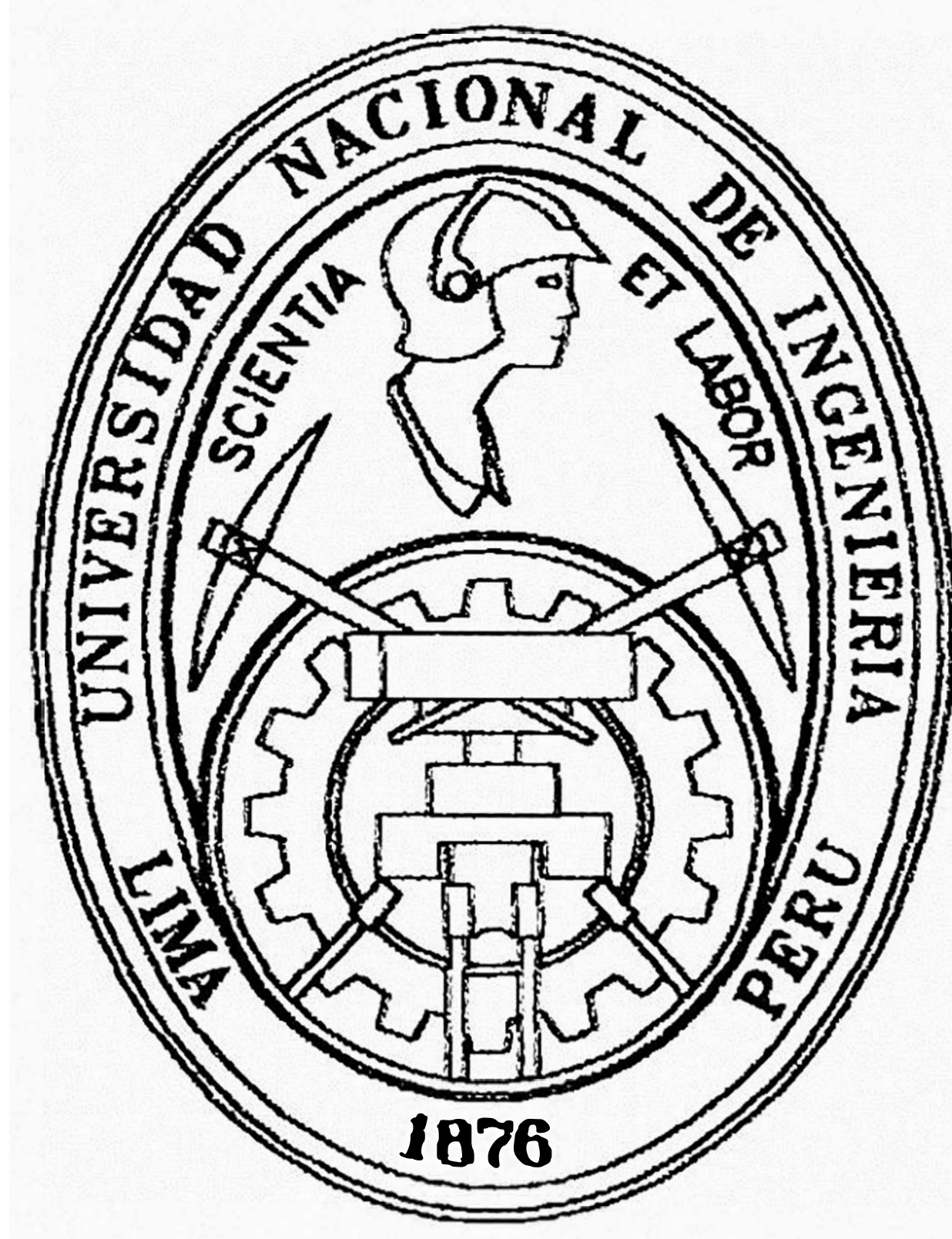


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



**CALCULO DE VALORES PROPIOS
MEDIANTE EL METODO DE LA POTENCIA**

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR

JAVIER FRANCISCO ECHEANDÍA CÉSPEDES

LIMA – PERU

2003

Dedicatoria

A mis padres que me dieron la posibilidad del conocimiento, a mis hijos que con su sonrisa me hacen creativo, a mi esposa por ser el amor de mi vida y a mis amigos que ayudaron a iniciar y terminar esta tarea.

