

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA**



**“ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO
SOBRE LA TIERRA TENIENDO EN CUENTA LA
ROTACIÓN DE ELLA”**

INFORME DE SUFICIENCIA

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN FÍSICA

LEONARDO DE LA CRUZ GARCÍA

**LIMA – PERU
2006**

A mis padres

Leonardo y Clarisa

AGRADECIMIENTO

- ◆ A la Universidad Nacional de Ingeniería, sobre todo a la Facultad de Ciencias – Escuela Profesional de Física por haberme brindado una valiosa formación académica.
- ◆ Al INDECOPI, en especial al Servicio Nacional de Metrología por haberme brindado la oportunidad de desarrollarme profesionalmente.
- ◆ Al asesor, Rosendo Ochoa Jiménez, por su valiosa orientación y paciencia durante el desarrollo de este trabajo.
- ◆ Al grupo de compañeros y profesores del II ciclo del curso de Titulación.
- ◆ Finalmente un agradecimiento especial a mi familia por todo el apoyo brindado.

INDICE

PROLOGO

CAPITULO 1. Introducción	2
CAPITULO 2. Movimiento en sistemas de referencia no inerciales	
2.1 Introducción	3
2.2 Sistema de coordenadas rotacionales	3
2.3 Introducción del operador \hat{D}	9
2.3.1 Vector velocidad angular $\vec{\omega}$	10
2.3.2 Vector posición \vec{r}	10
2.4 Ecuación de Newton en sistemas de coordenadas rotacionales	12
2.5 Ecuación de Newton en sistemas con movimiento relativo arbitrario	14
CAPITULO 3. Movimiento de caída libre sobre la tierra considerando la rotación de ella	
3.1 Introducción	16
3.2 Análisis del movimiento sobre la superficie de la Tierra	16
3.3 Solución de la ecuación de movimiento por el método de aproximaciones sucesivas	20
3.4 Movimientos sobre la superficie de la tierra considerando su rotación	24
3.4.1 Objeto que cae desde una altura h con velocidad inicial cero	24
3.4.2 Objeto lanzado desde una altura h con velocidad inicial diferente de cero	35
3.4.3 Objeto lanzado verticalmente desde la superficie de la tierra con velocidad inicial v_0	48
3.4.4 Objeto lanzado horizontalmente en dirección este	59
3.4.5 Objeto lanzado horizontalmente en dirección oeste	64
3.4.6 Objeto lanzado parabólicamente haciendo un ángulo β con la dirección este	73

CAPITULO 4. Péndulo de Foucault	
4.1 Introducción	82
4.2 Ecuaciones del movimiento del péndulo	82
4.3 Solución general de la ecuación del movimiento del péndulo	87
4.4 Soluciones particulares de la ecuación del movimiento del péndulo	89
CAPITULO 5. Conclusiones	124
Bibliografía	130

PROLOGO

En el presente trabajo se hace un enfoque del análisis de las ecuaciones del movimiento sobre la tierra teniendo en cuenta la rotación de ella. Se resolverá este problema considerando a la tierra como un sistema acelerado y las ecuaciones del movimiento se tratarán por el método de aproximaciones sucesivas. Se aplicara para los casos de movimiento de caída libre, movimiento parabólico y péndulo de Foucault encontrándose en cada uno de los casos las trayectorias del movimiento de un objeto bajo la acción de la rotación de la tierra.

Se ha incluido ejemplos numéricos y gráficas de movimientos para los tres casos tratados con el objeto de poder apreciar la verdadera magnitud del efecto de rotación de la tierra en estos tipos de movimientos y bajo que condiciones estas pueden ser despreciadas.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

Frecuentemente el análisis del movimiento sobre la superficie de la tierra considera a esta como un sistema de referencia inercial, sin embargo se sabe que la tierra realiza un movimiento de traslación y rotación, dichos movimientos hacen que nuestro sistema de referencia sobre la superficie de la tierra sea un sistema acelerado, para un estudio mas exacto las ecuaciones de movimiento sobre su superficie tendrán que ser analizadas respecto a un sistema de referencia no inercial.

Las ecuaciones de movimiento sobre la tierra teniendo en cuenta la rotación de ella se resolverá por el método de aproximaciones sucesivas y se analizarán para los casos del movimiento de caída libre, movimiento parabólico y péndulo de Foucault sobre la superficie de la Tierra.

Para el caso del movimiento de caída libre y movimiento parabólico sobre la superficie se encontrará una solución general a partir de la cual se puede resolver numéricamente para diferentes casos por métodos numéricos realizando para cada caso su respectiva gráfica de tal forma que se permita apreciar el efecto de la rotación de la tierra para movimientos de caída libre y movimientos parabólicos sobre su superficie.

En el caso del Péndulo de Foucault se resolverá la ecuación diferencial restringiendo el movimiento a un plano horizontal sobre la superficie de la tierra de tal forma que se permita encontrar las soluciones en dicho plano de oscilación y a partir de estas poder apreciar la rotación del plano de oscilación.

CAPITULO 2

MOVIMIENTO EN SISTEMAS DE REFERENCIA NO INERCIALES

2.1 Introducción

En la mecánica clásica, las leyes de Newton son consistentes en todos los sistemas inerciales de referencia. Sin embargo, esto no es válido en un sistema que acelera respecto de un sistema inercial, llamado no inercial. Las relaciones entre sistemas inerciales y no inerciales se obtienen estableciendo ecuaciones de movimiento en un sistema fijo (sistema inercial) y transformando luego a un sistema acelerado (sistema no inercial).

2.2 Sistema de coordenadas rotacionales

Consideremos primero la *rotación* de un sistema no inercial de coordenadas (x', y', z') alrededor del origen de un sistema inercial de coordenadas (x, y, z) tal que los dos orígenes de coordenadas coincidan. El sistema inercial lo denotamos por L (sistema de laboratorio) y el sistema de rotación por M (“sistema en movimiento”).

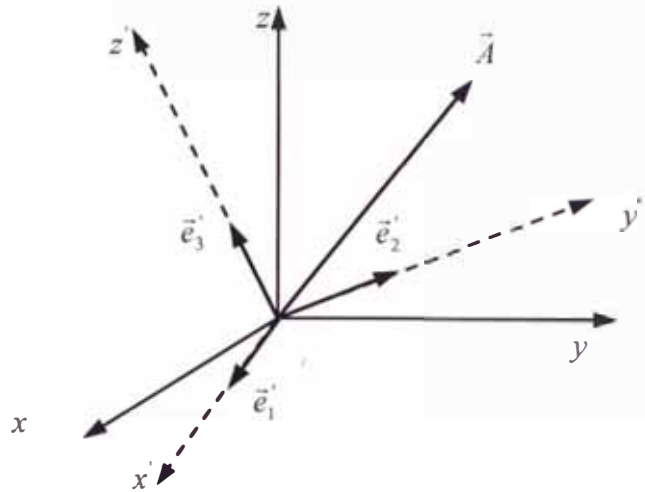


Figura 2.1 Posición relativa de los sistemas inercial (x, y, z) y no inercial (x', y', z')

El vector $A(t)$ en el sistema inercial es $A(t) = A_1 \bar{e}_1 + A_2 \bar{e}_2 + A_3 \bar{e}_3$ y solamente las componentes A_1, A_2, A_3 dependen del tiempo, en el sistema primado (sistema no inercial) es $\bar{A}(t) = A'_1 \bar{e}'_1 + A'_2 \bar{e}'_2 + A'_3 \bar{e}'_3$, estas bases son constantes para un observador en reposo en este sistema por lo tanto:

$$\left. \frac{d\bar{A}}{dt} \right|_M \equiv \frac{dA'_1}{dt} \bar{e}'_1 + \frac{dA'_2}{dt} \bar{e}'_2 + \frac{dA'_3}{dt} \bar{e}'_3 \quad (2.2.1)$$

El índice M de la ecuación (2.2.1) significa que la derivada por el tiempo es calculada respecto al sistema no inercial (sistema en movimiento) respecto de este sistema los vectores bases $\bar{e}'_1; \bar{e}'_2; \bar{e}'_3$ son constantes. A causa de la rotación del sistema primado (sistema no inercial) los vectores unitarios $e_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ varían con el tiempo respecto del sistema inercial; es decir, cuando el

vector \vec{A} varia respecto del sistema inercial, los vectores unitarios también varían por lo tanto, si denotamos por $\left. \frac{d}{dt} \right|_L$, la derivada por tiempo t respecto del sistema L , tenemos que:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L = \frac{dA_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dA_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dA_3}{dt} \vec{e}_3 + A_1 \dot{\vec{e}}_1 + A_2 \dot{\vec{e}}_2 + A_3 \dot{\vec{e}}_3 \quad (2.2.2)$$

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + A_1 \dot{\vec{e}}_1 + A_2 \dot{\vec{e}}_2 + A_3 \dot{\vec{e}}_3 \quad (2.2.3)$$

Sabemos que

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\!M} (\vec{e}'_\gamma \cdot \vec{e}'_\gamma) = \vec{e}'_\gamma \cdot \dot{\vec{e}}'_\gamma + \dot{\vec{e}}'_\gamma \cdot \vec{e}'_\gamma = \left(\frac{d}{dt} \right)_{\!M} (1) = 0, \quad \gamma = 1, 2, 3 \quad (2.2.4)$$

Entonces, $\vec{e}'_\gamma \cdot \dot{\vec{e}}'_\gamma = 0$, $\gamma = 1, 2, 3$

La derivada de un vector unitario $\dot{\vec{e}}'$ es siempre ortogonal al el mismo. Por lo tanto la derivada de un vector unitario puede ser escrito como una combinación lineal de los otros dos vectores unitarios:

$$\dot{\vec{e}}'_1 = a_1 \vec{e}'_2 + a_2 \vec{e}'_3, \quad (2.2.5)$$

$$\dot{\vec{e}}'_2 = a_3 \vec{e}'_1 + a_4 \vec{e}'_3, \quad (2.2.6)$$

$$\dot{\vec{e}}'_3 = a_5 \vec{e}'_1 + a_6 \vec{e}'_2, \quad (2.2.7)$$

Solo 3 de los 6 coeficientes de las ecuaciones (2.2.5), (2.2.6) y (2.2.7) son independientes. Para demostrar esto, derivemos primero $\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = 0$ y obtenemos:

$$\dot{\vec{e}}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = -\dot{\vec{e}}'_2 \cdot \vec{e}'_1 \quad (2.2.8)$$

Multiplicando escalarmente:

$$\dot{\vec{e}}_1' = a_1 \vec{e}_2' + a_2 \vec{e}_3' \quad \text{por } \vec{e}_2', \text{ obtenemos } \vec{e}_2' \cdot \dot{\vec{e}}_1' = a_1 \quad (2.2.9)$$

$$\dot{\vec{e}}_2' = a_3 \vec{e}_1' + a_4 \vec{e}_3' \quad \text{por } \vec{e}_1', \text{ obtenemos } \vec{e}_1' \cdot \dot{\vec{e}}_2' = a_3 \quad (2.2.10)$$

$$\dot{\vec{e}}_1' = a_1 \vec{e}_2' + a_2 \vec{e}_3' \quad \text{por } \vec{e}_3', \text{ obtenemos } \vec{e}_3' \cdot \dot{\vec{e}}_1' = a_2 \quad (2.2.11)$$

$$\dot{\vec{e}}_3' = a_5 \vec{e}_1' + a_6 \vec{e}_2' \quad \text{por } \vec{e}_1', \text{ obtenemos } \vec{e}_1' \cdot \dot{\vec{e}}_3' = a_5 \quad (2.2.12)$$

$$\dot{\vec{e}}_2' = a_3 \vec{e}_1' + a_4 \vec{e}_3' \quad \text{por } \vec{e}_3', \text{ obtenemos } \vec{e}_3' \cdot \dot{\vec{e}}_2' = a_4 \quad (2.2.13)$$

$$\dot{\vec{e}}_3' = a_5 \vec{e}_1' + a_6 \vec{e}_2' \quad \text{por } \vec{e}_2', \text{ obtenemos } \vec{e}_2' \cdot \dot{\vec{e}}_3' = a_6 \quad (2.2.14)$$

De donde se obtiene

$$a_3 = -a_1$$

$$a_6 = -a_4$$

$$a_5 = -a_2$$

La derivada del vector A en el sistema inercial puede ahora ser escrito como sigue:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + A_1' (a_1 \vec{e}_2' + a_2 \vec{e}_3') + A_2' (-a_1 \vec{e}_1' + a_4 \vec{e}_3') + A_3' (-a_2 \vec{e}_1' - a_4 \vec{e}_2') \quad (2.2.15)$$

$$= \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{e}_1' (-a_1 A_2' - a_2 A_3') + \vec{e}_2' (a_1 A_1' - a_4 A_3') + \vec{e}_3' (a_2 A_1' + a_4 A_2') \quad (2.2.16)$$

Sea $\vec{C} = C_1 \vec{e}_1' + C_2 \vec{e}_2' + C_3 \vec{e}_3'$ un vector arbitrario cualquiera, evaluando el

producto vectorial de $C \times A$ obtenemos:

$$\vec{C} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \end{vmatrix} = \vec{e}'_1(C_2 A'_3 - C_3 A'_2) - \vec{e}'_2(C_1 A'_3 - C_3 A'_1) + \vec{e}'_3(C_1 A'_2 - C_2 A'_1) \quad (1.2.17)$$

De donde $\vec{C} = (a_4, -a_2, a_1)$ tal que comparando (2.2.16) y (2.2.17) tenemos

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{C} \times \vec{A} \quad (2.2.18)$$

El vector \vec{C} tiene un sentido físico, para encontrarlo consideramos el caso especial $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M = 0$; es decir, la derivada del vector \vec{A} en el sistema en movimiento desaparece. \vec{A} está fuertemente "acoplado" al sistema y se está moviendo junto al sistema no inercial. Sea φ el ángulo entre el eje de rotación (en nuestro caso el eje z) y el vector \vec{A} . La componente paralela a la velocidad angular $\vec{\omega}$ no cambia por la rotación.

El cambio de \vec{A} en el sistema de laboratorio está dado por:

$$dA = \omega dt A \sin \varphi \quad \text{o} \quad \left. \frac{dA}{dt} \right|_L = \omega A \sin \varphi$$

Esto también puede ser escrito como :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L = \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (2.2.19)$$

La orientación de $(\vec{\omega} \times \vec{A}) dt$ también coincide con dA (ver figura 2.2)

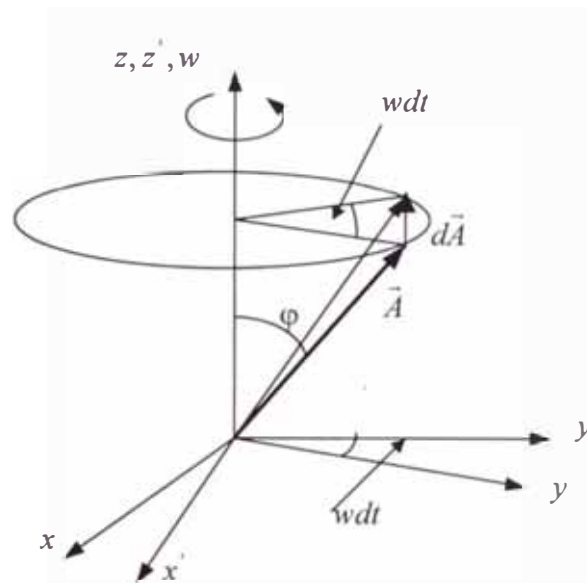


Figura 2.2 Variación de un vector arbitrario \vec{A} acoplado al sistema de rotación

Entonces el vector \vec{A} puede ser elegido arbitrariamente, el vector C debe de ser idéntico con el de la velocidad angular \vec{w} del sistema de rotación M . Reemplazando tenemos:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{w} \times \vec{A} \quad (2.2.20)$$

Esto también puede ser visto de la siguiente manera (ver figura 2.3); si el eje de rotación del sistema primado coincide durante un intervalo de tiempo dt con uno de los ejes coordenados del sistema no primado, por ejemplo $w = \dot{\phi} e_3$, luego

$$\dot{\vec{e}}_1' = \dot{\phi} \vec{e}_2' \quad \text{y} \quad \dot{\vec{e}}_2' = -\dot{\phi} \vec{e}_1'$$

Esto es

$$a_1 = \dot{\phi}, \quad a_2 = a_4 = 0 \quad \text{por lo tanto} \quad \vec{C} = \dot{\phi} \vec{e}_3 = \vec{w}.$$

En el caso general $\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3$, una descomposición $\vec{w} = \sum \vec{w}_i$,

con $\vec{w}_i = w_i \vec{e}_i$ y por las consideraciones precedidas uno encuentra $\vec{C}_i = \vec{w}_i$ y

$$\text{esto es} \quad \vec{C}_i = \sum_i \vec{C}_i = \sum_i \vec{w}_i = \vec{w}$$

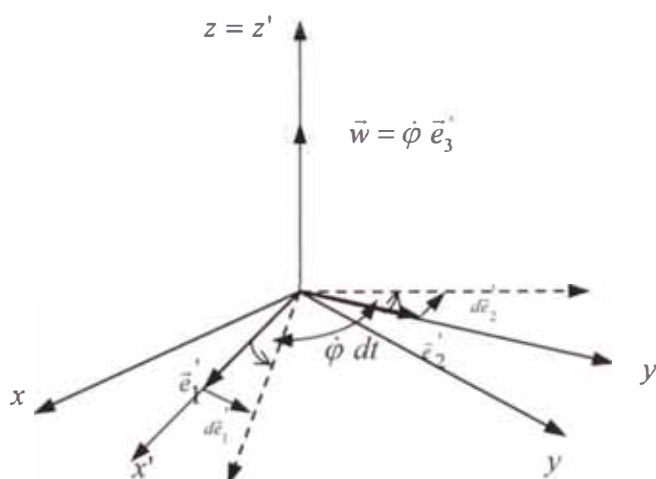


Figura 2.3 $|\dot{e}_1| = |\dot{e}_2| = \dot{\phi} dt$

2.3 Introducción del operador \hat{D}

Introduzcamos la notación $\hat{D} = d/dt$.

Las derivadas por el tiempo respecto de los sistemas inercial L y acelerado M respectivamente se denotaran por:

$$\hat{D}_L = \frac{d}{dt} \Big|_L \quad \text{y} \quad \hat{D}_M = \frac{d}{dt} \Big|_M \quad (2.3.1)$$

La ecuación $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{A}$ luego es simplificada a:

$$\hat{D}_L \vec{A} = \hat{D}_M \vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (2.3.2)$$

Si omitimos el vector \vec{A} , la ecuación es llamada ecuación operador

$$\hat{D}_L = \hat{D}_M + \vec{\omega} \times \quad (2.3.3)$$

El cual puede operar sobre un vector arbitrario.

2.3.1 Vector velocidad angular $\vec{\omega}$

$$\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{\omega}$$

debido a que: $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$, entonces

$$\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_M$$

Estas dos derivadas son evidentemente idénticas para todos los vectores que son paralelos al plano de rotación, entonces el producto vectorial desaparece. (representa el valor común a los dos sistemas)

2.3.2 Vector posición \vec{r}

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

En notación operador esto es:

$$\hat{D}_L \vec{r} = \hat{D}_M \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Donde $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_M$ es llamado velocidad relativa

Observación :

Se demostrará que cuando un objeto C gira con velocidad angular ω , cualquier otro punto de este objeto tiene la misma velocidad angular:

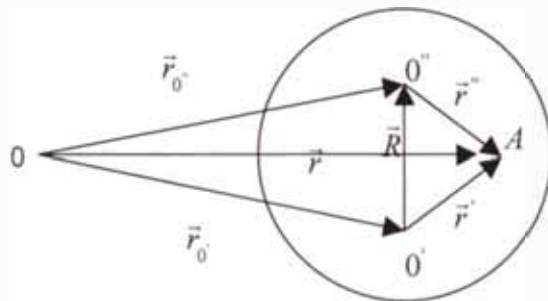


Figura 2.4 Objeto C girando a velocidad angular ω

De la figura 2.4 tenemos :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0'' + \vec{r}''$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}''$$

$$\vec{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}''$$

$$\vec{r}_0'' = \vec{r}_0' + \vec{R}$$

$$\vec{v}_0'' = \vec{v}_0' + \vec{\omega}_0 \times \vec{R}$$

Entonces

$$\vec{v}_{0'} + \vec{\omega}_{0'} \times \vec{r}' = \vec{v}_{0''} + \vec{\omega}_{0''} \times \vec{R} + \vec{\omega}_{0''} \times \vec{r}''$$

$$\vec{\omega}_{0'} \times (\vec{r}' - \vec{R}) = \vec{\omega}_{0''} \times \vec{r}''$$

$$\vec{\omega}_{0'} \times (\vec{r}'') = \vec{\omega}_{0''} \times \vec{r}''$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_{0'} = \vec{\omega}_{0''}$$

Por lo tanto la velocidad angular $\vec{\omega}_{0'}$ del punto $0'$ y la velocidad angular $\vec{\omega}_{0''}$ del punto $0''$ son iguales.

2.4 Ecuación de Newton en sistemas de coordenadas rotacionales

De acuerdo con la mecánica, la ley de Newton $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, es valido solo en sistemas inerciales. En sistemas acelerados aparecen términos adicionales. Primero consideremos nuevamente una rotación pura.

Para la aceleración tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_L &= \frac{d}{dt} \Big|_L (\dot{\vec{r}}) = \hat{D}_L (\hat{D}_L \vec{r}) = (\hat{D}_M + \vec{\omega} \times) (\hat{D}_M \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \hat{D}_M^2 \vec{r} + \hat{D}_M (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \hat{D}_M \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \hat{D}_M^2 \vec{r} + (\hat{D}_M \vec{\omega}) \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \hat{D}_M \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Reemplacemos el operador por la notación diferencial.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \Big|_L = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \Big|_M + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_M \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.4.2)$$

donde a $2\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\Big|_M$ se le llama aceleración de Coriolis y a $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ aceleración centrípeta.

Multiplicando la ecuación (2.4.2) por la masa m obtenemos la fuerza \vec{F} :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_M + m \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_M \times \vec{r} + 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_M + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{F} \quad (2.4.3)$$

La ecuación básica de la mecánica en sistemas de coordenadas de rotación por lo tanto es : (omitiendo el índice M)

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.4.4)$$

Los términos adicionales del lado derecho de la ecuación (2.4.4) los vamos a llamar "fuerzas no inerciales" estas fuerzas no son de interacción y no cumplen con la tercera ley de Newton. Para experimentos en la tierra los términos adicionales a menudo puede ser omitidos, por que la velocidad angular de la tierra $\omega = 2\pi/T$ ($T = 24h$) es sólo $7,27 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ y en muchos casos las "fuerzas no inerciales" son pequeñas comparados con la fuerza \vec{F} .

2.5 Ecuación de Newton en sistemas con movimiento relativo arbitrario

Dejando de lado ahora la condición de que el origen de los dos sistemas coordenados coinciden. El movimiento general de un sistema de coordenadas esta compuesto de una rotación del sistema y una traslación del origen. Si \vec{R} es el punto de origen del sistema primado respecto del sistema no primado, entonces el vector posición de A en el sistema no primado es $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$.

Para la velocidad tenemos $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'$:

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_L = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_L + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_M \quad (2.5.1)$$

y en el sistema inercial tenemos como antes

$$m \left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_L = \left. \vec{F} \right|_L = \vec{F} \quad (2.5.2)$$

Reemplazando \vec{r} y diferenciando, obtenemos

$$\vec{F} = m \left. \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right|_L + m \left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_L \quad (2.5.3)$$

donde

$$\left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_L = \left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_M + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_M \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (2.5.4)$$

Reemplazando la ecuación (2.5.4) en (2.5.3) realizamos el cambio al sistema acelerado como se hizo anteriormente (ecuación 2.4.4), pero aquí se tiene el término adicional $m\ddot{\bar{R}}$:

$$m \left. \frac{d^2 \bar{r}'}{dt^2} \right|_M = \bar{F} - m \left. \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right|_L - m \left. \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right|_M \times \bar{r}' - 2m\bar{\omega} \times \bar{v}_M - m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') \quad (2.5.5)$$

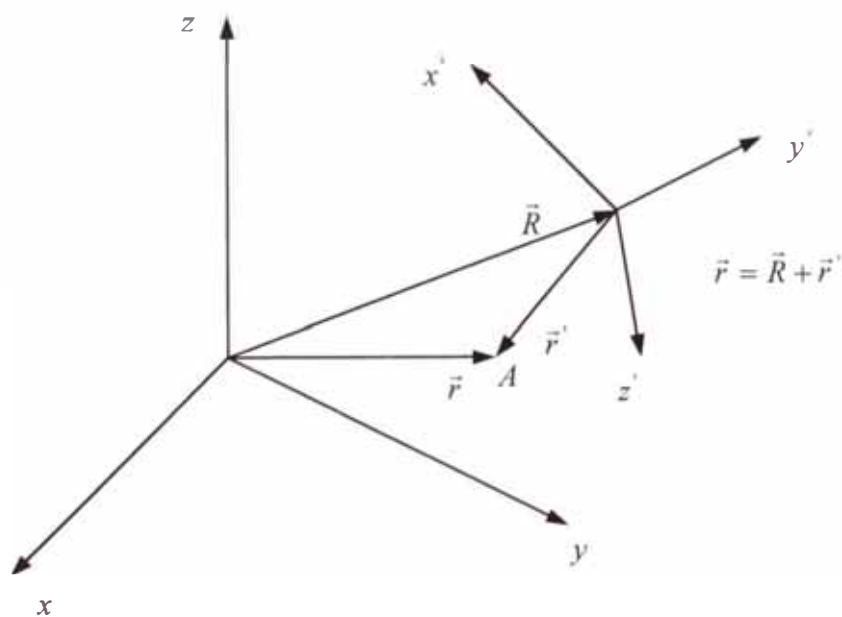


Figura 2.5 Posición relativa de un punto A respecto de los sistemas (x, y, z) y (x', y', z')

CAPITULO 3

MOVIMIENTO DE CAIDA LIBRE SOBRE LA TIERRA CONSIDERANDO LA ROTACION DE ELLA

3.1 Introducción

En el movimiento de la Tierra respecto a un sistema inercial predomina el de rotación en torno de su propio eje, siendo comparativamente pequeños los efectos de los demás movimientos (rotación alrededor del Sol, movimientos del sistema Solar respecto de la galaxia local, etc). Consecuentemente, podemos suponer en buena aproximación que un sistema de coordenadas fijo con relación a la Tierra se encuentra en rotación pura respecto a un sistema de referencia inercial y, por tanto, se podrá aplicar los conceptos del capítulo 2 a los problemas de movimiento sobre la superficie terrestre o sus proximidades.

