos siglos que se ha venido desarrollando lentamente, los *egipcios* tenían reservorios de agua, *Aristóteles* fue el primero en describir el principio de la continuidad, *Arquímedes* a través de su principio definió las condiciones para que un cuerpo flote en un fluido, los *romanos* construyeron acueductos para transportar agua a sus ciudades, posteriormente *Leonardo Da Vinci* en el siglo XV sugirió formas para reducir el arrastre del agua en los barcos, en 1586 *Simon Stevin* publicó “*Estática ed Hidrostática*” un tratado matemático de cómo la mecánica de los fluidos era conocida entonces.

Históricamente, el mayor desarrollo de la mecánica de fluidos se debió al estudio experimental mucho antes que se le diera un enfoque matemático, esto explica el surgimiento de la *Hidráulica* (movimiento de líquidos en ductos cerrados o abiertos) antes que la *Hidrodinámica* (estudio de las fuerzas sobre el movimiento del fluido); fue en el siglo XIX que las descripciones matemáticas del comportamiento de los fluidos ganaran fuerza, por ejemplo *Leonard Euler* es considerado como uno de los fundadores de la *Hidrodinámica* pues dedujo las ecuaciones del movimiento de los fluidos denominadas como las *ecuaciones de Euler*; una forma conocida de las *ecuaciones de Navier – Stokes* se desarrolló a partir de los trabajos de los franceses *Claude Navier* (1822), *Simeon Poisson* (1829) y el inglés *George Stokes* (1845);

---

<sup>1</sup> 1er. Curso Internacional: “Simulación Numérica de Flujo de Fluidos y Transferencia de Calor con Volúmenes Finitos”, Universidad Nacional de Ingeniería, 2001.

soluciones analíticas para las ecuaciones de Navier – Stokes fueron determinados para algunos pocos casos por *Lamb* (1945).

Con el desarrollo del computador digital a partir de los años 1950, surge una tercera alternativa para resolver problemas que involucren movimiento de fluidos, la *dinámica de fluidos computacional* (DFC) o en el inglés *computational fluid dynamics* (CFD); alternativa que consiste en obtener la solución numérica de las ecuaciones de Navier – Stokes utilizando técnicas computacionales.

La *dinámica de fluidos computacional* es un área de computación científica que estudia métodos computacionales para la simulación de fenómenos que involucran fluidos en movimiento como transferencia de calor, esto incluye flujos externos e internos alrededor de obstáculos; en los que principalmente el usuario de CFD está interesado en obtener la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en todo el dominio del flujo. Su desarrollo está íntimamente ligado a la rápida evolución de los computadores digitales a partir de los años 1950, pero antes de eso ya se había realizado trabajos numéricos con el auxilio de calculadoras mecánicas primitivas e inclusive involucraban el empleo de varias calculadoras humanas.

*Richardson* (1910) presentó a la Royal Society de Londres un trabajo que podría ser considerado como el precursor de CFD, en este trabajo se resolvía la ecuación de Laplace por un método iterativo tipo Jacobi, *Liebmann* (1918) resuelve también la ecuación de Laplace, pero empleando el método iterativo de Gauss – Seidel.

La primera solución numérica para un flujo viscoso en régimen permanente fue propuesta por *Tom* (1933) quien calculó manualmente las líneas de corriente alrededor de un cilindro utilizando el método de diferencias finitas; mientras tanto debido al trabajo de *Crack & Nicolson* (1947) y al trabajo de *Peaceman & Rachford* (1955) se impulsa el desarrollo de estudios en régimen no permanente o dependientes del tiempo.

A partir de la década de 1960 ya se presentan trabajos que involucran métodos numéricos prácticos para la solución de flujos viscosos e incompresibles, se puede mencionar algunos como por ejemplo *Fromm* (1964) quien discute las condiciones de frontera especialmente cuando se trata con obstáculos, *Harlow &*

---

*Welch* (1965) desarrollan el método MAC (marker and cell) que se tornó muy popular porque se empleaban partículas marcadoras para identificar la posición de la superficie libre del fluido, *Chorin* (1967) desarrolla un método que incluye el concepto de *compresibilidad artificial* para el tratamiento numérico de los flujos.

El primer tratado sobre turbulencia en fluidos es desarrollado por *Amsden & Harlow* (1968) quienes incorporan un modelo de turbulencia al método MAC obteniendo buenos resultados en comparación con estudios experimentales, los mismos *Amsden & Harlow* (1970) proponen el método simplificado MAC (simplified MAC), extensiones del método MAC fueron desarrollados por *Viecelli* (1969 y 1971) para superficies curvas y móviles respectivamente.

Existen otros trabajos donde se puede verificar como se ha venido desarrollando la técnica de CFD dándose énfasis a mejorar los métodos numéricos empleados, dejando un tanto de lado la malla utilizada, es recientemente que se incide en este aspecto de CFD, siendo algunos trabajos los desarrollados por *Thompson* (1984), *Vanka* (1986), *Shah* (1989) y *Thompson & Ferziger* (1989) por mencionar algunos.

Se ha presentado algunos métodos desarrollados en CFD que no son los únicos, en la actualidad gran parte de los mas modernos métodos empleados en CFD se derivan de los mencionados a los que se agregan diversos métodos de discretización y algunos modelos de turbulencia y son resueltos empleando elementos finitos, volúmenes finitos y diferencias finitas; el presente apéndice pretende hacer un análisis cualitativo de las técnicas empleadas en CFD así como sus ventajas y desventajas.

## **A.2. ECUACIONES FUNDAMENTALES**

### **A.2.1. La ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier – Stokes**

La mayoría de los flujos en la naturaleza y en la industria son turbulentos, esto implica que las fuerzas inerciales son mucho mayores que las fuerzas viscosas (números de Reynolds altos), también pueden ser considerados incompresibles, es

---

decir de densidad constante (una desventaja de haber asumido un flujo incompresible deja de lado el modelado de las ondas acústicas en el fluido<sup>2</sup>, en máquinas hidráulicas este fenómeno juega un papel importante en la instalación dinámica, particularmente durante el arranque en un régimen no permanente<sup>3</sup>), especialmente en hidrodinámica, donde la sustancia de trabajo es el agua; de la misma manera, éstos flujos también pueden ser considerados como flujos isotérmicos, dado que las variaciones de temperatura son despreciables, en relación con los cambios de otras propiedades.

Una consecuencia de admitir flujos incompresibles e isotérmicos es considerar también que la viscosidad sea constante, pues ésta propiedad en los fluidos depende principalmente de la temperatura; si la viscosidad es constante, la relación que mantienen los esfuerzos cortantes (producto del movimiento de las partículas del fluido), con la tasa de deformación angular, es lineal, siendo el factor de proporcionalidad la magnitud de la viscosidad absoluta del fluido, esta definición lleva a asumir también que el fluido considerado cumpla también con la ley de Newton para el esfuerzo cortante, de modo que ligado con la suposición de viscosidad constante, esta también el concepto de fluido Newtoniano.