Contenido

Introducción	1
Capítulo I: Definiciones Previas	
1.1. Preliminares.....	8
1.2. Los teoremas de Schur y Gershgorin.....	21
1.2.1. Factorización de Schur	22
1.2.2. Localización de valores propios.....	26
Capítulo II: Método de la Potencia	
2.1. Método de la Potencia.....	31
2.2. Método de la Potencia Inversa.....	36
2.2.1. Algoritmo del Método de la Potencia Inversa.....	38
2.3. Potencia Inversa con desplazamiento.....	38
2.3.1. Algoritmo del Método de la Potencia Inversa con Desplazamiento.....	39
2.4. Método de la Potencia con Desplazamiento	40
2.4.1. Algoritmo del Método de la Potencia con Desplazamiento.....	41
2.5. Aceleración del Método de la Potencia.....	42
2.5.1 Procedimiento de Aitken Δ^2	42
2.5.2 Algoritmo Acelerado Del Método De La Potencia.....	45
2.6. Método de la Potencia Simétrica.....	46
2.6.1 Algoritmo Del Método De La Potencia Simétrica.....	46

Capítulo III: Una Aplicación en un Problema de Valor de Frontera

3.1. Introducción	49
Conclusiones	55
Anexo	57
Bibliografía	62

Introducción

Los problemas de valores propios son una clase especial de problemas con valores en la frontera que son comunes en el contexto de problemas en la ingeniería que provocan vibraciones, elasticidad y otros sistemas oscilantes. Además se usan en una amplia variedad de contextos en ingeniería que van más allá de problemas de valores de frontera. Antes de describir un método numérico para resolver estos problemas, presentaremos alguna información general como antecedente, esta incluye el análisis de la importancia tanto matemática como ingenieril de los valores propios.

Dado una matriz cuadrada A , en el presente informe se estudia una técnica para el cálculo de los vectores no nulos x y los escalares λ que cumplen la siguiente propiedad

$$A \bar{x} = \lambda x \quad (1)$$

el par (λ, x) es llamado un *par propio* que consiste en un valor propio λ y su correspondiente vector propio x . El conjunto de todos los valores propios para una matriz es llamado el espectro de la matriz, observe que si \bar{x} es un vector propio de A , entonces también lo es cualquier múltiplo de x , en efecto:

$$k(A \bar{x}) = k(\lambda \bar{x}) = \lambda (k \bar{x})$$

$$A(k \bar{x}) = \lambda (k x)$$

Por lo tanto $(\lambda, k x)$ es un par propio si (λ, x) es un par propio. Para eliminar

esta multiplicidad, el vector propio puede ser normalizado de forma que $\|\bar{x}\|=1$. Si \bar{x} está normalizado con norma euclidiana igual a 1, el problema de valores propios puede ser establecido de la siguiente manera:

Encontrar los vectores \bar{x} y los escalares λ que cumplan la siguiente propiedad

$$A \bar{x} = \lambda \bar{x}; \bar{x}^t \cdot \bar{x} = 1 \quad (2)$$

Si A es una matriz $n \times n$ entonces (2) consiste de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas; las incógnitas son las n componentes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de \bar{x} y el escalar λ . La ecuación (2) es no lineal puesto que involucra el producto $\lambda \bar{x}$ (entre el escalar no conocido y el vector no conocido) tal caso también ocurre en el producto $\bar{x}^t \bar{x}$. Mediante los algoritmos para resolver un sistema de ecuaciones no lineales se puede aplicar la ecuación (2), sin embargo técnicas más eficientes han sido desarrolladas para explotar la estructura de los problemas de valores propios.

Antes de estudiar estas técnicas discutiremos algunas aplicaciones de pares propios.

La solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes puede ser expresada en términos de los pares propios de los coeficientes de la matriz. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= 2u(t) + 6v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= -2u(t) - 5v(t) \end{aligned} \quad (3)$$

buscamos una solución de la forma

$$u(t) = e^{\lambda t}x_1 \text{ y } v(t) = e^{\lambda t}x_2 \quad (4)$$

donde x_1 , x_2 , y λ son constantes independientes de t . Substituyendo (4) en la ecuación (3) obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t}x_1 &= 2e^{\lambda t}x_1 + 6e^{\lambda t}x_2 \\ \lambda e^{\lambda t}x_2 &= -2e^{\lambda t}x_1 - 5e^{\lambda t}x_2 \end{aligned}$$

Cancelando el factor comun $e^{\lambda t}$ obtenemos la relación

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &= \lambda x_1 \\ -2x_1 - 5x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Utilizando la notación matriz-vector (5) puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto si $u(t) = e^{\lambda t}x_1$ y $v(t) = e^{\lambda t}x_2$ es una solución de la ecuación diferencial (3), entonces (λ, \bar{x}) es un par propio para los coeficientes de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Recíprocamente si (λ, \bar{x}) es un par propio de los coeficientes de la matriz entonces $u(t) = e^{\lambda t}x_1$, $v(t) = e^{\lambda t}x_2$ es una solución de la ecuación diferencial.