3.2 Análisis del movimiento sobre la superficie de la tierra

En la tierra, de la ecuación básica de la mecánica derivada previamente en el capítulo anterior, sostiene que si no consideramos la rotación alrededor del sol y por lo tanto consideramos solo un sistema de coordenadas ubicado en la centro de la tierra como un sistema inercial, entonces la ecuación de movimiento estará dada por:

$$m\ddot{\vec{r}}' \Big|_M = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} \Big|_L - m\dot{\vec{w}} \Big|_M \times \vec{r}' - 2m\vec{w} \times \dot{\vec{r}}' \Big|_M - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}') \quad (3.2.1)$$

La velocidad de rotación \vec{w} de la tierra sobre su eje puede ser considerada constante en el tiempo y dirigida hacia el norte; por lo tanto, $m\dot{\vec{w}} \times \vec{r}' = 0$

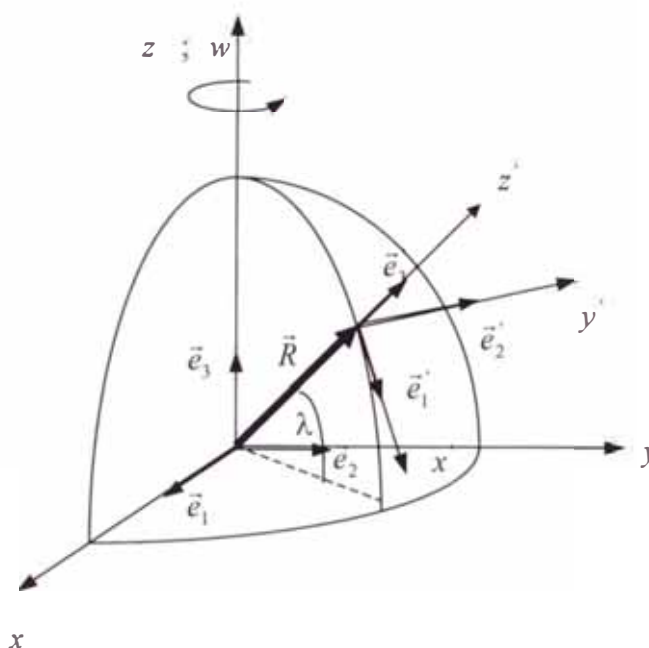


Figura 3.1 Octante del globo terrestre: Posición de varios sistemas coordenados

El movimiento del punto R , es decir, el movimiento del origen de coordenadas del sistema no inercial (x' , y' , z'), tiene que ser calculado nuevamente en el sistema en movimiento. Sabemos del capítulo anterior que el operador D está dado por

$$\hat{D}_L = \hat{D}_M + \vec{w} \times \quad (3.2.2)$$

Aplicando la ecuación (3.2.2) al vector \vec{R} obtenemos :

$$\hat{D}_L \vec{R} = \hat{D}_M \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{R} \quad (3.2.3)$$

Aplicando nuevamente la ecuación (3.2.2) a la ecuación (3.2.3) obtenemos:

$$\ddot{\vec{R}} \Big|_L = (\hat{D}_M + \vec{\omega} \times) (\hat{D}_M \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (3.2.4)$$

$$\ddot{\vec{R}} \Big|_L = \hat{D}_M^2 \vec{R} + \vec{\omega} \times (\hat{D}_M \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{R}) + \hat{D}_M (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (3.2.5)$$

De acuerdo a (3.2.1), tenemos

$$\ddot{\vec{R}} \Big|_L = \ddot{\vec{R}} \Big|_M + \dot{\vec{\omega}} \Big|_M \times \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} \Big|_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (3.2.6)$$

\vec{R} visto desde el sistema en movimiento M es una cantidad independiente del tiempo y entonces $\vec{\omega}$ es constante, entonces la ecuación (3.2.6) finalmente resulta :

$$\ddot{\vec{R}} \Big|_L = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (3.2.7)$$

Esta es la aceleración centrípeta debido a la rotación de la tierra que actúa en un cuerpo en movimiento en la superficie de la tierra. Para la ecuación de fuerza (3.2.1) tenemos ahora:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (3.2.8)$$

De la ecuación (3.2.8) podemos apreciar por ejemplo que en la caída libre sobre tierra - contrario al sistema inercial, aparecen "fuerzas no inerciales" que desvían el cuerpo en las direcciones x' e y' .

Considerando la fuerza de la gravedad, la fuerza \vec{F} en el sistema inercial es

$\vec{F} = -\gamma Mm \vec{r} / r^3 + \vec{F}^e$. Donde el primer término es la fuerza de la gravedad y \vec{F}^e es una fuerza exterior.

Reemplazando en la ecuación (3.2.8) obtenemos:

$$m\ddot{\vec{r}}' = -\gamma \frac{Mm}{r^3} \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{F}^e \quad (3.2.9)$$

Introduciendo ahora el valor determinado experimentalmente para la aceleración gravitacional \vec{g} (llamada gravedad efectiva):

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{R^3} \vec{R} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (3.2.10)$$

Aquí se reemplazo en la aceleración gravitacional $-\gamma M \vec{r} / r^3$ el radio $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ por \vec{R} de acuerdo a la aproximación $|\vec{r}| \approx |\vec{R}|$, que es razonable cerca de la superficie de la tierra. El segundo el término de la ecuación (3.2.10) es la aceleración centrípeta debido a la rotación de la tierra, que lleva a una disminución de la aceleración gravitacional (como una función de la latitud geográfica). La disminución esta incluido en el valor experimental para \vec{g} , de este modo obtenemos:

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{F}^e - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (3.2.11)$$

En la vecindad de la superficie de la tierra ($|\vec{r}'| \ll |\vec{R}|$) el último término puede ser omitido, ya que es pequeña comparado con las otras fuerzas. Así la ecuación simplificada es:

$$\ddot{\vec{r}}' = \vec{g} - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \frac{\vec{F}^e}{m} \quad \text{ó} \quad \ddot{\vec{r}}' = -g\vec{e}_3 - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \frac{\vec{F}^e}{m} \quad (3.2.12)$$

Entonces esta ecuación describe el movimiento de un cuerpo sobre la superficie de la tierra teniendo en cuenta la rotación de ella

3.3 Solución de la ecuación del movimiento por el método de aproximaciones sucesivas.

Se resolverá la ecuación diferencial (3.2.12) por el método de aproximaciones sucesivas para el movimiento de un objeto sobre la superficie de la tierra.

Partiendo nuevamente de la ecuación diferencial (3.2.12) considerando $\vec{F}^e = 0$

$$\ddot{\vec{r}}' = \vec{g} - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') \quad (3.3.1)$$

La solución se busca en la forma de :

$$\vec{r}' = \vec{r}'^{(0)} + \vec{r}'^{(1)} + \vec{r}'^{(2)} + \dots \quad (3.3.2)$$

donde $\vec{r}'^{(n)}$ es proporcional a $|\vec{\omega}|^n$.

Entonces la ecuación diferencial toma la forma:

$$\ddot{\vec{r}}'^{(0)} + \ddot{\vec{r}}'^{(1)} + \ddot{\vec{r}}'^{(2)} + \ddot{\vec{r}}'^{(3)} + \dots = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}}'^{(0)} + \dot{\vec{r}}'^{(1)} + \dot{\vec{r}}'^{(2)} + \dot{\vec{r}}'^{(3)} + \dots) \quad (3.3.3)$$

igualando los términos del mismo grado de $\vec{\omega}$ tenemos las siguientes ecuaciones en cadena:

$$\vec{r}'^{(0)}(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (\text{ecuación del movimiento parabólico}) \quad (3.3.4)$$

$$\ddot{\vec{r}}'^{(1)}(t) = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'^{(0)}(t) \quad (3.3.5)$$

$$\ddot{\vec{r}}^{(2)}(t) = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^{(1)}(t) \quad (3.3.6)$$

$$\ddot{\vec{r}}^{(3)}(t) = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^{(2)}(t) \quad (3.3.7)$$

Partiendo de la solución conocida para el movimiento parabólico

$\vec{r}^{(0)}$ encontramos los demás términos $\vec{r}^{(1)}$; $\vec{r}^{(2)}$; ...

Entonces de la ecuación (3.3.4) tenemos :

$$\vec{r}^{(0)}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (3.3.8)$$

$$\dot{\vec{r}}^{(0)}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} t \quad (3.3.9)$$

$$\ddot{\vec{r}}^{(0)}(t) = \vec{g} \quad (3.3.10)$$

Por lo tanto para encontrar el término $\vec{r}^{(1)}(t)$ partimos del término $\dot{\vec{r}}^{(0)}(t)$ dado en la ecuación (3.3.9) y el término obtenido en la ecuación (3.3.6), de donde se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{\vec{r}}^{(1)}(t) = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^{(0)}(t) \quad (3.3.11)$$

$$\ddot{\vec{r}}^{(1)}(t) = -2\vec{\omega} \times (\vec{v}_0 + \vec{g} t) \quad (3.3.12)$$

integrando la ecuación (3.3.12) tenemos :

$$\dot{\vec{r}}^{(1)}(t) = -2\vec{\omega} \times \left(\vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \right) \quad (3.3.13)$$

integrando la ecuación (3.3.13) tenemos

$$\vec{r}^{(1)}(t) = -2\vec{\omega} \times \left(\frac{1}{2} \vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{6} \vec{g} t^3 \right) \quad (3.3.14)$$

simplificando obtenemos finalmente

$$\vec{r}'^{(1)}(t) = -\vec{w} \times (\vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.3.15)$$

Para calcular el término $\vec{r}''^{(2)}$ partimos del término encontrado en la ecuación

(2.3.13) para $\vec{r}'^{(1)}$ y reemplacemos en la ecuación (3.3.6), de donde se obtiene lo siguiente :

$$\vec{r}''^{(2)}(t) = -2\vec{w} \times \dot{\vec{r}}'^{(1)}(t) \quad (3.3.16)$$

$$\vec{r}''^{(2)}(t) = -2\vec{w} \times \left[-2\vec{w} \times \left(\vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \right) \right] \quad (3.3.17)$$

integrando dos veces la ecuación (3.3.17) obtenemos

$$\dot{\vec{r}}''^{(2)}(t) = -2\vec{w} \times \left[-2\vec{w} \times \left(\frac{1}{2} \vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{6} \vec{g} t^3 \right) \right] \quad (3.3.18)$$

$$\vec{r}''^{(2)}(t) = -2\vec{w} \times \left[-2\vec{w} \times \left(\frac{1}{6} \vec{v}_0 t^3 + \frac{1}{24} \vec{g} t^4 \right) \right] \quad (3.3.19)$$

simplificando tenemos

$$\vec{r}''^{(2)}(t) = \vec{w} \times \left[\vec{w} \times \left(\frac{2}{3} \vec{v}_0 t^3 + \frac{1}{6} \vec{g} t^4 \right) \right] \quad (3.3.20)$$

Por lo tanto tenemos dos términos de la solución de nuestra ecuación diferencial utilizando el método de aproximaciones sucesivas.

Reemplazando los términos obtenidos de las ecuaciones (3.3.8); (3.3.15) y (3.3.20) en la ecuación (3.3.2) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) + \vec{w} \times \left[\vec{w} \times \left(\frac{2}{3} \vec{v}_0 t^3 + \frac{1}{6} \vec{g} t^4 \right) \right] + \dots (3.3.21)$$

En este trabajo vamos a considerar la solución hasta términos $\vec{r}'^{(1)}$.

Finalmente la solución simplificada con la cual se solucionarán problemas típicos de caída libre sobre la superficie de la tierra esta dada por :

$$\vec{r}'(t) \approx \vec{r}'_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{\omega} \times (\vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.3.22)$$

Con los vectores unitarios $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ del sistema inercial y los vectores unitarios $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ del sistema en movimiento dados en la figura 3.1 obtenemos la siguiente relación:

$$\vec{e}_3 = (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_1) \vec{e}'_1 + (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_2) \vec{e}'_2 + (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_3) \vec{e}'_3 \quad (3.3.23)$$

$$\vec{e}_3 = (-\cos \lambda) \vec{e}'_1 + 0 \vec{e}'_2 + (\text{sen} \lambda) \vec{e}'_3 \quad (3.3.24)$$

donde λ - es la latitud geográfica.

Como $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$, obtenemos la representación de las componentes de la velocidad angular $\vec{\omega}$ en el sistema en movimiento (sistema no inercial):

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda \vec{e}'_1 + \omega \text{sen} \lambda \vec{e}'_3 \quad (3.3.25)$$

Finalmente la ecuación de movimiento $\vec{r}'(t)$ y la expresión vectorial de la velocidad angular $\vec{\omega}$ estarán dados por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{\omega} \times (\vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.3.26)$$

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda \vec{e}'_1 + \omega \text{sen} \lambda \vec{e}'_3 \quad (3.3.27)$$

3.4 Movimientos sobre la superficie de la tierra considerando su rotación.

3.4.1 Objeto que cae desde una altura h con velocidad inicial cero.

Se analizará la desviación respecto a la vertical que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra cuando cae desde una altura h con velocidad inicial cero en el hemisferio norte y hemisferio sur.

A) Análisis del movimiento en el Hemisferio Norte:

Un objeto se deja caer en el hemisferio norte desde una altura h con velocidad inicial cero. Entonces las condiciones iniciales son: (en adelante por comodidad vamos a indicar las componentes del vector entre paréntesis)

$$\vec{r}'_0 = h\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; h) \quad (3.4.1)$$

$$\vec{v}'_0 = 0 = (0 ; 0 ; 0) \quad (3.4.2)$$

La aceleración gravitacional es:

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.3)$$

y la velocidad angular

$$\vec{\omega} = -w \cos \lambda \vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w \operatorname{sen} \lambda \vec{e}'_3 = (-w \cos \lambda ; 0 ; w \operatorname{sen} \lambda) \quad (3.4.4)$$

El vector posición es $\vec{r}' = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3$ y la ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.4.5)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación (3.4.5) tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4.6)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.7)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.6) y (3.4.7) en la ecuación (3.4.5) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h \vec{e}'_3 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.8)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = 0 \quad (3.4.9)$$

$$y'(t) = \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.10)$$

$$z'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.4.11)$$

De la ecuación (3.4.9) se puede observar que un objeto que cae desde una altura h no tiene desplazamiento en el eje x' a causa de la rotación de la Tierra en el hemisferio norte.

De la ecuación (3.4.10) se observa que debido a la rotación de la Tierra un objeto que cae desde una altura h tiene un desplazamiento hacia el este

(dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') en el hemisferio norte. Para obtener el desplazamiento en el eje y en función de la altura h calculemos el tiempo que demora la caída:

$$z'(t) = 0 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

de donde:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.4.12)$$

reemplazando en $y'(t)$ tenemos :

$$y'(h) = \frac{2}{3}wh \cos \lambda \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2} \quad (3.4.13)$$

Del resultado de la ecuación (3.4.13) se puede observar que un objeto que cae desde una altura h en una latitud geográfica λ siempre se **desviará hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto de la vertical (eje z') en el hemisferio norte debido a la rotación de la Tierra.**

B) Análisis del movimiento en el Hemisferio Sur:

Para el movimiento en el hemisferio sur tenemos que las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = h\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; h) \quad (3.4.14)$$

$$\vec{v}'_0 = 0 = (0 ; 0 ; 0) \quad (3.4.15)$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.16)$$

Se debe tener en cuenta que en el hemisferio sur el valor de λ será negativo por lo tanto se debe reemplazar λ por $-\lambda$, haciendo esto tendremos el cambio de la expresión vectorial para la velocidad angular $\vec{\omega}$ en el hemisferio sur y estará dada por:

$$\vec{\omega} = -w \cos(-\lambda) \vec{e}'_1 + 0 \vec{e}'_2 + w \operatorname{sen}(-\lambda) \vec{e}'_3 = \left(-w \cos \lambda ; 0 ; -w \operatorname{sen} \lambda \right) \quad (3.4.17)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{\omega} \times (\vec{v}'_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.4.18)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación (2.4.18) tenemos:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}'_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & -w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4.19)$$

$$\vec{\omega} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^3 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & -w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.20)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.19) y (3.4.20) en la ecuación (3.4.18) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h \vec{e}'_3 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.21)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = 0 \quad (3.4.22)$$

$$y'(t) = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.23)$$

$$z'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.4.24)$$

De la ecuación (3.4.22) se puede observar que un objeto que cae desde una altura h no tiene desplazamiento en el eje x' a causa de la rotación de la Tierra en el hemisferio sur.

De la ecuación (3.4.24) se observa que debido a la rotación de la Tierra un objeto que cae desde una altura h tiene un desplazamiento hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') en el hemisferio sur. Para obtener el desplazamiento en el eje y' en función de la altura h calculemos el tiempo que demora la caída:

$$z'(t) = 0 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

de donde :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.4.25)$$

reemplazando en $y'(t)$ tenemos :

$$y'(h) = \frac{2}{3} \omega h \cos \lambda \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2} \quad (3.4.26)$$

Del resultado de la ecuación (3.4.26) se puede observar que un objeto que cae desde una altura h en una latitud geográfica λ siempre se **desviará hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') en el hemisferio sur debido a la rotación de la tierra.**

C) Ejemplos Numéricos :

CASO 1: Objeto soltado desde una misma altura h para diferentes latitudes λ_i .

Hemisferio Norte :

Tabla 1

Altura h (m)	Módulo de la aceleración de la gravedad g^* (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje y' (cm)
400	9,81	7,27E-05	9,03	$\pi/2$	0,0
			9,03	$5\pi/12$	4,5
			9,03	$\pi/3$	8,8
			9,03	$\pi/4$	12,4
			9,03	$\pi/6$	15,2
			9,03	$\pi/12$	16,9
			9,03	0	17,5

Hemisferio Sur :

Tabla 2

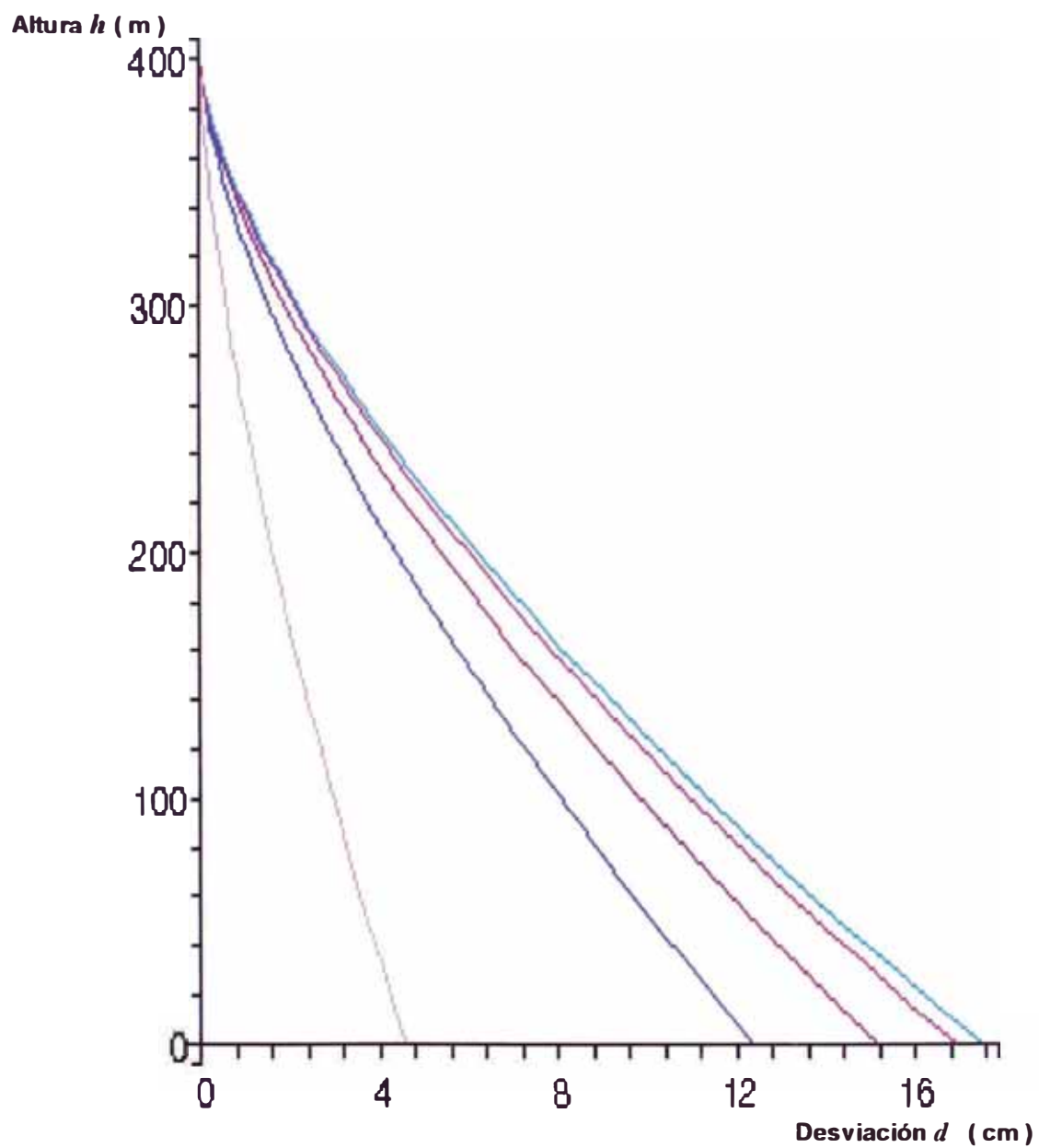
Altura h (m)	Módulo de la aceleración de la gravedad g^* (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje y' (cm)
400	9,81	7,27E-05	9,03	$-\pi/2$	0,0
			9,03	$-5\pi/12$	4,5
			9,03	$-\pi/3$	8,8
			9,03	$-\pi/4$	12,4
			9,03	$-\pi/6$	15,2
			9,03	$-\pi/12$	16,9
			9,03	0	17,5

* Para fines prácticos se a considerado el valor de la aceleración de la gravedad como constante para diferentes latitudes, en casos reales esto no se cumple, el valor de la aceleración de la gravedad depende de la ubicación geográfica.

GRAFICA DEL CASO 1

- ◆ La gráfica caso 1 mostrada corresponde a la caída de un objeto soltado desde una altura $h = 400$ m para diferentes latitudes λ , en el hemisferio norte y hemisferio sur y muestra la desviación d hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra.
- ◆ De las tablas 1 y 2 se observa que se tiene máxima desviación d respecto a la vertical en el Ecuador ($\lambda = 0$) y cero en los polos.

Gráfica Caso 1



CASO 2 : Objeto soltado desde diferentes alturas h_i para una misma latitud λ .

Hemisferio Norte :

Tabla 3

Altura h_i (m)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular w (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ)	Desviación d en el eje y' (cm)
800	9,81	7,27E-05	12,77	$\pi/4$	35,0
600			11,06	$\pi/4$	22,7
400			9,03	$\pi/4$	12,4
200			6,39	$\pi/4$	4,4
100			4,52	$\pi/4$	1,5
50			3,19	$\pi/4$	0,5

Hemisferio Sur :

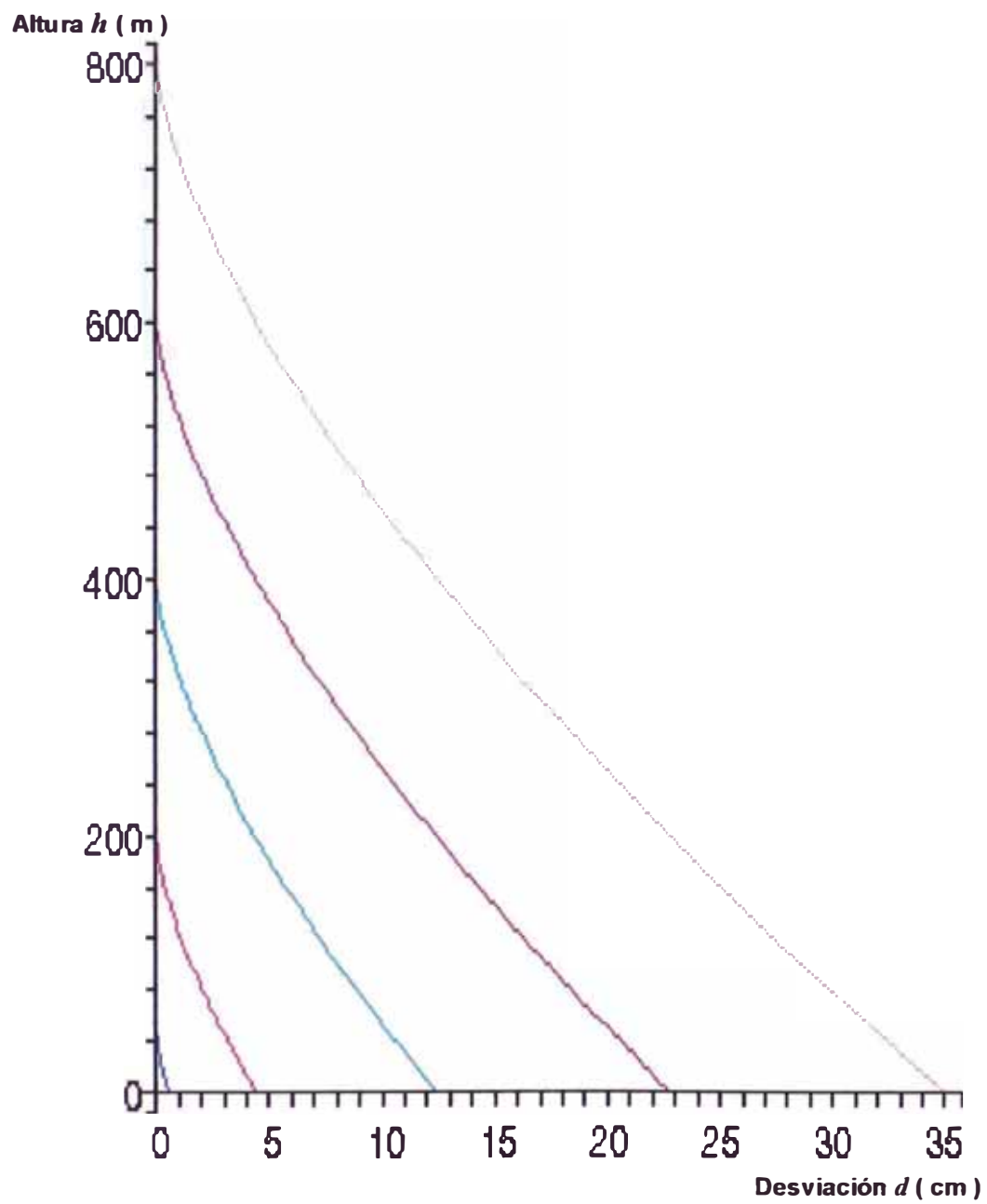
Tabla 4

Altura h_i (m)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular w (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ)	Desviación d en el eje y' (cm)
800	9,81	7,27E-05	12,77	$-\pi/4$	35,0
600			11,06	$-\pi/4$	22,7
400			9,03	$-\pi/4$	12,4
200			6,39	$-\pi/4$	4,4
100			4,52	$-\pi/4$	1,5
50			3,19	$-\pi/4$	0,5

GRAFICA DEL CASO 2

- ♦ La gráfica caso 2 mostrada corresponde a la caída de un objeto soltado desde diferentes alturas h_i para una misma latitud $\lambda = \pi/4$ en el hemisferio norte y hemisferio sur y muestra la desviación d hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra.
- ♦ De las tablas 3 y 4 se observa que para una misma latitud λ a mayor altura h mayor será la desviación d hacia el este respecto a la vertical.

Gráfica Caso 2



3.4.2 Objeto lanzado desde una altura h con velocidad inicial diferente de cero

Se analizará la desviación respecto a la vertical que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra cuando es lanzado desde una altura h verticalmente hacia abajo con velocidad inicial \vec{v}_0 diferente de cero en el hemisferio norte y hemisferio sur.

