

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA



**“ANÁLISIS COMPARATIVO DEL CONTROL
VIBRACIONAL POR TÉCNICAS DE CONTROL
ÓPTIMO Y CONTROL ROBUSTO”**

TESIS

PARA OPTAR POR EL TÍTULO PROFESIONAL DE :

INGENIERO MECÁNICO

ELIZABETH ROXANA VILLOTA CERNA

PROMOCIÓN 1998-II

LIMA - PERÚ

2002

A mi familia, por su amor y comprensión.

Índice general

Índice de cuadros	XII
Índice de figuras	XIII
Índice de símbolos	XVIII
PRÓLOGO	1
Capítulo 1. INTRODUCCIÓN	4
1.1. Control de vibraciones	5
1.1.1. Control pasivo de vibraciones	7
1.1.2. Control activo de vibraciones	9
1.1.3. Control activo-pasivo de vibraciones	11
1.2. Leyes de control	11
1.2.1. Control óptimo	12
1.2.2. Control robusto	13
1.3. Revisión bibliográfica	15
1.4. Objetivo de la tesis	23
Capítulo 2. MODELADO DE LA VIGA FLEXIBLE	25
2.1. Modelo matemático del sistema	26

2.2.	Modelo adimensional del sistema	30
2.2.1.	Ecuaciones dimensionales	30
2.2.2.	Ecuaciones adimensionales	30
2.2.3.	Grupo adimensional	32
2.3.	Representación espacio de estados	32
Capítulo 3. TEORÍA BÁSICA DE CONTROL		34
3.1.	Diseño de sistemas de control	35
3.2.	El problema de control	36
3.3.	Control por realimentación	37
3.3.1.	Controlador de un grado de libertad (1-GL)	38
3.3.2.	Controlador de dos grados de libertad (2-GL)	41
3.4.	Formulación general del problema de control	42
3.4.1.	Obtención de la planta generalizada P	42
3.4.2.	Configuración general del problema de control	44
3.4.3.	Diseño del control: incluyendo ponderaciones en P	45
3.4.4.	Modelado de la incerteza	47
3.4.5.	Configuración general del problema de control incluyendo modelo de incerteza	49
3.5.	Especificaciones de diseño	51
3.5.1.	Realizabilidad y estabilidad en lazo cerrado	52
3.5.2.	Especificaciones de desempeño	54
3.5.3.	Especificaciones de robustez	62
Capítulo 4. TÉCNICAS DE DISEÑO DE CONTROLADORES		75
4.0.4.	Diseño de controladores para estabilidad nominal	77

4.0.5.	Diseño de controladores para desempeño nominal	78
4.0.6.	Estabilidad robusta y desempeño robusto	79
4.0.7.	Estabilidad robusta y desempeño óptimo	81
4.1.	Control óptimo \mathcal{H}_2	83
4.1.1.	Introducción al regulador cuadrático lineal (LQR)	83
4.1.2.	Problema de control \mathcal{H}_2	87
4.1.3.	Solución del problema de control \mathcal{H}_2	90
4.2.	Control robusto \mathcal{H}_∞	91
4.2.1.	Problema de control \mathcal{H}_∞	92
4.2.2.	Solución del problema de control \mathcal{H}_∞	93
4.3.	Control óptimo robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	95
4.3.1.	Control óptimo \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia	96
4.3.2.	Robustez en estabilidad \mathcal{H}_∞	104
4.3.3.	Formulación del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	105
4.3.4.	Solución del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	106
4.3.5.	Aproximación usando métodos directos	110
Capítulo 5. SISTEMA CONTROLADO		113
5.1.	Viga flexible para control	114
5.1.1.	Modelo adimensional de la viga flexible	115
5.1.2.	Plantas nominales y plantas residuales	117
5.2.	Especificaciones de diseño	122
5.2.1.	Especificaciones de desempeño	122
5.2.2.	Especificaciones de estabilidad	124
5.3.	Sistema controlado	129

5.3.1. Control \mathcal{H}_2	131
5.3.2. Control \mathcal{H}_∞	133
5.3.3. Control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	139
5.3.4. Simulaciones	144
Capítulo 6. RESULTADOS	145
6.1. Evaluación de los métodos de control	145
6.2. Evaluación del desempeño	149
6.2.1. Evaluación de la salida controlada en el dominio de la frecuencia	149
6.2.2. Evaluación de la señal de control en el dominio de la frecuencia	153
6.2.3. Evaluación de la salida controlada y la señal de control en el dominio del tiempo	154
6.3. Evaluación de la estabilidad	157
6.3.1. Evaluación de la estabilidad robusta	157
6.4. Evaluación del desempeño/estabilidad	158
6.5. Evaluación del controlador	159
CONCLUSIONES	162
6.1. Conclusiones	163
6.2. Trabajo futuro	165
Bibliografía	166
APÉNDICE	171
Apéndice A. BASE MATEMÁTICA	172
A.1. Conceptos básicos en análisis funcional	172

A.2. Teoría de operadores	177
A.2.1. Conceptos fundamentales	177
A.2.2. Operadores limitados	178
A.2.3. Análisis complejo y operadores	179
Apéndice B. SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES	181
B.1. Descripción de sistemas dinámicos lineales	181
B.2. Controlabilidad y observabilidad	182
B.2.1. Controlabilidad	182
B.2.2. Estabilizabilidad	183
B.2.3. Observabilidad	184
B.2.4. Detectabilidad	185
B.3. Observadores de estado	186
Apéndice C. TEOREMAS USADOS EN EL PROBLEMA DE CONTROL $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	188
C.1. Consideraciones	188
C.1.1. Consideración 1	188
C.1.2. Consideración 2	188
C.1.3. Consideración 3	189
C.1.4. Consideración 4	189
C.2. Definiciones	189
C.2.1. Definición 1	189
C.2.2. Definición 2	189
C.2.3. Definición 3	190
C.3. Lemas	190

C.3.1. Lema 1	190
C.3.2. Lema 2	190
C.4. Teoremas	191
C.4.1. Teorema 1	191
C.4.2. Teorema 2	192
C.4.3. Teorema 3	192
C.4.4. Teorema 4	193
C.4.5. Teorema 5	193
C.4.6. Teorema 6	193
C.4.7. Teorema 7	194
C.4.8. Teorema 8	195
C.4.9. Teorema 9	195
Apéndice D. LEYES DE ESCALAMIENTO	196
D.1. Controlador	197
Apéndice E. ALGORITMOS PARA EL PROBLEMA DE CONTROL $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	199
E.1. Cálculos previos	199
E.1.1. Inversa	199
E.1.2. Conjugada compleja	200
E.1.3. Cambio de base	200
E.1.4. Multiplicación (conexión en serie)	200
E.1.5. Suma (conexión en paralelo)	200
E.1.6. Producto interno	200
E.1.7. Introducción de un cero	201

E.1.8.	Representación factorización coprima	201
E.1.9.	Factorización espectral	202
E.1.10.	Factorización inner-outer	202
E.1.11.	Norma \mathcal{H}_2	202
E.1.12.	Norma de Hankel	203
E.1.13.	Norma \mathcal{H}_∞	204
E.1.14.	Reducción del orden de modelos	205
E.2.	Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	205
E.2.1.	Reparametrización	207
E.2.2.	Aproximación por expansión en base pre-establecida (EBPE)	209
E.2.3.	Aproximación por expansión en base optimizada (EBO)	210
E.2.4.	Gradientes y subgradientes	211

Apéndice F. CONTROL DE UN SISTEMA DE POSICIONAMIENTO MULTIDIMENSIONAL CON VALIDACIÓN EXPERIMENTAL **219**

F.1.	Sistema de posicionamiento multidimensional (MPS)	220
F.2.	Modelado del MPS	221
F.2.1.	Modelo Linealizado	225
F.2.2.	Estructura del sistema de instrumentación	225
F.2.3.	Sensores y actuadores	226
F.2.4.	Validación del modelo e identificación del MPS	228
F.2.5.	Modelo de incerteza	229
F.3.	Diseño del controlador	230
F.4.	Simulaciones numéricas y resultados experimentales	232

F.4.1. Respuesta del sistema controlado en el dominio de la frecuencia	232
F.4.2. Respuesta del sistema controlado en el dominio del tiempo	233
F.5. Conclusiones	234

Índice de cuadros

5.1. Parámetros físicos de la viga flexible	114
5.2. Posiciones del sensor, del actuador y de la entrada del disturbio .	115
5.3. Grupo adimensional	115
5.4. Posiciones adimensionales del sensor, actuador y entrada del disturbio	116
5.5. Valores de los modos usados en la ecuación espacio de estados adimensional	117
5.6. Polos y ceros de las plantas nominales	119
5.7. Polos y ceros de las plantas residuales	121
5.8. Valores de las incertezas paramétricas	127
6.1. Factores de amortiguamiento de los modos estructurales	150

Índice de figuras

1.1. Control pasivo usando alteración de la geometría	8
1.2. Control pasivo usando tratamientos para amortiguamiento	8
1.3. Control pasivo usando aislamiento	9
1.4. Control pasivo usando absorvedores	9
1.5. Control activo de vibraciones	10
1.6. Viga flexible simplemente apoyada con un sensor y un actuador	24
2.1. Configuración de la viga simplemente apoyada	27
2.2. Primeros tres modos de vibración de la viga simplemente apoyada	29
3.1. Diagrama de procesos del diseño del sistema de control	35
3.2. Controlador de un grado de libertad (1-GL)	38
3.3. Controlador de dos grados de libertad (2-GL)	41
3.4. Configuración general de un sistema controlado sin modelo de incertezas	42
3.5. Representación equivalente del controlador de un grado de libertad	44
3.6. Configuración general de un sistema controlado sin modelo de incertezas incluyendo ponderaciones	45
3.7. Diagrama de bloques correspondiente a $z = Nw$ en (3.20)	47
3.8. Configuración general de un sistema controlado con modelo de incertezas	49

3.9. Características de la respuesta en lazo cerrado para una función escalón unitario como señal de referencia	56
3.10. ϕ_{ad} es la mayor frecuencia para la que la función de transferencia del disturbio a la variable controlada, N_{ed} , no es mayor que -30dB	59
3.11. Configuración general de un sistema controlado usando el lazo de desempeño de Doyle que conecta una realimentación Δ^{des} de \bar{z} a \bar{w} .	74
4.1. Configuración del sistema controlado para una análisis de estabilidad robusta y desempeño robusto	80
4.2. Compromiso desempeño-robustez	82
4.3. El costo LQR es $\ z\ _2^2$	85
4.4. El costo del problema de control \mathcal{H}_2 es $\ z\ _2^2$	90
4.5. El costo del problema de control \mathcal{H}_∞ es $\ z\ _\infty$	95
4.6. Configuración del sistema en lazo cerrado. Control \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia	97
5.1. Configuración del sistema de control en la viga simplemente apoyada	115
5.2. Respuesta en frecuencia de la viga sin control (planta completa y planta nominal), disturbio aplicado en η_1	118
5.3. Respuesta en frecuencia de las plantas nominales P_{yu} y P_{yw}	120
5.4. Respuesta en frecuencia de las plantas residuales ΔP_{yu} y ΔP_{yw}	121
5.5. Modelo de incerteza aditiva para P_{yu}	125
5.6. Limitante de las incertezas residuales	126
5.7. Limitante de las incertezas paramétricas	128
5.8. Comparación de los modelos de diseño y de evaluación para deflexión en el punto η_3 teniendo como entrada la señal de control en η_2	130
5.9. Comparación de los modelos de diseño y de evaluación para deflexión en el punto η_3 teniendo como entrada el disturbio en η_1	131

5.10. Configuración general del sistema controlado usando el lazo de realimentación para incertezas aditivas	132
5.11. Configuración del sistema controlado usando control \mathcal{H}_2	132
5.12. Configuración del sistema controlado usando usando control \mathcal{H}_∞ .	134
5.13. Configuración simplificada del sistema controlado usando control \mathcal{H}_∞	137
5.14. Función de ponderación (limitante) de la incerteza aditiva residual	138
5.15. Configuración del sistema controlado para desempeño, sin ponderación, usando control \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia (subproblema del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$)	141
5.16. Configuración del sistema controlado para desempeño, con ponderación, usando control \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia (subproblema del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$)	142
6.1. Comparación de la norma \mathcal{H}_2 del desempeño	147
6.2. Compromiso desempeño-estabilidad usando control \mathcal{H}_2 , control \mathcal{H}_∞ y control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	148
6.3. Salida controlada en el dominio de la frecuencia usando control \mathcal{H}_2 , control \mathcal{H}_∞ y control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	151
6.4. Salida controlada en el dominio de la frecuencia, modo 3	152
6.5. Salida controlada en el dominio de la frecuencia, modo 5	152
6.6. Salida controlada en el dominio de la frecuencia, modo 6	152
6.7. Señal de control en el dominio de la frecuencia usando control \mathcal{H}_2 , control \mathcal{H}_∞ y control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	154
6.8. Salida controlada y señal de control en el dominio del tiempo usando control \mathcal{H}_2	155
6.9. Salida controlada y señal de control en el dominio del tiempo usando control \mathcal{H}_∞	156
6.10. Salida controlada y señal de control en el dominio del tiempo usando control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	156

6.11. Márgenes de estabilidad para sistemas controlados \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	158
6.12. Estabilidad y desempeño óptimo usando control \mathcal{H}_2	160
6.13. Estabilidad robusta y desempeño robusto usando control \mathcal{H}_∞	160
6.14. Estabilidad robusta y desempeño óptimo usando control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	161
6.15. Respuesta en el dominio de la frecuencia de los controladores \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	161
B.1. Configuración del observador de estados	187
E.1. Cálculo de la norma \mathcal{H}_∞	204
E.2. Problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	216
E.3. Aproximación por medio de expansión en base pre-establecida (EB-PE)	217
E.4. Aproximación por medio de expansión en base optimizada (EBO)	218
F.1. Fotografía del sistema de posicionamiento multidimensional.	221
F.2. Vista en perspectiva. La placa base está cubierta por una lámina de aluminio con acabado de tipo espejo, ver fotografía. La matriz de magnetos está localizada debajo de la lámina de aluminio.	222
F.3. a) Convención para los ejes coordenados y las direcciones de las fuerzas para cada motor lineal. El origen del sistema coordenado móvil coincide con el centro de masa del platen. Los números 1, 2 and 3 denotan las bobinas correspondientes a los tres motores lineales. b) Ubicación de las fuerzas necesarias para generar movimiento en las seis direcciones. Las flechas finas indican los componentes de las fuerzas modales producidas individualmente por cada motor y las flechas gruesas representan las fuerzas/torques modales resultantes actuando en el centroide del platen.	224
F.4. Diagrama esquemático de la estructura de instrumentación (SRAM memoria de acceso semi aleatoria, DRAM memoria de acceso aleatoria dinámica).	226
F.5. Sensores y actuadores.	227

F.6. MPS en lazo abierto.	228
F.7. Comparación del modelo analítico (línea punteada) y el modelo identificado (línea discontinua). Modelo de incerteza aditiva (línea continua).	230
F.8. Simulación numérica y resultados experimentales para referencias del tipo función escalón en x e y . Respuesta en el dominio de la frecuencia: (a) rastreamiento y (b) esfuerzo de control. Respuesta en el dominio del tiempo: (c)-(d) posición, error de la posición y corriente del control.	235

Índice de símbolos

Campos, normas y espacios

\mathbb{N}	conjunto de los números naturales sin incluir el cero
\mathbb{Z} (\mathbb{Z}_+)	conjunto de los números enteros (enteros positivos)
\mathbb{R} (\mathbb{R}_+)	conjunto de los números reales (reales positivos)
\mathbb{C}	conjunto de los números complejos
\mathcal{S}	conjunto de las funciones reales, racionales, propias y estables (sin polos en \mathbb{C}_-^0)
\mathcal{R}_P	conjunto de las funciones reales, racionales y propias
\mathcal{R}_m (\mathcal{R}_m^+ , \mathcal{R}_m^-)	conjunto de las funciones racionales con grado relativo mayor o igual a m sin polos en $j\mathbb{R}$ (polos en $j\mathbb{R} \cap \mathbb{C}_+^0$ (funciones estables), polos en $j\mathbb{R} \cap \mathbb{C}_-^0$ (funciones inestables))
\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)	espacio real (complejo) n -dimensional
\mathbb{C}_+^0	semiplano izquierdo abierto
\mathbb{C}_-^0	semiplano derecho abierto
j	unidad imaginaria $\sqrt{-1}$
\in	pertenece
\subset	inclusión
\cup	unión
\cap	intersección

$ s $	valor absoluto del número real o módulo del número complejo s
\bar{s}	conjugado del número complejo s
$\text{Re}(s)$	parte real del número complejo s
A^{-1}	inversa de A
A^T	transpuesta de A
A^*	transpuesta conjugada compleja de A
$\lambda(A)$	autovalor de A
$\bar{\sigma}(A)$	mayor valor singular de A
$\rho(A)$	radio espectral de A (mayor autovalor de A en módulo)
$\text{Tr}(A)$	traza de la matriz A , la suma de los elementos de la diagonal
$\delta(\cdot)$	función Delta de Dirac
δ_{ij}	función Delta de Kronecker, $\delta_{ii} = 1$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
$f : A \rightarrow B$	función con $\text{dom}(f)=A$ e $\text{Im}(f)=B$
$\text{Ker}(A), \text{N}(A)$	espacio kernel (o nulo) de A
D_{\perp}	complemento ortogonal de D
\mathcal{H}	letra usada para denotar espacios de Hilbert y Banach
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$	producto interno en el espacio de Hilbert (ver definición A.1.20)
$\ \cdot\ _{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}}$	norma en el espacio de Hilbert \mathcal{H}
$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$	suma ortogonal directa de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2
$[\cdot]_{+} ([\cdot]_{-})$	proyección ortogonal en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{+} (\mathcal{H}_{-})

$\mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$	espacio de Hilbert de funciones de variable compleja que son de cuadrado integrable (Lebesgue) en $j\mathbb{R}$ (ver definición A.2.15)
$\mathcal{L}^\infty(j\mathbb{R})$	espacio de Banach de funciones de variable compleja que son limitadas en $j\mathbb{R}$ (ver definición A.2.16)
$\mathcal{H}_+^2, \mathcal{H}_-^2$	espacios de Hilbert con $\mathcal{H}_+^2 = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en \mathbb{C}_+^0 tal que $\ f(a + j\omega)\ _2 < \infty$, $\forall a < 0\}$ siendo que \mathcal{H}_-^2 es definida análogamente cambiando la señal “+” por “-” y con $a > 0$
$\mathcal{H}_+^\infty, \mathcal{H}_-^\infty$	espacios de Banach con $\mathcal{H}_+^\infty = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en \mathbb{C}_+^0 tal que $\ f(a + j\omega)\ _\infty < \infty$, $\forall a < 0\}$ siendo que \mathcal{H}_-^∞ es definida análogamente cambiando la señal “+” por “-” y con $a > 0$
$\mathcal{H}_+^{2,k}, \mathcal{H}_-^{2,k}$	espacios de Hardy ponderados (ver Silveira, [40])
$\partial(n)$	grado do polinomio $n(\cdot)$, $\partial(n) \in \mathbb{Z}$
$\partial_r(f)$	grado relativo de $f(\cdot) = \frac{n(\cdot)}{d(\cdot)}$ racional, $\partial_r(f) = \partial(d) - \partial(n)$
$\ \cdot\ _2$	norma \mathcal{H}_2 (ver definición A.2.15)
$\ \cdot\ _\infty$	norma \mathcal{H}_∞ (ver definición A.2.16)
$\ \cdot\ _{rms}$	norma raíz cuadrada media (ver definición A.2.17)
$G^\sim(s)$	$G^T(-s)$
$G^*(j\omega)$	$G^T(-j\omega)$
(A, B, C, D)	realización espacio de estados
$[A, B, C, D]$	representación de la función de transferencia $C(sI - A)^{-1}B + D$
Prob (z)	probabilidad del evento z
E (\cdot)	operador esperanza (expectativa)

Abreviaturas

1-GL	un grado de libertad
2-GL	dos grados de libertad
EBO	expansión en base optimizada
EBPE	expansión en base pre-establecida
FAMESS	supresión de la sensibilidad al error del modelo con filtro acomodado
HAC	control de alta autoridad
LAC	control de baja autoridad
LMI	desigualdades matriciales lineales
LQG	regulador gaussiano cuadrático lineal
LQG/LTR	regulador gaussiano cuadrático lineal/recuperación de la función de transferencia en lazo abierto
LQR	regulador cuadrático lineal
LTI	lineal invariante en el tiempo
MESS	supresión de la sensibilidad al error del modelo
MIMO	múltiples entradas múltiples salidas
MPS	sistema de posicionamiento multidimensional
SISO	una entrada una salida

PRÓLOGO

En el Capítulo 1 se presenta una rápida revisión de conceptos tales como control óptimo y control robusto, y su aplicación al control activo de vibraciones. Primero, para mejor posicionar el problema tratado en el presente trabajo, se hace una introducción de las técnicas de control de vibraciones. Posteriormente se muestran las ideas básicas relacionadas al control óptimo y al control robusto. Finalmente, se presenta una revisión bibliográfica en la que se resume la evolución de las diversas técnicas de control, siempre orientadas al control activo de vibraciones.

De experiencias anteriores se sabe que el cálculo de controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, como definido en el presente trabajo, requiere de una adimensionalización de la planta. Esa adimensionalización supera el mal condicionamiento inicial de las matrices del modelo y permite realizar la cantidad de operaciones con matrices necesarias. En ese sentido, en el Capítulo 2, se presenta un modelo de viga del tipo Euler-Bernoulli y su correspondiente adimensionalización. Se consigue construir una clase de vigas dinámicamente equivalentes, las mismas que están caracterizadas por un grupo adimensional. En la parte final del Capítulo 2 se obtiene la representación espacio de estados adimensional del modelo a ser usado en el diseño del control.

El Capítulo 3 muestra la teoría del diseño de los sistemas de control por realimentación. Este capítulo comienza con la definición del problema de control y la presentación de un diagrama de flujo con los pasos necesarios para el diseño

del control. Seguidamente, el diseño de los sistemas de control por realimentación para sistemas de una entrada una salida (SISO) es ampliamente revisado y extendido para sistemas de múltiples entradas múltiples salidas (MIMO). Posteriormente se describe la formulación general del problema de control, que, usando una configuración general de control, hace posible formular los diversos problemas de control. Para culminar con el diseño del control, el Capítulo 3 presenta las especificaciones de diseño: desempeño, estabilidad y robustez en lazo cerrado.

Las técnicas de diseño de controladores a ser usadas en el presente trabajo son descritas en el Capítulo 4. Se comienza con el controlador \mathcal{H}_2 , el cual sólo considera desempeño en la formulación del problema de control, se continúa con el controlador \mathcal{H}_∞ , el cual considera tanto desempeño como robustez pero tiende a ser muy conservativo, y, finalmente, se concluye con el controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, este tipo de control incorpora el desempeño \mathcal{H}_2 y la estabilidad \mathcal{H}_∞ en su formulación. Un método de cálculo de controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por medio de expansión en bases es presentado en la parte final del Capítulo 4.

A partir del Capítulo 5, la teoría desarrollada en los capítulos previos es aplicada en el control de vibraciones de una viga flexible simplemente apoyada. El objetivo de este capítulo es definir la planta generalizada de forma que quede expedita para el cálculo de los controladores. Para diseño del control, primero se coloca la planta de acuerdo a una configuración generalizada de control, con esa intención se calculan las plantas nominales, plantas residuales y el modelo de incerteza. Posteriormente se definen las especificaciones de diseño: atenuar vibraciones (amortiguar los modos de baja frecuencia) e incrementar la atenuación de disturbios en la zona de modos residuales - la atenuación de vibraciones está limitada por la señal de actuación. Los controladores son calculados usando MATLAB. Los algoritmos de cálculo de controladores \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ son obtenidos en base a la teoría de control en el dominio del tiempo desarrollada por Glover-Doyle, [14]. El controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fue calculado usando el algoritmo presentado en el Apéndice E, algoritmo que se basa en la teoría de control en el dominio de la

frecuencia desarrollada por Silveira-Ades, [39], [2]. Antes de implementar los controladores en la planta de evaluación vía simulación computacional, se procedió a realizar una redimensionalización del controlador de acuerdo con lo estipulado en el Apéndice D.

En el Capítulo 6 se presentan los resultados de los abordajes de diseño para desempeño nominal (\mathcal{H}_2), desempeño robusto/estabilidad robusta (\mathcal{H}_∞) y desempeño nominal/ estabilidad robusta ($\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) considerando el problema de atenuación de vibraciones en una viga flexible simplemente apoyada. Para propósitos de comparación, se realiza una evaluación de los resultados obtenidos según el desempeño y la estabilidad de cada sistema controlado.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas luego de un análisis de los resultados y algunas sugerencias de trabajos futuros. El Apéndice también muestra la implementación de algunas de las técnicas de control presentadas en este trabajo para el caso de un sistema de posicionamiento multidimensional.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Las estructuras en ingeniería son frecuentemente fabricadas a partir de un número de componentes modulares conectados por elementos estructurales. Ejemplos de esas estructuras, tales como armaduras, paneles, antenas, estaciones espaciales, etc; son encontradas en barcos, submarinos y aeronaves. Las vibraciones pueden tener efectos indeseables en esas estructuras, ellas pueden causar daño a la propia estructura o a sus componentes adjuntos. El hecho de que la mayoría de las estructuras sean bastante rígidas y tengan inherentemente factores de amortiguamiento bajos hace que la vibración en las resonancias sea muy grande. En esas condiciones, la energía vibratoria puede fluir a través de la estructura y causar movimientos significativos, en el caso de una aeronave, en el ambiente de trabajo de la tripulación o peor aún, en el espacio reservado a los pasajeros. Vibraciones de ese tipo también pueden afectar equipamientos muy sensibles o causar daños por fatiga, especialmente en estructuras de bajo peso.

El control de vibraciones consiste en la supresión de las vibraciones ya sea mediante la adición deliberada de fuerzas de control al sistema, control activo, mediante la modificación del diseño del sistema, control pasivo, o mediante una combinación de los anteriores, control activo-pasivo. Cabe resaltar que el control activo de vibraciones es un área de gran interés en la industria aeroespacial debido a las restricciones de peso. Así, muchos métodos de diseño de controladores se han venido investigando en las últimas cuatro décadas con la intención de encontrar

aquel controlador que satisfaga las necesidades de la industria aeroespacial. Las técnicas de control clásico encuentran sus limitaciones en que sólo pueden trabajar con sistemas de una entrada una salida (SISO)¹, las técnicas de control óptimo, aún siendo MIMO, no son propicias cuando se tiene dinámica no-modelada, incertezas paramétricas y ambientes ruidosos, luego, las técnicas de control robusto parecerían ser las más adecuadas. Últimamente, para muchos problemas de control que requieren buenos desempeños, como por ejemplo el control de sistemas espaciales grandes, el control óptimo robusto (control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) es uno de los que asegura la robustez en estabilidad y el desempeño óptimo requerido.

El presente trabajo considera el problema de la supresión de vibraciones para una viga flexible simplemente apoyada², caso simplificado pero representativo de una estructura en ingeniería. Para efectos de comparación de los diversos sistemas controlados por técnicas de control óptimo y control robusto, se establece un procedimiento de forma que se considere tanto el desempeño de la viga controlada como la robustez en estabilidad del sistema controlado.

1.1. Control de vibraciones

Para el control de vibraciones existen las técnicas de control pasivo, las de control activo y las de control activo-pasivo. Las técnicas de control pasivo generalmente son aplicables en la etapa de diseño, en tanto que las de control activo pueden ser aplicadas tanto en la etapa de diseño como después. Las técnicas de control activo-pasivo, como su nombre lo dice, incorporan las dos técnicas anteriores en un mismo sistema.

Las distinciones entre el control activo y el control pasivo se basan en

¹En la industria aeroespacial se requieren muchos sensores, que permitan representar fielmente la dinámica del sistema, y actuadores, que permitan obtener el desempeño deseado del sistema controlado. Eso significa que se debe trabajar con sistemas de control múltiples entradas múltiples salidas (MIMO).

²La viga es modelada como un sistema de parámetros concentrados

las descripciones físicas del proceso y no en las ecuaciones matemáticas idealizadas. Un ejemplo esclarecerá lo antes dicho. Considerese un sistema masa-amortiguador-resorte:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k + \Delta k)x = 0 \quad (1.1)$$

Este modelo matemático podría resultar tanto del control activo como del control pasivo, una simple evaluación de (1.1) no puede hacer la distinción. El control pasivo selecciona una nueva constante de rigidez $k + \Delta k > 0$ para el sistema (Δk no es ajustado en tiempo real) mientras que el control activo mide $x(t)$ como una función en tiempo real y multiplica (en tiempo real) $x(t)$ por una constante $-\Delta k$ para implementar la señal de control $u(t) = -\Delta kx(t)$ que restringirá al sistema:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t) \quad (1.2)$$

donde $u(t)$ viene a ser un dispositivo electromecánico que varia la rigidez del resorte.

Es la implementación física la que afecta de forma drástica las propiedades de robustez de un sistema, y ésta es la principal razón por la que se hace la distinción entre control activo y pasivo. Supóngase que se tiene un error de implementación en los dos casos (1.1) y (1.2). En el caso de control pasivo el error viene a ser un valor incorrecto de Δk , por ejemplo, más grande que el valor de diseño. Eso conlleva a un valor más grande de $k + \Delta k$, pero la física del resorte garantiza que $k + \Delta k$ sea todavía una constante positiva. Como resultado, (1.1) no puede ser desestabilizado por el control pasivo, esto sin importar cuan grande o pequeña sea la implementación de $k + \Delta k > 0$. Considerando errores en la implementación del control activo, donde sensores físicos tienen que generar señales que restringen a los actuadores físicos, el dispositivo que modifica la rigidez del resorte tiene dinámica que obviamente no fue considerada al usar el modelo simplificado $u(t) = -\Delta kx$. Los sensores y actuadores pueden introducir retrasos y sus propias dinámicas en el sistema. Por ejemplo, sean el sensor y actua-

dor arbitrariamente rápidos pero de ancho de banda finito (ε^{-1} arbitrariamente grande), luego la dinámica del sensor y la del actuador puede ser aproximada por $(\varepsilon s + 1)^{-1}$. Existe un Δk lo suficientemente grande para desestabilizar al sistema, $k + \Delta k > c/(2\varepsilon)$ desestabiliza al sistema³.

La diferencia notable entre el control activo y pasivo radica en que el control pasivo no hace ningún cambio en tiempo real en el sistema y debido a esto no puede desestabilizar un sistema conservativo sin importar cuan serios puedan ser los errores de implementación física.

1.1.1. Control pasivo de vibraciones

El control pasivo depende del diseño inicial de la estructura, de la adición de material viscoelástico a la estructura y del uso de amortiguadores. El control pasivo, a pesar de no ser tan efectivo como el control activo-pasivo o el control activo, tiene 4 principales ventajas: (1) generalmente es barato; (2) no consume energía externa; (3) es inherentemente estable; y (4) trabaja en las peores condiciones, por ejemplo, terremotos, choques, etc. A continuación un resumen de algunas de las técnicas de control pasivo.

Alteración de la geometría de la estructura, nació de la idea de diseñarse un filtro estructural genérico que pueda ser usado para insertar características deseadas en una estructura, manteniendo su habilidad de soportar cargas estáticas en tanto bloquea movimientos en una faja de frecuencias previamente establecida. Ver Fig. 1.1.

Tratamientos para amortiguamiento (*damping treatments*), consisten en el recubrimiento de elementos estructurales con material viscoelástico. La vibración origina deformaciones por cisallamiento en la placa viscoelástica, lo cual

³Nótese que, en ausencia de amortiguamiento, tales sistemas son siempre inestables para cualquier $k + \Delta k > 0$. Afortunadamente, las estructuras reales siempre tienen algún amortiguamiento, aunque sea pequeño.

disipa energía, reduciendo la vibración. Ver Fig. 1.2.

Aislamiento de vibraciones, usado en el caso donde la energía vibratoria puede ser contenida cerca de los puntos de excitación y, por consiguiente, el material viscoelástico puede ser concentrado en regiones donde sea más efectivo. Así, el aislador está siempre en el camino de la transmisión de vibraciones entre la fuente de perturbación y el equipamiento a ser aislado. Ver Fig. 1.3.

Absorvedores, reducen vibraciones por la absorción de energía vibratoria a través del desplazamiento de su masa, siendo posicionados en el punto de mayor aceleración del equipamiento de interés. Los absorvedores pasivos trabajan bien en una frecuencia de excitación fija, se puede conseguir que el desplazamiento en el equipamiento protegido sea casi nulo. Si la frecuencia cambia, el absorbedor continúa aplacando las vibraciones pero con una eficiencia menor. Ver Fig. 1.4.

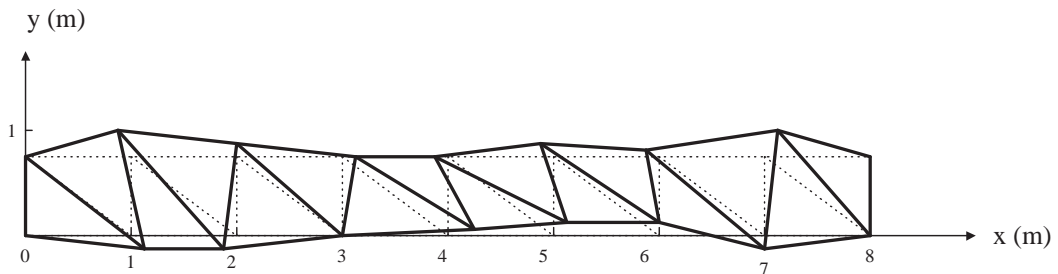


Figura 1.1: Control pasivo usando alteración de la geometría

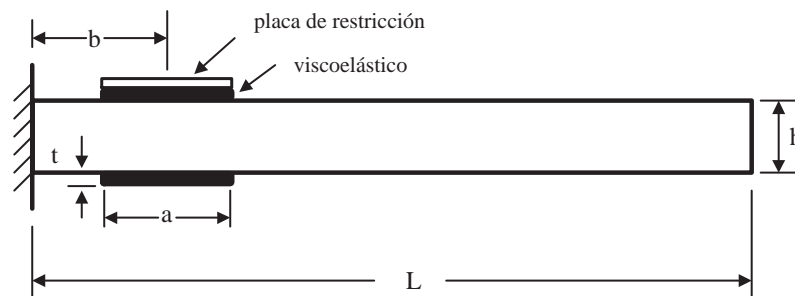


Figura 1.2: Control pasivo usando tratamientos para amortiguamiento

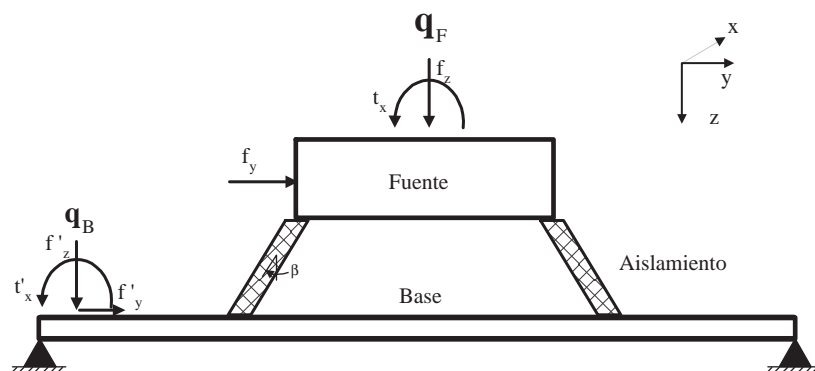


Figura 1.3: Control pasivo usando aislamiento

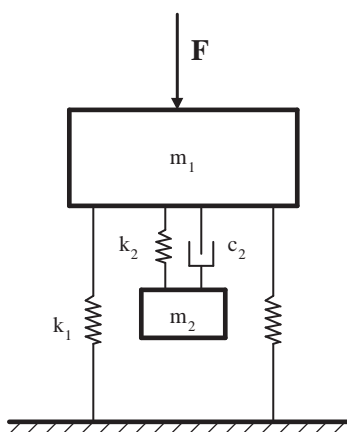


Figura 1.4: Control pasivo usando absorbedores

1.1.2. Control activo de vibraciones

Como un intento de mejorar el desempeño del sistema controlado, surgieron varios trabajos que abordan el uso del control activo. El control activo visa suprimir o atenuar las vibraciones mediante la adición deliberada de una fuerza de control al sistema.

El control activo de vibraciones requiere el uso de un sistema auxiliar de control que consiste en *hardware*, tal como actuadores⁴ y dispositivos de medida (sensores), y *software* para implementar la ley de control⁵. Un desdoblamiento

⁴Actuadores que pueden ser hidráulicos, neumáticos, electromagnéticos, ópticos, etc. Actuadores construidos con materiales piezoeléctricos están siendo cada vez más solicitados.

⁵La ley de control puede ser del tipo óptimo, robusto, adaptativo, etc.

natural para investigación sería la naturaleza de las leyes de control (materia del Capítulo 4) y de los actuadores apropiados para implementar estas leyes. Considerese el diagrama de bloques de la Fig. 1.5 como una muestra de una estructura con control activo, donde y es el vector de medidas del sensor (“salidas medidas”), z es el vector de “salidas controladas”, w es el vector de disturbios que afectan al sistema; y u es el vector de señales de control.

El control de vibraciones por realimentación encuentra aplicaciones en la atenuación de la excesiva agitación en equipamientos de alta precisión, en la mejoría del confort de los pasajeros de vehículos terrestres y aéreos, entre otros. El control activo de estructuras de aplicación aeroespacial resulta particularmente atractivo ya que existen grandes restricciones en relación al peso, lo cual limita la adición de masas y tratamientos para amortiguamiento, y en relación a la rigidez estática.

Un aspecto esencial del sistema con control activo es que se necesita energía externa para producir la acción de control, este hecho lo hace vulnerable a una falla en el sistema de energía, que siempre es una posibilidad latente.

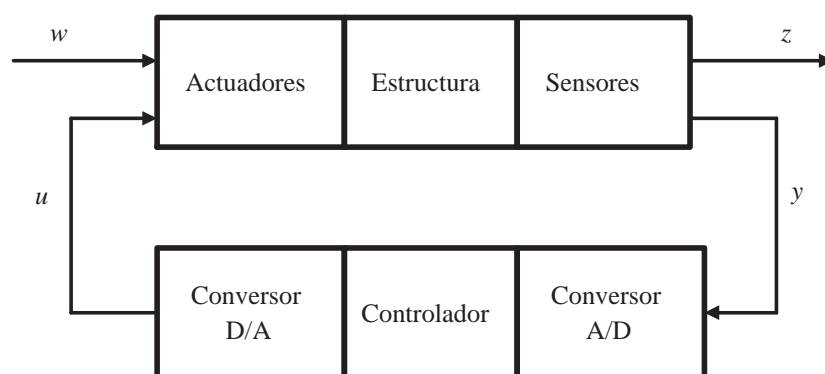


Figura 1.5: Control activo de vibraciones

1.1.3. Control activo-pasivo de vibraciones

El control activo-pasivo de vibraciones hace uso del control activo para suplir e incrementar el desempeño de un sistema con control pasivo. Alternativamente, el control pasivo puede ser adicionado a un sistema con control activo para disminuir los requerimientos de energía. En muchos casos, los sistemas con control activo-pasivo compensan las limitaciones de uno u otro tipo de control alcanzando una solución mejorada, por ejemplo, un tipo de tratamiento híbrido para amortiguamiento se puede obtener mediante la sustitución, o complementación, de la placa de restricción de un tratamiento para amortiguamiento pasivo por un actuador piezoeléctrico, ver Fig. 1.2. Este mecanismo permite incrementar activamente la deformación de cisallamiento de la placa de viscoelástico y consecuentemente la energía disipada.

Un gran beneficio del control activo-pasivo, en caso de una falla de energía, es que el componente pasivo todavía ofrece cierto grado de protección, a diferencia del control activo.

1.2. Leyes de control

En la década de los 80, muchos investigadores trabajaron en el control activo de vibraciones haciendo uso, principalmente, de leyes de control óptimo. Así, métodos de control óptimo fueron aplicados satisfactoriamente en el control de sistemas estructurales ya que ellos caracterizan de alguna forma las limitaciones en la cantidad de los sensores y actuadores. Sin embargo, la caracterización de la incerteza resultó ineficiente; en una serie de problemas, la intención era contar con un tipo de control que explícitamente considerara los problemas del modelado, dinámica de sensores y actuadores, etc. y que, aún así, cumpliera con los objetivos de control. El control que satisfizo estos requerimientos fue el denominado control robusto.

1.2.1. Control óptimo

La teoría de control óptimo pertenece al denominado control moderno. Nació de la necesidad de contar con controladores que funcionen satisfactoriamente en sistemas de orden elevado, con múltiples entradas y múltiples salidas, o simplemente en sistemas que no poseían las propiedades requeridas para un control clásico⁶. A diferencia del control clásico, el control óptimo provee procedimientos analíticos y no deja la responsabilidad del diseño al conocimiento empírico del diseñador. Como resultado, el control óptimo presenta soluciones que abarcan una mayor cantidad de sistemas en comparación al control clásico. Adicionalmente, el sistema que resulta del diseño de control óptimo, no sólo es estable, tiene cierto ancho de banda y satisface cada una de las restricciones del control clásico, sino también es el “mejor” en una cierta clase, de ahí la palabra óptimo.

El control óptimo lineal es un tipo especial de control óptimo. En ese caso, la planta es considerada lineal y el controlador, calculado según la idea de control óptimo, también es lineal⁷. En ese contexto se presenta la siguiente pregunta: ¿por qué control óptimo lineal y no sólo control óptimo? Para comenzar, muchos de los sistemas de ingeniería son lineales antes de la adición del controlador. También, un controlador lineal es fácil de implementar físicamente o en la mayoría de los casos suficiente. Además, muchos de los problemas de control óptimo no tienen aproximación computacional o requieren mucho esfuerzo computacional en la aproximación de su solución, a diferencia del control óptimo lineal donde casi todos los problemas tienen aproximación computacional. Considerándose esas ventajas, muchos problemas de control óptimo no lineales son resueltos usando las técnicas de solución del control óptimo lineal después de una linealización del

⁶El control clásico sólo se aplicaba a los sistemas lineales, invariantes en el tiempo y con apenas una entrada y una salida. Los métodos de diseño en el control clásico eran una combinación de los analíticos (Transformada de Laplace, Test de Routh, etc.), de los gráficos (Gráfico de Nyquist, Gráfico de Nichols, etc.) y un buen porcentaje de conocimiento empírico (cierto tipo de compensador trabaja satisfactoriamente en cierto tipo de sistema).

⁷Esto significa que la salida del controlador depende linealmente de la entrada, siendo que la entrada es una cantidad derivada de medidas en la planta.

sistema.

Las principales características de la teoría de control óptimo lineal son la descripción de los sistemas en la forma de espacio de estados, la optimización en términos de un criterio cuadrático lineal y la incorporación de la teoría de observadores⁸. También, se considera la naturaleza estocástica de los problemas de control, la cual es esencial en el diseño del controlador por la presencia de ruidos en los sensores y actuadores (Anderson, [1]), (Kwakernaak *et al*, [25]). Siendo así, uno de los aspectos a ser considerados en el diseño de un controlador óptimo es la utilización de índices de desempeño que tomen en consideración restricciones en la señal de control y en el error. La introducción de estos índices lleva naturalmente a la utilización de normas en la definición de problemas de control. En ese sentido, se puede considerar el problema de minimización de una norma⁹ de una determinada función de transferencia de un sistema en lazo cerrado.

1.2.2. Control robusto

En el diseño de controladores para sistemas físicos debe tomarse en cuenta la exactitud del modelo y su complejidad matemática. Los modelos “exactos”, cuando obtenidos, requieren demasiado esfuerzo computacional, lo que hace que no sean considerados propicios para propósitos de control. Además, muchas de las técnicas usadas en el control de sistemas multivariantes trabajan mejor con modelos nominales de orden moderado, lineales e invariantes en el tiempo (Maciejowski, [31]). En la práctica, los modelos no-lineales de orden muy grande son linealizados en torno de algún punto de operación y también son reducidos para obtenerse modelos nominales que puedan ajustarse a las limitaciones computacionales o a las restricciones de implementación del controlador. Esas practicas introducen errores de modelado en la forma de dinámica no-modelada, que deben

⁸Los observadores aproximan las variables de estado del sistema a partir de medidas.

⁹Para el caso de control óptimo una norma \mathcal{H}_2 .

ser tomados en cuenta en el proceso de cálculo del controlador. Adicionalmente, los parámetros en los modelos nominales y de análisis no son conocidos con precisión y pueden causar inestabilidades en caso de que no se tomen las debidas precauciones.

Las consideraciones previamente mencionadas son especialmente críticas en el diseño de controladores para estructuras flexibles (Joshi, [23]). Esos controladores generalmente son obtenidos a través de técnicas de reducción de orden aplicadas a modelos de orden elevado, que, por su parte, son el resultado de técnicas de discretización como elementos finitos, modos supuestos, etc. En la reducción de orden se desprecia una parte del modelo de elementos finitos (o cualquier otro) de forma que se obtenga un controlador de bajo orden. Aunque la dinámica no-modelada (parte despreciada) no esté más en el modelo nominal, ella aún puede ser influenciada por el control. Es necesario tener cuidado en el proceso del diseño del controlador para evitar los efectos del “*spillover*” de control y de observación¹⁰ que desestabilizan la dinámica no-modelada, (Balas, [6]). Además, los modelos nominales contienen incertezas paramétricas en las frecuencias naturales y en los factores de amortiguamiento, que forman parte del modelo nominal. Así, un requerimiento fundamental en el diseño de la ley de control para estructuras flexibles es alcanzar y preservar la estabilidad en lazo cerrado en la presencia de dinámica no-modelada e incertezas paramétricas.

Las incertezas no paramétricas, tales como la dinámica no-modelada, típicamente ocurren en la región de alta frecuencia de los modelos físicos. En el diseño del controlador, la dinámica no-modelada es tratada, frecuentemente, reduciendo el desempeño mediante el “*rolling off*” del controlador sobre una banda de frecuencia alta. El tratamiento de incertezas paramétricas es una área en la que se viene realizando mucha investigación. El presente trabajo está relacionado con controladores que estabilizan (robustamente) un sistema en la presencia de incer-

¹⁰Excitación de los modos no modelados por parte del actuador y contaminación de las salidas obtenidas en el sensor con la dinámica no-modelada.

tezas, tanto paramétricas como no-paramétricas, bajo la forma de perturbaciones aditivas.

Las incertezas también pueden ser vistas como perturbaciones en torno de un modelo nominal. Si un único controlador estabiliza la planta nominal y todos los sistemas dentro de la vecindad generada por las perturbaciones, se dice que el compensador estabiliza robustamente toda la familia de sistemas. La búsqueda de una mayor vecindad para una planta dada, para la cual un único controlador produce estabilidad en lazo cerrado, puede ser formulada como el problema de control \mathcal{H}_∞ ¹¹.

En aplicaciones prácticas, frecuentemente se desean controladores que sean robustos y que también sean óptimos en una cierta clase. Tales controladores pueden ser obtenidos con las técnicas de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, que buscan un compromiso entre robustez y optimalidad.

1.3. Revisión bibliográfica

El control activo de vibraciones es un área de investigación que viene recibiendo una creciente atención en las últimas décadas. El hecho de que los sistemas estructurales flexibles estén caracterizados por plantas de alta densidad modal y el gran número de sensores y actuadores que ellos necesitan no permiten el uso de un abordaje SISO. La necesidad de trabajar con sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas hace que se desarrollen las denominadas técnicas de control MIMO.

Los primeros intentos para formular abordajes de diseño de control MIMO tuvieron como base a la teoría de diseño lineal/cuadrática/gaussiana LQG

¹¹Como consecuencia una gran cantidad de herramientas para análisis basadas en criterios de desempeño y estabilidad \mathcal{H}_∞ fue desarrollada por Zames, Doyle et al, Francis, Macfarlane y Glover.

(Kwakernaak, [25]) originada en 1960. Así, métodos de control óptimo, como el LQG, han sido aplicados satisfactoriamente al control de sistemas estructurales, ya que ellos caracterizan de alguna forma las limitaciones en implementación de los sensores y actuadores¹². Si se consideran las limitaciones de los modelos aproximados y la capacidad computacional de los procesadores, este tipo de controlador muestra su ineficacia. Una limitación fundamental del LQG en el control de vibraciones es su falta de robustez. Otra limitación del LQG es que el orden del controlador es igual al de la planta y considerando que los modelos que representan fielmente los sistemas estructurales flexibles contienen algunas centenas de modos, el controlador LQG sobrecargará la capacidad de procesamiento en tiempo real.

Un abordaje simple de disminución del orden del controlador LQG es despreciar modos de vibración en el modelo nominal hasta que se tenga un modelo con el orden deseado para el controlador. Un gran número de investigadores han observado que la dinámica despreciada origina el “fenómeno de *spillover* de control y de observación”, lo cual conlleva a inestabilidades en el sistema en lazo cerrado (Balas, [6]), (Joshi, [23]). Como consecuencia de las limitaciones del LQG (falta de robustez y simplicidad del controlador), se viene realizando mucha investigación para tratar de resolver esos dos problemas. Se puede hablar de cuatro tipos de abordajes que intentan resolver esos problemas: modificaciones directas o extensiones de la teoría del LQG, simplificaciones del controlador, control que incorpora el error en el modelado (control robusto) y control mixto.

A. Modificaciones directas o extensiones de la teoría del LQG

Este primer abordaje relaciona técnicas que suplen la falta de robustez del LQG aprovechando el hecho de que las estructuras flexibles son inherentemente

¹²En la implementación se presentan algunas limitaciones, por ejemplo, en el actuador: ancho de banda, potencia y fuerza (torque) limitados; en el sensor: precisión del sensor limitada y ruido del sensor/electrónica.

pasivas (disipadoras de energía) y configuran leyes de control que preserven la pasividad. Con pares de sensores y actuadores colocados¹³ y conjugados¹⁴, la planta estructural es por lo menos positiva¹⁵. Entonces, se puede asegurar la estabilidad en lazo cerrado en la presencia de errores de modelado estructural (si no se violan las restricciones de colocación y conjugación) haciendo que el controlador sea estrictamente positivo¹⁶. La principal ventaja de este abordaje es la estabilidad garantizada en la presencia de una amplia clase de inexactitudes en el modelado y no-linealidades, pero, se debe tener cuidado en el modelado de la dinámica de los sensores y actuadores.

Los esfuerzos para juntar los beneficios de robustez obtenidos del control disipativo con el alto desempeño del LQG resultaron en los controladores de alta/baja autoridad (HAC/LAC) (arquitectura de control a dos niveles) (Gawronski, [18]). El controlador HAC es la parte del controlador que intenta alcanzar los objetivos de desempeño, se aplica la teoría del LQG a un modelo reducido que contiene los modos significativos correctamente modelados (generalmente los primeros modos) y con esto se asegura que el controlador sea de bajo orden. El propósito del controlador LAC es reestabilizar los modos residuales por medio de un controlador disipativo. Se debe tener cuidado en la exactitud del modelado del sistema para el HAC ya que él retiene la falta de robustez del LQG. En las aplicaciones prácticas, este tipo de controlador ha presentado mucha flexibilidad excepto por el hecho de requerir sensores y actuadores colocados y conjugados.

Continuando con la descripción de controladores que son una extensión del LQG, se encuentran los controladores obtenidos usando métodos de desacopla-

¹³Se dice que un actuador y un sensor son colocados si existe deformación estructural despreciable entre la posición del sensor y la del actuador.

¹⁴Se dice que un actuador y un sensor son conjugados si la variación virtual en la cantidad dinámica medida por el sensor multiplicada por la fuerza generalizada es igual a la variación del trabajo virtual.

¹⁵En un modelo lineal, positividad es equivalente a pasividad.

¹⁶Un sistema compuesto por dos subsistemas interconectados en una configuración de alimentación es estable si ambos subsistemas son positivos o como mínimo uno de ellos es estrictamente positivo.

miento (Meirovitch, [34]). La idea básica es desacoplar los modos del sistema en n subsistemas y calcular controladores SISO para cada modo. Al final, cada controlador SISO es acoplado a los otros para obtener la ley de control del sistema. Las ventajas son la reducción del *spillover* y la disminución del esfuerzo computacional, en tanto que su limitación radica en el requerimiento de un gran número de sensores y actuadores para una aproximación aceptable del modelo. Con la idea de desacoplamiento se desarrolló la técnica denominada supresión de la sensibilidad al error del modelo (MESS), técnica que intenta reducir los problemas de *spillover* de control y de observación. Esta técnica consiste en el desacoplamiento de los modos en nominales y residuales, y el cálculo de matrices que al ser multiplicadas por las submatrices que representan modos residuales (tanto en la matriz de entrada como en la de salida), resulten matrices nulas. Una vez hecho esto, se calcula el controlador para la parte nominal según la teoría LQG. Como un abordaje alternativo, para obtener los mismos efectos en la supresión del *spillover*, se aplica una optimización cuadrática a la dinámica nominal con la función de costo aumentada por funciones que penalizan el *spillover* de control y de observación. Así, el MESS fue aumentado para la supresión de la sensibilidad al error del modelo con filtro acomodado (FAMESS). La idea es usar un filtro pasa-baja para impedir la desestabilización de los modos de alta frecuencia.

B. Simplificación del controlador

Este abordaje toma en cuenta métodos que involucran una extensión del LQG y no implican en restricciones de *hardware*. Estos métodos se preocupan más en las caracterizaciones eficientes del compromiso desempeño-controlador en la simplificación. Los métodos de simplificación del controlador pueden ser divididos en tres categorías: reducción de modelos, reducción indirecta del controlador y reducción directa del controlador. En cada uno de estos casos se supone que métodos de reducción fueron aplicados al modelo del sistema en lazo abierto y que el modelo nominal aún tiene un orden muy grande. Este modelo nominal contiene

la “dinámica primaria” (crítica para el desempeño) y “dinámica residual” (con modos significativos que podrían interactuar con el controlador).

En la reducción de modelos, la simplificación del controlador es dada por la reducción del orden del modelo nominal del sistema a controlar (Skelton, [41]). Puede notarse que al hacerse una aproximación prematura existe riesgo de inestabilidad y pérdida de desempeño. En consecuencia, se prefieren los métodos que atrasan la reducción del modelo, los denominados “reducción indirecta del controlador”. Estos métodos consisten en el cálculo del controlador LQG para el modelo de orden elevado y a continuación se hace una reducción del orden del controlador (Liu, [28]), (Mustafa *et al*, [35]). Los métodos de reducción directa del controlador se posicionan en el problema de cálculo del controlador óptimo de orden fija, esto es, dado un índice cuadrático de desempeño y un modelo nominal de orden muy grande, se restringe la dimensión del controlador y se calculan las ganancias para el controlador de orden fija que minimiza el desempeño cuadrático (Johnson, [22]).

C. Controladores que incorporan errores del modelado

Se define robustez con respecto a una propiedad del sistema (por ejemplo, estabilidad) como la preservación de esa propiedad en la presencia de perturbaciones y errores. Los aspectos básicos del problema de robustez se distinguen a partir de los varios recursos que se tienen para modelar la incerteza. La dinámica de un elemento estructural es caracterizada por una ecuación de onda amortiguada. Debido a inexactitudes en la descripción física y a procedimientos de discretización, los operadores de inercia, amortiguamiento y rigidez¹⁷ pueden diferir de sus contrapartes nominales para perturbaciones invariantes en el tiempo. Incertezas en el modelo de ese tipo son conocidas como incertezas paramétricas. El sistema es descrito como un modelo espacio de estados cuyas matrices tienen

¹⁷Se sabe las restricciones de realización física imponen que los operadores de inercia, amortiguamiento y rigidez sean definidos no-negativos independientemente de la perturbación.

elementos definidos dentro de ciertos límites¹⁸. Un sistema sujeto a incertezas no-paramétricas está caracterizado por limitantes calculados en relación a errores en las características de las funciones de transferencia de entrada-salida.

La primera idea para mejorar la robustez del LQG, estuvo en la robustez del regulador cuadrático lineal (LQR¹⁹), así, se consideró acelerar las dinámicas del regulador y del observador para “recuperar” las propiedades del LQR. Mediante la minimización de la función de sensibilidad, a bajas frecuencias, y de la función de sensibilidad complementaria, a altas frecuencias, fue posible alcanzar las especificaciones de desempeño y de robustez a la dinámica no-modelada (Stein *et al*, [43]). Pero, se observa que este procedimiento aplicado a un criterio cuadrático de desempeño, presenta dos inconvenientes: 1) el criterio cuadrático afecta sólo a la norma \mathcal{H}_2 de la respuesta en frecuencia, luego el diseñador sólo tiene control limitado sobre la forma del lazo y 2) la descripción de la incerteza de la planta no es consistente con la medida de desempeño, en consecuencia es difícil calcular limitantes del desempeño robusto. Estos dos inconvenientes fueron superados con el control \mathcal{H}_∞ (Francis, [16] y Doyle *et al* [14]). A diferencia de la medida cuadrática del desempeño LQG (norma \mathcal{H}_2), la medida de desempeño \mathcal{H}_∞ corresponde al peor caso de atenuación en la frecuencia.

El método basado en los valores singulares estructurados (SSV o μ) es útil cuando se tienen perturbaciones estructuradas²⁰. El SSV incorpora las especificaciones de desempeño y estabilidad con respecto a las incertezas estructuradas pero no se enfoca en buscar controladores simplificados. Como resultado, la dimensión del controlador SSV es mayor que la de la planta nominal y se necesita

¹⁸Un hecho importante de recordar es que no sólo los sistemas estructurales están sometidos a incertezas paramétricas y no-paramétricas, ya que los sensores, actuadores y el propio controlador también lo están.

¹⁹El regulador cuadrático lineal presenta márgenes de ganancia y fase de 6 dB y 60°, respectivamente, pero requiere que la matriz de salida del sistema sea igual a la matriz identidad.

²⁰Dentro de la clase de incertezas se distinguen incertezas estructuradas y no-estructuradas. Así, se puede considerar que si se consigue (mediante transformaciones y reorganización) tener todas las perturbaciones del sistema inseridos en un único punto del lazo se tiene la descripción no-estructurada. En caso de tenerse una descripción estructurada, las perturbaciones son expresadas en varios bloques del lazo (Hyland *et al*, [20]).

de una reducción de orden del controlador (Zhou *et al.*, [49]), (Balas *et al.*, [5]).

D. Control mixto

Los abordajes previos describen avances básicos en la teoría de control considerando robustez y simplificación del controlador. En el último abordaje se encuentran teorías que intentan unificar y reconciliar abordajes previos, aparentemente contradictorios. Dos líneas de acción son encontradas, una que intenta amalgamar la teoría de robustez con la simplificación del controlador y otra que considera un nuevo abordaje entre la teoría \mathcal{H}_2 basada en el desempeño y el tratamiento de especificaciones en el dominio de la frecuencia via manipulación de restricciones \mathcal{H}_∞ .

La primera línea de acción está ejemplificada por aquellos abordajes que combinan directamente teorías de reducción de controladores con revisiones de robustez del LQG para manipulación de incertezas estructuradas y paramétricas. Los resultados dan condiciones de optimalidad para diseño de controladores de orden fijo en presencia de incertezas caracterizadas por ciertos limitantes.

La segunda línea de acción junta las teorías antes descritas de desempeño \mathcal{H}_2 /espacio de estados con las de perspectiva \mathcal{H}_∞ /dominio de la frecuencia, en la forma de teorías mixtas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. En uno de los abordajes del control mixto perteneciente a la segunda línea de acción se encuentra el controlador que conjuga criterios cuadráticos de desempeño \mathcal{H}_2 con restricciones de robustez \mathcal{H}_∞ , este tipo de controlador, que de aquí en adelante pasaremos a llamar $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, será materia de aplicación en el presente trabajo.

El problema del margen de estabilidad ha sido preocupación de los diseñadores desde los trabajos de Bode y Nyquist. Recientemente surgieron tentativas de unir los objetivos desempeño óptimo y margen de estabilidad máxima en

un único problema. La parametrización de Youla²¹ permitió colocar el problema de maximización del margen de estabilidad como un problema de optimización, en el cual los parámetros pertenecen al espacio de Hardy \mathcal{H}_∞ (Mustafa et al, [35]). Naturalmente, la introducción de medidas del margen de estabilidad no debe excluir los problemas de análisis y síntesis de los índices \mathcal{H}_2 , apropiados para evaluar el efecto y/o atenuación de disturbios. Surge entonces, el problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, donde se conjugan criterios cuadráticos \mathcal{H}_2 con restricciones de robustez \mathcal{H}_∞ .