Para las consideraciones presentadas, un flujo turbulento, donde el fluido es considerado incompresible, isotérmico y Newtoniano, la experiencia demuestra que las leyes que rigen el fenómeno son las *ecuaciones de conservación de masa o ecuación de continuidad*, y las *ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento lineal*, más conocidas como las *ecuaciones de Navier – Stokes*; su solución numérica predice acertadamente el comportamiento de fluidos Newtonianos, la notación vectorial del conjunto de ecuaciones es:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \end{cases}$$

Ecuaciones que desarrolladas en cada componente dan como resultado:

---

<sup>2</sup> Mauri, Sebastiano; “Numerical Simulation and Flow Analysis of an Elbow Diffuser”, Thèse pour L’obtention du grade de Docteur és Science, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2002.

<sup>3</sup> No se pretende analizar este fenómeno, dado que el alcance teórico del presente trabajo no cubre estos conceptos.

---

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

Y finalmente empleando la notación indicial, como forma adicional de expresar el conjunto de ecuaciones es:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

### A.2.2. Las ecuaciones de Reynold o Reynold averaged Navier – Stokes equations (RANS)

Conocidas también con el nombre de las *ecuaciones de Navier – Stokes para magnitudes medias temporales* o *Reynold averaged Navier – Stokes equations* (RANS), se restringe a un flujo turbulento, que se caracteriza por ser altamente aleatorio, inestable y tridimensional, esto se resumen en que el flujo consta de muchas y diferentes longitudes de Eddie, lo mismo para las escalas de tiempo consideradas en flujos no permanentes; por tanto describir teóricamente un flujo turbulento es completamente difícil, ya que a menudo el movimiento turbulento contribuye evidentemente el transporte de momentum, calor y masa; esto influye significativamente en la determinación del campo de velocidades.

Se sabe que las ecuaciones de Navier – Stokes junto con las ecuaciones de continuidad pueden predecir las propiedades de cualquier tipo de flujo sea este turbulento o no; a la solución numérica de este sistema de ecuaciones sin emplear ninguna simplificación o artificio se le conoce como *simulación numérica directa* o *direct numerical simulation* (DNS), pero este enfoque presenta ciertos limitantes en

cuanto a su aplicación, los que principalmente están dados por la capacidad de almacenamiento y procesamiento de las computadoras de las que se dispone, esto implica que muchas veces el tamaño de los elementos a considerar en los fenómenos de turbulencia son mucho menores que los elementos más pequeños en la discretización del dominio, lo mismo para las escalas de tiempo; también se tiene el problema de las condiciones de contorno, sobre todo en flujo externo y también en flujo interno, en los que se requiere determinar exactamente las condiciones de contorno, por tanto DNS está restringido a situaciones no muy complejas.

Debido a que el proceso de transporte turbulento no puede ser determinado mediante un método exacto, más bien debe ser aproximado mediante un modelo de turbulencia que incluya información empírica acerca de las cantidades que se transportan; una aproximación son justamente las ecuaciones RANS que descomponen el fenómeno turbulento en un valor promedio y un valor fluctuante, pero introduce una incógnita adicional, los *esfuerzos de Reynold*; las *ecuaciones de Reynold* o *Reynold averaged Navier – Stokes equations* que son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{v}_x = \bar{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{v}_x + \left( \overline{v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x}} + \overline{v_y' \frac{\partial v_x'}{\partial y}} + \overline{v_z' \frac{\partial v_x'}{\partial z}} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{v}_y = \bar{f}_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v}_y + \left( \overline{v_x' \frac{\partial v_y'}{\partial x}} + \overline{v_y' \frac{\partial v_y'}{\partial y}} + \overline{v_z' \frac{\partial v_y'}{\partial z}} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{v}_z = \bar{f}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{v}_z + \left( \overline{v_x' \frac{\partial v_z'}{\partial x}} + \overline{v_y' \frac{\partial v_z'}{\partial y}} + \overline{v_z' \frac{\partial v_z'}{\partial z}} \right) \end{cases}$$

Que en notación vectorial e indicial son respectivamente:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0 \\ \frac{D\bar{\mathbf{V}}}{Dt} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}} + (\bar{\mathbf{V}}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}}' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \overline{v_i' v_j'} \right) \end{cases}$$


---

Donde  $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{V}'$  representa la descomposición del movimiento turbulento en un promedio y su componente fluctuante,  $\rho(\overline{\mathbf{V}' \cdot \nabla})\mathbf{V}'$  o  $\rho\overline{v_i'v_j'}$  son las tensiones de Reynold para un flujo turbulento debido a los efectos fluctuantes de la turbulencia.

### A.2.3. Modelos de Turbulencia

La aproximación mas simple al fenómeno de turbulencia, está basado en el concepto escalar denominado *viscosidad de Eddy*, este concepto relaciona los esfuerzos de Reynold en un flujo turbulento con las componentes primarias del esfuerzo; este enfoque es incompatible con hechos experimentales, porque se ha dejado de lado efectos como la sensibilidad del fenómeno de turbulencia a la estructura, isotropía a esfuerzos normales, entre otros; los que implícitamente son involucrados en la *viscosidad de Eddy*; algunas consecuencias típicas de esta gruesa aproximación del fenómeno de turbulencia son excesiva predicción en el esfuerzo de corte, supresión de la separación a lo largo de superficies curvas, entre otros; en analogía con esfuerzos de flujos laminares, los esfuerzos de Reynold se asumen son proporcionales a los gradientes de la velocidad promedio, según el concepto de viscosidad de Eddy propuesto por *Boussinesq* (1877), por tanto:

$$\rho\overline{v_i'v_j'} = -\mu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k$$

Donde  $\mu_t$  es la viscosidad turbulenta o viscosidad de eddy,  $k$  es la energía cinética turbulenta debido al movimiento de fluctuación,  $\delta_{ij}$  es el delta Kronecker, donde  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , la energía cinética turbulenta se define como

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{u_i' u_j'}} \quad \text{y finalmente la expresión } \mu_t = \rho c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \text{ define la viscosidad de eddy}$$

como proporcional a la energía cinética turbulenta ( $\sim \sqrt{k}$ ) y a la longitud

característica  $\left( \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right)$  y  $c_\mu$  es una constante empírica. La viscosidad de Eddy no es

una propiedad molecular del fluido como lo es la viscosidad absoluta o cinética, pero si depende fuertemente del estado de turbulencia.