A) Análisis del movimiento en el Hemisferio Norte:

Un objeto se lanza en el hemisferio norte desde una altura h con velocidad inicial \vec{v}_0 diferente de cero. Entonces las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = h\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; h) \quad (3.4.27)$$

$$\vec{v}_0 = -v_0 = (0 ; 0 ; -v_0) \quad (3.4.28)$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.29)$$

$$\vec{w} = -w\cos\lambda\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w\sen\lambda\vec{e}'_3 = (-w\cos\lambda ; 0 ; w\sen\lambda) \quad (3.4.30)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{3}\vec{g}t^3) \quad (3.4.31)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w\cos\lambda & 0 & w\sen\lambda \\ 0 & 0 & -v_0 t^2 \end{vmatrix} = -wv_0 t^2 \cos\lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.32)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \vec{e}_3' \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}_2' \quad (3.4.33)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.32) y (3.4.33) en la ecuación (3.4.31) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h \vec{e}_3' - v_0 t \vec{e}_3' - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_3' + \left(w v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \right) \vec{e}_2' \quad (3.4.34)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = 0 \quad (3.4.35)$$

$$y'(t) = w v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.36)$$

$$z'(t) = h - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.4.37)$$

Igualando la ecuación (3.4.37) a cero ($z'(t) = 0$), encontramos el tiempo de caída:

$$h - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad (3.4.38)$$

de donde

$$t = \frac{1}{g} (\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0) \quad (3.4.39)$$

La otra solución se elimina por que el tiempo t siempre es positivo.

Entonces el signo positivo encontrado para la componente $y'(t)$ de la ecuación (3.4.36) indica que el **desplazamiento es hacia el este (dirección**

positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') en el hemisferio norte debido a la rotación de la tierra.

B) Análisis del movimiento en el Hemisferio Sur:

Para el movimiento en el hemisferio sur tenemos que las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = h\vec{e}'_3 = (0; 0; h) \quad (3.4.40)$$

$$\vec{v}'_0 = -v_0 = (0; 0; -v_0) \quad (3.4.41)$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0; 0; -g) \quad (3.4.42)$$

$$\vec{w} = -w\cos(-\lambda)\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w\sin(-\lambda)\vec{e}'_3 = (-w\cos\lambda; 0; -w\sin\lambda) \quad (3.4.43)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}'_0 t^2 + \frac{1}{3}\vec{g}t^3) \quad (3.4.44)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}'_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w\cos\lambda & 0 & -w\sin\lambda \\ 0 & 0 & -v_0 t^2 \end{vmatrix} = -wv_0 t^2 \cos\lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.45)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3}\vec{g}t^3 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w\cos\lambda & 0 & -w\sin\lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}gt^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}wgt^3 \cos\lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.46)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.45) y (3.4.46) en la ecuación (3.4.44) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h\vec{e}_3' - v_0 t \vec{e}_3' - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_3' + \left(w v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \right) \vec{e}_2' \quad (3.4.47)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento de un objeto que cae con velocidad inicial \vec{v}_0 serán:

$$x'(t) = 0 \quad (3.4.48)$$

$$y'(t) = w v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.49)$$

$$z'(t) = h - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.4.50)$$

donde

$$t = \frac{1}{g} (\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0) \quad (3.4.51)$$

Entonces el signo positivo encontrado para la componente $y'(t)$ de la ecuación (3.4.49) indica que el **desplazamiento es hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') en el hemisferio sur** debido a la rotación de la tierra.

C) Ejemplos Numéricos :

CASO 3 : Objeto lanzado verticalmente hacia abajo desde altura h con velocidad inicial \bar{v}_0 para diferentes latitudes λ_i ,

Hemisferio Norte:

Tabla 5

Altura h (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje y' (cm)
400	100	9,81	7,27E-05	3,42	$\pi/2$	0,0
				3,42	$5\pi/12$	2,4
				3,42	$\pi/3$	4,7
				3,42	$\pi/4$	6,0
				3,42	$\pi/6$	8,2
				3,42	$\pi/12$	9,1
				3,42	0	9,5

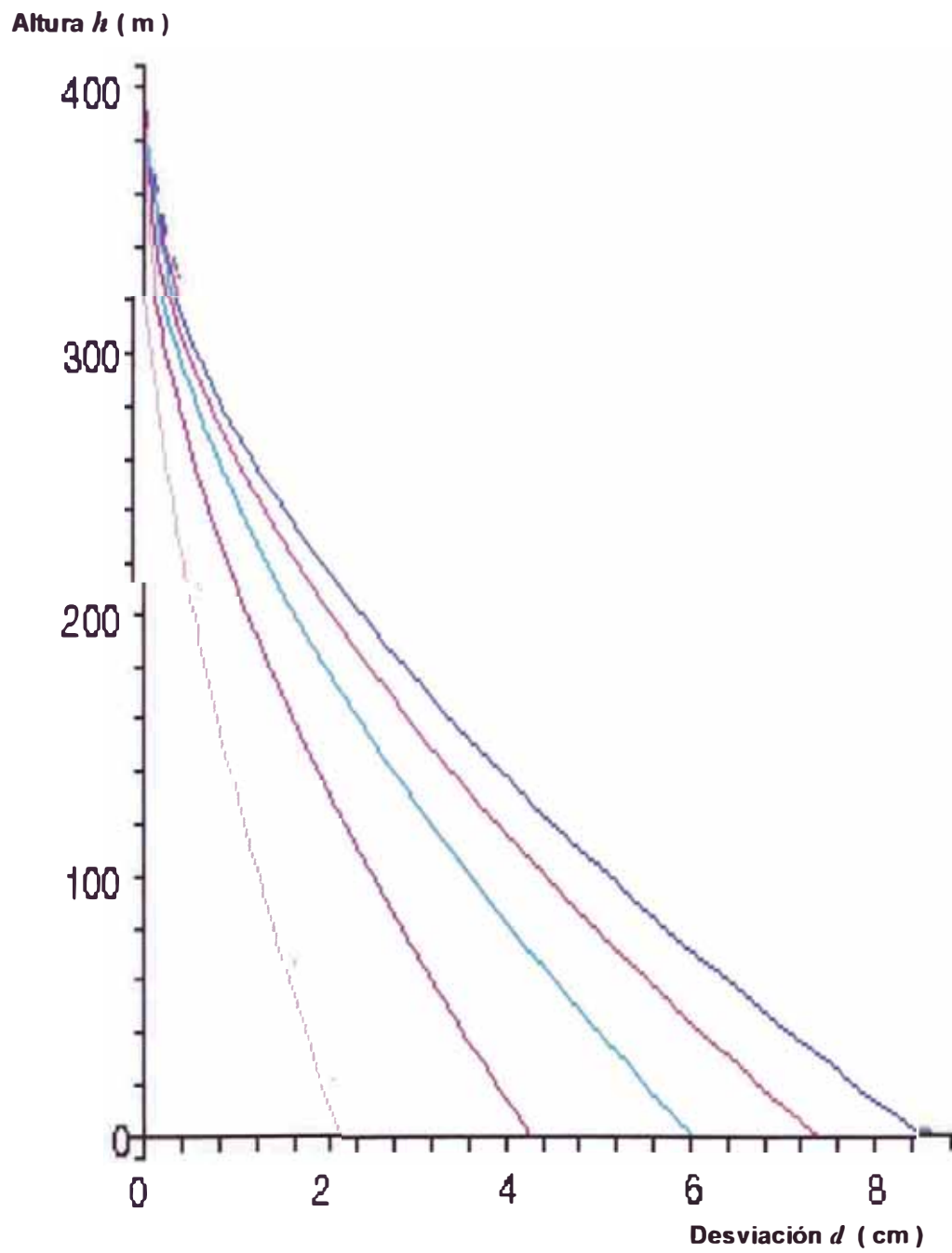
Hemisferio Sur :

Tabla 6

Altura h (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje y' (cm)
400	100	9,81	7,27E-05	3,42	$-\pi/2$	0,0
				3,42	$-5\pi/12$	2,4
				3,42	$-\pi/3$	4,7
				3,42	$-\pi/4$	6,0
				3,42	$-\pi/6$	8,2
				3,42	$-\pi/12$	9,1
				3,42	0	9,5

GRAFICA DEL CASO 3

- ◆ La gráfica caso 3 mostrada corresponde al lanzamiento vertical hacia abajo de un objeto desde una altura $h = 400$ m con velocidad inicial $v_0 = 100$ m/s para diferentes latitudes λ , en el hemisferio norte y hemisferio sur; y muestra la desviación d hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra.
- ◆ De las tablas 5 y 6 se observa que se tiene máxima desviación d respecto a la vertical en el Ecuador ($\lambda = 0$) y cero en los polos.

Gráfica Caso 3

CASO 4 Objeto lanzado verticalmente hacia abajo desde diferentes alturas h_i para una misma latitud λ y a una misma velocidad inicial \vec{v}_0 de lanzamiento.

Hemisferio Norte

Tabla 7

Altura h_i (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω' (rad / s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ)	Desviación d en el eje y' (cm)
900	100	9,81	7,27E-05	6,8	$\pi/4$	28,7
800				6,1	$\pi/4$	23,3
600				4,8	$\pi/4$	14,0
400				3,4	$\pi/4$	6,0
200				1,8	$\pi/4$	1,7
100				1,0	$\pi/4$	0,5

Hemisferio Sur :

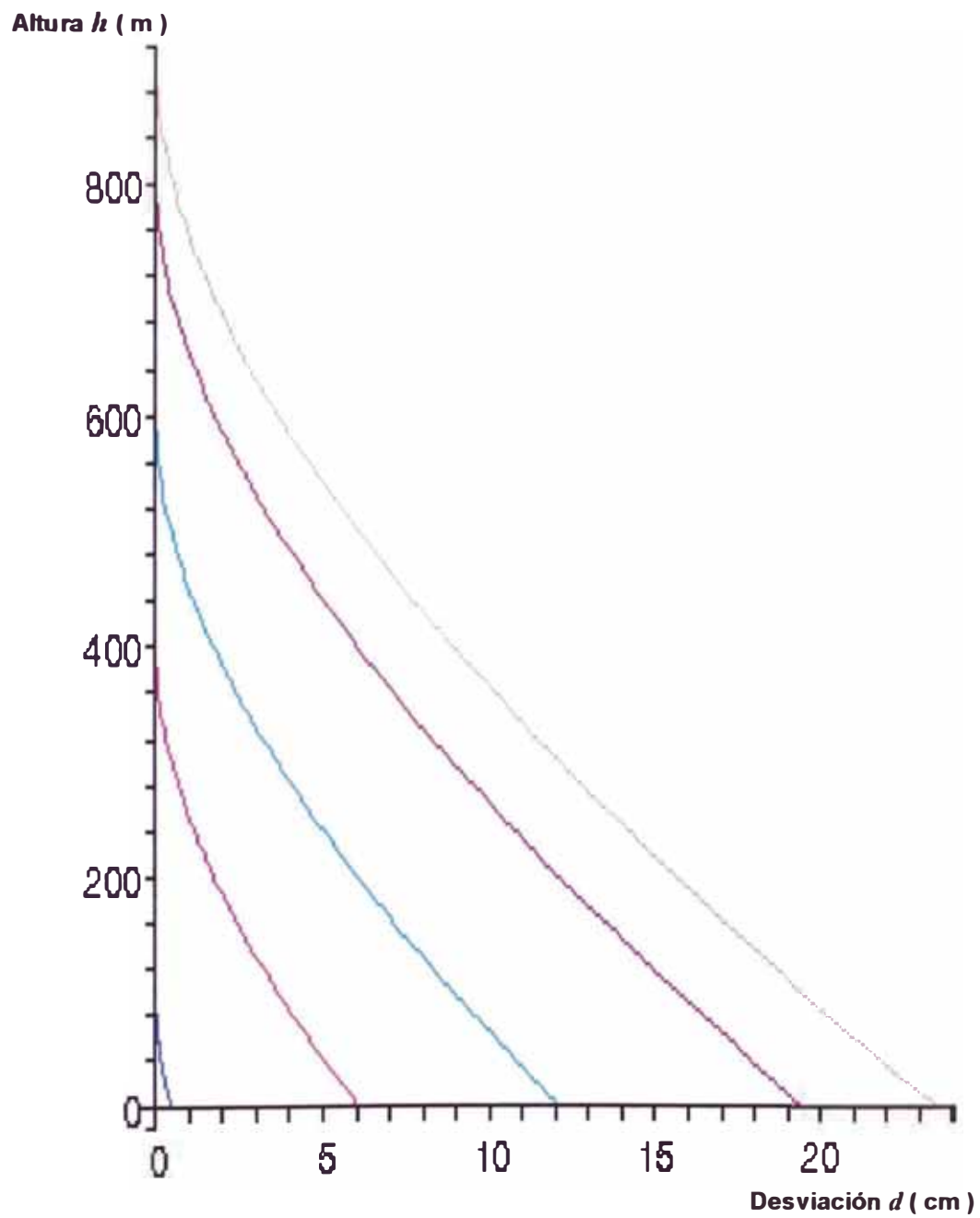
Tabla 8

Altura h_i (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω' (rad / s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ)	Desviación d en el eje y' (cm)
900	100	9,81	7,27E-05	6,8	$-\pi/4$	28,7
800				6,1	$-\pi/4$	23,3
600				4,8	$-\pi/4$	14,0
400				3,4	$-\pi/4$	6,0
200				1,8	$-\pi/4$	1,7
100				1,0	$-\pi/4$	0,5

GRAFICA DEL CASO 4

- ♦ La gráfica caso 4 mostrada corresponde al lanzamiento vertical hacia abajo de un objeto desde diferentes alturas h_i con velocidad inicial $v_o = 100$ m/s para una misma latitud λ en el hemisferio norte y hemisferio sur; y muestra la desviación d hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra.
- ♦ De las tablas 7 y 8 se observa que a mayor altura h de lanzamiento la desviación d respecto a la vertical aumenta.

Gráfica Caso 4



CASO 5 Objeto lanzado verticalmente hacia abajo desde una misma altura h en la misma latitud geográfica λ con velocidades iniciales de lanzamiento \vec{v}_0 diferentes.

Hemisferio Norte

Tabla 9

Altura h (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ)	Desviación d en el eje y' (cm)
600	120	9,81	7,27E-05	4,3	$\pi/4$	12,5
	100			4,8	$\pi/4$	14,0
	80			5,6	$\pi/4$	15,8
	60			6,5	$\pi/4$	17,8
	40			7,7	$\pi/4$	19,9
	20			9,2	$\pi/4$	21,8

Hemisferio Sur :

Tabla 10

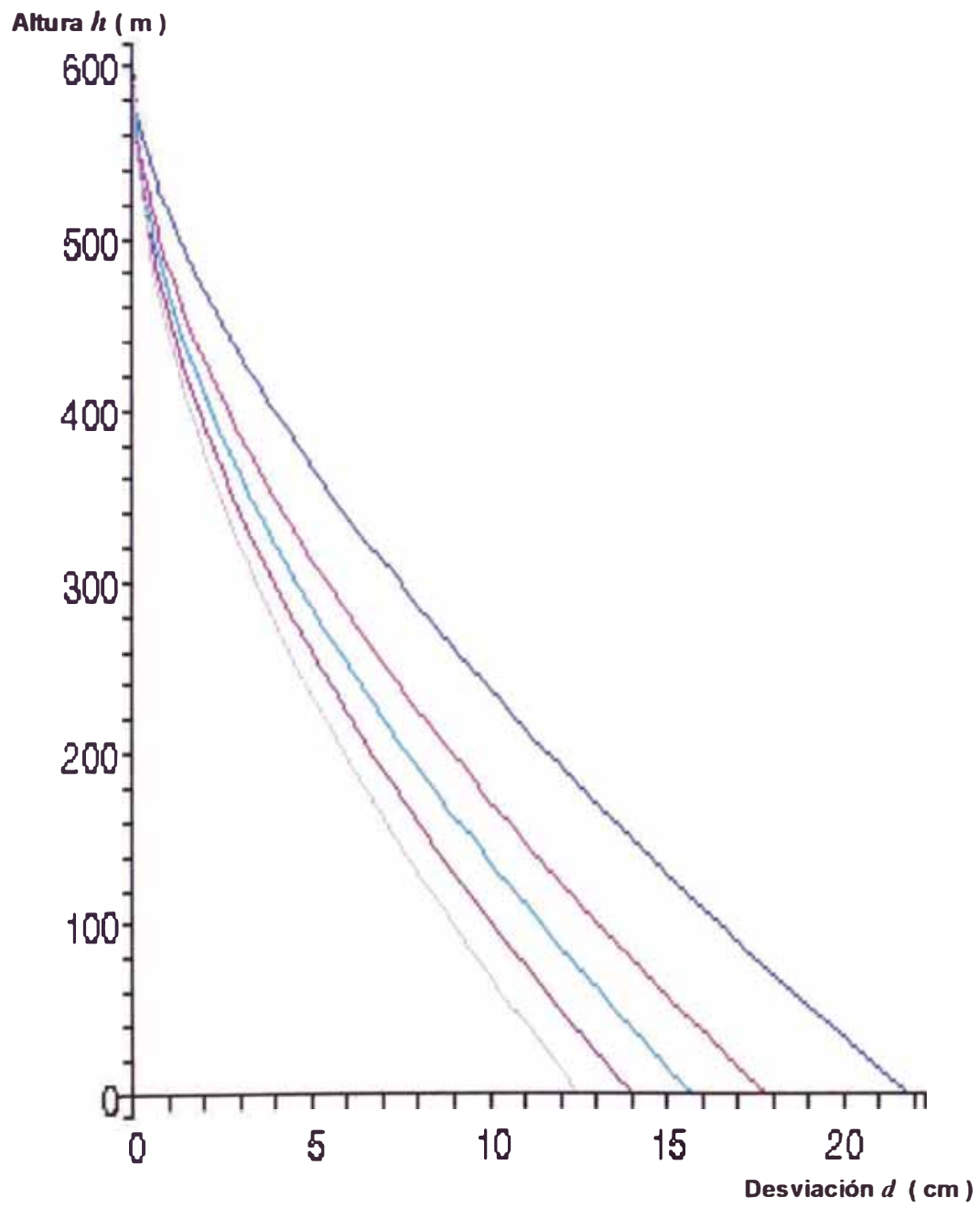
Altura h (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ)	Desviación d en el eje y' (cm)
600	120	9,81	7,27E-05	4,3	$-\pi/4$	12,5
	100			4,8	$-\pi/4$	14,0
	80			5,6	$-\pi/4$	15,8
	60			6,5	$-\pi/4$	17,8
	40			7,7	$-\pi/4$	19,9
	20			9,2	$-\pi/4$	21,8

GRAFICA DEL CASO 5

- ♦ La gráfica caso 5 mostrada corresponde al lanzamiento vertical hacia abajo de un objeto desde una misma altura h y una misma latitud λ con velocidades iniciales de lanzamiento v_0 diferentes en el hemisferio norte y hemisferio sur; y muestra la desviación d hacia el este (dirección positiva del eje y') respecto a la vertical (eje z') que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra.
- ♦ De las tablas 9 y 10 se observa que para una misma altura h y latitud λ de lanzamiento la desviación d respecto a la vertical aumenta al disminuir la velocidad inicial de lanzamiento

v_0

Gráfica Caso 5



3.4.3 Objeto lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra con velocidad inicial v_0

Se analizará la desviación respecto a la vertical que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra cuando es lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra con velocidad inicial \vec{v}_0 y regresa a ella en el hemisferio norte y hemisferio sur.

A) Análisis del movimiento en el Hemisferio Norte:

Un objeto se lanza en el hemisferio norte verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra con velocidad inicial \vec{v}_0 . Entonces las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = 0 = (0 ; 0 ; 0) \quad (3.4.52)$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; v_0) \quad (3.4.53)$$

$$\vec{g} = -g \vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.54)$$

$$\vec{w} = -w \cos \lambda \vec{e}'_1 + 0 \vec{e}'_2 + w \sin \lambda \vec{e}'_3 = (-w \cos \lambda ; 0 ; w \sin \lambda) \quad (3.4.55)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.4.56)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & v_0 t^2 \end{vmatrix} = w v_0 t^2 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.57)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.58)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.57) y (3.4.58) en la ecuación (3.4.56) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h \vec{e}'_3 + v_0 t \vec{e}'_3 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 + \left(-w v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \right) \vec{e}'_2 \quad (3.4.59)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = 0 \quad (3.4.60)$$

$$y'(t) = -w v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.61)$$

$$z'(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.4.62)$$

Calculando el tiempo total en el cual el objeto regresa a la superficie de la tierra tenemos

$$z'(t) = 0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = 2v_0 / g \quad (3.4.63)$$

por lo tanto el tiempo en el cual el objeto alcanza su altura máxima estará dado por:

$$t = v_0 / g \quad (3.4.64)$$

Reemplazando la ecuación (3.4.63) en la ecuación (3.4.61) obtenemos la desviación que sufre un objeto que es lanzado desde la superficie de la tierra y regresa a ella respecto a la vertical para el hemisferio norte.

$$y' = -\frac{4}{g^2} w v_0^3 \cos \lambda + \frac{8}{3} w \frac{v_0^3}{g^2} \cos \lambda = -\frac{4wv_0^3 \cos \lambda}{3g^2} \quad (3.4.65)$$

Entonces el signo negativo que se obtiene para la componente $y'(t)$ de la ecuación (3.4.65) indica que el desplazamiento respecto a la vertical (eje z) esta dirigido hacia el oeste (dirección negativa del eje y) en el hemisferio norte debido a la rotación de la tierra.

B) Análisis del movimiento en el Hemisferio Sur:

Para el movimiento en el hemisferio sur tenemos que las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = 0 = (0 ; 0 ; 0) \quad (3.4.66)$$

$$\vec{v}'_0 = v_0 \vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; v_0) \quad (3.4.67)$$

$$\vec{g} = -g \vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.68)$$

$$\vec{w} = -w \cos(-\lambda) \vec{e}'_1 + 0 \vec{e}'_2 + w \operatorname{sen}(-\lambda) \vec{e}'_3 = (-w \cos \lambda ; 0 ; -w \operatorname{sen} \lambda) \quad (3.4.69)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}'_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.4.70)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & -w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & v_0 t^2 \end{vmatrix} = w v_0 t^2 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.71)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & -w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.72)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.71) y (3.4.72) en la ecuación (3.4.70) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h \vec{e}'_3 + v_0 t \vec{e}'_3 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 + \left(-w v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \right) \vec{e}'_2 \quad (3.4.73)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = 0 \quad (3.4.74)$$

$$y'(t) = -w v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.75)$$

$$z'(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.4.76)$$

Calculando el tiempo total en el cual el objeto regresa a la superficie de la tierra tenemos :

$$z'(t) = 0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = 2v_0 / g \quad (3.4.77)$$

por lo tanto el tiempo en el cual el objeto alcanza su altura máxima estará dado por:

$$t = v_0 / g \quad (3.4.78)$$

Reemplazando la ecuación (3.4.77) en la ecuación (3.4.75) obtenemos la desviación que sufre un objeto que es lanzado desde la superficie de la tierra y regresa a ella respecto a la vertical para el hemisferio sur.

$$y' = -\frac{4}{g^2} w v_0^3 \cos \lambda + \frac{8}{3} w \frac{v_0^3}{g^2} \cos \lambda = -\frac{4 w v_0^3 \cos \lambda}{3 g^2} \quad (3.4.79)$$

Entonces el signo negativo que se obtiene para la componente $y'(t)$ de la ecuación (3.4.79) indica que el desplazamiento respecto a la vertical (eje z) esta dirigido hacia el oeste (dirección negativa del eje y) en el hemisferio sur debido a la rotación de la tierra.

C) Ejemplos Numéricos

CASO 6 Objeto lanzado desde la superficie de la tierra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 para diferentes latitudes λ_i .

Hemisferio Norte :

Tabla 11

Altura máxima alcanzada h (m)	Velocidad inicial de lanzamiento v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad / s)	Tiempo total (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje y' (cm)
509,7	100	9,81	7,27E-05	20,4	$\pi/2$	0,0
				20,4	$5\pi/12$	-26,1
				20,4	$\pi/3$	-50,4
				20,4	$\pi/4$	-71,2
				20,4	$\pi/6$	-87,2
				20,4	$\pi/12$	-97,3
				20,4	0	-100,7

Hemisferio Sur :

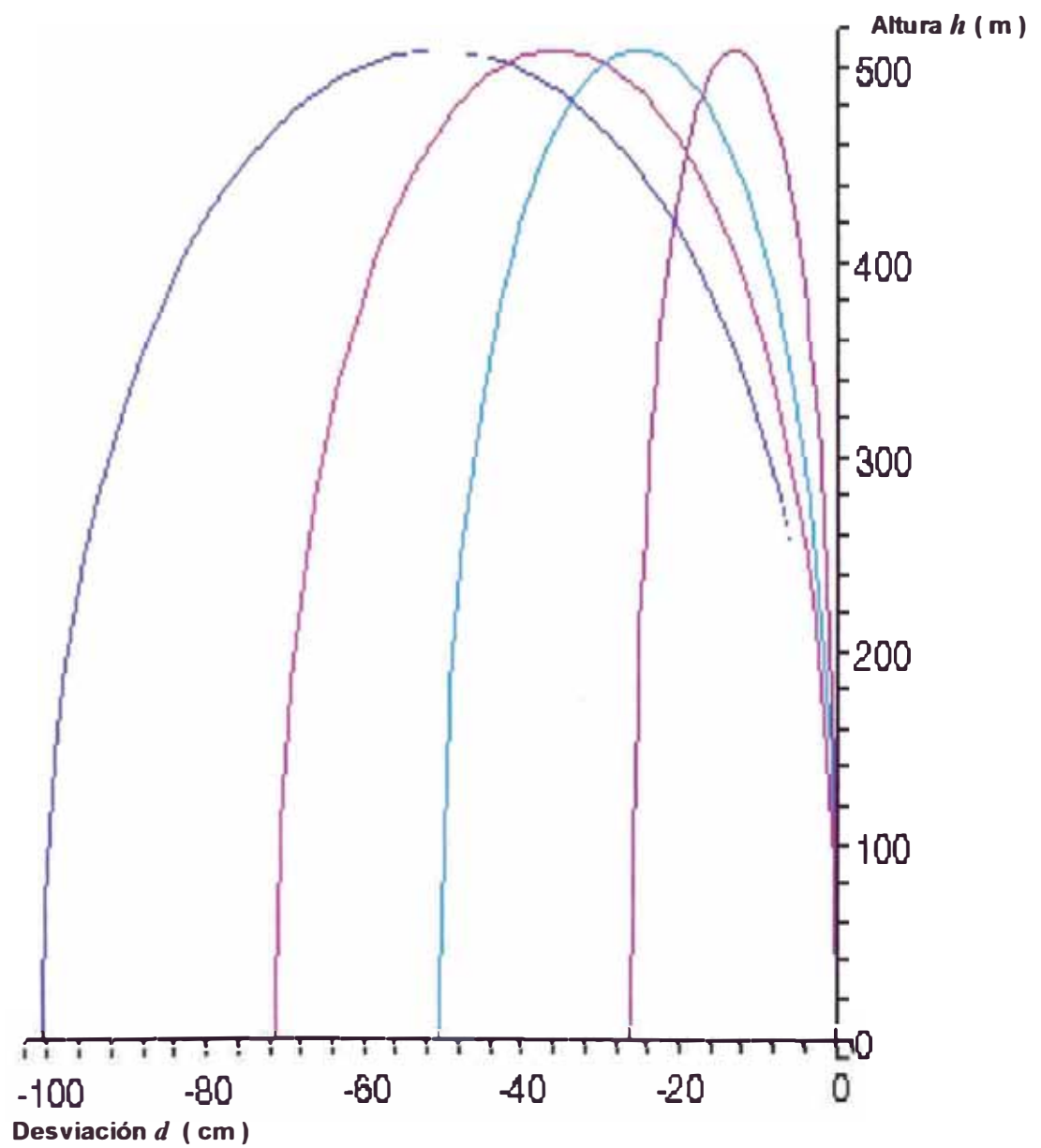
Tabla 12

Altura máxima alcanzada h (m)	Velocidad inicial de lanzamiento v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad / s)	Tiempo total (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje y' (cm)
509,7	100	9,81	7,27E-05	20,4	$-\pi/2$	0,0
				20,4	$-5\pi/12$	-26,1
				20,4	$-\pi/3$	-50,4
				20,4	$-\pi/4$	-71,2
				20,4	$-\pi/6$	-87,2
				20,4	$-\pi/12$	-97,3
				20,4	0	-100,7

GRAFICA DEL CASO 6

- ♦ La gráfica caso 6 mostrada corresponde al lanzamiento vertical hacia arriba desde la superficie de la tierra de un objeto para diferentes latitudes λ , con una velocidad inicial de lanzamiento $v_o = 100$ m/s en el hemisferio norte y hemisferio sur; y muestra la desviación d hacia el oeste (dirección negativa del eje y') respecto a la vertical (eje z') que sufre un objeto al caer sobre la superficie de la tierra.
- ♦ De las tablas 11 y 12 se observa que la máxima desviación d al oeste ocurre en el Ecuador ($\lambda = 0$) y es cero para los polos.