Diversos métodos fueron propuestos para resolver el problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Algunos modifican el criterio de optimización original, perdiendo así la interpretación física inicial del problema, todo esto para obtener nuevos problemas matemáticamente tratables. Scherer y Gahinet, proponen el uso de desigualdades matriciales lineales (LMI) para resolver el problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, pero bajo consideraciones muy restrictivas y no naturales. La metodología LMI también fue presentada en Corrêa *et al*, [11], donde, mediante una adaptación, una secuencia de restricciones \mathcal{H}_2 fue construída aproximando la restricción original \mathcal{H}_∞ mediante una adaptación, cada restricción \mathcal{H}_2 define un problema \mathcal{H}_2 puro que puede ser resuelto como un problema dual cuya solución es dada explícitamente. La secuencia de estas soluciones se aproxima a la solución del problema original, cuando ella existe. En realidad, si se desea un controlador de orden finita solo es posible obtenerse aproximaciones²². Una primera prueba de la existencia de la solución del problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fue dada por Silveira y Ades, [38], ellos buscaron la solución en el espacio generado por el completamiento del conjunto de funciones reales racionales propias y estables bajo la norma definida por el crite-

²¹A mediados de la década del 70, se desarrolló una parametrización de todos los controladores que estabilizan una determinada planta (Youla et al, [48]). Esta parametrización sirvió como base para la construcción de criterios cuadráticos, en los cuales la variable optimizada es el controlador.

²²Megretski, [32], demostró que la solución óptima del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es de orden infinito siempre que la restricción \mathcal{H}_∞ esté activa. Si esta restricción está inactiva, el criterio es cuadrático y una fórmula explícita para la solución se puede obtener (Silveira et al, [37]).

rio del término cuadrático. Así, truncandose el conjunto, se determina *a priori* el orden de la aproximación a ser calculada y con auxilio de un método de optimización apropiado se ajustan los coeficientes de los vectores escogidos como base del espacio solución.

1.4. Objetivo de la tesis

El objetivo del presente trabajo tiene tres partes. Primero, usar tres metodologías de diseño de controladores de realimentación, estas son: control \mathcal{H}_2 , control \mathcal{H}_∞ y control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Las especificaciones de diseño son la atenuación de vibraciones y la estabilidad robusta. Segundo, implementar via simulación computacional los controladores diseñados. El sistema controlado está definido como mostrado en la Fig. 1.6 donde la planta es una viga flexible simplemente apoyada²³. Tercero, utilizar los resultados de la simulación computacional para comparar tanto las ventajas como las desventajas de los tres métodos de diseño de controladores. El mérito de cada controlador se basará en la capacidad de atenuar vibraciones, las características de robustez en estabilidad respecto a la dinámica no-modelada y la facilidad de diseño. Los resultados de la aplicación indicarán que el desempeño está fuertemente relacionado a la estabilidad, es decir se enfatizará la existencia del compromiso estabilidad-desempeño.

Siendo que el presente estudio se centrará en la atenuación de vibraciones y en las propiedades de robustez en estabilidad del grupo de controladores seleccionado, se debe notar que otras propiedades de control muy importantes tales como rastreamiento de señales de referencia y el efecto de incertezas paramétricas

²³El término *estructura flexible* tiene diferentes interpretaciones dependiendo de los recursos y la aplicación; para propósitos del presente trabajo, una estructura flexible es:

- un sistema lineal;
- de dimensión finita;
- controlable y observable; y
- sus polos son complejos con partes reales pequeñas;
- sus polos no están muy próximos entre sí.

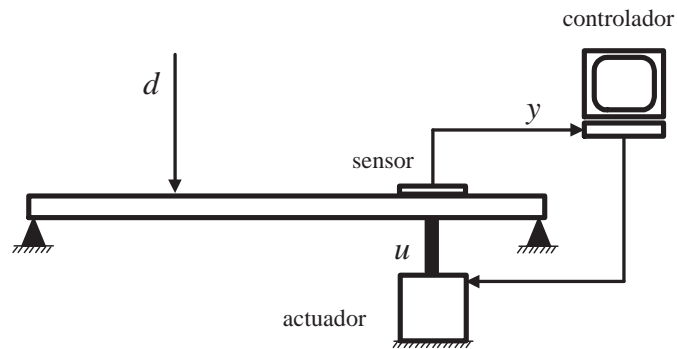


Figura 1.6: Viga flexible simplemente apoyada con un sensor y un actuador

pueden hacer que el resultado de la comparación de controladores sea diferente. Aunque no se pueda llegar a conclusiones definitivas en relación al mérito de cada método de diseño, los resultados de este estudio pretenden como mínimo demostrar de alguna forma la dificultad de los aspectos prácticos asociados con cada uno de los abordajes. De hecho, la mayor lección que se puede sacar de este trabajo es la importancia de considerar errores de modelo y la utilidad de métodos de diseño que son adaptados para alcanzar un objetivo de diseño crítico: desempeño óptimo con estabilidad robusta.

Capítulo 2

MODELADO DE LA VIGA FLEXIBLE

En el presente trabajo se considera un modelo aproximado de viga flexible simplemente apoyada. Para propósitos de control es mucho más útil aproximar el sistema por un sistema de dimensión finita, esto a pesar de que muchos sistemas, en especial el que se trabajará en esta tesis, pueden ser modelados como un sistema de parámetros distribuidos.

Dado que la viga representa un problema de valor de contorno homogéneo, se supone que la deflexión puede ser expresada como una serie finita compuesta por funciones que dependen de las coordenadas espaciales (modos) multiplicadas por las coordenadas generalizadas que dependen del tiempo (coordenadas modales). Después de considerar condiciones de ortogonalidad para los modos y siendo que los modos satisfacen todas las condiciones de contorno, se realizan las debidas simplificaciones y se obtiene la ecuación de movimiento de la viga flexible. Como fuente de amortiguamiento de la viga flexible se considera un amortiguamiento viscoso, el cual será representado por el amortiguamiento modal.

El cálculo de los controladores usando las diversas técnicas de control, en especial el control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, involucra una gran cantidad de operaciones con matrices. La presencia de matrices mal condicionadas en las diversas operaciones conlleva a problemas numéricos. Así, para evitar problemas numéricos, se realiza una adimensionalización del sistema mediante una adimensionalización directa de

las ecuaciones estándar del sistema^{1 2}. El grupo adimensional encontrado durante la adimensionalización de la ecuación dinámica es el mismo grupo adimensional calculado usando el Teorema de Pi-Buckingham. Este grupo adimensional caracteriza el conjunto de vigas que exhiben una misma dinámica, o sea, que son dinámicamente equivalentes.

La salida del sistema es la deflexión transversal medida en un punto de la viga. La ecuación de movimiento junto con la ecuación de salida son expresadas en una representación espacio de estados en la que la matriz del sistema es diagonal por bloques: representación espacio de estados modal.

2.1. Modelo matemático del sistema

La viga flexible puede ser modelada como una viga de Euler-Bernoulli en una configuración simplemente apoyada, ver Fig. 2.1 abajo donde $w(x, t)$ denota la deflexión elástica de la viga medida a partir de su posición en reposo.

La deflexión elástica de la viga $w(x, t)$ está gobernada por la siguiente ecuación diferencial parcial³:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = Q(x, t) \delta(x - x_e), \quad (2.1)$$

donde E , I , A , $Q(x, t)$, $\delta(x - x_e)$, x_e y ρ representan el módulo de Young, momento de inercia, área transversal, fuerza externa por unidad de longitud, función delta de Dirac, coordenada axial del punto donde la fuerza externa es aplicada y la densidad de masa de la viga, respectivamente.

Considerando una configuración de la viga simplemente apoyada, existen

¹Otro método de adimensionalización es presentado en Villota, [45], donde se adimensionaliza la dinámica del sistema a partir de los niveles de energía siguiendo con la metodología desarrollada por Ghanekar, [19].

²Las leyes de escalamiento necesarias para recuperar el controlador y demás especificaciones están dadas en el Apéndice D.

³Para mayor información ver [33].

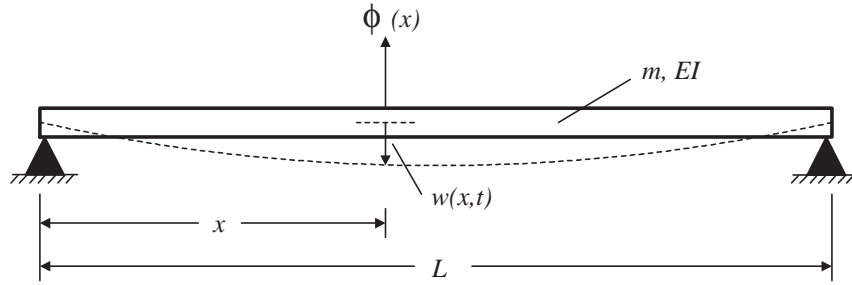


Figura 2.1: Configuración de la viga simplemente apoyada

condiciones de contorno que deben ser satisfechas en la solución de (2.1). Establecida la configuración, la viga no puede presentar deflexión en los extremos y el momento flector en los mismos debe ser nulo. Traduciendo lo antes dicho a expresiones matemáticas se obtiene:

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{EI\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad w(L, t) = 0, \quad \frac{EI\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.2)$$

Sabiendo que la viga representa un problema de valor de contorno homogéneo, la deflexión $w(x, t)$ puede ser separada en sus componentes temporal, $q(t)$, y espacial, $\phi(x)$, tal que:

$$w(x, t) = \phi(x)q(t). \quad (2.3)$$

Las autofunciones, $\phi(x)$, son ortogonales y forman una base para $w(x, t)$, ellas son escogidas de acuerdo a la siguiente condición:

$$\int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)\rho A dx = \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

siendo que δ_{ij} es la función Delta de Kronecker. Como resultado, la deflexión de la viga puede ser expandida como una suma de los modos, $\phi(x)$, ponderados por las coordenadas modales, $q(t)$ ⁴:

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)q_i(t). \quad (2.5)$$

⁴Método de los modos supuestos, ver [33].

La expresión del modo, $\phi_i(x)$, calculada sustituyendo (2.3) en (2.1) bajo las condiciones (2.2) y (2.4), viene a ser la solución del problema de vibración libre ($Q(t) = 0$):

$$\phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \quad (2.6)$$

y la frecuencia natural correspondiente, ω_i , calculada resolviendo (2.1), con $Q(t) = 0$, previa sustitución de (2.3) en (2.1) y sujeta a las condiciones (2.2), es igual a:

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (2.7)$$

Ver Fig. 2.2 para una mejor visualización de los modos de vibración de una viga flexible en una configuración simplemente apoyada.

Los cálculos realizados hasta este punto no toman en cuenta el amortiguamiento de la viga, esto significa que si la viga fuera excitada por cualquier fuerza, ella comenzaría a vibrar y esta vibración podría durar infinitamente. Sabiendo que en la práctica todos los sistemas tienen cierto grado de amortiguamiento, se considerará una fuerza de amortiguamiento en el modelo de la viga.

Suponiendo que la fuerza de amortiguamiento en cualquier punto x es proporcional a la variación en la deflexión, $\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}$, y opuesta a la dirección de esta variación, se obtiene:

$$f_a(x,t) = -C_a \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}, \quad (2.8)$$

siendo que C_a es un operador lineal homogéneo. Expresando el operador de amortiguamiento, C_a , como una combinación lineal de la rigidez y de la masa (amortiguamiento proporcional), se obtiene el factor de amortiguamiento modal, ξ_i , el cual se considerará en la ecuación de movimiento modal del sistema.

Insertando (2.8) en (2.1) se obtiene la ecuación de movimiento para el

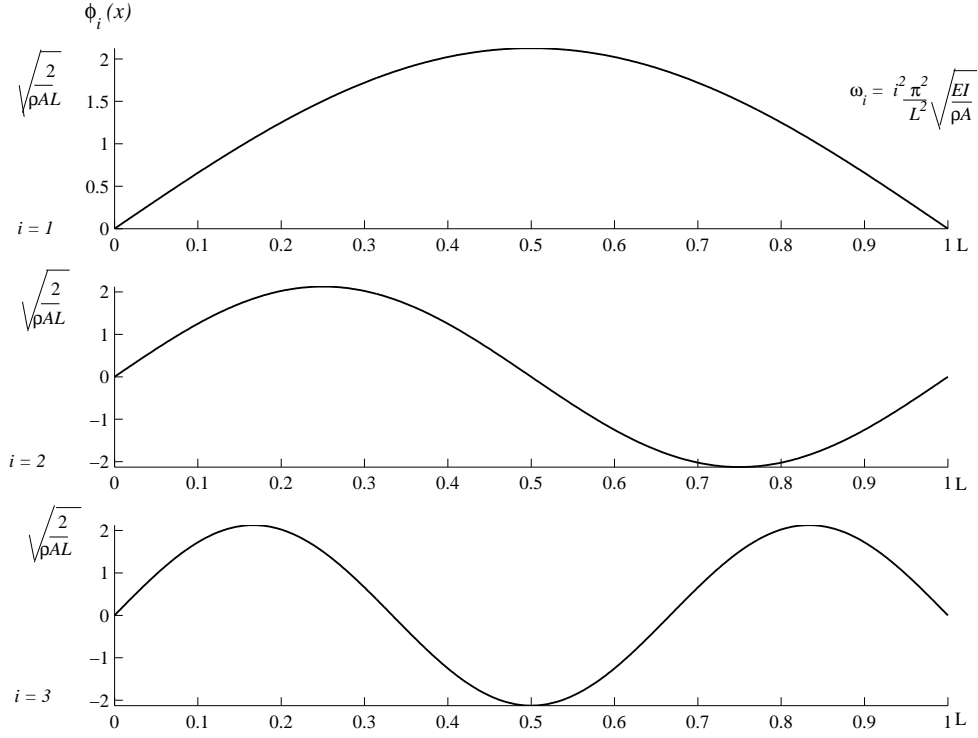


Figura 2.2: Primeros tres modos de vibración de la viga simplemente apoyada

sistema con amortiguamiento:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + C_a \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = Q(x, t) \delta(x - x_e). \quad (2.9)$$

Usando (2.3), la ecuación de movimiento (2.9) se puede reescribir como:

$$EI \phi^{iv}(x) q(t) + C_a \phi(x) \dot{q}(t) + \rho A \phi(x) \ddot{q}(t) = Q(x, t) \delta(x - x_e), \quad (2.10)$$

donde, por simplificación de la notación, $(\dot{})$ y $(\ddot{})$ representan la derivada en relación al tiempo y a la posición, respectivamente.

Sustituyendo (2.5), la expansión de $w(x, t)$, y (2.4), las condiciones de ortogonalidad, en (2.10) y considerando que se tiene amortiguamiento proporcional, la ecuación de movimiento para la i -ésima coordenada modal es dada por:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q(t) \phi_i(x_e). \quad (2.11)$$

2.2. Modelo adimensional del sistema

Las variables son adimensionalizadas mediante su representación como una fracción de un valor de referencia con las mismas unidades. Para el sistema a trabajar, viga flexible, las variables con unidad de longitud serán adimensionalizadas por la longitud de la viga, L , y las variables con unidades de tiempo serán adimensionalizadas por una frecuencia de referencia, Ω . Las ecuaciones adimensionales que describen la dinámica del sistema pueden ser determinadas adimensionalizando directamente las ecuaciones dimensionales estándar.

2.2.1. Ecuaciones dimensionales

Las ecuaciones dimensionales estándar para la i -ésima coordenada modal son reescritas a continuación:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = Q(t)\phi_i(x_e), \quad (2.12)$$

$$\phi_i^{iv}(x) - \frac{\rho A}{EI}\omega_i^2\phi_i(x) = 0. \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) resulta al sustituir (2.3) en (2.1) y hacer $Q(t) = 0$, todo esto para calcular los modos y frecuencias naturales (problema de vibración libre).

2.2.2. Ecuaciones adimensionales

Para obtener las ecuaciones adimensionales se adimensionalizan las variables dimensionales en (2.12) y (2.13). Las variables adimensionales vienen a ser:

$$\text{Posición: } \eta = \frac{x}{L},$$

$$\text{Tiempo: } \tau = \Omega t,$$

$$\text{Modo: } \hat{\phi}_i(\eta) = \frac{1}{L}\phi_i(x),$$

$$\text{Coordenada modal: } \hat{q}_i(\tau) = q_i(t),$$

Frecuencia natural: $\hat{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\Omega}$,

Factor de amortiguamiento: $\hat{\xi}_i = \xi_i$.

Escribiendo las variables dimensionales en función de las variables adimensionales, de (2.12) se obtiene la ecuación de movimiento adimensional para la i -ésima coordenada modal:

$$\ddot{\hat{q}}_i(\tau) + 2\hat{\xi}_i\hat{\omega}_i\dot{\hat{q}}_i(\tau) + \hat{\omega}_i^2\hat{q}_i(\tau) = \hat{Q}(\tau)\hat{\phi}_i(\eta_e), \quad (2.14)$$

donde la fuerza adimensional, $\hat{Q}(\tau)$, es definida como:

$$\hat{Q}(\tau) = \frac{L}{\Omega^2 I_b} Q(t), \quad (2.15)$$

siendo que $I_b = \frac{1}{3}\rho AL^3$ representa la inercia de la viga.

Adimensionalizando (2.13) se obtiene la ecuación para la i -ésima coordenada modal adimensional:

$$\hat{\phi}_i^{iv}(\eta) - \frac{\rho AL^4 \Omega^2}{EI} \hat{\omega}_i^2 \hat{\phi}_i(\eta) = 0. \quad (2.16)$$

Variable de salida

La variable de salida de interés es la deflexión. La ecuación dimensional para la deflexión en cualquier punto x de la viga, es:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t).$$

La variable de salida del sistema adimensional es la deflexión adimensional evaluada en la posición η_s . Adimensionalizando la expresión arriba presentada resulta la deflexión adimensional:

$$\hat{w}(\eta, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\phi}_i(\eta) \hat{q}_i(\tau). \quad (2.17)$$

La ecuación de movimiento modal adimensional de la viga está dada por la sumatoria infinita de las ecuaciones de movimiento adimensionales para las coordenadas modales, esto por (2.17). Luego, aplicando sumatoria de $i = 0$ hasta $i \rightarrow \infty$ en (2.14) se tiene que la ecuación de movimiento modal adimensional de la viga es:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\hat{q}}_i(\tau) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\xi}_i \hat{\omega}_i \dot{\hat{q}}_i(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\omega}_i^2 \hat{q}_i(\tau) = \hat{Q}(\tau) \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\phi}_i(\eta_e). \quad (2.18)$$

2.2.3. Grupo adimensional

Un grupo adimensional puede ser identificado de (2.14) y (2.16), este grupo resulta ser igual a la inversa del grupo adimensional Π , calculado usando el Teorema de Pi-Buckingham.

$$\frac{\rho AL^4 \Omega^2}{EI} = \Pi^{-1}. \quad (2.19)$$

Cabe resaltar que todas las vigas que cuenten con el mismo valor para el grupo adimensional, presentarán el mismo comportamiento dinámico.

2.3. Representación espacio de estados

La ecuación de movimiento adimensional de la viga, (2.18), y la ecuación de salida, (2.17), pueden ser llevadas a una representación espacio de estados.

Para obtener una representación espacio de estados de orden finito es necesario expresar la deflexión de la viga usando un número finito de modos. Esto es posible truncando la serie (2.17) en algún n (número natural) finito. Esto es:

$$\hat{w}(\eta, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\phi}_i(\eta) \hat{q}_i(\tau) \approx \sum_{i=1}^n \hat{\phi}_i(\eta) \hat{q}_i(\tau).$$

Capítulo 3

TEORÍA BÁSICA DE CONTROL

Sin sistemas de control no habría industria, vehículos, computadoras, ambientes regulados - en resumen, no habría tecnología. Los sistemas de control son los que hacen que las máquinas, en un sentido amplio del término, funcionen como deseado. Los sistemas de control están en su mayoría basados en el principio de realimentación, donde la señal a ser controlada es comparada con una señal de referencia deseada y la discrepancia es usada para calcular una acción correctiva de control. El objetivo de este capítulo y el próximo es presentar de la forma más simple posible la teoría del diseño de los sistemas de control por realimentación.

Una vez definidos el problema de control y los pasos a seguir en el diseño de los sistemas de control, la teoría presentada se concentra en el sistema de control por realimentación. Inicialmente se revisa el diseño de sistemas de control por realimentación para sistemas SISO. Se ha probado que las técnicas de control clásico (útiles en los sistemas SISO) proveen gran información sobre los beneficios, limitaciones y problemas del control por realimentación. Las ideas básicas y técnicas para el control de sistemas SISO son extendidas en el análisis y diseño de sistemas de control multivariable, MIMO. Posteriormente se describe la formulación general del problema de control, donde, usando una configuración general de control es posible formular los diversos problemas de control. Finalmente, se presentan varias especificaciones de diseño: desempeño, estabilidad y robustez.

3.1. Diseño de sistemas de control

El procedimiento típico para el diseño de un sistema de control se puede resumir en el diagrama de procesos de la Fig. 3.1.

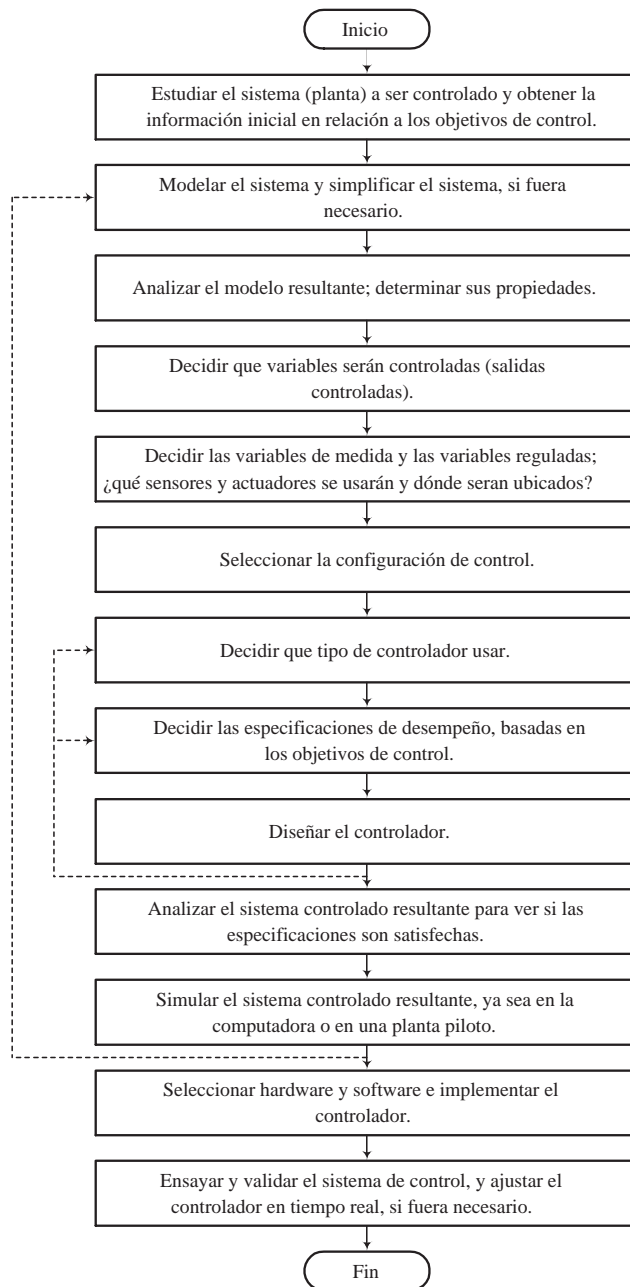


Figura 3.1: Diagrama de procesos del diseño del sistema de control

3.2. El problema de control

El objetivo de un sistema de control es hacer que la salida y se comporte como deseado mediante la manipulación de la entrada a la planta u . El problema del regulador consiste en manipular u para contrarrestar el efecto del disturbio d . El problema del servomecanismo manipula u para mantener la salida cerca a una entrada de referencia dada, r . En ambos casos, regulador y servomecanismo, se desea mantener el error de control $e = y - r$ pequeño. El controlador K es el algoritmo usado para ajustar u y se basa en la información disponible. Para obtener un buen diseño de K se necesita información *a priori* acerca de las entradas esperadas (disturbios y señal de referencia), del modelo de la planta (G) y del modelo del disturbio (G_d). Todos los cálculos se realizan para modelos lineales de la siguiente forma:

$$y = Gu + G_d d. \quad (3.1)$$

La mayor fuente de inconvenientes en el diseño de controladores se encuentra en los modelos (G, G_d), ya que ellos pueden ser inexactos o pueden variar con el tiempo. En particular, inexactitudes en G pueden causar problemas debido a que la planta será parte de un lazo de realimentación. Para enfrentar tal problema se hace uso del concepto de modelo de incerteza, esto significa que en vez de un único modelo G se estudia una clase de modelos $G_P = G + E$, donde la “incerteza” o “perturbación” E es limitada, pero de cualquier forma desconocida. En la mayoría de los casos se usan funciones de ponderación, $W(s)$, para expresar $E = W\Delta$ en términos de una perturbación normalizada, Δ , donde la magnitud (norma) de Δ es menor o igual a 1.

Los siguientes términos son útiles al definir el problema de control:

Estabilidad Nominal (EN), el sistema es estable sin considerar el modelo de incerteza.

Desempeño Nominal (DN), el sistema satisface las especificaciones de desempeño sin considerar el modelo de incerteza.

Estabilidad Robusta (ER), el sistema es estable para todas las plantas perturbadas alrededor del modelo nominal hasta el peor caso del modelo de incerteza.

Desempeño Robusto (DR), el sistema satisface las especificaciones de desempeño para todas las plantas perturbadas alrededor del modelo nominal hasta el peor caso del modelo de incerteza.

3.3. Control por realimentación

En este punto es pertinente preguntarse ¿por qué usar control por “realimentación” en vez de simplemente usar control por “alimentación directa”? Nótese que un controlador por alimentación directa “perfecto” es obtenido removiendo la señal de realimentación y usando el controlador:

$$K(s) = G^{-1}(s). \quad (3.2)$$

Suponiendo que la planta y el controlador son ambos estables y que todos los disturbios son conocidos, esto es, conocemos $G_d d$ y el efecto de los disturbios en las salidas. Entonces, con $r - G_d d$ como la entrada al controlador, el controlador de “alimentación directa” lleva al control perfecto:

$$y = Gu + G_d d = GK(r - G_d d) + G_d d = r.$$

Desafortunadamente, G nunca es un modelo exacto, y los disturbios nunca son conocidos exactamente. Finalmente, las razones fundamentales para usar control por realimentación son las siguientes:

1. Incerteza en las señales - disturbios desconocidos.
2. Incerteza en el modelo.
3. Planta inestable¹.

3.3.1. Controlador de un grado de libertad (1-GL)

El controlador de un grado de libertad con estructura de realimentación negativa presentado en la Fig. 3.2 permite mostrar de forma clara la deducción de funciones de transferencia notables así como su interpretación física.

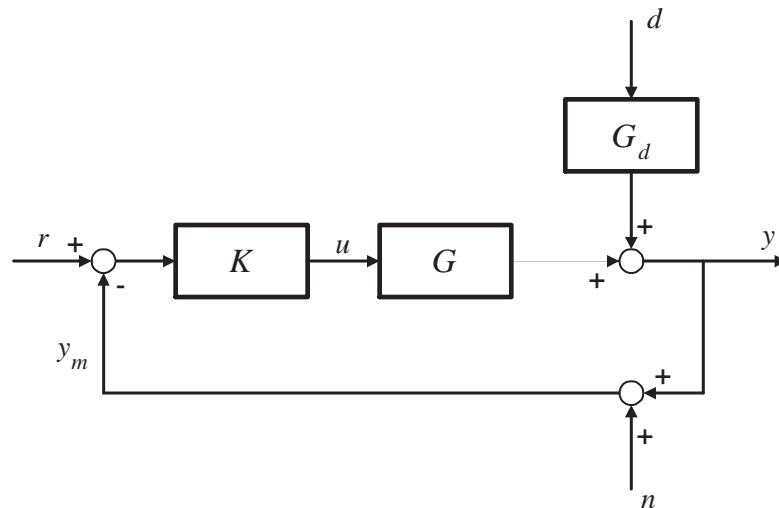


Figura 3.2: Controlador de un grado de libertad (1-GL)

La entrada del controlador $K(s)$ es $r - y_m$ donde $y_m = y + n$ es la salida medida y n es el ruido de medida. Luego, la entrada a la planta es:

$$u = K(s)(r - y - n). \quad (3.3)$$

El objetivo de control es manipular u (en el diseño de K) tal que el error de control e permanezca pequeño a pesar de los disturbios d . El error de control e

¹Plantas inestables sólo pueden ser estabilizadas por realimentación, Teoría de Estabilidad Interna

es definido como:

$$e = y - r, \quad (3.4)$$

donde r denota el valor de referencia para la salida.

Funciones de transferencia en lazo cerrado

El modelo de la planta es escrito como:

$$y = G(s)u + G_d(s)d. \quad (3.5)$$

Para un sistema con un controlador 1-GL, la sustitución de (3.3) en (3.5) lleva a:

$$y = GK(r - y - n) + G_d d,$$

o, agrupando términos:

$$(I + GK)y = GKr + G_d d - GK n. \quad (3.6)$$

Finalmente, la respuesta en lazo cerrado es:

$$y = \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_T r + \underbrace{(I + GK)^{-1}G_d}_S d - \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_T n. \quad (3.7)$$

Similar análisis es efectuado con el error de control e y la señal de entrada a la planta u resultando en:

$$e = y - r = -Sr + SG_d d - Tn, \quad (3.8)$$

$$u = K Sr - K S G_d d - K T n. \quad (3.9)$$

La siguiente notación y terminología es usada en el desarrollo del presente

trabajo:

$L = GK$ función de transferencia en lazo
abierto

$S = (I + GK)^{-1} = (I + L)^{-1}$ función de sensibilidad

$T = (I + GK)^{-1}GK = (I + L)^{-1}L$ función de sensibilidad
complementaria

$U = (I + GK)^{-1}K = (I + L)^{-1}K$ función restricción de energía

Nótese que tanto S , como T y U son funciones de transferencia en lazo cerrado. Más específicamente, S es la función de transferencia que relaciona el disturbio con la salida del sistema mientras que T relaciona la señal de referencia con la salida del sistema. Cabe resaltar que el término sensibilidad complementaria para T viene de la siguiente identidad:

$$S + T = I. \quad (3.10)$$

El término función de sensibilidad es natural porque S da la reducción de sensibilidad alcanzada al usarse realimentación. Para ver esto, considerese el caso “lazo abierto” (no hay realimentación). Entonces:

$$y = GKr + G_d d + 0n, \quad (3.11)$$

y comparando con (3.7) se muestra que, con excepción del ruido, la respuesta con realimentación es obtenida premultiplicando a la derecha por S .

3.3.2. Controlador de dos grados de libertad (2-GL)

Típicamente, para un rastreamiento de señales de referencia, se requiere que el controlador sea de la forma $\frac{1}{s}G^{-1}$, mientras que para una atenuación de disturbios, se requiere que sea de la forma $\frac{1}{s}G^{-1}G_d$. Como resultado, los objetivos de control antes mencionados no pueden ser alcanzados simultáneamente con un único controlador de realimentación. La solución es usar un controlador de dos grados de libertad donde la señal de referencia r y la salida medida y_m son tratados independientemente por el controlador en vez de operar en su diferencia $r - y_m$. Como resultado, el controlador es dividido en dos bloques como mostrado en la Fig. 3.3, donde K_y denota la parte de realimentación del controlador y K_r es un prefiltro de la señal de referencia. El controlador de realimentación K_y es usado para reducir el efecto de las incertezas (disturbios y errores de modelo) mientras que el prefiltro K_r es diseñado para mejorar el rastreamiento de la señal de referencia.

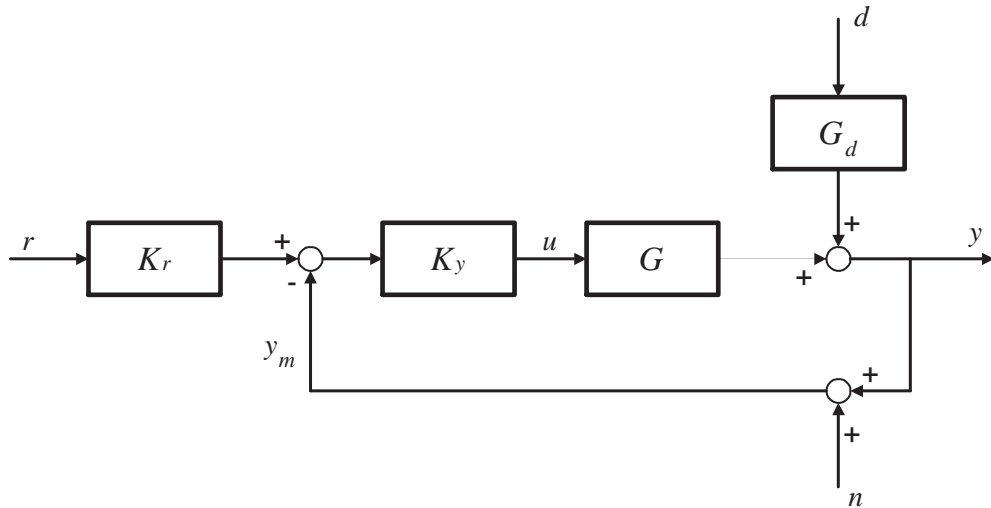


Figura 3.3: Controlador de dos grados de libertad (2-GL)

3.4. Formulación general del problema de control

La configuración general del problema de control, presentada en la Fig. 3.4, considera a P como la planta generalizada y a K como el controlador generalizado. Nótese que se usa una realimentación positiva. El objetivo del control consiste en minimizar alguna norma de la función de transferencia de w a z , por ejemplo, la norma \mathcal{H}_∞ . Como resultado, el problema del diseño del controlador se puede definir como:

“Encontrar un controlador K que basado en la información en v genere una señal de control u que contrarreste la influencia de w en z , de esta manera la norma de la función de transferencia en lazo cerrado de w a z es minimizada”

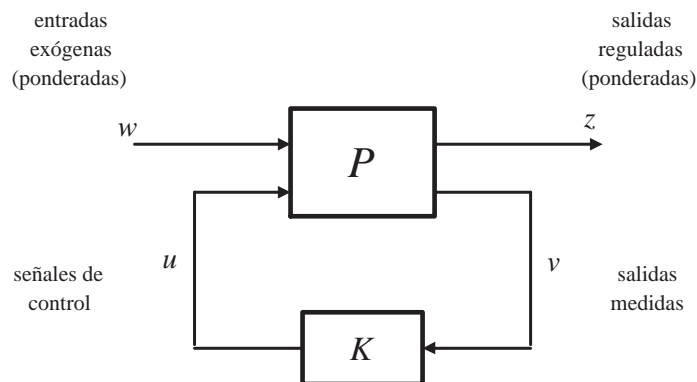


Figura 3.4: Configuración general de un sistema controlado sin modelo de incertezas

3.4.1. Obtención de la planta generalizada P

Para derivar P (y K) para un caso específico se debe encontrar su representación en diagrama de bloques y se deben identificar las señales w , z , u y v . Para construir P lo primero que se debe tener en cuenta es que P es un sistema en lazo abierto y que es obtenido rompiendo todas los lazos que conectan la planta

al controlador K . Por ejemplo, si se quiere calcular P de la Fig. 3.2, configuración del controlador de un grado de libertad, el primer paso es identificar las señales de entrada y salida para la planta generalizada (w , u , z y v):

$$w = \begin{bmatrix} d \\ r \\ n \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ y - r \end{bmatrix}; \quad v = r - y_m = r - y - n. \quad (3.12)$$

Del diagrama de bloques de la Fig. 3.2, y su representación equivalente, mostrada en la Fig. 3.5, resulta:

$$z = \begin{bmatrix} u \\ y - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ Gu + d - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0d + 0r + 0n + Iu \\ Id - Ir + 0n + Gu \end{bmatrix},$$

$$v = r - y_m = r - Gu - d - n = -Id + Ir - In - Gu,$$

luego P , que representa la matriz de funciones de transferencia de $\begin{bmatrix} w & u \end{bmatrix}^T$ a $\begin{bmatrix} z & v \end{bmatrix}^T$, es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ I & -I & 0 & G \\ -I & I & -I & -G \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Particionando la planta generalizada P

A menudo se usa P como:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} P_{zw} & P_{zu} \\ \hline P_{vw} & P_{vu} \end{array} \right], \quad (3.14)$$

tal que las partes sean compatibles con las señales w , z , u y v en la configuración generalizada:

$$z = P_{zw}w + P_{zu}u, \quad (3.15)$$

$$v = P_{vw}w + P_{vu}u. \quad (3.16)$$

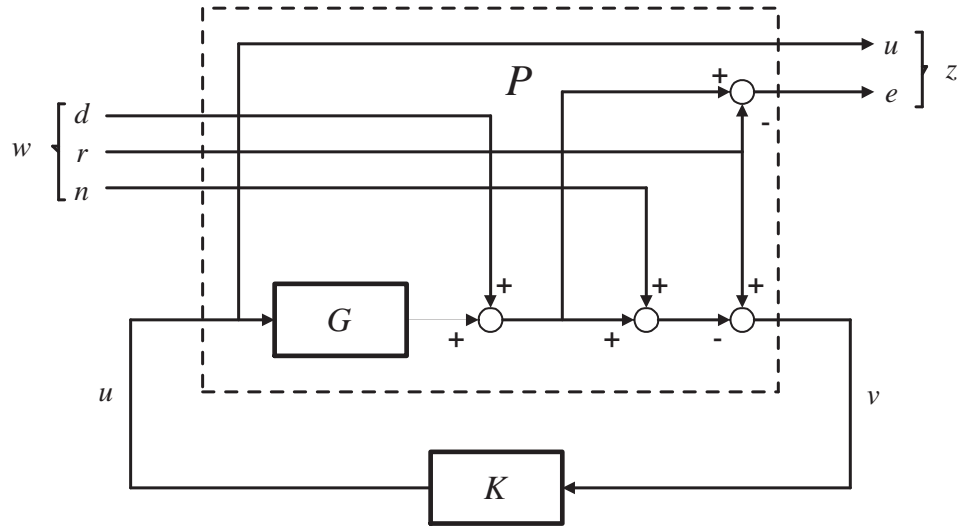


Figura 3.5: Representación equivalente del controlador de un grado de libertad

3.4.2. Configuración general del problema de control

Suponiendo que el controlador K está operando, entonces, además de (3.15) y (3.16) se tiene:

$$u = Kv. \quad (3.17)$$

Resolviendo z en términos de w se obtiene:

$$z = [P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vw}] w,$$

siempre que el $\det(I - P_{vu}K)$ no sea idéntico a cero².

Si se denomina N a la matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado de w a z , con el controlador K conectado a la planta, se tiene:

$$N = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vw}. \quad (3.18)$$

Entonces:

$$z = Nw. \quad (3.19)$$

²Esta condición es llamada también de buen posicionamiento y significa que el sistema es físicamente realizable.

Los elementos de la matriz de funciones de transferencia N son las funciones de transferencia del sistema en lazo cerrado de cada entrada exógena a cada variable controlada. Estos elementos pueden representar, por ejemplo, funciones de transferencia en lazo cerrado de algún disturbio a algún actuador, de algún ruido de medida a alguna variable interna o de alguna señal de referencia a algún actuador. La ecuación (3.18) muestra exactamente como cada una de estas funciones de transferencia depende del controlador K .

3.4.3. Diseño del control: incluyendo ponderaciones en P

Para obtener un problema de control significativo, por ejemplo, en términos de la norma \mathcal{H}_∞ o \mathcal{H}_2 , generalmente se incluyen ponderaciones W_z y W_w a la planta generalizada P , ver Fig. 3.6. Esto es, se considera la entrada exógena ponderada o normalizada $\tilde{w} = W_w w$ (donde w consiste en señales “físicas” entrando al sistema; disturbios, referencias y ruidos), y la salida controlada ponderada o normalizada $z = W_z \tilde{z}$ (donde \tilde{z} a menudo consiste en el error de control $y - r$ y la entrada manipulada u). Las matrices (funciones) de ponderación son generalmente dependientes de la frecuencia y típicamente seleccionadas para que las señales ponderadas w y z sean de magnitud unitaria, esto significa que la norma de w a z debe ser menor que 1.

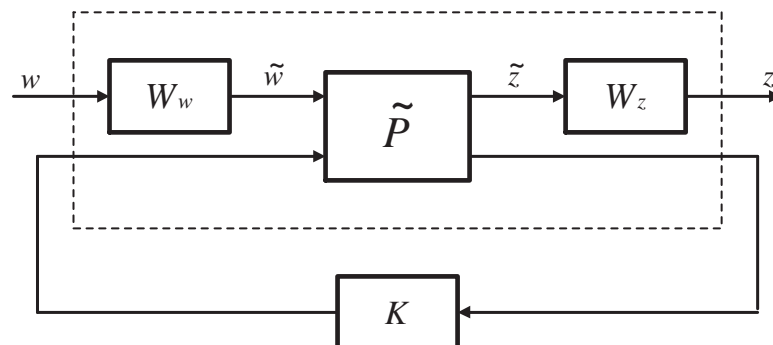


Figura 3.6: Configuración general de un sistema controlado sin modelo de incertezas incluyendo ponderaciones

Un ejemplo del uso de ponderaciones en el diseño de controladores es el problema de sensibilidad mixta. Considérese un problema de control \mathcal{H}_∞ o \mathcal{H}_2 donde se quiere limitar $\bar{\sigma}(S)$ (para desempeño), $\bar{\sigma}(T)$ (para robustez y para evitar la sensibilidad al ruido), y $\bar{\sigma}(KS)$ (para penalizar grandes entradas de control). Estos requerimientos pueden ser combinados en un problema de sensibilidad mixta \mathcal{H}_∞ o \mathcal{H}_2 :

$$\min_K \|N(K)\|_{\infty,2}, \quad N = \begin{bmatrix} W_u K S \\ W_T T \\ W_P S \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

donde K es el controlador estabilizante. En otras palabras, se tiene $z = Nw$ y el objetivo es minimizar la norma \mathcal{H}_∞ o \mathcal{H}_2 de w a z . N puede ser representado por el diagrama de bloques de la Fig. 3.7, donde w representa una señal de referencia ($w = -r$) o un disturbio ($w = d_y$), y z consiste en la entrada ponderada $z_1 = W_u u$, salida ponderada $z_2 = W_T y$, y error de control ponderado $z_3 = W_P(y - r)$. El siguiente conjunto de ecuaciones es obtenido de la Fig. 3.7:

$$\begin{aligned} z_1 &= W_u u, \\ z_2 &= W_T G u, \\ z_3 &= W_P w + W_P G u, \\ v &= -w - G u, \end{aligned}$$

luego la planta generalizada de $\begin{bmatrix} w & u \end{bmatrix}^T$ a $\begin{bmatrix} z & v \end{bmatrix}^T$ es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & W_u I \\ 0 & W_T G \\ W_P I & W_P G \\ -I & -G \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Particionando la planta generalizada se tiene:

$$P_{zw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_P I \end{bmatrix}, \quad P_{zu} = \begin{bmatrix} W_u I \\ W_T P \\ W_P G \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$P_{vw} = -I, \quad P_{vu} = -G. \quad (3.23)$$

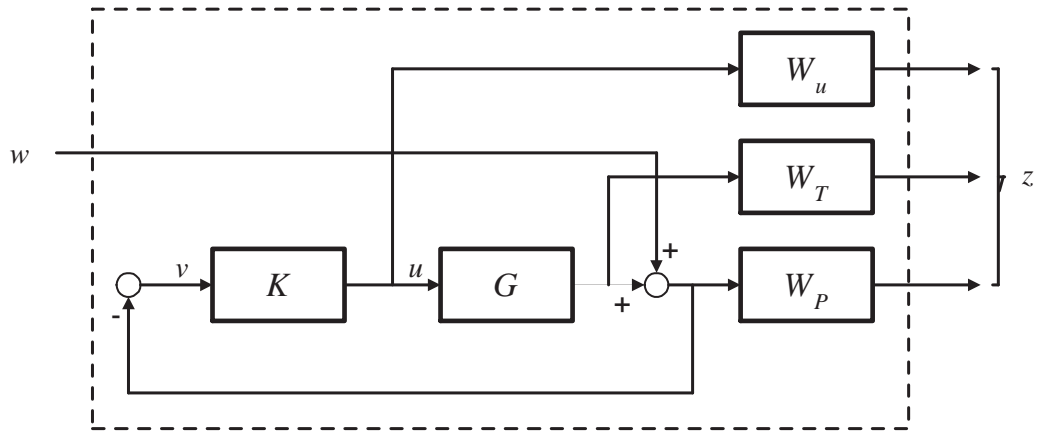


Figura 3.7: Diagrama de bloques correspondiente a $z = Nw$ en (3.20)

3.4.4. Modelado de la incerteza

Las incertezas de la planta y las inexactitudes paramétricas pueden ser modeladas de varias formas considerándose modelos en la forma de matrices de funciones de transferencia. Sean $G(s)$, representado por una matriz de funciones de transferencia $n_v \times n_u$, y $\Delta G(s)$, que denota alguna perturbación de $G(s)$, ambos con elementos reales racionales. La perturbación es denominada aditiva si la planta perturbada, G_Δ , es escrita como:

$$G_\Delta = G + \Delta G, \quad (3.24)$$

y es denominada multiplicativa cuando:

$$G_{\Delta} = (I_{n_v} + \Delta G)G, \quad (3.25)$$

o, también,

$$G_{\Delta} = G(I_{n_u} + \Delta G). \quad (3.26)$$

Es importante destacar que cada modelo de incerteza puede ser representado como:

$$G_{\Delta} = P_{vu} + P_{vw}\Delta P(I - P_{zw}\Delta P)^{-1}P_{zu}, \quad (3.27)$$

donde $\det(I - P_{zw}\Delta P) \neq 0$ y P es como definido en (3.14).

Las plantas estándar asociadas con las dos descripciones de incerteza antes presentadas, aditiva y multiplicativa, son:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline I & G \end{array} \right], \quad \Delta P = \Delta G, \quad (3.28)$$

y

$$P = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline G & G \end{array} \right], \quad \Delta P = \Delta G, \quad (3.29)$$

respectively.

Para las ecuaciones (3.24) y (3.25), (3.27) representa un modelo de incerteza generalizado. La representación de este modelo de incerteza en una configuración general de control, donde la incerteza Δ es insertada a través de un lazo de realimentación, se muestra en el diagrama de bloques de la Fig. 3.8.

Observando G_{Δ} como una familia de modelos perturbados para una clase dada de perturbaciones ΔP , se puede buscar un único controlador $K(s)$ que estabilice no sólo G (esto es, G_{Δ} con $\Delta P = 0$) pero también todos los miembros de la familia G_{Δ} .

3.4.5. Configuración general del problema de control incluyendo modelo de incerteza

La configuración general de un sistema de control presentada en la Fig. 3.4 puede ser extendida para incluir el modelo de incerteza, Fig. 3.8, planta generalizada nominal P con realimentación interna Δ ³. La matriz Δ es una matriz diagonal por bloques que incluye todas las perturbaciones posibles del sistema, por lo general es normalizada tal que $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. En muchos casos se hace referencia a Δ como una perturbación de realimentación; así, la planta generalizada perturbada que resulta de la perturbación de realimentación Δ se denota como $P^{pert}(\Delta)$.

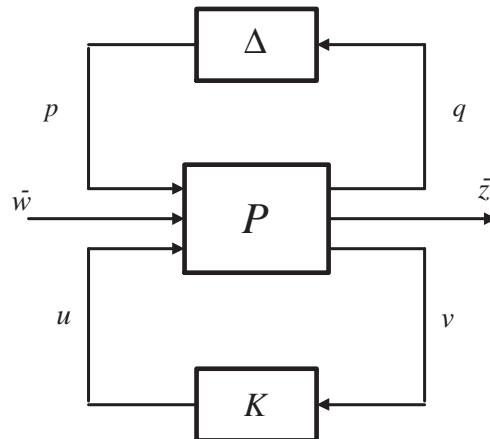


Figura 3.8: Configuración general de un sistema controlado con modelo de incertezas

La señal de entrada a la perturbación, denotada por q , puede ser considerada como una señal de salida para la planta P . Similarmente, la señal de salida de la perturbación, denotada por p , puede ser considerada como señal de entrada a la planta P . A continuación, se asume que la entrada exógena w y la señal

³En una configuración general se usa Δ para hacer referencia a ΔP .

regulada z son aumentadas para contener p y q , respectivamente, luego:

$$w = \begin{bmatrix} \bar{w} \\ p \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \bar{z} \\ q \end{bmatrix},$$

donde \bar{w} y \bar{z} denotan las señales originales de la Fig. 3.4. Es importante destacar que decir que p es una entrada exógena puede ser incorrecto dado que esta señal no se origina fuera de la planta, como las señales de referencia o las señales de disturbio.

Para describir la perturbación de realimentación en la planta P , se presenta la matriz de funciones de transferencia de la planta aumentada:

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} P_{\bar{z}\bar{w}} & P_{\bar{z}p} & P_{\bar{z}u} \\ \hline P_{q\bar{w}} & P_{qp} & P_{qu} \\ P_{v\bar{w}} & P_{vp} & P_{vu} \end{array} \right],$$

luego, la planta perturbada puede ser expresada como⁴:

$$P^{pert}(\Delta) = \left[\begin{array}{c|c} P_{\bar{z}\bar{w}} & P_{\bar{z}u} \\ \hline P_{v\bar{w}} & P_{vu} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} P_{\bar{z}p} \\ P_{vp} \end{array} \right] \Delta (I - P_{qp}\Delta)^{-1} \left[\begin{array}{cc} P_{q\bar{w}} & P_{qu} \end{array} \right] \quad (3.30)$$

Suponiendo que el controlador K es conectado a la planta $P^{pert}(\Delta)$, como mostrado en la Fig. 3.8, y sustituyendo (3.30) en (3.18) se encuentra que la matriz de funciones de transferencia del sistema perturbado en lazo cerrado es:

$$N^{pert}(\Delta) = N_{\bar{z}\bar{w}} + N_{\bar{z}p}\Delta(I - N_{qp}\Delta)^{-1}N_{q\bar{w}}, \quad (3.31)$$

donde:

$$N_{\bar{z}\bar{w}} = P_{\bar{z}\bar{w}} + P_{\bar{z}u}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{v\bar{w}}, \quad (3.32)$$

$$N_{\bar{z}p} = P_{\bar{z}p} + P_{\bar{z}u}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vp}, \quad (3.33)$$

⁴Cuando la realimentación de perturbación Δ es cero, se recupera la planta nominal.

$$N_{q\bar{w}} = P_{q\bar{w}} + P_{qu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{v\bar{w}}, \quad (3.34)$$

$$N_{qp} = P_{qp} + P_{qu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vp}. \quad (3.35)$$

Nótese las similitudes entre las Figs. 3.8 y 3.4, y las correspondientes ecuaciones (3.31) y (3.18). La figura 3.4 y (3.18) muestran el efecto de conectar el controlador a la planta nominal para formar el sistema en lazo cerrado nominal; mientras que la Fig. 3.8 y (3.31) muestran el efecto de conectar la perturbación de realimentación Δ al sistema en lazo cerrado nominal para formar el sistema en lazo cerrado perturbado.

Se puede interpretar:

$$N^{pert}(\Delta) - N_{\bar{z}\bar{w}} = N_{\bar{z}p}\Delta(I - N_{qp}\Delta)^{-1}N_{q\bar{w}} \quad (3.36)$$

como la variación de la matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado que es originada por la perturbación de realimentación Δ . Si las tres matrices de funciones de transferencia $N_{\bar{z}p}$, $N_{q\bar{w}}$ y N_{qp} son todas ‘pequeñas’, el diseño será robusto a las perturbaciones. Esta idea será más profundizada en la siguiente sección.

3.5. Especificaciones de diseño

En esta sección se presentan varias especificaciones de diseño en lazo cerrado. Estas especificaciones de diseño incluyen especificaciones de realizabilidad y de estabilidad interna, especificaciones de la respuesta del sistema en lazo cerrado a diversas señales de referencia y disturbios, así como también especificaciones de robustez que limitan la sensibilidad del sistema en lazo cerrado a cambios en el sistema a ser controlado.

3.5.1. Realizabilidad y estabilidad en lazo cerrado

En esta parte del trabajo se consideran especificaciones de diseño de realizabilidad y estabilidad interna en lazo cerrado. Así, se describe el conjunto de funciones de transferencia realizables con controladores que estabilizan la planta.

A. Realizabilidad

Una restricción importante en la matriz de funciones de transferencia $N \in \mathcal{N}$ (conjunto de todas las funciones de transferencia $n_z \times n_w$) es que ella debe ser la matriz de funciones de transferencia alcanzada por algún controlador K , en otras palabras, N debe tener la forma $N = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vw}$ para algún K . Esta restricción se llama realizabilidad.

$$\mathcal{N}_{rlzbl} = \{N \mid N = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vw}, \text{ para algún } K\}, \quad (3.37)$$

donde \mathcal{N}_{rlzbl} expresa las dependencias entre las varias funciones de transferencia en lazo cerrado que son elementos de N . Se puede decir que se tiene una función de transferencia a diseñar, K , mientras que la matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado, N , contiene varias funciones de transferencia (dependiendo de la cantidad de entradas y salidas) y las relaciones entre ellas vienen a ser grados de libertad faltantes.

B. Estabilidad interna

Se sabe que una función de transferencia es propia si tiene como mínimo la misma cantidad polos y ceros⁵ (o equivalentemente, si tiene una realización espacio de estados) y es estable si es propia y todos los polos tienen parte real negativa; finalmente, una matriz de funciones de transferencia es estable si y sólo

⁵Una función de transferencia es estrictamente propia cuando posee más polos que ceros y es bipropia cuando posee igual cantidad de polos y ceros.

si todos sus elementos son estables.

Considerese un sistema de control de 1-GL con:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \frac{10-s}{10+s} \quad \text{y} \quad K(s) = \frac{36+33s}{10-s}$$

Con este controlador K la función de transferencia en lazo cerrado, $T = GK(I + GK)^{-1}$:

$$T(s) = \frac{33s+36}{s^3+10s^2+33s+36} = \frac{33s+36}{(s+3)^2(s+4)}$$

es un filtro pasa-baja estable. Luego, para el T obtenido, se proyecta que $y \approx r$ después de cierto tiempo, lo que significa que el controlador provee buen rastreamiento de señales de referencia.

Si las únicas especificaciones fueran buen rastreamiento de señales de referencia y realizabilidad, el controlador K sería un buen controlador. El problema potencial con este controlador puede ser visto al realizarse una evaluación minuciosa de la matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado, (3.13) en (3.18):

$$N = \begin{bmatrix} -KS & KS & -KS \\ S & -S & -T \end{bmatrix},$$

donde $S = (I + GK)^{-1}$. Sustituyendo las funciones de transferencia G y K dadas se obtiene:

$$N = \begin{bmatrix} -\frac{s^2(s+10)(36+33s)}{(s+3)^2(s+4)(10-s)} & \frac{s^2(s+10)(36+33s)}{(s+3)^2(s+4)(10-s)} & -\frac{s^2(s+10)(36+33s)}{(s+3)^2(s+4)(10-s)} \\ \frac{s^2(s+10)}{(s+3)^2(s+4)} & -\frac{s^2(s+10)}{(s+3)^2(s+4)} & -\frac{33s+36}{(s+3)^2(s+4)} \end{bmatrix}.$$

Nótese que los elementos N_{11} , N_{12} y N_{13} , que son funciones de transferencia en lazo cerrado del disturbio, señal de referencia y ruido en el sensor a la señal de control, son inestables: por ejemplo, una señal de referencia con un pequeño pico puede causar que la señal del actuador tenga grandes picos, una situación por demás indeseable. Con el controlador K , la función de transferencia T es bastante benigna, más aún deseable, pero el sistema en lazo cerrado probablemente

requerirá grandes señales en el actuador. Esto lleva a pensar que para aceptar el controlador K , se debe examinar la matriz de funciones de transferencia en su totalidad y no sólo una función de transferencia tal como T .

Para estudiar el caso más general de estabilidad interna, definase:

n_K = número de polos de $K(s)$ ubicados en el semiplano complejo derecho abierto;
 n_P = número de polos de $P_{vu}(s)$ ubicados en el semiplano complejo derecho abierto; y los teoremas a continuación:

Teorema 1e El sistema es internamente estable si y sólo si es bien posicionado y las siguientes dos condiciones son satisfechas.

- (i) el número de polos de $P_{vu}(s)K(s)$ ubicados en el semiplano complejo derecho abierto es igual a $n_K + n_P$;
- (ii) $\Phi(s) = \det(I - P_{vu}(s)K(s))$ tiene todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo abierto ($(I - P_{vu}(s)K(s))^{-1}$ es estable). \square

O también, la versión MIMO del Teorema de Estabilidad de Nyquist:

Teorema 2e (Teorema de Estabilidad de Nyquist) El sistema es internamente estable si y sólo si es bien posicionado, la condición (i) en el Teorema 1e es satisfecha y el diagrama de Nyquist de $\Phi(j\omega)$ para $-\infty \leq \omega \leq \infty$ encierra el origen, $(0,0)$, $n_K + n_P$ veces en dirección contraria a las agujas del reloj. \square

3.5.2. Especificaciones de desempeño

A pesar de que la estabilidad es un punto importante, el objetivo real de usar sistemas de control es mejorar el desempeño, esto significa que la salida z se comporte de la forma deseada. Lo cierto es que la posibilidad de inducir inestabilidad es una de las desventajas del control por realimentación, de ahí que se deba contrapesar la estabilidad con la mejora en el desempeño. En esta sección

se consideran las especificaciones de desempeño al detalle, la clasificación de estas especificaciones se realiza según cuales sean las entradas y salidas que afectan al sistema.

A. Especificaciones entrada/salida

En esta parte, se considera la respuesta de la variable controlada z a una señal de referencia r . Nótese que, en general, la salida z se ve afectada por disturbios, ruidos, etc., sin embargo en esta parte del trabajo sólo se considerará la influencia de la señal de referencia.

A.1. Especificaciones de la respuesta a una función escalón

La respuesta a una función escalón da una buena indicación de la respuesta de la variable controlada a señales de referencia que son constantes por largos periodos de tiempo. En la Fig. 3.9 se simula la respuesta a una función escalón en la señal de referencia, las siguientes características pueden ser descritas:

Tiempo de crecimiento t_c , el tiempo que le toma a la salida alcanzar el 90 % de su valor final, usualmente se requiere que sea pequeño.

Tiempo de establecimiento t_e , el tiempo después del cual la salida permanece a un 5 % de su valor final, usualmente se requiere que sea pequeño.

Sobre impulso, el valor pico dividido por el valor final, que generalmente debe ser de 1.2 (20 %) o menos.

Razón de decaimiento, el ratio del segundo y del primer valor pico de la salida, que generalmente debe ser de 0.3 o menos.

Error en estado estacionario o rastreamiento asintótico, la diferencia entre el valor final de la salida y el valor final deseado, generalmente debe ser

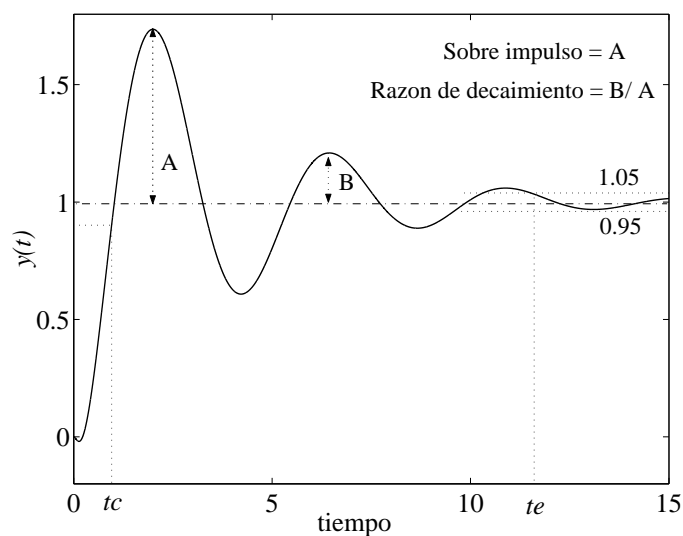


Figura 3.9: Características de la respuesta en lazo cerrado para una función escalón unitario como señal de referencia

pequeño.

El tiempo de crecimiento y el tiempo de establecimiento son medidas de la velocidad de respuesta en tanto que el sobre impulso, razón de decaimiento y error en estado estacionario están relacionados con la calidad de la respuesta.

A.2. Rastreamiento del error

En muchos casos, las señales de referencia son diversas y pueden cambiar frecuentemente de tal forma que no sean completamente predecibles. En estos casos, el objetivo es rastrear señales de referencia que estén en cambio permanente. Para esto, se define el error de rastreamiento como $e = z - r$; la diferencia entre la respuesta controlada y la señal de referencia.

La especificación del error de rastreamiento tiene la forma:

$$\mathcal{N}_{rast} = \{N \mid \|N_{er}\|_{2,\infty} \leq \alpha\}, \quad (3.38)$$

donde la matriz de funciones de transferencia de las señales de referencia al error

de rastreamiento, N_{er} , debe ser pequeña.

B. Especificaciones de regulación

En esta parte sólo se considera el efecto del disturbio sobre la salida controlada. Las especificaciones de regulación requieren que la relación salida controlada/disturbio sea “pequeña”. No sorprende encontrar especificaciones de regulación expresadas en la forma de desigualdades (limites de una norma).