## Apéndice B: CÓDIGO DE LOS PROGRAMAS EMPLEADOS EN EL MODELAMIENTO DE LOS CASOS DE REFERENCIA Y ESTUDIO

---

### B.1. CASOS DE REFERENCIA

#### B.1.1. Flujo desarrollado, incompresible y permanente entre dos placas de ancho infinito

##### Recuadro B.1 - Código del programa empleado para resolver el caso de referencia

```
// FLUJO A TRAVÉS DE PLACAS INFINITAS
h:=1; l:=4; // Longitud y altura del rectángulo respectivamente
m:=1; n:=4; // Número de puntos en la longitud y altura respectivamente
u0:=0.1; // Velocidad Máxima

border a(t=0,m){x = -h/2; y = h/2 - t*h/m}
border b(t=0,n){x = -h/2 + t*l/n; y = -h/2}
border c(t=0,m){x = -h/2 + l; y = -h/2 + t*h/m}
border d(t=0,n){x = -h/2 + l - t*l/n; y = h/2}

mesh malla = buildmesh(a(30*m)+b(30*n)+c(30*m)+d(30*n));

// Considera que el flujo evolucionará desde una situación no permanente a una
// situación permanente, por tanto se considera un dt
nu:=0.01; rho:= 1; dt:=0.5; wait:=0;
for i=0 to 50 do {
  solve(malla,u,v,p) with A(i) {
    if (i==0) then {u = u0*(1-(2*y/h)^2)};
    pde(u) u*rho/dt - laplace(u)*nu*rho + dx(p) = convect(u,v,dt,u)*rho/dt;
    on(a) u = u0*(1-(2*y/h)^2);
    on(b,d) u = 0;
    on(c) u = convect(u,v,dt,u);

    pde(v) v*rho/dt - laplace(v)*nu*rho + dy(p) = convect(u,v,dt,v)*rho/dt;
    on(a,b,c,d) v = 0;

    pde(p) p*0.01*dt/rho-laplace(p)*dt/rho+dx(u)+dy(v) = -
int(malla)(dx(u)+dy(v))/int(malla)(1);
    on(b,d) dnu(p) = 0;
    on(c) p = 0;
  };
  plot(u); // Imprime la evolución del campo de velocidades x

  // Calcula la variación de la presión en todo el dominio
  print(int(a)(u*nrmlx),int(c)(u*nrmlx));
  print((int(c)(p)-int(a)(p))/l,-int(a)(p),int(malla)(dx(u)+dy(v)));
};
```

---

```
wait:=1;

// Imprime todos los campos calculados
plot(malla,u); plot(malla,v); plot(malla,p);
```

## B.1.2. Flujo desarrollado, incompresible y permanente entre dos placas de ancho infinito

### Recuadro B.2 - Código del programa para resolver el caso de referencia

```
// FLUJO EXTERNO INCOMPRESIBLE SOBRE UN CILINDRO DE ANCHO INFINITO
h:=4; l:=10; // Longitud y altura del rectángulo respectivamente
m:=4; n:=10; // Número de puntos en la longitud y altura respectivamente
r:=0.5; // Radio del Cilindro

u0:=10; // Velocidad Máxima

border a1(t=0,m){x = -h/2; y = h/2 - t*h/m}
border b1(t=0,n){x = -h/2 + t*l/n; y = -h/2}
border c1(t=0,m){x = -h/2 + l; y = -h/2 + t*h/m}
border d1(t=0,n){x = -h/2 + l - t*l/n; y = h/2}

border a2(t=0,pi){x = r*cos(t); y = r*sin(t)}
border b2(t=pi,2*pi){x = r*cos(t); y = r*sin(t)}

mesh mallal = buildmesh(a1(15*m)+b1(15*n)+c1(15*m)+d1(15*n)+a2(-50)+b2(-50));

nu:=0.0001; rho:= 10; dt:=0.1; wait:=0;
for i=0 to 50 do {
  solve(mallal,u,v,p) with A(i) {
    if (i=0) then {u = u0; p = 0};

    pde(u) u*rho/dt - laplace(u)*nu*rho + dx(p) = convect(u,v,dt,u)*rho/dt;
    on(a1,b1,d1) u = u0;
    on(a2,b2) u = 0;
    on(c1) u = convect(u,v,dt,u);

    pde(v) v*rho/dt - laplace(v)*nu*rho + dy(p) = convect(u,v,dt,v)*rho/dt;
    on(a1,b1,d1,a2,b2) v = 0;
    on(c1) v = convect(u,v,dt,v);

    pde(p) p*0.01*dt/rho-laplace(p)*dt/rho+dx(u)+dy(v)=-
int(mallal)(dx(u)+dy(v))/int(mallal)(1);
    on(b1,d1,a2,b2) dnu(p) = 0;
    on(c1) p = 0;
  };
  plot(mallal,u);
  print(int(a2)(p*nrmlx),int(a2)(p*nrmlly),int(b2)(p*nrmlx),int(b2)(p*nrmlly));
  print(int(a2)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlx),int(a2)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlly));
  print(int(b2)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlx),int(b2)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlly));
};
wait:=1;
plot(mallal,u); plot(mallal,v); plot(mallal,p);
```

## B.2. CASOS DE ESTUDIO

### B.2.1. Modelamiento del flujo en el inyector directriz

#### Recuadro B.3 - Código empleado para la solución del flujo en el inyector

```
// GEOMETRIA DEL INYECTOR
// -----
// Parámetros Geométricos - CALCULADOS - Exportados de Excel provenientes del diseño
```

```

D := 0.2400000000000000; R := 0.1200000000000000;
AB := 0.0800000000000000; BC := 0.0200000000000000;
CD := 0.1200000000000000; BF := 0.1500000000000000;

alpha_i := 0.2617993877991490;
theta_1 := 0.6283185307179590; theta_2 := 0.9424777960769380;

EF := 0.0247660028687339; AN := 0.1158065658823880;
theta_11 := 0.6283185307179590; theta_12 := 0.3896468565686030;
R11 := 0.1500000000000000; R12 := 0.1500000000000000;

GH := 0.0371490043031008; DJ := 0.2523673711402370;
gamma := 0.4061412401651090;
theta_21 := 0.2221772905528490; theta_22 := 0.9424777960769380;
R21 := 0.2071490043031010; R22 := 0.0953765082771506;

Cx := -0.0606771020234221; Cy := -0.1951636338984350;
xR11 := -0.0700000000000000; yR11 := -0.1500000000000000;
xR12 := -0.0947660028687339; yR12 := -0.1641053484861320;
xR21 := -0.0700000000000000; yR21 := -0.1500000000000000;
xR22 := 0.0204258487887000; yR22 := -0.2156982247759730;

HI := 0.0485967582511243; II := 0.0986414236509439; IK = II - HI; n = 4; m = 7;

alpha := theta_12/2;
XY := AB - R12*cos(alpha) - xR12; FY := yR12 + R12*sin(alpha) + BF;

//=====
// Bordes para la malla inyector1, CONSIDERA LONGITUD antes del mismo inyector
// -----
border a1(t=0,BC+2*BF+(2*R11+BC)*theta_11) {
  if (t<BF) then {x = AB; y = -t}
  else if ((t>=BF)*(t<BF+R11*theta_11)) then {
    t1 = t - BF;
    x = xR11 + R11*cos(t1 / R11);
    y = yR11 - R11*sin(t1 / R11)
  }
  else if ((t>=BF+R11*theta_11)*(t<BC+BF+R11*theta_11)) then {
    t2 = t - BF - R11 * theta_11;
    x = xR11 + (R11 + t2) * cos(theta_11);
    y = yR11 - (R11 + t2) * sin(theta_11)
  }
  else if ((t>=BC+BF+R11*theta_11)*(t<BC+BF+(2*R11+BC)*theta_11)) then {
    t3 = t - BC - BF - R11*theta_11;
    x = xR11 + (R11 + BC)*cos(theta_11 - t3 / (R11 + BC));
    y = yR11 - (R11 + BC)*sin(theta_11 - t3 / (R11 + BC))
  }
  else {
    t4 = t - BC - BF - (2*R11 + BC)*theta_11;
    x = AB + BC;
    y = t4 - BF
  }
}
border b1(t=0,BC*pi/2){x = AB + BC/2 + BC*cos(2*t/BC)/2; y = BC*sin(2*t/BC)/2}
border c1(t=0,AB+BC+CD) { x = AB + BC + CD - t; y = D }
border d1(t=0,D+AN+R12*theta_12) {
  if (t<D) then {x = 0; y = D - t}
  else if ((t>=D)*(t<D+AN)) then { x = (t - D)*sin(theta_12); y = -(t -
D)*cos(theta_12) }
  else {
    x = xR12 + R12*cos(theta_12 - (t - D - AN) / R12);
    y = yR12 + R12*sin(theta_12 - (t - D - AN) / R12)
  }
}
border e1(t=0,R*(theta_1+theta_2)) {
  x = Cx + R*cos(alpha_i - t / R);
  y = Cy + R*sin(alpha_i - t / R)
}
border f1(t=0,DJ+IK+R21*theta_21+R22*theta_22+D) {
  if (t<IK) then {
    x = Cx + R*cos(theta_1 + theta_2 - alpha_i) + t*cos(pi/2 - theta_1 - theta_2);
    y = Cy - R*sin(theta_1 + theta_2 - alpha_i) + t*sin(pi/2 - theta_1 - theta_2);
  }
  else if ((t>=IK)*(t<IK+R22*theta_22)) then {
    t5 = t - IK;
    x = xR22 + R22*cos(theta_11 + theta_22 - t5 / R22);
  }
}