Gráfica Caso 6



CASO 7 Objeto lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra con velocidades iniciales de lanzamiento v_0 diferentes para una misma latitud λ .

Hemisferio Norte

Tabla 13

Altura máxima alcanzada h (m)	Velocidad inicial de lanzamiento v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ)	Desviación d en el eje y' (cm)
127,4	50	9,81	7,27E-05	10,2	$\pi/4$	-8,9
326,2	80			16,3	$\pi/4$	-36,5
509,7	100			20,4	$\pi/4$	-71,2
733,9	120			24,5	$\pi/4$	-123,1
1146,8	150			30,6	$\pi/4$	-240,4

Hemisferio Sur :

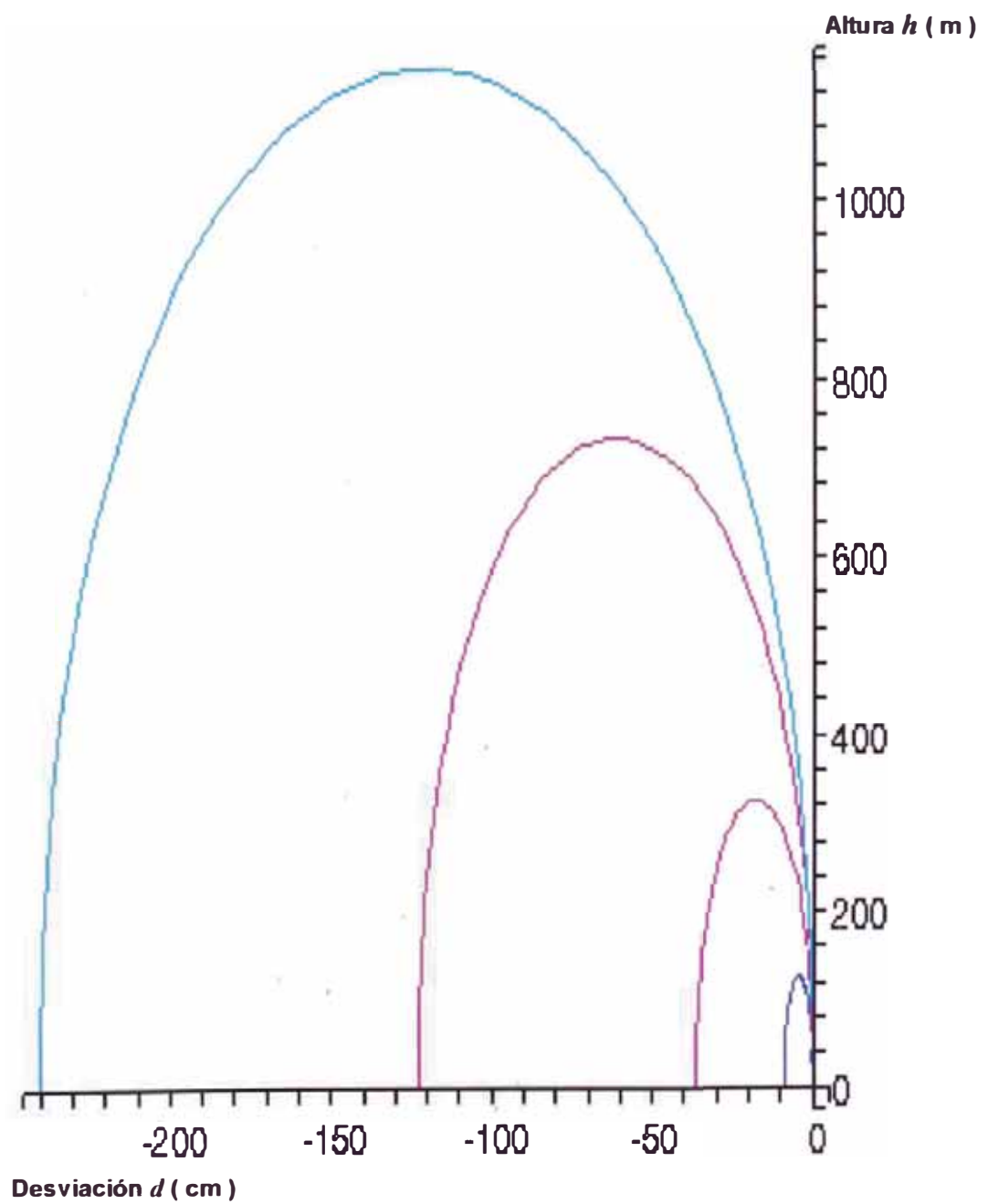
Tabla 14

Altura máxima alcanzada h (m)	Velocidad inicial de lanzamiento v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Latitud geográfica (λ)	Desviación d en el eje y' (cm)
127,4	50	9,81	7,27E-05	10,2	$-\pi/4$	-8,9
326,2	80			16,3	$-\pi/4$	-36,5
509,7	100			20,4	$-\pi/4$	-71,2
733,9	120			24,5	$-\pi/4$	-123,1
1146,8	150			30,6	$-\pi/4$	-240,4

GRAFICA DEL CASO 7

- ◆ La gráfica caso 7 mostrada corresponde al lanzamiento vertical hacia arriba desde la superficie de la tierra de un objeto para una latitud λ con velocidad inicial de lanzamiento v_0 diferentes en el hemisferio norte y hemisferio sur; y muestra la desviación d hacia el oeste (dirección negativa del eje y') respecto a la vertical (eje z') que sufre un objeto al caer sobre la superficie de la tierra.
- ◆ De las tablas 13 y 14 se observa que una misma latitud de lanzamiento λ la desviación d hacia el oeste respecto a la vertical aumenta al aumentar la velocidad inicial v_0 de lanzamiento.

Gráfica Caso 7



3.4.4 Objeto lanzado horizontalmente en dirección este

Se analizará la desviación que sufre el movimiento de un objeto cuando es lanzado horizontalmente en dirección este (dirección positiva del eje y') a una altura h de la superficie terrestre y una velocidad inicial \vec{v}_0 en el hemisferio norte y hemisferio sur.

A) Análisis del movimiento en el Hemisferio Norte :

Un objeto se lanza en el hemisferio norte horizontalmente en dirección este.

Entonces las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = h\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; h) \quad (3.4.80)$$

$$\vec{v}'_0 = v_0\vec{e}'_2 = (0 ; v_0 ; 0) \quad (3.4.81)$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.82)$$

$$\vec{w} = -w\cos\lambda\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w\text{sen}\lambda\vec{e}'_3 = (-w\cos\lambda ; 0 ; w\text{sen}\lambda) \quad (3.4.83)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}'_0 t^2 + \frac{1}{3}\vec{g}t^3) \quad (3.4.84)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}'_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w\cos\lambda & 0 & w\text{sen}\lambda \\ 0 & v_0 t^2 & 0 \end{vmatrix} = -wv_0 t^2 \cos\lambda \vec{e}'_3 - wv_0 t^2 \text{sen}\lambda \vec{e}'_1 \quad (3.4.85)$$

$$w x \frac{1}{3} \bar{g} t^3 = \begin{vmatrix} \bar{e}'_1 & \bar{e}'_2 & \bar{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \bar{e}'_2 \quad (3.4.86)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.85) y (3.4.86) en la ecuación (3.4.84) tenemos:

$$\bar{r}'(t) = h \bar{e}'_3 + v_0 t \bar{e}'_2 - \frac{1}{2} g t^2 \bar{e}'_3 + w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \bar{e}'_1 + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \bar{e}'_2 + w v_0 t^2 \cos \lambda \bar{e}'_3 \quad (2.4.87)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \quad (3.4.88)$$

$$y'(t) = v_0 t + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.89)$$

$$z'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 + w v_0 t^2 \cos \lambda \quad (3.4.90)$$

Del análisis de las componentes del movimiento dadas por las ecuaciones (3.4.88), (3.4.89) y (3.4.90) se puede ver que debido a la presencia de la componente $x(t)$ con signo positivo (ecuación (3.4.88)) el objeto se desvía hacia la derecha (dirección positiva del eje x') respecto de la dirección del movimiento en el hemisferio norte (ver figura 3.2) debido a la rotación de la tierra.

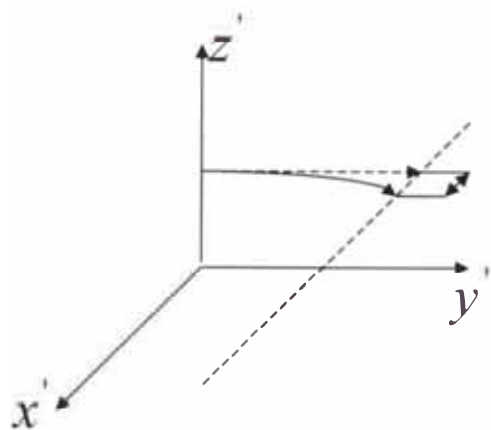


Figura 3.2 Desviación del movimiento en el hemisferio norte

B) Análisis del movimiento en el Hemisferio Sur :

Para el movimiento en el hemisferio sur tenemos que las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = h\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; h) \quad (3.4.91)$$

$$\vec{v}'_0 = v_0\vec{e}'_2 = (0 ; v_0 ; 0) \quad (3.4.92)$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.93)$$

$$\vec{w} = -w\cos(-\lambda)\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w\text{sen}(-\lambda)\vec{e}'_3 = (-w\cos\lambda ; 0 ; -w\text{sen}\lambda) \quad (3.4.94)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}'_0 t^2 + \frac{1}{3}\vec{g}t^3) \quad (3.4.95)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & -w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & v_0 t^2 & 0 \end{vmatrix} = -wv_0 t^2 \cos \lambda \vec{e}'_3 + wv_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \vec{e}'_1 \quad (3.4.96)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^3 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & -w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.97)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.96) y (3.4.97) en la ecuación (3.4.95) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h \vec{e}'_3 + v_0 t \vec{e}'_2 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 - wv_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \vec{e}'_1 + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 + wv_0 t^2 \cos \lambda \vec{e}'_3 \quad (3.4.98)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = -wv_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \quad (3.4.99)$$

$$y'(t) = v_0 t + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.100)$$

$$z'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 + wv_0 t^2 \cos \lambda \quad (3.4.101)$$

Del análisis de las componentes del movimiento dadas por las ecuaciones (3.4.99), (3.4.100) y (3.4.101) se puede ver que debido a la presencia de la componente $x'(t)$ con signo negativo (ecuación (3.4.99)) el objeto se desviará hacia la izquierda (dirección negativa del eje x') respecto de la dirección del movimiento en el hemisferio sur (ver figura 3.3) debido a la rotación de la tierra.

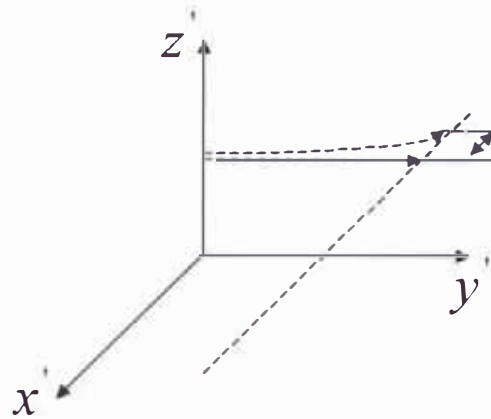


Figura 3.3 Desviación del movimiento en el hemisferio sur

D) Ejemplo numérico :

CASO 8 : Objeto lanzado horizontalmente en dirección este con velocidad inicial \bar{v}_0 para un tiempo t en diferentes latitudes λ_i a una altura h de la superficie.

Hemisferio Norte:

Tabla 15

Altura h (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de movimiento (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje x' (cm)	Desviación en el eje y' (m)	Desviación en el eje z' (cm)
2	200	9,81	7,27E-05	0,5	$\pi/2$	0,004	100,00	0,77
					$5\pi/12$	0,004	100,00	0,77
					$\pi/3$	0,003	100,00	0,78
					$\pi/4$	0,003	100,00	0,78
					$\pi/6$	0,002	100,00	0,78
					$\pi/12$	0,001	100,00	0,78
					0	0,000	100,00	0,78

Hemisferio Sur:

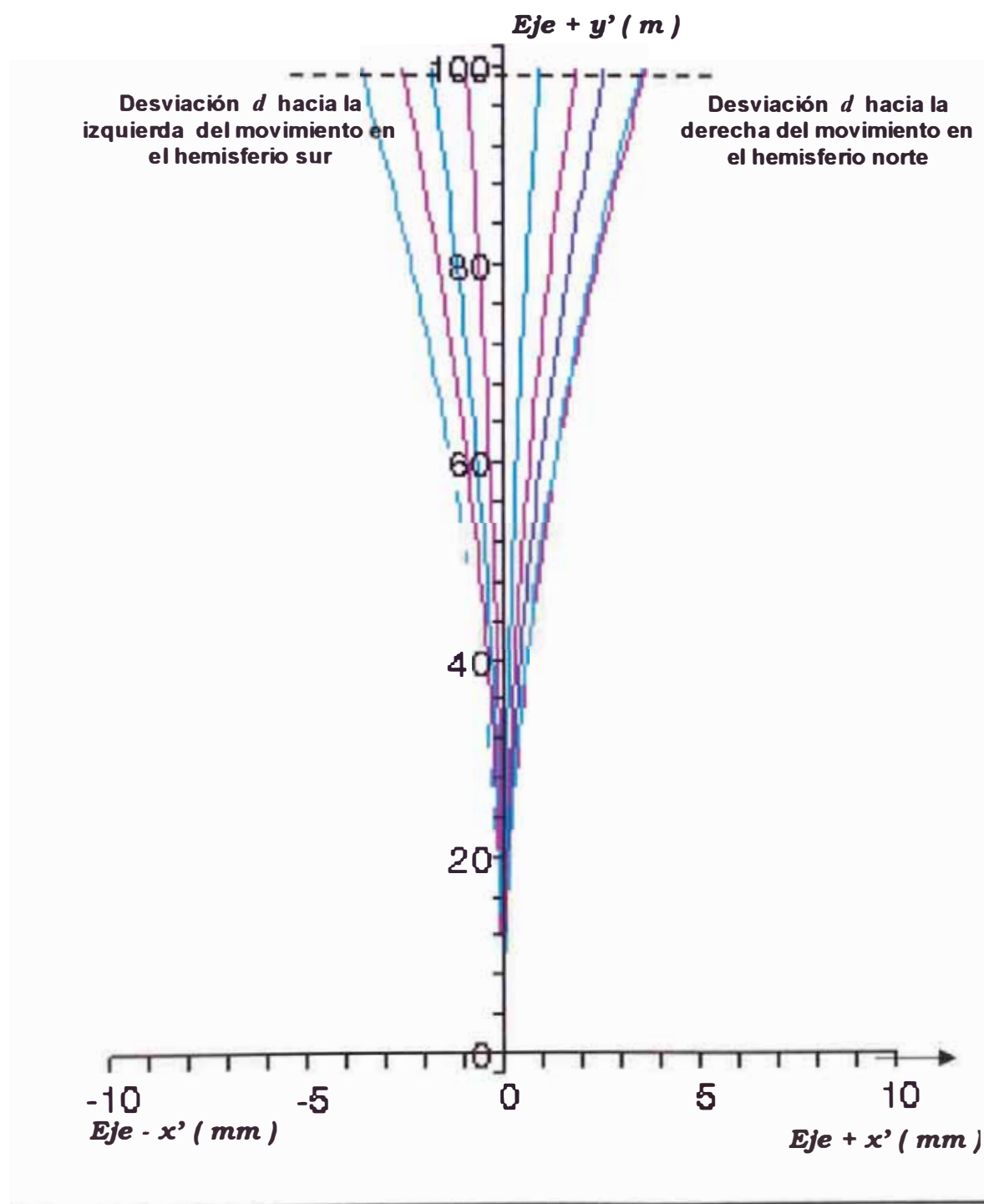
Tabla 16

Altura h (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de movimiento (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje x' (cm)	Desviación en el eje y' (m)	Desviación en el eje z' (cm)
2	200	9,81	7,27E-05	0,5	$-\pi/2$	-0,004	100,00	0,77
					$-5\pi/12$	-0,004	100,00	0,77
					$-\pi/3$	-0,003	100,00	0,78
					$-\pi/4$	-0,003	100,00	0,78
					$-\pi/6$	-0,002	100,00	0,78
					$-\pi/12$	-0,001	100,00	0,78
					0	-0,000	100,00	0,78

GRAFICA DEL CASO 8

- ♦ La gráfica caso 8 mostrada corresponde a la proyección del movimiento en el plano $x' y'$ que realiza un objeto que es lanzado horizontalmente a una altura h respecto de la superficie de la tierra en dirección este para un tiempo t con velocidad inicial v_0 a diferentes latitudes λ en el hemisferio norte y hemisferio sur. La gráfica caso 8 muestra la desviación d hacia la derecha del movimiento en el hemisferio norte (dirección positiva del eje x') y la desviación hacia la izquierda del movimiento en el hemisferio sur (dirección negativa del eje x') que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra.
- ♦ De las tablas 15 y 16 se observa que la desviación d respecto a la dirección del movimiento es máxima en los polos y cero en el Ecuador ($\lambda = 0$).

Gráfica Caso 8



3.4.5 Objeto lanzado horizontalmente en dirección oeste

Se analizará la desviación que sufre el movimiento de un objeto cuando es lanzado horizontalmente en dirección oeste (dirección negativa del eje y') a una altura h de la superficie terrestre y una velocidad inicial \vec{v}_0 en el hemisferio norte y hemisferio sur.

A) Análisis del movimiento en el Hemisferio Norte :

Un objeto se lanza horizontalmente en dirección oeste a una altura h respecto de la superficie y con velocidad inicial \vec{v}_0 . Entonces las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = h\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; h) \quad (3.4.102)$$

$$\vec{v}'_0 = -v_0\vec{e}'_2 = (0 ; -v_0 ; 0) \quad (3.4.103)$$

$$\vec{g}' = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.104)$$

$$\vec{w}' = -w\cos\lambda\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w\sin\lambda\vec{e}'_3 = (-w\cos\lambda ; 0 ; w\sin\lambda) \quad (3.4.105)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}'t^2 - \vec{w}' \times (\vec{v}'_0 t^2 + \frac{1}{3}\vec{g}'t^3) \quad (3.4.106)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & -v_0 t^2 & 0 \end{vmatrix} = wv_0 t^2 \cos \lambda \vec{e}'_3 + wv_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \vec{e}'_1 \quad (3.4.107)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^3 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.108)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.107) y (3.4.108) en la ecuación (3.4.106) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h \vec{e}'_3 - v_0 t \vec{e}'_2 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 - wv_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \vec{e}'_1 + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 - wv_0 t^2 \cos \lambda \vec{e}'_3 \quad (3.4.109)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = -wv_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \quad (3.4.110)$$

$$y'(t) = -v_0 t + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.111)$$

$$z'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 - wv_0 t^2 \cos \lambda \quad (3.4.112)$$

Del análisis de las componentes del movimiento dadas por las ecuaciones (3.4.110), (3.4.111) y (3.4.112) se puede ver que debido a la presencia de la componente $x'(t)$ con signo negativo (ecuación (3.4.110)) el objeto se desviará hacia la derecha (dirección negativa del eje x') respecto de la dirección del movimiento en el hemisferio norte (ver figura 3.4) debido a la rotación de la tierra.

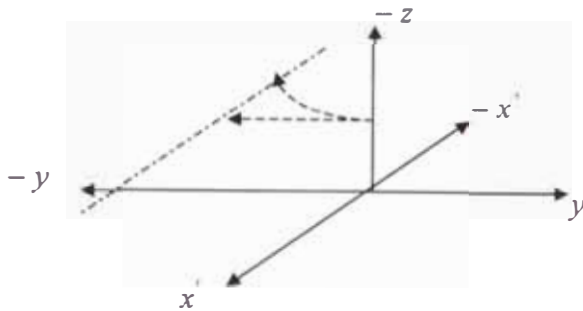


Figura 3.4 Desviación del movimiento en el hemisferio norte

B) Análisis del movimiento en el Hemisferio Sur :

Para el movimiento en el hemisferio sur tenemos que las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = h\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; h) \quad (3.4.113)$$

$$\vec{v}'_0 = -v_0\vec{e}'_2 = (0 ; -v_0 ; 0) \quad (3.4.114)$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.115)$$

$$\vec{w} = -w\cos(-\lambda)\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w\sin(-\lambda)\vec{e}'_3 = (-w\cos\lambda ; 0 ; -w\sin\lambda) \quad (3.4.116)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}'_0 t^2 + \frac{1}{3}\vec{g}t^3) \quad (3.4.117)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}'_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w\cos\lambda & 0 & -w\sin\lambda \\ 0 & -v_0 t & 0 \end{vmatrix} = wv_0 t^2 \cos\lambda \vec{e}'_3 - wv_0 t^2 \sin\lambda \vec{e}'_1 \quad (3.4.118)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.119)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.118) y (3.4.119) en la ecuación (3.4.117) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = h \vec{e}'_3 - v_0 t \vec{e}'_2 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 + w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \vec{e}'_1 + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 - w v_0 t^2 \cos \lambda \vec{e}'_3 \quad (3.4.120)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \quad (3.4.121)$$

$$y'(t) = -v_0 t + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.122)$$

$$z'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 - w v_0 t^2 \cos \lambda \quad (3.4.123)$$

Del análisis de las componentes del movimiento dadas por las ecuaciones (3.4.121), (3.4.122) y (3.123) se puede ver que debido a la presencia de la componente $x'(t)$ con signo positivo (ecuación (3.4.121)) el objeto se desviará hacia la izquierda (dirección positiva del eje x') respecto de la dirección del movimiento en el hemisferio sur (ver figura 3.5) debido a la rotación de la tierra.

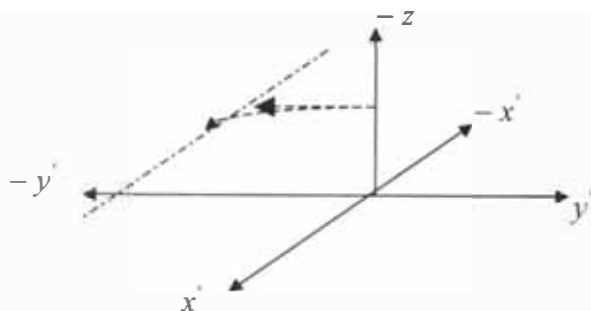


Figura 3.5 Desviación del movimiento en el hemisferio sur

C) Ejemplo Numérico :

CASO 9 : Objeto lanzado horizontalmente en dirección oeste con velocidad inicial \vec{v}_0 para un tiempo t para diferentes latitudes λ_i a una altura h de la superficie.

Hemisferio Norte :

Tabla 17

Altura h (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de movimiento (s)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje x' (cm)	Desviación en el eje y' (m)	Desviación en el eje z' (cm)
2	200	9,81	7,27E-05	0,5	$\pi/2$	-0,004	-100,00	0,77
					$5\pi/12$	-0,004	-100,00	0,77
					$\pi/3$	-0,003	-100,00	0,78
					$\pi/4$	-0,003	-100,00	0,78
					$\pi/6$	-0,002	-100,00	0,78
					$\pi/12$	-0,001	-100,00	0,78
					0	0,000	-100,00	0,78

Hemisferio Sur :

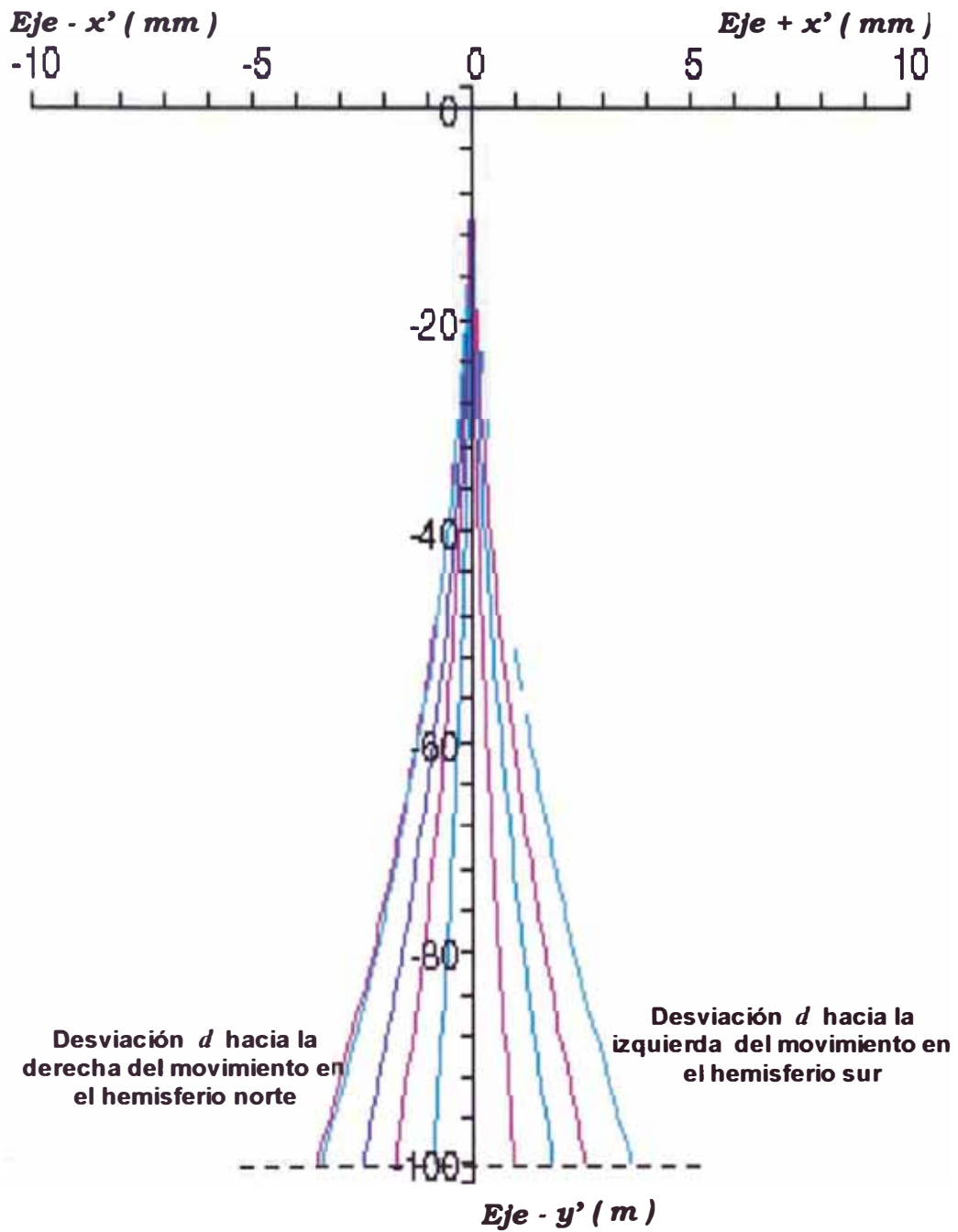
Tabla 18

Altura (m)	Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular ω (rad / s)	Tiempo de movimiento (s)	Latitud geográfica (λ ,)	Desviación d en el eje x' (cm)	Desviación en el eje y' (m)	Desviación en el eje z' (cm)
2	200	9,81	7,27E-05	0,5	$-\pi/2$	0,004	-100,00	0,77
					$-5\pi/12$	0,004	-100,00	0,77
					$-\pi/3$	0,003	-100,00	0,78
					$-\pi/4$	0,003	-100,00	0,78
					$-\pi/6$	0,002	-100,00	0,78
					$-\pi/12$	0,001	-100,00	0,78
					0	0,000	-100,00	0,78

GRAFICA DEL CASO 9

- ♦ La gráfica caso 9 mostrada corresponde a la proyección del movimiento en el plano $x' y'$ que realiza un objeto que es lanzado horizontalmente a una altura h respecto de la superficie de la tierra en dirección oeste para un tiempo t con velocidad inicial v_0 a diferentes latitudes λ en el hemisferio norte y hemisferio sur. La gráfica caso 8 muestra la desviación d hacia la derecha del movimiento en el hemisferio norte (dirección negativa del eje x') y la desviación hacia la izquierda del movimiento en el hemisferio sur (dirección positiva del eje x') que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra.
- ♦ De las tablas 17 y 18 se observa que la desviación d respecto a la dirección del movimiento es máxima en los polos y cero en el Ecuador ($\lambda = 0$).