B.1. Atenuación de disturbios específicos

La especificación de que un disturbio d es atenuado asintóticamente en e es:

$$\mathcal{N}_{aten-asint} = \{N \mid N_{ed}(0) = 0\}. \quad (3.39)$$

La especificación $\mathcal{N}_{aten-asint}$ puede ser aún más exigida si se limita la respuesta de N_{ed} a una función escalón. Por ejemplo, se puede requerir que el efecto de una función escalón unitario r sobre e decaiga en no más de 0.05 dentro de un tiempo dado t_{aten} . Tal especificación asegura que el sistema en lazo cerrado contrarreste el efecto de un disturbio aplicado rápidamente (o cambiado).

B.2. Regulación en el dominio de la frecuencia

El limite de la respuesta de e para el peor caso posible de disturbio d puede ser expresado como un limite de la norma \mathcal{H}_∞ :

$$\mathcal{N}_{hinf-reg} = \{N \mid \|N_{ed}\|_\infty \leq \alpha\},$$

que limita la ganancia de la función de transferencia N_{ed} en lazo cerrado. A menudo, esta especificación se modifica por ponderaciones en el dominio de la frecuencia, reflejando que se asume un valor máximo posible para el disturbio

ponderado o que se debe mantener un valor limite para el error ponderado. En una forma más clásica:

$$\mathcal{N}_{\text{hinf-reg}} = \{N \mid |N_{ed}(j\omega)| \leq l_{reg}(\omega), N_{ed} \text{ es estable}\}. \quad (3.40)$$

La interpretación clásica es que $l_{reg}(\omega)$ es un limite, que depende de la frecuencia, de la función de transferencia del disturbio a la salida controlada. La especificación (3.40) asegura que la función de transferencia del disturbio a la salida controlada sea pequeña en las frecuencias donde el disturbio tiene energía significativa.

B.3. Regulación del ancho de banda

La interpretación clásica de la regulación en el dominio de la frecuencia (3.40) muchas veces es expresada como la regulación del ancho de banda del sistema en lazo cerrado⁶. Una definición generalizada del ancho de banda del sistema en lazo cerrado es:

$$\phi_{ab}(N_{ed}) = \sup\{\Omega \mid |N_{ed}(j\omega)| \leq M(\omega) \text{ para todo } \omega < \Omega\} \quad (3.41)$$

que es la frecuencia más grande debajo de la cual se puede garantizar que la función de transferencia N_{ed} no es mayor que $20 \log_{10} M(\omega)$, donde $M(\omega)$ es una función que depende de la frecuencia. En la Fig. 3.10 se tiene que $M(\omega) = -30\text{dB}$ ⁷.

En términos de la velocidad de respuesta, a mayor ancho de banda, el tiempo de levantamiento es menor, luego el sistema responde más rápido. Esto porque las señales de alta frecuencia son más fácilmente pasadas a la salida. Un gran ancho de banda también indica un sistema sensible al ruido y a variacio-

⁶La región efectiva de control, donde se obtienen beneficios en términos del desempeño, o el ancho de banda del lazo cerrado $[0, \omega_B]$, comúnmente llamado ω_B , es la frecuencia donde $|S(j\omega)|$ primero cruza $1/\sqrt{2} = 0,707 (\approx -3\text{dB})$ desde abajo. El ancho de banda en términos de T , ω_{BT} , es la frecuencia más grande que cruza $1/\sqrt{2} = 0,707 (\approx -3\text{dB})$ desde arriba. Algunas veces se define el ancho de banda en lazo cerrado como un valor intermedio entre ω_B y ω_{BT} .

⁷A[dB] = $20 \log_{10} A$.

nes paramétricas. Por otro lado, si el ancho de banda es pequeño el tiempo de respuesta será mayor, como resultado sistema lento pero más robusto.

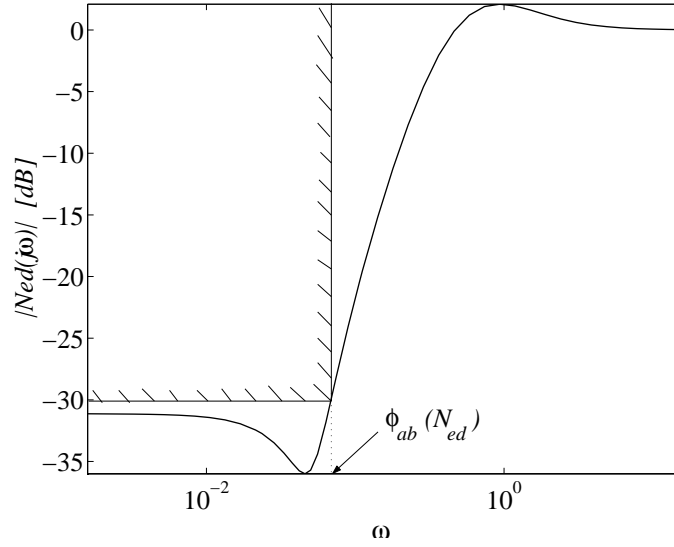


Figura 3.10: ϕ_{ad} es la mayor frecuencia para la que la función de transferencia del disturbio a la variable controlada, N_{ed} , no es mayor que -30dB

B.4. Regulación del pico del peor caso

Si se modela un disturbio como desconocido pero limitado, digamos, $\|d\|_\infty \leq M_d$, y se requiere que la desviación del pico del peor caso de la variable controlada debido a d sea menor que M_{max} :

$$\|N_{ed}d\|_\infty \leq M_{max} \text{ para } \|d\|_\infty \leq M_d,$$

entonces se puede especificar el limite de la ganancia del pico como:

$$\mathcal{N}_{pico} = \{N \mid \|N_{ed}\|_{pico} \leq M_{max}/M_d\}. \quad (3.42)$$

C. Esfuerzo de control

En cualquier sistema de control se debe limitar el tamaño de las señales del actuador:

$$\|u\|_{act} \leq M_{act},$$

para alguna norma apropiada $\|u\|_{act}$ y un límite M_{act} , por las siguientes razones:

Calentamiento del actuador, grandes señales del actuador pueden causar un calentamiento excesivo, lo cual puede dañar o causar desgaste en el sistema.

Saturación o sobrecarga, el exceder los límites de las señales de actuador puede dañar el actuador, o causar que la planta P sea un pobre modelo del sistema a ser controlado.

Potencia, combustible, o uso de recursos, grandes señales del actuador están asociadas con un excesivo consumo de combustible o uso de recursos.

Desgaste mecánico, cambios excesivamente rápidos en la señal del actuador pueden causar esfuerzos no deseados o desgaste excesivo.

Es importante destacar que los límites en tamaño de u pueden ser forzados al limitar de forma apropiada el tamaño de N_{ue} y N_{ud} , las funciones de transferencia en lazo cerrado de las señales de disturbio y error a la señal del actuador.

D. Efecto combinado de disturbios y señales de referencia

Hasta ahora se han tratado señales de referencia y disturbios por separado; las especificaciones vistas limitan el comportamiento del sistema en lazo cerrado cuando una, pero no las dos, de las entradas exógenas actúa. Suponiendo que en el sistema actúan un disturbio, una señal de referencia y un actuador, considerense

las dos especificaciones a continuación:

$$\mathcal{N}_e = \{N \mid e_{min}(t) \leq e(t) \leq e_{max}(t) \text{ para todo } t \geq 0\},$$

$$\mathcal{N}_u = \{N \mid \|N_{ud}\|_2 \leq 1\}.$$

La primera especificación requiere que la respuesta a la función escalón de r a e tenga como límites a e_{min} y e_{max} . Esto significa que en caso de aplicarse una función escalón como señal de referencia y un disturbio cero, la salida controlada e estará contenida en $[e_{min}, e_{max}]$. La segunda especificación requiere que cuando se aplique ruido blanco y señal de referencia cero al sistema, la norma \mathcal{H}_2 del actuador u sea menor que uno. Si la función escalón unitario es aplicada como señal de referencia r y el ruido blanco es aplicado como disturbio d simultáneamente, la respuesta e es simplemente la suma de las respuestas con las entradas actuando separadamente (propiedad de linealidad). Es muy probable que e no cumpla con la primera especificación debido a la presencia de d , y similarmente, el valor de u podría ser mayor que 1 debido a la presencia de la señal de referencia r .

Hasta ahora cada especificación considerada sólo se ha visto influenciada por una submatriz de N , que, al no considerar todas las columnas de N , toma en cuenta sólo el efecto de un grupo de entradas exógenas. Así, la especificación sobre una submatriz de N que contiene todas sus columnas considerará el efecto de todas las entradas exógenas actuando simultáneamente. Luego, para la segunda especificación se tiene:

$$\mathcal{N}_{u-comb} = \{N \mid \sqrt{\|N_{ud}\|_2^2 + N_{ur}(0)^2} \leq 1\},$$

donde la especificación es evaluada sobre la submatriz $\begin{bmatrix} N_{ur} & N_{ud} \end{bmatrix}$ de N , y se garantiza que la norma \mathcal{H}_2 de u no exceda uno cuando la señal de referencia es una función escalón unitario y el disturbio es ruido blanco. En el caso de la primera especificación, se ha de formar una especificación para la respuesta e que

considere a la función escalón unitario (una señal particular) y al ruido blanco (proceso estocástico). Esta puede ser:

$$\mathcal{N}_{e-comb} = \{N \mid \mathbf{Prob}(e_{min}(t) \leq e(t) \leq e_{max}(t) \text{ para } 0 \leq t \leq 10) \geq 0,90\}$$

donde $e = N_{er}r + N_{ed}d$, r es la función escalón unitario, y d es ruido blanco. Se puede decir que la especificación \mathcal{N}_{e-comb} requiere el 90% de probabilidad como mínimo para que la restricción N_e sea satisfecha durante los diez primeros segundos.

3.5.3. Especificaciones de robustez

En la sección anterior se han considerado diversas especificaciones que prescriben el comportamiento del sistema en lazo cerrado, se incluyen consideraciones de importancia tales como la respuesta en lazo cerrado cuando señales de referencia y disturbios afectan al sistema. Esta sección se centra en una consideración de suma importancia: ¿cuál sería el desempeño del sistema si la planta cambiara? en otras palabras, robustez o insensibilidad del sistema en lazo cerrado a variaciones o perturbaciones en la planta.

Hay varios métodos que miden cuan sensible es el sistema en lazo cerrado a modificaciones en la planta, tales como:

Sensibilidad diferencial, el tamaño de la derivada de N con respecto a P .

Peor caso de perturbación, el cambio más grande que puede ser causado por un conjunto específico de perturbaciones en la planta.

Margen⁸, el cambio más pequeño en la planta que puede causar que alguna

⁸El margen de ganancia (MG) es el factor por el cual la ganancia de la función de transferencia en lazo cerrado $|L(j\omega)|$ podría ser incrementada antes de que el sistema en lazo cerrado se torne inestable. El margen de fase (MF) dice cuanta fase negativa (fase de atraso) se puede

especificación sea violada.

A. Sensibilidad diferencial

H. Bode fue el primero que estudió sistemáticamente el efecto de pequeñas variaciones en las funciones de transferencia de lazo cerrado debido a pequeñas variaciones en la planta. Considerando la función de transferencia $T = (1 + GK)^{-1}GK$ para el sistema de control de 1-GL, él percibió que para cada frecuencia s :

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} \bigg/ \frac{T(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = S(s), \quad (3.43)$$

nótese que $\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} \bigg/ \frac{T(s)}{G(s)}$ recibió el nombre y el símbolo S de la clásica función de transferencia de sensibilidad. Así, se tiene una regla básica para el sistema de control de 1-GL:

$$\frac{\delta T(s)}{T(s)} \simeq S(s) \frac{\delta G(s)}{G(s)}, \quad (3.44)$$

(\simeq significa igual al primer orden), que se interpreta como: el cambio relativo de la función de transferencia $T(s)$ es, al primer orden, la función de transferencia de sensibilidad multiplicada por el cambio fraccional en $G(s)$. Por ejemplo, para una frecuencia ω con $|S(j\omega)| = 0,1$, un 10 % de la variación en el número complejo $G(s)$ conlleva a una variación en $T(s)$ de (aproximadamente) 1 %.

Adicionalmente, la función de transferencia de sensibilidad, (3.43), también puede ser expresada como:

$$S(s) = \frac{\partial \log T(s)}{\partial \log G(s)}, \quad (3.45)$$

y por esta razón $S(s)$ puede ser llamada sensibilidad logarítmica de T con respecto a G .

aumentar a $L(s)$ en la frecuencia ω_c ($|L(j\omega_c)| = 1$) antes que la fase a esta frecuencia sea -180° , que corresponde a la inestabilidad en lazo cerrado.

Es posible generalizar los resultados de Bode para el caso en que se tienen múltiples actuadores y múltiples sensores. Considerando el sistema de control de 2-GL, con función de transferencia $T = (I + GK_y)^{-1}GK_r$, si la planta es perturbada tal que G llega a ser $G + \delta G$, se tiene:

$$T + \delta T = (I + (G + \delta G)K_y)^{-1}(G + \delta G)K_r.$$

Manteniendo los términos de primer orden en δG se tiene:

$$\begin{aligned} \delta T &\simeq (I + GK_y)^{-1}\delta GK_r - (I + GK_y)^{-1}\delta GK_y(I + GK_y)^{-1}GK_r, \\ &= (I + GK_y)^{-1}\delta G(I + K_yG)^{-1}K_r, \\ &= S\delta G(I + K_yG)^{-1}K_r, \end{aligned} \tag{3.46}$$

donde $S = (I + GK_y)^{-1}$ es la matriz de sensibilidad del sistema de control de 2-GL. Suponiendo que la variación en G pueda ser expresada como:

$$\delta G = \delta G^{frac}G,$$

donde δG^{frac} se puede interpretar como la perturbación fraccional de G . De (3.46) resulta:

$$\delta T \simeq S\delta G^{frac}G(I + K_yG)^{-1}K_r = S\delta G^{frac}T,$$

tal que:

$$\delta T \simeq \delta T^{frac}T,$$

donde

$$\delta T^{frac} \simeq S\delta G^{frac}. \tag{3.47}$$

Esto es análogo a (3.43): la variación fraccional en la función de transferencia T es, al primer orden, la matriz de sensibilidad S multiplicada por la variación

fraccional en G . Como ejemplo, la especificación de diseño:

$$\sigma_{max}(\delta T^{frac}(j\omega)) \leq 0,01 \text{ para } \omega \leq \omega_{ab}, \quad \sigma_{max}(\delta G^{frac}(j\omega)) \leq 0,20,$$

limita la variación fraccional de primer orden en T a 1% sobre el ancho de banda ω_{ab} , a pesar de las variaciones en G de 20%, luego se tiene la especificación equivalente:

$$\sigma_{max}(S(j\omega)) \leq 0,05 \text{ para } \omega \leq \omega_{ab}.$$

La expresión general para la variación de primer orden de la matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado N debido a la variación en la matriz de funciones de transferencia de la planta es:

$$\begin{aligned} \delta N \simeq & \delta P_{zw} + \delta P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}\delta P_{yw} \\ & + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}\delta P_{yu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

El último término muestra que $\partial N/\partial P_{yu}$ tiene componentes que están dados por el producto de dos funciones de transferencia en lazo cerrado.

B. Especificaciones de robustez vía límites de ganancia

En la subsección anterior se estudió la sensibilidad diferencial a variaciones en la planta del sistema en lazo cerrado. El análisis de sensibilidad diferencial a menudo da una buena predicción de las variaciones que ocurren en un sistema en lazo cerrado siempre y cuando los cambios en la planta sean moderados, luego, los diseños que satisfacen especificaciones de sensibilidad diferencial son robustos a variaciones moderadas en la planta. Sin embargo, las especificaciones de sensibilidad diferencial no pueden garantizar que el sistema en lazo cerrado varíe dramáticamente, por ejemplo, se mantenga estable, cuando las variaciones en la planta sean de una cantidad no despreciable.

En esta subsección se describen las especificaciones de robustez, que, al igual que las especificaciones de sensibilidad diferencial, limitan la variación del sistema en lazo cerrado causada por una variación o perturbación en la planta. En este abordaje, sin embargo, se considera que:

- (i) Los tamaños de las variaciones de la planta son descritos explícitamente, por ejemplo, una ganancia particular varía entre $\pm 1\text{dB}$, a diferencia del abordaje de sensibilidad diferencial donde las variaciones en la planta son vagamente descritas como “pequeñas”.
- (ii) Las especificaciones de robustez limitan el peor caso posible de variación en el sistema de lazo cerrado causado por posibles perturbaciones. Las especificaciones de sensibilidad diferencial limitan las variaciones de primer orden del sistema en lazo cerrado.

Las especificaciones de robustez dan límites garantizados sobre la deterioración del desempeño, aún para variaciones en la planta “grandes”, para las cuales las extrapolaciones de sensibilidad diferencial son dudosas. Algunas desventajas de las especificaciones de robustez en relación a las especificaciones de sensibilidad diferencial son las siguientes:

- (i) No es posible modelar variaciones reales en la planta en la forma requerida por las especificaciones de robustez. Por ejemplo, no es posible saber si la variación en una ganancia específica es de $\pm 1\text{dB}$ o $\pm 0,5\text{dB}$.
- (ii) No es deseable limitar el peor caso posible de variación en el sistema de lazo cerrado, que resulta en un diseño conservativo. La especificación que limita las variaciones típicas en el sistema en lazo cerrado podría capturar mejor la intención del diseñador.

B.1 Especificaciones de robustez

Suponiendo que \mathcal{P} es cualquier conjunto de matrices de funciones de transferencia $(n_w + n_u) \times (n_z + n_v)$, \mathcal{P} será conocido como el conjunto de las plantas perturbadas, y sus elementos son las plantas perturbadas. Sea \mathcal{D} alguna especificación de desempeño, por ejemplo, una función booleana sobre las matrices de funciones de transferencia $n_z \times n_w$ y sea K cualquier matriz de funciones de transferencia $n_u \times n_v$.

Definición La especificación de robustez \mathcal{D}_{rob} formada por \mathcal{D} , \mathcal{P} y P es dada por:

\mathcal{D}_{rob} : \mathcal{D} se mantiene robustamente para K y \mathcal{P} , para cada K que satisface:

$$N = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vw}. \quad (3.49)$$

□

Entonces, una especificación de robustez es formada a partir de una especificación de diseño \mathcal{D} , un conjunto de plantas perturbadas \mathcal{P} , y la planta P . A lo largo de la subsección, P es entendida, luego la especificación de robustez será escrita como:

$$\mathcal{D}_{rob}(\mathcal{P}, \mathcal{D}).$$

Si la especificación de diseño \mathcal{D} es estable, por ejemplo, estabilidad en lazo cerrado, \mathcal{D}_{rob} se denomina especificación de estabilidad robusta asociada a \mathcal{P} y P . Con P sobreentendida, la especificación de estabilidad robusta asociada con el conjunto de plantas perturbadas \mathcal{P} será denotada por:

$$\mathcal{D}_{rob-est} = \mathcal{D}_{rob}(\mathcal{P}, \mathcal{D}_{estable}).$$

A continuación, algunos ejemplos de especificaciones de robustez organizadas por los conjuntos de plantas perturbadas asociadas y sus respectivos modelos de variaciones en la planta:

B.1.1. Conjunto de perturbaciones finitas en la planta

Dinámica despreciada, $\mathcal{D}_{rob-est}$ requiere que el sistema no sea inestable debido a las resonancias de alta frecuencia, al *roll-off* de la dinámica del sistema y a la dinámica del sensor, que son ignorados en el modelo P .

Modos fallidos, el modelo a controlar puede ser uno donde el actuador esté fallando. La especificación de estabilidad robusta garantiza que el sistema en lazo cerrado permanezca estable a pesar de las fallas.

B.1.2. Perturbaciones parametrizadas en la planta

Tolerancia de los componentes, un único controlador K es diseñado para varias plantas, por ejemplo, una línea de manufactura del sistema a ser controlado. El controlador es diseñado en base a una planta nominal, las variaciones paramétricas representan (ligeras) diferencias entre los sistemas manufacturados. El diseñar un controlador que robustamente alcance las especificaciones de desempeño evita la necesidad y el costo de estar ajustando cada sistema de control manufacturado.

Fatiga o desgaste de un componente, un controlador es diseñado para un sistema modelado por P , pero se desea que el sistema continúe trabajando aún si el sistema a controlar cambia debido a fatiga o desgaste de sus componentes. Diseñar un controlador que robustamente alcance las especificaciones de diseño evita la necesidad y el costo de estar ajustando periódicamente el sistema de control.

Cambios externamente inducidos, el sistema a ser controlado puede ser bien modelado como un sistema lineal invariante en el tiempo dependiendo de las condiciones externas de operación, que varían lentamente comparada con la dinámica del sistema. Ejemplo de estos cambios pueden ser inducidos por la temperatura, presión, etc. Diseñar un controlador que robustamente alcance las especificaciones de diseño puede evitar la necesidad de un controlador de ganancia programada o adaptativo.

Incerteza paramétrica del modelo, un conjunto de plantas perturbadas por variaciones paramétricas puede modelar la incerteza en el modelo del sistema a ser controlado. Por ejemplo, un modelo desarrollado por principios físicos puede presentar parámetros físicos tales como longitud, masa, coeficientes de conducción de calor, etc; cuyos valores se consideran limitados por un mínimo y un máximo. En un modelo de tipo caja negra derivado de un procedimiento de identificación, la incerteza de los parámetros físicos se representa en los coeficientes de las funciones de transferencia o en los elementos de las matrices de la representación espacio de estados.

B.1.3. Perturbaciones desconocidas pero limitadas de la función de transferencia

A menudo es útil modelar la incerteza en la planta (como un modelo del sistema a ser controlado) como errores, dependientes de la frecuencia, en las respuestas en frecuencia. Tal conjunto de perturbaciones en la planta se pueden referir a:

Incerteza del modelo, las funciones de transferencia de la planta pueden modelar de forma imprecisa el sistema a ser controlado, esto debido a los errores de medida e identificación. Por ejemplo, las funciones de transferencia del sistema a ser controlado pueden ser medidas en cada frecuencia con una exactitud del 1 %.

Dinámica parásita de alta frecuencia, el modelo de un sistema a ser controlado puede ser menos exacto a altas frecuencias debido a dinámica parásita no-modelada o desconocida. Además, esta dinámica puede variar con el tiempo u otro parámetro físico, y luego no puede ser modelada confiablemente. En sistemas eléctricos, por ejemplo, se puede tener pequeñas capacitancias e inductancias remanentes; esta dinámica parásita puede cambiar significativamente cuando varía el ambiente eléctrico o magnético del sistema.

B.2 Método de la ganancia pequeña para estabilidad robusta

Considerando un conjunto de plantas perturbadas \mathcal{P} dado en la forma de perturbación de realimentación (Sección 3.4.5) y siendo la norma $\|\cdot\|_{gn}$ una ganancia, denótese M como la máxima ganancia de las posibles perturbaciones de realimentación:

$$M = \sup_{\Delta \in \Delta_P} \|\Delta\|_{gn}, \quad (3.50)$$

donde Δ_P es el conjunto de perturbaciones de realimentación y M viene a ser una medida de cuan “grande” pueden ser las perturbaciones de realimentación.

Del Teorema de Ganancia Pequeña⁹ se sabe que si:

$$\|N_{qp}\|_{gn} M < 1, \quad (3.51)$$

luego, para todo $\Delta \in \Delta_P$:

$$\|\Delta(I - N_{qp}\Delta)^{-1}\|_{gn} \leq \frac{M}{1 - M\|N_{qp}\|_{gn}}.$$

Y de (3.36) se tiene:

$$\|N^{pert}(\Delta) - N_{\bar{z}\bar{w}}\|_{gn} \leq \frac{M\|N_{\bar{z}p}\|_{gn}\|N_{q\bar{w}}\|_{gn}}{1 - M\|N_{qp}\|_{gn}} \text{ para todo } \Delta \in \Delta_P. \quad (3.52)$$

⁹Ver Zhou *et al*, [49].

La especificación convexa en lazo cerrado (3.51) se conocerá como la *condición de ganancia pequeña*. Nótese que, (3.51) y (3.52) establecen la idea expresada en la Sección 3.4.5: el sistema en lazo cerrado será robusto si $N_{\bar{z}p}$, $N_{q\bar{w}}$ y N_{qp} son lo “suficientemente pequeñas”.

Por lo antes expuesto, la especificación de robustez de N es dada por:

$$\|N_{qp}\|_{gn} < 1/M, \quad (3.53)$$

$$\|N_{\bar{z}p}\|_{gn} < \infty, \quad (3.54)$$

$$\|N_{q\bar{w}}\|_{gn} < \infty, \quad (3.55)$$

$$\|N_{\bar{z}\bar{w}}\|_{gn} < \infty, \quad (3.56)$$

lo cual implica que:

$$\|N^{pert}\|_{gn} < \infty \text{ para todo } \Delta \in \Delta_P, \quad (3.57)$$

esto es, la especificación de robustez formada a partir del conjunto de plantas perturbadas \mathcal{P} y la especificación $\|N\|_{gn} < \infty$ se mantienen.

Si la ganancia $\|\cdot\|_{gn}$ es finita sólo para matrices de funciones de transferencia estables, entonces las especificaciones (3.53)-(3.56) implican que N^{pert} es estable, y, las especificaciones (3.53)-(3.56) son las especificaciones de estabilidad robusta. Como ejemplo, la norma \mathcal{H}_∞ , $\|\cdot\|_\infty$, es finita sólo para matrices de funciones de transferencia estables, luego la especificación $\|N_{qp}\|_\infty < 1/M$, junto con la estabilidad de $N_{\bar{z}p}$, $N_{q\bar{w}}$ y N_{qp} (estabilidad interna), garantiza que la especificación de estabilidad robusta $\mathcal{D}_{est-rob}$ se mantenga para N .

B.3. Método de la ganancia pequeña para desempeño robusto

Una variación del método de la ganancia pequeña es tal que se forman aproximaciones convexas de especificaciones de robustez con cierto límite de ganancia:

$$\|N_{\bar{z}\bar{w}}\|_{gn} \leq \alpha,$$

donde $N_{\bar{z}\bar{w}}$ es un elemento o submatriz de N (y estabilidad robusta implica $\|N_{\bar{z}\bar{w}}\|_{\infty} < \infty$).

A lo largo de esta subsección se considerará la especificación de robustez, formada a partir del conjunto de plantas perturbadas \mathcal{P} y la especificación del límite de la ganancia:

$$\|N_{\bar{z}\bar{w}}\|_{\infty} \leq 1, \quad (3.58)$$

esta especificación de desempeño robusto se denominará $\mathcal{D}_{des-rob}$. También se asumirá que el conjunto de plantas perturbadas \mathcal{P} es descrito por la forma de perturbación de realimentación con ganancia máxima igual a uno, $M = 1$ en (3.50). La aproximación de $\mathcal{D}_{des-rob}$ es entonces:

$$\left\| \begin{bmatrix} N_{\bar{z}\bar{w}} & N_{\bar{z}p} \\ N_{q\bar{w}} & N_{qp} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq 1. \quad (3.59)$$

Al igual que la especificación de estabilidad robusta $\mathcal{D}_{est-rob}$: (3.53)-(3.56), (3.59) se puede interpretar como un limitante de $N_{\bar{z}p}$, $N_{q\bar{w}}$ y N_{qp} .

A continuación se mostrará que (3.59) implica que la especificación (3.58) permanezca robusta, esto es:

$$\|N_{\bar{z}\bar{w}} + N_{\bar{z}p}\Delta(I - N_{qp}\Delta)^{-1}N_{q\bar{w}}\|_{\infty} \leq 1 \text{ para todo } \Delta \in \Delta_P. \quad (3.60)$$

Suponiendo que (3.58) se mantenga, tal que para cualquier señal \bar{w} y p se tiene:

$$\left\| \begin{bmatrix} \bar{z} \\ q \end{bmatrix} \right\|_{rms} < \left\| \begin{bmatrix} \bar{w} \\ p \end{bmatrix} \right\|_{rms}, \quad (3.61)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \bar{z} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\bar{z}\bar{w}} & N_{\bar{z}p} \\ N_{q\bar{w}} & N_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ p \end{bmatrix}.$$

La desigualdad (3.61) puede ser reescrita como:

$$\|\bar{z}\|_{rms}^2 + \|q\|_{rms}^2 < \|\bar{w}\|_{rms}^2 + \|p\|_{rms}^2. \quad (3.62)$$

Considerando que $p = \Delta q$, donde $\Delta \in \Delta_P$, tal que estas señales corresponden al comportamiento en lazo cerrado del sistema perturbado, así:

$$\bar{z} = (N_{\bar{z}\bar{w}} + N_{\bar{z}p}\Delta(I - N_{qp}\Delta)^{-1}N_{q\bar{w}})\bar{w}. \quad (3.63)$$

Luego, dado que $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, se tiene:

$$\|p\|_{rms} \leq \|q\|_{rms}. \quad (3.64)$$

Y de (3.62)-(3.64) se concluye que:

$$\|\bar{z}\|_{rms} = \|(N_{\bar{z}\bar{w}} + N_{\bar{z}p}\Delta(I - N_{qp}\Delta)^{-1}N_{q\bar{w}})\bar{w}\|_{rms} \leq \|\bar{w}\|_{rms}, \quad (3.65)$$

dado que esto se mantiene para cada \bar{w} , se cumple (3.60).

Doyle interpretó la especificación (3.59) como una condición de estabilidad robusta basada en la ganancia pequeña (3.50) para un conjunto de plantas perturbadas que incluyen una matriz de funciones de transferencia, limitada pero desconocida, conectada de \bar{z} a \bar{w} . Este “lazo de desempeño” es mostrado en la Fig. 3.11.

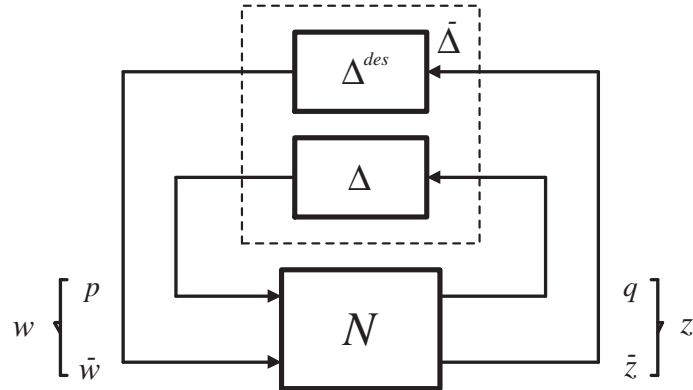


Figura 3.11: Configuración general de un sistema controlado usando el lazo de desempeño de Doyle que conecta una realimentación Δ^{des} de \bar{z} a \bar{w} .

Si la condición (3.59) se mantiene, el sistema en lazo cerrado de la Fig. 3.11 será robustamente estable para todo $\bar{\Delta}$ con $\|\bar{\Delta}\|_{\infty} \leq 1$. En particular, el sistema en lazo cerrado de la Fig. 3.11 será robustamente estable para todo $\bar{\Delta}$ de la forma:

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta^{des} \end{bmatrix},$$

con $\|\Delta^{des}\|_{\infty} \leq 1$ y $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$. Esto es equivalente a que la especificación (3.58) permanezca robustamente para todo Δ con $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$.

Capítulo 4

TÉCNICAS DE DISEÑO DE CONTROLADORES

Los métodos de control \mathcal{H}_2 son muy usados en el diseño de controladores que reducen la respuesta vibratoria de una estructura flexible. Mientras que el diseño \mathcal{H}_2 resulta en un buen desempeño nominal, los controladores sólo son eficientes en la planta de diseño, planta que no considera un modelo para el error incurrido en el modelado. Como resultado, el desempeño alcanzado por sistemas de control \mathcal{H}_2 cuando implementados presenta limitaciones. Para alcanzar altos niveles de desempeño en implementación, se debe considerar un modelo del error en el modelado cuando se diseña el controlador, tal como se hace en la teoría de diseño de controladores \mathcal{H}_∞ . En las siguientes secciones se presenta una introducción a ambas teorías de control, \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , y a la teoría $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, que combina las dos teorías anteriores. La formulación del problema para el diseño de controladores de orden fija también es presentado en la parte final del capítulo.

Las teorías de control \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ pertenecen a un abordaje basado en señales, estas teorías involucran formulaciones de problemas de control en el dominio del tiempo que resultan en la minimización de una norma de cierta función de transferencia. Así, se considera un disturbio en particular o un cambio en la señal de referencia y luego se trata de optimizar la respuesta en lazo cerrado. El control \mathcal{H}_2 tiene sus inicios en los métodos espacio de estados de la década del

60, tales como el controlador gaussiano cuadrático lineal (LQG). Específicamente, en el LQG se asume que la señal de entrada es estocástica (o impulsos alternados en un conjunto determinado) y el valor esperado de la variancia en la salida (o norma 2) es minimizado. Con la inclusión de ponderaciones dependientes de la frecuencia en las señales del sistema, el LQG puede ser generalizado al conocido método de diseño Wiener-Hopf (o norma \mathcal{H}_2). Al considerar señales de energía limitada en la entrada del sistema se puede derivar una metodología de control basada en la norma \mathcal{H}_∞ . Este último abordaje es de gran interés dado que puede ser combinado con representaciones de modelos de incerteza, haciendo posible la solución de problemas complejos de estabilidad y desempeño, lo que se conoce como control robusto \mathcal{H}_∞ .

A menudo se intenta optimizar directamente ciertos objetivos mas representativos del sistema, tales como tiempo de asentamiento, márgenes de estabilidad u otros, en lugar de la norma de ciertas funciones de transferencia. Las metodologías que involucran optimizaciones multiobjetivo de este tipo presentan problemas difíciles de resolver computacionalmente hablando, especialmente si no se cuenta con convexidad [2], en muchos casos soluciones aproximadas son las más convenientes, como por ejemplo se fija inicialmente la orden del controlador. En este grupo de controladores se encuentra el controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ que intenta optimizar el desempeño de un sistema en lazo cerrado mediante la minimización de la norma \mathcal{H}_2 , que es la que mejor define objetivos de desempeño, teniendo como restricción la robustez en estabilidad del sistema en lazo cerrado, que es medida por la norma \mathcal{H}_∞ .

Antes de definir con mayor detalle las teorías de control \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, se presentarán las siguientes definiciones de tal forma que los problemas de control queden mejor descritos.

La planta generaliza para un problema de control estándar es dada por:

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad (4.1)$$

$$z = C_1x + D_{12}u, \quad (4.2)$$

$$y = C_2x + D_{21}w, \quad (4.3)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ es el vector de entradas exógenas, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de señales de control, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ es el vector de salidas controladas y $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de señales medidas.

Un controlador general (dinámico) para este sistema puede ser representado por:

$$\dot{x}_K = A_Kx_K + B_Ky, \quad (4.4)$$

$$u = C_Kx_K, \quad (4.5)$$

donde $x_K \in \mathbb{R}^{n_K}$ es el vector de estados del controlador, cuya dimensión es el resultado del método de control usado o puede ser especificada *a priori*.

4.0.4. Diseño de controladores para estabilidad nominal

Cerrando el lazo de control usando realimentación negativa se obtiene la dinámica del sistema en lazo cerrado como sigue:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}w, \quad (4.6)$$

$$z = \bar{C}\bar{x}, \quad (4.7)$$

donde:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & -B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_K D_{21} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 & -D_{12} C_K \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

para $w = \bar{w}$ y $z = \bar{z}$. Luego, el conjunto de todos los controladores estabilizantes es definido como:

$$K = \{(A_K, B_K, C_K) : \bar{A} \text{ es asintóticamente estable}\}. \quad (4.12)$$

4.0.5. Diseño de controladores para desempeño nominal

Para el problema de control de desempeño nominal el objetivo es minimizar la norma \mathcal{H}_2 de una función de transferencia en lazo cerrado de las entradas exógenas a las salidas controladas:

$$N_{zw} = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}, \quad (4.13)$$

donde las entradas exógenas están confinadas a un conjunto de señales de energía limitada y espectro fijo. Si la entrada exógena (disturbio) es modelada como ruido blanco, el objetivo resulta:

$$\min_K \{J(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{z(t)^T z(t)\}\}, \quad (4.14)$$

donde \mathbf{E} es el operador esperanza (expectativa).

Otro abordaje para el diseño de controladores de desempeño nominal emplea la norma \mathcal{H}_∞ , que puede ser interpretada como la ganancia del sistema y representa el peor caso de amplificación de todas las entradas exógenas $w(t)$ de

señales \mathcal{L}_2 de energía limitada. La teoría de control \mathcal{H}_∞ basada en Doyle *et al.* and Francis [13], [16] involucra la definición de ponderaciones (dependientes de la frecuencia) en las salidas y entradas tal que los objetivos de desempeño sean satisfechos mediante la minimización de $\|N_{zw}\|_\infty$:

$$\min_K \|N_{zw}\|_\infty. \quad (4.15)$$

Dado que la norma \mathcal{H}_∞ es definida con respecto a la magnitud pico de la respuesta en la frecuencia de la matriz de funciones de transferencia y la norma \mathcal{H}_2 es definida por una cantidad que resulta de un cuadrado integrable, los sistemas de lazo cerrado correspondientes pueden presentar diferentes características. Luego, dependiendo de los objetivos de desempeño, un tipo de diseño puede ser preferible a otro. Cuando el desempeño es especificado por medidas *rms*, el diseño \mathcal{H}_2 , en general, lleva a un mejor desempeño nominal. El beneficio de usar la teoría \mathcal{H}_∞ se hace evidente al permitir la incorporación del requerimiento de robustez a errores de modelo en el proceso de diseño.

4.0.6. Estabilidad robusta y desempeño robusto

Consideraciones más realistas en el diseño de controladores son la estabilidad robusta y el desempeño robusto. La estabilidad robusta requiere que el sistema en lazo cerrado permanezca estable aún en la presencia de errores del modelo (incertezas¹). El problema de estabilidad robusta puede ser formulado usando la Fig. 4.1, equivalente a la Fig. 3.11, mediante la absorción de las ponderaciones y escalamientos dentro de la planta generalizada P . Las incertezas son escalonadas, con Δ_δ representando el conjunto de todas las perturbaciones estables Δ tales que $\|\Delta\|_\infty \leq \delta$. Suponiendo que K estabiliza internamente el lazo cerrado para $\Delta = 0$, entonces una condición suficiente para la estabilidad robusta

¹La incerteza puede ser modelada de muchas formas (multiplicativa, multiplicativa inversa, aditiva, paramétrica, entre otros) y puede ser localizada en varios puntos del lazo de control.

de todas las plantas del conjunto formado por $\Delta \in \Delta_\delta$ es tal que:

$$\|N_{qp}(K)\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}. \quad (4.16)$$

Entonces, al igual que el problema de desempeño nominal, la estabilidad robusta es caracterizada por la norma \mathcal{H}_∞ de una función de transferencia.

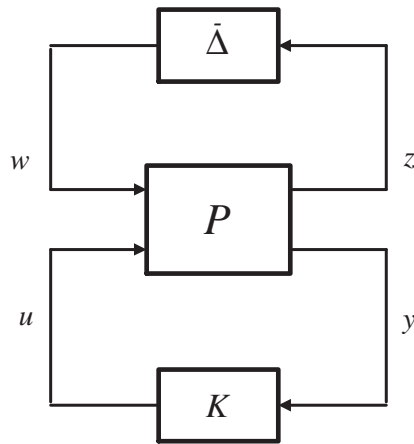


Figura 4.1: Configuración del sistema controlado para una análisis de estabilidad robusta y desempeño robusto

La especificación del desempeño robusto en un formato \mathcal{H}_∞ es posible gracias a la posibilidad de formular el problema de desempeño robusto como un problema de estabilidad robusta. Considerando la planta de incertezas en la Fig. 3.11 con entradas y salidas definidas para el desempeño y un modelo de incerteza, las condiciones para desempeño robusto son:

1. Estabilidad robusta (4.16), y
2. Desempeño mantenido para todo $\Delta \in \Delta_\delta$.

Cerrando el lazo desde \bar{z} hasta \bar{w} a través de un bloque de incertezas Δ^{des} se tiene el problema de desempeño robusto como un problema de estabilidad robusta, mostrado en la Fig. 3.11 donde los bloques han sido escalonados a uno.

Una condición suficiente para el desempeño robusto (incluye también es-

tabilidad robusta) es que:

$$\|N_{zw}(K)\|_\infty < \frac{1}{\delta}. \quad (4.17)$$

Definase $\bar{\Delta}_\delta$ como un conjunto de todas las perturbaciones no-estructuradas $\bar{\Delta}$, estables, tal que $\|\bar{\Delta}\|_\infty < \delta$. Cuando $\bar{\Delta} \in \bar{\Delta}_\delta$, la (4.17) es necesaria y suficiente para asegurar la estabilidad robusta.

El diseñar para desempeño robusto usando Δ^{des} como en la Fig. 3.11 introduce una estructura diagonal por bloques de $\bar{\Delta}$ que resulta en que la (4.17) sea sólo suficiente y posiblemente demasiado conservativa. Este conservatismo es en cierta medida aliviado usando el control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ donde el desempeño es medido usando la norma \mathcal{H}_2 .

4.0.7. Estabilidad robusta y desempeño óptimo

Aún cuando el control \mathcal{H}_∞ provee estabilidad y desempeño en presencia de errores del modelo, el uso de la norma \mathcal{H}_∞ como medida de desempeño puede resultar conservativo. Tomando esto en consideración, el diseño de controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ha sido desarrollado para proveer una estabilidad robusta (\mathcal{H}_∞) y un desempeño nominal (\mathcal{H}_2) mediante la minimización de la norma \mathcal{H}_2 para un conjunto de entradas/salidas mientras la norma \mathcal{H}_∞ limita otro conjunto de entradas/salidas. Con referencia a la Fig. 3.11, el objetivo es satisfacer:

$$\begin{aligned} \text{mín}_K \quad & \|N_{\bar{z}\bar{w}}\|_2^2 \\ \text{sujeto a} \quad & \|N_{qp}\|_\infty < \gamma. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Así, la formulación del problema de control mixto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ como mostrado en (4.18) provee un balance explícito entre las demandas conflictivas, desempeño nominal y estabilidad robusta. Una solución a este problema puede ser encontrada en Ades, [2], que resuelve usando controladores de dimensión fija.

La utilidad del diseño de controladores usando normas combinadas es explotada mediante la separación del desempeño y la robustez usando el subproblema \mathcal{H}_2 para desempeño nominal y usando el subproblema \mathcal{H}_∞ para alcanzar estabilidad robusta. En la Fig. 3.11 las entradas y salidas asociadas con el modelo de incerteza incluyen p y q , \bar{w} es asociada con los disturbios y ruidos de medida y \bar{z} es asociada con el desempeño. De esta manera, el conjunto de controladores balancea explícitamente el desempeño nominal con niveles de robustez a la incerteza. Como presentado en la Fig. 4.2 abajo, el conjunto de controladores incluye a un extremo el controlador de más baja autoridad que provee la máxima robustez y mínimo desempeño, y en el otro extremo un controlador de máximo desempeño con mínimos márgenes de estabilidad.

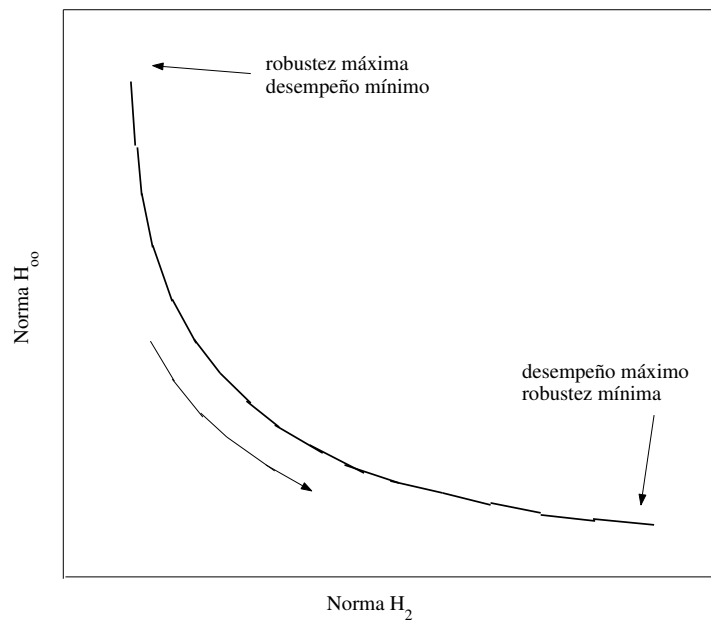


Figura 4.2: Compromiso desempeño-robustez

En las siguientes secciones, se presenta la formulación del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ mixto, \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , y las condiciones necesarias para el diseño de estos controladores. Un algoritmo numérico para el cálculo de controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es presentado en el Apéndice E.

4.1. Control óptimo \mathcal{H}_2

En esta sección se trata el problema de control óptimo para sistemas invariantes en el tiempo considerando un criterio cuadrático de desempeño. El material presentado en esta sección sirve como base no sólo para el control óptimo \mathcal{H}_2 sino que también es útil para el control robusto \mathcal{H}_∞ .

4.1.1. Introducción al regulador cuadrático lineal (LQR)

Tanto el control óptimo \mathcal{H}_2 como el control robusto \mathcal{H}_∞ formulan el problema de control en el dominio del tiempo². Considerese el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = Ax + B_2u, \quad x(t_o) = x_o, \quad (4.19)$$

donde x_o es dado. En el problema del regulador el objetivo es encontrar la función de control (señal de control) $u(t)$ definida sobre $[t_o, T]$ tal que el estado $x(t)$ sea llevado a una pequeña vecindad cercana al origen en el instante de tiempo T ($r = 0$ en la Fig. 3.1). Se puede decir que el problema del regulador tiene solución trivial para cada $T > t_o$ siempre y cuando el sistema sea controlable. Siendo así, se puede construir una función de control que llevará el estado a cero en un corto tiempo, esto siempre y cuando el controlador pueda dotar al sistema de grandes cantidades de energía. Sin embargo, se sabe que en la práctica todo sistema físico tiene una limitación de energía, por ejemplo, saturación de los actuadores. Además, grandes cantidades de energía pueden llevar al sistema fuera de la región donde el modelo lineal es válido. De todo esto, se deduce que se tienen que imponer limitaciones en el control para así poder implementarlo en un sistema práctico de ingeniería. Luego, el problema del regulador se posiciona como el problema de control óptimo con un índice combinado de desempeño \mathcal{L}_2 sobre u y x dada la ecuación dinámica

²Representación del sistema en la forma de espacio de estados, ver Apéndice B.

(4.19):

$$\min_{u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)} \|C_1 x + D_{12} u\|_2^2 = \min_K \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{z(t)^T z(t)\}, \quad (4.20)$$

$$\dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(0) = x_o, \quad (4.21)$$

donde $z(t)$ viene a ser la salida regulada y puede ser expresada como:

$$z = \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} u \\ Q^{\frac{1}{2}} x \end{bmatrix},$$

luego el objetivo de control se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\min_K \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)\},$$

donde Q y R son matrices de ponderación semidefinidas positiva; el primer término penaliza las desviaciones de x del cero, y el segundo término representa el costo de usar señales de actuación.

A. Problema del regulador cuadrático lineal

Sea el sistema dinámico descrito según la siguiente ecuación espacio de estados, como mostrado en la Fig. 4.3 :

$$\dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(0) = x_o, \quad \text{dado pero arbitrario}, \quad (4.22)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u, \quad (4.23)$$

donde las matrices C_1 y D_{12} tienen las siguientes formas, respectivamente:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

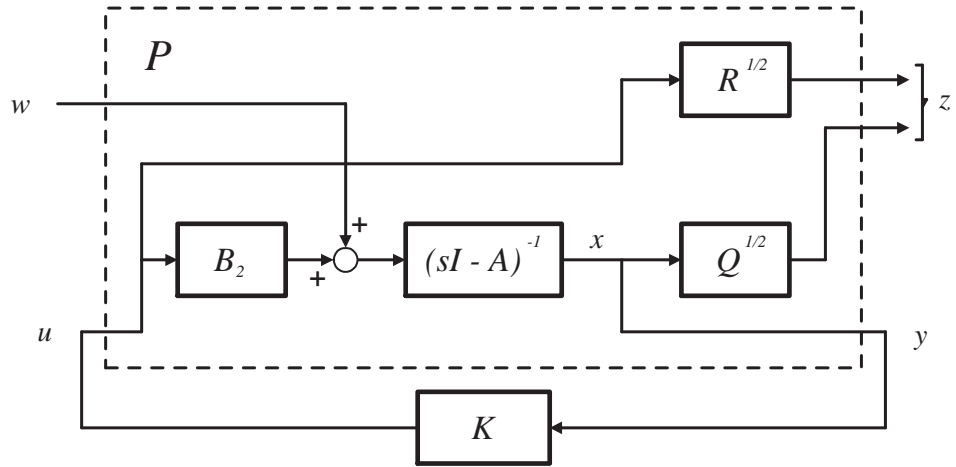


Figura 4.3: El costo LQR es $\|z\|_2^2$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Supongase que las matrices del sistema satisfacen las siguientes consideraciones:

- (i) (A, B_2) es estabilizable;
- (ii) D_{12} tiene rango de columna completa con $\begin{bmatrix} D_{12} & D_{\perp} \end{bmatrix}$ unitaria;
- (iii) (C_1, A) es detectable;
- (iv) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tiene rango de columna completa para todo ω .

El problema del regulador cuadrático lineal consiste en encontrar la ley de control óptimo $u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ tal que el criterio de desempeño $\|z\|_2^2$ sea minimizado.

B. Solución del problema del regulador cuadrático lineal

La consideración (i) es necesaria para la existencia de la función de control estabilizadora u . La consideración (ii) es hecha por simplicidad de la notación y es una redeclaración de que $D_{12}^* D_{12} = I$. La consideración (iii) junto con la

consideración (i) garantizan que la estabilidad entrada/salida implique estabilidad interna. Finalmente, la consideración (iv) es equivalente a la consideración de que $(D_{\perp}^* C_1, A - B_2 D_{12}^* C_1)$ no tiene modos no observables en el eje imaginario. (iv), junto con la estabilidad de (A, B_2) , garantiza que la matriz Hamiltoniana H pertenezca al $\text{dom}(\text{Ric})$ y que $X = \text{Ric}(H) \geq 0$:

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ -C_1^* D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{12}^* C_1 & B_2^* \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

La ecuación de Riccati correspondiente a (4.26) es:

$$(A - B_2 D_{12}^* C_1)^* X + X(A - B_2 D_{12}^* C_1) - X B_2 B_2^* X + C_1^* D_{\perp} D_{\perp}^* C_1 = 0. \quad (4.27)$$

Sea X la correspondiente solución estabilizadora de (4.27) y defínase:

$$K = -(B_2^* X + D_{12}^* C_1). \quad (4.28)$$

Entonces $A + B_2 K$ es estable.

Considerando que se aplica la ley de control $u = Kx$ al sistema (4.22) y (4.23), el sistema controlado queda de la siguiente forma:

$$\dot{x} = (A + B_2 K)x, \quad x(0) = x_o,$$

$$z = (C_1 + D_{12} K)x,$$

o equivalentemente:

$$\dot{x} = (A + B_2 K)x + x_o \delta(t), \quad x(0_-) = 0,$$

$$z = (C_1 + D_{12} K)x.$$

La matriz de funciones de transferencia asociada al sistema controlado es:

$$N_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2K & I \\ \hline C_1 + D_{12}K & 0 \end{array} \right].$$

Fue demostrado por Safonov y Athans (1977) que el regulador cuadrático lineal tiene grandes propiedades de robustez, márgenes de ganancia de -6 dB a $+\infty$ dB y márgenes de fase de $+60^\circ$ en todas las direcciones. Debe notarse, sin embargo, que este resultado sólo es válido para el caso de realimentación de estados completa ($y = x$ en la Fig. 4.3). Esta consideración no es válida en la práctica, ya sea porque las variables de estado no son accesibles por medida directa o porque el número de los dispositivos de medida es limitado. En consecuencia, al aplicar una realimentación de estados para estabilizar u optimizar un sistema se tiene que encontrar un sustituto razonable para el vector de estados. Así, valiéndose de las entradas y salidas de la ecuación dinámica se puede construir un dispositivo que aproxime el vector de estados, \hat{x} . Este dispositivo es denominado estimador de estado u observador de estado³.

4.1.2. Problema de control \mathcal{H}_2

El controlador \mathcal{H}_2 es la generalización del controlador LQG⁴, el controlador \mathcal{H}_2 minimiza la norma \mathcal{H}_2 de forma similar al índice de desempeño LQG pero fija el problema de diseño de controladores en su configuración general: disturbios y entradas de control no colocalizados, así como desempeño y salidas medidas no colocalizados. Las posiciones de las entradas de control no siempre coinciden con las posiciones de los disturbios, y las posiciones de las salidas medidas no necesariamente están colocalizadas con la posición donde el desempeño es evaluado.

³Ver Apéndice B.

⁴El problema del controlador LQG es una generalización del problema LQR, se considera que el estado no es medido directamente, esto quiere decir que no sólo se tiene que calcular la ganancia de controlador sino también la del observador.

Para el problema \mathcal{H}_2 (y para el problema \mathcal{H}_∞ en la siguiente sección) se considera el sistema en su representación espacio de estados como sigue:

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad (4.29)$$

$$z = C_1x + D_{12}u, \quad (4.30)$$

$$y = C_2x + D_{21}w. \quad (4.31)$$

Como en el problema LQR, se extraen el estado x y la señal de actuación u (ponderados) como la salida controlada z :

$$z = \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}}u \\ Q^{\frac{1}{2}}x \end{bmatrix}.$$

La entrada exógena incorpora los ruidos de proceso y de medida, v_{proc} y v_{sensor} , estos ruidos no son correlacionados y tienen matrices de densidad espectral de potencia⁵ constantes, V_{proc} y V_{sensor} respectivamente, se representan como:

$$\begin{bmatrix} v_{proc} \\ v_{sensor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{proc} \\ V_{sensor} \end{bmatrix} w,$$

con w siendo ruido blanco. Entonces, en la ecuación espacio de estados del sistema (4.29-4.31) se tiene lo siguiente⁶:

$$B_1 = \begin{bmatrix} V_{proc}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

⁵Distribución de la potencia de una determinada señal en el espectro de frecuencias.

⁶Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $R = I$ y $V_{sensor} = I$, obteniéndose:

$$D_{12} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & V_{sensor}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Esto se muestra en la Fig. 4.4.

Las siguientes consideraciones son necesarias para resolver el problema de control \mathcal{H}_2 .

(i) (A, B_2) es estabilizable y (C_2, A) es detectable;

(ii) D_{12} tiene rango de columna completa con $\begin{bmatrix} D_{12} & D_{\perp} \end{bmatrix}$ unitaria, y D_{21} tiene rango de fila completa con $\begin{bmatrix} D_{21} \\ \tilde{D}_{\perp} \end{bmatrix}$ unitaria;

(iii) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tiene rango de columna completa para todo ω ;

(iv) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tiene rango de fila completa para todo ω .

Se puede notar que D presenta una estructura especial en la planta, donde D_{22} es asumido igual a cero de forma que P_{22} sea estrictamente propia y D_{11} es asumido cero de forma que se pueda garantizar el buen posicionamiento del problema \mathcal{H}_2 .

Problema de control \mathcal{H}_2 El problema de control \mathcal{H}_2 consiste en encontrar un controlador K_{opt} real, racional y propio que estabilice internamente a P y que minimice la norma \mathcal{H}_2 de la matriz de funciones de transferencia N_{zw} de w a z .

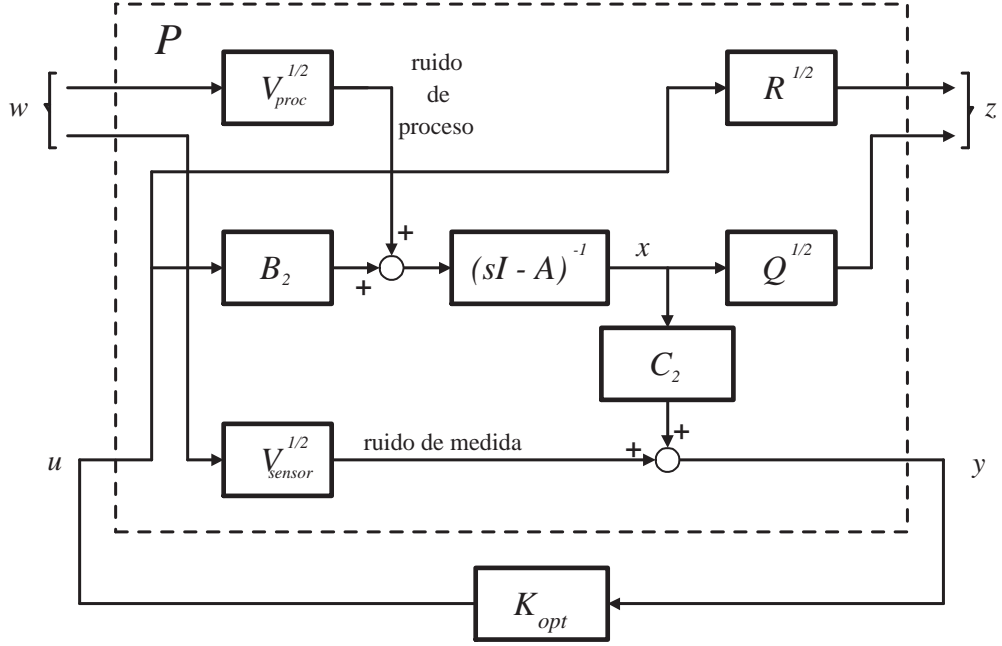


Figura 4.4: El costo del problema de control \mathcal{H}_2 es $\|z\|_2^2$

4.1.3. Solución del problema de control \mathcal{H}_2

La consideración (i) implica la estabilización de P via realimentación de salida, y las consideraciones (iii) y (iv) junto con la (i) garantizan que dos matrices Hamiltonianas asociadas con el problema \mathcal{H}_2 pertenezcan al $\text{dom}(Ric)$. La consideración (ii) garantiza que el problema de control óptimo \mathcal{H}_2 sea no singular, en tanto que las consideraciones de unitariedad son hechas para simplificar la solución final, no son restricciones.

El costo mínimo es alcanzado para el lazo de realimentación con matrices de ganancia (K_c y K_o) dado que las 3 condiciones de abajo se cumplan:

1. Si $X_{2c} \geq 0$ resuelve la siguiente ecuación algebraica de Riccati del controlador \mathcal{H}_2 :

$$(A - B_2 D_{12}^* C_1)^* X_{2c} + X_{2c} (A - B_2 D_{12}^* C_1) - X_{2c} B_2 B_2^* X_{2c} + C_1^* D_{\perp} D_{\perp}^* C_1 = 0. \quad (4.36)$$

2. Si $X_{2o} \geq 0$ resuelve la siguiente ecuación algebraica de Riccati del observador

\mathcal{H}_2 :

$$(A - B_1 D_{21}^* C_2) X_{2o} + X_{2o} (A - B_1 D_{21}^* C_2)^* - X_{2o} C_2^* C_2 X_{2o} + B_1 \tilde{D}_\perp^* \tilde{D}_\perp B_1^* = 0. \quad (4.37)$$

3. Las matrices Hamiltonianas:

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ -C_1^* D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{12}^* C_1 & B_2^* \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_2^* \\ -B_1 D_{21}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{21} B_1^* & C_2 \end{bmatrix},$$

pertenecen al $\text{dom}(\text{Ric})$.

Una vez satisfechas las condiciones arriba presentadas, el sistema en lazo cerrado es como en la Fig. 4.4 y la representación en matriz de funciones de transferencia del controlador, de la entrada y a la salida u , es dado por:

$$K_{opt}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 & -K_o \\ \hline K_c & 0 \end{array} \right], \quad (4.38)$$

donde:

$$\hat{A}_2 = A + B_2 K_c + K_o C_2,$$

$$K_c = -(B_2^* X_{2c} + D_{12}^* C_1), \quad K_o = -(X_{2o} C_2^* + B_1 D_{21}^*).$$

4.2. Control robusto \mathcal{H}_∞

Los controladores \mathcal{H}_∞ y \mathcal{H}_2 consideran el problema de diseño de controladores en su configuración general de disturbios y entradas de control no colocados, así como desempeño y salidas medidas no colocados. El método \mathcal{H}_∞ atiende una amplia variedad de problemas de control combinando abordajes en

el dominio de la frecuencia y del tiempo. El diseño es óptimo en el sentido que se minimiza la norma \mathcal{H}_∞ de una función de transferencia en lazo cerrado. El modelo \mathcal{H}_∞ incluye ruidos de proceso y de medida. Este modelo también lidia con cuestiones de robustez debido a incertezas modeladas.

4.2.1. Problema de control \mathcal{H}_∞

La solución del problema de control óptimo \mathcal{H}_∞ , encontrar $\min_K \|N_{zw}(K)\|_\infty$ sobre todos los controladores K que estabilicen P , fue discutida por Francis, [16] o Doyle, [13]. El problema de control \mathcal{H}_∞ puede ser considerado para cada representación de incerteza, ya sea de forma aditiva, multiplicativa o por factorizaciones coprimas. En los casos de incerteza aditiva y multiplicativa se requiere de un proceso de iteración intenso para encontrar el γ más pequeño ($\gamma = \gamma_{opt}$), luego es preferible trabajar el problema de control subóptimo \mathcal{H}_∞ , $\|N_{zw}(K)\|_\infty \leq \gamma$, $\gamma > 0$. Claramente se tiene que $\gamma > \gamma_{opt}$ para la existencia de controladores subóptimos \mathcal{H}_∞ .