```

```

y = yR22 - R22*sin(theta_11 + theta_22 - t5 / R22);
}
else if ((t>=IK+R22*theta_22)*(t<IK+R21*theta_21+R22*theta_22)) then {
t6 = t - IK - R22*theta_22;
x = xR21 + R21*cos(theta_11 - t6 / R21);
y = yR21 - R21*sin(theta_11 - t6 / R21)
}
else if ((t>=IK+R21*theta_21+R22*theta_22)*(t<DJ+IK+R21*theta_21+R22*theta_22)) then
{
t7 = t - IK - R21*theta_21 - R22*theta_22;
x = xR21 + R21*cos(gamma) + t7*sin(gamma);
y = yR21 - R21*sin(gamma) + t7*cos(gamma)
}
else {t8 = t - DJ - IK - R21*theta_21 - R22*theta_22; x = AB + BC + CD; y = t8;}
}

//=====
// Bordes para la malla inyector2, NO CONSIDERA LONGITUD antes del mismo inyector
//-----
border a2(t=0,BC+2*BF+(2*R11+BC)*theta_11) {
if (t<BF) then {x = AB + BC; y = -t}
else if ((t>=BF)*(t<BF+(R11+BC)*theta_11)) then {
t9 = t - BF;
x = xR11 + (R11 + BC)*cos(t9 / (R11 + BC));
y = yR11 - (R11 + BC)*sin(t9 / (R11 + BC))
}
else if ((t>=BF+(R11+BC)*theta_11)*(t<BC+BF+(R11+BC)*theta_11)) then {
t10 = t - BF - (R11 + BC) * theta_11;
x = xR11 + (R11 + BC - t10) * cos(theta_11);
y = yR11 - (R11 + BC - t10) * sin(theta_11)
}
else if ((t>=BC+BF+(R11+BC)*theta_11)*(t<BC+BF+(2*R11+BC)*theta_11)) then {
t11 = t - BC - BF - (R11 + BC)*theta_11;
x = xR11 + R11*cos(theta_11 - t11 / R11);
y = yR11 - R11*sin(theta_11 - t11 / R11)
}
else {
t12 = t - BC - BF - (2*R11 + BC)*theta_11;
x = AB;
y = t12 - BF
}
}
border b2(t=0,AB) { x = AB - t; y = 0 }
border c2(t=0,AN+R12*theta_12) {
if (t<AN) then { x = t*sin(theta_12); y = -t*cos(theta_12) }
else {
x = xR12 + R12*cos(theta_12 - (t - AN) / R12);
y = yR12 + R12*sin(theta_12 - (t - AN) / R12)
}
}
border d2(t=0,R*(theta_1+theta_2)) {
x = Cx + R*cos(alpha_i - t / R);
y = Cy + R*sin(alpha_i - t / R)
}
border e2(t=0,DJ+IK+R21*theta_21+R22*theta_22) {
if (t<IK) then {
x = Cx + R*cos(theta_1 + theta_2 - alpha_i) + t*cos(pi/2 - theta_1 - theta_2);
y = Cy - R*sin(theta_1 + theta_2 - alpha_i) + t*sin(pi/2 - theta_1 - theta_2);
}
else if ((t>=IK)*(t<IK+R22*theta_22)) then {
t13 = t - IK;
x = xR22 + R22*cos(theta_11 + theta_22 - t13 / R22);
y = yR22 - R22*sin(theta_11 + theta_22 - t13 / R22);
}
else if ((t>=IK+R22*theta_22)*(t<IK+R21*theta_21+R22*theta_22)) then {
t14 = t - IK - R22*theta_22;
x = xR21 + R21*cos(theta_11 - t14 / R21);
y = yR21 - R21*sin(theta_11 - t14 / R21)
}
else {
t15 = t - IK - R21*theta_21 - R22*theta_22;
x = xR21 + R21*cos(gamma) + t15*sin(gamma);
y = yR21 - R21*sin(gamma) + t15*cos(gamma)
}
}
border f2(t=0,CD) {x = AB + BC + CD - t; y = 0}

```

```

//=====
// Bordes para la malla visualización, parte del inyector que permite visualizar los
// ángulos del vector velocidad
//-----
border a3(t=0,R11*theta_11+FY+XY+R12*alpha+R*theta_1) {
  if(t<R11*theta_11) then {
    x = xR11 + R11*cos(t/R11 - theta_11); y= yR11 + R11*sin(t/R11 - theta_11);
  }
  else if ((t>=R11*theta_11)*(t<R11*theta_11+FY)) then {
    t16 = t - R11*theta_11;
    x = AB; y = t16 - BF;
  }
  else if ((t>=R11*theta_11+FY)*(t<R11*theta_11+FY+XY)) then {
    t17 = t - R11*theta_11 - FY;
    x = AB - t17; y = FY - BF;
  }
  else if ((t>=R11*theta_11+FY+XY)*(t<R11*theta_11+FY+XY+R12*alpha)) then {
    t18 = t - R11*theta_11 - FY - XY;
    x = xR12 + R12*cos(alpha - t18/R12); y = yR12 + R12*sin(alpha - t18/R12);
  }
  else {
    t19 = t - R11*theta_11 - FY - XY - R12*alpha;
    x = Cx + R*cos(alpha_i - t19/R); y = Cy + R*sin(alpha_i - t19/R);
  }
}
border b3(t=0,R*theta_2+IK+R22*theta_22+GH+BC) {
  if (t<R*theta_2) then {
    x = Cx + R*cos(alpha_i - theta_1 - t/R); y = Cy + R*sin(alpha_i - theta_1 - t/R);
  }
  else if ((t>=R*theta_2)*(t<R*theta_2+IK)) then {
    t20 = t - R*theta_2;
    x = Cx + R*cos(alpha_i - theta_1 - theta_2) + t20; y = Cy + R*sin(alpha_i - theta_1
- theta_2);
  }
  else if ((t>=R*theta_2+IK)*(t<R*theta_2+IK+R22*theta_22)) then {
    t21 = t - R*theta_2 - IK;
    x = xR22 + R22*cos(t21/R22 - theta_11 - theta_22); y = yR22 + R22*sin(t21/R22 -
theta_11 - theta_22);
  }
  else {
    t22 = t - R*theta_2 - IK - R22*theta_22;
    x = xR22 + (R22 - t22)*cos(theta_1); y = yR22 - (R22 - t22)*sin(theta_1);
  }
}
//=====
mesh visual1 = buildmesh(a3(50*n)); mesh visual2 = buildmesh(b3(50*n));
mesh inyector1 = buildmesh(a1(-41*n)+b1(-3*n)+c1(16*n)+d1(33*n)+e1(15*n)+f1(58*n));
mesh inyector2 = buildmesh(a2(65*n)+b2(10*n)+c2(21*n)+d2(23*n)+e2(54*n)+f2(15*n));

v0:=-5; nu:=0.0005; rho:= 1; dt:=0.005; wait:=0;
for i=0 to 50 do {
  solve(inyector1,u,v,p) with A(i) {
    if (i==0) then {u =0; v = 0; p = 0};
    pde(u) u*rho/dt - laplace(u)*nu*rho + dx(p) = convect(u,v,dt,u)*rho/dt;
    on(a1,b1,c1,d1,f1) u = 0;
    on(e1) u = convect(u,v,dt,u);

    pde(v) v*rho/dt - laplace(v)*nu*rho + dy(p) = convect(u,v,dt,v)*rho/dt;
    on(a1,b1,d1,f1) v = 0;
    on(c1) v = v0*(1 - (abs((2*x - (AB+BC+CD)) / (AB+BC+CD)))^m);
    on(e1) v = convect(u,v,dt,v);

    pde(p) p*0.01*dt/rho - laplace(p)*dt/rho + dx(u) + dy(v) = -
int(inyector1)(dx(u)+dy(v))/int(inyector1)(1);
    on(a1,b1,d1,f1) dnu(p) = 0;
    on(e1) p = 0;
  };
  plot(inyector2,v); print(int(b2,f2)(p/rho+v^2/2+9.81*y),
int(d2)(p/rho+u^2/2+v^2/2+9.81*y));
  print(int(b2,f2)((p/rho+(u^2+v^2)/2+9.81*y)*(u*nrmlx+v*nrmlly)),
int(d2)((p/rho+(u^2+v^2)/2+9.81*y)*(u*nrmlx+v*nrmlly)), int(b2,f2)(u*nrmlx+v*nrmlly),
int(d2)(u*nrmlx+v*nrmlly));
};
wait:=1;
plot("iny1_u",inyector1,u); plot("iny1_v",inyector1,v); plot("iny1_p",inyector1,p);