Gráfica Caso 9



3.4.6 Objeto lanzado parabólicamente haciendo un ángulo β con la dirección este

Se analizará la desviación que sufre el movimiento de un objeto respecto del eje y' cuando es lanzado en dirección este (dirección positiva del eje y') con velocidad inicial \vec{v}_0 haciendo un ángulo β respecto al eje y' en el hemisferio norte y hemisferio sur.

A) Análisis del movimiento en el hemisferio Norte :

Un objeto se lanza con un ángulo de inclinación β respecto del eje y' de tal modo que realice un movimiento parabólico, las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = 0\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; 0) \quad (3.4.124)$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\beta \vec{e}'_2 + v_0 \sin\beta \vec{e}'_3 = (0 ; v_0 \cos\beta ; v_0 \sin\beta) \quad (3.4.125)$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.126)$$

$$\vec{w} = -w \cos\lambda \vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w \sin\lambda \vec{e}'_3 = (-w \cos\lambda ; 0 ; w \sin\lambda) \quad (3.4.127)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.4.128)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{v}_0 t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & v_0 t^2 \cos \beta & v_0 t^2 \operatorname{sen} \beta \end{vmatrix}$$

$$= -w v_0 t^2 \cos \lambda \cos \beta \vec{e}'_3 - w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \beta \vec{e}'_1 + w v_0 t^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \beta \vec{e}'_2 \quad (3.4.129)$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.130)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.129) y (3.4.130) en la ecuación (3.4.128) tenemos:

$$\vec{r}'(t) = v_0 t \cos \beta \vec{e}'_2 + v_0 t \operatorname{sen} \beta \vec{e}'_3 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 + w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \beta \vec{e}'_1 \dots$$

$$- w v_0 t^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \beta \vec{e}'_2 + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 + w v_0 t^2 \cos \lambda \cos \beta \vec{e}'_3 \quad (3.4.131)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \beta \quad (3.4.132)$$

$$y'(t) = v_0 t \cos \beta - w v_0 t^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \beta + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.133)$$

$$z'(t) = v_0 t \operatorname{sen} \beta - \frac{1}{2} g t^2 + w v_0 t^2 \cos \lambda \cos \beta \quad (3.4.134)$$

Del análisis de las componentes del movimiento dadas por las ecuaciones (3.4.132), (3.4.133) y (3.4.134) se puede ver que debido a la presencia de la componente $x'(t)$ con signo positivo (ecuación (3.4.132)) el objeto se desviará hacia la derecha (dirección positiva del eje x') respecto de la dirección del

movimiento en el hemisferio norte (ver figura 3.6) debido a la rotación de la tierra.

Si despreciamos el último término de la ecuación (3.4.134) e igualamos a cero obtenemos el tiempo total que demora el objeto en realizar el movimiento parabólico, entonces tenemos

$$z'(t) = 0 = v_0 \operatorname{sen} \beta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \beta}{g} \quad (3.4.135)$$

reemplazando la ecuación (3.4.135) en la ecuación (3.4.132) obtenemos un expresión independiente del tiempo para la componente x' y determina la desviación respecto al eje y' en el movimiento parabólico en el hemisferio norte.

$$x'(t) = w v_0^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \beta$$

$$x' = \frac{4w v_0^3 \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen} \lambda \cos \beta}{g^2} \quad (3.4.136)$$

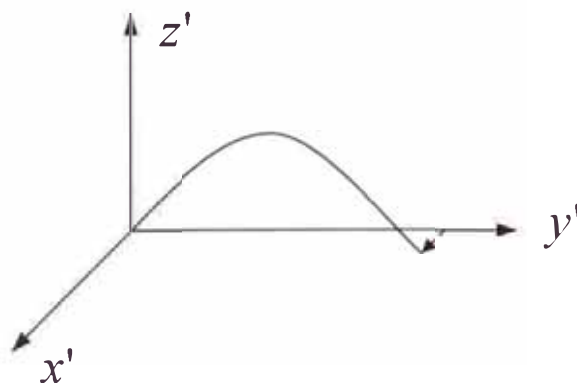


Figura 3.6 Desviación del movimiento en el hemisferio norte

B) Análisis del movimiento en el Hemisferio Sur :

Para el movimiento en el hemisferio sur tenemos que las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}'_0 = 0\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; 0) \quad (3.4.137)$$

$$\vec{v}'_0 = v_0 \cos\beta \vec{e}'_2 + v_0 \operatorname{sen}\beta \vec{e}'_3 = (0 ; v_0 \cos\beta ; v_0 \operatorname{sen}\beta) \quad (3.4.138)$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}'_3 = (0 ; 0 ; -g) \quad (3.4.139)$$

$$\vec{w} = -w \cos(-\lambda) \vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + w \operatorname{sen}(-\lambda) \vec{e}'_3 = (-w \cos \lambda ; 0 ; -w \operatorname{sen} \lambda) \quad (3.4.140)$$

La ecuación que describe el movimiento esta dada por :

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_0 + \vec{v}'_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{w} \times (\vec{v}'_0 t^2 + \frac{1}{3} \vec{g} t^3) \quad (3.4.141)$$

Evaluando el producto vectorial de la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{w} \times \vec{v}'_0 t^2 &= \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & -w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & v_0 t^2 \cos \beta & v_0 t^2 \operatorname{sen} \beta \end{vmatrix} \\ &= -w v_0 t^2 \cos \lambda \cos \beta \vec{e}'_3 + w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \beta \vec{e}'_1 + w v_0 t^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \beta \vec{e}'_2 \quad (3.4.142) \end{aligned}$$

$$\vec{w} \times \frac{1}{3} \vec{g} t^3 = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & -w \operatorname{sen} \lambda \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} g t^3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 \quad (3.4.143)$$

reemplazando los valores obtenidos de las ecuaciones (3.4.142) y (3.4.143) en la ecuación (3.4.141) tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) = & v_0 t \cos \beta \vec{e}'_2 + v_0 t \operatorname{sen} \beta \vec{e}'_3 - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}'_3 - w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \beta \vec{e}'_1 \dots \\ & - w v_0 t^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \beta \vec{e}'_2 + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \vec{e}'_2 + w v_0 t^2 \cos \lambda \cos \beta \vec{e}'_3 \end{aligned} \quad (3.4.144)$$

Por lo tanto las componentes del movimiento serán:

$$x'(t) = -w v_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \beta \quad (3.4.145)$$

$$y'(t) = v_0 t \cos \beta - w v_0 t^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \beta + \frac{1}{3} w g t^3 \cos \lambda \quad (3.4.146)$$

$$z'(t) = v_0 t \operatorname{sen} \beta - \frac{1}{2} g t^2 + w v_0 t^2 \cos \lambda \cos \beta \quad (3.4.147)$$

Del análisis de las componentes del movimiento dadas por las ecuaciones (3.4.145), (3.4.146) y (3.4.147) se puede ver que debido a la presencia de la componente $x'(t)$ con signo negativo (ecuación (3.4.145)) el objeto se desviará hacia la izquierda (dirección negativa del eje x') respecto de la dirección del movimiento en el hemisferio sur (ver figura 3.7) debido a la rotación de la tierra.

Si despreciamos el último término de la ecuación (3.4.147) e igualamos a cero obtenemos el tiempo total que demora el objeto en realizar el movimiento parabólico, entonces tenemos

$$z'(t) = 0 = v_0 \operatorname{sen} \beta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \beta}{g} \quad (3.4.148)$$

reemplazando la ecuación (3.4.145) en la ecuación (3.4.142) obtenemos un expresión independiente del tiempo para la componente x' y determina la desviación en el movimiento parabólico en el hemisferio sur.

$$x'(t) = -wv_0 t^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \beta$$

$$x' = \frac{-4wv_0^3 \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen} \lambda \cos \beta}{g^2} \quad (3.4.149)$$

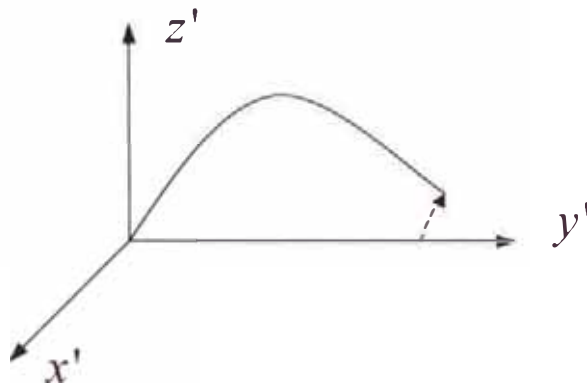


Figura 3.7 Desviación del movimiento en el hemisferio sur

C) Ejemplo Numérico

CASO 10 : Objeto lanzado parabólicamente en dirección este haciendo un ángulo β con velocidad inicial $\vec{v}_0 = 300 \text{ m/s}$ para diferentes latitudes λ_i sobre de la superficie.

Hemisferio Norte

Tabla 19

Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Angulo β (rad)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje x' (m)	Distancia alcanzada en el eje y' (m)
300	9,81	7,27E-05	43,2	$\pi/4$	$\pi/2$	28,8	9174,3
					$5\pi/12$	27,9	9171,8
					$\pi/3$	25,0	9169,5
					$\pi/4$	20,4	9167,5
					$\pi/6$	14,4	9149,3
					$\pi/12$	7,5	9165,0
					0	0,0	9164,7

Hemisferio Sur :

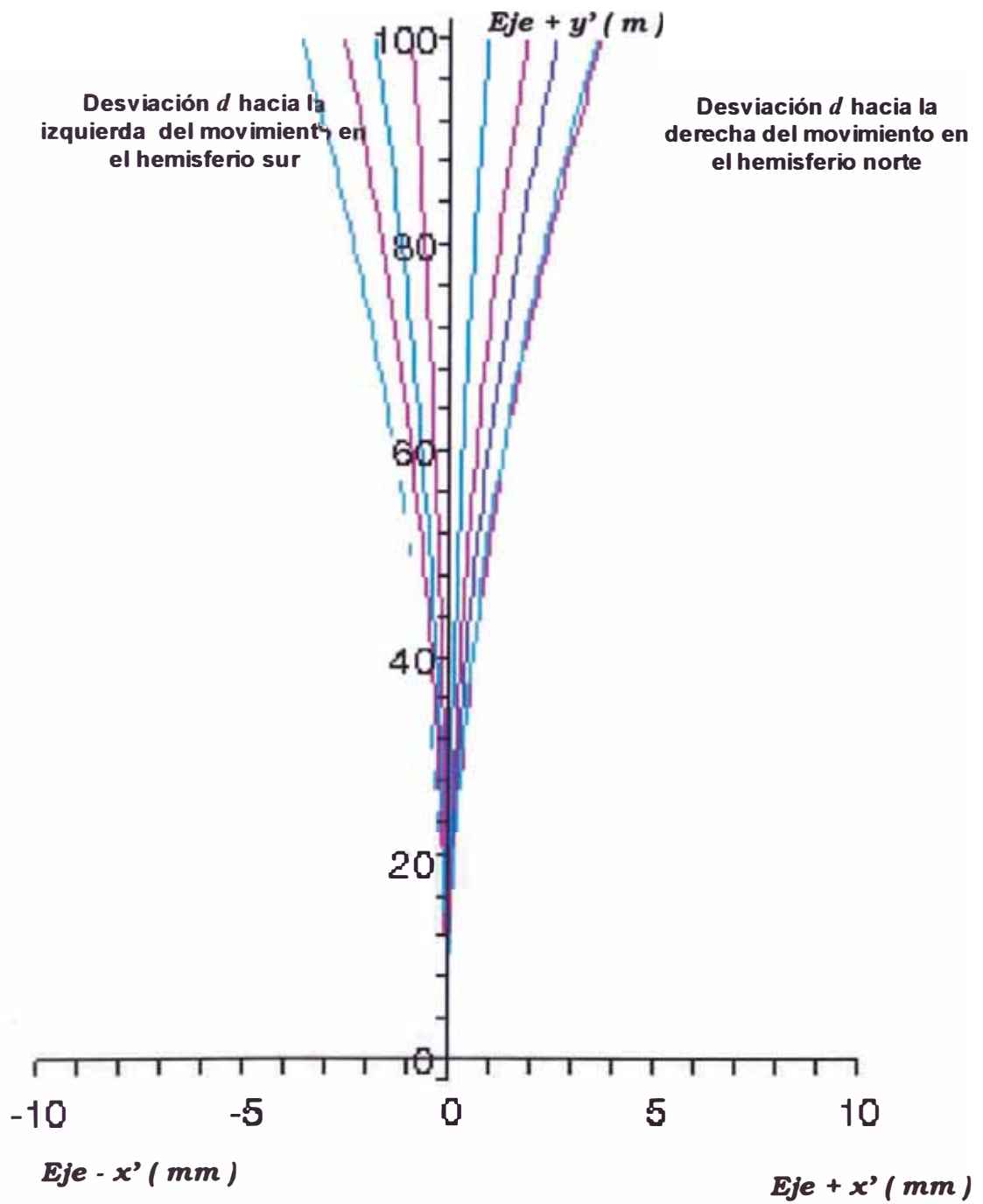
Tabla 20

Velocidad inicial v_0 (m/s)	Módulo de la aceleración de la gravedad g (m/s^2)	Módulo de la velocidad angular ω (rad/s)	Tiempo de caída (s)	Angulo β (rad)	Latitud geográfica (λ_i)	Desviación d en el eje x' (m)	Desviación en el eje y' (m)
300	9,81	7,27E-05	43,2	$\pi/4$	$-\pi/2$	-28,8	9174,3
					$-5\pi/12$	-27,9	9171,8
					$-\pi/3$	-25,0	9169,5
					$-\pi/4$	-20,4	9167,5
					$-\pi/6$	-14,4	9166,0
					$-\pi/12$	-7,5	9165,0
					0	0,0	9164,7

GRAFICA DEL CASO 10

- ♦ La gráfica caso 10 mostrada corresponde a la proyección del movimiento en el plano $x' y'$ que realiza un objeto que es lanzado parabólicamente en dirección este haciendo un ángulo $\beta = \pi/4$ con una velocidad inicial de lanzamiento v_0 a diferentes latitudes λ en el hemisferio norte y hemisferio sur. La gráfica caso 10 muestra la desviación d hacia la derecha respecto del eje y' en el hemisferio norte (dirección positiva del x') y la desviación hacia la izquierda respecto eje y' en el hemisferio sur (dirección negativa del x') que sufre un objeto debido a la rotación de la tierra.
- ♦ De las tablas 19 y 20 se observa que la desviación d respecto a la dirección del eje y' es máxima en los polos y cero en el Ecuador ($\lambda = 0$).

Gráfica Caso 10



CAPITULO 4

PENDULO DE FOUCAUL T 4.1 Introducción

En 1851, Jean León Foucault encontró una prueba simple y convincente de la rotación de la tierra: un péndulo tiende a mantener su movimiento en un plano de oscilación, independiente de cualquier rotación del punto de suspensión. Si tal rotación es sin embargo observada en un laboratorio, uno sólo puede concluir que el laboratorio (en nuestro caso la tierra) gira.

El efecto de la fuerza de Coriolis sobre el movimiento del péndulo es originar una rotación a través del tiempo del plano de oscilación.

4.2 Ecuaciones del movimiento del péndulo

La figura 4.1 muestra el arreglo del péndulo y fija los ejes de un sistema de coordenadas cuyo origen se encuentra en el punto de equilibrio del péndulo, con el eje z situado según la vertical local. Nos interesaremos únicamente por el giro del plano de oscilación; es decir, analizaremos el movimiento de la masa suspendida del péndulo sobre el plano $x - y$ (plano horizontal), por lo tanto limitaremos el movimiento a oscilaciones de pequeña amplitud, en las que los desplazamientos máximos horizontales son pequeños en comparación con la longitud del péndulo. En tales condiciones, la velocidad en el eje z será pequeña comparada a las velocidades de los otros ejes, pudiendo despreciarse.

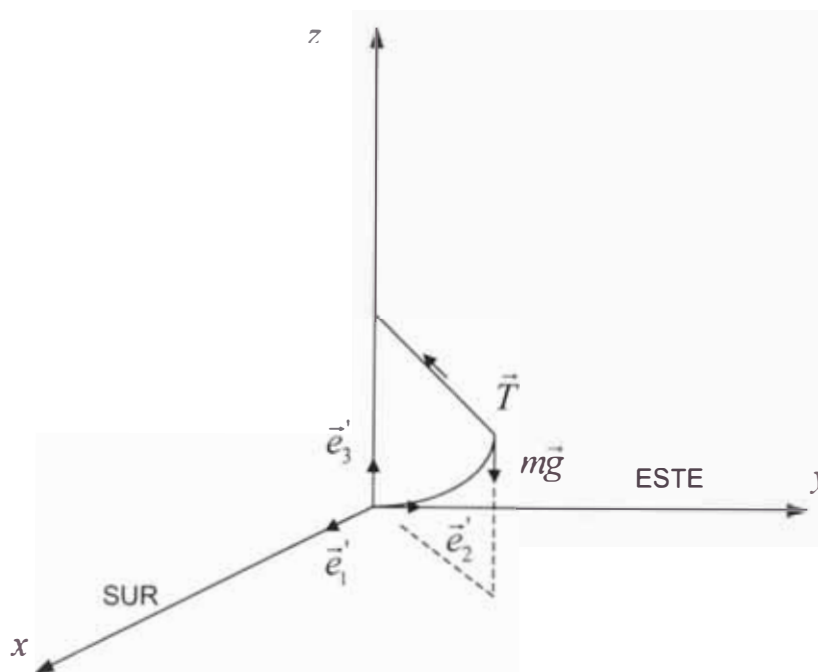


Figura 4.1 Principio del péndulo de Foucault

La ecuación del movimiento del péndulo de Foucault lo obtendremos de la ecuación (3.2.12), en

este caso la fuerza exterior \vec{F}^e es la tensión \vec{T}

$$\vec{F}^e = \vec{T} \quad (4.2.1)$$

Entonces tenemos:

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{T} \quad (4.2.2)$$

Como es obvio de la ecuación (4.2.2), la rotación de la tierra es expresada para el observador no inercial por la aparición de una fuerza relativa, **la fuerza de Coriolis**. La fuerza de Coriolis causa una rotación en el plano de oscilación del péndulo. La tensión de cuerda T esta dirigida hacia el origen de coordenada; y tiene la siguiente forma:

$$\vec{T} = (\vec{T} \cdot \vec{e}'_1)\vec{e}'_1 + (\vec{T} \cdot \vec{e}'_2)\vec{e}'_2 + (\vec{T} \cdot \vec{e}'_3)\vec{e}'_3 = T \frac{\vec{T}}{T} \quad (4.2.3)$$

$$\vec{T} = T \frac{(-x, -y, l-z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (l-z)^2}} \approx T \frac{(-x, -y, l-z)}{l} \quad (4.2.4)$$

El último paso, es debido a que la longitud del péndulo l es muy grande, de modo que

$x/l \ll 1$, $y/l \ll 1$ y $z/l \ll \ll 1$. Por lo tanto la expresión para la tensión \vec{T} estará dada

finalmente por:

$$\vec{T} = T \left(-\frac{x}{l} \vec{e}'_1 - \frac{y}{l} \vec{e}'_2 - \frac{z-l}{l} \vec{e}'_3 \right) \quad (4.2.5)$$

Antes de reemplazar la ecuación (4.2.5) en ecuación (4.2.2), es práctico descomponer (4.2.2)

en componentes individuales. Para este fin se evalúa el producto vectorial de $\vec{w} \times \vec{v}$:

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ -w \cos \lambda & 0 & w \operatorname{sen} \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \quad (4.2.6)$$

$$= -w \operatorname{sen} \lambda \dot{y} \vec{e}'_1 + w(\operatorname{sen} \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \vec{e}'_2 - w \cos \lambda \dot{y} \vec{e}'_3 \quad (4.2.7)$$

Reemplazando (4.2.5) y (4.2.7) en la ecuación (4.2.2) con $\vec{g} = -g \vec{e}'_3$, obtenemos un sistema

de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{l}T + 2mw \operatorname{sen} \lambda \dot{y} \quad (4.2.8)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{l}T - 2mw(\operatorname{sen} \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \quad (4.2.9)$$

$$m\ddot{z} = \frac{l-z}{l}T - mg + 2mw \cos \lambda \dot{y} \quad (4.2.10)$$

Para eliminar la tensión desconocida de la cuerda T de las ecuaciones (4.2.8), (4.2.9) y (4.2.10), adoptamos las ya mencionadas aproximaciones:

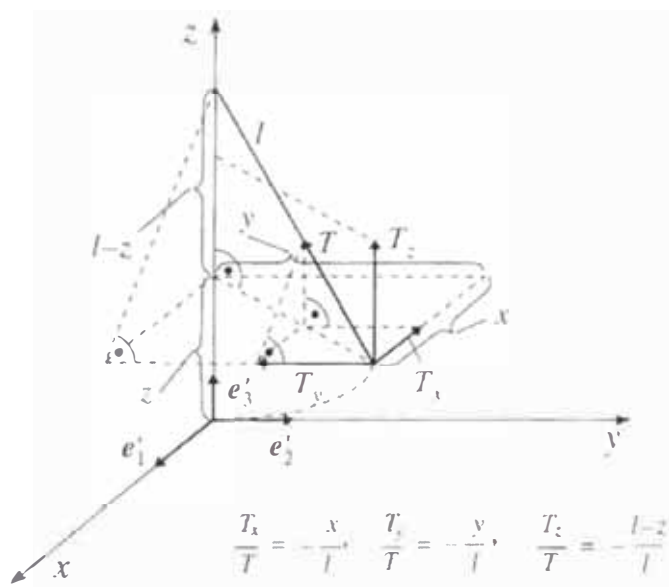


Figura 4.2 Proyección de la tensión de la cuerda T en el eje \bar{e}_i'

En la ecuación (4.2.10) la velocidad \dot{z} se considera pequeña y $l \gg z$ por lo que:

$$\frac{l-z}{l} \approx 1, \quad m\dot{z} \approx 0 \quad (4.2.11)$$

colocando esto en la ecuación (4.2.10) obtenemos la expresión para T

$$T = mg - 2mw \cos \lambda \dot{y} \quad (4.2.12)$$

Reemplazando la ecuación (4.2.12) en las ecuaciones (4.2.8) y (4.2.9) obtenemos:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + \frac{2w \cos \lambda}{l}x\dot{y} + 2w \sin \lambda \dot{y} \quad (4.2.13)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y + \frac{2w \cos \lambda}{l}y\dot{y} - 2w \operatorname{sen} \lambda \dot{x} \quad (4.2.14)$$

Las ecuaciones (4.2.13) y (4.2.14) representan un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Los términos no lineal son $x\dot{y}$ y $y\dot{y}$. Donde los productos de los números pequeños w , x , e \dot{y} (o w , y e \dot{y}) son insignificantes comparado a los otros términos por lo que se pueden despreciar y las ecuaciones (4.2.13) y (4.2.14) puede ser consideradas aproximadamente equivalentes a las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2w \operatorname{sen} \lambda \dot{y} \quad (4.2.15)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2w \operatorname{sen} \lambda \dot{x} \quad (4.2.16)$$

Estas dos ecuaciones diferenciales lineales (pero acopladas) describen la oscilación de un péndulo bajo la influencia de la fuerza de Coriolis para una buena aproximación. En lo que sigue vamos a describir un método de solución del sistema de ecuaciones (4.2.15) y (4.2.16).

4.3 Solución general de la ecuación de movimiento del péndulo

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (4.2.15) y (4.2.16) realizamos los siguientes cambios:

$$\frac{g}{l} = k^2 \quad (4.3.1)$$

$$w \operatorname{sen} \lambda = \alpha \quad (4.3.2)$$

y multiplicando a la ecuación (4.2.16) por la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ y sumando con la ecuación (4.2.15), obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k^2 x - 2\alpha i^2 \dot{y} \\ i\ddot{y} &= -k^2 iy - 2\alpha i\dot{x} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -k^2(x + iy) - 2\alpha i(\dot{x} + i\dot{y}) \quad (4.3.4)$$

Haciendo $u = x + iy$ y reemplazando en la ecuación (4.3.4) obtenemos:

$$\ddot{u} = -k^2 u - 2\alpha i\dot{u} \quad \text{o} \quad \ddot{u} + 2\alpha i\dot{u} + k^2 u = 0 \quad (4.3.5)$$

Resolviendo la ecuación diferencial homogénea de segundo orden (4.3.5) utilizando :

$$u = C \cdot e^{\gamma t} \quad (4.3.6)$$

Reemplazando la ecuación (4.3.6) en (4.3.5) y efectuando las respectivas derivadas.

$$C\gamma^2 e^{\gamma t} + 2\alpha i C\gamma e^{\gamma t} + k^2 C e^{\gamma t} = 0 \quad \text{ó} \quad \gamma^2 + 2\alpha i\gamma + k^2 = 0 \quad (4.3.7)$$

obtenemos las expresiones para γ .