En el presente trabajo, el problema de control \mathcal{H}_∞ es trabajado en el dominio del tiempo. La realización de la planta P es de la siguiente forma:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right].$$

Las siguientes consideraciones son realizadas para el problema de control \mathcal{H}_∞ .

- (i) (A, B_1) es estabilizable y (C_1, A) es detectable;
- (ii) (A, B_2) es estabilizable y (C_2, A) es detectable;
- (iii) $D_{12}^* \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$;

$$(iv) \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Luego, el problema de control subóptimo \mathcal{H}_∞ es definido como:

Problema de control subóptimo \mathcal{H}_∞ El problema de control \mathcal{H}_∞ consiste en encontrar un controlador K real, racional y propio que establezca internamente a P , si hay uno, tal que $\|N_{zw}\|_\infty < \gamma$ para un $\gamma > 0$ y $\gamma > \gamma_{opt}$ dado.

4.2.2. Solución del problema de control \mathcal{H}_∞

La consideración (i) es hecha por una razón técnica, junto con (ii) garantizan que las dos matrices Hamiltonianas en el problema \mathcal{H}_∞ pertenezcan al $\text{dom}(\text{Ric})$. Una simplificación importante, consecuencia de (i), es que la estabilidad interna es esencialmente equivalente a la estabilidad entrada-salida ($N_{zw} \in \mathcal{RH}_\infty$). Por supuesto, la consideración (ii) es necesaria y suficiente para que P sea estabilizable internamente, pero no es necesario probar la equivalencia de estabilidad interna y $N_{zw} \in \mathcal{RH}_\infty$. Las últimas consideraciones son muy comunes y en el control \mathcal{H}_2 son interpretadas como la ausencia de cruce de términos en la función de costo ($D_{12}^* C_1 = 0$), y el ruido de proceso y el ruido de medida no son correlacionados ($B_1 D_{21}^* = 0$).

Así, siendo N_{wz} la función de transferencia en lazo cerrado, existe un controlador internamente estable y propio tal que $\|N_{zw}\|_\infty < \gamma$, donde γ es el menor número posible si las 4 condiciones de abajo se cumplen:

1. Si $X_{\infty c} \geq 0$ resuelve la siguiente ecuación algebraica de Riccati del controlador \mathcal{H}_∞ :

$$X_{\infty c} A + A^* X_{\infty c} + C_1^* C_1 - X_{\infty c} (B_2 B_2^* - \gamma^{-2} B_1 B_1^*) X_{\infty c} = 0,$$

2. Si $X_{\infty o} \geq 0$ resuelve la siguiente ecuación algebraica de Ricatti del observador \mathcal{H}_∞ :

$$X_{\infty o}A^* + AX_{\infty o} + B_1B_1^* - X_{\infty o}(C_2^*C_2 - \gamma^{-2}C_1^*C_1)X_{\infty o} = 0,$$

3. $\rho(X_{\infty c}X_{\infty o}) < \gamma^2$.

4. Las matrices Hamiltonianas

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^* \\ -C_1^*C_1 & -A^* \end{bmatrix}, \quad J_\infty = \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2 \\ -B_1B_1^* & -A \end{bmatrix},$$

no tienen autovalores en el eje $j\omega$.

Una vez satisfechas las condiciones arriba presentadas, el sistema en lazo cerrado es como en la Fig. 4.5 y la representación en matriz de funciones de transferencia del controlador, de la entrada y a la salida u , es dada por:

$$K_{sub}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty K_o \\ \hline K_c & 0 \end{array} \right], \quad (4.39)$$

donde:

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2}B_1B_1^*X_{\infty c} + B_2K_c + Z_\infty K_o C_2,$$

$$K_c = -B_2^*X_{\infty c}, \quad K_o = -X_{\infty o}C_2^*, \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2}X_{\infty o}X_{\infty c})^{-1}.$$

El tamaño del controlador es del tamaño de la planta. La ganancia K_c es la ganancia del control y la ganancia K_o es la ganancia del observador. Nótese que la forma de la solución es similar a la del control \mathcal{H}_2 , sin embargo, las ganancias \mathcal{H}_2 son determinadas independientemente mientras que las ganancias \mathcal{H}_∞ están acopladas a través de la desigualdad (Condición 3) y a través del componente Z_∞ . Nótese también que a medida que $\gamma \rightarrow \infty$, las dos matrices Hamiltonianas (H_∞ y J_∞) se convierten en las correspondientes matrices Hamiltonianas para el caso del control \mathcal{H}_2 .

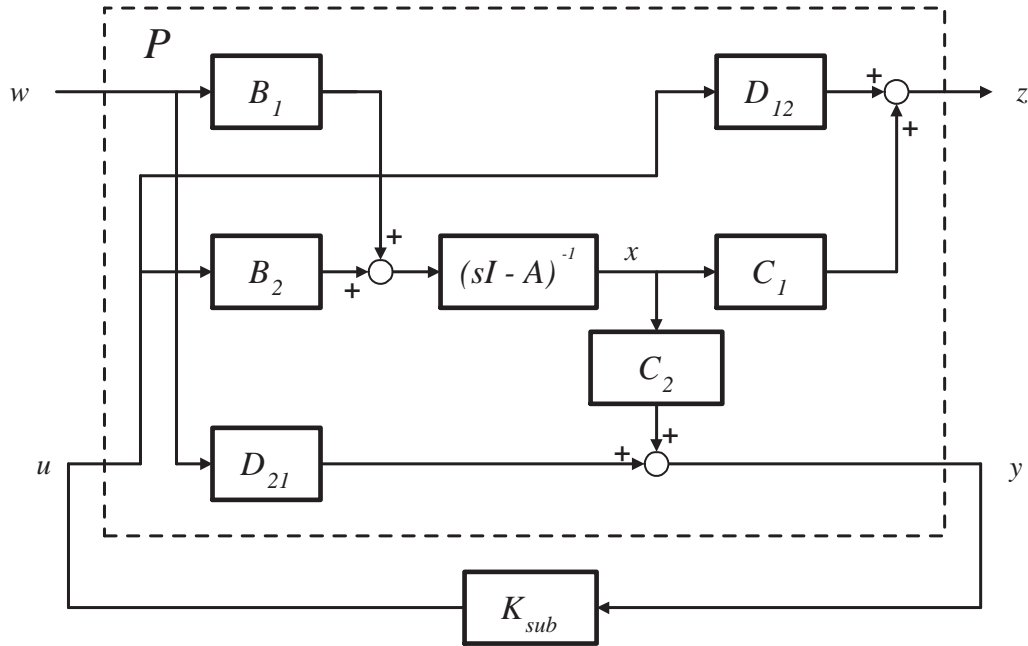


Figura 4.5: El costo del problema de control \mathcal{H}_∞ es $\|z\|_\infty$

4.3. Control óptimo robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

El control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es una estrategia de control óptimo que permite diseñar un controlador estable que garantice que el sistema controlado presente un desempeño óptimo y al mismo tiempo que tenga un margen de estabilidad definido con respecto a incertezas. Así, en la teoría de control, el problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ incorpora las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ simultáneamente, siendo que se define la minimización de una norma \mathcal{H}_2 considerando restricciones en la norma \mathcal{H}_∞ . La norma \mathcal{H}_2 toma en cuenta las características de desempeño del sistema y la norma \mathcal{H}_∞ representa una función de transferencia convenientemente escogida con el fin de garantizar estabilidad para una clase de perturbaciones.

Antes de presentarse el control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ propiamente, se debe conocer claramente como han sido definidos el subproblema de desempeño y el subproblema de estabilidad. Debe recordarse que estos dos subproblemas han sido definidos en el dominio de la frecuencia, esto para guardar relación con la formulación y solución establecida en [2], lo cual no significa que no se puedan definir en el

dominio del tiempo.

4.3.1. Control óptimo \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia

El objetivo de esta sección es entender mejor como se presenta el desempeño en la formulación del problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Así, se presenta el control óptimo \mathcal{H}_2 de sistemas lineales invariantes en el tiempo con restricciones de rastreamiento asintótico y atenuación de disturbios. Las referencias empleadas son los trabajos de Silveira, [37] y Corrêa, [11].

La formulación del problema de control óptimo \mathcal{H}_2 aquí presentado considera el diseño de controladores lineales multivariables con 2-GL en plantas con funciones de transferencia MIMO a cuatro bloques. La teoría discutida está basada en el problema de Servomecanismo, permitiendo la especificación de un controlador que presente requerimientos de estabilidad interna, rastreamiento asintótico de señales y atenuación de disturbios de “dinámica conocida”. Las soluciones del problema de control óptimo \mathcal{H}_2 son explícitamente parametrizadas por medio de una variable libre perteneciente al conjunto de las matrices reales racionales propias y estables (parametrización de Youla). Posteriormente, se define un índice de desempeño a ser optimizado de acuerdo con las características deseadas para el sistema en lazo cerrado (por ejemplo, error mínimo y bajo esfuerzo de control).

A. Servomecanismo

Se considera el sistema descrito por el diagrama presentado en la Fig. 4.6. Sea la planta P descrita por:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad y \quad u = C \begin{bmatrix} r \\ y - v \end{bmatrix} + d, \quad (4.40)$$

siendo que $C = [C_1 \mid -C_2]$ denota el controlador y r, u, y, z, w, d y v designan, respectivamente, la señal de referencia, la señal de control, la señal de medida, la salida controlada, un disturbio en la planta, un disturbio de entrada y el ruido del sensor de medida. Además, $P_{zw}, P_{zu}, P_{yw}, P_{yu}, C_1, C_2 \in \mathcal{R}_P$ ⁷.

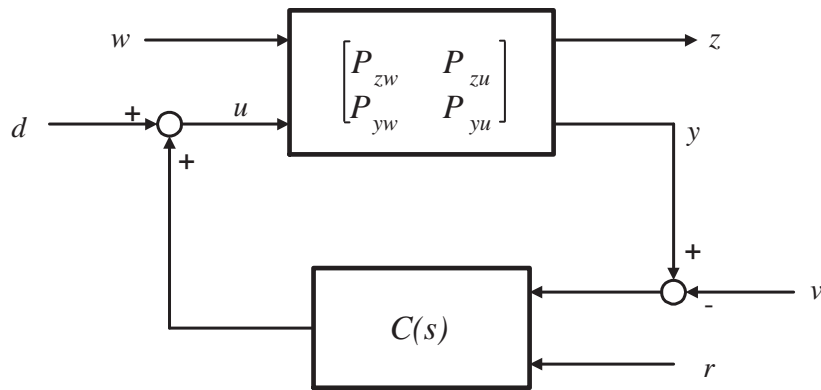


Figura 4.6: Configuración del sistema en lazo cerrado. Control \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia

El objetivo de este problema es encontrar todos los controladores C tales que la planta sea estabilizada internamente, la salida controlada z rastree asintóticamente la señal de referencia r y las señales de disturbios w y v sean atenuadas asintóticamente en z . Para facilitar el desarrollo del trabajo, la señal d solamente se considerará en lo que respecta a estabilidad.

Se define, por simplicidad, $S = (I + C_2 P_{yu})^{-1}$, con $(I + C_2 P_{yu})$ necesariamente bipropia. Se forma la ecuación del sistema de la Fig. 4.6 como sigue:

$$\begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = F(P, C) \begin{bmatrix} r \\ w \\ d \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

⁷Las dimensiones de las matrices involucradas en el desarrollo matemático a seguir son aquellas compatibles con los datos del problema tratado, siendo omitidas en beneficio de la simplificación de la notación.

$$\text{siendo que: } F(P, C) = \begin{bmatrix} P_{zu}SC_1 & P_{zw} - P_{zu}SC_2P_{yw} & P_{zu}(I - SC_2P_{yu}) & P_{zu}SC_2 \\ SC_1 & -SC_2P_{yw} & I - SC_2P_{yu} & SC_2 \\ P_{yw}SC_1 & P_{yw} - P_{yu}SC_2P_{yw} & P_{yu}(I - SC_2P_{yu}) & P_{yu}SC_2 \end{bmatrix}.$$

El requerimiento de estabilidad interna establece una elección de C de tal forma que la matriz de funciones de transferencia (lazo cerrado) que lleva (r, w, d, v) para (z, u, y) esté compuesta por funciones racionales propias y estables.

Las señales externas, modeladas como señales de “dinámica conocida”, son descompuestas de la siguiente forma:

$$r = \Psi_r^{-1}\mu_r, \quad w = \Psi_w^{-1}\mu_w, \quad v = \Psi_v^{-1}\mu_v,$$

siendo que Ψ_α ($\alpha = r, w, v$) es una matriz real pre-establecida, racional, estable y bipropia cuyo determinante tiene sus polos en C_+^0 , y μ_α ($\alpha = r, w, v$) es un vector de funciones reales, estrictamente propias y estables.

Considerando el problema de servomecanismo, los requerimientos de rastreamiento asintótico de r por z y de atenuación asintótica de w y v para z imponen que el error e , definido por:

$$e = r - y = (I - P_{zu}SC_1)r - (P_{zw} - P_{zu}SC_2P_{yw})w - P_{zu}SC_2v,$$

tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$, cualesquiera que sean r, w, v . Dado que μ_r, μ_w y μ_v son vectores con elementos racionales estables arbitrarios, la condición impuesta en e es equivalente a que:

$$(I - P_{zu}SC_1)\Psi_r^{-1}, \quad (P_{zw} - P_{zu}SC_2P_{yw})\Psi_w^{-1}, \quad P_{zu}SC_2\Psi_v^{-1},$$

sean matrices reales, racionales, propias y estables (matrices en \mathbb{S}).

B. Parametrización de los controladores estabilizantes

Bajo la Consideración 1 (ver Apéndice C), condición necesaria para la estabilización interna del sistema por realimentación, la clase de todos los controladores estabilizantes está dada por:

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \tilde{D}_c^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N}_{C_1} & \tilde{N}_{C_2} \end{bmatrix} = (Y + K\tilde{N}_{yu})^{-1} \begin{bmatrix} R & (X - K\tilde{D}_{yu}) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

para todo $R, K \in \mathbb{S}$ tal que $D_{yu}(Y + K\tilde{N}_{yu})$ sea bipropia. Siendo que $P_{ij} = N_{ij}D_{ij}^{-1} = \tilde{D}_{ij}^{-1}\tilde{N}_{ij}$, con $i = z, y$ y $j = w, u$, son factorizaciones coprimas en el anillo de matrices \mathbb{S} , y por la identidad de Bezout generalizada existen X, Y, \tilde{X} , y \tilde{Y} en \mathbb{S} (Vidyasagar, [44]), tales que:

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\tilde{N}_{yu} & \tilde{D}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{yu} & -\tilde{X} \\ N_{yu} & \tilde{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{yu} & -\tilde{X} \\ N_{yu} & \tilde{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ -\tilde{N}_{yu} & \tilde{D}_{yu} \end{bmatrix}.$$

Luego la matriz del sistema en lazo cerrado puede ser parametrizada de forma afín por (R, K) del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = F(P, R, K) \begin{bmatrix} r \\ w \\ d \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

siendo que:

$$F(P, R, K) = \tau(R, K) = \begin{bmatrix} \tau_{zr} & \tau_{zw} & \tau_{zd} & \tau_{zv} \\ \tau_{ur} & \tau_{uw} & \tau_{ud} & \tau_{uv} \\ \tau_{yr} & \tau_{yw} & \tau_{yd} & \tau_{yv} \end{bmatrix} (R, K),$$

y

$$\tau(R, K) = \begin{bmatrix} Q_a R & Q_a K Q_b + Q_c & Q_a(Y + K\tilde{N}_{yu}) & Q_a(X - K\tilde{N}_{yu}) \\ D_{yu} R & -(\tilde{X} - D_{yu} K) Q_b & D_{yu}(Y + K\tilde{N}_{yu}) & D_{yu}(X - K\tilde{D}_{yu}) \\ N_{yu} R & (\tilde{Y} + N_{yu} K) Q_b & N_{yu}(Y + K\tilde{N}_{yu}) & N_{yu}(X - K\tilde{D}_{yu}) \end{bmatrix} (R, K).$$

En la Consideración 2 (ver Apéndice C), son impuestas algunas condiciones para garantizar que el problema del Servomecanismo tenga al menos una solución. En base a las consideraciones 1 y 2, el Teorema 1 (ver Apéndice C) parametriza todos los controladores estabilizantes que atienden al problema de Servomecanismo propuesto.

C. Control óptimo \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia

En esta parte se define un funcional cuadrático por medio de la adición de varios términos al criterio usual de Wiener-Hopf. Cada término aumentado es motivado por determinados objetivos de desempeño o requerido para garantizar una solución para el problema de control óptimo resultante. La optimización de este funcional de costo llevará a la elección de un determinado controlador dentro de un conjunto parametrizado que atienda los objetivos de desempeño propuestos. El criterio \mathcal{H}_2 definido en Silveira *et al*, [37], está compuesto por la adición de varios funcionales de costo cuadrático y se encuentra reproducido a seguir en función de los parámetros de Youla Q_1 y Q_2 ⁸. El funcional abajo, que es uno de los que compone el criterio mencionado, corresponde, a menos de un término de

⁸En el desarrollo matemático presentado en los artículos de Silveira *et al*, [37] y Corrêa *et al*, [11], se utilizaron los parámetros:

$$Q_1 = SC_1, \quad Q_2 = SC_2$$

llamados parámetros de Youla. Usándose estos parámetros, todos los elementos de la matriz en (4.41) pueden ser escritos en forma afín a Q_1 y Q_2 .

robustez, al funcional de Youla (1976, [48]).

$$\begin{aligned}
J_{eu} = & \frac{1}{2\pi} \mathbf{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(I - P_{zu}Q_1)\phi_r(I - P_{zu}Q_1)^* + (P_{zw} - P_{zu}Q_2P_{yw})\phi_d(P_{zw} - P_{zu}Q_2P_{yw})^* \right. \\
& \left. + (P_{zu}Q_2)\phi_v(P_{zu}Q_2)^* + \rho_u Q_1 \phi_r Q_1^* + \rho_u (Q_2 P_{yw}) \phi_w (Q_2 P_{yw})^* + \rho_u Q_2 \phi_v Q_2^*] (j\omega) d\omega \right\}, \tag{4.44}
\end{aligned}$$

siendo que ϕ_r , ϕ_w , y ϕ_v son funciones reales racionales, hermitianas⁹, estrictamente propias y no definidas negativa, y representan filtros en caso de señales determinísticas o densidades espectrales en caso de señales estocásticas de r , w y v , respectivamente. Los tres primeros términos en (4.44) penalizan los errores de rastreamiento causados por r , d y v y los tres últimos evitan la saturación de la planta a partir de los mismos. A continuación son presentados los demás funcionales que componen el criterio \mathcal{H}_2 propuesto en Silveira *et al*, [37]:

$$\begin{aligned}
J_y = \frac{1}{2\pi} \rho_y \mathbf{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(P_{yu}Q_1)\phi_r(P_{yu}Q_1)^* + (I - P_{yu}Q_2)P_{yw}\phi_w P_{yw}^* (I - P_{yu}Q_2)^*] \right. \\
\left. + (P_{yu}Q_2)\phi_v(P_{yu}Q_2)^*] (j\omega) d\omega \right\}, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \rho_r \mathbf{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(I - P_{zu}Q_1)\Psi_{ro}^{-1}\phi_{ro}(\Psi_{ro}^{-1})^*(I - P_{zu}Q_1)^*] (j\omega) d\omega \right\}, \tag{4.46}$$

$$J_w = \frac{1}{2\pi} \rho_w \mathbf{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(P_{zw} - P_{zu}Q_2P_{yw})\Psi_{wo}^{-1}\phi_{wo}(\Psi_{wo}^{-1})^*(P_{zw} - P_{zu}Q_2P_{yw})^*] (j\omega) d\omega \right\}, \tag{4.47}$$

$$J_v = \frac{1}{2\pi} \rho_v \mathbf{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(P_{zu}Q_2)\Psi_{vo}^{-1}\phi_{vo}(\Psi_{vo}^{-1})^*(P_{zu}Q_2)^*] (j\omega) d\omega \right\}, \tag{4.48}$$

$$J_s = \frac{1}{2\pi} \rho_s \mathbf{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(Q_2 - Q_{2s})WW^*(Q_2 - Q_{2s})^*] (j\omega) d\omega \right\}, \tag{4.49}$$

siendo que ϕ_{ro} , ϕ_{wo} y ϕ_{vo} son matrices racionales, hermitianas, estrictamente propias y no definidas negativa. Además, W y Q_{2s} son matrices racionales, estables, estrictamente propia y propia, respectivamente. En cuanto a los coeficientes ρ_u , ρ_y , ρ_r , ρ_w , ρ_v y ρ_s , estos son constantes para el problema y pertenecen a \mathbb{R}_+ .

⁹Una matriz A es hermitiana si $A = A^*$.

El funcional de costo completo es finalmente definido como:

$$\tilde{J} = \tilde{J}(Q_1, Q_2) = J_{eu} + J_y + J_r + J_w + J_v + J_s. \quad (4.50)$$

Por la definición de norma \mathcal{H}_2 , se puede concluir que (4.50) representa una sumatoria de normas \mathcal{H}_2 elevadas al cuadrado. Además, se puede notar que el funcional de costo puede ser separado con respecto a Q_1 y Q_2 , luego se obtiene la siguiente ecuación:

$$\tilde{J}(Q_1, Q_2) = \tilde{J}_1(Q_1) + \tilde{J}_2(Q_2),$$

siendo que:

$$\tilde{J}_1(Q_1) = J_{eu1}(Q_1) + J_{y1}(Q_1) + J_r(Q_1),$$

$$\tilde{J}_2(Q_2) = J_{eu2}(Q_2) + J_{y2}(Q_2) + J_w(Q_2) + J_v(Q_2) + J_s(Q_2),$$

y

$$J_{eu}(Q_1, Q_2) = J_{eu1}(Q_1) + J_{eu2}(Q_2),$$

$$J_y(Q_1, Q_2) = J_{y1}(Q_1) + J_{y2}(Q_2).$$

Se concluye por tanto que el criterio \mathcal{H}_2 propuesto en Silveira *et al*, [37], puede ser descompuesto en dos funcionales similares independientes, uno relativo a Q_1 y otro a Q_2 , siendo que Q_1 y Q_2 son funciones afines a K_1 y K_2 ¹⁰, lo que permite escribir estos funcionales como:

$$\tilde{J}_1(Q_1) = J_1(K_1), \quad \tilde{J}_2(Q_2) = J_2(K_2). \quad (4.51)$$

¹⁰Cabe observar que, por medio del Teorema 1, es posible reescribir (4.42) de forma afín a los parámetros libres K_1 , K_2 . Así, para todo K_1 , K_2 en \mathbb{S} , se obtiene una solución que estabiliza internamente el sistema y simultáneamente atiende el problema de servomecanismo. Un hecho interesante es que el uso del controlador con dos grados de libertad proporciona la separación de los problemas de rastreamiento asintótico y atenuación de disturbios y ruidos. El primero se relaciona al parámetro $R(K_1)$, entanto que el segundo a $K(K_2)$.

Luego, el problema de control óptimo \mathcal{H}_2 resultante es:

$$\min_{K_i \in \mathbb{S}} J_i(K_i), \quad i = 1, 2. \quad (4.52)$$

D. Controlador óptimo \mathcal{H}_2

El control óptimo \mathcal{H}_2 propuesto en la subsección anterior consiste en la determinación de un controlador, llamado óptimo, que minimiza el funcional de costo cuadrático propuesto en (4.52). Para resolver este problema, se juntan todas las normas bajo una única integral y se agrupan los términos para obtener, en el caso SISO, el siguiente formato:

$$J_i(K_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{K_i^* \Gamma_i K_i - 2K_i^* \Lambda_i\}(j\omega) d\omega + J_i(0), \quad (4.53)$$

siendo que $J_i(0)$ es el término independiente en K_i , aquel generado por la sustitución de $K_i = 0$ en (4.50). Desarrollando (4.53) por completamiento de cuadrados, resulta:

$$J_i(K_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{(\Phi_i K_i)^* (\Phi_i K_i) - 2(\Phi_i K_i) (\Phi_i^*)^{-1} \Lambda_i\}(j\omega) d\omega + J_i(0),$$

$$J_i(K_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{(\Phi_i K_i)^* (\Phi_i K_i) - 2(\Phi_i K_i) [(\Phi_i^*)^{-1} \Lambda_i]_+\}(j\omega) d\omega + J_i(0), \quad (4.54)$$

siendo Φ_i el factor espectral de Γ_i y la expresión (4.54) consecuencia del siguiente hecho:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{(\Phi_i K_i)^* [(\Phi_i^*)^{-1} \Lambda_i]_-\}(j\omega) d\omega = \langle \Phi_i K_i, b_-^i \rangle = 0,$$

con $\Phi_i K_i \in \mathcal{RH}_2^+$, $b_-^i \in \mathcal{RH}_2^-$ y por ser estos dos espacios lineales subespacios ortogonales de $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$. Por tanto:

$$J_i(K_i) = \|b_+^i - \Phi_i K_i\|_2^2 + J_i(0) - \|b_+^i\|_2^2, \quad (4.55)$$

siendo que $b_+^i = [(\Phi_i^*)^{-1}\Lambda_i]_+$.

De este modo minimizar J_i con respecto a K_i es equivalente a minimizar el primer término del lado derecho en (4.55), ya que los demás no dependen de K_i . El valor mínimo de (4.55) es obtenido por el siguiente K_i :

$$K_i \text{ óptimo} = \Phi_i^{-1} b_+^i = \Phi_i^{-1} [(\Phi_i^*)^{-1}\Lambda_i]_+. \quad (4.56)$$

4.3.2. Robustez en estabilidad \mathcal{H}_∞

Habiendo definido las características del desempeño con el control óptimo \mathcal{H}_2 y debido a la falta de control del margen de estabilidad que este tipo de control presenta, se define un nuevo subproblema en términos de una función de transferencia (o matriz) que represente explícitamente el margen de estabilidad según la norma \mathcal{H}_∞ .

A. Criterio de robustez en estabilidad

La robustez en estabilidad conduce a una de las más importantes restricciones usando la norma \mathcal{H}_∞ . El problema consiste en escoger controladores estabilizantes que estabilicen no sólo la planta nominal sino también la planta perturbada, para perturbaciones libres dentro de un conjunto pre-especificado. A seguir será desarrollada una medida de estabilidad para perturbaciones aditivas.

La planta nominal $P_{yu}(s)$ es perturbada para:

$$P_{yu\Delta}(s) = P_{yu}(s) + \Delta P_{yu}(s),$$

con $\Delta P_{yu}(s) \in \Delta P(s)$ tales que $|\Delta P(j\omega)| \leq m(\omega)$, siendo que $m(\omega)$ es una función de tolerancia dada. Así, la clase de modelos para estas perturbaciones

será descrita como:

$$P_{\Delta}(P_{yu}, \tilde{\gamma}) = \{P_{yu\Delta} = P_{yu} + \Delta P_{yu}, \text{ para todo } \Delta P_{yu} \in \Delta P, \|W\Delta P_{yu}\|_{\infty} < \tilde{\gamma}\}, \quad (4.57)$$

siendo que $P_{yu} \in \mathcal{R}_P$, la medida de estabilidad robusta $\tilde{\gamma} > 0$ y $W, W^{-1} \in \mathbb{S}$.

Se desea, entonces, obtener condiciones sobre el controlador C con el fin de garantizar la estabilidad del sistema $(P_{yu\Delta}, \tilde{\gamma})$. De Corrêa, [11], se cuenta con el Teorema 2 (ver Apéndice C), relativo a las perturbaciones aditivas.

La restricción de robustez en estabilidad adoptada en el presente trabajo es:

$$J_{\infty}(K) = \|\tilde{W}\tau_{uv}(K)\|_{\infty} \leq \tilde{\gamma}^{-1} = \gamma \quad (4.58)$$

4.3.3. Formulación del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$

El control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$ es definido por medio del criterio \mathcal{H}_2 , que define el desempeño óptimo, y la restricción en la norma \mathcal{H}_{∞} , que se refiere a la estabilidad robusta. En el criterio \mathcal{H}_2 mencionado se consideran las funciones de transferencia en lazo cerrado que relacionan las entradas (señal de referencia, disturbios, señal de control, etc.) y salidas (señal controlada, señal medida) del sistema en la forma de una suma ponderada de normas cuadráticas; en tanto que en la restricción \mathcal{H}_{∞} se impone una degradación máxima aceptable del margen de estabilidad, representado por una función de transferencia, relativo a perturbaciones aditivas sobre la planta¹¹.

¹¹Un hecho importante de esta subsección es que en Silveira et al, [39] fue demostrada la existencia (resultó encontrándose también la unicidad) de la solución del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$.

El problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es presentado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Calcular } K(s) \in \mathcal{RH}_+^\infty \text{ tal que } & \quad \text{mín } J_2(K(s)) \\ & \text{sujeto a } J_\infty(K(s)) \leq \gamma \end{aligned}$$

donde J_2 es el funcional de desempeño calculado en (4.50), presentado en formato reducido en (4.53) y reescrito a continuación:

$$J_2(K(s)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [K^*(s)\Gamma(s)K(s) - 2K(s)\Lambda(s)] \Big|_{s=j\omega} d\omega + J_2(0),$$

siendo que Γ y Λ son funciones reales, racionales, estrictamente propias.

El funcional J_∞ utilizado como restricción fue establecido en (4.58) y reproducido como sigue:

$$J_\infty = \|\tilde{W}\tau_{uv}(K(s))\|_\infty = \|C(s)K(s) + D(s)\|_\infty,$$

siendo que $C(s)$ y $D(s)$ son funciones reales, racionales, propias y estables.

Así, la formulación matemática del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ puede ser presentada como una extensión matemática natural del problema de control óptimo.

4.3.4. Solución del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

El problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ no está bien definido en el espacio \mathcal{H}_+^∞ (espacio al cual pertenece la solución) debido a que el funcional de costo está definido en términos de la norma \mathcal{H}_2 . Silveira y Ades, [37], demostraron que este problema de control está mejor definido en un espacio más grande, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_+^{2,-1}$, esto significa que el problema de control tiene solución en este espacio, solución que también pertenece a \mathcal{H}_+^∞ . Para el cálculo de una aproxi-

mación de la solución usando el método de Galerkin se necesitaría una base en este nuevo espacio $\mathcal{H}_+^{2,-1}$, sin embargo en este espacio no se puede garantizar una convergencia rápida. Así, se define un espacio más grande aún, el espacio $\mathcal{H}_+^{2,-k}$, donde el método de Galerkin pueda presentar una mejor convergencia. En base a estos resultados, las soluciones del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ serán obtenidas usando una metodología que integra el método de Galerkin.

A. Formulación general del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

El problema de control mixto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ usual, generalizado en base a la Consideración 3 (ver Apéndice C), es aquel que intenta encontrar la función \hat{K} , solución de:

$$\inf_{K \in \Omega \cap \Theta} \int_{-\infty}^{\infty} [K^*(j\omega)\Gamma(j\omega)K(j\omega) - 2K^*(j\omega)\Lambda(j\omega)] d\omega. \quad (4.59)$$

Los ejemplos más usuales de los subconjuntos, Ω y Θ , están dados por:
 $\Omega = \bigcap_{m=1}^M \Omega_m$, $\Omega_m = \{K \in \mathcal{H}_+^\infty \text{ tal que } \|A_m K + B_m\|_\infty \leq \lambda_m\}$, siendo que A_m y B_m son funciones en \mathcal{H}_+^∞ ; $\Theta = \bigcap_{n=1}^N \Theta_n$, $\Theta_n = \{K \in \mathcal{H}_+^2 \text{ tal que } \|C_n K + D_n\|_2 \leq \mu_n\}$, siendo que $C_n \in \mathcal{H}_+^\infty$ y $D_n \in \mathcal{H}_+^2$; además λ_m y μ_n son números reales positivos de modo que los conjuntos Ω y Θ no sean vacíos.

Este problema no está bien posicionado en \mathcal{H}_+^2 porque Ω no está contenido en este espacio. Además, si Θ no es un conjunto vacío, el conjunto $\Omega \cap \Theta$ no es cerrado en las topologías de \mathcal{H}_+^2 y \mathcal{H}_+^∞ .

Las definiciones 1 y 2 y el Lema 1 (ver Apéndice C) permiten definir las extensiones del espacio que será usado para resolver el problema de control mixto. El espacio apropiado para resolver el problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es el espacio lineal $\mathcal{H}_+^{2,-1}$, esto es mostrado en los Teoremas 3 y 4. (ver Apéndice C). El Teorema 3 presenta las propiedades geométricas y topológicas de los espacios definidos en

Definición 1 y 2. El Teorema 4 relaciona las topologías de $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$, \mathcal{H}_+^2 y \mathcal{H}_+^∞ , permitiendo el uso del primer espacio para redefinir el problema (4.59). El Lema 2 establece la relación entre las topologías $\mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$.

Para completar el análisis del problema (4.59), es necesario verificar las propiedades del criterio funcional. Ese es el contenido del Teorema 5 (ver Apéndice C). Finalmente, el problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ puede ser reescrito como encontrar $\hat{K} \in \mathcal{H}_+^{2,-1}$, solución de:

$$\inf_{K \in \Omega \cap \Theta} \{ \|K\|_{\Gamma_{-1}}^2 - 2 \langle K, \Lambda \rangle_2 \} = \inf_{K \in \Omega \cap \Theta} \{ \|K - \check{K}\|_{\Gamma_{-1}}^2 - \|\check{K}\|_{\Gamma_{-1}}^2 \}, \quad (4.60)$$

con $\check{K} = (\Phi_{-1})^{-1} [(\Phi_{-1}^*)^{-1} \Lambda]_+ \in \mathcal{H}_+^{2,-1}$, siendo que bajo las condiciones del Teorema 5 (ver Apéndice C), el criterio funcional es estrictamente convexo y cerrado en $\mathcal{H}_+^{2,-1}$. Como consecuencia, un teorema muy bien conocido (Teorema 1.4.1, Balakrishnan, [4]) prueba la existencia y unicidad de la solución.

B. Problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ como un problema de norma mínima

Antes de presentar los métodos numéricos para resolver el problema de control mixto (4.60), éste será reescrito como un problema de norma mínima, un paso necesario para la prueba de la convergencia fuerte de la solución.

Considerando el espacio $\mathcal{H}_+^{2,-1}$ y su respectiva norma (Definición 1, Apéndice C), (4.53) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ K^* \Gamma K - 2K^* \Lambda \} (j\omega) d\omega &= \|K\|_{\Gamma}^2 - 2 \langle K, \Lambda \rangle_2 = \|K\|_{\Gamma}^2 - 2 \langle K, \Gamma \Phi^{-1} (\Phi^*)^{-1} \Lambda \rangle_2 \\ &= \|K\|_{\Gamma}^2 - 2 \langle K, \Phi^{-1} (\Phi^*)^{-1} \Lambda \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Usando proyecciones ortogonales tal que $(\Phi^*)^{-1} \Lambda = [(\Phi^*)^{-1} \Lambda]_+ + [(\Phi^*)^{-1} \Lambda]_-$ en el sentido del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$, y definiendo $\check{K} = \Phi^{-1} [(\Phi^*)^{-1} \Lambda]_+$, el pro-

blema de control mixto puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \|K\|_{\Gamma}^2 - 2 \langle K, \Lambda \rangle_2 &= \|K\|_{\Gamma}^2 - 2 \langle K, \check{K} \rangle_{\Gamma} = \|K\|_{\Gamma}^2 - 2 \langle K, \check{K} \rangle_{\Gamma} + \|\check{K}\|_{\Gamma}^2 - \|\check{K}\|_{\Gamma}^2 \\ &= \|K - \check{K}\|_{\Gamma}^2 - \|\check{K}\|_{\Gamma}^2, \end{aligned} \quad (4.61)$$

con $\check{K} \in \mathcal{H}_+^{2,-k}$. Para el caso general, donde $\partial_r(\Phi) = k$, $k \in \mathbb{N}$, se puede considerar espacios normados por $\|\cdot\|_{\Gamma}$, $\Gamma = \Phi^*\Phi$. Finalmente, la Definición 2, el Teorema 3 y el Lema 2 del Apéndice C pueden ser generalizados en la Definición 3 y el Teorema 7.

Los mismos argumentos usados en el Teorema 4(b) y la isometría presentada en el Teorema 7(f) muestran que los subconjuntos limitados y los subconjuntos cerrados y limitados de $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$ son limitados y cerrados limitados en $\mathcal{L}_{-m}^2(j\mathbb{R})$, respectivamente, si $k < m$. Entonces Ω y Θ son cerrados y limitados en la topología $\mathcal{H}_+^{2,-k}$ para todo $k > 0$, ya que este espacio es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$. Aún más, el Teorema 7(e) da un sentido en las proyecciones ortogonales $[\cdot]_+$ y $[\cdot]_-$ de $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$ para $\mathcal{H}_+^{2,-k}$ y $\varphi\mathcal{H}_-^{2,-k}$, respectivamente. Es importante resaltar que para tener el problema de control mixto definido en un sentido completo serán necesarias condiciones más restrictivas que fuerzen $\check{K} \in \mathcal{H}_-^{2,-k}$. Así, se tiene la Consideración 4 (ver Apéndice C).

Gracias a la Consideración 4, la expresión (4.61) está bien definida y el problema de control mixto (4.60) puede ser reescrito como encontrar la solución $\hat{K} \in \mathcal{H}_-^{2,-k}$ para:

$$\inf_{K \in \Omega \cap \Theta} \|K - \check{K}\|_{\Gamma}^2. \quad (4.62)$$

El problema de control mixto (4.62) puede ser reescrito como un problema de norma mínima en $\mathcal{H}_+^{2,-k}$ si este espacio es trasladado por \check{K} . Así, se redefine $G = K - \check{K}$, $\Omega' = \Omega - \check{K}$ y $\Theta' = \Theta - \check{K}$. Nótese que Ω' y Θ' son limitados y cerrados en $\mathcal{H}_+^{2,-k}$ porque las traslaciones son isomorfismos del espacio de Hilbert. Finalmente, el problema de optimización (4.62) puede ser considerado como el

nuevo problema de encontrar $\hat{G} \in \mathcal{H}_+^{2,-k}$, solución del problema de norma mínima:

$$\inf_{\hat{G} \in \Omega' \cap \Theta'} \|\hat{G}\|_{\Gamma}^2. \quad (4.63)$$

4.3.5. Aproximación usando métodos directos

Si $\{\beta_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathcal{H}_+^{2,-1}$, no necesariamente ortogonal, denótese por H_n el subespacio de dimensión finita generado por los n primeros vectores de la base. Si $\Omega_n = \Omega \cap \Theta \cap H_n$, entonces puede ser posible proyectar la solución del problema de control mixto (4.60) en H_n , lo cual define el siguiente problema de optimización en dimensión finita, encontrar \hat{K}_n en H_n , solución de:

$$\inf_{K \in \Omega_n} \{\|K\|_{\Gamma}^2 - 2\langle K, \Lambda \rangle_2\}. \quad (4.64)$$

Como Ω_n es un subconjunto cerrado, limitado y convexo de H_n y el criterio es estrictamente convexo, este problema de control mixto tiene una y sólo una solución \hat{K}_n en H_n para cada $n \in \mathbb{N}$ (Balakrishnan, [4], pag. 9). El método de Galerkin consiste en encontrar la aproximación \hat{K}_n de la solución óptima \hat{K} del problema de control mixto; para esto debe existir una secuencia $\{\hat{K}_n\}$ que converge a la solución óptima \hat{K} . Esta es la esencia del Teorema 8 (ver Apéndice C).

Bajo la Consideración 4, con $\partial_r(\Lambda) \geq 1 + k$, el problema de control mixto (4.60) puede ser escrito como los problemas de norma mínima (4.62) y (4.63), lo cual hace posible mostrar la fuerte convergencia de la secuencia $\{\hat{K}_n\}$ en espacios apropiados. Para esto se usa nuevamente la notación del Teorema 8 pero con $\{\beta_n, n \in \mathbb{N}\}$ una base de $\mathcal{H}_+^{2,-k}$, no necesariamente ortogonal. Así, se puede definir la proyección del problema de norma mínima (4.62) en H_n como encontrar $\hat{K}_n \in H_n$, solución de:

$$\inf_{K \in \Omega_n} \{\|K - \check{K}_n\|_{\Gamma}^2\}, \quad (4.65)$$

siendo que \check{K}_n es la proyección de \check{K} en H_n . Análogamente trasladando H_n por \check{K}_n , el problema de norma mínima (4.63) puede ser proyectado y llega a ser aquel de encontrar \hat{G}_n , solución de:

$$\inf_{K \in \Omega'_n} \{\|G\|_{\Gamma}^2\}, \quad (4.66)$$

siendo que $\Omega'_n = \Omega_n - \check{K}$, además Ω_n y Ω'_n son conjuntos limitados, cerrados y convexos. Los problemas de optimización (4.65) y (4.66) tienen una y sólo una solución, que puede ser obtenida definiéndose secuencias de funciones aproximantes de la solución óptima de los problemas de norma óptima (4.62) y (4.63), para $n \in \mathbb{N}$.

A seguir serán presentadas algunas bases para $\mathcal{H}_+^{2,-1}$ y $\mathcal{H}_+^{2,-k}$. Debido a la densidad de \mathcal{H}_+^2 en $\mathcal{H}_+^{2,-k}$, $k \geq 1$, cualquier base obtenida a partir del Teorema de Runge para el espacio de funciones analíticas en \mathbb{C}_+^0 (Luecking, [30]) puede ser usada.

A. Expansión en base pre-establecida (EBPE)

Las experiencias numéricas de Ades, [2] muestran el interés en hacer uso de conjuntos generadores redundantes, como por ejemplo:

$$\{L_o = 1, L_n = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{(s-a)^{n-1}}{(s+a)^n}, n \in \mathbb{N}\}, \text{ para cada número real positivo } a. \quad (4.67)$$

Este conjunto alcanza más rápidamente el comportamiento asintótico de las soluciones óptimas ya que el problema resultante es convexo por definición.

B. Expansión en base optimizada (EBO)

Otro ejemplo de base usada en el trabajo de Ades, [2] es:

$$\{T_o = 1, T_n = \frac{1}{s + a_n}, n \in N\}, \text{ para cada número real positivo } a_n. \quad (4.68)$$

Aunque el problema resultante sea no convexo (Ades, [2]), esta base permite obtener aproximaciones de la solución del problema de control mixto con ordenes inferiores a las generadas en la EBPE.

Capítulo 5

SISTEMA CONTROLADO

En los capítulos anteriores, fue presentada la teoría necesaria para:

1. Construir una clase de modelos de vigas dinámicamente equivalentes, las mismas que están caracterizadas por el grupo adimensional Π^{-1} (modelado);
2. Describir el modelo de vigas dinámicamente equivalentes en una representación espacio de estados, propicia para diseño del control (modelado);
3. Colocar un problema de control dado de acuerdo con las requerimientos de la teorías \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (teoría básica de control);
4. Definir las especificaciones de diseño en lazo cerrado para cualquier sistema de control (teoría básica de control);
5. Utilizar el algoritmo de Glover-Doyle para obtener controladores estabilizantes \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ (técnicas de diseño de controladores);
6. Utilizar el método de Galerkin para calcular aproximaciones del controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (técnicas de diseño de controladores). Se recuerda que únicamente se pueden calcular aproximaciones ya que el controlador solución es de orden infinito.

En base a la teoría presentada en los capítulos previos, los objetivos del presente capítulo son los siguientes: determinar el grupo adimensional que carac-

teriza sistemas dinámicamente equivalentes para la viga flexible a ser controlada, encontrar la representación espacio de estados adimensional para este grupo adimensional, determinar las especificaciones de diseño del control en lazo cerrado y finalmente, diseñar el controlador para el sistema (viga) adimensional. Una vez calculado el controlador adimensional, las leyes de escalamiento del Apéndice D serán usadas para calcular el controlador a ser implementado en la viga dimensional, vía simulación computacional.

El siguiente capítulo comprende la presentación de los resultados obtenidos a través de las simulaciones realizadas.

5.1. Viga flexible para control

En este punto se define la viga flexible a ser controlada. Los parámetros que describen la misma son presentados en el Cuadro 5.1.

Cuadro 5.1: Parámetros físicos de la viga flexible

	Variable	Valor	Unidad
Largo	L	1.8	m
Base de la sección transversal	b	0.026	m
Altura de la sección transversal	h	0.0035	m
Área de la sección transversal	$A = bh$	$9.1 \cdot 10^{-5}$	m^2
Momento de área	$I = \frac{bh^3}{12}$	$9.29 \cdot 10^{-11}$	m^4
Momento de inercia (de la masa)	$I_b = \frac{1}{3}\rho AL^3$	0.477	$kg \cdot m^2$
Densidad (aluminio)	ρ	2700	$kg \cdot m^{-3}$
Módulo de elasticidad	E	$71 \cdot 10^9$	$N \cdot m^{-2}$
Masa	m	0.442	kg
Factor de amortiguamiento	ξ	0.01	1
Frecuencia de referencia	Ω	1.592	s^{-1}

La configuración del problema de control activo de vibraciones considerada para este trabajo es presentada en la Fig. 5.1. La viga está simplemente apoyada en los extremos, la posición de la entrada del disturbio es x_1 , el punto en el cual el efecto del disturbio será disminuido es x_2 (posición del sensor) y x_3 es la posición

de entrada de la señal de control (posición del actuador).

Considerando un sistema colocado, en el Cuadro 5.2 se definen las posiciones x_1 , x_2 y x_3 para el sistema controlado. El grupo adimensional que representa sistemas dinámicamente equivalentes es a su vez presentado en el Cuadro 5.3.

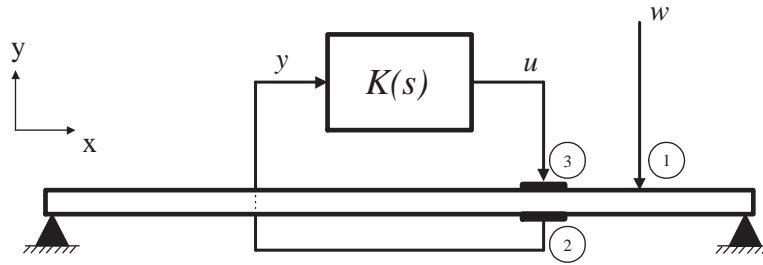


Figura 5.1: Configuración del sistema de control en la viga simplemente apoyada

Cuadro 5.2: Posiciones del sensor, del actuador y de la entrada del disturbio

Posición	Valor	Unidad
x_1	1.506	m
x_2	1.350	m
x_3	1.350	m

Cuadro 5.3: Grupo adimensional

Grupo adimensional	Valor
$\Pi^{-1} = \frac{\rho AL^4 \Omega^2}{EI}$	1

5.1.1. Modelo adimensional de la viga flexible

Para la clase de vigas caracterizadas en el Cuadro 5.3, la representación espacio de estados de la ecuación dinámica puede ser determinada usando (2.20). Así, las cantidades requeridas son: número de estados n , frecuencias naturales $\hat{\omega}_i$, factores de amortiguamiento $\hat{\xi}_i$, información de los modos $\hat{\phi}(\eta_e)$ y $\hat{\phi}(\eta_s)$.

1. Número de estados del sistema

La representación espacio de estados de orden finita es obtenida mediante el truncamiento de la serie (2.5) en $n = 6$. Esto significa que el modelo de espacio de estados contiene los 6 primeros modos flexibles.

2. Frecuencias naturales

Usando la expresión (2.7) para calcular las frecuencias naturales dimensionales, las frecuencias naturales adimensionales son obtenidas mediante la división de las frecuencias naturales dimensionales por la frecuencia de referencia Ω (Sección 1.2). Los valores de $\hat{\omega}_i$ correspondientes a los seis primeros modos son mostrados en el Cuadro 5.5.

3. Factores de amortiguamiento

El factor de amortiguamiento modal, $\hat{\xi}_i$, es función monótona no decreciente de la frecuencia. Pero, por simplicidad, el factor de amortiguamiento del primer modo, $\hat{\xi}_1 = 0,01$, también será considerado para los otros.

4. Modos

Los valores del Cuadro 5.2 son reescritos en el Cuadro 5.4 para las posiciones adimensionales η_1 , η_2 y η_3 .

Cuadro 5.4: Posiciones adimensionales del sensor, actuador y entrada del disturbio

Posición	Valor
η_1	0,836
η_2	0,750
η_3	0,750

Luego los modos son calculados de (2.6) y son usados en las matrices de entrada y salida de la ecuación espacio de estados adimensional. A seguir, el Cuadro 5.5 presenta todos los valores usados en la ecuación espacio de estados adimensional.

Cuadro 5.5: Valores de los modos usados en la ecuación espacio de estados adimensional

Modo (i)	Frecuencia ($\hat{\omega}_i$)	Factor de amortiguamiento ($\hat{\xi}_i$)	$\hat{\phi}(\eta_1)$	$\hat{\phi}(\eta_2)$	$\hat{\phi}(\eta_3)$
1	1.578	0.01	0.579	0.835	0.835
2	6.313	0.01	-1.011	-1.181	-1.181
3	14.204	0.01	1.180	0.835	0.835
4	25.252	0.01	-1.047	0	0
5	39.456	0.01	0.643	-0.835	-0.835
6	56.817	0.01	-0.074	1.181	1.181

5.1.2. Plantas nominales y plantas residuales

En el diseño del controlador se trabaja con un modelo simplificado denominado modelo nominal. Adicionalmente, es importante destacar que ciertas técnicas de control requieren de un modelo que caracterice la incerteza (diferencia) entre el modelo nominal y el modelo completo. Esta diferencia sirve para definir la robustez del sistema controlado.

En el caso del viga flexible tanto el modelo nominal como el modelo de incerteza son obtenidos de la ecuación espacio de estados del sistema (2.20). La estructura modal permite un fácil desacoplamiento de los modos “a ser controlados” y los “truncados”, luego los modos truncados pueden ser directamente modelados como incerteza aditiva. De aquí en adelante, el modelo de 6 modos es escogido como el modelo completo, los 3 primeros modos son escogidos como el conjunto “a ser controlado” y los modos restantes son considerados como el conjunto “truncado” (ver el gráfico tridimensional de la Fig. 5.2).

Según (2.20), la función de transferencia para la planta adimensional completa está dada por:

$$P_{\Delta}(s) = \sum_{i=1}^6 \frac{\hat{\phi}(\eta_e)\hat{\phi}(\eta_s)}{s^2 + \hat{\xi}_i\hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2}$$

siendo que η_e y η_s son las posiciones adimensionales de entrada y salida, respectivamente.

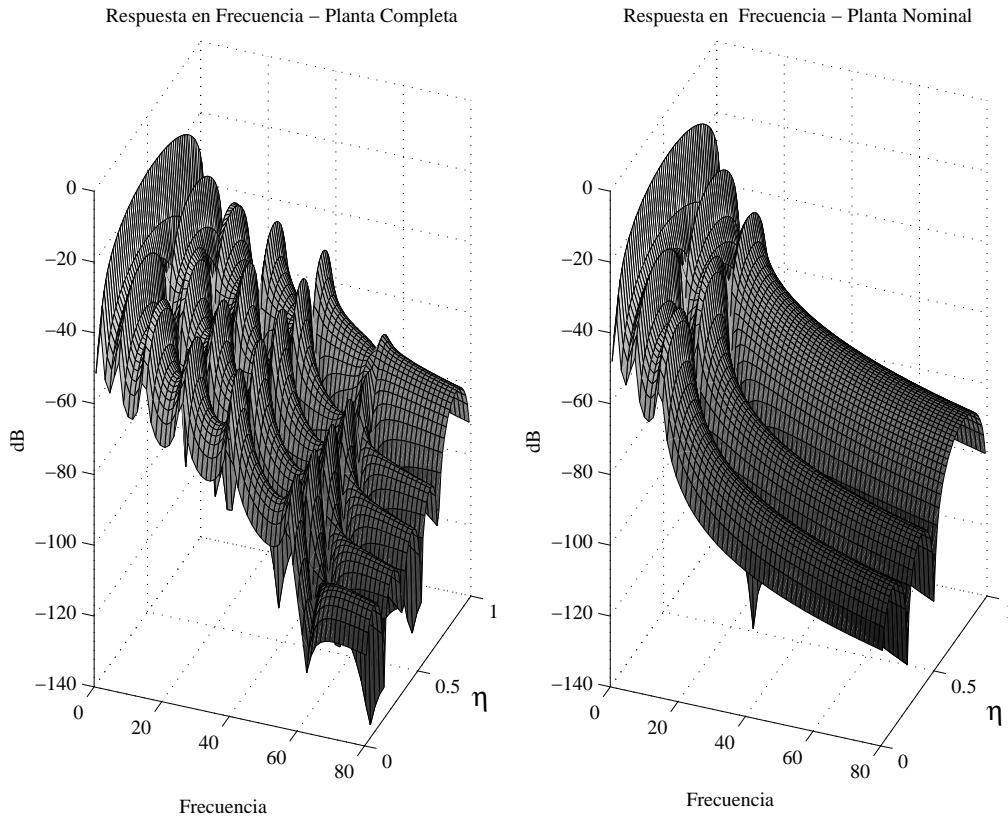


Figura 5.2: Respuesta en frecuencia de la viga sin control (planta completa y planta nominal), disturbio aplicado en η_1

A. Planta nominal

La planta nominal está formada por los tres primeros modos; esta selección se dio en base a varios factores, entre ellos: i) el significado de los modos en términos de su contribución a la salida, del espectro del disturbio de entrada, así como de la controlabilidad y observabilidad del sistema formado por estos modos, ii) la cantidad de amortiguamiento estructural inherente y de ahí la cantidad de amortiguamiento activo necesitado, iii) la frecuencia y el número total de modos que se puede controlar está limitada por la velocidad del computador en tiempo real, y iv) el grado de incerteza del modo.

La función de transferencia de la planta nominal es como sigue:

$$P(s) = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\phi}(\eta_e)\hat{\phi}(\eta_s)}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2}.$$

La planta nominal en forma compacta puede ser escrita como:

$$P(s) = \frac{p_4 s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{\prod_{i=1}^3 (s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2)}, \quad p_4 \neq 0,$$

siendo que las constantes p_i , pueden ser determinadas apropiadamente de los valores del Cuadro 5.5. En el Cuadro 5.6 se pueden observar los polos y ceros de la planta nominal P_{yu} (entrada η_3 , salida η_2) y de la planta nominal P_{yw} (entrada η_1 , salida η_2). El gráfico de la respuesta en frecuencia de las plantas nominales es dado en la Fig. 5.3.

Cuadro 5.6: Polos y ceros de las plantas nominales

Planta nominal P_{yu}		Planta nominal P_{yw}	
Polos	Ceros	Pólos	Ceros
$-0,0157 + 1,578j$	$-0,0305 + 3,795j$	$-0,0157 + 1,578j$	$-0,0278 + 3,525j$
$-0,0157 - 1,578j$	$-0,0305 - 3,795j$	$-0,0157 - 1,578j$	$-0,0278 - 3,525j$
$-0,0631 + 6,312j$	$-0,1194 + 12,597j$	$-0,0631 + 6,312j$	$-0,1093 + 11,775j$
$-0,0631 - 6,312j$	$-0,1194 - 12,597j$	$-0,0631 - 6,312j$	$-0,1093 - 11,775j$
$-0,1420 + 14,203j$		$-0,1420 + 14,203j$	
$-0,1420 - 14,203j$		$-0,1420 - 14,203j$	

B. Planta residual

Como la planta nominal sólo considera los 3 primeros modos flexibles, ella no modela completamente el sistema actual que fue definido con 6 modos (Sección 5.1.1). Mediante la eliminación de los modos de mayor frecuencia se introduce incerteza en el modelo de la planta nominal. De (2.20), es posible determinar la función de transferencia exacta para los modos mayores. Así, para el presente problema, el modelo de incerteza viene a ser un modelo de orden 6, ΔP , dado

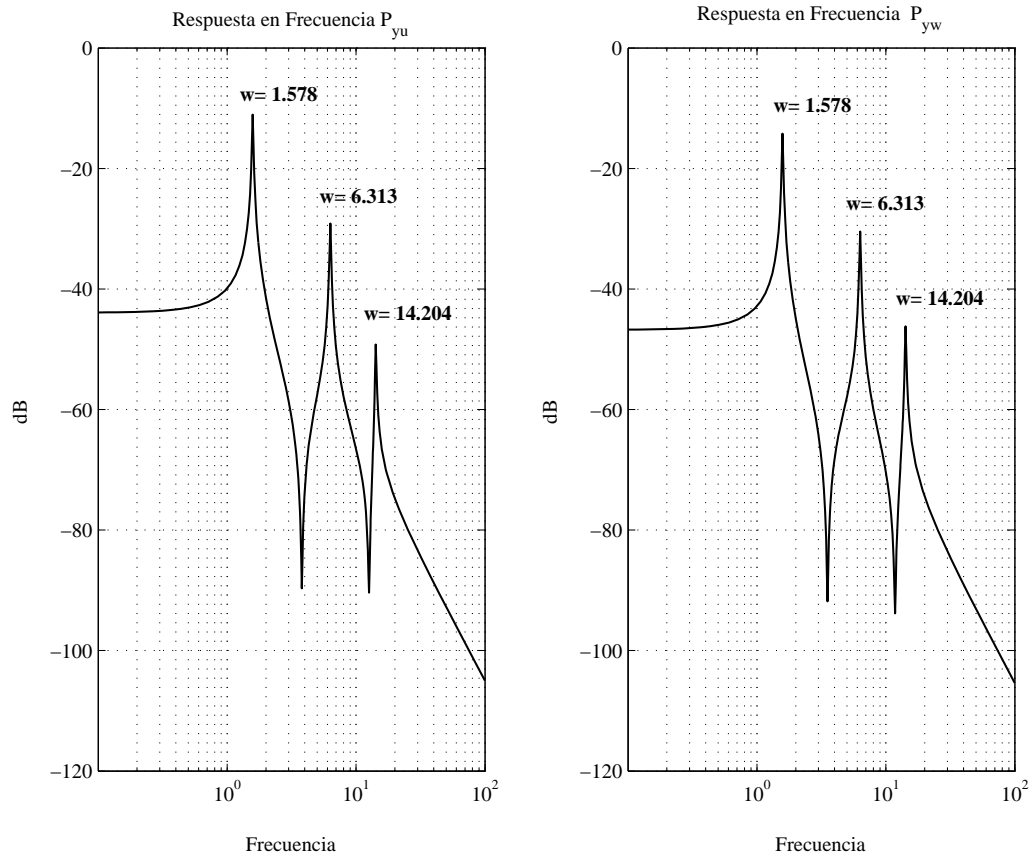


Figura 5.3: Respuesta en frecuencia de las plantas nominales P_{yu} y P_{yw}

por:

$$\Delta P(s) = \sum_{i=4}^6 \frac{\hat{\phi}(\eta_e)\hat{\phi}(\eta_s)}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2}$$

Esta ecuación puede ser reescrita también en una forma compacta como:

$$\Delta P(s) = \frac{\tilde{p}_4 s^4 + \tilde{p}_3 s^3 + \tilde{p}_2 s^2 + \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0}{\prod_{i=4}^6 (s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2)}, \quad \tilde{p}_4 \neq 0$$

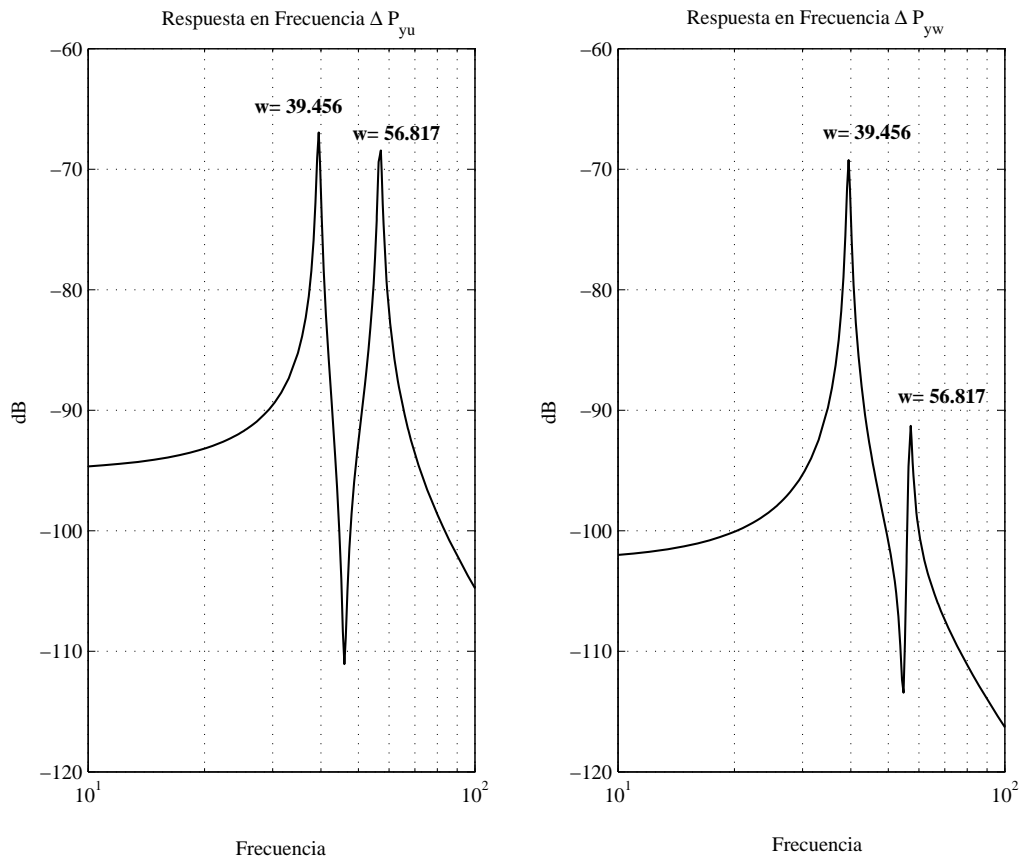
siendo que las constantes \tilde{p}_i , pueden ser determinadas apropiadamente de los valores del Cuadro 5.5. Los polos y ceros de las plantas residuales son dados en el Cuadro 5.7.