```

```

plot("iny2_u",inyector2,u); plot("iny2_v",inyector2,v); plot("iny2_p",inyector2,p);
plot("iny1_angulo",visual1,atan(u/v)*180/pi);
plot("iny2_angulo",visual2,atan(u/v)*180/pi);
plot("iny1_vadim",visual1,(u^2+v^2)^0.5/v0);
plot("iny2_vadim",visual2,(u^2+v^2)^0.5/v0);
plot(visual,atan(u/v)*180/pi);

```

## B.2.2. Modelamiento del flujo en el rodete de la turbina

### B.2.2.1. Primer efecto

#### Recuadro B.4 - Código empleado para hallar la solución numérica de las ecuaciones gobernantes del flujo a través del rodete - Primer Efecto

```

// GEOMETRIA DEL ALABE EN EL RODETE DE LA TURBINA - PRIMER EFECTO
// -----

// Solución considerando el efecto centrípeto del flujo por rotación del rodete
// Empleado fundamentalmente para RÉGIMEN TURBULENTO por la densidad de malla

// Parámetros Geométricos - CALCULADOS - Exportados de Excel
R:=0.12; R1 = 0.0780657379971006; rho_w:=0.0393531472736618; em:=0.003556;
AA:=0.02; BB:=0.02; n = 6;

beta_1:=0.496190831364113; theta_adm:=pi/2; theta_I:=pi/5; theta_II:=3*pi/10;
delta:=0.250945908782969; delta_1:=0.0328901909530253; delta_2:=0.0298053788877943;
gamma:=0.6627757021068760; gamma_1:=0.0916601316209142; gamma_2:=0.0771523864508115;

//=====
// Borde de rodete de la turbina - I efecto
// -----
omega:=pi/12; Ax:=R*cos(omega); Ay:=R*sin(omega);
Cx:=Ax - rho_w*cos(omega - beta_1); Cy:=Ay - rho_w*sin(omega - beta_1);

border a0(t=0,delta_2*R+(2*gamma-gamma_2)*(rho_w+em/2)+em/2) {
  if (t<delta_2*R) then {x = R*cos(omega - t/R); y = R*sin(omega - t/R); }
  else if ((t>=delta_2*R)*(t<delta_2*R+(2*gamma-gamma_2)*(rho_w+em/2))) then {
    t1 = t - delta_2*R;
    x = Cx + (rho_w + em/2)*cos(omega - beta_1 - gamma_2 - t1/(rho_w + em/2));
    y = Cy + (rho_w + em/2)*sin(omega - beta_1 - gamma_2 - t1/(rho_w + em/2));
  }
  else {
    t2 = t - delta_2*R - (2*gamma - gamma_2)*(rho_w + em/2);
    x = Cx + (rho_w + em/2)*cos(omega - beta_1 - 2*gamma);
    y = Cy + (rho_w + em/2)*sin(omega - beta_1 - 2*gamma);
  }
}

border b(t=0,2*BB+theta_adm*(R1-BB)) {
  if (t<BB) then { x = (R1 - t)*cos(omega - delta); y = (R1 - t)*sin(omega - delta); }
  else if((t>=BB)*(t<BB+theta_adm*(R1-BB))) then {
    t3 = t - BB;
    x = (R1 - BB)*cos(omega - delta - t3/(R1 - BB));
    y = (R1 - BB)*sin(omega - delta - t3/(R1 - BB));
  }
  else {
    t4 = t - BB - theta_adm*(R1 - BB);
    x = (R1 - BB + t4)*cos(omega - delta - theta_adm);
    y = (R1 - BB + t4)*sin(omega - delta - theta_adm);
  }
}

border an(t=0,em/2+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+delta_1*R) {
  if (t<em/2) then {
    x = (R*cos(omega - theta_adm) - rho_w*cos(omega - theta_adm - beta_1)) + (rho_w -
t)*cos(omega - theta_adm - beta_1 - 2*gamma);
    y = (R*sin(omega - theta_adm) - rho_w*sin(omega - theta_adm - beta_1)) + (rho_w -
t)*sin(omega - theta_adm - beta_1 - 2*gamma);
  }
}