Las dos soluciones de la ecuación característica (4.3.7) son:

$$\gamma_{1/2} = -i\alpha \pm ik \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{k^2}} \quad (4.3.8)$$

Donde $\alpha^2 = w^2 \text{sen}^2 \lambda$ debido a que $\frac{w^2}{k^2}$ es pequeño comparado a 1

$$\left(\frac{w^2}{k^2} = \frac{T_{\text{pend}}^2}{T_{\text{tierra}}^2} \ll 1 \text{ donde } T_{\text{pend}} \text{ es el período del péndulo y } T_{\text{tierra}} = 1 \text{ día}\right), \text{ la ecuación}$$

(4.3.8) queda reducida a:

$$\gamma_{1/2} = -i\alpha \pm ik \quad (4.3.9)$$

La solución general de la ecuación diferencial (4.3.5) es una combinación lineal de las soluciones linealmente independientes.

$$u = A e^{\gamma_1 t} + B e^{\gamma_2 t} \quad (4.3.10)$$

donde A y B deben ser determinados por las condiciones iniciales y son por supuesto complejos. La ecuación (4.3.10) pueden ser descompuesto en un parte real e imaginaria:

$$u = (A_1 + iA_2)e^{-i(\alpha - k)t} + (B_1 + iB_2)e^{-i(\alpha + k)t} \quad (4.3.11)$$

La relación de Euler $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \text{sen} \varphi$ permite separar la ecuación (4.3.11) en parte real e imaginaria $u = x + iy$, por lo tanto obtenemos :

$$u = x + iy = (A_1 + iA_2)[\cos(\alpha - k)t - i \text{sen}(\alpha - k)t] + (B_1 + iB_2)[\cos(\alpha + k)t - i \text{sen}(\alpha + k)t] \quad (4.3.12)$$

separando la parte real e imaginaria e imaginaria de la ecuación (4.3.12) tenemos la solución:

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + B_1 \cos(\alpha + k)t + B_2 \operatorname{sen}(\alpha + k)t \quad (4.3.13)$$

$$y = -A_1 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t - B_1 \operatorname{sen}(\alpha + k)t + B_2 \cos(\alpha + k)t, \quad (4.3.14)$$

4.4 Soluciones particulares de la ecuación del movimiento del péndulo

Teniendo como punto de partida la solución general de la ecuación del movimiento del péndulo dadas por las ecuaciones (4.3.13) y (4.3.14), se determinarán las constantes A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , dando diferentes condiciones iniciales.

CASO 1

El péndulo es desplazado una distancia L en dirección positiva del eje y y liberado tal que en el tiempo $t = 0$ su velocidad inicial sea cero. Entonces las condiciones iniciales son:

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0 \quad (4.4.1)$$

$$y_0 = L, \quad \dot{y}_0 = 0 \quad (4.4.2)$$

Partiendo de la solución general

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + B_1 \cos(\alpha + k)t + B_2 \operatorname{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.3)$$

$$y = -A_1 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t - B_1 \operatorname{sen}(\alpha + k)t + B_2 \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.4)$$

Reemplazando la condición inicial $x_0 = 0$ en la ecuación (4.4.3), obtenemos

$$B_1 = -A_1 \quad (4.4.5)$$

Derivando la ecuación (4.4.3) y reemplazando la condición inicial $\dot{x}_0 = 0$ se obtiene:

$$B_2 = A_2 \frac{k - \alpha}{k + \alpha} \quad (4.4.6)$$

Como ya se menciona para la ecuación (4.3.8) $\alpha \ll k$ por lo tanto la ecuación (4.4.6) resulta

$$B_2 \approx A_2 \quad (4.4.7)$$

Reemplazando los resultados obtenidos de las ecuaciones (4.4.5) y (4.4.7) en las ecuaciones (4.3.3) y (4.3.4) tenemos:

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \operatorname{sen}(\alpha - k)t - A_1 \cos(\alpha + k)t + A_2 \operatorname{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.8)$$

$$y = -A_1 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t + A_1 \operatorname{sen}(\alpha + k)t + A_2 \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.9)$$

Consideremos ahora las condiciones iniciales para y_0 e \dot{y}_0 .

Derivando la ecuación (4.4.9) y reemplazando la condición inicial $\dot{y}_0 = 0$, obtenemos:

$$-A_1(\alpha - k) + A_1(\alpha + k) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \quad (4.4.10)$$

De la condición inicial $y_0 = L$ y la ecuación (4.4.9) obtenemos:

$$2A_2 = L \Rightarrow A_2 = \frac{L}{2} \quad (4.4.11)$$

Reemplazando las expresiones obtenidas de las ecuaciones (4.4.10) y (4.4.11) en las ecuaciones (4.4.8) y (4.4.9) obtenemos:

$$x = \frac{L}{2} \text{sen}(\alpha - k)t + \frac{L}{2} \text{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.12)$$

$$y = \frac{L}{2} \cos(\alpha - k)t + \frac{L}{2} \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.13)$$

usando las formulas trigonometría

$$\text{sen}(\alpha \pm k) = \text{sen} \alpha \cos k \pm \cos \alpha \text{sen} k$$

$$\cos(\alpha \pm k) = \cos \alpha \cos k \mp \text{sen} \alpha \text{sen} k$$

las ecuaciones (4.4.12) y (4.4.13) resultan:

$$x = L \text{sen} \alpha t \cos kt \quad (4.4.14)$$

$$y = L \cos \alpha t \cos kt \quad (4.4.15)$$

Las dos ecuaciones pueden ser combinadas en una ecuación vectorial.

$$\vec{r} = L \cos kt \left(\text{sen}(\alpha t) \vec{e}'_1 + \cos(\alpha t) \vec{e}'_2 \right) \quad (4.4.16)$$

Como se puede ver de (4.4.16) el periodo de rotación del plano vertical de oscilación T esta relacionado con el periodo con el periodo T_0 de rotación de la tierra:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega \text{sen} \lambda} = \frac{T_0}{\text{sen} \lambda} \quad (4.4.16.1)$$

Conclusión caso 1

El primer factor de la ecuación (3.4.16) describe el movimiento de un péndulo que oscila con la

amplitud L y una frecuencia $k = \sqrt{g/L}$. El segundo término es un vector unitario \vec{n} que gira

con la frecuencia $\alpha = \omega \text{sen} \lambda$ y describe la rotación en el plano de oscilación.

$$\vec{r} = L \cos kt \vec{n}(t) \quad (4.4.17)$$

$$\vec{n}(t) = \sin \alpha t \vec{e}_1' + \cos \alpha t \vec{e}_2' \quad (4.4.18)$$

La ecuación (4.4.16) también nos dice en qué dirección del plano de oscilación gira el péndulo. Para hemisferio norte $\sin \lambda > 0$, y después de un tiempo corto $\sin \alpha t > 0$ y $\cos \alpha t > 0$, es decir, el plano de oscilación gira en sentido horario. Un observador en el hemisferio del sur verá el péndulo girando en sentido antihorario, por que $\sin \lambda < 0$.

En el Ecuador donde $\sin \lambda = 0$ el plano de oscilación no experimenta rotación, mientras que en los polos el periodo de oscilación es menor. Aunque la componente $w_x = -w \cos \lambda$ toma su valor máximo en el Ecuador, la rotación de la tierra en el Ecuador no puede ser demostrado por medio del péndulo de Foucault.

A causa de la suposición $\alpha \ll k$ dado en la ecuación (4.3.8), la ecuación (4.4.16) que describe el movimiento del péndulo siempre pasa la posición del origen de coordenadas.

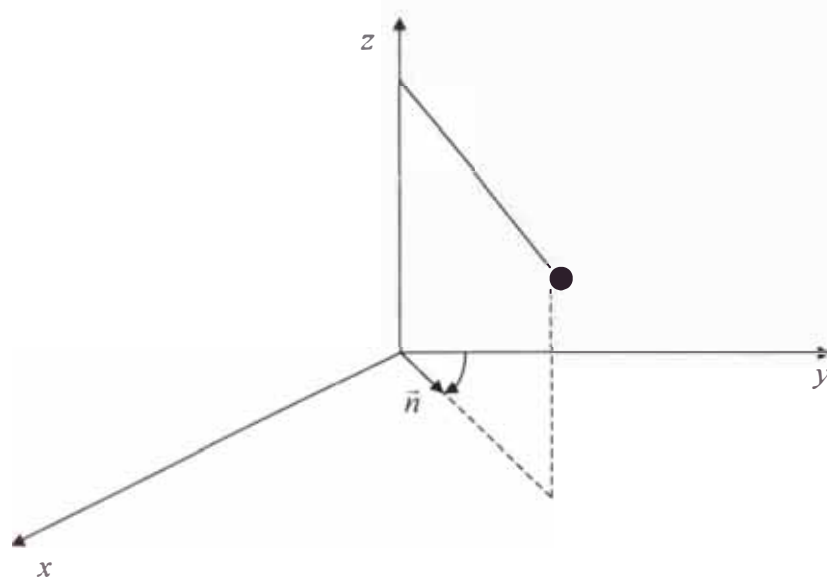


Figura 4.3 Vector unitario $\vec{n}(t)$ rota en el plano $x - y$

Ejemplo numérico caso 1

Hemisferio Norte

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 1 son :

$$x(t) = L \sin \alpha t \cos kt \quad (4.4.19)$$

$$y(t) = L \cos \alpha t \cos kt \quad (4.4.20)$$

Con los valores mostrados en la tabla 1 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.19) y (4.4.20) resultan:

Tablas 1

Amplitud de oscilación	Longitud del Péndulo	Aceleración de la gravedad	Constante k (1/s)	velocidad angular
L (m)	l (m)	g (m/s ²)		w (rad/s)
2	60	9,81	0,40435	7,27E-05

Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el Hemisferio Norte

Latitud geográfica	Componentes x - y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(0t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(0t)$
$\pi/12$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(1,8e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(1,8e-5t)$
$\pi/6$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(3,6e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(3,6e-5t)$
$\pi/4$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(5,1e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(5,1e-5t)$
$\pi/3$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(6,3e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(6,3e-5t)$
$5\pi/12$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(7,02e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(7,02e-5t)$
$\pi/2$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(8,9e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(8,9e-5t)$

Hemisferio Sur

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 1 son :

$$x(t) = L \sin \omega t \cos kt \quad (4.4.21)$$

$$y(t) = L \cos \omega t \cos kt \quad (4.4.22)$$

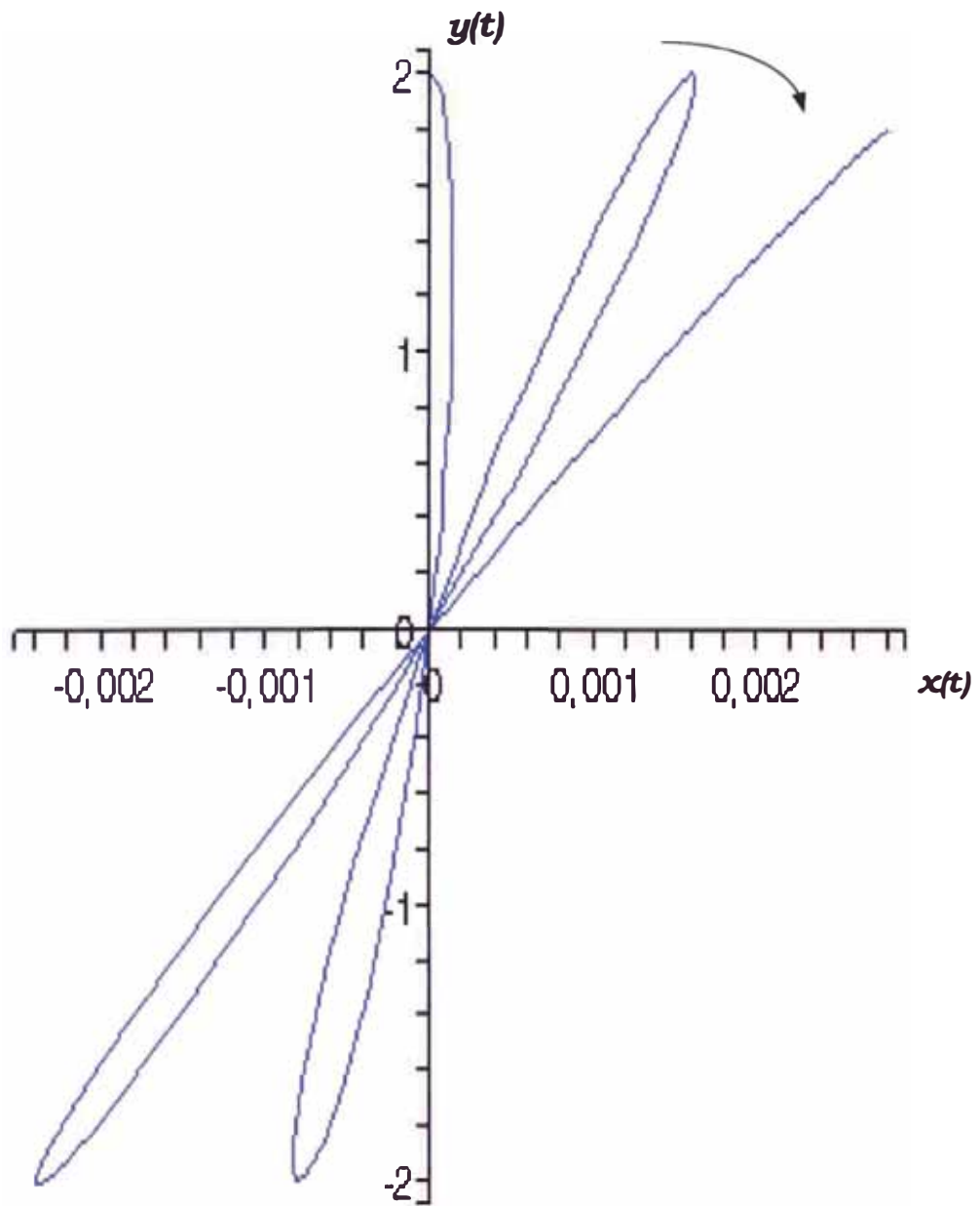
Con los valores mostrados en la tabla 2 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.21) y (4.4.22) resultan:

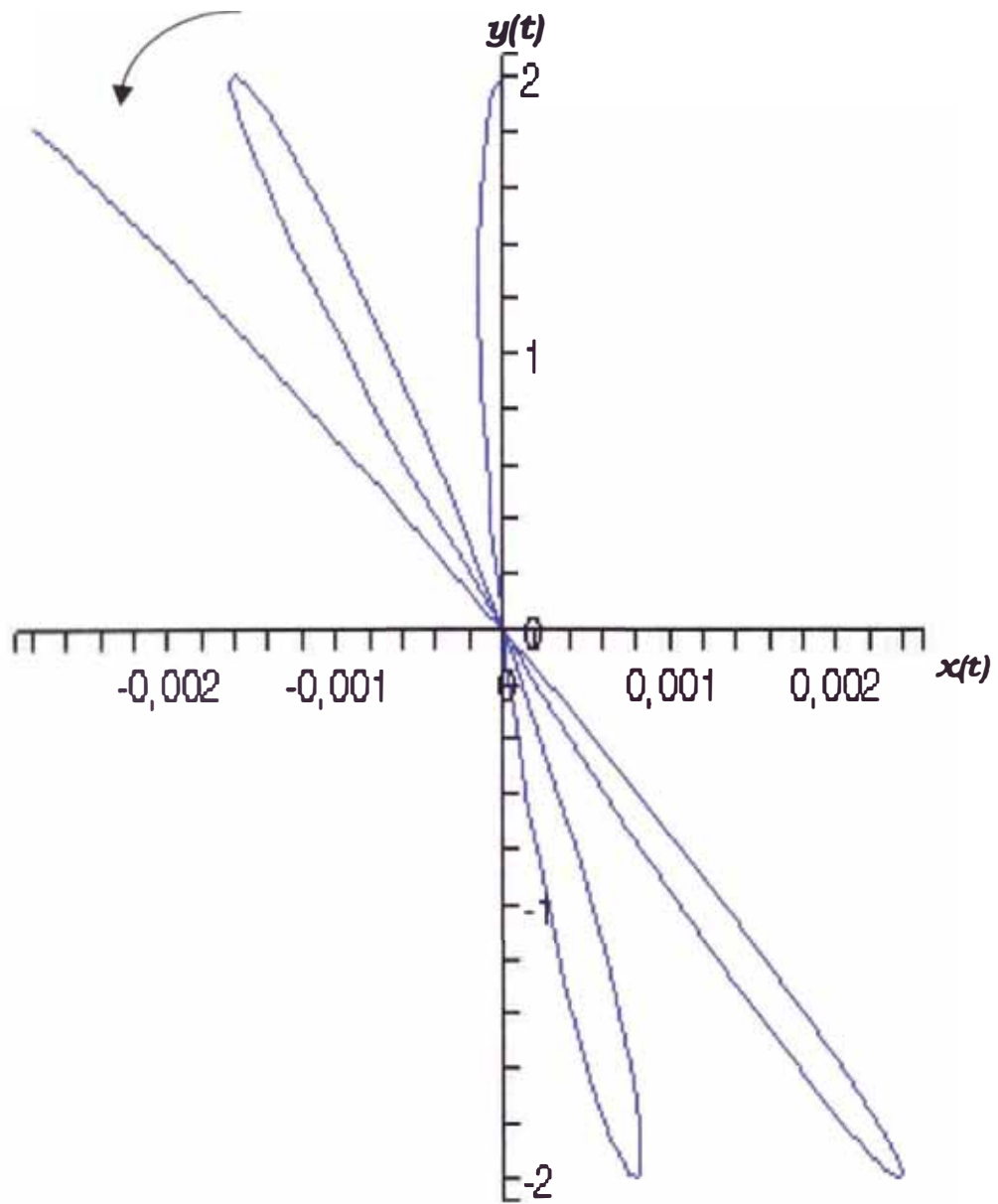
Tablas 2

Amplitud de oscilación L (m)	Longitud del Péndulo l (m)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Constante k (1/s)	velocidad angular ω (rad/s)
2	60	9,81	0,40435	7,27E-05

Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el Hemisferio Sur

Latitud geográfica λ (rad)	Componentes x-y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(0t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(0t)$
$-\pi/12$	$-2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(1,8e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(1,8e-5t)$
$-\pi/6$	$-2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(3,6e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(3,6e-5t)$
$-\pi/4$	$-2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(5,1e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(5,1e-5t)$
$-\pi/3$	$-2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(6,3e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(6,3e-5t)$
$-5\pi/12$	$-2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(7,02e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(7,02e-5t)$
$-\pi/2$	$-2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \sin(8,9e-5t)$	$2 \cdot \cos(4,04e-1t) \cdot \cos(8,9e-5t)$

Gráfica 1**Caso 1 – Hemisferio Norte**

Gráfica 2**Caso 1 – Hemisferio Sur**

CASO 2

El péndulo es lanzado desde el origen de coordenadas tal que en el tiempo $t = 0$ su velocidad inicial V_{0y} sea diferente de cero y en dirección positiva del eje y . Entonces las condiciones iniciales son:

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0 \quad (4.4.23)$$

$$y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = V_{0y} \quad (4.4.24)$$

Partiendo de la solución general:

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + B_1 \cos(\alpha + k)t + B_2 \operatorname{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.25)$$

$$y = -A_1 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t - B_1 \operatorname{sen}(\alpha + k)t + B_2 \cos(\alpha + k)t, \quad (4.4.26)$$

Reemplazando la condición inicial $x_0 = 0$ en la ecuación (4.4.25), obtenemos

$$B_1 = -A_1 \quad (4.4.27)$$

Reemplazando $y_0 = 0$ en (4.4.26), obtenemos

$$B_2 = -A_2 \quad (4.4.28)$$

Derivando la ecuación (4.4.25) y reemplazando la condición inicial $\dot{x}_0 = 0$ se obtiene:

$$A_2 = 0 \quad (4.4.29)$$

Reemplazando las expresiones de las ecuaciones (4.4.27) y (4.4.29) en las ecuaciones (4.4.25) y (4.4.26) obtenemos:

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t - A_1 \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.30)$$

$$y = -A_1 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + A_1 \operatorname{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.31)$$

de la condición inicial $\dot{y}_0 = V_{0y}$ y la ecuación (4.4.31) obtenemos:

$$V_{0y} = -A_1(\alpha - k) + A_1(\alpha + k) \Rightarrow A_1 = \frac{V_{0y}}{2k} \quad (4.4.32)$$

Reemplazando estos valores obtenemos

$$x = \frac{V_{0y}}{2k} \cos(\alpha - k)t - \frac{V_{0y}}{2k} \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.33)$$

$$y = -\frac{V_{0y}}{2k} \operatorname{sen}(\alpha - k)t + \frac{V_{0y}}{2k} \operatorname{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.34)$$

usando las formulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm k) = \operatorname{sen} \alpha \cos k \pm \cos \alpha \operatorname{sen} k$$

$$\cos(\alpha \pm k) = \cos \alpha \cos k \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} k$$

las ecuaciones (4.4.33) y (4.4.34) resultan:

$$x = \frac{V_{0y}}{k} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} kt \quad (4.4.35)$$

$$y = \frac{V_{0y}}{k} \cos \alpha \operatorname{sen} kt \quad (4.4.36)$$

Las dos ecuaciones pueden ser combinadas en una ecuación vectorial.

$$\vec{r} = \frac{V_{0y}}{k} \operatorname{sen} kt \left[\operatorname{sen}(\alpha t) \vec{e}_1 + \cos(\alpha t) \vec{e}_2 \right] \quad (4.4.37)$$

Conclusión caso 2

El primer factor de la ecuación (4.4.37) describe el movimiento de un péndulo que oscila con la

amplitud $\frac{V_{0y}}{k}$ y una frecuencia $k = \sqrt{g/L}$. El segundo término es un vector unitario \vec{n} que gira

con la frecuencia $\alpha = \omega \sin \lambda$ y describe la rotación en el plano de oscilación.

$$\vec{r} = \frac{V_{0y}}{k} \text{sen} kt \vec{n}(t) \quad (4.4.38)$$

$$\vec{n}(t) = \text{sen} \alpha t \vec{e}_1 + \text{cos} \alpha t \vec{e}_2 \quad (4.4.39)$$

La ecuación (4.4.37) también nos dice en que dirección del plano de oscilación gira el péndulo.

Para hemisferio norte $\text{sen} \lambda > 0$, y después de un tiempo corto $\text{sen} \alpha t > 0$ y $\text{cos} \alpha t > 0$, es decir, el plano oscilación gira en sentido horario. Un observador en el hemisferio del sur verá el péndulo girando en sentido antihorario, debido a que $\text{sen} \lambda < 0$

Ejemplo numérico caso 2

Hemisferio Norte

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 2 son

$$x(t) = \frac{V_{0y}}{k} \text{sen} \alpha t \text{sen} kt \quad (4.4.40)$$

$$y(t) = \frac{V_{0y}}{k} \text{cos} \alpha t \text{sen} kt \quad (4.4.41)$$

Con los valores mostrados en la tabla 3 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.40) y (4.4.41) resultan:

Tabla 3

Velocidad inicial	Amplitud de oscilación	Longitud del Péndulo	Aceleración de la gravedad	Constante k (1/s)	velocidad angular
V_{0y} (m/s)	V_{0y} / k (m)	l (m)	g (m/s ²)		w (rad/s)
0,5	1,237	60	9,81	0,40435	7,27E-05

Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el hemisferio norte

Latitud geográfica	Componentes x-y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
λ (rad)		
0	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(0t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(0t)$
$\pi/12$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(1,8e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(1,8e-5t)$
$\pi/6$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(3,6e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(3,6e-5t)$
$\pi/4$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(5,1e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(5,1e-5t)$
$\pi/3$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(6,3e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(6,3e-5t)$
$5\pi/12$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(7,02e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(7,02e-5t)$
$\pi/2$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(8,9e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(8,9e-5t)$

Hemisferio Sur

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 2 son

$$x(t) = \frac{V_{0y}}{k} \text{sen} \alpha t \text{sen} kt \quad (4.4.42)$$

$$y(t) = \frac{V_{0y}}{k} \text{cos} \alpha t \text{sen} kt \quad (4.4.43)$$

Con los valores mostrados en la tabla 4 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.42) y (4.4.43) resultan:

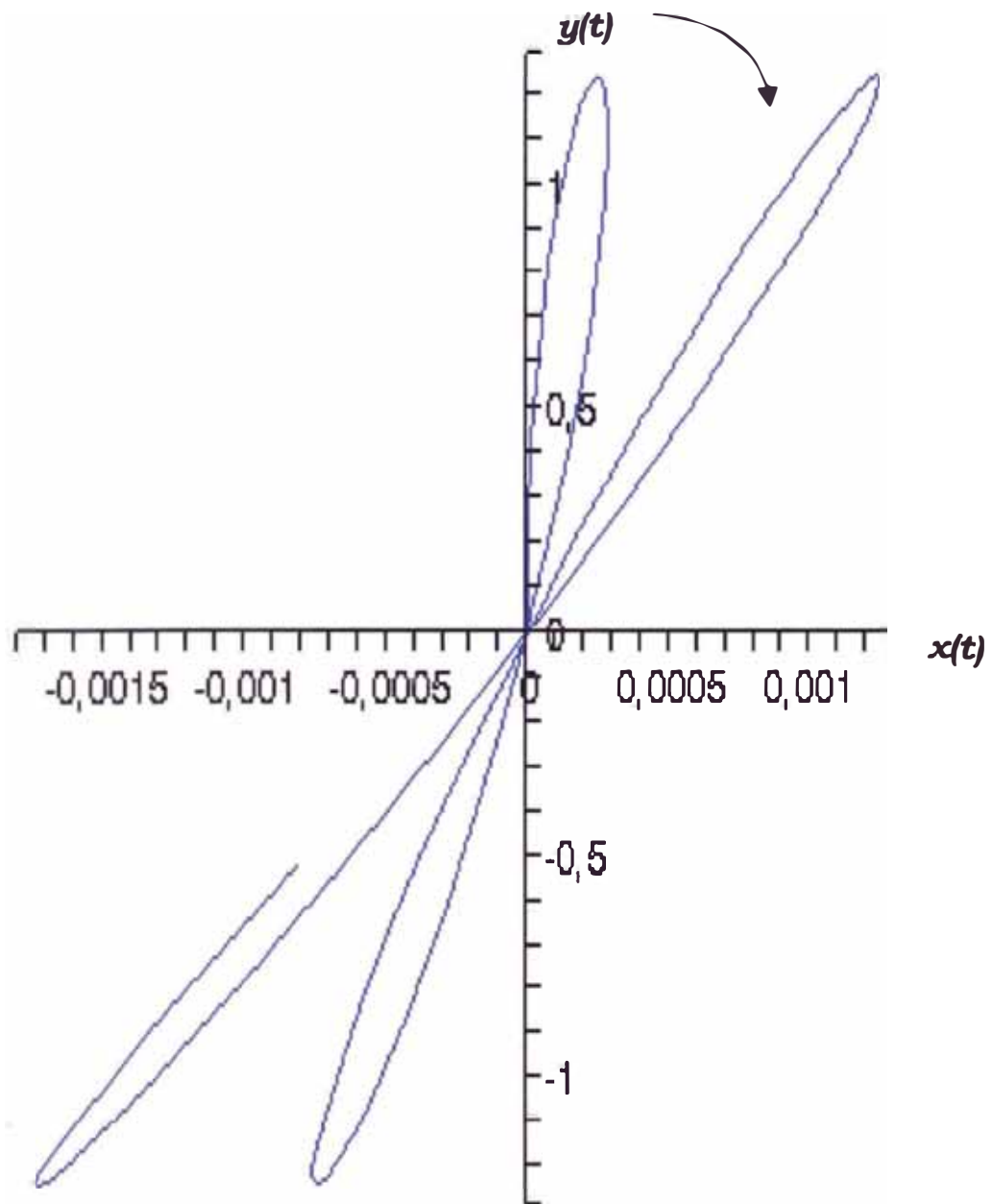
Tabla 4

Velocidad inicial V_{0y} (m/s)	Amplitud de oscilación V_{0y} / k (m)	Longitud del Péndulo l (m)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Constante k (1/s)	velocidad angular w (rad/s)
0,5	1,237	60	9,81	0,40435	7,27E-05