Un detalle a destacarse en este punto es que la posición del sensor y la del actuador fue definida en un nodo del cuarto modo para reducir las incertezas

de la parte no-modelada (impedir la excitación de este modo por efecto de la realimentación). La respuesta en frecuencia de las plantas residuales es mostrada en la Fig. 5.4. Debido a la inclusión del amortiguamiento en el modelo, la función de transferencia tiene polos con parte imaginaria, lo que significa que la amplitud de las resonancias es finita y puede ser limitada por arriba, este hecho será muy importante en la definición del limitante de la incerteza residual.

Cuadro 5.7: Polos y ceros de las plantas residuales

Planta residual ΔP_{yw}		Planta residual ΔP_{yu}	
Polos	Ceros	Polos	Ceros
$-0,2525 + 25,250j$	$-0,2525 + 25,250j$	$-0,2525 + 25,250j$	$-0,2525 + 25,250j$
$-0,2525 - 25,250j$	$-0,2525 - 25,250j$	$-0,2525 + 25,250j$	$-0,2525 - 25,250j$
$-0,3945 + 39,454j$	$-0,4524 + 45,975j$	$-0,3945 + 39,454j$	$-0,5438 + 54,714j$
$-0,3945 - 39,454j$	$-0,4524 - 45,975j$	$-0,3945 - 39,454j$	$-0,5438 - 54,714j$
$-0,5681 + 56,814j$		$-0,5681 + 56,814j$	
$-0,5681 - 56,814j$		$-0,5681 - 56,814j$	

Figura 5.4: Respuesta en frecuencia de las plantas residuales ΔP_{yu} y ΔP_{yw}

5.2. Especificaciones de diseño

El objetivo de diseño para los sistemas de control, en el caso de la viga flexible, es incrementar el amortiguamiento de los modos estructurales (suprimir las vibraciones). Los diseños deben ser robustos con respecto a modos estructurales no modelados y, si fuera posible, con respecto a incertezas paramétricas, tales como errores en la frecuencia, amortiguamiento y modos. Los controladores también son diseñados para evitar saturación de los sistemas de actuación durante los transientes del sistema controlado.

Los objetivos de diseño, atenuación de vibraciones con señal de actuación limitada y robustez en estabilidad con respecto a los modos de alta frecuencia, son expresados en la forma de funciones de transferencia ponderadas. Debido a la inclusión del amortiguamiento en el modelo, la función de transferencia tiene polos con parte imaginaria, lo que significa que la amplitud de las resonancias es finita y puede ser limitada por arriba, este hecho será muy importante en la definición del limitante de la incerteza residual.

5.2.1. Especificaciones de desempeño

Para incorporar amortiguamiento en el sistema se usa una especificación de desempeño en la forma de función de transferencia ponderada.

A. Ponderación de la función sensibilidad $S(s)$

Si se quiere atenuar el disturbio, se busca que la función sensibilidad sea minimizada en la faja de frecuencias donde el disturbio es significativo. Por conveniencia, este objetivo de desempeño se refleja mediante la elección de una función apropiada tal que:

$$\begin{aligned} |W_S(j\omega)S(j\omega)| &\leq 1, \quad \forall \omega < \omega_c, \\ |S(j\omega)| &\leq |W_S(j\omega)|^{-1}, \quad \forall \omega < \omega_c, \end{aligned}$$

siendo que W_S es una función de ponderación.

La función de ponderación del desempeño intenta penalizar sólo los picos de resonancia. Como regla general, los modos estructurales que más influencia tienen en la respuesta dinámica son los más ponderados. La selección de la función de ponderación penaliza todos los modos que se encuentran antes de la frecuencia de corte ω_c . Como la planta nominal considera los tres primeros modos de la viga flexible, se concluye que la faja de frecuencias de importancia va hasta la frecuencia del tercer modo. La función de ponderación de la función sensibilidad es calculada en base a la propia dinámica de la viga y se define como:

$$W_S(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}, \quad \hat{\omega}_1 < \omega < \hat{\omega}_3.$$

Tomando en cuenta la variación de la frecuencia ω y considerándose los siguientes límites para ξ , $0,05 < \xi < 0,5$, se obtiene la función de ponderación de la función sensibilidad.

B. Ponderación de la función restricción de energía $U(s)$

Otra función que se usa para especificar objetivos de desempeño es la función restricción de energía, función que relaciona la señal de disturbio y la señal de control. Ella caracteriza la ganancia de la señal de control y, de esta forma, es usada para restringir la señal de control.

Con la misma idea de cálculo considerada para la ponderación de la función sensibilidad, se define la ponderación de la función restricción de energía como:

$$W_U(j\omega) = \frac{\left(\frac{s^2}{\omega_1^2} + 2\frac{\xi_1}{\omega_1}s + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_2^2} + 2\frac{\xi_2}{\omega_2}s + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_3^2} + 2\frac{\xi_3}{\omega_3}s + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_4^2} + 2\frac{\xi_4}{\omega_4}s + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_5^2} + 2\frac{\xi_5}{\omega_5}s + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_6^2} + 2\frac{\xi_6}{\omega_6}s + 1\right)}, \quad |W_U(j\omega)U(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega$$

siendo que $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi_1, \xi_2$ y ξ_3 son las tres primeras frecuencias naturales y los

tres primeros factores de amortiguamiento del sistema a controlar. Las demás frecuencias y factores de amortiguamiento son calculados entre los siguientes límites, $0,1 < \xi_{4,5,6} < 0,5$ y $\omega_1 < \omega_{4,5,6} < \omega_3$.

Más adelante se verá que es posible usar la misma función para definir la ponderación de la función restricción de energía (W_U) y la función limitante de la incerteza residual, la cual es presentada en la forma aditiva (W_Δ). Esto porque cuando se realiza un análisis del sistema en lazo cerrado, ambas funciones están ligadas a la función restricción de energía (ver Sección 5.2).

5.2.2. Especificaciones de estabilidad

Para garantizar la estabilidad del sistema perturbado de la forma $P + \Delta P$ se considera un margen de estabilidad de acuerdo con un limitante de la perturbación $\Delta P \leq m(\omega)$. La preocupación en la presente subsección es definir un margen de estabilidad para el sistema a ser controlado. Este margen de estabilidad puede ser calculado a partir de las siguientes consideraciones:

1. En el cálculo del modelo nominal se consideró sólo una parte del modelo despreciándose los modos de las frecuencias mayores. Este modelo despreciado fue definido como incerteza residual.
2. Los modelos nominales contienen incertezas paramétricas en las frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y modos.

A. Modelo de incerteza

Un modelo de incerteza aditiva usado para modelar la incerteza que existe entre la planta nominal y la planta completa es dado por:

$$P_\Delta(s) = P(s) + W_\Delta(s)\Delta(s), \quad \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1, \quad \forall \omega > 0,$$

siendo que $W_\Delta(s)$ es una función de transferencia estable que caracteriza la estructura de la incerteza en la frecuencia y $\Delta(s)$ toma en cuenta la incerteza en la fase y también actúa como un factor de escalamiento del tamaño de la perturbación.

De la Fig. 5.5 es fácil observar que:

$$P_{yu\Delta}(s) = P_{yu}(s) + W_\Delta(s)\Delta(s) \Rightarrow P_{yu\Delta}(s) - P_{yu}(s) = W_\Delta(s)\Delta(s),$$

y como $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$, luego se tiene:

$$|P_{yu\Delta}(s) - P_{yu}(s)| \leq |W_\Delta(s)|, \quad \forall \omega,$$

donde la función de transferencia $W_\Delta(j\omega)$ provee un limitante superior de la incerteza.

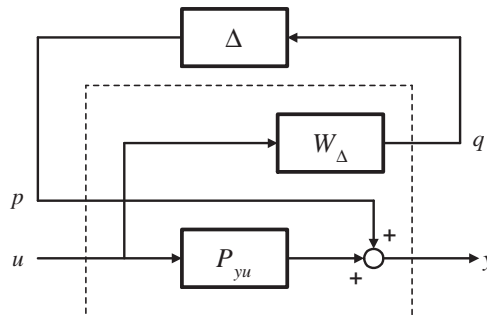


Figura 5.5: Modelo de incerteza aditiva para P_{yu}

B. Incertezas residuales

El término a la izquierda en la última expresión¹, se puede reescribir como:

$$P_\Delta(s) - P(s) = \Delta P = \sum_{i=4}^6 \frac{\hat{\phi}(\eta_e)\hat{\phi}(\eta_s)}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2},$$

que es exactamente el modelo de incertezas residuales. Una vez conocido el modelo residual sólo falta calcular un limitante superior de este modelo, se sabe que este limitante existe porque el sistema residual tiene polos con parte imaginaria, lo que significa que su amplitud en las resonancias es finita.

¹Quitando los subíndices para trabajar el modelo de incertezas residuales de forma genérica.

Limitante de las Incertezas Residuales Las incertezas no-modeladas pueden ser limitadas por una función de transferencia de la forma:

$$W_{\Delta R}(j\omega) = \frac{\left(\frac{s^2}{\omega_1^2} + 2\frac{\xi_1}{\omega_1}s + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_2^2} + 2\frac{\xi_2}{\omega_2}s + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_3^2} + 2\frac{\xi_3}{\omega_3}s + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_4^2} + 2\frac{\xi_4}{\omega_4}s + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_5^2} + 2\frac{\xi_5}{\omega_5}s + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_6^2} + 2\frac{\xi_6}{\omega_6}s + 1\right)},$$

con $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi_1, \xi_2$ y ξ_3 siendo las tres primeras frecuencias naturales y los tres primeros factores de amortiguamiento del sistema a controlar. Las demás frecuencias y factores del amortiguamiento son calculados entre los siguientes límites, $0,1 < \xi_{4,5,6} < 0,5$ y $\hat{\omega}_1 < \omega_{4,5,6} < \hat{\omega}_3$, mediante tentativa y error. La elección de los valores se hace en relación al que represente mejor la dinámica de la planta residual. Nótese que para calcular esta función se hace uso de la propia dinámica del sistema. En la Fig. 5.6 se presentan los gráficos de $W_{\Delta R}(s)$ y ΔP , donde se puede ver que se cumple la condición $|\Delta P| < |W_{\Delta R}|$.

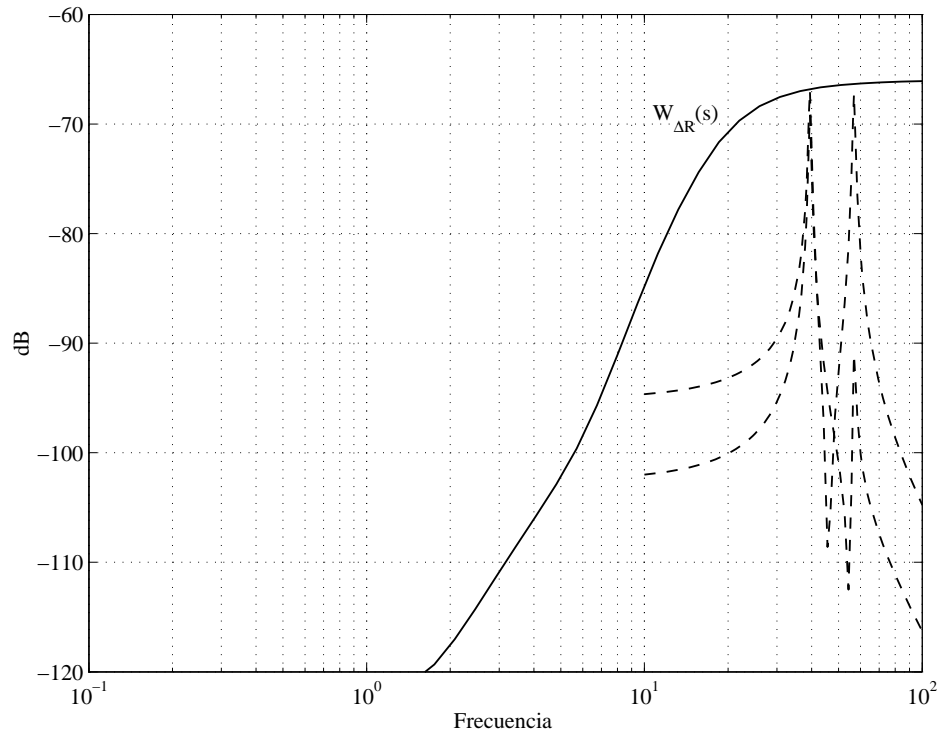


Figura 5.6: Limitante de las incertezas residuales

C. Incertezas paramétricas

Para el cálculo del modelo de incerteza paramétrica se considera la planta nominal dada por:

$$P(s) = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{K}_{i\Delta} \hat{\omega}_{i\Delta}^2}{s^2 + 2\hat{\xi}_{i\Delta} \hat{\omega}_{i\Delta} s + \hat{\omega}_{i\Delta}^2},$$

siendo que $\hat{K}_{i\Delta} = \frac{\hat{\phi}(\eta_e) \hat{\phi}(\eta_s)}{\hat{\omega}_{i\Delta}^2}$. Sea el rango de las incertezas paramétricas descrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{K}_i - \Delta \hat{K}_i &\leq \hat{K}_{i\Delta} \leq \hat{K}_i + \Delta \hat{K}_i, \\ \hat{\xi}_i - \Delta \hat{\xi}_i &\leq \hat{\xi}_{i\Delta} \leq \hat{\xi}_i + \Delta \hat{\xi}_i, \\ \hat{\omega}_i - \Delta \hat{\omega}_i &\leq \hat{\omega}_{i\Delta} \leq \hat{\omega}_i + \Delta \hat{\omega}_i. \end{aligned}$$

El Cuadro 5.8 muestra los valores de las variaciones paramétricas consideradas para la viga flexible en estudio.

Cuadro 5.8: Valores de las incertezas paramétricas

Modo (<i>i</i>)	$\Delta \hat{\omega}_i$ 1% $\hat{\omega}_i$	$\Delta \hat{\xi}_i$ 10% $\hat{\xi}_i$	$\Delta \hat{K}_i$ 5% \hat{K}_i
1	0.0157	0.001	0.014000
2	0.0631	0.001	0.001750
3	0.1420	0.001	0.000173

Porcentajes obtenidos de Lim *et al.*, [27].

El error aditivo puede ser representado por:

$$P_{\Delta}(s) - P(s) = \Delta P(s) = \sum_{i=1}^3 \frac{\left(\frac{\hat{K}_{i\Delta}}{\hat{\omega}_{i\Delta}^2} - \frac{\hat{K}_i}{\hat{\omega}_i^2} \right) s^2 + 2 \left(\frac{\hat{K}_{i\Delta} \hat{\xi}_{i\Delta}}{\hat{\omega}_{i\Delta}} - \frac{\hat{K}_i \hat{\xi}_i}{\hat{\omega}_i} \right) s + \Delta \hat{K}_i}{\left(\frac{1}{\hat{\omega}_{i\Delta}} s^2 + 2 \frac{\hat{\xi}_{i\Delta}}{\hat{\omega}_{i\Delta}} s + 1 \right) \left(\frac{1}{\hat{\omega}_i} s^2 + 2 \frac{\hat{\xi}_i}{\hat{\omega}_i} s + 1 \right)},$$

donde la forma general de la amplitud $|P_{\Delta}(s) - P(s)|$ para valores variables de los tres parámetros \hat{K} , $\hat{\omega}$ y $\hat{\xi}$ es presentada en la Fig. 5.7 por la parte sombreada.

Limitante de las Incertezas Paramétricas Las incertezas paramétricas pueden ser limitadas por una función de transferencia de la forma:

$$W_{\Delta P}(j\omega) = k \left[\frac{(s + \omega_d)}{(s + \omega_n)} \left(\frac{\omega_d}{\omega_n} \right) \right]^2,$$

con ω_d y ω_n siendo frecuencias próximas a la tercera frecuencia natural ($\omega_d > \hat{\omega}_3$ y $\omega_n < \hat{\omega}_3$), y k siendo un factor de escalamiento. En la Fig. 5.7 se presentan $W_{\Delta P}(s)$ y ΔP pudiendo así apreciarse que $W_{\Delta P}(s)$ es un limitante de ΔP .

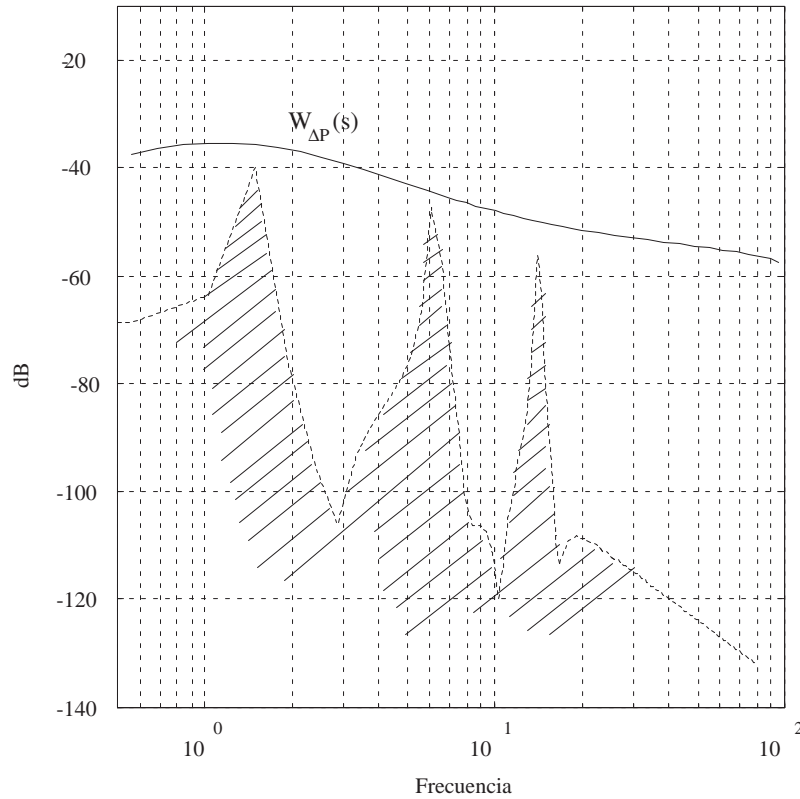


Figura 5.7: Limitante de las incertezas paramétricas

La elección del margen de estabilidad se debería hacer según que criterio de incerteza (dinámica no-modelada o variaciones paramétricas) presenta el mayor margen. Al calcular $\|W_{\Delta R}\|_{\infty}$ y $\|W_{\Delta P}\|_{\infty}$ estos resultan -64.194dB y -36.654dB, respectivamente. A pesar de presentar un menor margen, en este trabajo se usará -64,194dB como margen de estabilidad, correspondiente a la dinámica no modelada. Para garantizar que el sistema de control es robusto ante la presencia de incertezas paramétricas usaremos ganancias altas a bajas frecuencias. Esta elección del margen de estabilidad se realiza con el fin de evitar obtener resultados muy conservativos con un margen de estabilidad muy grande.

5.3. Sistema controlado

La planta para el diseño del controlador (planta nominal) es considerada de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_d d, \quad (5.1)$$

$$y = Cx, \quad (5.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^6$, $d \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^1$ y $y \in \mathbb{R}^1$. Este modelo nominal fue obtenido mediante residualización del modelo completo del sistema. Un modelo de la planta completa es obtenido usando 12 estados, los cuales corresponden a los 6 primeros modos en (2.20). Este último modelo es el que será usado en la evaluación del desempeño. El trabajar con el modelo nominal para diseñar el controlador es conveniente por las siguientes razones: i) los modos de frecuencia más baja dominan la respuesta, y ii) la discrepancia entre modelos analíticos y empíricos se incrementa en gran magnitud a medida que aumentan las frecuencias. Las Figs. 5.8 y 5.9 ilustran la fidelidad del modelo de diseño (de orden reducida) mediante la presentación de la respuesta en frecuencia del modelo de diseño y del modelo de evaluación (modelo completo).

La Fig. 5.8 presenta la función de transferencia de la entrada de control, localizada en η_2 , a la deflexión medida en el punto η_3 . Las frecuencias de los tres primeros modos coinciden y no existe error en las ganancias modales. La Fig. 5.9 muestra una coincidencia excelente en la función de transferencia del disturbio, aplicado en η_1 , a la deflexión medida en el punto η_3 .

La planta aumentada para el problema de control de la viga flexible es dada por:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad (5.3)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u, \quad (5.4)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w, \quad (5.5)$$

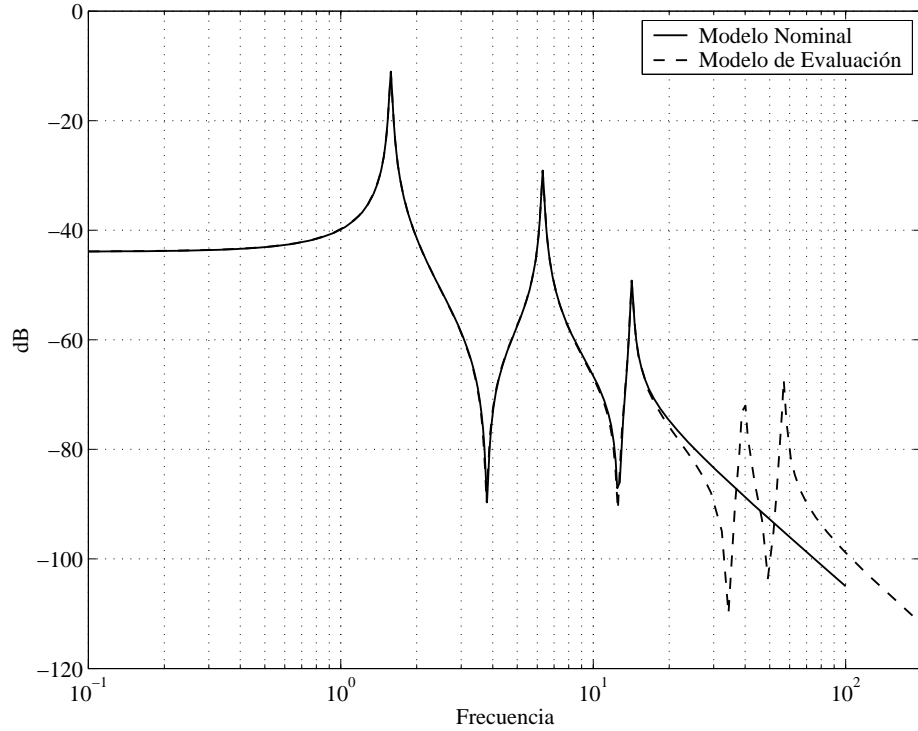


Figura 5.8: Comparación de los modelos de diseño y de evaluación para deflexión en el punto η_3 teniendo como entrada la señal de control en η_2

donde $x \in \mathbb{R}^6$, $w \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^1$, $z \in \mathbb{R}^2$ y $y \in \mathbb{R}^1$. La entrada exógena w consta del disturbio w_d y del ruido de medida. La salida controlada incluye la señal medida ponderada z_y y la señal de control ponderada z_u , ver Fig. 5.10.

Para proveer robustez al modelo de diseño, el modelo de diseño es aumentado para incluir una incerteza aditiva que represente el error del modelo más allá de la banda de control, $W_{\Delta R}$. Este tipo de modelo de incerteza fuerza a que el control estabilice los modos de alta frecuencia que fueron despreciados del modelo completo (incertezas residuales).

La Fig. 5.10 ilustra la configuración de la planta y el controlador para diseño del control del presente problema. Identificando las funciones de transferencia que se usarán en cálculos futuros, se obtiene:

$$P_{yu} = C(sI - A)^{-1}B,$$

$$P_{yw_d} = C(sI - A)^{-1}B_d.$$

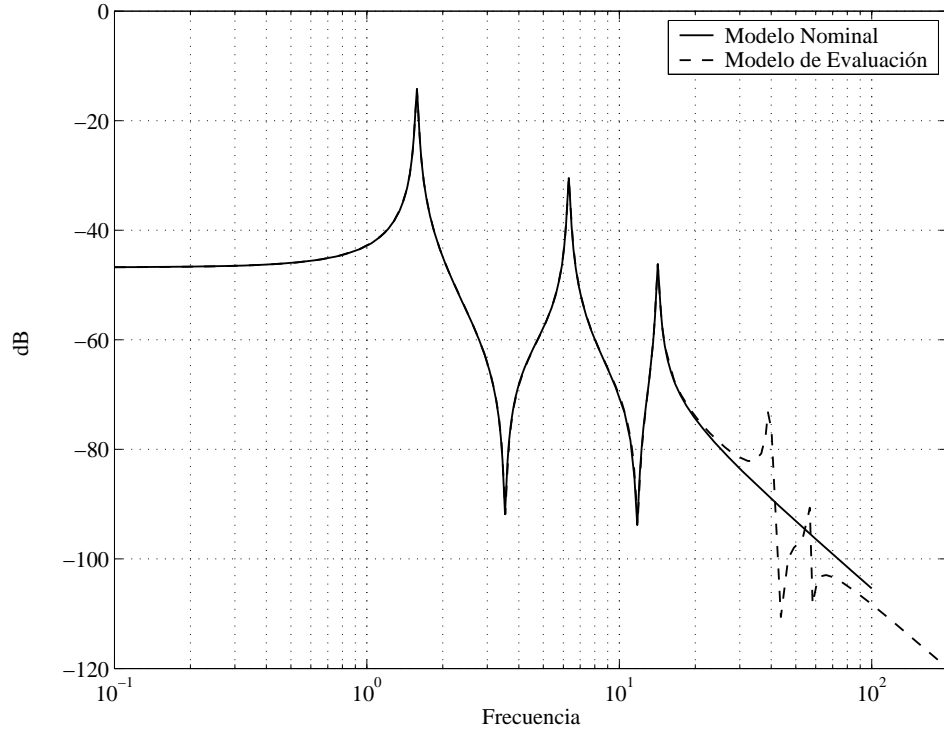


Figura 5.9: Comparación de los modelos de diseño y de evaluación para deflexión en el punto η_3 teniendo como entrada el disturbio en η_1

5.3.1. Control \mathcal{H}_2

Para el diseño de control \mathcal{H}_2 se tiene que $\Delta = 0$ y la configuración del sistema de control es como mostrado en la Fig. 5.11, donde los vectores de entrada y salida son:

$$w = \begin{bmatrix} w_d \\ \text{ruido} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_u \\ z_y \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

y la planta generalizada tiene la siguiente forma:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|c} A & B_d & 0 & B \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\rho} \\ \hline C & 0 & V^{\frac{1}{2}} & 0 \end{array} \right],$$

con la ponderación de control $W_U = \sqrt{\rho} I_{1 \times 1}$ (para reflejar un actuador), la intensidad del ruido en el sensor $V = 0,001 I_{1 \times 1}$ (para reflejar un sensor), la

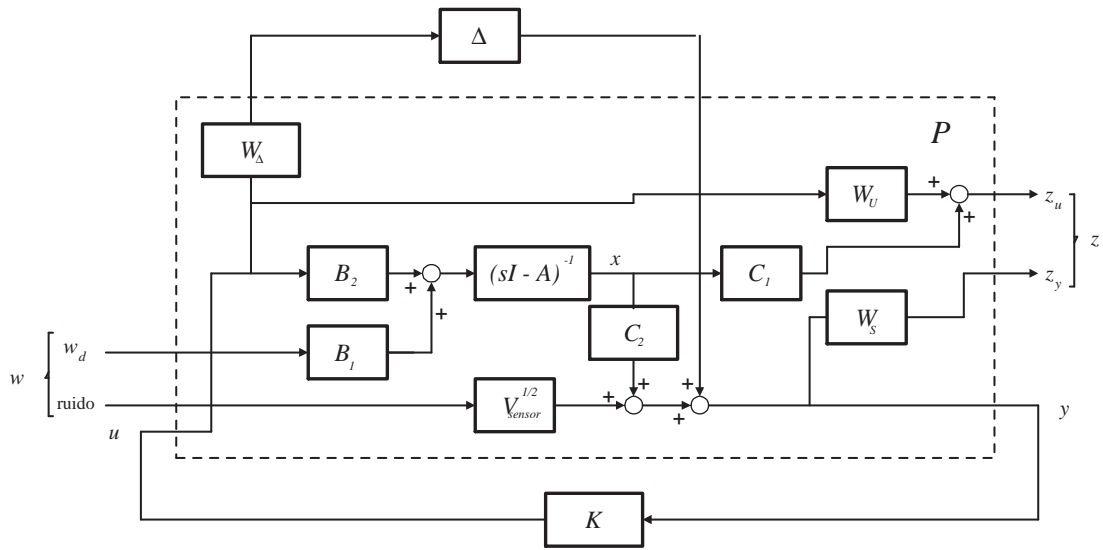


Figura 5.10: Configuración general del sistema controlado usando el lazo de realimentación para incertezas aditivas

intensidad del disturbio de entrada $K_d = 0,02$, y la ponderación de los estados $C_1^T C_1$, donde $C_1 = C$.

Todos los modos estructurales tiene algún amortiguamiento inherente, por esta razón el sistema es estabilizable y detectable. En consecuencia, las soluciones de las ecuaciones de Ricatti, descritas en (4.36) y (4.37), siempre existirán y como resultado el controlador \mathcal{H}_2 puede ser calculado.

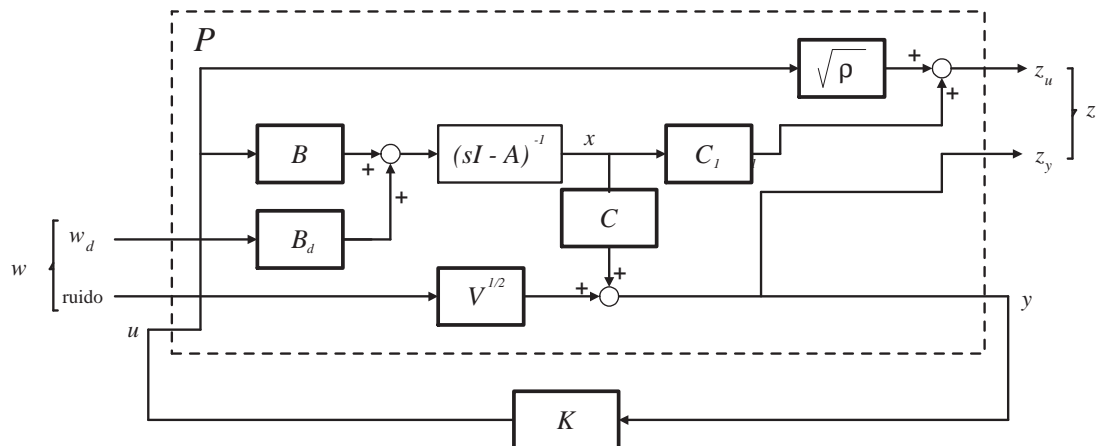


Figura 5.11: Configuración del sistema controlado usando control \mathcal{H}_2

El primer paso en el diseño \mathcal{H}_2 es proveer “suficiente” amortiguamiento para los modos del modelo nominal. ‘Suficiente’ amortiguamiento se refiere a por lo menos 80 % de decaimiento en 10s.

El segundo paso involucra la verificación de la robustez del diseño al “spillover” debido a los modos truncados y/o incertezas paramétricas. El control \mathcal{H}_2 , en su concepción, contiene un modelo de incerteza aditiva para las derivadas de los estados y para las medidas del sensor; esto es, las derivadas de los estados y las medidas de los sensores son contaminadas con ruido². Cabe notar que el este modelo de incerteza ha sido considerado como irreal para varias clases de problemas de control.

5.3.2. Control \mathcal{H}_∞

Para el diseño de control \mathcal{H}_∞ , la configuración del sistema de control presentada en la Fig. 5.10 es modificada y resulta como mostrado en la Fig. 5.12. Para obtener la Fig. 5.12 el lazo de realimentación de la incerteza aditiva Δ ha sido abierto, luego se obtiene una entrada ficticia que viene a ser la entrada asociada con la incerteza residual w_{ad} y una salida ficticia que corresponde a la salida asociada con la incerteza residual z_{ad} . Nótese también la inserción de la atenuación c y la ganancia $1/c$ a la entrada w_{ad} y a la salida z_{ad} , respectivamente. Finalmente, los vectores de entradas exógenas y salidas controladas quedan descritos como:

$$w = \begin{bmatrix} w_{ad} \\ \text{ruido} \\ w_d \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_{ad} \\ z_u \\ z_y \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

²El ruido de proceso excita uniformemente cada derivada de los estados del sistema en un intento de proveer una medida limitada de desempeño robusto. Sin embargo, la adición de ruido a las entradas de los estados de la planta puede producir inestabilidad. El ruido adicionado a los sensores servirá para limitar el ancho de banda del sistema de control y compensará, a costa del desempeño del controlador, por la dinámica de alta frecuencia no-modelada, todo esto con la intención de proveer alguna medida de estabilidad robusta.

B. Estabilidad robusta

La robustez en estabilidad debido a incertezas aditivas es dada por³:

$$\bar{\sigma} [\Delta K(I - P_{yu}K)^{-1}] < 1; \quad \forall \omega \in [0, \infty) \iff \|\Delta K(I - P_{yu}K)^{-1}\|_{\infty} < 1. \quad (5.9)$$

Es importante destacar que para el caso de estructuras flexibles la perturbación Δ es estable, esto porque los modos truncados son disipativos por naturaleza. El limitante superior, mejor dicho, la condición $\bar{\sigma}(\Delta) \leq |W_{ad}(\omega)|$, permite limitar (5.9) de la siguiente forma:

$$\|W_{ad}K(I - P_{yu}K)^{-1}\|_{\infty} < 1. \quad (5.10)$$

Esta ecuación también puede ser reescrita como:

$$\frac{1}{\bar{\sigma} [K(I - P_{yu}K)^{-1}]} > |W_{ad}(\omega j)|; \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.11)$$

Las matrices que componen la planta aumentada, en concordancia con la Fig. 5.12, son presentadas a seguir:

$$P_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ cW_S & 0 & P_{yw_d}W_S \end{bmatrix}, \quad P_{zu} = \begin{bmatrix} W_{ad}\frac{1}{c} \\ W_U \\ P_{yu}W_S \end{bmatrix},$$

$$P_{yw} = \begin{bmatrix} c & \sqrt{V} & P_{yw_d}W_S \end{bmatrix}, \quad P_{yu} = P_{yu}. \quad (5.12)$$

Sustituyendo (5.12) en (3.18) y realizando las respectivas operaciones se obtiene la matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado N_{zw} como sigue:

$$N_{zw} = \begin{bmatrix} W_{ad}U & W_{ad}\frac{1}{c}U\sqrt{V} & W_{ad}\frac{1}{c}UP_{yw_d} \\ cW_UU & W_UU\sqrt{V} & W_UUP_{yw_d} \\ cW_S S & P_{yu}W_SU\sqrt{V} & P_{yw_d}W_S S \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

donde $S = (I + P_{yu}K)^{-1}$ y $U = K(I + P_{yu}K)^{-1}$. Observando la matriz N_{zw}

³Tomado de acuerdo con Lim *et al.*, [27].

se puede decir que W_U y W_{ad} están relacionadas con la función restricción de energía U . Esto explica porque W_U puede ser usada para especificar robustez. El ruido está presente en el sistema de control para de cierta forma dotarlo de robustez, pero, dado que en el control \mathcal{H}_∞ se incorpora explícitamente un modelo de la incerteza, el ruido será suprimido. Luego, la configuración simplificada del sistema controlado queda como mostrado en la Fig. 5.13.

Una interpretación física de la especificación de desempeño se torna evidente observando la matriz de funciones de transferencia N_{zw} . Nótese que P_{yw_d} es la función de transferencia de la entrada w_d a la salida y mientras que $P_{yw_d}(I - P_{yu}K)^{-1}$ es la misma función de transferencia cuando el lazo de realimentación es cerrado (sin ponderación). De ahí que, reducir las ganancias principales de $P_{yw_d}(I - P_{yu}K)^{-1}$ implica una atenuación de disturbios via lazo de realimentación. Además, en caso de w_d ser el vector impulso unitario, $P_{yw_d}(j\omega)$ y $P_{yw_d}(I - P_{yu}(j\omega)K)^{-1}$ serían las funciones de respuesta en frecuencia en lazo abierto y lazo cerrado de la salida y . Si consideramos que los valores pico de la matriz respuesta en frecuencia son una medida del amortiguamiento en las resonancias, una restricción en la norma \mathcal{H}_∞ puede ser interpretada como una restricción en el amortiguamiento de los modos estructurales en lazo cerrado.

Las funciones de transferencia en lazo cerrado para la planta simplificada de la Fig. 5.13 están dadas por:

$$\begin{bmatrix} z_{ad} \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{ad}K(I - P_{yu}K)^{-1} & \frac{1}{c}W_{ad}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw_d} \\ cW_S(I - P_{yu}K)^{-1} & P_{yw_d}W_S(I - P_{yu}K)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{ad} \\ w_d \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Para obtener desempeño robusto es necesario minimizar simultáneamente $N_{z_{ad}w_d}$, la función de transferencia de robustez, y $N_{z_yw_d}$, la función de transferencia de desempeño. La inclusión de $N_{z_{ad}w_d}$ y $N_{z_yw_d}$, que no tienen interpretación de desempeño o de robustez, provee una garantía conservadora de las restricciones esenciales en estabilidad y desempeño, esto porque las ganancias de ambas funciones de transferencia también son limitadas en el proceso de minimización de N_{zw} .

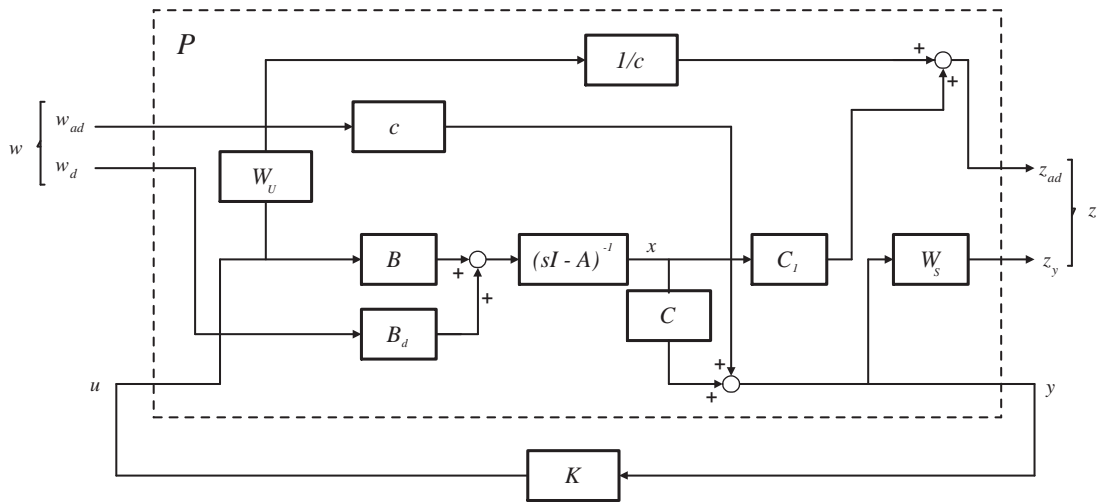


Figura 5.13: Configuración simplificada del sistema controlado usando control \mathcal{H}_∞

El parámetro de escalamiento c es refinado a través de iteraciones para aliviar en algún grado esta configuración restrictiva.

El modelo de diseño está constituido por los 3 primeros modos mientras que la incerteza aditiva, Δ , es modelada como los otros tres modos estructurales restantes. La curva trazo-punto de la Fig. 5.14 muestra las principales ganancias del limitante de la incerteza aditiva a ser considerada en el diseño del controlador. Debe ser enfatizado que la incerteza aditiva considerada en el diseño de controlador es solo un estimado puesto que los valores reales son desconocidos. De ahí que, estrictamente hablando, las alturas verdaderas de los picos de resonancia y sus ubicaciones no son conocidas exactamente. En consecuencia, este abordaje \mathcal{H}_∞ podría ser considerado como conservador ya que usa un limitante superior de las incertezas predecidas. Sin embargo, un beneficio del abordaje de incerteza usándose un limitante superior viene a ser la reducción de la complejidad del controlador⁴. Finalmente, el limitante del modelo residual es dado por la función

⁴Nótese que un mayor orden de los polinomios puede proveer una aproximación más precisa de la incerteza aditiva, pero como resultado el orden del controlador aumenta, y para un sistema con n canales de entrada, un incremento de uno en el orden del polinomio significa un incremento de n en el orden del controlador.

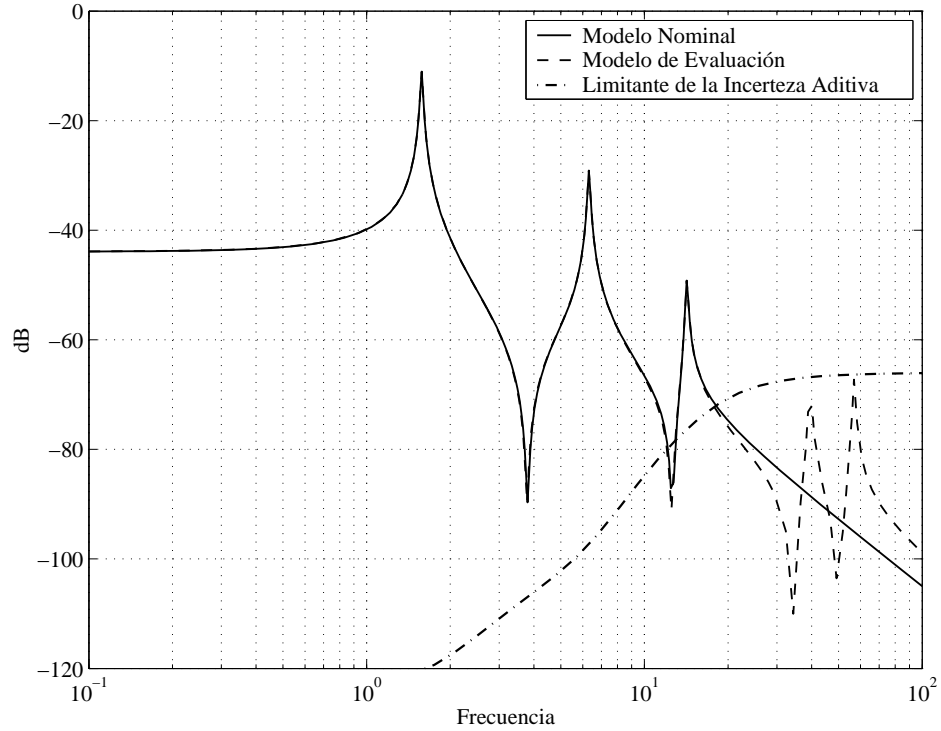


Figura 5.14: Función de ponderación (limitante) de la incerteza aditiva residual

W_U :

$$W_U(s) = \frac{(s^2 + 1,578s + 2,491)(s^2 + 6,313s + 39,85)(s^2 + 14,2s + 201,8)}{(s^2 + 23,53s + 216,2)(s^2 + 20,59s + 216,2)(s^2 + 17,65s + 216,2)}, \quad (5.15)$$

de orden 6.

Los factores que influyen en la selección del limitante del modelo residual son: i) la magnitud del modelo matemático de incerteza, ii) la separación de los modos significantes (densidad modal), y iii) el amortiguamiento inherente de la estructura.

El problema de control estándar \mathcal{H}_∞ fue definido en la Sección 4.2 y es reescrito a continuación:

$$\begin{aligned} & \text{mín}_K \|N_{zw}\|_\infty \\ & \text{tal que } (P, K) \text{ sean internamente estables} \end{aligned} \quad (5.16)$$

El algoritmo de Glover-Doyle [13], es usado para obtener un controlador estabilizante de norma \mathcal{H}_∞ mínima. Resumiendo, el algoritmo provee una familia de controladores estabilizantes que satisfacen, para algún γ elegido:

$$\|N_{zw}(K)\|_\infty < \gamma, \quad (5.17)$$

si tal controlador existe. El cálculo principal de este algoritmo involucra la evaluación de dos ecuaciones algebraicas de Ricatti a cuya existencia de sus soluciones se relaciona la existencia de controladores estabilizantes que satisfacen la condición (5.17). La norma \mathcal{H}_∞ es minimizada mediante un barrido de γ hasta que las soluciones de las ecuaciones de Ricatti no existan.

5.3.3. Control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Finalmente, usando el algoritmo presentado en el Apéndice E serán diseñados un conjunto de controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de orden fija. Para balancear entre el desempeño nominal y la estabilidad robusta, el subproblema \mathcal{H}_2 es definido sólo para considerar desempeño nominal y el subproblema \mathcal{H}_∞ toma en cuenta los modelos de incerteza aditiva. Esta separación constituye una forma efectiva de explotar la relación inherente que existe entre robustez y desempeño en el diseño mixto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ y a su vez permite obtener los dos objetivos de diseño competidores. El subproblema \mathcal{H}_2 es definido por las variables de desempeño y el subproblema \mathcal{H}_∞ es definido por las variables asociadas con la estructura de incerteza. Los subproblemas son definidos por las entradas y salidas siguientes:

$$w_1 = \begin{bmatrix} w_{ad} \end{bmatrix}, \quad z_1 = \begin{bmatrix} z_{ad} \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} w_d \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{bmatrix} z_u \\ z_y \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

La configuración del problema de Servomecanismo presentado en la Fig. 4.6 es rediseñada para que muestre explícitamente el disturbio w_d , la señal controlada z y la señal medida y , así se tiene la Fig. 5.15. Para efectos de simplificación no se

consideran el ruido v y el disturbio d . Además, se considera que la señal controlada es la señal medida. La configuración rediseñada no presenta más un problema de Servomecanismo, sino un problema de regulador, ya que la señal de referencia r es igual a cero y como consecuencia $C_1(s) = 0$.

De la Fig. 5.15, la matriz de funciones de transferencia a partir de la entrada, w_d , para las salidas controladas y y u , puede ser expresada como:

$$\begin{bmatrix} u(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U(s)P_{yw_d}(s) \\ S(s)P_{yw_d}(s) \end{bmatrix} w_d(s), \quad (5.19)$$

donde $S(s)$ es la función sensibilidad, $S(s) = (1 + C_2(s)P_{yu}(s))^{-1}$, y $U(s)$ es la función restricción de energía, $U(s) = C_2(s)(1 + C_2(s)P_{yu}(s))^{-1}$. En particular, se puede notar que la función sensibilidad relaciona la señal de disturbio y la señal medida, en tanto la función restricción de energía relaciona la señal de disturbio y la señal de control.

Considerando el problema de control en que se quiere limitar la función de sensibilidad (para desempeño) y la función restricción de energía (para penalizar grandes entradas), se calcularán funciones de ponderación de las respectivas funciones $S(s)$ y $U(s)$. Luego, la configuración del problema de control aumentado es presentada en la Fig. 5.16.

Las funciones $W_S(s)$ y $W_U(s)$ ($\sqrt{\rho_u}$) representan funciones de ponderación de las funciones sensibilidad y restricción de energía, respectivamente. Las funciones de ponderación son funciones en la frecuencia (funciones de transferencia) calculadas de acuerdo con las especificaciones de desempeño.

De la Fig. 5.16, calculándose la matriz de funciones de transferencia a partir de la entrada, w_d , a las salidas controladas ponderadas z_y y z_u , se llega a:

$$\begin{bmatrix} z_u \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_U(s)U(s)P_{yw_d}(s) \\ W_S(s)S(s)P_{yw_d}(s) \end{bmatrix} w_d. \quad (5.20)$$

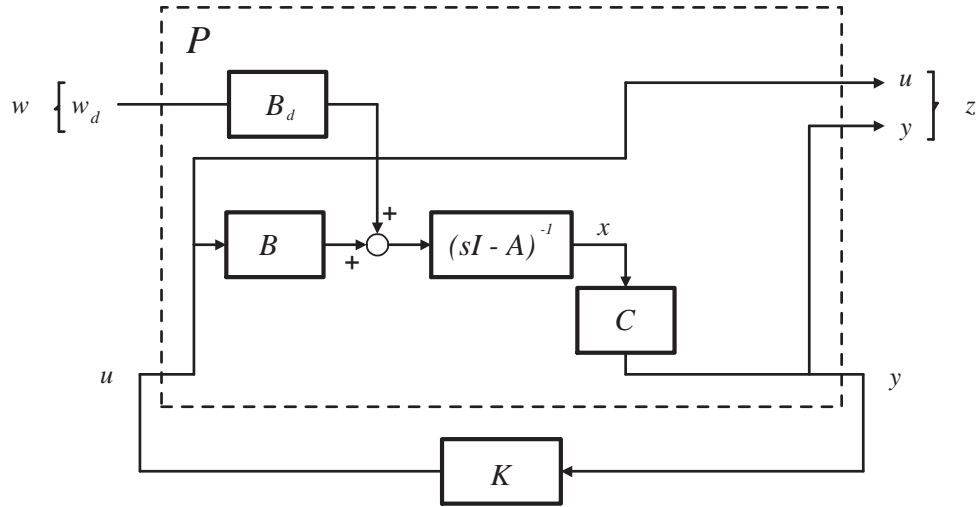


Figura 5.15: Configuración del sistema controlado para desempeño, sin ponderación, usando control \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia (subproblema del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$)

Comparando la relación entrada salida del sistema controlado presentado en la Fig. 5.16 con la del problema de control \mathcal{H}_∞ de la Sección 5.3.2 (omitiendo el modelo de incerteza), se puede observar que en el problema aquí estudiado no aparece la función sensibilidad complementaria $T(s)$, función directamente relacionada a la robustez y a la sensibilidad al ruido. Luego, se puede concluir que los cálculos realizados hasta este punto influyen directamente el desempeño que se desea tener del sistema controlado. Como ya se dijo en la Sección 4.3.2 la robustez del sistema controlado está dada por la función $\tilde{W}S(s)C_2(s)$, función que relaciona la entrada v (ruido) y la salida u (señal de control), siendo que el ruido se toma en cuenta sólo para el cálculo del margen de estabilidad.

El paso a seguir en la metodologí $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ aquí considerada es la parametrización del controlador $C_2(s)$ en función del parámetro libre $K(s)$. Para esto, se realizan factorizaciones a la izquierda de $P_{yu}(s)$ y $P_{yw_d}(s)$ ($P_{yu} = \tilde{D}_{yu}^{-1}\tilde{N}_{yu}$, $P_{yw_d} = \tilde{D}_{yw_d}^{-1}\tilde{N}_{yw_d}$), y a la derecha de $C_2(s)$ ($C_2 = N_{C_2}D_{C_2}^{-1}$). Sustituyendose las factorizaciones en la matriz de funciones de transferencia previamente calculada, haciéndose operaciones algebraicas y considerando $\tilde{D}_{yu}D_{C_2} + \tilde{N}_{yu}N_{C_2} = 1$, se llega

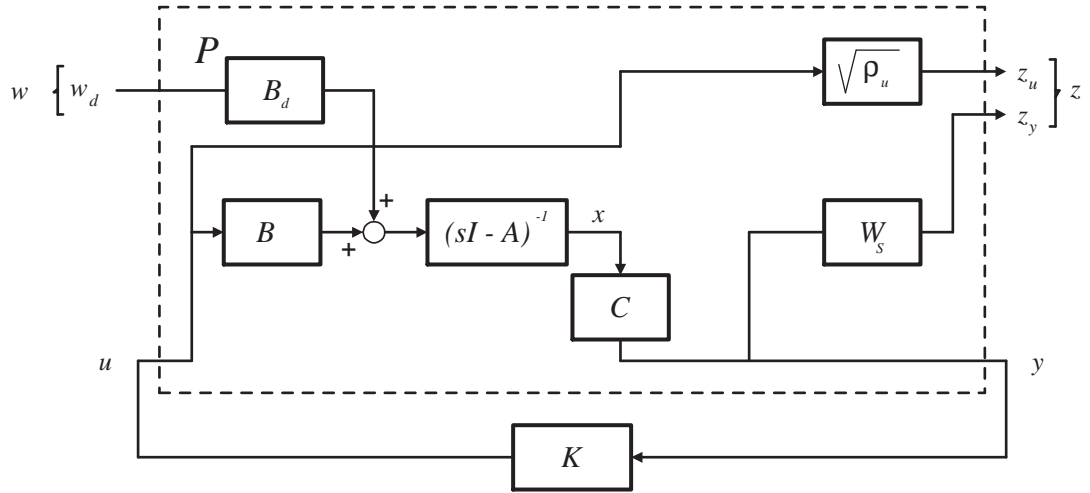


Figura 5.16: Configuración del sistema controlado para desempeño, con ponderación, usando control \mathcal{H}_2 en el dominio de la frecuencia (subproblema del control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$)

a:

$$\begin{bmatrix} z_u \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_U N_{C_2} \tilde{N}_{y w_d} \\ W_S D_{C_2} \tilde{N}_{y w_d} \end{bmatrix} w_d. \quad (5.21)$$

Parametrizándose todos los controladores estabilizantes como definido en la Sección 4.3.1 se obtiene:

$$C_2(s) = -(\tilde{X} + D_{yu}K)(\tilde{Y} - N_{yu}K)^{-1},$$

siendo que N_{yu} y D_{yu} son factorizaciones a la derecha de P_{yu} .

Finalmente, la matriz de funciones de transferencia que representa el desempeño resulta:

$$\begin{bmatrix} z_u \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_U(\tilde{X} + D_{yu}K)\tilde{N}_{y w_d} \\ W_S(\tilde{Y} - N_{yu}K)\tilde{N}_{y w_d} \end{bmatrix} w_d, \quad (5.22)$$

siendo que z_u y z_y serán usadas en el cálculo de la función de costo J_2 , definida en (4.50). Para obtener el funcional J_2 se han de calcular las funciones de ponderación W_U y W_S , como definido en la Sección 5.2.1. Para el cálculo de estas funciones se hace uso de la propia dinámica del sistema, no importando el orden de las

funciones, ya que según la metodología $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ presentada en este trabajo el orden del controlador es definido por el diseñador. Considerando $W_S = 1$ y con $W_U = \sqrt{\rho_u}$, J_2 queda como mostrado a continuación :

$$J_2 = \|y\|_2^2 + \rho_u \|u\|_2^2 = \|(\tilde{Y} - N_{yu}K)\tilde{N}_{yw_d}\|_2^2 + \rho_u \|(\tilde{X} + D_{yu}K)\tilde{N}_{yw_d}\|_2^2.$$

El funcional J_∞ es dado por la función de transferencia τ_{uv} , el filtro \tilde{W} y la inversa del margen de estabilidad γ , siendo que $\tau_{uv} = S(s)C_2(s)$. Sustituyendose las factorizaciones hechas en los elementos de la matriz de funciones de transferencia y considerando $\tilde{D}_{yu}D_{C_2} + \tilde{N}_{yu}N_{C_2} = 1$, se obtiene que $\tau_{uv} = N_{C_2}\tilde{D}_{yu}$, o también, $\tau_{uv} = -(\tilde{X} + D_{yu}K)\tilde{D}_{yu}$. Luego el funcional J_∞ presenta la siguiente forma:

$$J_\infty = \|\tau_{uv}\|_\infty = \|-\tilde{W}(\tilde{X} + D_{yu}K)\tilde{D}_{yu}\|_\infty < \gamma,$$

con \tilde{W} como definido en (5.15).

Los funcionales J_2 y J_∞ , calculados en función del parámetro libre $K(s)$, serán usados en los algoritmos de cálculo de los controladores presentados en el Apéndice E.

A. Parámetros ρ

Del funcional de costo definido en (4.50) se puede ver que es necesario calcular los parámetros $\rho_u, \rho_y, \rho_r, \rho_w, \rho_v$ y ρ_s , pero, dado que la señal controlada es la señal medida, la señal de referencia es cero, no se tienen polos en $j\omega$ en la función de transferencia P_{yu} , el ruido v no es considerado y el funcional de costo sólo representa desempeño (el margen de estabilidad está dado por otro funcional), estos parámetros pueden ser considerados nulos con excepción de ρ_u .

En este punto es necesario destacar que la utilización del parámetro ρ_u es fundamental en el diseño del control ya que en el intento de disminuir el

error (salida controlada), con el menor tiempo de asentamiento posible y con una amplitud máxima pequeña, el esfuerzo de control puede crecer mucho y la demanda puede no ser cubierta en una aplicación práctica, se recuerda que este esfuerzo está limitado por la saturación de los actuadores, entre otros. En consecuencia, ρ_u viene a definir el compromiso entre una buena atenuación de disturbios en la salida y el esfuerzo de control.

5.3.4. Simulaciones

Los controladores, previa redimensionalización en base al Apéndice D, serán aplicados tanto a la planta nominal como a la planta completa, ambas sujetas a la acción de un disturbio. Esta aplicación da una indicación del mérito que cada controlador tiene en relación al desempeño en lazo cerrado. La simulación consiste en: 1) aplicación de una excitación en el instante $t = 0$, y 2) aplicación del controlador al tiempo que el sensor percibe la diferencia con respecto a la señal de referencia ($r = 0$). La entrada consiste en una fuerza impulsiva de tal forma todos los modos sean excitados. La dinámica del actuador, y la del sensor, no será considerada.

Capítulo 6

RESULTADOS

Este capítulo presenta los resultados de los abordajes de diseño para desempeño nominal (\mathcal{H}_2), desempeño robusto/estabilidad robusta (\mathcal{H}_∞) y desempeño nominal/estabilidad robusta ($\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) considerando el problema de atenuación de vibraciones en una viga flexible simplemente apoyada.

6.1. Evaluación de los métodos de control

Para evaluar el desempeño nominal de los métodos de diseño de controladores, el desempeño es definido como J_z , norma \mathcal{H}_2 de la salida y, J_u , norma \mathcal{H}_2 de la entrada de control. La estabilidad robusta se evalúa considerando J_∞ , norma \mathcal{H}_∞ de la función restricción de energía $U = K(I + P_{yu}K)^{-1}$.

Para el desempeño nominal \mathcal{H}_2 , los vectores de entradas exógenas y salidas controladas son como mostrado en (5.6). La ponderación del control $W_U = \sqrt{\rho}$ es usada para variar la autoridad de los controladores¹ \mathcal{H}_2 al ir variando ρ . El orden de los controladores \mathcal{H}_2 calculados fue igual a 6, que coincide con el orden del modelo de diseño. Los controladores \mathcal{H}_2 se calcularon usando el MATLAB *Robust Control Toolbox*. Para el diseño del control \mathcal{H}_∞ , los vectores correspondientes a

¹La autoridad del controlador está relacionada con el nivel de energía de control necesario para alcanzar el desempeño deseado.

las entradas exógenas y salidas controladas son como mostrados en (5.7). Un conjunto de controladores \mathcal{H}_∞ de autoridad variable fue diseñado fijando $W_S = 1$ y variando ρ . Con ρ y el nivel de incerteza aditiva fijo, $z = \begin{bmatrix} z_{ad} & z_u & z_y \end{bmatrix}^T$ fue escalonada para alcanzar una norma \mathcal{H}_∞ menor que 1. Escalonando las variables de desempeño de esta manera, el controlador fue diseñado para maximizar el desempeño mientras mantiene un nivel fijo de robustez a cada nivel de autoridad de control. Los controladores \mathcal{H}_∞ resultantes fueron de orden igual a 12 (orden del modelo de diseño + orden de la función de ponderación W_U), estos controladores se calcularon usando el MATLAB *Robust Control Toolbox*. Finalmente, usando el algoritmo mostrado en el Apéndice E, un conjunto de controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de orden 10 fue calculado. Los subproblemas \mathcal{H}_2 , definido para desempeño nominal, y \mathcal{H}_∞ , que considera el modelo de incerteza, están definidos por los vectores presentados en (5.18). Considerando un nivel fijo de incerteza para el subproblema \mathcal{H}_∞ , los controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de autoridad variable fueron calculados variando ρ_u .