```

```

else if ((t>=em/2)*(t<em/2+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2))) then {
    t5 = t - em/2;
    x = (R*cos(omega - theta_adm) - rho_w*cos(omega - theta_adm - beta_1)) + (rho_w -
em/2)*cos(omega - theta_adm - beta_1 - 2*gamma + t5/(rho_w - em/2));
    y = (R*sin(omega - theta_adm) - rho_w*sin(omega - theta_adm - beta_1)) + (rho_w -
em/2)*sin(omega - theta_adm - beta_1 - 2*gamma + t5/(rho_w - em/2));
}
else {
    t6 = t - em/2 - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2);
    x = R*cos(omega - theta_adm + delta_1 - t6/R);
    y = R*sin(omega - theta_adm + delta_1 - t6/R);
}
}

border c1(t=0,AA+theta_II*(R+AA)) {
    if(t<AA) then { x = (R + t)*cos(omega - theta_adm); y = (R + t)*sin(omega -
theta_adm); }
    else {
        x = (R + AA)*cos(omega - theta_adm + (t - AA)/(R + AA));
        y = (R + AA)*sin(omega - theta_adm + (t - AA)/(R + AA));
    }
}

border c2(t=0,AA+theta_I*(R+AA)) {
    if(t<theta_I*(R+AA)) then {
        x = (R + AA)*cos(omega - theta_adm + theta_II + t/(R + AA));
        y = (R + AA)*sin(omega - theta_adm + theta_II + t/(R + AA));
    }
    else {
        x = (R + AA - (t - theta_I*(R + AA)))*cos(omega);
        y = (R + AA - (t - theta_I*(R + AA)))*sin(omega);
    }
}

//=====
// Álabas dentro del rodete - Álabe 2 de 5
// -----
omega_1:=omega - theta_adm/4;
Cx_1:=R*cos(omega_1) - rho_w*cos(omega_1 - beta_1);
Cy_1:=R*sin(omega_1) - rho_w*sin(omega_1 - beta_1);

border a1(t=0,(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em+(2*gamma-
gamma_2)*(rho_w+em/2)) {
    if (t<(delta_1+delta_2)*R) then {
        x = R*cos(omega_1 - delta_2 + t/R);
        y = R*sin(omega_1 - delta_2 + t/R);
    }
    else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R)*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))) then {
        t9 = t - (delta_1 + delta_2)*R;
        x = Cx_1 + (rho_w - em/2)*cos(omega_1 - beta_1 + gamma_1 - t9/(rho_w - em/2));
        y = Cy_1 + (rho_w - em/2)*sin(omega_1 - beta_1 + gamma_1 - t9/(rho_w - em/2));
    }
    else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em)) then {
        t10 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2);
        x = Cx_1 + (rho_w - em/2 + t10)*cos(omega_1 - beta_1 - 2*gamma);
        y = Cy_1 + (rho_w - em/2 + t10)*sin(omega_1 - beta_1 - 2*gamma);
    }
    else {
        t11 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2) - em;
        x = Cx_1 + (rho_w + em/2)*cos(omega_1 - beta_1 - 2*gamma + t11/(rho_w + em/2));
        y = Cy_1 + (rho_w + em/2)*sin(omega_1 - beta_1 - 2*gamma + t11/(rho_w + em/2));
    }
}

//=====
// Álabas dentro del rodete - Álabe 3 de 5
// -----
omega_2:=omega_1 - theta_adm/4;
Cx_2:=R*cos(omega_2) - rho_w*cos(omega_2 - beta_1);
Cy_2:=R*sin(omega_2) - rho_w*sin(omega_2 - beta_1);

border a2(t=0,(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em+(2*gamma-
gamma_2)*(rho_w+em/2)) {
    if (t<(delta_1+delta_2)*R) then {

```

```

    x = R*cos(omega_2 - delta_2 + t/R);
    y = R*sin(omega_2 - delta_2 + t/R);
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R)*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))) then {
    t12 = t - (delta_1 + delta_2)*R;
    x = Cx_2 + (rho_w - em/2)*cos(omega_2 - beta_1 + gamma_1 - t12/(rho_w - em/2));
    y = Cy_2 + (rho_w - em/2)*sin(omega_2 - beta_1 + gamma_1 - t12/(rho_w - em/2));
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em)) then {
    t13 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2);
    x = Cx_2 + (rho_w - em/2 + t13)*cos(omega_2 - beta_1 - 2*gamma);
    y = Cy_2 + (rho_w - em/2 + t13)*sin(omega_2 - beta_1 - 2*gamma);
  }
  else {
    t14 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2) - em;
    x = Cx_2 + (rho_w + em/2)*cos(omega_2 - beta_1 - 2*gamma + t14/(rho_w + em/2));
    y = Cy_2 + (rho_w + em/2)*sin(omega_2 - beta_1 - 2*gamma + t14/(rho_w + em/2));
  }
}

//=====
// Álabes dentro del rodete - Álabe 4 de 5
// -----
omega_3:=omega_2 - theta_adm/4;
Cx_3:=R*cos(omega_3) - rho_w*cos(omega_3 - beta_1);
Cy_3:=R*sin(omega_3) - rho_w*sin(omega_3 - beta_1);

border a3(t=0,(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em+(2*gamma-
gamma_2)*(rho_w+em/2)) {
  if (t<(delta_1+delta_2)*R) then {
    x = R*cos(omega_3 - delta_2 + t/R);
    y = R*sin(omega_3 - delta_2 + t/R);
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R)*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))) then {
    t15 = t - (delta_1 + delta_2)*R;
    x = Cx_3 + (rho_w - em/2)*cos(omega_3 - beta_1 + gamma_1 - t15/(rho_w - em/2));
    y = Cy_3 + (rho_w - em/2)*sin(omega_3 - beta_1 + gamma_1 - t15/(rho_w - em/2));
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em)) then {
    t16 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2);
    x = Cx_3 + (rho_w - em/2 + t16)*cos(omega_3 - beta_1 - 2*gamma);
    y = Cy_3 + (rho_w - em/2 + t16)*sin(omega_3 - beta_1 - 2*gamma);
  }
  else {
    t17 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2) - em;
    x = Cx_3 + (rho_w + em/2)*cos(omega_3 - beta_1 - 2*gamma + t17/(rho_w + em/2));
    y = Cy_3 + (rho_w + em/2)*sin(omega_3 - beta_1 - 2*gamma + t17/(rho_w + em/2));
  }
}

//=====
// Malla: alabes --> a0, a1, a2, a3, an; pared --> b, c
// -----
mesh rodete = buildmesh(a0(10*n)+b(23*n)+an(10*n)+c1(28*n)+c2(18*n)+a1(-20*n)+a2(-
20*n)+a3(-20*n));

//=====
// Proceso de solución de ecuaciones diferenciales
// -----
Vmax:=10; w:=50; nu:=0.001; rho:= 1; dt:=0.0005; wait:=0;
for i=0 to 50 do {
  solve(rodete,u,v,p) with A(i) {
    pde(u) u*rho/dt - laplace(u)*nu*rho + dx(p) = convect(u,v,dt,u)*rho/dt - w^2*x ;
    on(a0,a1,a2,a3,an) u = 0;
    on(b) u = convect(u,v,dt,u);
    on(c1) u = -w*R*cos(pi/2-atan(y/x)) + Vmax*(-1.183757641842700*(atan(y/x))^4 +
1.319855452557150*(atan(y/x))^3 + 5.564910059424470*(atan(y/x))^2 +
2.651603868076690*atan(y/x) + 0.331968646752621)*cos(-0.355454289150359*(atan(y/x))^2
- 1.548943146774200*atan(y/x) + 1.703667616850990);
    on(c2) u = -w*R*cos(pi/2-atan(y/x)) + Vmax*(-7.810303054104830*(atan(y/x))^2 -
0.621405923322787*atan(y/x) + 0.915112835365675)*cos(0.993506998623843*(atan(y/x))^2
- 0.864500440313163*atan(y/x) + 1.729692628273570);
  }
}