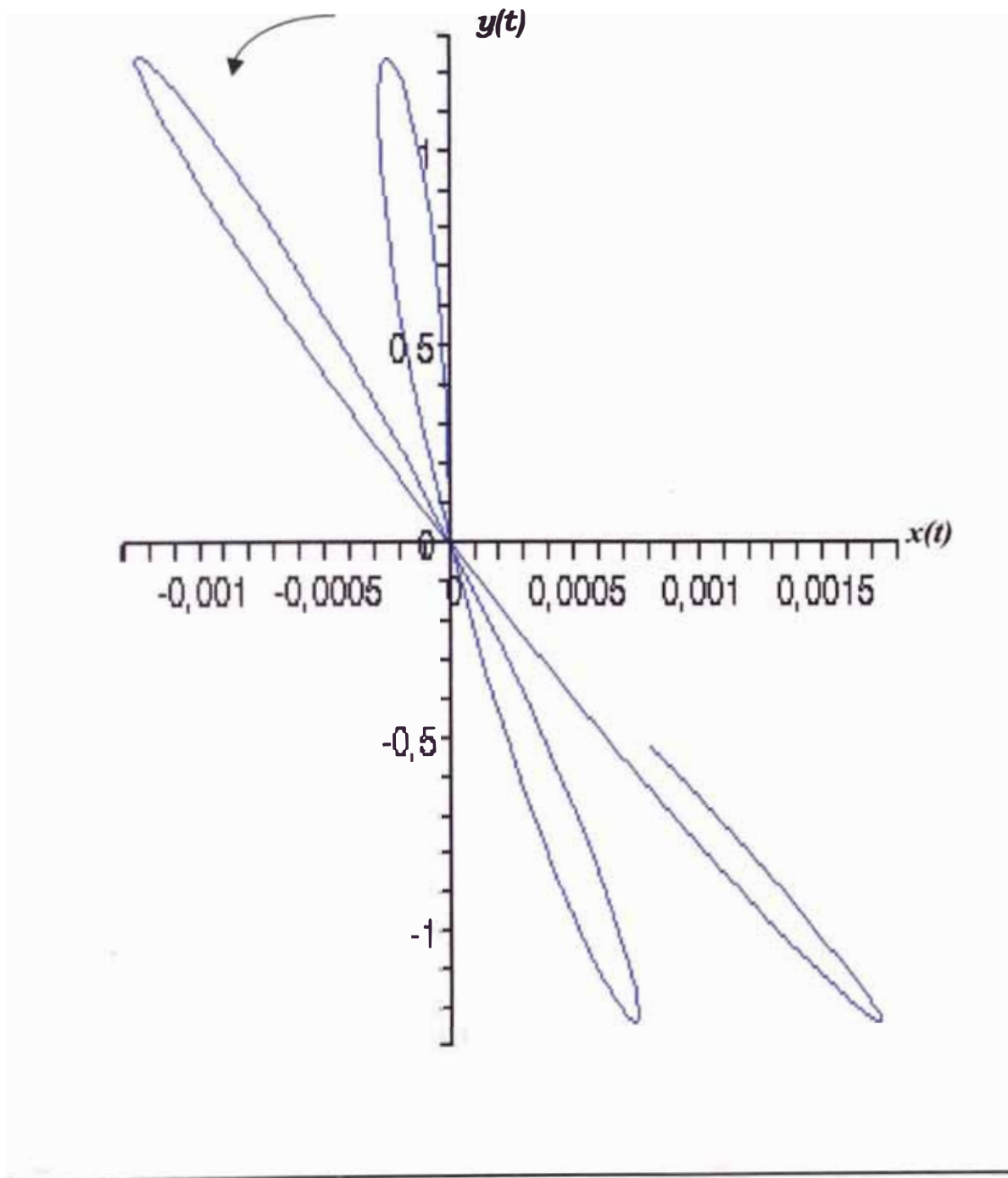
Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el hemisferio sur

Latitud geográfica λ (rad)	Componentes x-y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(0t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(0t)$
$-\pi/12$	$-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(1,8e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(1,8e-5t)$
$-\pi/6$	$-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(3,6e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(3,6e-5t)$
$-\pi/4$	$-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(5,1e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(5,1e-5t)$
$-\pi/3$	$-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(6,3e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(6,3e-5t)$
$-5\pi/12$	$-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(7,02e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(7,02e-5t)$
$-\pi/2$	$-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{sen}(8,9e-5t)$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot \text{cos}(8,9e-5t)$

Gráfica 3
Caso 2 – Hemisferio Norte



Gráfica 4
Caso 2 – Hemisferio Sur



CASO 3

El péndulo es desplazado una distancia L en dirección positiva del eje y tal que en el tiempo

$t = 0$ es lanzado con velocidad inicial $-V_{0y}$. Entonces las condiciones iniciales son:

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0 \quad (4.4.44)$$

$$y_0 = L, \quad \dot{y}_0 = -V_{0y} \quad (4.4.45)$$

Partiendo de la solución general:

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \text{sen}(\alpha - k)t + B_1 \cos(\alpha + k)t + B_2 \text{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.46)$$

$$y = -A_1 \text{sen}(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t - B_1 \text{sen}(\alpha + k)t + B_2 \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.47)$$

Reemplazando la condición inicial $x_0 = 0$ en la ecuación (4.4.46), obtenemos

$$B_1 = -A_1 \quad (4.4.48)$$

Derivando la ecuación (4.4.46) y reemplazando la condición inicial $\dot{x}_0 = 0$ se obtiene:

$$B_2 = A_2 \frac{k - \alpha}{k + \alpha} \quad (4.4.49)$$

De la condición dada en la ecuación (4.3.8) $\alpha \ll k$, la ecuación (4.4.49) resulta.

$$B_2 = A_2 \quad (4.4.50)$$

De la condición inicial $y_0 = L$ y la ecuación (4.4.47) cuando $t = 0$ obtenemos :

$$A_2 = \frac{L}{2} \quad (4.4.51)$$

De la condición inicial $\dot{y}_0 = -V_{0y}$ y la derivada de la ecuación (4.4.47) cuando $t = 0$ obtenemos :

$$-V_{0y} = -A_1(\alpha - k) + A_1(\alpha + k) \Rightarrow A_1 = -\frac{V_{0y}}{2k} \quad (4.4.52)$$

reemplazando las expresiones de las ecuaciones (4.4.51) y (4.4.52) en las ecuaciones (4.4.46) y (4.4.47) tenemos:

$$x = -\frac{V_{0y}}{2k} \cos(\alpha - k)t + \frac{L}{2} \text{sen}(\alpha - k)t + \frac{V_{0y}}{2k} \cos(\alpha + k)t + \frac{L}{2} \text{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.53)$$

$$y = \frac{V_{0y}}{2k} \text{sen}(\alpha - k)t + \frac{L}{2} \cos(\alpha - k)t - \frac{V_{0y}}{2k} \text{sen}(\alpha + k)t + \frac{L}{2} \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.54)$$

Reduciendo términos obtenemos

$$x = -\frac{V_{0y}}{k} \text{sen} \alpha \text{sen} kt + L \text{sen} \alpha \cos kt = \left(-\frac{V_{0y}}{k} \text{sen} kt + L \cos kt \right) \text{sen} \alpha t \quad (4.4.55)$$

$$y = -\frac{V_{0y}}{k} \cos \alpha \text{sen} kt + L \cos \alpha \cos kt = \left(-\frac{V_{0y}}{k} \text{sen} kt + L \cos kt \right) \cos \alpha t \quad (4.4.56)$$

Las dos ecuaciones pueden ser combinadas en una ecuación vectorial.

$$\vec{r} = \left(-\frac{V_{0y}}{k} \text{sen} kt + L \cos kt \right) \left[\text{sen}(\alpha t) \vec{e}'_1 + \cos(\alpha t) \vec{e}'_2 \right] \quad (4.4.57)$$

Conclusión caso 3

El primer factor de la ecuación (4.4.57) describe el movimiento de un péndulo que oscila con una frecuencia $k = \sqrt{g/L}$. El segundo término es un vector unitario \vec{n} que gira con la frecuencia $\alpha = \omega \text{sen} \lambda$ y describe la rotación en el plano de oscilación.

$$\vec{r} = \left(-\frac{V_{0y}}{k} \text{sen} kt + L \cos kt \right) \vec{n}(t) \quad (4.4.58)$$

$$\vec{n}(t) = \text{sen}(\alpha t) \vec{e}_1' + \cos(\alpha t) \vec{e}_2' \quad (4.4.58)$$

La ecuación (4.4.57) también nos dice en que dirección del plano de oscilación gira el péndulo. Para hemisferio norte $\text{sen} \lambda > 0$, y después de un tiempo corto $\text{sen} \alpha t > 0$ y $\cos \alpha t > 0$, es decir, el plano oscilación gira en sentido horario. Un observador en el hemisferio del sur verá el péndulo girando en sentido antihorario, por que $\text{sen} \lambda < 0$

Ejemplo numérico caso 3

Hemisferio Norte

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 3 son

$$x(t) = \left(-\frac{V_{0y}}{k} \text{sen} kt + L \cos kt \right) \text{sen} \alpha t \quad (4.4.59)$$

$$y(t) = \left(-\frac{V_{0y}}{k} \text{sen} kt + L \cos kt \right) \cos \alpha t \quad (4.4.60)$$

Con los valores mostrados en la tabla 5 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.59) y (4.4.60) resultan:

Tabla 5

Velocidad inicial V_{0y} (m/s)	Longitud de desplazamiento L (m)	Amplitud de oscilación V_{0y}/k (m)	Longitud del Péndulo l (m)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Constante k (1/s)	velocidad angular ω (rad/s)
-0,5	2	1,237	60	9,81	0,40435	7,27E-05

Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el hemisferio norte

Latitud geográfica λ (rad)	Componentes x-y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{sen}(0t)$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{cos}(0t)$
$\pi/12$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{sen}(1,8e-5t)$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{cos}(1,8e-5t)$
$\pi/6$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{sen}(3,6e-5t)$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{cos}(3,6e-5t)$
$\pi/4$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{sen}(5,1e-5t)$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{cos}(5,1e-5t)$
$\pi/3$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{sen}(6,3e-5t)$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{cos}(6,3e-5t)$
$5\pi/12$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{sen}(7,02e-5t)$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{cos}(7,02e-5t)$
$\pi/2$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{sen}(8,9e-5t)$	$(-1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \text{cos}(4,04e-1t)) \cdot \text{cos}(8,9e-5t)$

Hemisferio Sur

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 3 son

$$x(t) = \left(-\frac{V_{0y}}{k} \text{sen}kt + L \text{cos}kt \right) \text{sen}\alpha t \quad (4.4.61)$$

$$y(t) = \left(-\frac{V_{0y}}{k} \operatorname{sen} kt + L \cos kt \right) \cos \alpha t \quad (4.4.62)$$

Con los valores mostrados en la tabla 6 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.61) y (4.4.62) resultan:

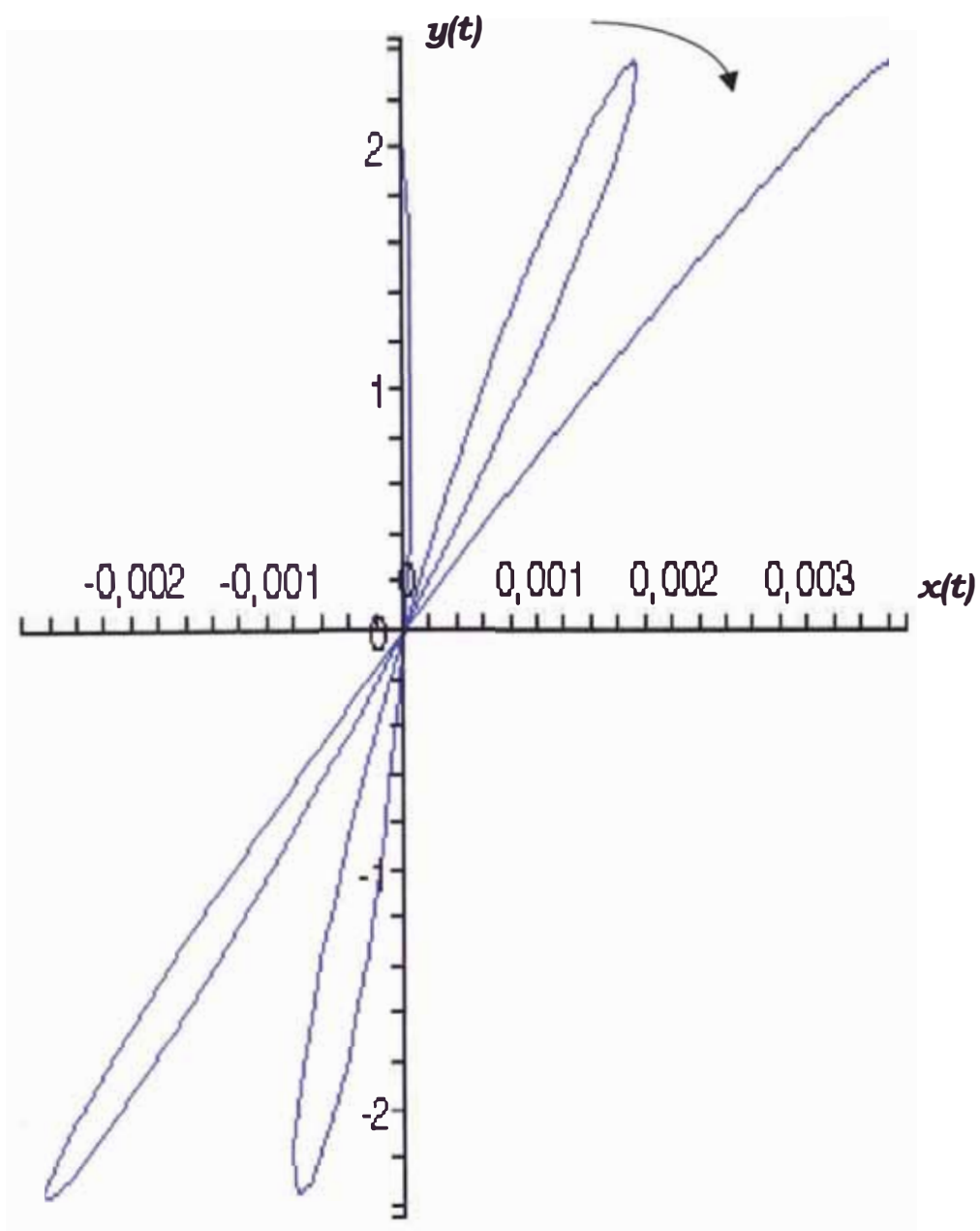
Tabla 6

Velocidad inicial V_{0y} (m/s)	Longitud de desplazamiento L (m)	Amplitud de oscilación V_{0y} / k (m)	Longitud del Péndulo l (m)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Constante k (1/s)	velocidad angular w (rad/s)
-0,5	2	1.237	60	9,81	0,40435	7,27E-05

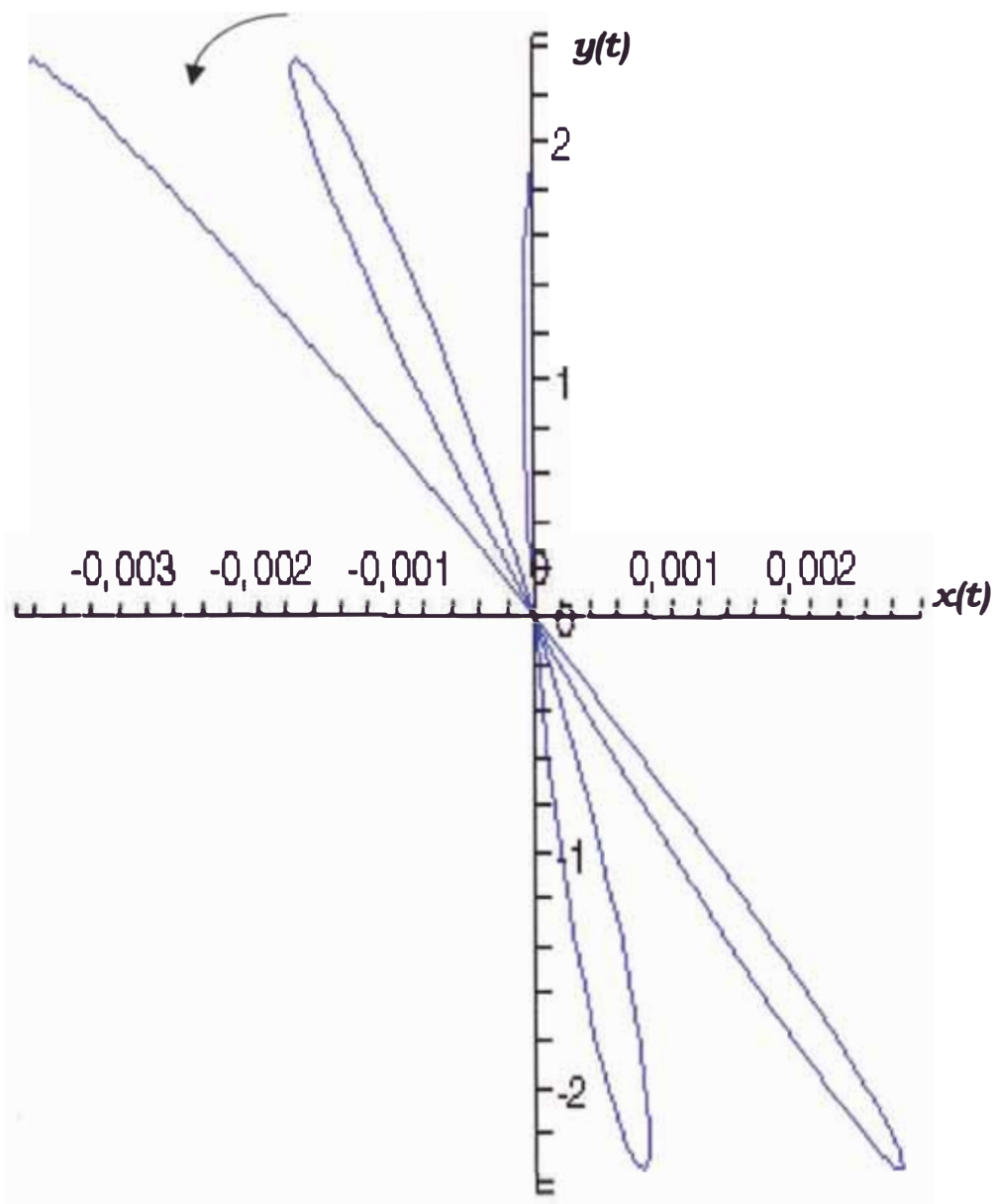
Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el hemisferio sur

Latitud geográfica λ (rad)	Componentes x-y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$(1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) - 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \operatorname{sen}(0t)$	$(-1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \cos(0t)$
$-\pi/12$	$(1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) - 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \operatorname{sen}(1,8e-5t)$	$(-1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \cos(1,8e-5t)$
$-\pi/6$	$(1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) - 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \operatorname{sen}(3,6e-5t)$	$(-1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \cos(3,6e-5t)$
$-\pi/4$	$(1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) - 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \operatorname{sen}(5,1e-5t)$	$(-1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \cos(5,1e-5t)$
$-\pi/3$	$(1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) - 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \operatorname{sen}(6,3e-5t)$	$(-1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \cos(6,3e-5t)$
$-5\pi/12$	$(1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) - 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \operatorname{sen}(7,02e-5t)$	$(-1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \cos(7,02e-5t)$
$-\pi/2$	$(1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) - 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \operatorname{sen}(8,9e-5t)$	$(-1,237 \cdot \operatorname{sen}(4,04e-1t) + 2 \cdot \cos(4,04e-1t)) \cdot \cos(8,9e-5t)$

Gráfica 5
Caso 3 – Hemisferio Norte



Gráfica 6
Caso 3 – Hemisferio Sur



CASO 4

El péndulo es lanzado desde el origen de coordenadas tal que en el tiempo $t = 0$ es lanzado con velocidad inicial V_{0y} , V_{0x} . Entonces las condiciones iniciales son:

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_{0x} \quad (4.4.63)$$

$$y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = V_{0y} \quad (4.4.64)$$

Partiendo de la solución general:

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + B_1 \cos(\alpha + k)t + B_2 \operatorname{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.65)$$

$$y = -A_1 \operatorname{sen}(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t - B_1 \operatorname{sen}(\alpha + k)t + B_2 \cos(\alpha + k)t, \quad (4.4.66)$$

Reemplazando la condición inicial $x_0 = 0$ en la ecuación (4.4.65), obtenemos

$$B_1 = -A_1 \quad (4.4.67)$$

Reemplazando la condición inicial $y_0 = 0$ en la ecuación (4.4.66), obtenemos

$$B_2 = -A_2 \quad (4.4.68)$$

De la condición inicial $\dot{x}_0 = V_{0x}$ y la derivada de la ecuación (4.4.65) cuando $t = 0$ obtenemos :

$$V_{0x} = A_2(\alpha - k) - A_2(\alpha + k) \Rightarrow A_2 = -\frac{V_{0x}}{2k} \quad (4.4.69)$$

De la condición inicial $\dot{y}_0 = V_{0y}$ y la derivada de la ecuación (4.4.66) cuando $t = 0$

obtenemos :

$$V_{0y} = -A_1(\alpha - k) + A_1(\alpha + k) \Rightarrow A_1 = \frac{V_{0y}}{2k} \quad (4.4.70)$$

reemplazando las expresiones de las ecuaciones (4.4.69) y (4.4.70) en las ecuaciones (4.4.65) y (4.4.66) tenemos:

$$x = \frac{V_{0y}}{2k} \cos(\alpha - k)t - \frac{V_{0x}}{2k} \operatorname{sen}(\alpha - k)t - \frac{V_{0y}}{2k} \cos(\alpha + k)t + \frac{V_{0x}}{2k} \operatorname{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.71)$$

$$y = -\frac{V_{0y}}{2k} \operatorname{sen}(\alpha - k)t - \frac{V_{0x}}{2k} \cos(\alpha - k)t + \frac{V_{0y}}{2k} \operatorname{sen}(\alpha + k)t + \frac{V_{0x}}{2k} \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.72)$$

Reduciendo términos tenemos:

$$x = \frac{V_{0x}}{k} \cos \alpha \operatorname{sen} kt + \frac{V_{0y}}{k} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} kt = \frac{\operatorname{sen} kt}{k} (V_{0x} \cos \alpha + V_{0y} \operatorname{sen} \alpha) \quad (4.4.73)$$

$$y = -\frac{V_{0x}}{k} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} kt + \frac{V_{0y}}{k} \cos \alpha \operatorname{sen} kt = \frac{\operatorname{sen} kt}{k} (-V_{0x} \operatorname{sen} \alpha + V_{0y} \cos \alpha) \quad (4.4.74)$$

Las dos ecuaciones pueden ser combinadas en una ecuación vectorial.

$$\vec{r} = \frac{\operatorname{sen} kt}{k} \left((V_{0x} \cos \alpha + V_{0y} \operatorname{sen} \alpha) \vec{e}'_1 + (-V_{0x} \operatorname{sen} \alpha + V_{0y} \cos \alpha) \vec{e}'_2 \right) \quad (4.4.75)$$

Conclusión caso 4

El primer factor de la ecuación (4.4.75) describe el movimiento de un péndulo que oscila con

una frecuencia $k = \sqrt{g/L}$.

Ejemplo numérico caso 4

Hemisferio Norte

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 4 son

$$x(t) = \frac{\text{sen}kt}{k} (V_{0x} \cos \alpha t + V_{0y} \text{sen} \alpha t) \quad (4.4.76)$$

$$y(t) = \frac{\text{sen}kt}{k} (-V_{0x} \text{sen} \alpha t + V_{0y} \cos \alpha t) \quad (4.4.77)$$

Con los valores mostrados en la tabla 7 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.76) y (4.4.77) resultan:

Tabla 7

Velocidad inicial V_{0y} (m/s)	Velocidad inicial V_{0x} (m/s)	Longitud del Péndulo l (m)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Constante k (1/s)	velocidad angular ω (rad/s)
0,5	0,5	60	9,81	0,40435	7,27E-05

Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el hemisferio norte

Latitud geográfica λ (rad)	Componentes x-y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(0t) + \text{sen}(0t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(0t) - \text{sen}(0t))$
$\pi/12$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(1,8e-5t) + \text{sen}(1,8e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(1,8e-5t) - \text{sen}(1,8e-5t))$
$\pi/6$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(3,6e-5t) + \text{sen}(3,6e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(3,6e-5t) - \text{sen}(3,6e-5t))$
$\pi/4$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(5,1e-5t) + \text{sen}(5,1e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(5,1e-5t) - \text{sen}(5,1e-5t))$
$\pi/3$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(6,3e-5t) + \text{sen}(6,3e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(6,3e-5t) - \text{sen}(6,3e-5t))$
$5\pi/12$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(7,02e-5t) + \text{sen}(7,02e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(7,02e-5t) - \text{sen}(7,02e-5t))$
$\pi/2$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(8,9e-5t) + \text{sen}(8,9e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(8,9e-5t) - \text{sen}(8,9e-5t))$

Hemisferio Sur

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 4 son

$$x(t) = \frac{\text{sen}kt}{k} (V_{0x} \cos \alpha t + V_{0y} \text{sen} \alpha t) \quad (4.4.78)$$

$$y(t) = \frac{\text{sen}kt}{k} (-V_{0x} \text{sen} \alpha t + V_{0y} \cos \alpha t) \quad (4.4.79)$$

Con los valores mostrados en la tabla 8 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.78) y (4.4.79) resultan:

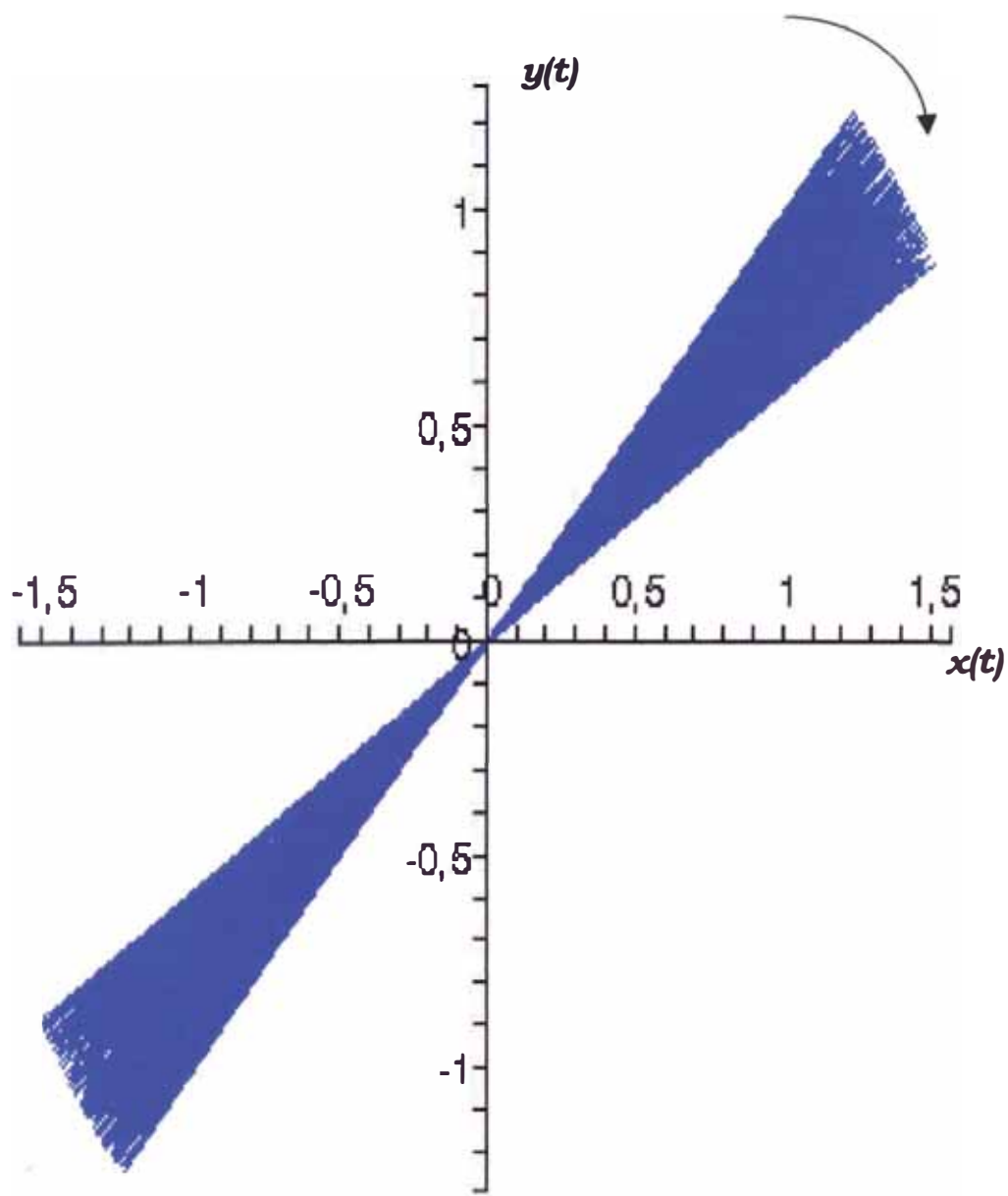
Tabla 8

Velocidad inicial V_{0y} (m/s)	Velocidad inicial V_{0x} (m/s)	Longitud del Péndulo l (m)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Constante k (1/s)	velocidad angular ω (rad/s)
0,5	0,5	60	9,81	0,40435	7,27E-05