La Fig. 6.1 presenta las curvas de desempeño para cada método de diseño del control. El diseño del control robusto está basado en el modelo de incerteza aditiva debido a la dinámica no-modelada. Los costos de desempeño son calculados para el sistema en lazo cerrado. Los costos del diseño \mathcal{H}_2 son calculados para el modelo de evaluación (modelo completo) y el modelo nominal, esto para ilustrar la limitación en el desempeño alcanzado debido al modelo del error. El costo indica que, para controladores con diferentes niveles de autoridad, el desempeño real prácticamente coincide con el desempeño del modelo nominal, siendo que la curva obtenida con el modelo completo está ligeramente desplazada hacia arriba en comparación a la curva obtenida con el modelo nominal. Para propósitos de comparación también se realiza una evaluación del desempeño de los controladores \mathcal{H}_∞ . La Fig. 6.1 indica la pérdida de desempeño en que incurre el diseño \mathcal{H}_∞ a cambio de contar con un desempeño robusto. Existe una diferencia sustancial en desempeño entre los controladores \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , los controladores \mathcal{H}_∞ alcanzan

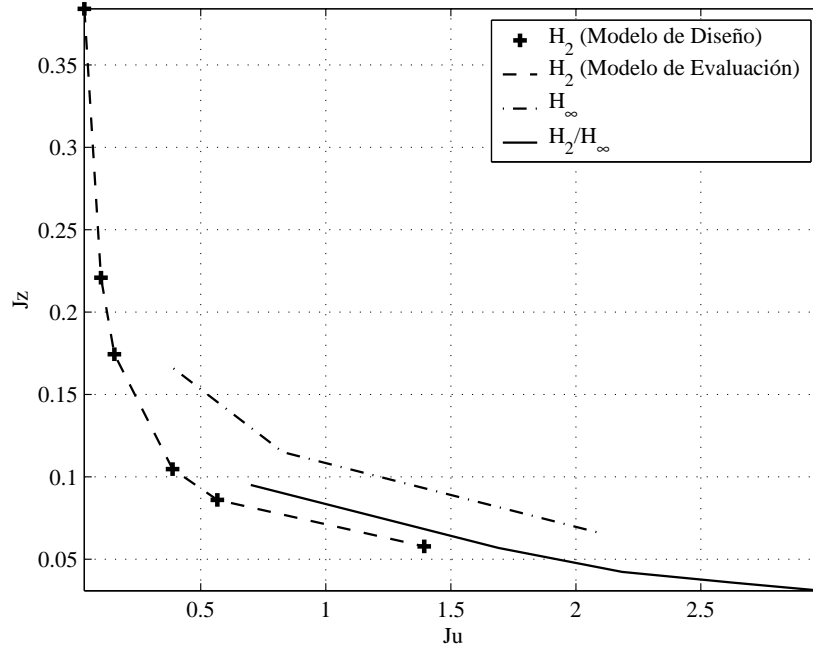


Figura 6.1: Comparación de la norma \mathcal{H}_2 del desempeño

cierto nivel de desempeño a un mayor costo de control que el controlador \mathcal{H}_2 . Sin embargo, los controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ recuperan parcialmente el desempeño del diseño \mathcal{H}_2 dado un mismo nivel de control. El diseño $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ provee desempeño comparable al diseño \mathcal{H}_2 mientras que supera la desventaja del diseño \mathcal{H}_∞ , costo de control alto.

La Fig. 6.2 muestra el desempeño nominal J_z de un conjunto de controladores obtenidos variando el nivel de incerteza (margen de estabilidad) en el proceso de diseño; así mismo, controladores que fueron obtenidos en base a la variación de la función de ponderación $\sqrt{\rho}$ y que resultan con cierto margen de estabilidad (control \mathcal{H}_2). Definiendo el margen de estabilidad como la inversa de J_∞ , se puede realizar el análisis a continuación. En general, se puede decir que a medida que el nivel de robustez se incrementa, el desempeño se va sacrificando, como indicado por el crecimiento en la curva de desempeño. El impacto del uso de la medida \mathcal{H}_2 para cuantificar desempeño en el diseño mixto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es evidente, ya que, para un mismo margen de estabilidad (considerado en el proceso de diseño), el controlador \mathcal{H}_∞ presenta el desempeño deteriorado. Otra observación importante

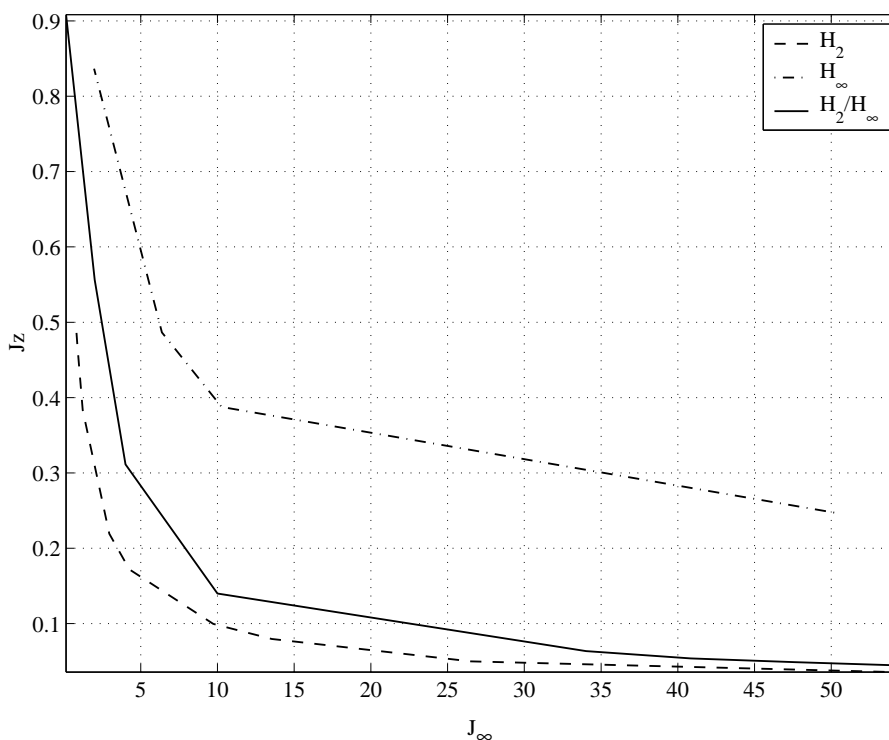


Figura 6.2: Compromiso desempeño-estabilidad usando control \mathcal{H}_2 , control \mathcal{H}_∞ y control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

viene a ser que los diseños de norma mixta, para un nivel dado de desempeño, proveen estabilidad robusta para un conjunto más grande de plantas que el de los controladores \mathcal{H}_∞ . La Fig. 6.2 también indica que los controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, diseñados para copar mayores niveles de incerteza, alcanzan un desempeño comparable al de los controladores \mathcal{H}_2 . Cabe resaltar que el margen de estabilidad obtenido para los controladores \mathcal{H}_2 es el resultado del proceso de diseño, más no un parámetro de diseño.

Usándose los métodos de diseño de control presentados en el Capítulo 4, se calcularon tres controladores de realimentación. Estos controladores serán evaluados en la siguiente sección según el desempeño y la estabilidad que presenten los sistemas controlados.

6.2. Evaluación del desempeño

Para propósitos de comparación, se considera la misma ponderación de la señal de control en los diseños \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ . Esta ponderación, dada en función de la magnitud de las incertezas residuales, -64.194 dB, fue definida en (5.15). El controlador \mathcal{H}_∞ fue calculado luego de varias iteraciones para un factor de atenuación $c = 0,08$. Finalmente, el controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ se calculó considerando un margen de estabilidad igual a $1.1(-64.194 \text{ dB})$, esto para asegurar que $\|W_U K(I - P_{yu}K)^{-1}\|_\infty$ sea menor que 1 (Condición de Estabilidad Robusta) aún después de que el controlador sea implementado en el modelo de evaluación, W_U como definido en (5.15). Se recuerda que los controladores se calculan para el modelo de diseño.

6.2.1. Evaluación de la salida controlada en el dominio de la frecuencia

En el Cuadro 6.1 se muestran los valores de las frecuencias naturales de los 6 primeros modos de vibración de la viga flexible y los correspondientes factores de amortiguamiento en lazo abierto y lazo cerrado. Una comparación analítica de las respuestas obtenidas en lazo cerrado y lazo abierto revela que los sistemas de control \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ reducen satisfactoriamente la respuesta de la planta. Del Cuadro 6.1, para los tres controladores, se nota una atenuación significativa de los tres primeros modos de la estructura. Para la región de modos de alta frecuencia (modos residuales) se podría predecir que los controladores \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ atenuarán disturbios mejor que el diseño \mathcal{H}_2 , esto debido a que los primeros controladores incorporan un modelo de incerteza en el diseño del sistema de control. Sin embargo, observando los valores del Cuadro 6.1, lo único que se puede afirmar es que los controladores \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ proveen amortiguamiento al sexto modo. El controlador \mathcal{H}_∞ excita el quinto modo mientras mantiene el amortiguamiento

Cuadro 6.1: Factores de amortiguamiento de los modos estructurales

Modo	ω rad/s	ξ Lazo Abierto	ξ control \mathcal{H}_2	ξ control \mathcal{H}_∞	ξ control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
1	15.783	0.01	0.197	0.385	0.788
2	63.131	0.01	0.613	0.420	0.339
3	142.044	0.01	0.070	0.032	0.242
4	252.522	0.01	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
5	394.566	0.01	0.008	0.009	0.006
6	568.175	0.01	0.008	0.01	0.024

^a No discernible de los datos.

del modo 6. Por otro lado, el controlador \mathcal{H}_2 excita todos los modos residuales. En el caso de controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ se puede decir que, aparte de haber relajado el margen de estabilidad para cumplir con las restricciones de estabilidad robusta, este controlador resulta excitando el quinto modo. En el caso del controlador \mathcal{H}_2 era predecible obtener excitación de los modos de alta frecuencia si se toma en cuenta que en el diseño \mathcal{H}_2 únicamente el desempeño nominal es el objetivo fundamental. La excitación del quinto modo por parte del controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ puede ser aliviada calculando nuevos controladores variando el margen de estabilidad. La variación de los factores de amortiguamiento del sistema controlado, expresados en el Cuadro 6.1, se puede visualizar mejor presentando los resultados de las simulaciones en el dominio de la frecuencia y del tiempo.

La Fig. 6.3 muestra la respuesta en la frecuencia de la salida controlada. Es importante recordar que los factores de amortiguamiento están relacionados con la amplitud de los picos, así, para mayores factores de amortiguamiento, menores picos. Aparentemente el controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ cumple mejor el objetivo de desempeño de atenuación de vibraciones pues el presenta el mayor amortiguamiento en el primer y tercer modo. No hay que olvidar que la salida es una suma ponderada de los modos (las coordenadas modales vienen a ser las ponderaciones), donde los primeros modos, por su magnitud, son lo que más influyen en la respuesta final. Los modos residuales también influyen en la respuesta final y el controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ excita el quinto modo. Por su parte, el diseño \mathcal{H}_2 atenúa bastante bien el segundo modo y, sumado a la atenuación que brinda a los otros dos modos del

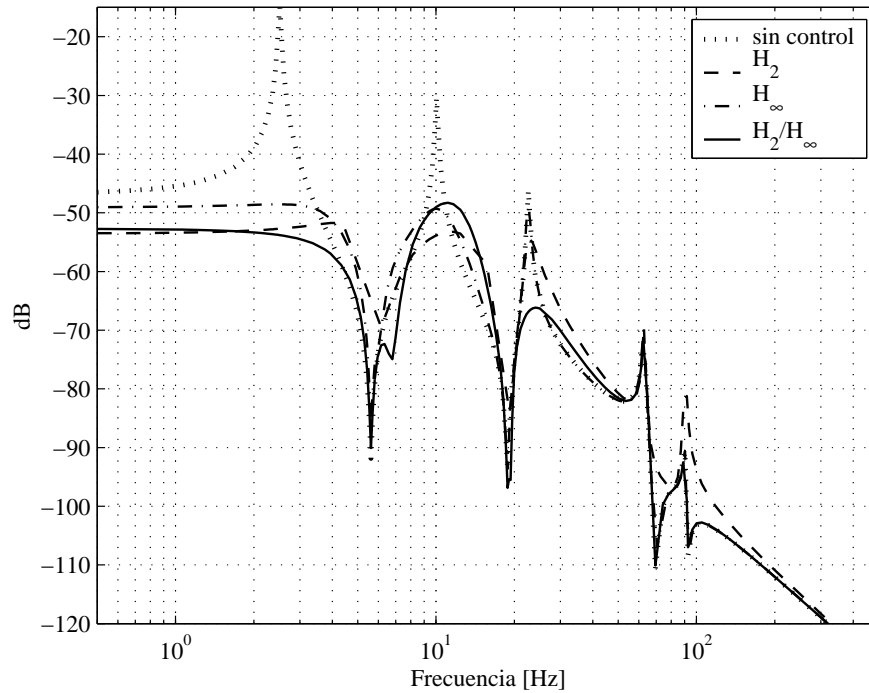


Figura 6.3: Salida controlada en el dominio de la frecuencia usando control \mathcal{H}_2 , control \mathcal{H}_∞ y control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

modelo de evaluación, la respuesta final podría ser la que mejor desempeño presente, menor amplitud de oscilación. El control \mathcal{H}_∞ también amortigua muy bien los primeros modos, eso sin considerar que casi no excita los modos residuales. Las Figs. 6.4, 6.5 y 6.6 presentan en mayor detalle la atenuación de los modos 3, 5 y 6, respectivamente. Con los gráficos de la respuesta en el tiempo se espera apreciar mejor el desempeño de los sistemas controlados.

Para efectos prácticos, un hecho importante que resulta de que los tres tipos de controladores hayan atenuado las vibraciones viene a ser que el usar supresión activa reduce la magnitud de vibración en condiciones normales de operación, reduciendo así la cantidad de esfuerzos en la estructura. Esto indica que se necesitará menos material estructural cuando un control activo sea usado y como resultado se puede disminuir el peso de la estructura. En el caso de la industria aeroespacial una disminución en el peso de la estructura implica en una menor cantidad de combustible necesaria para transportar la estructura al espacio y por consiguiente un vuelo menos costoso.

Figura 6.4: Salida controlada en el dominio de la frecuencia, modo 3

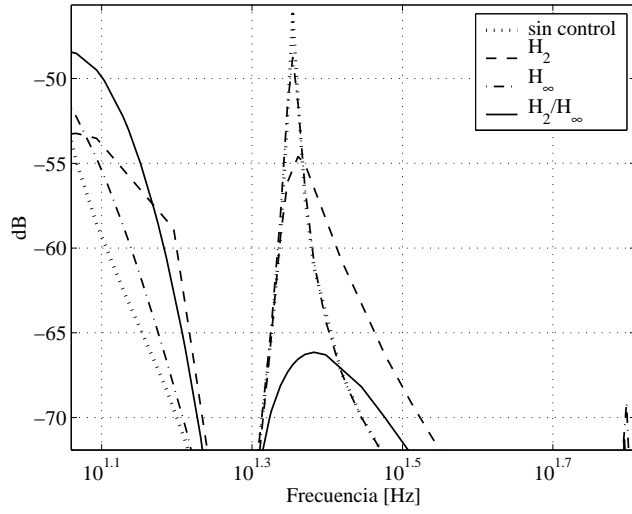


Figura 6.5: Salida controlada en el dominio de la frecuencia, modo 5

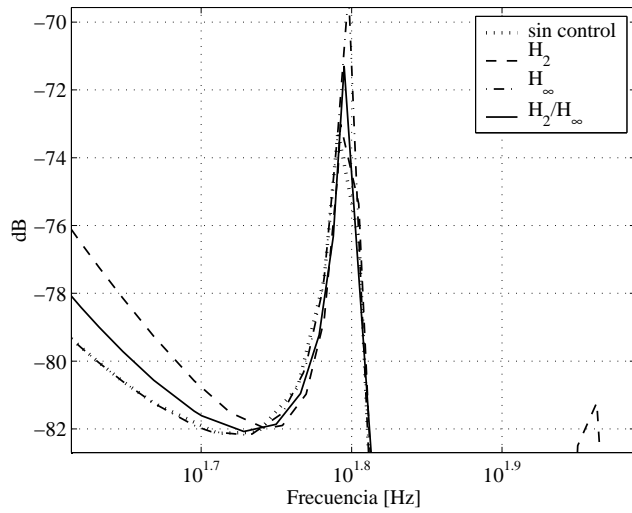
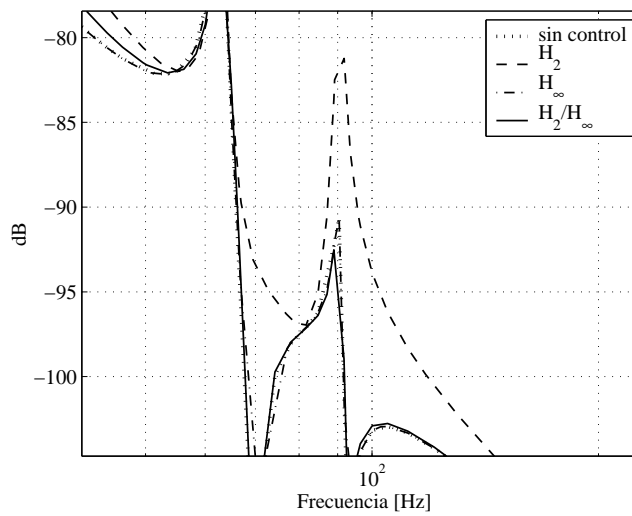


Figura 6.6: Salida controlada en el dominio de la frecuencia, modo 6



6.2.2. Evaluación de la señal de control en el dominio de la frecuencia

La respuesta en frecuencia de la señal de control nos da una idea de la robustez del sistema. Observando los picos presentados en los modos de alta frecuencia de la salida controlada, se puede inferir la influencia de estos modos en la señal de control. La señal de control puede resultar fácilmente excitada por los modos de alta frecuencia generando así una señal ruidosa. Observando la Fig. 6.7 podemos ver que es el diseño de control \mathcal{H}_∞ el que menos excitaría los modos residuales en la señal de control, su contraparte viene a ser el controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

De las magnitudes de las respuestas en frecuencia obtenidas en la Fig. 6.7, se puede ver que el sistema de control \mathcal{H}_∞ es el que requiere menos energía a pesar de presentar un buen desempeño. El mínimo requerimiento de energía del control \mathcal{H}_∞ no resulta inesperado ya que en la matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado se tomaron en cuenta elementos que nada tenían que ver con la estabilidad robusta y el desempeño robusto, como resultado, el sistema controlado con diseño \mathcal{H}_∞ resultó conservativo. Además, no se debe olvidar que este tipo de control incorpora en su formulación un modelo de la incerteza, o sea, este controlador podría controlar no sólo una viga sino una familia de vigas definidas por la medida del modelo de incerteza. El sistema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ presenta mayores requerimientos de energía. En su búsqueda por presentar el mejor desempeño posible, el diseño $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ calcula controladores con margen de estabilidad cercano a 1, esto significa que definido un margen de estabilidad, el diseño $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ busca el mejor desempeño para ese margen. Ya en el caso del control \mathcal{H}_∞ no ocurre así, pues esta técnica de diseño de controladores intenta calcular controladores con margen de estabilidad mayor que 1, en ese sentido, comienza barriendo todos los valores de la inversa del margen de estabilidad hasta encontrar el menor valor posible (menor que 1).

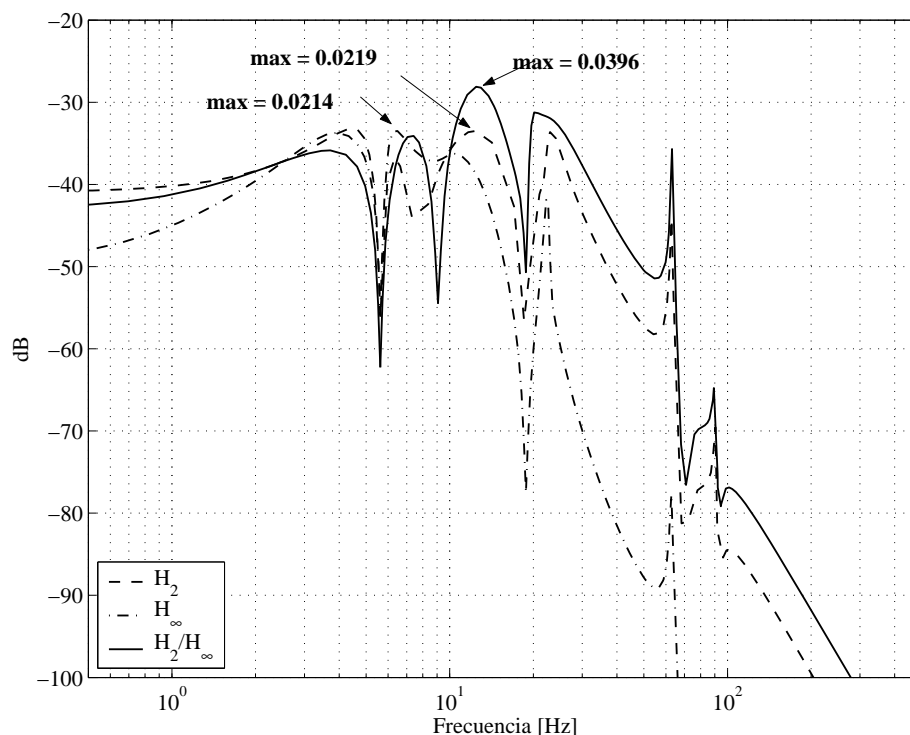


Figura 6.7: Señal de control en el dominio de la frecuencia usando control \mathcal{H}_2 , control \mathcal{H}_∞ y control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

6.2.3. Evaluación de la salida controlada y la señal de control en el dominio del tiempo

Las Figs. 6.8, 6.9 y 6.10 muestran la respuesta en el tiempo de la salida controlada y de la señal de control en lazo abierto, así como también con los controladores implementados. Los tres tipos de controladores muestran una mejora dramática con respecto al sistema sin control. El sistema controlado $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ presenta una respuesta más rápida (de la Fig. 6.3, es este control el que atenúa más el primer y tercer modo), mientras que el controlador \mathcal{H}_∞ parece requerir menos energía. La rapidez de la respuesta con el controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ se da a cambio de una mayor señal de control. Para el sistema controlado \mathcal{H}_∞ el menor requerimiento de energía está relacionado con el bajo desempeño presentado por el sistema controlado \mathcal{H}_∞ , sistema controlado lento, esto cuando comparado con los otros dos sistemas controlados. Los tres sistemas controlados presentan picos

de la respuesta controlada similares. Es importante recordar que el diseño \mathcal{H}_2 , obtenido para realizar el análisis en esta y la próxima sección, consideró la misma ponderación de la señal de control que la del control \mathcal{H}_∞ . Al fijar este parámetro de cierta forma se limitó el desempeño del control \mathcal{H}_2 , otros resultados en la respuesta controlada y señal de control hubiesen podido resultar si se hubiese dejado que la ponderación del control variase libremente.

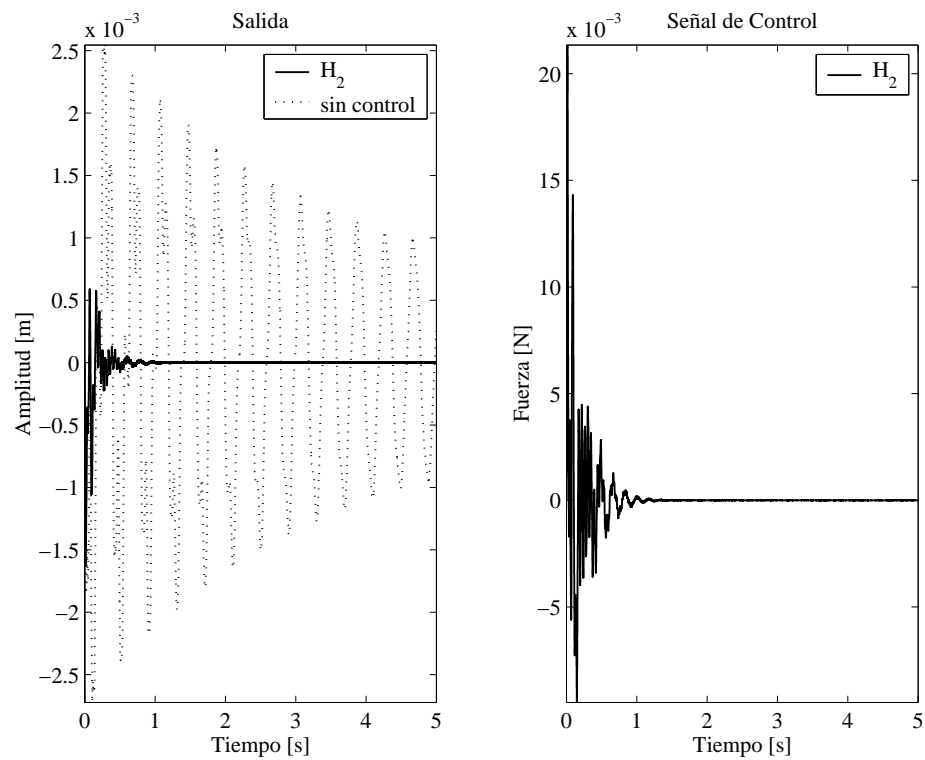


Figura 6.8: Salida controlada y señal de control en el dominio del tiempo usando control \mathcal{H}_2

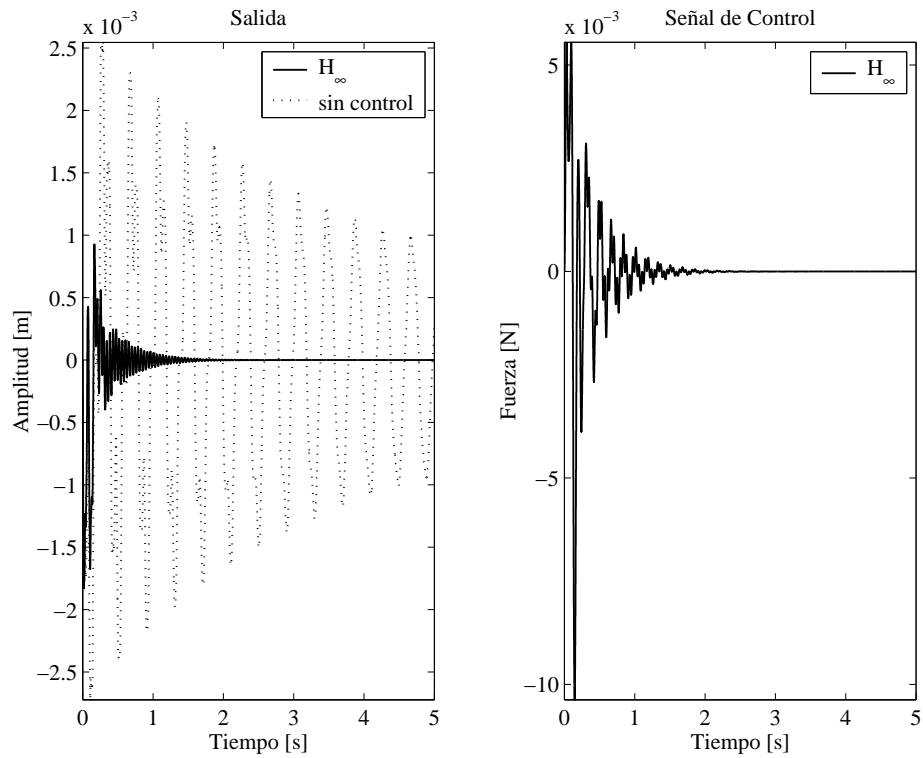


Figura 6.9: Salida controlada y señal de control en el dominio del tiempo usando control \mathcal{H}_∞

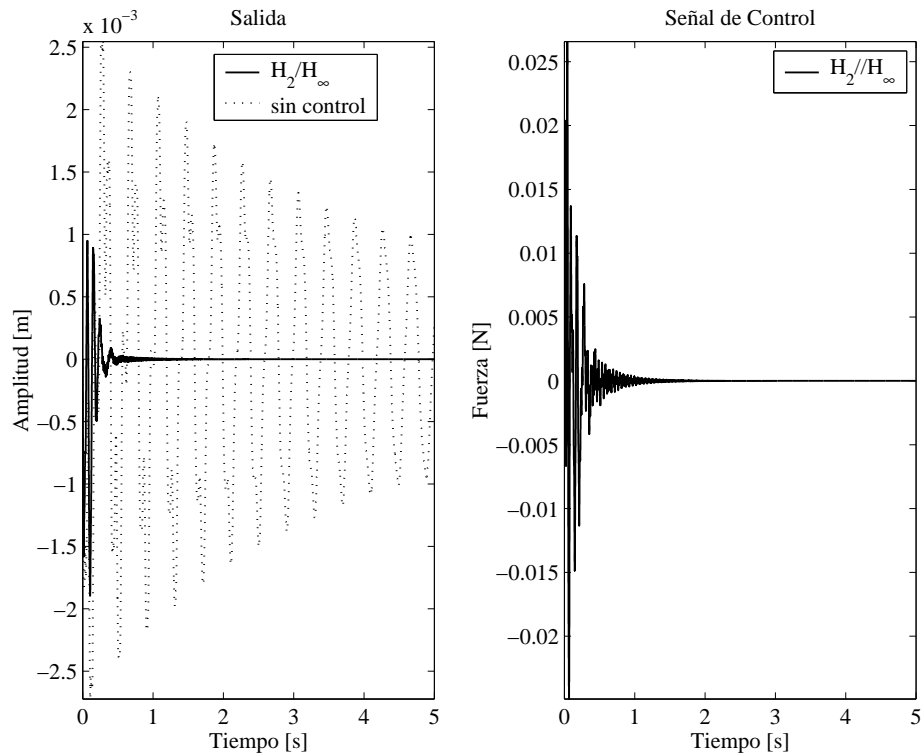


Figura 6.10: Salida controlada y señal de control en el dominio del tiempo usando control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

6.3. Evaluación de la estabilidad

Los márgenes de estabilidad del sistema, que caracterizan la estabilidad robusta en lazo cerrado, son determinados considerando incertezas aditivas. Los márgenes de estabilidad con respecto a la incertezas aditivas pueden ser determinados mediante un ploteo de $\sigma_A = \sigma_{max}\{[K(I + P_{yu}K)^{-1}](\omega)\}^{-1}$.

6.3.1. Evaluación de la estabilidad robusta

La Fig. 6.11 muestra los márgenes de estabilidad para la planta considerando los tres tipos de control. Pequeños valores de σ_A indican pequeños márgenes de estabilidad para incertezas aditivas. El sistema controlado $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ parece ser el más sensitivo a incertezas aditivas en la planta como visto en la línea continua de la Fig. 6.11. El sistema controlado \mathcal{H}_∞ resultó robusto a posibles incertezas aditivas. Los valores mínimos de σ_A para los tres tipos de control son los siguientes: $\min(\sigma_A, \mathcal{H}_\infty) = 0,0131$ en la frecuencia 6.1 Hz, $\min(\sigma_A, \mathcal{H}_2) = 0,0176$ en la frecuencia 5.8 Hz y $\min(\sigma_A, \mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty) = 0,0052$ en la frecuencia 19.3 Hz. Entre todos, se aprecia que el controlador \mathcal{H}_2 presenta mejor robustez en estabilidad; cabe destacar que este resultado es un caso especial puesto que el margen de estabilidad en el diseño \mathcal{H}_2 es un variable de salida y no de entrada como en los otros dos tipos de diseño del control. Una observación importante es que los valores mínimo/máximo del margen de estabilidad fueron encontrados en la zona de baja frecuencias. Para evaluación de estabilidad robusta nos tenemos que fijar en la zona de frecuencias de los modos residuales. Observando la banda de frecuencias de los modos residuales vemos que el controlador más sensitivo es el $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ y el controlador más robusto es el \mathcal{H}_∞ . La obtención de margen de estabilidad mayor, para el control \mathcal{H}_∞ , suena coherente puesto que este controlador fue calculado para un margen de estabilidad de referencia, que no era exigido, y donde no se importaba mucho con el desempeño obtenido. El margen de estabilidad del sistema controlado $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ podría ser mejorado incorporando un filtro

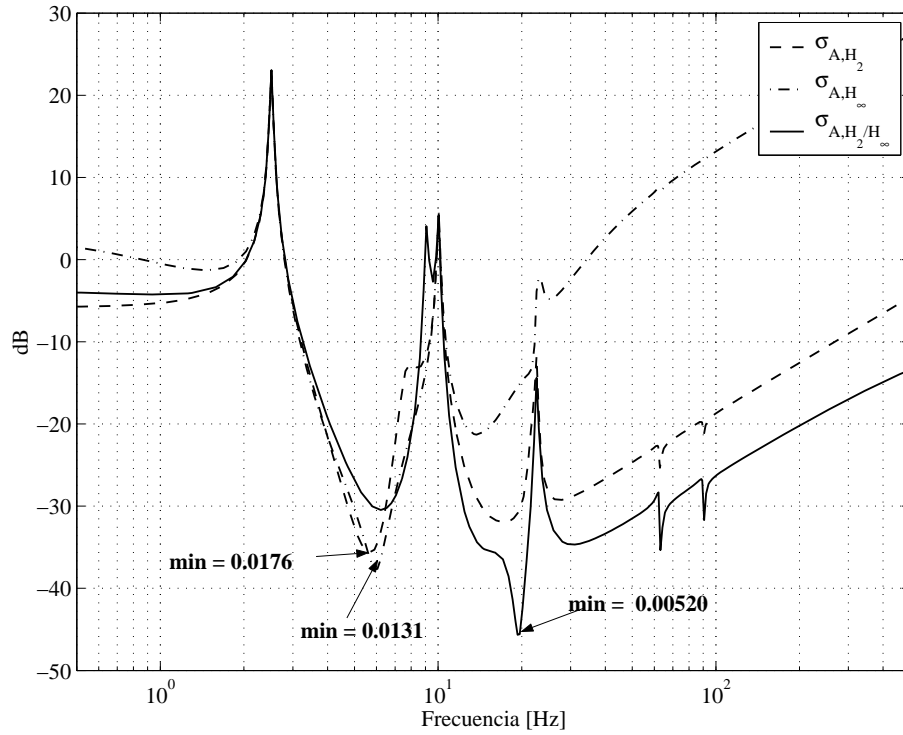


Figura 6.11: Márgenes de estabilidad para sistemas controlados \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ en las frecuencia 19.3 Hz o incrementado directamente el margen de estabilidad en la definición del problema de control mixto.

6.4. Evaluación del desempeño/estabilidad

Las Figs. 6.12, 6.13 y 6.14 presentan la evaluación del desempeño y la estabilidad para cada tipo de controlador, respectivamente. La estabilidad robusta está definida por $W_U K(I - P_{yu}K)^{-1}$ y el desempeño por $(I - P_{yu}K)^{-1}P_{ywd}$.

De la Fig. 6.12 se puede ver que las restricciones de robustez aditiva para el sistema controlado \mathcal{H}_2 son satisfechas aunque se perciben pequeños picos en las frecuencias de los modos residuales. Los valores de estabilidad robusta son los que resultan luego de diseñar el controlador \mathcal{H}_2 . En el caso de la curva de desempeño se puede decir que representa la buena atenuación de disturbios que tendría el controlador \mathcal{H}_2 . Unos pequeños picos en las frecuencias de los modos residuales recuerda que el control \mathcal{H}_2 no amortigua esos modos.

El diseño de control \mathcal{H}_∞ , por definición, realiza un escalamiento de las matrices del sistema en lazo cerrado de forma que la ganancia principal satisfaga la restricción en la frecuencia tanto para estabilidad como para desempeño, $\|N_{zw}\|_\infty < 1$. En la Fig. 6.13 se puede ver que las condiciones de robustez aditiva y de restricción de desempeño son completamente satisfechas. De la curva de desempeño se puede ver el bajo amortiguamiento del tercer y quinto modo (picos de resonancia en las respectivas frecuencias). De la curva de estabilidad se puede ver cuan robusto es el sistema pues el margen de estabilidad está relacionado con la inversa de la función que representa estabilidad.

La Fig. 6.14 muestra que las restricciones de robustez aditiva para el sistema controlado $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ no son satisfechas; en el quinto modo se sobrepasa el límite de estabilidad robusta, luego este modo podría inestabilizar al sistema controlado. Los valores grandes de estabilidad robusta se presentan porque en la búsqueda del mejor desempeño del sistema controlado, el margen de estabilidad se ve forzado al valor especificado, no más que eso, a diferencia del control \mathcal{H}_∞ . En el caso de la curva de desempeño se puede decir que representa la buena atenuación de disturbios que el controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ tendría. El pico grande en el segundo modo nos dice que este modo no fue tan amortiguado como los otros.

6.5. Evaluación del controlador

La Fig. 6.15 muestra la respuesta en frecuencia de los controladores calculados. Principalmente, se puede notar la magnitud de los factores de amplificación/reducción de las señales medidas por efecto del controlador. El controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es que el que más amplifica la señal medida y en consecuencia es el que genera mayores señales de control. Esto puede ser corroborado con los valores de la señal de control de la Fig. 6.10. Es el controlador \mathcal{H}_∞ el que menos amplifica la señal medida, ver Fig. 6.9.

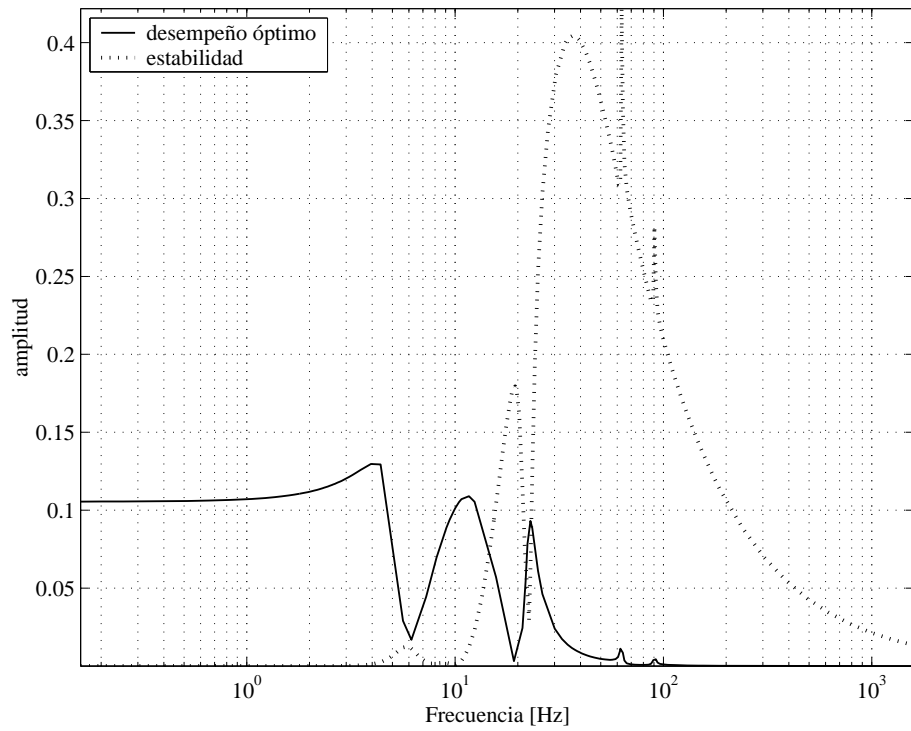


Figura 6.12: Estabilidad y desempeño óptimo usando control \mathcal{H}_2

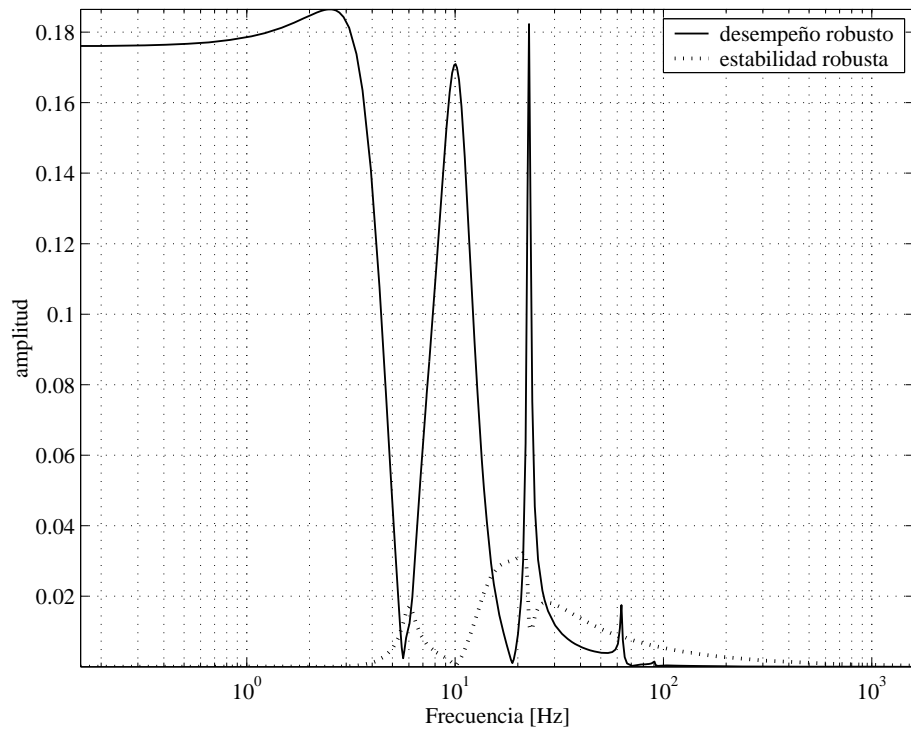


Figura 6.13: Estabilidad robusta y desempeño robusto usando control \mathcal{H}_∞

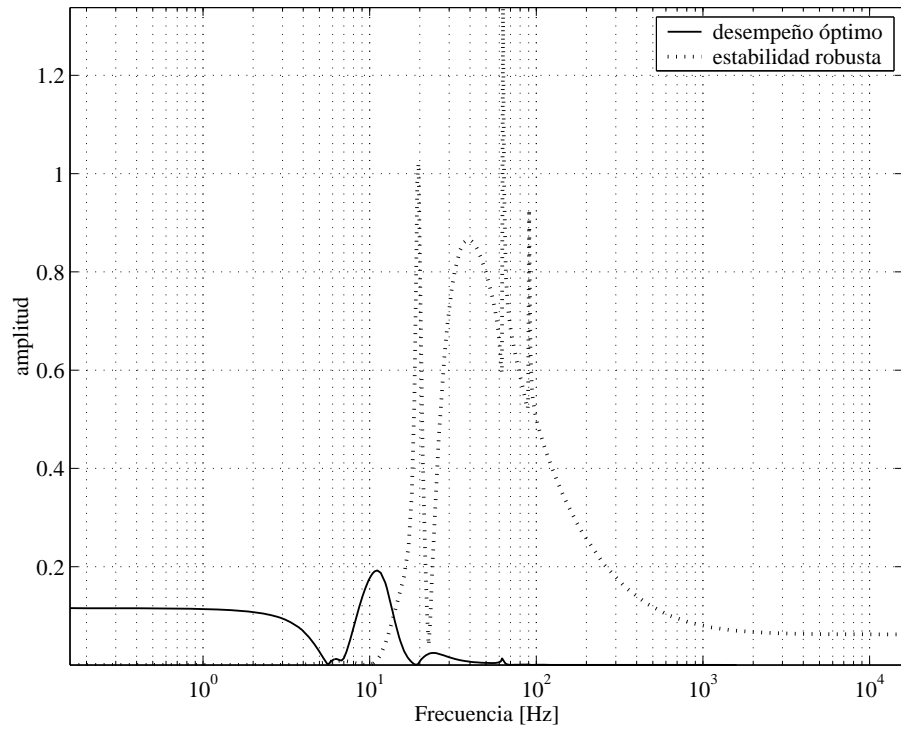


Figura 6.14: Estabilidad robusta y desempeño óptimo usando control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

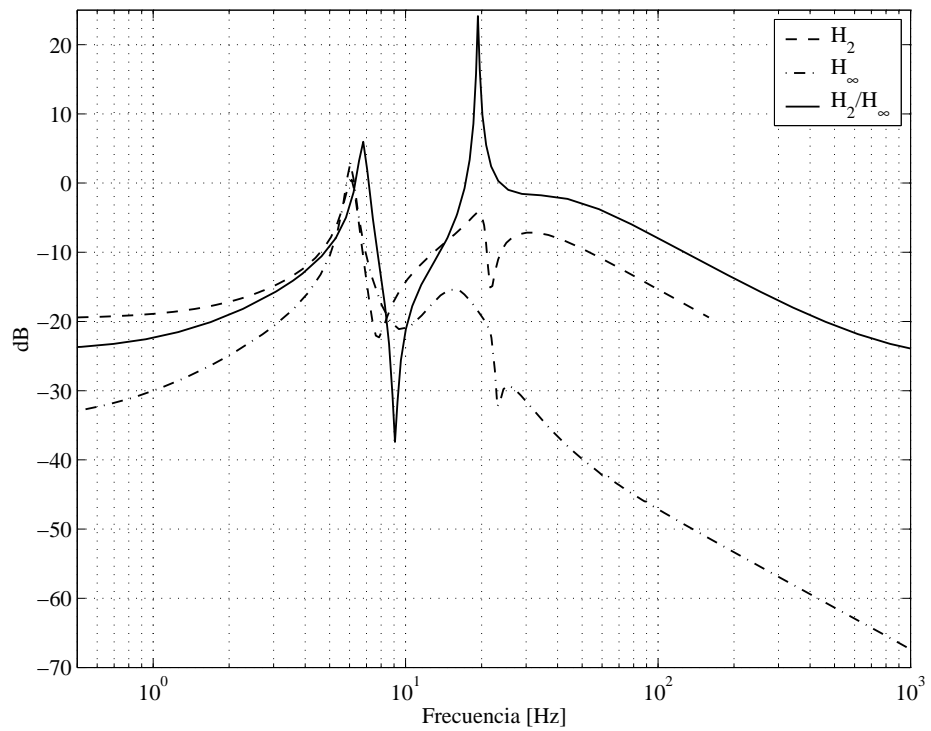


Figura 6.15: Respuesta en el dominio de la frecuencia de los controladores \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

CONCLUSIONES

En el presente trabajo fueron diseñados sistemas de control de vibraciones basados en las teorías de control \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ y $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Los controladores obtenidos fueron implementados en una viga flexible vía simulación computacional y se compararon tanto el desempeño como la estabilidad de los sistemas controlados correspondientes. Las medidas de la deflexión de la viga flexible considerada, que fácilmente podría formar parte de una estructura aeroespacial, alimentaron al controlador que comandaba al actuador; y, como resultado de esta dotación de energía al sistema, la vibración de la viga era atenuada. Los dos objetivos de diseño fueron amortiguar los modos de baja frecuencia considerando límites en la actuación del sistema e incrementar la atenuación de disturbios en la zona de modos residuales. Para propósitos de comparación, un sistema de control \mathcal{H}_2 basado en ponderaciones del LQG fue diseñado e implementado. El controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fue diseñado para mantener un margen de estabilidad establecido sin deteriorar el desempeño alcanzado, el margen de estabilidad fue calculado en base a las incertezas residuales. Otro sistema de control usado en la comparación fue el basado en la norma \mathcal{H}_∞ , donde las especificaciones de diseño están dadas en base a funciones de ponderación.

Como resultado del trabajo realizado se puede llegar a las siguientes conclusiones y propuesta de trabajo futuro.

6.1. Conclusiones

1. De forma general, existe una relación directa entre la salida (señal controlada) y la señal de actuación de un sistema de control. Para los tres controladores analizados se observa que, a mayor energía de actuación inyectada al sistema, menor energía obtenida a la salida del mismo. La misma tendencia se presenta usando normas combinadas, a mayor amplificación máxima de la señal de control, menor energía obtenida para la señal controlada.
2. La mixtura del control \mathcal{H}_2 y el control \mathcal{H}_∞ se hace evidente en el control mixto al relacionarlo con los niveles de incerteza. Así, a medida que los niveles de incerteza se incrementan, el comportamiento del control mixto se acerca por defecto al del control robusto \mathcal{H}_∞ y, para cuando los niveles de incerteza disminuyen, el comportamiento se aproxima por exceso al del control óptimo \mathcal{H}_2 .
3. Aún percibiéndose la tendencia descrita en 1, individualmente los controladores presentan características muy particulares:
 - a) En el control \mathcal{H}_2 , el disminuir el parámetro ρ de la función de costo hace que se pondere menos el esfuerzo de control, en consecuencia se está permitiendo que aumente su valor. Mientras se disminuye la ponderación del control se enfatiza más en la minimización del desempeño, luego los resultados obtenidos en términos de desempeño son mejores.
 - b) El controlador \mathcal{H}_2 presentó el mayor margen de estabilidad en la faja de frecuencias del modelo nominal; sin embargo, es el control \mathcal{H}_∞ el que presenta estabilidad robusta ante la presencia de incertezas residuales.
 - c) El controlador \mathcal{H}_∞ satisface de forma estricta las restricciones de estabilidad robusta y desempeño robusto tal que los modos truncados se ven prácticamente inafectados por el controlador; de ahí que este controlador presente los mayores valores de los factores de amortiguamiento en lazo cerrado.

- d) El controlador \mathcal{H}_∞ presentó el desempeño más pobre de los tres controladores. Esto podría deberse a una combinación de requerimientos exigentes de estabilidad robusta (indirectamente nivel de actuación) y desempeño robusto (funciones de transferencia inesperadas que componen la matriz del sistema en lazo cerrado N_{zw}).
 - e) El controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ viola la condición de robustez aditiva, sin embargo, esto no se traduce en la respuesta controlada. La razón de esta aparente contradicción estaría en la característica de suficiencia del teorema de estabilidad robusta, que podría dar lugar a resultados conservativos.
 - f) El controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es el que ofrece el mejor desempeño del sistema controlado. Este desempeño se obtiene gracias a una mayor inyección de energía de actuación al sistema. Cabe resaltar que el margen de estabilidad requerido para el control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ resultó menor que el obtenido con control \mathcal{H}_2 y control \mathcal{H}_∞ .
4. Alcanzar alto desempeño del sistema controlado aún ante la presencia de incertezas requiere una metodología de diseño de controladores que maximice el desempeño mientras garantice estabilidad robusta para un modelo de error dado.
 5. El mayor inconveniente del procedimiento de diseño de norma mixta es el esfuerzo computacional asociado con el algoritmo de cálculo. Esto en comparación con los algoritmos implementados en el MATLAB *Robust Control Toolbox* para el caso del control \mathcal{H}_2 y el control \mathcal{H}_∞ .

Debe ser enfatizado que este trabajo no pretende decir que los métodos escogidos sean los mejores métodos de diseño de controladores o los más adecuados. Con el propósito de compararlos, se han considerado dos métodos por demás entendidos y adecuados, \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , con un tercero, $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, que está demostrando su potencialidad.

6.2. Trabajo futuro

Con base en la experiencia obtenida en este trabajo, se propone implementar los controladores obtenidos para así verificar que resuelven el problema de vibraciones en una viga flexible simplemente apoyada. La planta, viga flexible simplemente apoyada, no es un sistema difícil de obtener. El equipamiento base con el que se debería contar para realizar la experiencia en laboratorio es detallado a continuación:

1. Actuadores: neumáticos, hidráulicos, piezoeléctricos.
2. Sensores: acelerómetros, galgas extensiométricas.
3. Transductores e acondicionadores de señales (amplificadores, filtros y conversores).
4. Sistema dinámico de adquisición de datos: osciloscopios.
5. Analizadores: analizador de espectro para vibraciones y analizadores de espectro en la frecuencia (Fourier).
6. Fuentes de excitación: generadores de señales (sinusoidales, randómicas, entre otras), martillos de impacto, sacudidores dinámicos.
7. Una computadora² que cuente con tarjetas de interface para adquisición de datos y control.

²La lista del equipamiento base asume que la computadora usa una interface MATLAB/Simulink/*Real-Time Workshop* y, de ser el caso, es ayudada por herramientas de software adicionales que permiten la interface con la planta. Cabe destacar que al usar la interface Simulink/*Real-Time Workshop* se prescinde de la tarjeta de procesamiento de señales digitales. Una justificación de esta exclusión está fundamentada en la búsqueda de soluciones baratas, que sean de fácil interface con la planta y no requieran de cambios del tipo hardware [36]. Adicionalmente, el uso de la interface Simulink/*Real-Time Workshop* es sustentada en artículos de investigación que manifiestan que en el futuro los laboratorios de control de pregrado estarán basados en MATLAB/Simulink [36].

Bibliografía

- [1] ANDERSON, B.D.O., MOORE, J.B. *Optimal Filtering*
Prentice Hall, 1979.
- [2] ADES, ROBERTO *Problema H_2/H_∞ - Soluções Aproximadas por Meio de Expansão em Bases*
Tesis de Doctorado, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, Rio de Janeiro, Brasil, 1999.
- [3] ATHANS, M. *A Tutorial on the LQG/LTR Method*
Laboratory for Information and Decision Systems, M.I.T., Cambridge MA, 1986.
- [4] BALAKRISHNAN, A.V. *Applied Functional Analysis*
Springer-Verlag, 1976.
- [5] BALAS, G.J., DOYLE J.C. *Control of Lightly Damped, Flexible Modes in the Controller Crossover Region*
Journal of Guidance, Control and Dynamics (1994) 17(2), 370-377.
- [6] BALAS, M.J. *Feedback Control of Flexible Systems*
IEEE Transactions on Automatic Control (1978) AC-23(4), 673-679.
- [7] BERNSTEIN, D.S., HADDAD, W.M. *LQG Control with an \mathcal{H}_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approach*
IEEE Transactions on Automatic Control (1989) AC-34(3), 293-305.
- [8] ANDERSON, B.D.O., MOORE J.B., *Linear Optimal Control*
Prentice Hall, New Jersey NJ, 1971.
- [9] CHEN, CHI-TSONG *Linear System Theory and Design*
Oxford University Press, 1984.

- [10] COLEMAN, T., BRANCH, M.A., GRACE, A. *Optimization Toolbox Guide*
The MathWorks Inc., 1990.
- [11] CORRÊA, GILBERTO O., SILVEIRA, MARCOS A. *On the Design of Servo-
mechanisms Via \mathcal{H}_2 Optimization*
International Journal of Control (1995) 61(2), 475-491.
- [12] CORRÊA, GILBERTO O., SALES, D.M., SOARES T.M. *Approximate Solu-
tions to $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Problems Via Sequences of \mathcal{H}_2 -Cost/ \mathcal{H}_2 -Constrained Opti-
mization Problems*
International Journal of Control (1997) 67(3), 333-353.
- [13] DOYLE, J.C. *Guaranteed Margins for LQG Regulators*
IEEE Transactions on Automatic Control (1978) AC-23, 756-757.
- [14] DOYLE, J., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P., FRANCIS, B. *State-Space
Solutions to Standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control Problems*
IEEE Transactions on Automatic Control (1989) AC-34(8), 831-847.
- [15] DOYLE, J., FRANCIS, B., TANNENBAUM A. *Feedback Control Theory*
Macmillan Publishing Co., 1990.
- [16] FRANCIS, BRUCE A. *A course in \mathcal{H}_∞ Control Theory*
Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1987.
- [17] FRANKLIN, G., EMAMI-NAEINI A., POWELL J. *Feedback Control of Dy-
namic Systems,*
Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston MA, 1994.
- [18] GAWRONSKI, W.K. *Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach*
Springer, 1998.
- [19] GHANEKAR, MILIND *Scaling Laws for Linear Controllers of Dynamically
Equivalent Single Flexible Link Manipulators*
Master thesis, University of Waterloo, Graduate Department of Electrical
Engineering, Canada, 1994.
- [20] HYLAND, D.C., JUNKINS, J.L., LONGMAN, R. W. *Active Control Tech-
nology for Large Space Structures*
Journal of Guidance, Control and Dynamics (1993) 16(5), 801-821.

- [21] INMAN, DANIEL J. *Engineering Vibration*
Prentice Hall, 1996.
- [22] JOHNSON, T.L., ATHANS, M. *On the Design of Optimal-Constrained Dynamic Compensators for Linear Constant Systems*
IEEE Transactions on Automatic Control (1970) AC-15, 658-660.
- [23] JOSHI, S.M. *Control of Large Space Structures*
Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1989.
- [24] KAILATH, T. *Linear System*
Prentice Hall, 1980.
- [25] KWAKERNAAK, H., SIVAN, R. *Linear Optimal Control Systems*
John Wiley & Sons, 1972.
- [26] KIM, W-J, BHAT N., HU T. *Integrated multidimensional positioner for precision manufacturing*
Journal of Engineering Manufacture (2004) 128(B), 431-442.
- [27] LIM, K.B., MAGHAMI, P.G., JOSHI, S.M. *Comparison of Controller Designs for an Experimental Flexible Structure*
IEEE Conference on Decision and Control (1992), pp. 108-118.
- [28] LIU, Y., ANDERSON, B.D.O. *Controller Reduction Via Stable Factorization and Balancing*
International Journal of Control (1986) 44(2), 507-531.
- [29] FORSELL U., LJUNG L. *Closed-loop identification revisited*
Automatica, vol. 35, p. 1215-1241, 1999.
- [30] LUECKING, D.H., RUBEL, L.A *Complex Analysis*
Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [31] MACIEJOWSKI JAN *Multivariable Feedback Design*
Addison-Wesley, 1989.
- [32] MEGRETSKI, A. *Pure Mixed H_2/H_∞ Optiomal Controller Is Not Exponentially Stable*
ECC (1994) 3(6).

- [33] MEIROVITCH, LEONARD *Principles and Techniques of Vibrations*
Prentice Hall, 1997.
- [34] MEIROVITCH, L., OZ, H. *Modal-Space Control of Large Flexible Spacecraft Possesing Ignorable Coordinates*
Journal of Guidance, Control and Dynamics (1980) 3(6), 569-577.
- [35] MUSTAFA, D., GLOVER, K. *Controller Reduction by \mathcal{H}_∞ Balanced Truncation*
IEEE Transactions on Automatic Control (1991) AC-36(6), 668-682.
- [36] DIXON, W., DAWSON, D., COSTIC, B., QUEIROZ, M. *A MATLAB-Base Control Systems Laboratory Experience for Undergraduate Students: Toward Standardization and Shared Resources*
IEEE Transactions on Education (2002) 45(3), 218-226.
- [37] SILVEIRA, MARCOS A., CORRÊA, GILBERTO O. *\mathcal{H}_2 Optimal Control of Linear Systems with Tracking/Disturbance Rejection Constraints*
International Journal of Control (1992) 55(5), 115-139.
- [38] SILVEIRA, MARCOS A., ADES, R. *Robust Optimal Controllers (Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Problem) via Galerkin's Method*
Preprints of World IFAC Congress Proceedings, Beijing 1998.
- [39] SILVEIRA, MARCOS A., ADES, R. *The Solution oh the $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Problem by Direct Methods*
Aceptado por el SIAM Journal of Control and Optimization, 1999.
- [40] SILVEIRA, MARCOS A. *Espaos de Hardy Ponderados com Aplicacoes a Problemas de Otimizao H_2/H_∞*
52º Seminário Brasileiro de Análise, ITA-So José dos Campos, Brasil, 2000.
- [41] SKELTON, R.E., HUGHES, P.C., HABLANI, H.B. *Order Reduction for Models of Space Structures Using Modal Cost Analysis*
Journal of Guidance, Control and Dynamics (1982) 5(4), 351-357.
- [42] SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control-Analysis and Design*
John Wiley & Sons, 1996.

- [43] STEIN, G., ATHANS, M. *The LQG/LTR Procedure for Multivariable Control Design*
IEEE Transactions on Automatic Control (1987) AC-32, 105-114.
- [44] VIDYASAGAR, M. *Control System Synthesis: A Factorization Approach*
MIT Press., 1985.
- [45] VILLOTA, ELIZABETH *Controle Robusto de Vibrações. Aplicação de um Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$*
Tesis de Maestría, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, Brasil, 2001.
- [46] VILLOTA, E., SILVEIRA, M.A., SAMPAIO, R. *Performance Against Stability Margins Using $\mathcal{H}^2/\mathcal{H}^\infty$ Control*
Congresso Brasileiro de Mecânica Aplicada e Computacional, CNMAC, Belo Horizonte, Brasil, 2001.
- [47] VILLOTA, E., SILVEIRA, M.A., SAMPAIO, R. *Deterioração do Desempenho frente à Robustez: O Caso do Controle Dinâmico de Vibrações de uma Viga*
Congresso Brasileiro de Automática, CBA, Natal, Brasil, 2002.
- [48] YOULA, D.C., BONGIORNO, J.J., JABR, H.A. *Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers. Part I: The Single-Input-Output Case*
IEEE Transactions on Automatic Control (1976) AC-21(1), 3-13.
- [49] ZHOU, K., DOYLE, J., GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*
Prentice Hall, 1996.

APÉNDICE

Apéndice A

BASE MATEMÁTICA

A.1. Conceptos básicos en análisis funcional

Definición A.1.1 (Espacio vectorial complejo) Un conjunto no vacío ψ es llamado espacio vectorial sobre el campo escalar \mathbb{C} o simplemente espacio vectorial complejo si existe una operación llamada adición (+) en ψ tal que para cada par de elementos $(f, g) \in \psi$, la adición de los dos, $f + g$, es nuevamente un elemento de ψ ; cada escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ y cada $f \in \psi$ pueden ser combinados para dar $(\alpha f) \in \psi$; y para cada f, g y $h \in \psi$ y cualquier escalar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se cumplen los siguientes axiomas:

$$(i) f + g = g + f,$$

$$(ii) f + (g + h) = (f + g) + h,$$

(iii) existe un único elemento 0, llamado cero, en ψ tal que $f + 0 = f$,
 $\forall f \in \psi$,

(iv) para cada $f \in \psi$, existe un único elemento $(-f)$ en ψ tal que $f + (-f) = 0$,

$$(v) \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g,$$

$$(vi) (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f,$$

$$(vii) (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f),$$

$$(viii) 1.f = f.$$

Los elementos de un espacio vectorial (complejo) son llamados vectores.