```

```

pde(v) v*rho/dt - laplace(v)*nu*rho + dy(p) = convect(u,v,dt,v)*rho/dt - w^2*y;
on(a0,a1,a2,a3,an) v = 0;
on(b) v = convect(u,v,dt,v);
on(c1) v = w*R*sin(pi/2-atan(y/x)) - Vmax*(-1.183757641842700*(atan(y/x))^4 +
1.319855452557150*(atan(y/x))^3 + 5.564910059424470*(atan(y/x))^2 +
2.651603868076690*atan(y/x) + 0.331968646752621)*sin(-0.355454289150359*(atan(y/x))^2
- 1.548943146774200*atan(y/x) + 1.703667616850990);
on(c2) v = w*R*sin(pi/2-atan(y/x)) - Vmax*(-7.810303054104830*(atan(y/x))^2 -
0.621405923322787*atan(y/x) + 0.915112835365675)*sin(0.993506998623843*(atan(y/x))^2
- 0.864500440313163*atan(y/x) + 1.729692628273570);

pde(p) p*0.01*dt/rho - laplace(p)*dt/rho + dx(u) + dy(v) = -
int(rodete)(dx(u)+dy(v))/int(rodete)(1);
on(a0,a1,a2,a3,an) dnu(p) = 0;
on(b) p = 0;
};
plot(rodete,u);
print(int(c1,c2)(u*nrmlx+v*nrmlly),int(b)(u*nrmlx+v*nrmlly));
print(int(c1,c2)((p/rho + (u^2+v^2)/2)*(u*nrmlx+v*nrmlly)*rho),int(b)((p/rho +
(u^2+v^2)/2)*(u*nrmlx+v*nrmlly)*rho));
print(int(a1)(y*p*nrmlx), int(a2)(y*p*nrmlx), int(a3)(y*p*nrmlx));
print(int(a1)(x*p*nrmlly), int(a2)(x*p*nrmlly), int(a3)(x*p*nrmlly));
print(int(a1)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlly*y), int(a2)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlly*y),
int(a3)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlly*y));
print(int(a1)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlx*x), int(a2)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlx*x),
int(a3)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlx*x));
};

wait:=1;
plot("rodete_u",rodete,u); plot("rodete_v",rodete,v); plot("rodete_p",rodete,p);
plot("rodete_ang",rodete,atan(v/u)*180/pi); plot("rodete_vel",rodete,(u^2+v^2)^0.5);
print(int(b)(atan(v/u))/pi/0.06*180/pi, int(b)((u^2+v^2)^0.5)/pi/0.06);

```

### B.2.2.2. Segundo efecto

#### Recuadro B.5 - Código empleado para hallar la solución numérica de las ecuaciones gobernantes del flujo a través del rodete - Segundo Efecto

```

// GEOMETRIA DEL ALABE EN EL RODETE DE LA TURBINA - SEGUNDO EFECTO
// -----

// Solución considerando el efecto centrípeto del flujo por rotación del rodete
// Empleado fundamentalmente para régimen laminar por la densidad de malla

// Parámetros Geométricos - CALCULADOS - Exportados de Excel
R:=0.12; R1 = 0.0780657379971006; rho_w:=0.0393531472736618; em:=0.003556;
AA:=0.02; BB:=0.02; n = 5;

beta_1:=0.496190831364113; theta_adm:=pi/2; beta_00:=pi/15; alpha_i:=pi/12;
delta:=0.250945908782969; delta_1:=0.0328901909530253; delta_2:=0.0298053788877943;
gamma:=0.662775702106876; gamma_1:=0.0916601316209142; gamma_2:=0.0771523864508115;

//=====
// Borde de rodete de la turbina - II efecto
// -----
omega:=pi + theta_adm + 2*delta - alpha_i - 2*beta_00; Ax:=R*cos(omega);
Ay:=R*sin(omega);
Cx:=Ax - rho_w*cos(omega - beta_1); Cy:=Ay - rho_w*sin(omega - beta_1);

border a0(t=0,delta_2*R+(2*gamma-gamma_2)*(rho_w+em/2)+em/2) {
  if (t<delta_2*R) then {x = R*cos(omega - t/R); y = R*sin(omega - t/R); }
  else if ((t>=delta_2*R)*(t<delta_2*R+(2*gamma-gamma_2)*(rho_w+em/2))) then {
    t1 = t - delta_2*R;
    x = Cx + (rho_w + em/2)*cos(omega - beta_1 - gamma_2 - t1/(rho_w + em/2));
    y = Cy + (rho_w + em/2)*sin(omega - beta_1 - gamma_2 - t1/(rho_w + em/2));
  }
  else {
    t2 = t - delta_2*R - (2*gamma - gamma_2)*(rho_w + em/2);
    x = Cx + (rho_w + em/2 - t2)*cos(omega - beta_1 - 2*gamma);
    y = Cy + (rho_w + em/2 - t2)*sin(omega - beta_1 - 2*gamma);
  }
}

```

```

}
}
border b(t=0,2*BB+theta_adm*(R1-BB)) {
  if (t<BB) then { x = (R1 - t)*cos(omega - delta); y = (R1 - t)*sin(omega - delta);
}
  else if((t>=BB)*(t<BB+theta_adm*(R1-BB))) then {
    t3 = t - BB;
    x = (R1 - BB)*cos(omega - delta - t3/(R1 - BB));
    y = (R1 - BB)*sin(omega - delta - t3/(R1 - BB));
  }
  else {
    t4 = t - BB - theta_adm*(R1 - BB);
    x = (R1 - BB + t4)*cos(omega - delta - theta_adm);
    y = (R1 - BB + t4)*sin(omega - delta - theta_adm);
  }
}
}

border an(t=0,em/2+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+delta_1*R) {
  if (t<em/2) then {
    x = (R*cos(omega - theta_adm) - rho_w*cos(omega - theta_adm - beta_1)) + (rho_w -
t)*cos(omega - theta_adm - beta_1 - 2*gamma);
    y = (R*sin(omega - theta_adm) - rho_w*sin(omega - theta_adm - beta_1)) + (rho_w -
t)*sin(omega - theta_adm - beta_1 - 2*gamma);
  }
  else if ((t>=em/2)*(t<em/2+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2))) then {
    t5 = t - em/2;
    x = (R*cos(omega - theta_adm) - rho_w*cos(omega - theta_adm - beta_1)) + (rho_w -
em/2)*cos(omega - theta_adm - beta_1 - 2*gamma + t5/(rho_w - em/2));
    y = (R*sin(omega - theta_adm) - rho_w*sin(omega - theta_adm - beta_1)) + (rho_w -
em/2)*sin(omega - theta_adm - beta_1 - 2*gamma + t5/(rho_w - em/2));
  }
  else {
    t6 = t - em/2 - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2);
    x = R*cos(omega - theta_adm + delta_1 - t6/R);
    y = R*sin(omega - theta_adm + delta_1 - t6/R);
  }
}
}

border c(t=0,2*AA+theta_adm*(R+AA)) {
  if(t<AA) then { x = (R + t)*cos(omega - theta_adm); y = (R + t)*sin(omega -
theta_adm); }
  else if((t>=AA)*(t<AA+theta_adm*(R+AA))) then {
    t7 = t - AA;
    x = (R + AA)*cos(omega - theta_adm + t7/(R + AA));
    y = (R + AA)*sin(omega - theta_adm + t7/(R + AA));
  }
  else {
    t8 = t - AA - theta_adm*(R + AA);
    x = (R + AA - t8)*cos(omega);
    y = (R + AA - t8)*sin(omega);
  }
}
}

//=====
// Álabas dentro del rodete - Álabe 2 de 5
// -----
omega_1:=omega - theta_adm/4;
Cx_1:=R*cos(omega_1) - rho_w*cos(omega_1 - beta_1);
Cy_1:=R*sin(omega_1) - rho_w*sin(omega_1 - beta_1);

border al(t=0,(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em+(2*gamma-
gamma_2)*(rho_w+em/2)) {
  if (t<(delta_1+delta_2)*R) then {
    x = R*cos(omega_1 - delta_2 + t/R);
    y = R*sin(omega_1 - delta_2 + t/R);
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R)*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))) then {
    t9 = t - (delta_1 + delta_2)*R;
    x = Cx_1 + (rho_w - em/2)*cos(omega_1 - beta_1 + gamma_1 - t9/(rho_w - em/2));
    y = Cy_1 + (rho_w - em/2)*sin(omega_1 - beta_1 + gamma_1 - t9/(rho_w - em/2));
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em)) then {
    t10 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2);