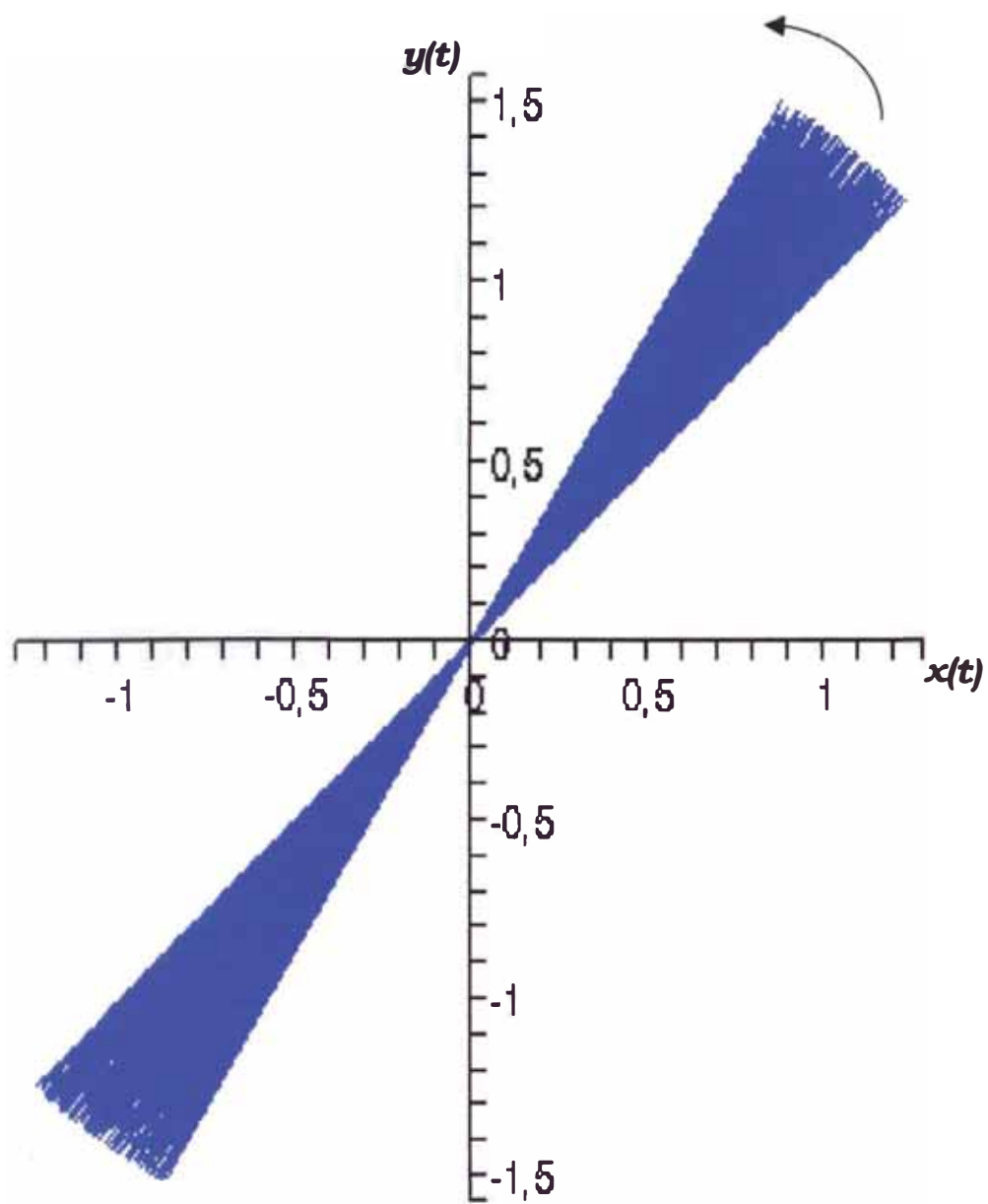
Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el hemisferio sur

Latitud geográfica λ (rad)	Componentes x-y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(0t) - \text{sen}(0t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(0t) + \text{sen}(0t))$
$-\pi/12$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(1,8e-5t) - \text{sen}(1,8e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(1,8e-5t) + \text{sen}(1,8e-5t))$
$-\pi/6$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(3,6e-5t) - \text{sen}(3,6e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(3,6e-5t) + \text{sen}(3,6e-5t))$
$-\pi/4$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(5,1e-5t) - \text{sen}(5,1e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(5,1e-5t) + \text{sen}(5,1e-5t))$
$-\pi/3$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(6,3e-5t) - \text{sen}(6,3e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(6,3e-5t) + \text{sen}(6,3e-5t))$
$-5\pi/12$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(7,02e-5t) - \text{sen}(7,02e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(7,02e-5t) + \text{sen}(7,02e-5t))$
$-\pi/2$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(8,9e-5t) - \text{sen}(8,9e-5t))$	$1,237 \cdot \text{sen}(4,04e-1t) \cdot (\cos(8,9e-5t) + \text{sen}(8,9e-5t))$

Gráfica 7
Caso 4 – Hemisferio Norte



Gráfica 8
Caso 4 – Hemisferio Sur



CASO 5

El péndulo es desplazado una distancia L en dirección positiva del eje x ; desde dicha posición se le lanza con una velocidad inicial V_{0y} perpendicular al eje x . Entonces las condiciones iniciales son:

$$x_0 = L, \quad \dot{x}_0 = 0 \quad (4.4.80)$$

$$y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = V_{0y} \quad (4.4.81)$$

Partiendo de la solución general:

$$x = A_1 \cos(\alpha - k)t + A_2 \text{sen}(\alpha - k)t + B_1 \cos(\alpha + k)t + B_2 \text{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.82)$$

$$y = -A_1 \text{sen}(\alpha - k)t + A_2 \cos(\alpha - k)t - B_1 \text{sen}(\alpha + k)t + B_2 \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.83)$$

Reemplazando la condición inicial $y_0 = 0$ en la ecuación (4.4.83), obtenemos

$$B_2 = -A_2 \quad (4.4.84)$$

Reemplazando la condición inicial $x_0 = 0$ en la ecuación (4.4.82), obtenemos

$$B_1 + A_1 = L \quad (4.4.85)$$

De la condición inicial $\dot{x}_0 = 0$ y la derivada de la ecuación (4.4.82) cuando $t = 0$ obtenemos :

$$A_2 = 0 \quad (4.4.86)$$

De la condición inicial $\dot{y}_0 = V_{0y}$ y la derivada de la ecuación (4.4.83) cuando $t = 0$ obtenemos:

$$V_{0y} = -A_1(\alpha - k) - B_1(\alpha + k) \quad (4.4.87)$$

pero sabemos que:

$$B_1 + A_1 = L \Rightarrow B_1 = L - A_1 \quad (4.4.88)$$

reemplazando las expresiones de las ecuaciones (4.4.88) en (4.4.87) obtenemos:

$$A_1 = \frac{V_{0y} + L(\alpha + k)}{2k} \quad (4.4.89)$$

$$B_1 = \frac{L(k - \alpha) - V_{0y}}{2k} \quad (4.4.90)$$

reemplazando las expresiones de las ecuaciones (4.4.89) y (4.4.90) en las ecuaciones (4.4.82)

y (4.4.83) tenemos:

$$x = \left(\frac{V_{0y} + L(\alpha + k)}{2k} \right) \cos(\alpha - k)t + \left(\frac{L(k - \alpha) - V_{0y}}{2k} \right) \cos(\alpha + k)t \quad (4.4.91)$$

$$y = - \left(\frac{V_{0y} + L(\alpha + k)}{2k} \right) \text{sen}(\alpha - k)t - \left(\frac{L(k - \alpha) - V_{0y}}{2k} \right) \text{sen}(\alpha + k)t \quad (4.4.92)$$

Reduciendo términos obtenemos:

$$x = \left(\frac{V_{0y} + L\alpha}{k} \right) \text{sen}\alpha \text{sen}kt + L \cos\alpha \cos kt \quad (4.4.93)$$

$$y = \left(\frac{V_{0y} + L\alpha}{k} \right) \cos\alpha \text{sen}kt - L \text{sen}\alpha \cos kt \quad (4.4.94)$$

Las dos ecuaciones pueden ser combinadas en una ecuación vectorial.

$$\vec{r} = \left[\left(\frac{V_{0y} + L\alpha}{k} \right) \text{sen } \alpha \text{sen } kt + L \cos \alpha \cos kt \right] \vec{e}'_1 + \dots$$

$$\left[\left(\frac{V_{0y} + L\alpha}{k} \right) \cos \alpha \text{sen } kt - L \text{sen } \alpha \cos kt \right] \vec{e}'_2 \quad (4.4.95)$$

Conclusión caso 5

El primer factor de la ecuación (4.4.95) describe el movimiento de un péndulo que oscila con α y

una frecuencia $k = \sqrt{g/L}$.

Ejemplo numérico caso 5

Hemisferio Norte

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 5 son :

$$x(t) = \left(\frac{V_{0y} + L\alpha}{k} \right) \text{sen } \alpha \text{sen } kt + L \cos \alpha \cos kt \quad (4.4.96)$$

$$y(t) = \left(\frac{V_{0y} + L\alpha}{k} \right) \cos \alpha \text{sen } kt - L \text{sen } \alpha \cos kt \quad (4.4.97)$$

Con los valores mostrados en la tabla 9 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.96) y (4.4.97) resultan:

Tabla 9

Velocidad inicial V_{0y} (m/s)	Longitud L (m)	Longitud del Péndulo l (m)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Constante k (1/s)	velocidad angular w (rad/s)
0,5	2	60	9,81	0,40435	7,27E-05

Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el hemisferio norte

Latitud geográfica λ (rad)	Componentes x - y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(0t) + 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(0t)$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(0t) - 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(0t)$
$\pi/12$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(1,8e-5t) + 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(1,8e-5t)$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(1,8e-5t) - 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(1,8e-5t)$
$\pi/6$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(3,6e-5t) + 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(3,6e-5t)$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(3,6e-5t) - 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(3,6e-5t)$
$\pi/4$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(5,1e-5t) + 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(5,1e-5t)$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(5,1e-5t) - 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(5,1e-5t)$
$\pi/3$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(6,3e-5t) + 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(6,3e-5t)$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(6,3e-5t) - 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(6,3e-5t)$
$5\pi/12$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(7,02e-5t) + 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(7,02e-5t)$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(7,02e-5t) - 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(7,02e-5t)$
$\pi/2$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(8,9e-5t) + 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(8,9e-5t)$	$(1,237+0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(8,9e-5t) - 2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(8,9e-5t)$

Hemisferio Sur

Sabiendo que las solución con las condiciones iniciales para el caso 5 son :

$$x = \left(\frac{V_{0y} + L\alpha}{k} \right) \text{sen}at \text{sen}kt + L \text{cos}at \text{cos}kt \quad (4.4.98)$$

$$y = \left(\frac{V_{0y} + L\alpha}{k} \right) \text{cos}at \text{sen}kt - L \text{sen}at \text{cos}kt \quad (4.4.99)$$

Con los valores mostrados en la tabla 10 para diferentes latitudes λ las ecuaciones (4.4.98) y (4.4.99) resultan:

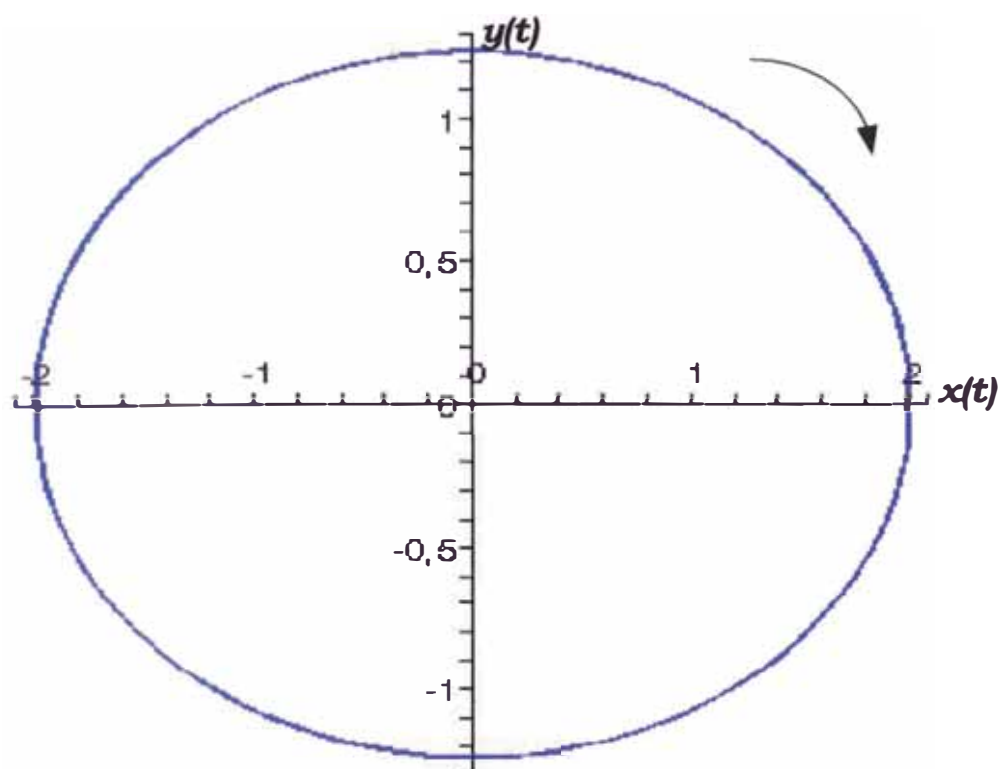
Tabla 10

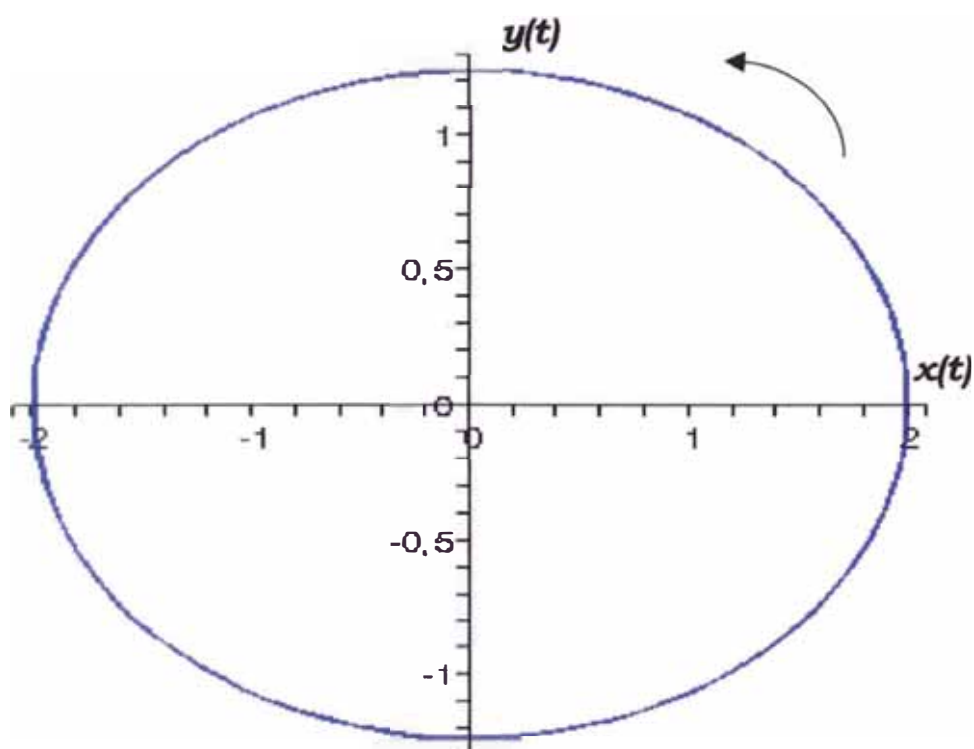
Velocidad inicial v_{0y} (m/s)	Longitud L (m)	Longitud del Péndulo l (m)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Constante k (1/s)	velocidad angular w (rad/s)
0,5	2	60	9,81	0,40435	7,27E-05

Ecuaciones paramétricas para diferentes latitudes en el hemisferio sur

Latitud geográfica λ (rad)	Componentes x - y del Movimiento	
	$x(t)$	$y(t)$
0	$-(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(0t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(0t)$	$(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(0t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(0t)$
$-\pi/12$	$-(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(1,8e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(1,8e-5t)$	$(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(1,8e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(1,8e-5t)$
$-\pi/6$	$-(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(3,6e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(3,6e-5t)$	$(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(3,6e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(3,6e-5t)$
$-\pi/4$	$-(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(5,1e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(5,1e-5t)$	$(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(5,1e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(5,1e-5t)$
$-\pi/3$	$-(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(6,3e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(6,3e-5t)$	$(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(6,3e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(6,3e-5t)$
$-5\pi/12$	$-(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(7,02e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(7,02e-5t)$	$(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(7,02e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(7,02e-5t)$
$-\pi/2$	$-(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(8,9e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(8,9e-5t)$	$(1,237-0.000093)*\text{sen}(4,04e-1t)*\text{sen}(8,9e-5t)+2*\text{cos}(4,04e-1t)*\text{cos}(8,9e-5t)$

Gráfica 9
Caso 5 – Hemisferio Norte



Gráfica 10**Caso 5 – Hemisferio Sur**

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

- ◆ De la ecuación (3.4.13) en el hemisferio norte y la ecuación (3.4.26) en el hemisferio sur para un objeto que es soltado desde una altura h con velocidad inicial cero, se concluye que la desviación d respecto a la vertical que sufre el objeto al caer debido a la rotación de la tierra estará dirigida en dirección este (eje + y') tanto en el hemisferio norte y hemisferio sur.
- ◆ De la gráfica caso 1 – capítulo 3 se observa que un objeto que cae desde una misma altura h en diferentes latitudes λ sobre la tierra (tablas 1 y 2), experimenta una desviación d respecto a la vertical debido a la rotación de la tierra; será máxima en el Ecuador ($\lambda = 0$ rad) y cero cerca a los polos y está dirigida en dirección **este** (eje + y') tanto para el hemisferio norte y hemisferio sur.
- ◆ De la gráfica caso 2 – capítulo 3 se observa que un objeto que cae sobre la tierra a una latitud λ (tablas 3 y 4) la desviación d que experimenta respecto a la vertical debido a la rotación de la tierra aumentará al aumentar la altura h y está dirigida en dirección **este** (eje + y') tanto para el hemisferio norte y hemisferio sur.
- ◆ De la ecuación (3.4.36) en el hemisferio norte y la ecuación (3.4.49) en el hemisferio sur para un objeto que es lanzado verticalmente hacia abajo desde una altura h con

velocidad inicial v_0 diferente de cero, se concluye que la desviación d respecto a la vertical que sufre el objeto al caer debido a la rotación de la tierra estará dirigida en dirección **este** (eje + y') tanto en el hemisferio norte y hemisferio sur.

- ◆ De la gráfica caso 3 – capítulo 3 se observa que un objeto que es lanzado verticalmente hacia abajo con velocidad inicial v_0 desde una misma altura h en diferentes latitudes λ sobre la Tierra (tablas 5 y 6) experimenta una desviación d respecto a la vertical debido a la rotación de la tierra; será máxima en el Ecuador ($\lambda = 0$ rad) y cero cerca de los polos y está dirigida en dirección **este** (eje + y') tanto para el hemisferio norte y hemisferio sur.
- ◆ De la gráfica caso 4 – capítulo 3 se observa que un objeto que es lanzado verticalmente hacia abajo con velocidad inicial v_0 diferente de cero a una latitud λ (tablas 7 y 8). La desviación d que experimenta respecto a la vertical debido a la rotación de la tierra y aumentará al aumentar la altura h y esta dirigida en dirección el **este** (eje + y') tanto en el hemisferio norte y hemisferio sur.
- ◆ De la gráfica caso 5 – capítulo 3 se observa que un objeto que es lanzado verticalmente hacia abajo con velocidad inicial v_0 diferente de cero desde una altura h y latitud λ (tablas 9 y 10). La desviación d que experimenta respecto a la vertical debido a la rotación de la tierra; aumentará al aumentar la velocidad inicial v_0 de lanzamiento y esta dirigida en dirección **este** (eje + y') tanto en el hemisferio norte y hemisferio sur.
- ◆ De la ecuación (3.4.65) en el hemisferio norte y la ecuación (3.4.79) en el hemisferio sur para un objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0 , se

concluye que la desviación d respecto a la vertical que sufre el objeto al caer sobre la superficie de la tierra debido a la rotación de ella estará dirigida en dirección **oeste** (eje - y') tanto en el hemisferio norte y hemisferio sur.

- ◆ De la gráfica caso 6 – capítulo 3 se observa que un objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0 a diferentes latitudes λ (tablas 11 y 12) experimenta una desviación d respecto a la vertical al caer sobre la tierra debido a la rotación de ella; será máxima en el Ecuador ($\lambda = 0$ rad) y cero cerca de los polos y esta dirigida en dirección **oeste** (eje - y') tanto para el hemisferio norte y hemisferio sur.
- ◆ De la gráfica caso 7 – capítulo 3 se observa que un objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba en una latitud λ (tablas 13 y 14) experimentara una desviación d respecto a la vertical al caer sobre la superficie de la tierra debido a la rotación de ella; la desviación d se incrementará al aumentar la velocidad inicial v_0 de lanzamiento y esta dirigida en dirección **oeste** (eje - y') tanto en el hemisferio norte y hemisferio sur.
- ◆ De la ecuación (3.4.88) en el hemisferio norte y la ecuación (3.4.99) en el hemisferio sur para un objeto que lanzado horizontalmente con velocidad v_0 en dirección **este**, se concluye que la desviación d respecto a la dirección de movimiento debido a la rotación de la tierra es hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur.
- ◆ De la gráfica caso 8 – capítulo 3 se observa la proyección del movimiento en el plano x' y' de un objeto que es lanzado horizontalmente en dirección **este** con velocidad inicial v_0 a diferentes latitudes λ (tablas 15 y 16). La desviación d que experimenta el

objeto será máxima cerca a los polos y cero en el Ecuador ($\lambda = 0 \text{ rad}$) y estará dirigida hacia la derecha del movimiento en el hemisferio norte y hacia la izquierda del movimiento en el hemisferio sur.

- ◆ De la ecuación (3.4.110) en el hemisferio norte y la ecuación (3.4.122) en el hemisferio sur para un objeto que lanzado horizontalmente con velocidad v_0 en dirección **oeste**, se concluye que la desviación d respecto a la dirección de movimiento debido a la rotación de la tierra es hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur.
- ◆ De la ecuación (3.4.132) en el hemisferio norte y la ecuación (3.4.145) en el hemisferio sur para un objeto que es lanzado parabólicamente sobre la superficie de la tierra haciendo un ángulo β con la dirección **este** y con velocidad inicial v_0 , se concluye que la desviación d que experimenta el objeto será hacia la derecha de la dirección de movimiento en el hemisferio norte y hacia la izquierda de la dirección del movimiento en el hemisferio sur.
- ◆ De la gráfica caso 10 – capítulo 3 se observa la proyección del movimiento en el plano x' y' de un objeto que es lanzado parabólicamente en dirección **este** con un ángulo β y velocidad inicial v_0 en diferentes latitudes λ (tablas 19 y 20). La desviación d que experimenta el objeto debido a la rotación de la tierra será máxima cerca de los polos ($\lambda = -\pi/2; \pi/2 \text{ rad}$) y cero en el Ecuador ($\lambda = 0 \text{ rad}$) y estará dirigida hacia la derecha del movimiento en el hemisferio norte y hacia la izquierda del movimiento en el hemisferio sur.

- ◆ De las ecuaciones vectoriales dadas en (4.2.16); (4.4.37); (4.4.57); (4.4.75) y (4.4.95) que describen el movimiento del péndulo para diferentes condiciones iniciales, se puede observar que el péndulo oscila en un plano vertical que gira con periodo de rotación $T = \frac{T_0}{\text{sen}\lambda}$ dada en la ecuación (3.4.16.1), la amplitud de oscilación L depende las condiciones iniciales impuestas a nuestro problema.
- ◆ Las ecuaciones vectoriales dadas en (4.2.16); (4.4.37); (4.4.57); (4.4.75) y (4.4.95) indican también en que dirección del plano de oscilación gira el péndulo, en el hemisferio norte el sentido será horario y en el hemisferio sur será antihorario.
- ◆ De la ecuación (4.4.16) se puede observar que el plano de oscilación del péndulo no experimenta una rotación en respecto al plano de oscilación en el Ecuador, mientras que cerca de los polos el periodo de rotación del plano de oscilación disminuye, y es igual al periodo de rotación de la tierra.
- ◆ Con la condición dada en la ecuación (4.3.8), que describen el movimiento del péndulo, este siempre pasaran por el origen de coordenadas.
- ◆ De la gráfica 1 hasta la gráfica 8 del capítulo 4 se puede apreciar el sentido de giro del movimiento del péndulo sobre el plano de oscilación apreciándose que para en todos estos que en el hemisferio norte el sentido de giro será horario y en el hemisferio sur será antihorario.
- ◆ La gráfica 9 y gráfica 10 representa el movimiento que describe el péndulo cuando es soltado con una velocidad inicial V_0 perpendicular al desplazamiento inicial L . La dirección del movimiento del péndulo estará dada por la dirección de la velocidad inicial

V_0 y puede ser horario y antihorario (ver el comportamiento de la velocidad en la gráfica)

BIBLIOGRAFIA

- ◆ Walter Greiner, Classical Mechanics. New York, Springer (2003)
- ◆ Walter Hauser, Introducción a los principios de mecánica. México, Editorial Hispano-Americana.
- ◆ Jerry B. Marion, Dinámica clásica de partículas y sistemas. Barcelona, Editorial Reverte (1975)
- ◆ Keith Simón, Mecánica. España, editorial Aguilar (1970).
- ◆ Frank Ayres, Ecuaciones diferenciales. México, McGraw-Hill (1973).
- ◆ E.J. Hinch, Perturbation Methods. Cambridge University Espress (1995).
- ◆ George Arfken, Mathematical Methods for Phisicists. New York, Academic Express.