Definición A.1.2 (Subespacio) Un subespacio (lineal) U de un espacio vectorial ψ es un subconjunto no vacío de ψ , tal que el mismo es un espacio vectorial con la operación (+) inherente de ψ .

Definición A.1.3 (Dependencia lineal) Sea ψ un espacio vectorial. El conjunto finito $F = \{f_j : j = 1, \dots, n\}$ de vectores en ψ es llamado linealmente dependiente si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ no todos cero tal que $\sum \alpha_j f_j = 0$; de otra forma el subconjunto F de ψ es llamado linealmente independiente.

Definición A.1.4 (Span) Sea F un subconjunto no vacío de un espacio vectorial ψ . El conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de F es llamado span (lineal) de F , denotado por $\text{span}(F)$.

Definición A.1.5 (Norma y espacio vectorial normado) Sea ψ un espacio vectorial, y suponga que exista un mapeamiento $\|\cdot\|_\psi$ de ψ para $[0, \infty]$ con las siguientes propiedades:

- (i) $\|f\|_\psi = 0$ si y solo si $f = 0$,
- (ii) $\|\alpha f\|_\psi = |\alpha| \|f\|_\psi$ para cada scalar $\alpha \in \mathbb{C}$,
- (iii) $\|f + g\|_\psi \leq \|f\|_\psi + \|g\|_\psi$ para todo $f, g \in \psi$ (desigualdad triangular).

El mapeamiento $\|\cdot\|_\psi$ es llamado norma en ψ , y el espacio vectorial ψ equipado con $\|\cdot\|_\psi$ es llamado espacio vectorial normado o simplemente espacio normado.

Definición A.1.6 (Convergencia) Sea $(f_i)_{i=1,2,\dots}$ una secuencia en un espacio vectorial normado ψ . Se dice que la secuencia converge (en ψ) si existe un vector $f \in \psi$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_i - f\|_\psi = 0,$$

Entonces se escribe $f_i \rightarrow f$, y se llama f el límite de f_i .

Definición A.1.7 (Bolas abiertas y cerradas) Dado un vector f en un espacio normado ψ y un número r con $0 < r < \infty$. Los conjuntos $\mathcal{B}(f, r) = \{g : \|f - g\|_\psi < r\}$ y $\mathcal{B}_d(f, r) = \{g : \|f - g\|_\psi \leq r\}$ son llamados, respectivamente, bolas abiertas y bolas cerradas con centro f y radio r .

Definición A.1.8 (Encerramiento) El encerramiento, $\text{cl}(F)$, de un subconjunto F de un espacio normado ψ es la colección de límites de secuencias en F que convergen en ψ .

Definición A.1.9 (Conjunto cerrado) Un subconjunto F de un espacio normado ψ es cerrado si es idéntico a su encerramiento.

Definición A.1.10 (Conjunto abierto) Un subconjunto F de un espacio normado ψ es abierto si mantiene cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- (i) su complemento es cerrado,
- (ii) para cada $f \in F$ existe una bola abierta $\mathcal{B}(f, r)$ que está contenida en F .

Definición A.1.11 (Topología) Colección de todos los subconjuntos abiertos del espacio vectorial ψ que obedece las siguientes propiedades:

- (i) $\emptyset \in \Upsilon$, $\psi \in \Upsilon$.
- (ii) la unión de todos los elementos de Υ es un elemento de Υ .
- (iii) la intersección de un número finito de elementos de Υ es un elemento de Υ .

Definición A.1.12 (Espacio topológico) El espacio topológico (ψ, Υ) es el conjunto ψ y la colección Υ de subconjuntos de ψ tal que Υ satisface los axiomas de la Definición A.1.11.

Definición A.1.13 (Secuencia de Cauchy) Sea ψ un espacio vectorial normado. La secuencia $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ en ψ se dice que es Cauchy si para cada $\epsilon > 0$

existe un $n(\epsilon)$ tal que $\|f_i - f_j\|_\psi < \epsilon$ para todo $i, j > n(\epsilon)$.

Definición A.1.14 (Espacio de Banach) Un espacio normado ψ es llamado espacio de Banach si cada secuencia de Cauchy en ψ es convergente.

Definición A.1.15 (Convergencia fuerte) Sea $(f_i)_{i=1,2,\dots}$ una secuencia en un espacio vectorial normado ψ . La secuencia se dice que converge fuertemente (converge en la norma) en ψ , si existe un vector $f \in \psi$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_i - f\|_\psi = 0$$

Entonces se escribe $f_i \rightarrow f$, y se lee f es límite fuerte de f_i o se puede decir que f_i converge fuertemente para f .

Definición A.1.16 (Convergencia débil) Sea $(u_i)_{i=1,2,\dots}$ una secuencia en un espacio vectorial normado ψ . La secuencia se dice que converge débilmente (en ψ) si existe un vector $u \in \psi$ tal que para cada $y \in \psi$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(u_i) = y(u)$$

Entonces se escribe $u_i \rightarrow u$. El elemento u se llama límite débil de u_i o se puede decir que u_i converge débilmente para u .

Definición A.1.17 (Subconjunto denso) Suponiendo $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \psi$, donde ψ es un espacio normado. El conjunto F_1 se dice que es denso en F_2 si $\text{cl}(F_1) = F_2$.

Definición A.1.18 (Espacio separable) Un espacio de Banach es separable si contiene un subconjunto denso contable.

Definición A.1.19 (Producto interno) Sea ψ un espacio vectorial. Un producto interno en ψ es una función compleja $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ en $\psi \times \psi$ tal que para todo f, g y $h \in \psi$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se mantienen las siguientes condiciones:

- (i) $\langle f, f \rangle_\psi \geq 0$, e $\langle f, f \rangle_\psi = 0$ si y solo si $f = 0$,
- (ii) $\langle f, (g + h) \rangle_\psi = \langle f, g \rangle_\psi + \langle f, h \rangle_\psi$,
- (iii) $\langle f, g \rangle_\psi = \overline{\langle g, f \rangle_\psi}$.
- (iv) $\langle \alpha f, g \rangle_\psi = \bar{\alpha} \langle f, g \rangle_\psi$.

Definición A.1.20 (Espacio de Hilbert) Sea ψ un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$. Si ψ es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|\cdot\|_\psi = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi}$, entonces ψ es llamado espacio de Hilbert.

Definición A.1.21 (Ortogonal) Sea ψ un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$. Dos vectores $f, g \in \psi$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle_\psi = 0$, se escribe $f \perp g$. Dado un subespacio U de ψ , el conjunto de vectores en ψ ortogonal a cada vector en U es conocido como complemento ortogonal de U , denotado por U^\perp . La unión de dos subespacios U y Y de ψ donde cada vector en U es ortogonal a cada vector en Y es llamada suma directa ortogonal de U y Y , denotada por $U \oplus Y$.

Teorema A.1.22 (Teorema de la proyección) Sea U un subespacio cerrado del espacio de Hilbert. Entonces U^\perp es también un subespacio cerrado, y $\psi = U \oplus U^\perp$. Para cada $f \in \psi$, la descomposición $f = g + h$, donde $g \in U$ y $h \in U^\perp$, es única, y g es el elemento en U más cerca de f , por ejemplo:

$$g = \arg \min_{\varphi \in U} \|f - \varphi\|_\psi.$$

Definición A.1.23 (Norma-p) Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sea F el conjunto de todas las funciones complejas en D . Para $p \in \mathbb{Z}_+$, sea $\|\cdot\|_p$ el mapeamiento de F para $[0, \infty]$ que está definido a través de ($f \in F$):

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)| \quad \text{si } p = \infty,$$

$\|\cdot\|_p$ es una norma, la llamada norma-p.

Definición A.1.24 (Espacios- \mathcal{L}^p) Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$, el espacio $\mathcal{L}^p(D)$ es el espacio normado, la norma es la norma-p de todas las funciones complejas en D cuya norma-p es finita.

Teorema A.1.25 (Propiedades de los espacios- \mathcal{L}^p) Para todo $p \in \mathbb{Z}_+$, \mathcal{L}^p es un espacio de Banach. \mathcal{L}^p es separable si $1 \leq p < \infty$. $\mathcal{L}^2(D)$ es un espacio de Hilbert equipado con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_D \bar{f}(x)g(x)dx$.

A.2. Teoría de operadores

A.2.1. Conceptos fundamentales

Definición A.2.1 (Operador, dominio, imagen) Sean U y Y espacios vectoriales. Sea T el mapeamiento definido en algún subconjunto $\text{dom}(T) \subseteq U$, y suponiendo que T aplica cada $f \in \text{dom}(T)$ a un único elemento Tf en Y . El conjunto $\text{dom}(T)$ es llamado dominio de T , el conjunto $\text{Im}(T) = \{Tf : f \in \text{dom}(T)\}$ es llamado imagen de T . T es llamado operador de U para Y , denotado por $T : \text{dom}(T) \subseteq U \rightarrow Y$.

Definición A.2.2 (Espacio nulo) Sean U y Y espacios vectoriales, y sea T el mapeamiento de U para Y . El conjunto $\text{null}(T) = \{u \in U : Tu = 0\}$ es llamado espacio nulo de T , o “kernel” de T , o núcleo de T .

Definición A.2.3 (Operadores inyectivos, sobreyectivos y biyectivos) Supongase que T es un operador de U para Y . Se dice que T es inyectivo si para cada $y \in \text{im}(T)$ existe un $u \in \text{dom}(T)$ tal que $y = Tu$. T es llamado sobreyectivo si $\text{im}(T) = Y$, y T es llamado biyectivo si es inyectivo y sobreyectivo.

Definición A.2.4 (Operador linear) Sean U y Y espacios vectoriales. Un operador L de U para Y con dominio $\text{dom}(L)$ es llamado linear si $\text{dom}(L)$

es un subespacio lineal de U y $L(\alpha u_1 + \beta u_2)$ para todo $\alpha, \beta \in C$ y todo $u_1, u_2 \in \text{dom}(L)$.

Definición A.2.5 (Inverso) Supongase que L es un operador lineal de U para Y . Se dice que L tiene inverso, o el inverso de L existe, si L es biyectivo. El inverso, denotado por L^{-1} , es el operador con dominio $\text{Im}(L)$ e imagen $\text{dom}(L)$ definido por $u = L^{-1}y$ cuando $y = Lu$.

Definición A.2.6 (Funcional) Un funcional lineal es un operador lineal con dominio en el espacio vectorial ψ e imagen en el campo escalar K de ψ , entonces, $f : \text{dom}(f) \rightarrow K$, donde $K = \mathbb{R}$ si ψ es real y $K = \mathbb{C}$ si ψ es complejo.

A.2.2. Operadores limitados

Definición A.2.7 (Operador limitado) Un operador lineal L de U para Y , ambos espacios normados, se dice que es limitado en el $\text{dom}(L)$ si existe un número positivo finito k tal que $\|Lu\|_\psi \leq k\|u\|_\psi$ para todo $u \in \text{dom}(L)$.

Definición A.2.8 (Norma inducida) Se considera un operador lineal limitado L de U para Y , donde U y Y son espacios normados. Las normas en U e Y “inducen” una norma para el operador L en el siguiente sentido:

$$\|L\|_{\text{ind}} = \sup_{\{u \in \text{dom}(L) : \|u\|_\psi = 1\}} \|Lu\|_\psi,$$

la cual se llama norma inducida de L .

Definición A.2.9 (Isometría) Sean U, Y espacios normados. Supóngase que $T : U \rightarrow Y$ es un operador (no necesariamente lineal) tal que $\|Tu\|_\psi = \|u\|_\psi$ para todo $u \in U$. Entonces T se dice que es una isometría. Si existe una isometría biyectiva de U para Y , el espacio U se dice que es isométrico con el espacio Y , luego los espacios U y Y son llamados espacios isométricos.

Definición A.2.10 (Isomorfismo) Suponiendo que U y Y sean espacios normados. Un operador lineal $L : U \rightarrow Y$ es llamado isomorfismo si es biyectivo. Si tal L existe, entonces U y Y son llamados espacios isomórficos.

Definición A.2.11 (Isomorfismo isométrico) Sean U, Y espacios normados. Un operador lineal $L : U \rightarrow Y$ que es una isometría y un isomorfismo es llamado isomorfismo isométrico, y U y Y son llamados espacios isomórficos isométricamente.

Teorema A.2.12 (Completamiento) Para un espacio normado $\psi = (\psi, \|\cdot\|_\psi)$ existe un espacio normado completo $\hat{\psi} = (\hat{\psi}, \|\cdot\|_{\hat{\psi}})$ que tiene un subespacio W que es isométrico con ψ y es denso en $\hat{\psi}$. Este espacio es único excepto por isometrías, esto es, si $\tilde{\psi}$ es cualquier espacio normado completo que tiene un subespacio denso \tilde{W} isométrico con ψ , entonces $\tilde{\psi}$ y $\hat{\psi}$ son isométricos.

A.2.3. Análisis complejo y operadores

Definición A.2.13 (Límite) Sea ψ un espacio normado. Supóngase $v_o \in \psi$ y considere el mapeamiento $v : \mathbb{C} \rightarrow \psi$. La relación $\lim_{s \rightarrow s_o} v(s) = v_o$ es definida por $\|v(s) - v_o\|_\psi \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow s_o$.

Definición A.2.14 (Funciones analíticas, diferenciables y continuas) Sea ψ un espacio normado y considerando el mapeamiento $v : \mathbb{C} \rightarrow \psi$. $v(s)$ es llamada continua en $s = s_o \in \mathbb{C}$ si $\lim_{s \rightarrow s_o} v(s) = v_o$. Si F es un subconjunto de \mathbb{C} , entonces $v(s)$ es llamada continua en F si es continua en cada punto de F . La derivada de $v(s)$ en $s = s_o$ es dada por:

$$v'(s_o) = \frac{dv(s)}{ds} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(v(s_o + h) - v(s_o)), \quad h \in \mathbb{C},$$

para cuando el límite exista. Cuando la derivada existe, entonces v es llamada diferenciable en s_o . Sea D un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Cuando v es definida y

diferenciable en todo D , entonces es llamada analítica en D .

Definición A.2.15 (Espacio de Lebesgue-2, espacio de Hardy-2)

Sea ψ un espacio de Hilbert. Por espacio de Lebesgue-2 $\mathcal{L}_\psi^2(j\mathbb{R})$ se refiere al espacio de Banach de funciones v de variable compleja que están limitadas en la norma:

$$\|v\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|v(j\omega)\|_\psi^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por espacio de Hardy-2 $\mathcal{H}_\psi^2(\mathbb{C}_+)$ se refiere al espacio de Banach de funciones v de una variable compleja que son analíticas en \mathbb{C}_+ y limitadas en la norma:

$$\|v\|_{\mathcal{H}^2} = \left(\sup_{\sigma > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|v(\sigma + j\omega)\|_\psi^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición A.2.16 (Espacio de Lebesgue- ∞ , espacio de Hardy- ∞)

Sea ψ un espacio de Hilbert. Por espacio de Lebesgue- ∞ $\mathcal{L}_\psi^\infty(j\mathbb{R})$ se refiere al espacio de Banach de funciones T de una variable compleja que están limitadas en la norma:

$$\|T\|_{\mathcal{L}^\infty} = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \{ \|T(j\omega)\|_\psi \}.$$

Por espacio de Hardy- ∞ $\mathcal{H}_\psi^\infty(\mathbb{C}_+)$ se refiere al espacio de Banach de funciones T de una variable compleja que son analíticas en \mathbb{C}_+ y limitadas en la norma:

$$\|T\|_{\mathcal{H}^\infty} = \text{ess sup}_{s \in \mathbb{C}_+} \{ \|T(j\omega)\|_\psi \}.$$

Observación A.2.17 (Norma-2 y norma- ∞) Sea ψ un espacio de Hilbert, y suponiendo $v \in \mathcal{H}_\psi^2(\mathbb{C}_+)$. Entonces $\|v\|_{\mathcal{L}^2} = \|v\|_{\mathcal{H}^2}$. Así, para identificar normas $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$ de otras, simplemente se escribirá $\|\cdot\|_2$ y se llamará norma-2. Similarmente si $T \in \mathcal{H}_\psi^\infty(\mathbb{C}_+)$, entonces $\|T\|_{\mathcal{H}^\infty} = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \|T(j\omega)\|_\psi$. De ahí que para diferenciar las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\infty}$ de otras se escribe $\|\cdot\|_\infty$ y se llama norma- ∞ .

Apéndice B

SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES

En este capítulo del Apéndice serán revisados algunos conceptos básicos de sistemas. En ese sentido, se hace una descripción de los sistemas dinámicos y sus representaciones, posteriormente se definen controlabilidad, observabilidad, estabilizabilidad, detectabilidad y observadores de estado.

B.1. Descripción de sistemas dinámicos lineales

Sea descrito un sistema dinámico lineal finito dimensional invariante en el tiempo por las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_o) = x_o, \tag{B.1}$$

$$y = Cx + Du. \tag{B.2}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $x(t_o)$ es la condición inicial del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entradas del sistema, y $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de salidas del sistema. A , B , C , y D son matrices reales de coeficientes constantes apropiadamente dimensionadas. Un sistema dinámico con una entrada ($n_u = 1$) y una salida ($n_y = 1$) es llamado sistema SISO, en caso de presentar más de una entrada o salida es llamado sistema MIMO.

La correspondiente matriz de funciones de transferencia de u a y es definida como:

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

donde $U(s)$ y $Y(s)$ son la transformada de Laplace de $u(t)$ y $y(t)$ con condiciones iniciales igual a cero ($x(0) = 0$). Como resultado se tiene:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

B.2. Controlabilidad y observabilidad

B.2.1. Controlabilidad

El sistema dinámico descrito por (B.1) o el par (A,B) es controlable si, para un estado inicial $x(0) = x_o$, $t_1 > 0$ y estado final x_1 , existe una función continua $u(t)$ tal que la solución de (B.1) satisfaga $x(t_1) = x_1$. De otra forma el sistema o el par (A,B) es no controlable.

Teorema

Lo siguiente es equivalente:

- (i) (A, B) es controlable.
- (ii) La matriz:

$$W_c(t) = \int_0^t \exp(A\tau)BB^* \exp(A^*\tau)d\tau,$$

es definida positiva para cualquier $t > 0$.

(iii) La matriz de controlabilidad:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

tiene rango de fila completo o, en otras palabras, $\langle A | \text{Im}B \rangle = \sum_{i=1}^n \text{Im}(A^{i-1}B) = \mathbb{R}^n$.

(iv) La matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ tiene rango de fila completo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(v) Sean λ y x un autovalor y el correspondiente autovector a la izquierda de A ; $x^*A = x^*\lambda$, entonces $x^*B \neq 0$.

(vi) Los autovalores de $A + BF$ pueden ser libremente asignados (con la restricción de que autovalores complejos se presentan en pares conjugados) mediante una elección apropiada de F . □

Demostración Ver Zhou *et al*, [49].

B.2.2. Estabilizabilidad

El sistema dinámico (B.1) o el par (A, B) es estabilizable si existe una realimentación de estado $u = Fx$ tal que el sistema es estable, esto es $A + BF$ es estable.

Teorema

Lo siguiente es equivalente:

(i) (A, B) es estabilizable.

(ii) La matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ tiene rango de fila completo para todo $\text{Re}(\lambda) \geq 0$.

(iii) Para todo λ y x tal que $x^*A = x^*\lambda$ y $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, $x^*B \neq 0$.

(iv) Existe una matriz F tal que $A + BF$ es Hurwitz¹. □

¹Un sistema dinámico sin fuerza externa actuando sobre él, $\dot{x} = Ax$, es estable si todos los

Demostración Ver Zhou *et al*, [49]

B.2.3. Observabilidad

El sistema dinámico descrito en por (B.1) y (B.2) o el par (C,A) es observable si, para algún $t_1 > 0$, el estado inicial $x(0) = x_o$ puede ser determinado de la información de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ en el intervalo $[0, t_1]$. De otra forma, el sistema o el par (C,A) , es inobservable.

Teorema

Lo siguiente es equivalente:

- (i) (C, A) es observable.
- (ii) La matriz:

$$W_o(t) = \int_0^t \exp(A^*\tau)C^*C \exp(A\tau)d\tau,$$

es definida positiva para cualquier $t > 0$.

- (iii) La matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

tiene rango de columna completo o $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(CA^{i-1}) = 0$.

- (iv) La matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ tiene rango de columna completo para todo

autovalores de A estan en semiplano complejo izquierdo, $\text{Re}(\lambda(A)) < 0$. Una matriz A con tal propiedad es estable o Hurwitz.

$\lambda \in \mathbb{C}$.

(v) Sean λ y y un autovalor y el correspondiente autovector a la derecha de A ; $Ay = \lambda y$, entonces $Cy \neq 0$.

(vi) Los autovalores de $A + LC$ pueden ser libremente asignados (con la restricción de que autovalores complejos se presentan en pares conjugados) mediante una elección apropiada de L .

(vii) (A^*, C^*) es controlable. □

Demostración Ver Zhou *et al*, [49].

B.2.4. Detectabilidad

El sistema dinámico (B.1) o el par (C, A) es detectable si $A + LC$ es estable para algún L .

Teorema

Lo siguiente es equivalente:

(i) (C, A) es detectable.

(ii) La matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ tiene rango de columna completo para todo

$\text{Re}(\lambda) \geq 0$.

(iii) Para todo λ y x tal que $Ax = \lambda x$ y $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, $Cx \neq 0$.

(iv) Existe una matriz $A + LC$ es Hurwitz.

(v) (A^*, C^*) es estabilizable. □

Demostración Ver Zhou *et al*, [49]

B.3. Observadores de estado

Considerese la planta modelada por las (B.1) y (B.2). Un observador es un sistema dinámico con entradas (u, y) y salida \hat{x} , que asintóticamente estima el estado x , ver Fig. B.1. Más exactamente un observador es un sistema tal que:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= Mq + Nu + Hy, \\ \hat{x} &= Qq + Ru + Sy,\end{aligned}$$

tal que $\hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ para todo estado inicial $x(0)$, $q(0)$ y para toda entrada $u(t)$. El teorema a continuación muestra la condición necesaria y suficiente para que el observador exista.

Teorema

Un observador existe si y sólo si (C, A) es detectable. Además, si (C, A) es detectable, entonces un observador Luenberger es dado por:

$$\dot{q} = Aq + Bu + L(Cq + Du - y), \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{x} = q, \quad (\text{B.4})$$

donde L es cualquier matriz tal que $A + LC$ es estable. \square

Demostración Ver Zhou *et al.*, [49].

El observador de Luenberger, arriba presentado, tiene dimensión n que es la dimensión del estado x . Es posible obtener un observador de menor dimensión: considerando que se puede medir $y - Du = Cx$ es posible conocer x módulo de $\text{Ker}C$, luego sólo se necesitaría generar la parte de x en $\text{Ker}C$. Si C tiene rango de fila completo y $n_y = \dim(y)$, la dimensión de $\text{Ker}C$ es igual a $n - n_y$, esto lleva

a pensar que se puede obtener un observador de orden $n - n_y$. Esto es verdad, tal observador se denomina “observador de orden mínima”².

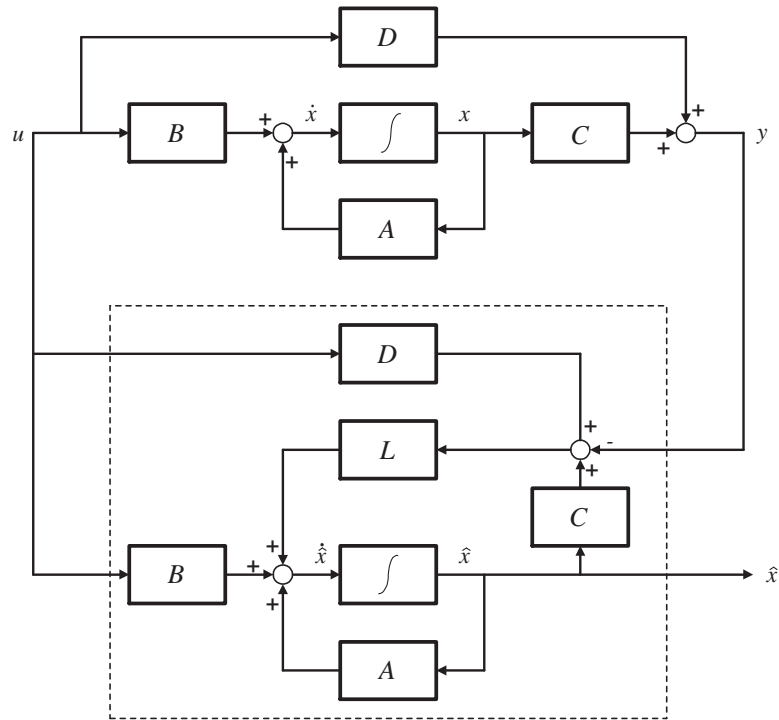


Figura B.1: Configuración del observador de estados

²Ver Chen, 1984.

Apéndice C

TEOREMAS USADOS EN EL PROBLEMA DE CONTROL $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

C.1. Consideraciones

C.1.1. Consideración 1

(a) Existen M, \bar{M} en \mathbb{S} , tales que $D_{yu} = D_{zu}M$ y $\tilde{D}_{yu} = \bar{M}\tilde{D}_{yw}$.

(b) $Q_c = P_{zw} - P_{zu}D_{yu}XP_{yw}$ es una matriz real racional, propia, estable. □

C.1.2. Consideración 2

(a) Q_a y Ψ_r son matrices externamente coprimas en \mathbb{S} .

(b) Existen matrices \bar{Q}_a, \bar{Q}_c en \mathbb{S} tales que $Q_c\bar{Q}_a = Q_a\bar{Q}_c$, siendo que \bar{Q}_a y Ψ_w son externamente coprimas.

(c) Q_b y Ψ_w son coprimos a la derecha en \mathbb{S} .

(d) \tilde{D}_{yu} y Ψ_v son coprimos a la derecha en \mathbb{S} .

(e) En el conjunto de pares $(\bar{\Psi}_w, \bar{\Psi}_v)$ existe un coprimo a la derecha en \mathbb{S} , tal que para algún par $(\tilde{D}_{yu}, \tilde{Q}_b)$ en \mathbb{S} : $\bar{\Psi}_v\tilde{D}_{yu} = \bar{D}_{yu}\Psi_v$ y $\bar{\Psi}_wQ_b = \bar{Q}_b\Psi_w$. □

C.1.3. Consideración 3

(a) $\Gamma = \Phi^* \Phi$ es una función real racional en \mathcal{R}_{2k} , sin polos ni ceros en $j\mathbb{R}$, siendo que Φ es una función real, racional y estable en \mathcal{R}_k^+ con todos sus ceros en \mathbb{C}_+^0 (de fase mínima).

(b) Λ es una función racional sin polos en $j\mathbb{R}$, con $\partial_r(\Lambda) \geq 2$

(c) Sean Ω y Θ subconjuntos convexos cerrados y limitados de \mathcal{H}_+^∞ y \mathcal{H}_+^2 respectivamente. \square

C.1.4. Consideración 4

Sea verificada la Consideración 3 con la condición más fuerte $\partial_r(\Lambda) \geq 1+k$ para $k > 0$. \square

C.2. Definiciones

C.2.1. Definición 1

Sea Γ conforme descrito en la Consideración 3. Se define:

$$\langle f, g \rangle_\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega) \Gamma(j\omega) g(j\omega) d\omega, \quad \|f\|_\Gamma = [\langle f, f \rangle_\Gamma]^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

C.2.2. Definición 2

Sea $\Phi_{-1}(s) = (1+s)^{-1}$ y $\Gamma_{-1}(s) = \Phi_{-1}^*(s) \Phi_{-1}(s)$. Se define:

$$\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tal que } \|f\|_{\Gamma_{-1}} < \infty\},$$

$$\mathcal{H}_+^{2,-1} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ analítica en } \mathbb{C}_+^0 \text{ tal que } \|f(a+j\omega)\|_{\Gamma_{-1}} < \infty \forall a > 0\},$$

$\mathcal{H}_-^{2,-1}$ el espacio análogo usando $a < 0$ y \mathbb{C}_-^0 en su definición,

$$\varphi \mathcal{H}_-^{2,-1} = \{f \in \mathcal{H}_-^{2,-1} \text{ tal que } f(-1) = 0\}. \quad \square$$

C.2.3. Definición 3

Sea $\Gamma = \Phi^*\Phi$ como en la Consideración 3, $\partial_r(\Phi) = k$, $k \in \mathbb{N}$. Se define:

$$\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tal que } \|f\|_\Gamma < \infty\},$$

$$\mathcal{H}_+^{2,-k} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ analítica en } \mathbb{C}_+^0 \text{ tal que } \|f(a + j\omega)\|_\Gamma < \infty \text{ para todo } a > 0\},$$

$\mathcal{H}_-^{2,-k}$ el espacio análogo usando $a < 0$ y \mathbb{C}_-^0 en su definición,

$$\varphi\mathcal{H}_-^{2,-k} = \{f \in \mathcal{H}_-^{2,-k} \text{ tal que } f \text{ tiene sus ceros en todos los ceros de } \varphi\}$$

siendo que φ es el factor del denominador Φ conteniendo exactamente sus factores primos correspondientes a los polos con multiplicidad 1. \square

C.3. Lemas

C.3.1. Lema 1

Sea verificada la Consideración 3, con $\partial_r(\Gamma) = 2k$. Luego $\langle f, g \rangle_\Gamma$ y $\|f\|_\Gamma$ definen el producto interno y la norma asociada sobre el conjunto de funciones en \mathcal{R}_{1-k} sin polos en $j\mathbb{R}$. \square

C.3.2. Lema 2

Los espacios lineales $\mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$ son isométricamente isomorfos, f pertenece a $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$ si y solo si $\Phi_{-1}f \in \mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$. En este caso, $\|f\|_{\Gamma_{-1}} = \|\Phi_{-1}f\|_2$, el mapeamiento isométrico $f \rightarrow (\Phi_{-1})^{-1}f$, de $\mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$ para $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$ es inyectivo y el mapeamiento isométrico inverso es sobreyectivo. \square

C.4. Teoremas

C.4.1. Teorema 1

Sean la Consideración 1 y la Consideración 2 válidas.

(a) Existen matrices X_r, Y_r en \mathbb{S} tales que $Q_a X_r + Y_r \Psi_r = I$. El parámetro R que resuelve el problema de rastreamiento asintótico para la clase de referencias en (4.42) es dado por $R = X_r + K_1 \Psi_r$, para todo $K_1 \in \mathbb{S}$.

(b) Existen matrices en \mathbb{S} X, Y, X_i, Y_i para $i = 0, 1, 2, 3, 4$ y $\hat{\Psi}_w, \hat{\Psi}_v$ tales que:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{yu} N_{yu} &= \tilde{N}_{yu} D_{yu}, & X N_{yu} + Y D_{yu} &= I, \\ Q_c \bar{Q}_a &= Q_a \bar{Q}_c, & \hat{Q}_a X_1 + Y_1 \Psi_w &= I, \\ \bar{\Psi}_w Q_b &= \bar{Q}_b \psi_w, & X_2 Q_b + Y_2 \Psi_w &= I, \\ \bar{\Psi}_v \tilde{D}_{yu} &= \bar{D}_{yu} \psi_v, & X_3 \tilde{D}_{yu} + Y_3 \Psi_v &= I, \\ \hat{\Psi}_v \hat{\psi}_w &= \hat{\Psi}_w \bar{\Psi}_v, & X_4 \bar{\Psi}_w + Y_4 \bar{\Psi}_v &= I, \end{aligned}$$

siendo que:

$$\begin{aligned} \det(\Psi_w) &= \det(\bar{\Psi}_w) = \det(\hat{\Psi}_w), \\ \det(\Psi_v) &= \det(\bar{\Psi}_v) = \det(\hat{\Psi}_v), \\ \det(D_{yu}) &= \det(\tilde{D}_{yu}) = \det(\bar{D}_{yu}). \end{aligned}$$

El parámetro K que resuelve el problema de atenuación asintótica de disturbios y ruidos en las clases descritas en (4.42) es dado por $K = N_o + K_2 N_a$ para todo $K_2 \in \mathbb{S}$ tal que $I - SC_2 P_{yu}$ sea bipropio, donde por definición:

$$N_o = [(\bar{Q}_c X_1 X_2 + X X_3) X_4 - \bar{Q}_c X_1 X_2], \quad N_a = \hat{\Psi}_d \bar{\Psi}_v. \quad \square$$

Demostración Ver Silveira *et al*, [37].

C.4.2. Teorema 2

Sean $P_{yu\Delta}, C \in \mathcal{R}_P$ y $N_{yu}, D_{yu} \in \mathbb{S}$ factores coprimos de P_{yu} tales que $P_{yu} = N_{yu}D_{yu}^{-1}$. El sistema $(P_{yu\Delta}, C)$ es estable para todo $P_{yu\Delta} \in P_\Delta(P_{yu}, \tilde{\gamma})$ con $\tilde{\gamma} > 0$ si y solamente si C es dado por (4.42) para algún $K \in \mathbb{S}$ tal que $\|\tilde{W}\tau_{uv}(K)\|_\infty \leq \tilde{\gamma}^{-1}$ y $\tilde{W} = W^{-1}$. \square

Demostración Ver Villota, [45].

C.4.3. Teorema 3

Sean $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R}), \mathcal{H}_+^{2,-1}, \mathcal{H}_-^{2,-1}$ y $\varphi\mathcal{H}_-^{2,-1}$ los espacios lineales presentados en la Definición 2 bajo la Consideración 3. Entonces:

(a) Todas las normas de la Definición 1 para $\partial_r(\Gamma) = 2$ son equivalentes. En particular ellas son equivalentes a la norma usada en la Definición 2 asociada a Γ_{-1} . Entonces la topología $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$ es independiente de la norma a ser escogida, si $\partial_r(\Gamma) = 2$.

(b) $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R}), \mathcal{H}_+^{2,-1}$ y $\mathcal{H}_-^{2,-1}$ son el completamiento de $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0^+$ y \mathcal{R}_0^- sin polos en $j\mathbb{R}$ en cualquier norma como en (a), respectivamente. Aún más, ellos son espacios de Hilbert para cualquiera de los productos internos $\langle f, g \rangle_\Gamma, \Gamma$ como en (a).

(c) $\mathcal{H}_+^{2,-1}, \mathcal{H}_-^{2,-1}$ y $\varphi\mathcal{H}_-^{2,-1}$ son subespacios cerrados de $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$.

(d) $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R}) = \mathcal{H}_+^{2,-1} + \mathcal{H}_-^{2,-1}, \mathcal{H}_+^{2,-1} \cap \mathcal{H}_-^{2,-1}$ conteniendo las funciones constantes y las funciones definidas por $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e^{st_m}$, donde $\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m| < \infty$.

(e) $\mathcal{H}_+^{2,-1}$ y $\varphi\mathcal{H}_-^{2,-1}$ son espacios ortogonales para el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{-1}}$; de ahí que $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R}) = \mathcal{H}_+^{2,-1} \oplus \varphi\mathcal{H}_-^{2,-1}$. \square

Demostración Ver Silveira *et al*, [39].

C.4.4. Teorema 4

Sean $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_+^{2,-1}$, $\mathcal{H}_-^{2,-1}$ y $\varphi\mathcal{H}_-^{2,-1}$ espacios lineales presentados en la Definición 2. Entonces:

(a) $\mathcal{L}^2(j\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$, siendo que la topología de $\mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$ es estrictamente más fina que la de $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$. Además, $\mathcal{H}_+^2 \subset \mathcal{H}_+^{2,-1}$, donde la topología de \mathcal{H}_+^2 es estrictamente más fina que la de $\mathcal{H}_+^{2,-1}$.

(b) Los subconjuntos limitados de $\mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$ son limitados en $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$, y los subconjuntos cerrados limitados de $\mathcal{L}^2(j\mathbb{R})$ son cerrados y limitados en $\mathcal{L}_{-1}^2(j\mathbb{R})$. Las mismas relaciones pueden ser consideradas entre \mathcal{H}_+^2 y $\mathcal{H}_+^{2,-1}$.

(c) $\mathcal{H}_+^\infty \subset \mathcal{H}_+^{2,-1}$, siendo que la topología \mathcal{H}_+^∞ es estrictamente más fina que la de $\mathcal{H}_+^{2,-1}$.

(d) Los subconjuntos limitados de \mathcal{H}_+^∞ son limitados en $\mathcal{H}_+^{2,-1}$, y los subconjuntos cerrados limitados de \mathcal{H}_+^∞ son cerrados y limitados en $\mathcal{H}_+^{2,-1}$. \square

Demostración Ver Silveira *et al*, [39].

C.4.5. Teorema 5

Sean Γ y Λ conforme la Consideración 3.

(a) El funcional cuadrático $f \rightarrow \|f\|_\Gamma^2$ es estrictamente convexo. Este funcional es continuo en $\mathcal{H}_+^{2,-1}$ si y sólo si $\partial_r(\Gamma) \geq 2$.

(b) $F(K) = \langle K, \Lambda \rangle_2$ es un funcional lineal continuo en $\mathcal{H}_+^{2,-1}$ si y sólo si $\partial_r(\Lambda) \geq 2$. \square

Demostración Ver Silveira *et al*, [39].

C.4.6. Teorema 6

Sean verificadas la Consideración 3, $\partial_r\Gamma \geq 2$ y $\partial_r\Lambda \geq 2$. Entonces:

(a) Si el conjunto restricción $\Omega \cap \Theta$ es no vacío, el problema de control óptimo (4.60) tiene una y sólo una solución en $\mathcal{H}_+^{2,-1}$; en particular, si Ω es no vacío a solución óptima está en \mathcal{H}_+^∞ , y si Θ es no vacío, la solución óptima está en $\mathcal{H}_+^{2,-1}$.

(b) El problema de control óptimo sin restricciones tiene una y sólo una solución \check{K} dada por (4.56). \square

Demostración Ver Silveira *et al.*, [39].

C.4.7. Teorema 7

Sea la norma $\|\cdot\|_\Gamma$ y los espacios $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_+^{2,-k}$, $\mathcal{H}_-^{2,-k}$ y $\varphi\mathcal{H}_-^{2,-k}$ como en la Definición 3.

(f) Todas las normas de la Definición 3 con $\partial_r(\Gamma) = 2k$ son equivalentes. En particular, ellas son equivalentes a la norma definida con $\Phi(s) = (1+s)^{-k}$. Entonces la topología $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$ es independiente de la norma escogida, si $\partial_r(\Gamma) = 2k$.

(g) $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_+^{2,-k}$ y $\mathcal{H}_-^{2,-k}$ son el completamiento de \mathcal{R}_{1-k} , \mathcal{R}_+^{1-k} y \mathcal{R}_-^{1-k} (sin polos en $j\mathbb{R}$) en cualquier norma como en (a), respectivamente. Aún más, ellos son espacios de Hilbert para cualquier producto interno $\langle f, g \rangle_\Gamma$, con Γ como en (a).

(h) $\mathcal{H}_+^{2,-k}$, $\mathcal{H}_-^{2,-k}$ y $\varphi\mathcal{H}_-^{2,-k}$ son subespacios cerrados de $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$.

(i) $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R}) = \mathcal{H}_+^{2,-k} + \mathcal{H}_-^{2,-k}$, $\mathcal{H}_+^{2,-k} \cap \mathcal{H}_-^{2,-k}$ contiene los polinomios en s con grado menor o igual a $k-1$.

(j) $\mathcal{H}_+^{2,-k}$ y $\varphi\mathcal{H}_-^{2,-k}$ son espacios ortogonales para el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$; de ahí que $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R}) = \mathcal{H}_+^{2,-k} \oplus \varphi\mathcal{H}_-^{2,-k}$.

(k) Los espacios lineales $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}_{-m}^2(j\mathbb{R})$ son isométricamente isomorfos. Si $k < m$, $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_{-m}^2(j\mathbb{R})$, la isometría de $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$ para $\mathcal{L}_{-m}^2(j\mathbb{R})$ es inyectiva y la isometría inversa es sobreyectiva.

(i) Si $k < m$, $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$ es denso en $\mathcal{L}_{-m}^2(j\mathbb{R})$. Si $k \geq 1$, el conjunto de las

funciones \mathcal{R}_0 sin polos en $j\mathbb{R}$, las funciones \mathcal{R}_0^+ y las funciones \mathcal{R}_0^- son densas en $\mathcal{L}_{-k}^2(j\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_+^{2,-k}$ y $\mathcal{H}_-^{2,-k}$, respectivamente. \square

Demostración Ver Silveira *et al*, [39].

C.4.8. Teorema 8

Sea verificada la Consideración 3 y suponiendo que \check{K} no pertenece a $\Omega \cap \Theta$ (de otra forma la solución sería \check{K}). Entonces la secuencia $\{\hat{K}_n\}$ generada por el método de Galerkin converge debilmente en $\mathcal{H}_+^{2,-1}$ para la única solución óptima \hat{K} del problema de control óptimo (4.59). \square

Demostración Ver Silveira *et al*, [39].

C.4.9. Teorema 9

Sea verificada la Consideración 4 y suponiendo que \check{K} no pertenece a $\Omega \cap \Theta$. Entonces las secuencias $\{\hat{K}_n\}$ y $\{\hat{G}_n\}$ obtenidas resolviendo (4.65) y (4.66) para todo $n \in \mathbb{N}$, convergen fuertemente en $\mathcal{H}_+^{2,-k}$ para las soluciones óptimas de (4.62) y (4.63), respectivamente. Aún más, la secuencia \hat{K}_n converge para la solución óptima \hat{K} de los problemas (4.60) y (4.62) también en la topología fuerte de $\mathcal{H}_+^{2,-1}$. \square

Demostración Ver Silveira *et al*, [39].

Apéndice D

LEYES DE ESCALAMIENTO

El objetivo de este apéndice es proveer un puente entre los dominios dimensionales y adimensionales desde el punto de vista del diseño de control.

Un controlador es diseñado para el sistema adimensional descrito por (2.14-2.16) es adimensional. Este controlador adimensional controlará igualmente bien todos los sistemas (de vigas simplemente apoyadas) que posean el mismo valor para el grupo adimensional $\Pi^{-1} = S$. Para poder aplicar este controlador adimensional a una viga simplemente apoyada particular, se debe determinar una ley de escalamiento que redimensionalice el controlador¹.

Las siguientes relaciones de escalamiento existen entre los dominios dimensionales $(\cdot)_d$ y adimensionales $(\cdot)_{ad}$:

$$\begin{aligned}\tau_{ad} &= \Omega\tau_d, \\ W_{ad} &= \frac{1}{L}W_d, \\ U_{ad}(\Omega t) &= \frac{L}{\Omega^2 I_b}U_d(t),\end{aligned}\tag{D.1}$$

donde τ , W y U son las especificaciones de tiempo, posición y esfuerzo de control, respectivamente. Nótese que el esfuerzo de control adimensional resulta de escalonar la magnitud del esfuerzo de control dimensional y luego comprimirlo o

¹Debe notarse que el desarrollo del presente apéndice está restringido a controladores lineales.

dilatarlo en el tiempo. Las cantidades que representan las variables adimensionales serán indicadas por la terminología unidades de tiempo, unidades de longitud y unidades de fuerza para las especificaciones de tiempo, posición y esfuerzo de control, respectivamente.

D.1. Controlador

Una vez que la viga flexible ha sido adimensionalizada, un controlador adimensional puede ser diseñado para cumplir con las especificaciones de desempeño y estabilidad. Sea $\hat{C}(\hat{s})$ la función de transferencia de un controlador adimensional tal que:

$$\hat{C}(\hat{s}) = \hat{K} \frac{\prod_{i=1}^n (\hat{s} + \hat{z}_i)}{\prod_{j=1}^m (\hat{s} + \hat{p}_j)}, \quad (\text{D.2})$$

donde \hat{z}_i y \hat{p}_j representan los ceros y polos del controlador adimensional respectivamente, y \hat{K} es la ganancia del controlador adimensional. La variable de frecuencia de Laplace adimensional es denotada por \hat{s} .

La función de transferencia del controlador es redimensionalizada mediante el escalamiento de los ceros y de los polos de $\hat{C}(\hat{s})$. Esto se logra escalando la variable de frecuencia:

$$\hat{s} = \frac{s}{\Omega}. \quad (\text{D.3})$$

Sustituyendo (D.3) en (D.2) resulta:

$$\hat{C}\left(\frac{s}{\Omega}\right) = \hat{K} \Omega^{(m-n)} \frac{\prod_{i=1}^n (s + \Omega \hat{z}_i)}{\prod_{j=1}^m (s + \Omega \hat{p}_j)}. \quad (\text{D.4})$$

Nótese que (D.4) es todavía adimensional. Para poder tener esta función

de transferencia con las unidades correctas (entrada: unidades de posición m, salida: unidades de fuerza N), luego la ganancia adimensional también debe ser escalonada. Se sabe que la función de transferencia \hat{C} es una relación de la fuerza de control a la posición, la ganancia \hat{K} es escalonada multiplicando el numerador por $\frac{\Omega^2 I_b}{L}$ y el denominador por L . haciendo estas sustituciones en (D.4), se obtiene el controlador dimensional $C(s)$.

$$C(s) = \hat{C}\left(\frac{s}{\Omega}\right) = \hat{K} \frac{\Omega^2 I_b}{L^2} \Omega^{(m-n)} \frac{\prod_{i=1}^n (s + \Omega \hat{z}_i)}{\prod_{j=1}^m (s + \Omega \hat{p}_j)},$$

$$C(s) = K \frac{\prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^m (s + p_j)}, \quad (\text{D.5})$$

donde se tienen las siguientes leyes de escalamiento para los ceros (z_i), polos (p_j) y ganancia (K) dimensional:

$$z_i = \Omega \hat{z}_i, \quad (\text{D.6})$$

$$p_j = \Omega \hat{p}_j, \quad (\text{D.7})$$

$$K = \frac{\Omega^{(m-n+2)} I_b}{L^2} \hat{K}. \quad (\text{D.8})$$

Apéndice E

ALGORITMOS PARA EL PROBLEMA DE CONTROL $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

En esta sección son presentados procedimientos computacionales para determinar realizaciones en la forma de espacio de estados de los controladores que resultan del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

E.1. Cálculos previos

Las siguientes operaciones son las más usadas en el cálculo de aproximaciones de los controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ¹. Las deducciones de cálculo pueden ser encontradas en Francis, [16], Zhou et al, [49] o en Ades, [2]. Cuando se usan los comandos del MATLAB, estos se mencionan. Cuando no hay referencia alguna se entiende que los algoritmos fueron implementados.

E.1.1. Inversa

$$[A, B, C, D]^{-1} = [A - BD^{-1}C, BD^{-1}, -D^{-1}C, D^{-1}].$$

¹Se recuerda que sólo es posible calcular aproximaciones del controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ y es que fue demostrado que la solución del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ es de orden infinito.

E.1.2. Conjugada compleja

$$[A, B, C, D]^{\sim} = [-A^T, -C^T, B^T, D^T].$$

E.1.3. Cambio de base

$$[A, B, C, D] = [T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D].$$

E.1.4. Multiplicación (conexión en serie)

$$[A_1, B_1, C_1, D_1] \times [A_2, B_2, C_2, D_2]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1D_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & D_1C_2 \end{bmatrix}, D_1D_2 \right],$$

$$= \left[\begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ B_1C_2 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1D_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_1C_2 & C_1 \end{bmatrix}, D_1D_2 \right].$$

El comando *series* realiza esta operación en el MATLAB.

E.1.5. Suma (conexión en paralelo)

$$[A_1, B_1, C_1, D_1] + [A_2, B_2, C_2, D_2] = \left[\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D_1 + D_2 \right].$$

El comando *parallel* realiza esta operación en el MATLAB.

E.1.6. Producto interno

$$\langle [A_1, B_1, C_1, D_1], [A_2, B_2, C_2, D_2] \rangle_2 = C_1MC_2^T,$$

donde M satisface la ecuación de Lyapunov $A_1M + MA_2^T + B_1B_2^T = 0$. La solución de la ecuación de Lyapunov es calculada con el comando *lyap* del MATLAB.

E.1.7. Introducción de un cero

$$[A_1, B_1, C_1, D_1] \times (s + \alpha) = [A_1, A_1B_1 + \alpha B_1, C_1, C_1^T B_1].$$

E.1.8. Representación factorización coprime

Sean $[A, B, C, D] = G = ND^{-1} = \tilde{D}^{-1}\tilde{N}$ factorizaciones coprimas a la derecha e izquierda respectivamente. Por la identidad de Bezout generalizada existen X, Y, \tilde{X} , y \tilde{Y} [44], tales que:

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\tilde{N} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & -\tilde{X} \\ N & \tilde{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -\tilde{X} \\ N & \tilde{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ -\tilde{N} & \tilde{D} \end{bmatrix}.$$

Para calcular las factorizaciones coprimas de G se escogen dos matrices reales F y H tales que $A + BF$ y $A + HC$ sean estables (todos sus autovalores con parte real negativa). En el MATLAB se cuenta con los comandos *place* o *acker* para el cálculo de las matrices F y H . Las 8 matrices que cumplen con la Identidad de Bezout se obtienen usando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} D(s) &= [A + BF, B, F, I], \\ N(s) &= [A + BF, B, C + DF, D], \\ \tilde{D}(s) &= [A + HC, H, C, I], \\ \tilde{N}(s) &= [A + HC, B + HD, C, D], \\ X(s) &= [A + HC, H, F, 0], \\ Y(s) &= [A + HC, -B - HD, F, I], \\ \tilde{X}(s) &= [A + BF, H, F, 0], \\ \tilde{Y}(s) &= [A + BF, -H, C + DF, I]. \end{aligned}$$

E.1.9. Factorización espectral

La factorización de $G = G_e \tilde{G}_e$ es denominada factorización espectral. Para su cálculo, se siguen los siguientes pasos:

1. Se factoriza $G = D + G_o + G_o \tilde{}$. Para esto se usa el comando *stabproj* del MATLAB. Se obtiene $G_o = [A_o, B_o, C_o, 0]$.
2. Se calculan $A = A_o - B_o D^{-1} C_o$, $R = B_o D^{-1} B_o^T$ y $Q = -C_o D^{-1} C_o^T$.
3. Se calcula X que satisface la ecuación de Ricatti $A^T X + X A - X R X + Q = 0$. La solución de la ecuación de Ricatti es calculada con el comando *aresolv* del MATLAB.
4. Se obtiene $G_e = [A_o, B_o, D^{-\frac{1}{2}}(C_o + B_o^T X), D^{\frac{1}{2}}]$.

E.1.10. Factorización inner-outer

La factorización de $G = G_i G_o$ se denomina factorización inner-outer, siendo que $G_i \tilde{G}_i = 1$ es el factor inner y $G_o, G_o^{-1} \in S$ es el factor outer. Para el cálculo de estos factores, se siguen los siguientes pasos:

1. Se calcula la factorización espectral de G , $G = G_o \tilde{G}_o$. Ver (E.1.9).
2. G_i es calculada de $G_i = G G_o^{-1}$.

E.1.11. Norma \mathcal{H}_2

Se considera la representación en función de transferencia $G = [A, B, C, 0]$, siendo A estable. Así:

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(B^T L_o B) = \text{tr}(C L_c C^T)$$

donde L_c y L_o son los gramianos de controlabilidad y observabilidad, obtenidos por la resolución de las siguientes ecuaciones de Lyapunov:

$$\begin{aligned} AL_c + L_c A^T + BB^T &= 0, \\ A^T L_o + L_o A + C^T C &= 0. \end{aligned}$$

En el MATLAB, la norma \mathcal{H}^2 es calculada por el comando *normh2*.

E.1.12. Norma de Hankel

La norma de Hankel es, por definición, el mayor valor singular de Hankel, esto es:

$$\|G(s)\|_H = \sqrt{\lambda_{\max}(L_c L_o)}.$$

Los valores singulares de Hankel σ_i^H del sistema $G = [A, B, C, 0]$ con A estable son definidos por Zhou (1996) como:

$$\sigma_i^H(G(s)) = \sqrt{\lambda_i(L_c L_o)},$$

siendo que L_c y L_o son los gramianos de controlabilidad y observabilidad.

De acuerdo con Samblancat (1991), es posible determinar un limitante inferior γ_{\min} y otro superior γ_{\max} para $\|G(s)\|_\infty$ por medio de (E.1) y (E.2), respectivamente;

$$\gamma_{\min} = \max\{\bar{\sigma}, \|G(s)\|_H\} \leq \|G(s)\|_\infty, \quad (\text{E.1})$$

$$\gamma_{\max} = \bar{\sigma} + 2(\sigma_1^H + \sigma_2^H + \dots + \sigma_N^H) \geq \|G(s)\|_\infty. \quad (\text{E.2})$$

E.1.13. Norma \mathcal{H}_∞

Se considera la representación función de transferencia $G = [A, B, C, D]$, donde $G(s) \in \mathcal{RL}^\infty$. Entonces $\|G\|_\infty < \gamma$ si y sólo si $\bar{\sigma} < \gamma$ y H no tiene autovalores en el eje imaginario, siendo que:

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}, \quad (\text{E.3})$$

y $R = \gamma^2 I - D^T D$.

Con esta idea está implementado en el MATLAB un algoritmo denominado de bisección que calcula la norma \mathcal{H}_∞ , el nombre del comando es *normhinf*. Para un mejor entendimiento de este algoritmo se presenta un flujograma, ver Fig. E.1.

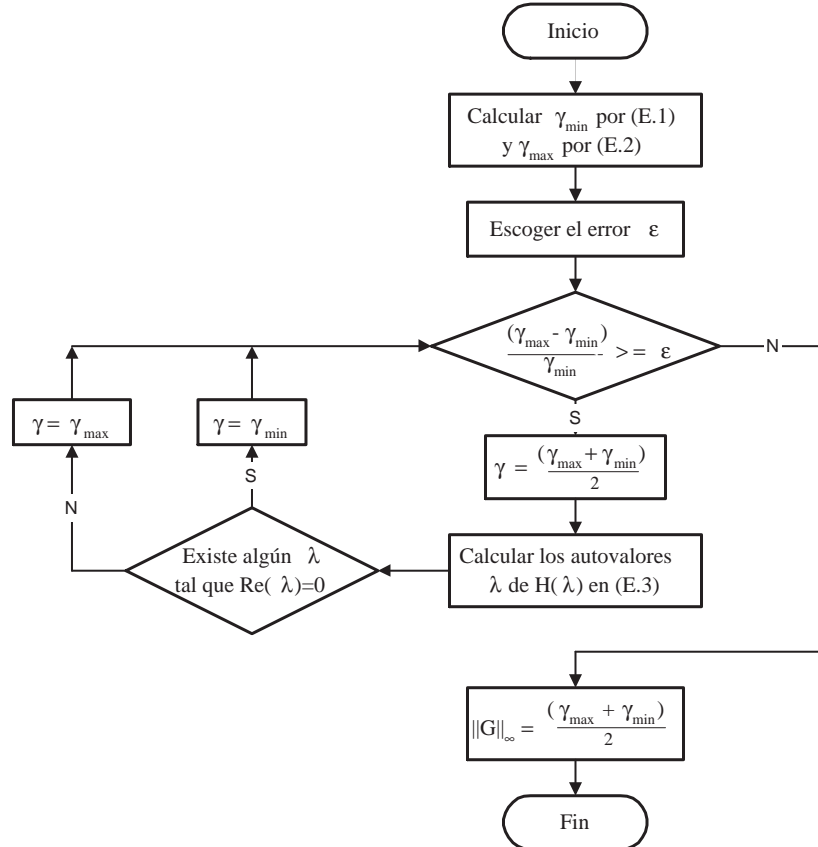


Figura E.1: Cálculo de la norma \mathcal{H}_∞

E.1.14. Reducción del orden de modelos

La reducción de modelos fue muy importante en el cancelamiento de polos y ceros, sin la reducción de modelos la implementación numérica se torna imposible. La técnica de reducción de modelos usada fue la de truncamiento balanceado (ver Zhou *et al*, [49]).

E.2. Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Según la formulación del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ previamente descrito, el controlador correspondiente es aquel que resulta de:

$$\begin{aligned} \min_{K(s) \in \mathcal{RH}_+^\infty} \quad & J_2(K(s)) \\ \text{sujeto a} \quad & J_\infty(K(s)) \leq \gamma. \end{aligned}$$

El funcional J_2 es presentado como en la expresión (4.50) y reescrito a seguir sólo en función de K_2 ya que la señal de referencia a rastrear por el control es cero ($R = 0$) y por tanto $K_1 = 0$. Como el cálculo del parámetro libre se limita al cálculo de K_2 , simplemente se considerará K , entonces:

$$J_2(K) = \|b_+ - \Phi K\|_2^2 + J_{2F},$$

con $J_{2F} = J_2(0) + \|b_+\|_2^2$.

El funcional J_∞ esta dado por la expresión (4.58) y también es reescrito a seguir:

$$J_\infty(K) = \|\tilde{W}D_2(X - KD_2)\|_\infty = \|\tilde{W}\tau_{uv}\|_\infty.$$

Sólo es posible calcular una aproximación de la solución del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Los pasos a seguir en la construcción del problema de control

$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, se presentan en la Fig. E.2.

Primero se sustituye la desigualdad por la igualdad, ya que fue demostrado por Corrêa, [12], que la solución pertenece a la cáscara convexa de la restricción \mathcal{H}_∞ , entonces el problema de control óptimo robusto queda como sigue:

$$\begin{aligned} \text{mín}_{K(s) \in \mathcal{RH}_+^\infty} \quad & J_2(K(s)) \\ \text{sujeto a} \quad & J_\infty(K(s)) = \gamma. \end{aligned}$$

A continuación se puede hacer una reparametrización, esta reparametrización puede no ser necesaria, del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ en términos de un nuevo parámetro K_N a ser definido. Para el cálculo de la aproximación de la solución del problema de optimización se pueden considerar dos abordajes: expansión en base pre establecida y expansión en base optimizada (ver Sec.4.3.5). El problema de control resultante es resuelto, desde el punto de vista de optimización, usando un algoritmo de optimización del MATLAB denominado *fmincon*.

En términos de optimización, el problema de interés en este trabajo se sitúa en la clase de programación no lineal, esto es:

$$\begin{aligned} \text{mín}_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{sujeto a} \quad & G_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_e \\ & G_i(x) \leq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m \\ & x_i \leq x \leq x_s \quad , \end{aligned}$$

siendo x el vector de variables de diseño, $f(x)$ la función objetivo ($f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) y $G(x)$ una función vectorial que provee los valores de las restricciones evaluadas en x ($G(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$). El problema de optimización debe ser resuelto determinando los valores del vector x por la minimización de la función $f(x)$, cumpliendo con las restricciones en $G_i(x)$ y x .

En una optimización con restricciones, el primer paso es transformar el problema en otro subproblema que pueda ser resuelto en base a un proceso iterativo. Para esto, el *fmincon* usa las ecuaciones de Kuhn-Tucker (KT) y el subproblema encontrado resulta:

$$\begin{aligned}\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla G_i(x) &= 0 \\ \lambda_i \nabla G_i(x) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_e \\ \lambda_i &\geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m.\end{aligned}$$

En la primera ecuación se hace uso de multiplicadores de Lagrange λ_i , $i = 1, \dots, m$ para balancear las diferencias entre los valores de la función objetivo y los gradientes de las restricciones. Las otras dos ecuaciones cancelan implícitamente las restricciones no activas haciendo sus correspondientes multiplicadores de Lagrange igual a cero.

El *fmincon* intenta computar directamente los multiplicadores de Lagrange. Un método de optimización numérica casi Newton hace uso del gradiente de la nueva función a ser minimizada y calcula las direcciones de búsqueda. Determinada una dirección, un procedimiento de búsqueda unidimensional permite alcanzar un mínimo en la dirección proporcionada, (Coleman, [10]).

E.2.1. Reparametrización

Considerando el funcional relacionado a la restricción de robustez:

$$J_\infty(K) = \|\tilde{W}\tau_{uv}\|_\infty = \|\tilde{W}D_{yu}(X - KD_{yu})\|_\infty = \|CK + D\|_\infty,$$

se calcula la factorización inner-outer de C , $C = C_i C_o$:

$$J_\infty(K) = \|C_i C_o K + D\|_\infty = \sup_{K \in \mathcal{RH}_+^\infty} |C_i C_o K + D|,$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{K \in \mathcal{RH}_+^\infty} |C_i [C_o K + C_i^{-1} D]| = \sup_{K \in \mathcal{RH}_+^\infty} |C_i| |C_o K + C_i^{-1} D|, \\
&= \sup_{K \in \mathcal{RH}_+^\infty} |C_o K + C_i^{-1} D| = \|C_o K + C_i^{-1} D\|_\infty.
\end{aligned}$$

La segunda parcela dentro de la norma \mathcal{H}_∞ puede ser descompuesta de la siguiente forma:

$$C_i^{-1} D = C_i^{-1} D(\infty) + [C_i^{-1} D]_+ + [C_i^{-1} D]_-.$$

Haciendo:

$$K_N = C_o K + C_i^{-1} D(\infty) + [C_i^{-1} D]_+, \quad (\text{E.4})$$

y sustituyendo en el funcional J_∞ , se obtiene:

$$J_\infty = \|K_N + [C_i^{-1} D]_-\|_\infty.$$

Sea: $F_o = -[C_i^{-1} D]_- \in \mathcal{RH}_-^2$. Entonces, el funcional J_∞ queda en función de K_N :

$$J_\infty(K_N) = \|K_N - F_o\|_\infty. \quad (\text{E.5})$$

En lo que se refiere a la función de costo $J_2(K)$, ésta también debe ser reparametrizada en función de K_N . De (E.4) el parámetro K en función de K_N es como sigue:

$$K = C_o^{-1} \{K_N - (C_i^{-1} D(\infty) + [C_i^{-1} D]_+)\}. \quad (\text{E.6})$$

Aplicando (E.6) en (4.56), mediante operaciones algebraicas se llega a:

$$J_2(K_N) = \|b_+^N - \Phi_N K_N\|_2^2 + J_{2F}, \quad (\text{E.7})$$

siendo que $b_+^N = b_+ + \Phi C_o^{-1} (C_i^{-1} D(\infty) + [C_i^{-1} D]_+)$ y $\Phi_N = \Phi C_o^{-1}$.