```

```

    x = Cx_1 + (rho_w - em/2 + t10)*cos(omega_1 - beta_1 - 2*gamma);
    y = Cy_1 + (rho_w - em/2 + t10)*sin(omega_1 - beta_1 - 2*gamma);
  }
  else {
    t11 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2) - em;
    x = Cx_1 + (rho_w + em/2)*cos(omega_1 - beta_1 - 2*gamma + t11/(rho_w + em/2));
    y = Cy_1 + (rho_w + em/2)*sin(omega_1 - beta_1 - 2*gamma + t11/(rho_w + em/2));
  }
}

//=====
// Álabes dentro del rodete - Álabes 3 de 5
// -----
omega_2:=omega_1 - theta_adm/4;
Cx_2:=R*cos(omega_2) - rho_w*cos(omega_2 - beta_1);
Cy_2:=R*sin(omega_2) - rho_w*sin(omega_2 - beta_1);

border a2(t=0,(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em+(2*gamma-
gamma_2)*(rho_w+em/2)) {
  if (t<(delta_1+delta_2)*R) then {
    x = R*cos(omega_2 - delta_2 + t/R);
    y = R*sin(omega_2 - delta_2 + t/R);
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R)*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))) then {
    t12 = t - (delta_1 + delta_2)*R;
    x = Cx_2 + (rho_w - em/2)*cos(omega_2 - beta_1 + gamma_1 - t12/(rho_w - em/2));
    y = Cy_2 + (rho_w - em/2)*sin(omega_2 - beta_1 + gamma_1 - t12/(rho_w - em/2));
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em)) then {
    t13 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2);
    x = Cx_2 + (rho_w - em/2 + t13)*cos(omega_2 - beta_1 - 2*gamma);
    y = Cy_2 + (rho_w - em/2 + t13)*sin(omega_2 - beta_1 - 2*gamma);
  }
  else {
    t14 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2) - em;
    x = Cx_2 + (rho_w + em/2)*cos(omega_2 - beta_1 - 2*gamma + t14/(rho_w + em/2));
    y = Cy_2 + (rho_w + em/2)*sin(omega_2 - beta_1 - 2*gamma + t14/(rho_w + em/2));
  }
}

//=====
// Álabes dentro del rodete - Álabes 4 de 5
// -----
omega_3:=omega_2 - theta_adm/4;
Cx_3:=R*cos(omega_3) - rho_w*cos(omega_3 - beta_1);
Cy_3:=R*sin(omega_3) - rho_w*sin(omega_3 - beta_1);

border a3(t=0,(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em+(2*gamma-
gamma_2)*(rho_w+em/2)) {
  if (t<(delta_1+delta_2)*R) then {
    x = R*cos(omega_3 - delta_2 + t/R);
    y = R*sin(omega_3 - delta_2 + t/R);
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R)*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))) then {
    t15 = t - (delta_1 + delta_2)*R;
    x = Cx_3 + (rho_w - em/2)*cos(omega_3 - beta_1 + gamma_1 - t15/(rho_w - em/2));
    y = Cy_3 + (rho_w - em/2)*sin(omega_3 - beta_1 + gamma_1 - t15/(rho_w - em/2));
  }
  else if ((t>=(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-
em/2))*(t<(delta_1+delta_2)*R+(2*gamma+gamma_1)*(rho_w-em/2)+em)) then {
    t16 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2);
    x = Cx_3 + (rho_w - em/2 + t16)*cos(omega_3 - beta_1 - 2*gamma);
    y = Cy_3 + (rho_w - em/2 + t16)*sin(omega_3 - beta_1 - 2*gamma);
  }
  else {
    t17 = t - (delta_1 + delta_2)*R - (2*gamma + gamma_1)*(rho_w - em/2) - em;
    x = Cx_3 + (rho_w + em/2)*cos(omega_3 - beta_1 - 2*gamma + t17/(rho_w + em/2));
    y = Cy_3 + (rho_w + em/2)*sin(omega_3 - beta_1 - 2*gamma + t17/(rho_w + em/2));
  }
}

//=====
// Malla: alabes --> a0, a1, a2, a3, an; pared --> b, c

```

```

// -----
mesh rodete = buildmesh(a0(10*n)+b(23*n)+an(10*n)+c(46*n)+a1(-20*n)+a2(-20*n)+a3(-
20*n));

//=====
// Proceso de solución de ecuaciones diferenciales
// -----
Vmax:=150; Vmed:=0.28*Vmax; w:=125; nu:=0.1; rho:= 1; dt:=0.0005; wait:=0;
for i=0 to 50 do {
  solve(rodete,u,v,p) with A(i) {
    pde(u) u*rho/dt - laplace(u)*nu*rho + dx(p) = convect(u,v,dt,u)*rho/dt;
    on(a0,a1,a2,a3,an) u = 0;
    on(b) u = -Vmed*cos(beta_00);
    on(c) u = convect(u,v,dt,u);

    pde(v) v*rho/dt - laplace(v)*nu*rho + dy(p) = convect(u,v,dt,v)*rho/dt;
    on(a0,a1,a2,a3,an) v = 0;
    on(b) v = Vmed*sin(beta_00);
    on(c) v = convect(u,v,dt,v);

    pde(p) p*0.01*dt/rho - laplace(p)*dt/rho + dx(u) + dy(v) = -
int(rodete)(dx(u)+dy(v))/int(rodete)(1);
    on(a0,a1,a2,a3,an) dnu(p) = 0;
    on(c) p = 0;
  };
  plot(rodete,v);
  print(int(c)(u*nrmlx+v*nrmlly),int(b)(u*nrmlx+v*nrmlly));
  print(int(c)((p/rho + (u^2+v^2)/2)*(u*nrmlx+v*nrmlly)*rho),int(b)((p/rho +
(u^2+v^2)/2)*(u*nrmlx+v*nrmlly)*rho));
  print(int(a1)(y*p*nrmlx), int(a2)(y*p*nrmlx), int(a3)(y*p*nrmlx));
  print(int(a1)(x*p*nrmlly), int(a2)(x*p*nrmlly), int(a3)(x*p*nrmlly));
  print(int(a1)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlly*y), int(a2)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlly*y),
int(a3)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlly*y));
  print(int(a1)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlx*x), int(a2)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlx*x),
int(a3)((dx(v)+dy(u))*nu*rho*nrmlx*x));
};
wait:=1; plot(rodete,u); plot(rodete,v); plot(rodete,p);

```