Finalmente el problema de control óptimo robusto queda definido por:

$$\begin{aligned} & \text{mín}_{K_N(s) \in \mathcal{RH}_+^\infty} J_2(K_N(s)) \\ & \text{sujeto a } J_\infty(K_N(s)) = \gamma, \end{aligned}$$

con J_2 y J_∞ dados por (E.7) y (E.5) respectivamente.

A partir de este punto se usará K para representar tanto el parámetro libre K del problema original como para representar el parámetro K_N del problema reparametrizado. Los funcionales J_2 y J_∞ son calculados según corresponda, como descrito a continuación:

$$J_2 = \|A + BK\|_2^2 + J_{2F}, \quad (\text{E.8})$$

$$J_\infty = \|CK + D\|_\infty. \quad (\text{E.9})$$

E.2.2. Aproximación por expansión en base pre-establecida (EBPE)

En el método de aproximación por expansión en base pre-establecida, se designa un número finito de vectores base para el espacio solución (dimensión) y se ajustan los coeficientes de tal forma que se minimice la función objetivo atendiendo la restricción impuesta. Fue demostrado por Ades [2], que el problema resultante de programación no lineal es convexo, haciendose posible garantizar la obtención de la solución mínima global del problema enfrentado.

Por este método se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{mín}_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n} J_2(\underline{\alpha}) \\ & \text{sujeto a } J_\infty(\underline{\alpha}) = \gamma, \end{aligned}$$

siendo que el vector de coeficientes $\underline{\alpha}$ y el parámetro $K(s)$ son dados respectivamente por:

$$\underline{\alpha}^T = \left[\alpha_o \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{n-1} \right],$$

$$K = \alpha_o L_o(s) + \alpha_1 L_1(s) + \alpha_2 L_2(s) + \dots + \alpha_{n-1} L_{n-1}(s), \quad (\text{E.10})$$

con $\{L_m, m = 0, 1, \dots, n-1\}$ siendo las funciones de Laguerre más la constante 1. Esta selección genera los conjuntos redundantes definidos en (4.67). Sustituyendo el parámetro $K(s)$ de (E.10) en (E.8) y (E.7), se obtiene:

$$J_2(\underline{\alpha}) = \|A\|_2^2 + J_{2F} + 2 \left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \langle A, BL_i \rangle_2 \right] + \|B \sum_{i=0}^{n-1} 2\alpha_i L_i\|_2^2, \quad (\text{E.11})$$

$$J_\infty(\underline{\alpha}) = \|C \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L_i + D\|_\infty. \quad (\text{E.12})$$

La demostración de la convexidad de los funcionales $J_2(\underline{\alpha})$ y $J_\infty(\underline{\alpha})$ está dada en Ades [2].

E.2.3. Aproximación por expansión en base optimizada (EBO)

En la aproximación por expansión en base optimizada se escoge solamente un número finito de términos para componer una base truncada del espacio solución. La base truncada es construida y ajustada para aproximar la solución óptima del problema de control óptimo robusto. El problema de programación no lineal resultante es no convexo y de este modo se pierden las garantías de obtención de la solución mínima global del problema aproximante. La ventaja se encuentra en la posibilidad de generar soluciones aproximantes del problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ con ordenes bastante inferiores a aquellas obtenidas en la EBPE.

Por el método de expansión en base optimizada se resuelve el siguiente

problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n+1}} \quad & J_2(\underline{\theta}) \\ \text{sujeto a} \quad & J_\infty(\underline{\theta}) = \gamma, \end{aligned}$$

siendo que n es el orden de la solución y $\underline{\theta}$ es el vector de parámetros de diseño. En este caso el parámetro K es calculado a partir de la base definida en (4.68) y resulta:

$$K = \frac{\alpha_1 s^n + \alpha_2 s^{n-1} + \dots + \alpha_n s + \alpha_{n+1}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}, \quad (\text{E.13})$$

$$\text{con: } \underline{\theta}^T = \left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{n+1} \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n \right] \in \mathbb{R}^{2n+1}..$$

En este caso la implementación numérica requiere cuidado, pues los polos de la solución $K(s)$ son libres y deberán estar ubicados en el semiplano complejo \mathbb{C}_+^0 , además, se deben evitar polos tendiendo a $-\infty$ o a cero. La demostración de la convexidad y de la no convexidad de los funcionales $J_2(\underline{\theta})$ y $J_\infty(\underline{\theta})$ en relación a los parámetros α_i y β_i , respectivamente, está dada en Ades, [2].

E.2.4. Gradientes y subgradientes

La utilización de gradientes y subgradientes es de vital importancia en el algoritmo de optimización. Los gradientes y subgradientes varían según el método a usarse.

Gradiente EBPE

Para el cálculo del gradiente de $J_2(\underline{\alpha})$ se parte de (E.11):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_0} &= 2\langle BL_0, A + BK \rangle_2, \\
\frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_1} &= 2\langle BL_1, A + BK \rangle_2, \\
&\vdots \\
\frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_n} &= 2\langle BL_n, A + BK \rangle_2,
\end{aligned}$$

y por tanto:

$$\nabla J_2(\underline{\alpha})^T = \left[\frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_0} \quad \frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_1} \quad \dots \quad \frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_n} \right]. \quad (\text{E.14})$$

Subgradiente EBPE

Para el funcional $J_\infty(\underline{\alpha})$ de (E.14), es posible calcular el subgradiente de acuerdo con lo desarrollado a seguir. Sea $G(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ una función de transferencia y considerando ω_o la frecuencia en la que ocurre el máximo de la función módulo de $G(j\omega)$, se obtiene:

$$\Theta_o = \|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathcal{R}} |G(j\omega)| = \sqrt{G^*(s)G(s)} \Big|_{s=j\omega_o} = H(s) \Big|_{s=j\omega_o}. \quad (\text{E.15})$$

Sea $h(s) = G^*(s)G(s)$ y por tanto, por (E.15):

$$H(s) = \sqrt{h(s)}. \quad (\text{E.16})$$

Se adopta que:

$$G(s) = C(s)K(s) + D(s) = C(s) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L_i(s) + D(s), \quad (\text{E.17})$$

donde $G(s)$ es función del vector de parámetros de diseño $\underline{\alpha}$. De (E.16):

$$\frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2\sqrt{h(s)}} \frac{\partial h(s)}{\partial \alpha_i}. \quad (\text{E.18})$$

De (E.17), se calcula $h(s)$:

$$h(s) = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L_i \tilde{\sim}(s) C^{\sim}(s) \right] \left[C(s) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L_i(s) \right] + \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L_i \tilde{\sim}(s) C^{\sim}(s) \right] D(s) + D^{\sim}(s) \left[C(s) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L_i(s) \right] \right) + D^{\sim}(s) D(s). \quad (\text{E.19})$$

Derivando parcialmente (E.19) en relación a α_i y utilizando (E.13):

$$\left. \frac{\partial h(s)}{\partial \alpha_i} \right|_{s=j\omega_o} = 2 \operatorname{Re} (L_i(j\omega_o) [K^*(j\omega_o) C^*(j\omega_o) + D^*(j\omega_o)]). \quad (\text{E.20})$$

Finalmente, sustituyendo (E.20) en (E.18) con $s = j\omega_o$:

$$\left. \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_i} \right|_{s=j\omega_o} = \frac{\operatorname{Re} (L_i(j\omega_o) [K^*(j\omega_o) C^*(j\omega_o) + D^*(j\omega_o)])}{\Theta_o}. \quad (\text{E.21})$$

Es posible entonces calcular una dirección $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\xi^T = \left[\left. \begin{array}{cccc} \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_o} & \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_{n-1}} \end{array} \right|_{s=j\omega_o} \right]. \quad (\text{E.22})$$

La dirección $\xi \in \mathbb{R}$ es un subgradiente de $J_\infty(\underline{\alpha})$, esto fue demostrado en Ades [2]. Este subgradiente llenará el hueco dejado por la ausencia del gradiente de $J_\infty(\underline{\alpha})$, viabilizando la utilización del método de optimización.

Gradiente EBO

Para el cálculo del gradiente de $J_2(K(\underline{\theta})) = J_2(\underline{\theta})$ se parte de (E.8) y con la respectiva sustitución de $K(s) = K(\underline{\theta})$ de (E.13), se obtiene:

$$J_2(\underline{\theta}) = \|A(s)\|_2^2 + 2\langle A(s), B(s)K(s) \rangle + \|B(s)K(s)\|_2^2 + J_{2F}. \quad (\text{E.23})$$

Derivando parcialmente en relación a los coeficientes del numerador de $K(s)$ se llega a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_1} &= 2\langle A(s) + B(s)K(s), B(s)\frac{s^n}{P(s)} \rangle_2, \\ \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_2} &= 2\langle A(s) + B(s)K(s), B(s)\frac{s^{n-1}}{P(s)} \rangle_2, \\ &\vdots \\ \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_{n+1}} &= 2\langle A(s) + B(s)K(s), B(s)\frac{1}{P(s)} \rangle_2.\end{aligned}$$

En relación a los coeficientes del denominador de $K(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_1} &= -2\langle A(s) + B(s)K(s), B(s)K(s)\frac{s^{n-1}}{P(s)} \rangle_2, \\ \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_2} &= -2\langle A(s) + B(s)K(s), B(s)K(s)\frac{s^{n-2}}{P(s)} \rangle_2, \\ &\vdots \\ \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_n} &= -2\langle A(s) + B(s)K(s), B(s)K(s)\frac{1}{P(s)} \rangle_2.\end{aligned}$$

Luego, el gradiente de $J_2(\underline{\theta})$ puede ser calculado por:

$$\nabla J_2(\underline{\theta})^T = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_n} \end{array} \right]. \quad (\text{E.24})$$

Subgradiente EBO

En cuanto al funcional $J_\infty(\underline{\theta})$, se calcula un subgradiente de la misma forma como realizado para el EBPE. Por tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(j\omega_o)}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\Theta} \text{Re} \left([K^*(j\omega_o)C^*(j\omega_o) + D^*(j\omega_o)] \frac{(j\omega)^n}{P(j\omega_o)} \right), \\ \frac{\partial H(j\omega_o)}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\Theta} \text{Re} \left([K^*(j\omega_o)C^*(j\omega_o) + D^*(j\omega_o)] \frac{(j\omega)^{n-1}}{P(j\omega_o)} \right), \\ &\vdots \\ \frac{\partial H(j\omega_o)}{\partial \alpha_{n+1}} &= \frac{1}{\Theta} \text{Re} \left([K^*(j\omega_o)C^*(j\omega_o) + D^*(j\omega_o)] \frac{1}{P(j\omega_o)} \right).\end{aligned}$$

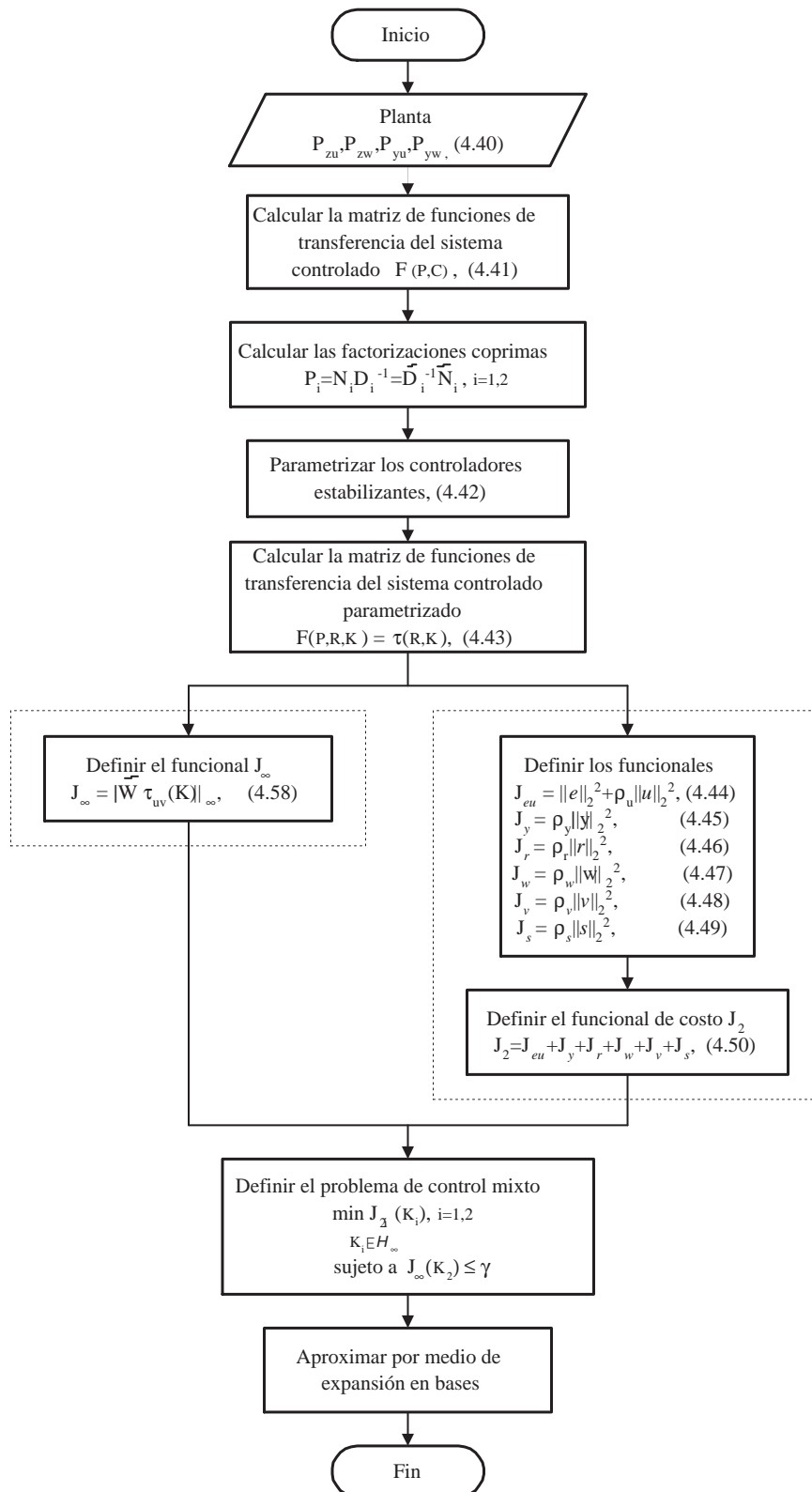
En relación a los parámetros β_i se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(j\omega_o)}{\partial \beta_1} &= -\frac{1}{\Theta} \operatorname{Re} \left([K^*(j\omega_o)C^*(j\omega_o) + D^*(j\omega_o)] K(j\omega_o) \frac{(j\omega)^{n-1}}{P(j\omega_o)} \right), \\ \frac{\partial H(j\omega_o)}{\partial \beta_2} &= -\frac{1}{\Theta} \operatorname{Re} \left([K^*(j\omega_o)C^*(j\omega_o) + D^*(j\omega_o)] K(j\omega_o) \frac{(j\omega)^{n-2}}{P(j\omega_o)} \right), \\ &\quad \vdots \\ \frac{\partial H(j\omega_o)}{\partial \beta_n} &= -\frac{1}{\Theta} \operatorname{Re} \left([K^*(j\omega_o)C^*(j\omega_o) + D^*(j\omega_o)] K(j\omega_o) \frac{1}{P(j\omega_o)} \right). \end{aligned}$$

La dirección $\xi \in \mathbb{R}^{2n+1}$ a seguir es un subgradiente de $J_\infty(\underline{\theta})$:

$$\xi^T = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial H(s)}{\partial \beta_1} & \frac{\partial H(s)}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial H(s)}{\partial \beta_n} \end{array} \right] \Big|_{s=j\omega_o}. \quad (\text{E.25})$$

En las Figs. E.3 y E.4 son presentados flujogramas que permitirán un mejor entendimiento de los pasos a seguir en la implementación de los métodos aproximantes (EBPE y EBO) para la búsqueda de una aproximación de la solución del problema de control mixto.

Figura E.2: Problema de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

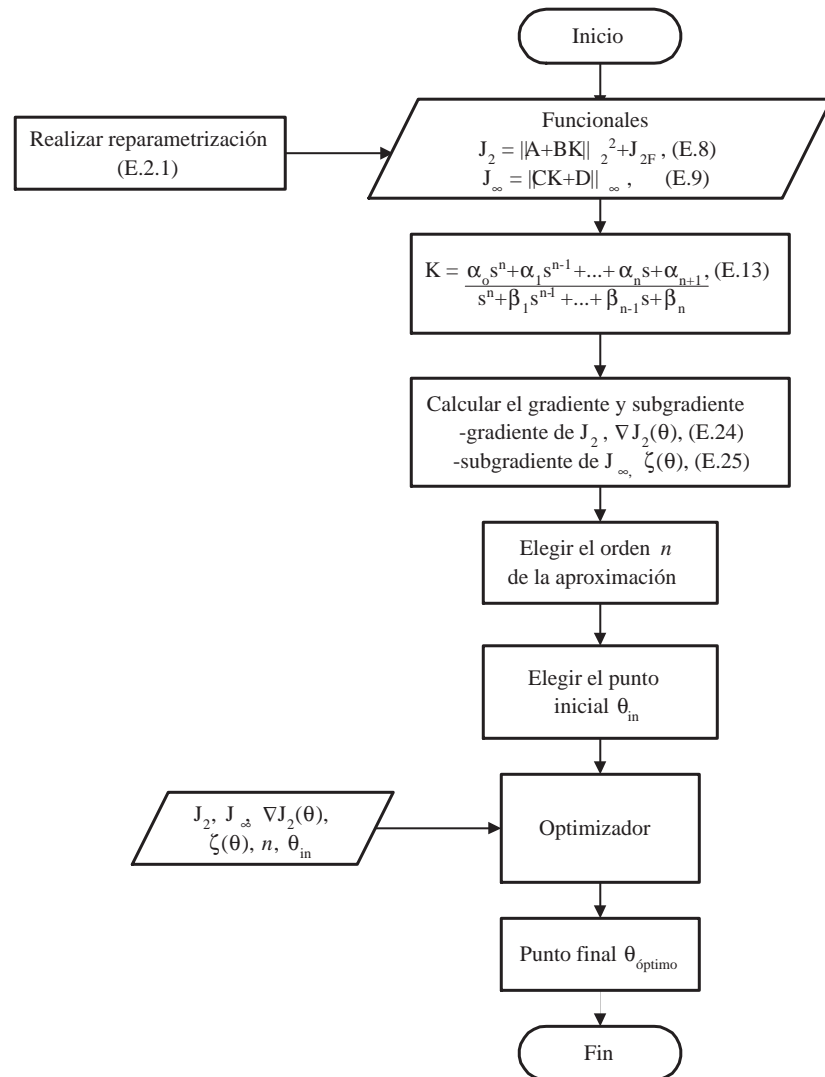


Figura E.3: Aproximación por medio de expansión en base pre-establecida (EB-PE)

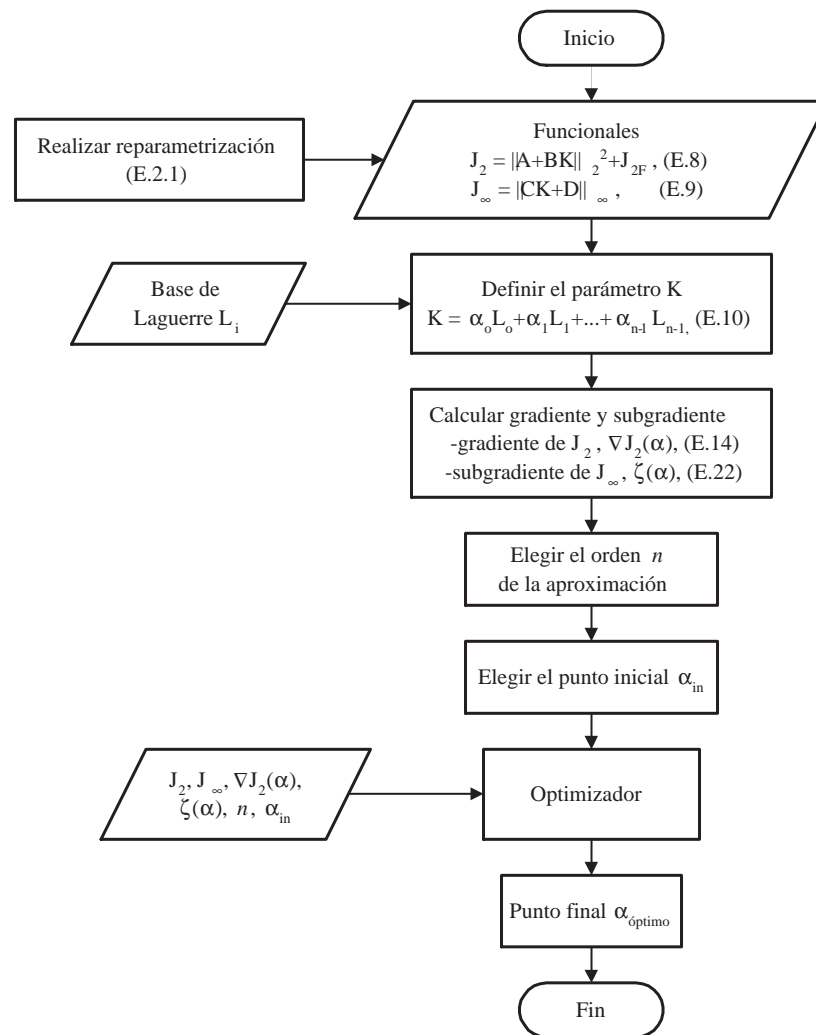


Figura E.4: Aproximación por medio de expansión en base optimizada (EBO)

Apéndice F

CONTROL DE UN SISTEMA DE POSICIONAMIENTO MULTIDIMENSIONAL CON VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Esta parte del Apéndice ha sido anexada con la intención de investigar, via simulación y experimentos, el comportamiento controlado de un sistema de posicionamiento multidimensional (MPS), donde técnicas de control basadas en un modelo del sistema (lead-lag, LQR, LQG, LQG-LTR, \mathcal{H}_∞) han sido aplicadas. El MPS consiste en un sistema levitado magnéticamente, capaz de producir micro y nano posicionamiento en sus seis grados de libertad mediante tres motores lineales con magnetos permanentes. Cada motor genera una fuerza vertical, para suspensión contra la fuerza gravitacional, y una fuerza horizontal, para movimiento en el plano. La adición de un sistema de control se hace indispensable dada la naturaleza inestable del MPS. Así, esta parte del trabajo brinda una atención especial al diseño, análisis, simulación e implementación de las leyes de control que estabilizan el MPS y a su vez garantizan el rastreamiento de señales aún bajo la presencia de incertezas del modelo. Para garantizar el funcionamiento del MPS, aún contando con incertezas en el modelo, el diseño del control incluye limitantes en las variaciones de magnitud correspondientes a los modelos experimentales y los modelos matemáticos. Estos limitantes son derivados usando identificación de sistemas en lazo cerrado. Finalmente, los resultados obtenidos en base a si-

mulaciones numéricas son presentados y evaluados con respecto al desempeño y estabilidad de cada sistema controlado. Adicionalmente, los experimentos realizados indican el éxito en la implementación de los sistemas de control diseñados y permiten la validación del desempeño de los mismos.

F.1. Sistema de posicionamiento multidimensional (MPS)

Un sistema de posicionamiento multidimensional (MPS) fue diseñado y ensamblado en el Laboratorio de Mecatrónica de Texas A&M University para investigación en posicionamiento multidimensional a escalas micro y nano, y para ensayos experimentales de diseños de control y algoritmos de identificación.

Las Figs. F.1 y F.2 proveen mayor detalle del MPS. La Fig. F.1 muestra la fotografía del MPS donde resaltan la parte móvil (placa triangular magnéticamente levitada, aquí denominada platen) y la parte fija (estator). La Fig. F.2 muestra una vista en perspectiva del MPS donde se especifica parte del equipo usado. El principio de funcionamiento del MPS es el de un motor lineal capaz de proveer fuerzas tanto para suspensión como para translación, y así obtener movimiento sin contacto. El MPS consta de el estator y el platen. El estator consiste en un magneto bidimensional con un campo magnético concentrado. El platen cuenta con tres bobinas ubicadas en su parte inferior y es levitado sobre el estator. Estas bobinas forman parte del sistema de actuación. La corriente eléctrica pasa a través de las bobinas y genera fuerzas y torques en el centro de masa del platen debido a la interacción entre las distribución de corriente y la matriz magnética. Kim *et al* [26] presenta una descripción detallada del sistema.



Figura F.1: Fotografía del sistema de posicionamiento multidimensional.

F.2. Modelado del MPS

La suposición más importante en este trabajo es que se pueda obtener un modelo dinámico a partir de principios físicos y ensayos experimentales. Cabe destacar que ese modelo debe ser lo suficientemente descriptivo para propósitos de control. Suponiendo la existencia de tal modelo, a continuación se procede con el modelado del MPS.

Un sistema coordenado ortogonal móvil $x'y'z'$ es usado para definir el movimiento del platen con respecto a un sistema de referencia inercial (estator). El sistema coordenado móvil inicialmente coincide con el sistema coordenado ortogonal fijo xyz . El platen es modelado como un cuerpo rígido y tiene seis grados de libertad $(x, y, \phi, \psi, \theta, z)$. Tres cojinetes aerostáticos fueron usados para suspensión del platen con la finalidad de evitar problemas térmicos. Estos cojinetes fueron modelados como tres resortes lineales.

La aceleración traslacional del platen, $\dot{\vec{v}}$, en coordenadas inerciales o fijas, se puede escribir como:

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{1}{m} \left[\underline{K}_t \vec{x} + \vec{g} - \underline{C}^T \vec{f} \right], \quad (\text{F.1})$$

donde m es la masa del platen, $\underline{K}_t = \text{diag}([0, 0, k_z])$ es la matriz de constantes

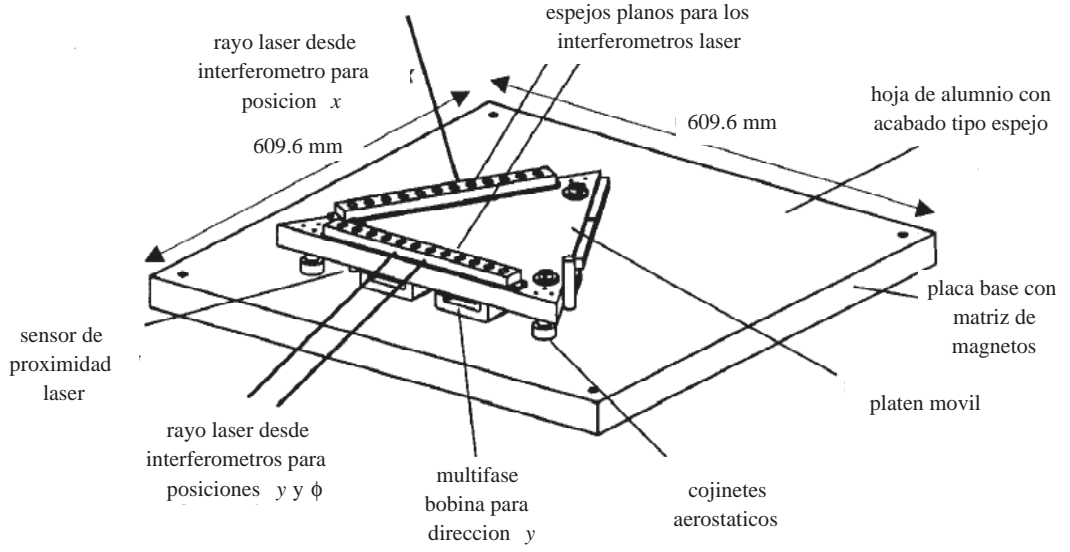


Figura F.2: Vista en perspectiva. La placa base está cubierta por una lámina de aluminio con acabado de tipo espejo, ver fotografía. La matriz de magnetos está localizada debajo de la lámina de aluminio.

del resorte lineal, $\vec{x} = [x, y, z]^T$ es el vector de posición lineal del centroide del platen, \vec{v} es el vector de velocidad lineal del centroide del platen, $\vec{g} = [0, 0, g]$ con g siendo la aceleración de la gravedad, \underline{C} es la matriz de transformación del sistema coordenado inercial al sistema coordenado móvil y \vec{f} es el vector de fuerzas magnéticas. Las fuerzas magnéticas \vec{f}_j , $j=[1,2,3]$ (correspondientes a cada bobina) dependen de la posición lineal del centroide del platen y de la corriente aplicada a las bobinas. Ver Fig. F.3 para mayor detalle sobre la orientación de las fuerzas de cada motor lineal.

La aceleración angular del platen, $\dot{\vec{\omega}}$, en coordenadas móviles, se puede escribir como:

$$\dot{\vec{\omega}} = -\underline{I}^i \left[\underline{K}_r \vec{\beta} + \vec{\omega} \times \underline{I} \cdot \vec{\omega} - \vec{\tau} \right], \quad (\text{F.2})$$

donde $\vec{\beta} = [\psi, \theta, \phi]^T$ denota la posición rotacional del centroide del platen, $\vec{\omega}$ es el vector de velocidades angulares del centroide del platen, \underline{I}^i denota la inversa del tensor de inercia \underline{I} , $\underline{K}_r = \text{diag}([k_\psi, k_\theta, 0])$ es la matriz de constantes del resorte rotacional y $\vec{\tau} = \sum_{j=1}^3 \vec{r}_j \times \vec{f}_j$ es el vector de torques de la entrada de control

producida por las fuerzas magnéticas, donde \vec{r}_j , $j = [1, 2, 3]$, denota la posición del centroide de cada bobina con respecto a la posición del centroide del platen.

Las fuerzas magnéticas, definidas en términos de las corrientes directas y de cuadratura i_d y i_q respectivamente, son como sigue:

$$\begin{bmatrix} f_{ji} \\ f_{jz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mu_o M_o \eta_o N_m G e^{-\gamma_1 z} \begin{bmatrix} i_{qj} \\ i_{dj} \end{bmatrix}, \quad (\text{F.3})$$

donde $i = [x, y]$, como indicado en Kim *et al* [26]. En vez de considerar las fuerzas y torques como entradas de control, las corrientes directa y de cuadratura también se pueden considerar para análisis y síntesis de controladores. Los parámetros del MPS tienen los siguientes valores: la remanencia magnética es $\mu_o M_o = 0,71\text{T}$, la densidad de espiras de la bobina es $\eta_o = 3,5246 \times 10^6$ espiras/m², el número de pitches magnéticos activos es $N_m = 2$, el pitch es $l = 51,2\text{mm}$, el número de onda fundamental es $\gamma_1 = 2\pi/l = 123,25\text{m}^{-3}$ y la constante de geometría del motor es $G = 1,0722 \times 10^{-5}\text{m}^3$. La masa del platen es 5.91 kg. Los elementos de las matrices de las constantes del resorte son $k_\psi = 1,065 \times 10^4\text{N/kgm}$, $k_\theta = 1,131 \times 10^4\text{N/kgm}$ and $k_z = 10^6\text{N/kg}$. El tensor de inercia es:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 0,0357 & -0,0012 & -0,0008 \\ -0,0012 & 0,0261 & 0,0003 \\ -0,0008 & 0,0003 & 0,0561 \end{bmatrix} \text{kgm}^2. \quad (\text{F.4})$$

En base al análisis arriba descrito, el modelo resultante es no lineal y su forma reducida se puede representar como:

$$\dot{\vec{\chi}} = h(\vec{\chi}, \vec{u}) = g(\vec{\chi}, \vec{i}), \quad (\text{F.5})$$

donde $\vec{\chi} = [v_x, v_y, v_z, x, y, z, \omega_\psi, \omega_\theta, \omega_\phi, \psi, \theta, \phi]^T$ es el vector de estados, y los vectores de la entrada de control pueden ser tanto $\vec{u} = [f_x, f_y, f_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$

como $\vec{i} = [i_{q1}, i_{q2}, i_{q3}, i_{d1}, i_{d2}, i_{d3}]^T$.

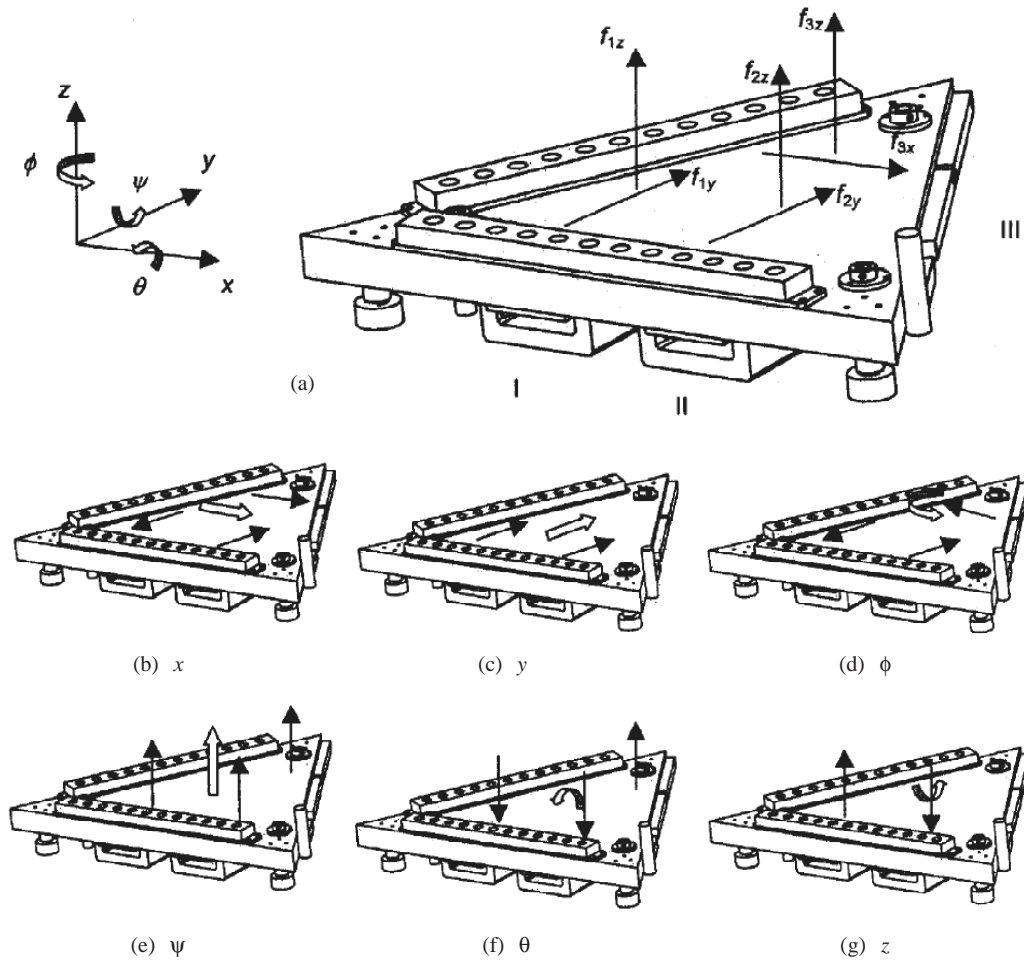


Figura F.3: a) Convención para los ejes coordenados y las direcciones de las fuerzas para cada motor lineal. El origen del sistema coordenado móvil coincide con el centro de masa del platen. Los números 1, 2 and 3 denotan las bobinas correspondientes a los tres motores lineales. b) Ubicación de las fuerzas necesarias para generar movimiento en las seis direcciones. Las flechas finas indican los componentes de las fuerzas modales producidas individualmente por cada motor y las flechas gruesas representan las fuerzas/torques modales resultantes actuando en el centroide del platen.

F.2.1. Modelo Linealizado

El platen ha sido modelado como un cuerpo rígido. La descripción del movimiento de un cuerpo rígido con seis grados de libertad es no lineal. Con la intención de usar técnicas de control lineal, se considerará el movimiento del platen con respecto a un punto de equilibrio. El estado de equilibrio $\vec{\chi}_o$ corresponde al sistema coordinado móvil siendo colineal con el sistema coordinado fijo. Luego:

$$\vec{\chi}_o = \left[0, 0, 0, 0, 0, 2,324\text{mm}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T, \quad (\text{F.6})$$

y el movimiento perturbado linealizado con respecto al punto de equilibrio puede ser dado por:

$$\delta \dot{\vec{\chi}} = A \delta \vec{\chi} + B_u \delta \vec{u} = A \delta \vec{\chi} + B_i \delta \vec{i}. \quad (\text{F.7})$$

Los modelos linealizados serán usados en el diseño de controladores MIMO. Sin embargo, con el tensor de inercia siendo diagonal dominante (F.4) se hace posible también diseñar controladores SISO, esto siempre y cuando se elijan a las fuerzas y torques como entradas del control (ver Sección F.2.4). Para propósitos de implementación se encuentra conveniente separar el modelo linealizado en dos modelos. Estos modelos representan los movimientos horizontal¹ (inestable) y vertical² (estable) del MPS.

F.2.2. Estructura del sistema de instrumentación

La Fig. F.4 muestra un diagrama esquemático del sistema de instrumentación del MPS. Para implementación del controlador digital en tiempo real se tiene la placa Pentek 4284 con un procesador de señales digitales (DSP) TMS320C40. Los cálculos de la posición, la variable de control y la entrada de control efectiva son efectuadas en tiempo real en base a un muestreo a una razón de 5 kHz. La

¹Movimiento horizontal: x , y y ϕ .

²Movimiento vertical: ψ , θ y z .

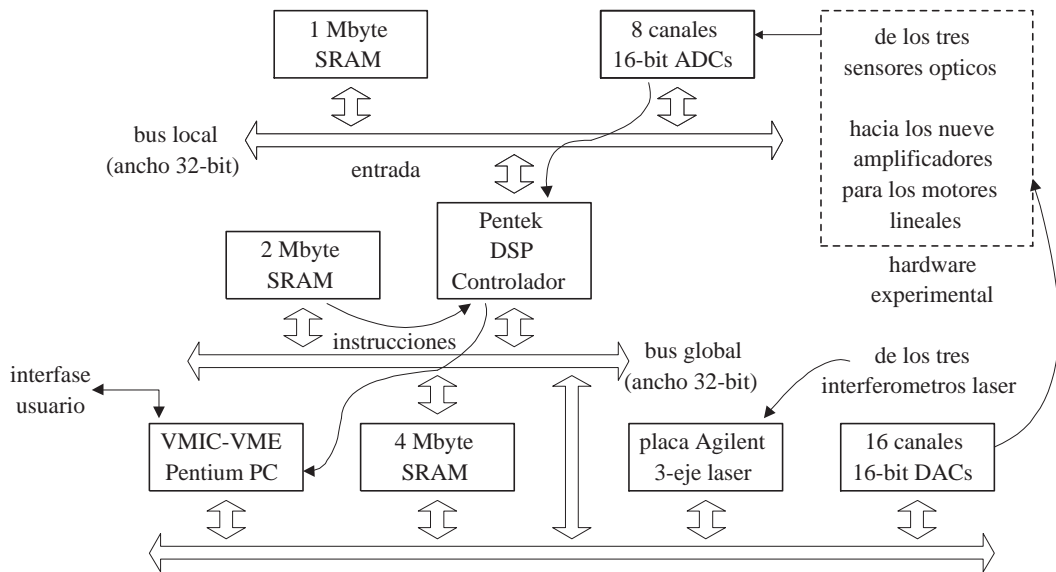


Figura F.4: Diagrama esquemático de la estructura de instrumentación (SRAM memoria de acceso semi aleatoria, DRAM memoria de acceso aleatoria dinámica).

computadora personal (PC) VMIC 7751 con un VersaModule Eurocard (VME), las tres placas eje-laser Agilent 10897B así como la placa DSP se encuentran localizadas en el chasis del VME. La PC VME se usa para compilar el código C, para descargar el archivo ejecutable al DSP y para transferir los comandos en tiempo real a través de la interfase con el usuario durante la operación del sistema. La comunicación entre el DSP y la PC VME es establecida via una memoria de puerto dual en la placa DSP.

F.2.3. Sensores y actuadores

La entrada del control la conforman las corrientes directa y de cuadratura, las mismas que están relacionadas a las corrientes de fase y que pasan a través de las tres bobinas. La corriente en las bobinas genera un campo magnético que interactúa con la matriz magnética produciendo una fuerza resultante y un torque neto en la placa triangular. El movimiento originado por dicha fuerza y torque es sentido por los interferómetros laser y los sensores ópticos. La Fig. F.5 muestra

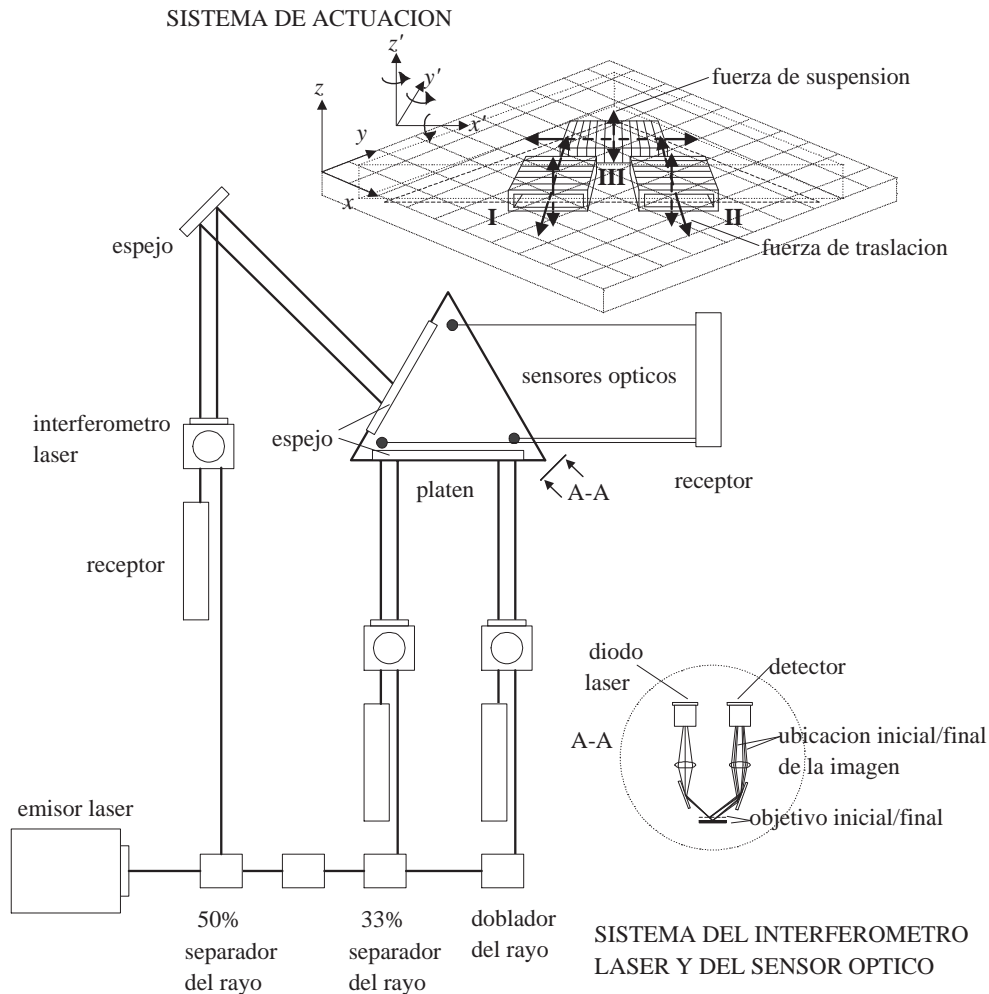


Figura F.5: Sensores y actuadores.

una vista en planta de la distribución de sensores y actuadores.

El sistema de los interferómetros laser (Agilent 5517D - recurso laser: 632nm He-Ne) colecta información sobre la posición relativa del movimiento horizontal (posición 35-bit y velocidad 24-bit) de las placas eje-laser a una razón de actualización de 10 MHz con una resolución de 0.6 nm y para velocidades de hasta 1 m/s. Los sensores ópticos (Nanogage 100) pasan la información del movimiento vertical (sólo posición) a una tarjeta de adquisición de datos, a través de un filtro antialiasing RC de primer orden que posee una frecuencia de corte igual a 1 kHz, con una resolución de 15 nm y para un rango de medida de hasta 100 μm . El sistema de adquisición de datos contiene ocho canales de conversores análogo-a-digital

16-bit (ADCs) (Pentek 6102) y dieciseis canales de conversores digital-a-análogo 12-bit (DACs) (Datel DVME-622) con un voltaje de entrada-salida que oscila entre $\pm 5V$. La placa ADC se comunica con el DSP via el MIXbus mientras que la placa DAC lo hace via el conductor VME. La señal de actuación se provee a nueve amplificadores de transconductancia usando nueve canales DAC. Así, la corriente de actuación es enviada a través de los amplificadores hacia las bobinas del motor lineal para poder generar las fuerzas de actuación.

La ecuación de salida está definida como:

$$\vec{y} = C \delta \vec{\chi}, \quad (\text{F.8})$$

donde \vec{y} es el vector de variables físicas sensadas y C es la matriz de salida:

$$C = \begin{bmatrix} I_{6 \times 6} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (\text{F.9})$$

La Fig. F.6 presenta las variables de actuación y las variables medidas.

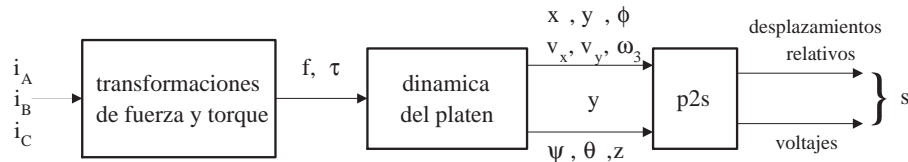


Figura F.6: MPS en lazo abierto.

F.2.4. Validación del modelo e identificación del MPS

Con la intención de verificar la validéz del modelo analítico se hizo necesario usar identificación de sistemas. Los experimentos realizados tuvieron que ser hechos en lazo cerrado debido a la naturaleza inestable del movimiento horizontal del MPS. El controlador usado fue del tipo adelanto/atraso (SISO control) teniendo en consideración que el modelo lineal puede ser desacoplado. La iden-

tificación en lazo cerrado se llevó a cabo para cada grado de libertad siguiendo el abordaje de entrada-salida desarrollado en Ljung [29]. La señal de entrada para las muestras, en este caso la referencia r , consiste en una señal aleatoria de ruido blanco con media igual a cero y desviaciones estandar de $0.01\mu\text{m}$ (movimiento horizontal) y $0.05\mu\text{m}$ (movimiento vertical). El tiempo total de la señal de excitación es de 2s para una razón de muestreo de 5kHz.

Observando la respuesta en frecuencia de los modelos experimentales, Fig. F.7, se nota que existe una diferencia significativa a bajas y altas frecuencias en relación a los modelos analíticos. Se presume que, a bajas frecuencias, la diferencia se presenta debido a que las señales de excitación usadas no contenían mucha energía en ese rango de frecuencias. A altas frecuencias, la diferencia estaría relacionada a la dinámica de alta frecuencia no incorporada en el modelo analítico. Cabe resaltar la presencia de resonancias a alrededor de los 90 Hz en el modelo experimental.

F.2.5. Modelo de incerteza

Los modelos de incerteza son determinados por la discrepancia que existe entre el modelo analítico desacoplado y el modelo experimental. El modelo analítico sirve como modelo nominal para el diseño del controlador. Considerando que, para sistemas como el MPS, la principal fuente de errores en el modelado se da a altas frecuencias, los modelos de incerteza aditiva son construidos como mostrado en la Fig. F.7. La dinámica a alta frecuencia que se presenta en los modelos experimentales es el resultado de haber desestimado ciertas no linealidades, acoplamiento mecánico-eléctrico y ruido ambiental en el modelo analítico. Por otro lado, la discrepancia a bajas frecuencias no considerada en el modelo de incerteza se compensará simplemente con alta ganancia.

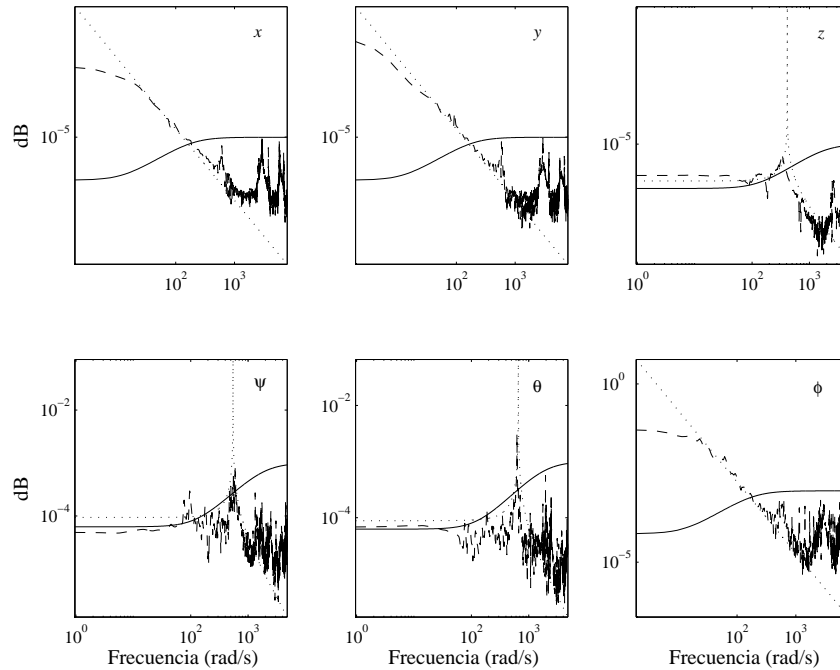


Figura F.7: Comparación del modelo analítico (línea punteada) y el modelo identificado (línea discontinua). Modelo de incerteza aditiva (línea continua).

F.3. Diseño del controlador

El control posicional para el MPS consiste en la estabilización del platen y el rastreamiento de señales de comando dadas con respecto al estado de equilibrio. Una característica a destacar del controlador es que debe garantizar buen desempeño en el rastreamiento a pesar de tener información imprecisa del sistema físico y estar sujeto a limitaciones como saturación, muestreo, entre otros. El controlador debe también ser diseñado para atenuar disturbios en la banda de frecuencias de 0 a 30Hz y debe tener presentar respuestas con 2% de error en estado estable, menos de 30% de ultrapasaje y un tiempo de elevación (dentro del 80% del valor final) menor de 0.1s para una función escalón en la señal de referencia (en cada DOF). Para movimiento en el plano, los objetivos de desempeño requieren un desplazamiento de cientos de milímetros a una velocidad máxima de 1m/s.

Las técnicas de control usadas para el diseño del controlador son adelanto/atraso (SISO), además de LQR, LQG, LQG-LTR y \mathcal{H}_∞ . Para todos los diseños

se han considerado especificaciones de desempeño similares tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Por su naturaleza, sólo el controlador \mathcal{H}_∞ incorpora explícitamente un modelo de incerteza (ver Fig. F.7) en el diseño. Esta incerteza se usa con el objetivo de compensar por la dinámica no capturada en el modelo analítico. Todos los controladores fueron calculados usando el *Control Toolbox* del MATLAB.

Los controladores adelanto/atraso [17], LQR [8], LQG [8] y LQG-LTR [3] no presentarán error en estado estable para entradas de referencia del tipo escalón puesto que un integrador ha sido introducido en el lazo de control. En el control adelanto/atraso, los elementos SISO del controlador son diseñados independientemente y tienen un margen de fase igual a 40° . El orden total del controlador es 12 y el ancho de banda en lazo cerrado es de 30Hz y 140Hz para los movimientos horizontal y vertical, respectivamente. Los diseños LQR y LQG usan la información proveniente de los modelos experimentales para determinar las matrices de ponderación a ser usadas. El controlador LQR es usado para controlar el movimiento horizontal mientras que el controlador LQG hace lo propio con el movimiento vertical. El orden total del controlador LQG-LTR es 12, el ancho de banda en lazo cerrado es de 30Hz para el movimiento horizontal y 100Hz para el movimiento vertical. El controlador \mathcal{H}_∞ [49] posee el orden más alto en comparación a los otros controladores; así, para cada movimiento, el orden resultó igual a 15. El incremento en el orden de los controladores se debe a la inclusión de la dinámica no modelada (por medio del modelo de incerteza) y de las funciones de ponderación (para garantizar desempeño) en el diseño del control. El ancho de banda en lazo cerrado es de 30Hz para el movimiento horizontal y de 110Hz para el movimiento vertical.

F.4. Simulaciones numéricas y resultados experimentales

Esta sección presenta simulaciones numéricas y resultados experimentales de la respuesta controlada del MPS - señal de rastreamiento igual a $10\mu\text{m}$ en las direcciones x e y . El desempeño de cada sistema de control simulado es comparado con los resultados experimentales. La capacidad de los controladores es analizada tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

F.4.1. Respuesta del sistema controlado en el dominio de la frecuencia

La Fig. F.8(a) muestra que, a excepción del LQR-LQG, las respuestas controladas en el dominio de la frecuencia para el sistema simulado presentan buenas propiedades de rastreamiento de señales sinusoidales de frecuencias de hasta 50 rad/s (con un error de $\pm 0,01$ para la función sensibilidad complementaria T). Una vez implementados los controladores discretizados, se observa que las buenas características de rastreamiento se mantienen a bajas frecuencias pero que a frecuencias intermedias y altas hay un incremento en la magnitud de T . Cabe resaltar que los resultados experimentales muestran una resonancia alrededor de los 90Hz en todos los canales, la misma resonancia que se hizo presente durante la validación del modelo. Nótese que el controlador \mathcal{H}_∞ trata de compensar por la presencia de esta resonancia mediante el uso del modelo de incerteza; como resultado, la respuesta controlada presenta picos bajos en la frecuencia correspondiente. La dinámica controlada por debajo de los 100Hz se torna fundamentalmente importante si consideramos que hay un requerimiento de un tiempo de levantamiento de 0.1s.

Observando el esfuerzo de control, Fig. F.8(b), el controlador \mathcal{H}_∞ requiere

de menos energía a pesar de presentar igual o mejor desempeño en rastreamiento de señales cuando comparado con los controladores adelanto/atraso y LQG-LTR. Por otro lado, el controlador LQR-LQG, que presenta las peores características de desempeño en rastreamiento de señales, es el que menor esfuerzo de control requiere. Existen ciertas diferencias entre las simulaciones numéricas y los resultados experimentales, siendo las más evidentes a bajas frecuencias.

Es importante destacar que aún mostrando cierta discrepancia en las respuestas en frecuencia, los controladores implementados presentaron respuestas similares a las simuladas cuando de respuesta en el dominio del tiempo se trata, esto se verá en detalle en la siguiente subsección.

F.4.2. Respuesta del sistema controlado en el dominio del tiempo

Las Figs. F.8(c)-(d) muestran que existe una gran coincidencia entre las respuestas obtenidas por simulación numérica e implementación. Es importante destacar que las diferencias más saltantes se encuentran en los transientes (relacionado al amortiguamiento) de las respuestas. El tiempo de elevación es menor de 0.1s y el de asentamiento menor de 0.2s en todos los casos, excepto para el controlador LQR-LQG que presenta un tiempo de levantamiento ligeramente mayor a 0.2s y uno de asentamiento de alrededor de 0.4s. Los porcentajes de ultrapase son mayores al 30 % para todos los controladores, siendo que el menor y mayor porcentaje lo poseen el controlador \mathcal{H}_∞ y LQG-LTR respectivamente. La diferencia en transientes está directamente relacionada a la naturaleza de los controladores usados, así los que dotan de dinámica al sistema controlado poseen mejores características como por ejemplo adelanto/atraso, LQG-LTR y \mathcal{H}_∞ . Las respuestas experimentales muestran también que existe una dinámica residual que no fue considerada en las simulaciones; se presume que esta dinámica es la dinámica en alta frecuencia no considerada en los modelos analíticos y que se hi-

zo evidente en las gráficas de respuesta en frecuencia. Estas dinámicas residuales poseen una envolvente de $\pm 0,05\mu\text{m}$ en todos los casos excepto para el controlador LQR-LQG, que presenta oscilaciones residuales de 2Hz y 1000Hz con amplitudes de hasta $0.4\mu\text{m}$ y $0.15\mu\text{m}$. Los controladores adelanto/atraso y LQG-LTR presentan las respuestas más rápidas, y esto a expensas de un mayor esfuerzo de control.

F.5. Conclusiones

El presente estudio consideró el control de un MPS usando una variedad de técnicas de control. EL MPS emplea tres motores lineales con magneto permanente y posee seis grados de libertad (es libre de moverse en el espacio). Los métodos de control empleados consideraron modelos linealizados (algunos hasta desacoplados) para la determinación del control, esto a pesar de que el sistema es acoplado y no lineal. Los controladores adelanto/atraso, LQR-LQG, LQG-LTR y \mathcal{H}_∞ controlaron exitosamente al MPS, mostrando así la capacidad de posicionamiento del MPS.

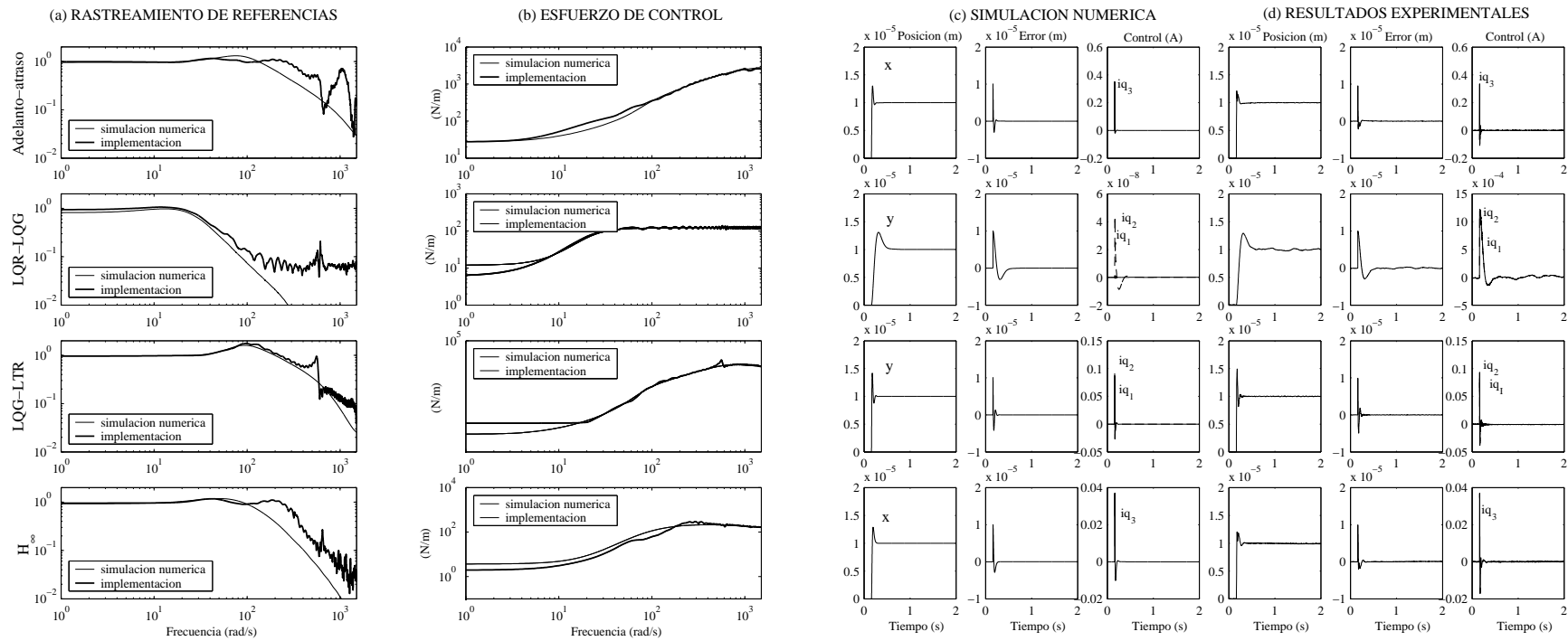


Figura F.8: Simulación numérica y resultados experimentales para referencias del tipo función escalón en x e y . Respuesta en el dominio de la frecuencia: (a) rastreamiento y (b) esfuerzo de control. Respuesta en el dominio del tiempo: (c)-(d) posición, error de la posición y corriente del control.