En la siguiente sección mostraremos que la matriz A tiene 2 pares propios

$$\lambda = -1, \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \lambda = -2, \bar{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

una solución de la ecuación diferencial (3), correspondiente al valor propio $\lambda = -1$ es

$$u(t) = 2e^{-t} \text{ y } v(t) = -e^{-t}$$

mientras que una solución para el valor propio $\lambda = -2$ es

$$u(t) = -3e^{-2t} \text{ y } v(t) = 2e^{-2t}$$

utilizando la notación vectorial, estas soluciones pueden ser expresadas de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solución general de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden es una combinación lineal de cualquier par de soluciones linealmente independientes.

Así la solución general para (3) es

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Si los valores de u y v son especificados algunas veces para $t = 0$, estas constantes podran ser calculados. Por ejemplo

dada la condición inicial

$$u(0) = 7 \text{ y } v(0) = -4 \quad (7)$$

entonces substituyendo $t = 0$ en (6) se obtiene la relación

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

luego :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

la solución de este sistema lineal es $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$, de (6) tenemos que la solución de la ecuación diferencial (3) que satisface la condición inicial (7) es

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = 2e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - e^{-2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En algunas aplicaciones, la solución exacta de la ecuación diferencial no es tan importante como el comportamiento cualitativo de la solución. Puesto que e^{-t} y e^{-2t} se aproximan a cero cuando t crece, tenemos que para cualquier elección de c_1 y c_2 , la solución (6) de la ecuación diferencial (3) se aproxima a cero cuando t se hace muy grande. Decimos que $u = 0$ y $v = 0$ es un punto de equilibrio estable para la ecuación diferencial. En general es un punto de equilibrio estable para una ecuación diferencial lineal, si cada valor propio del coeficiente matricial tiene parte real negativa (los valores propios pueden ser números complejos). Así el comportamiento cualitativo de la solución de una ecuación diferencial lineal

depende de los signos de los valores propios.

Los valores propios están relacionados con las propiedades de las estructuras. Cuando una fuerza o una carga es aplicada a lo largo de una viga cuyos soportes están en sus extremos, uno fijo y el otro con desplazamiento.

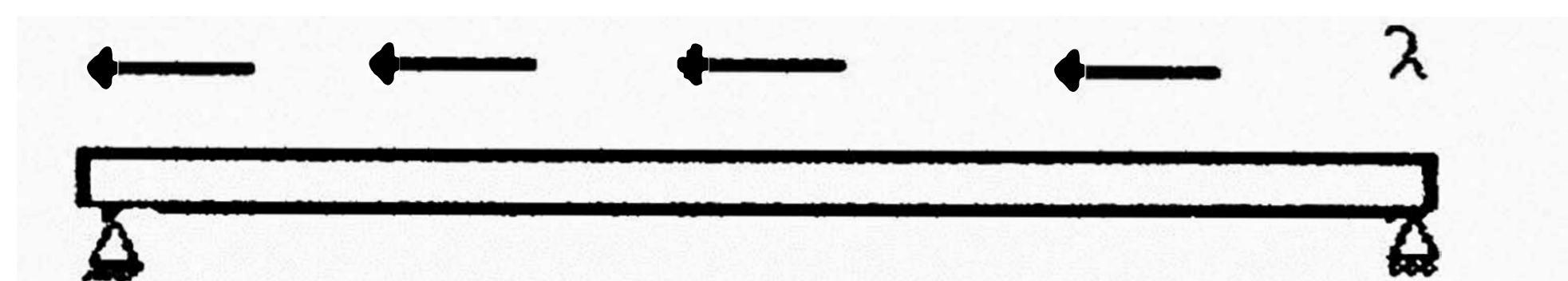


Figura 01

Cuando la carga llega a un valor crítico λ_1 . A medida que la carga se incrementa, se alcanza un segundo punto crítico, donde la barra puede vibrar en la configuración siguiente

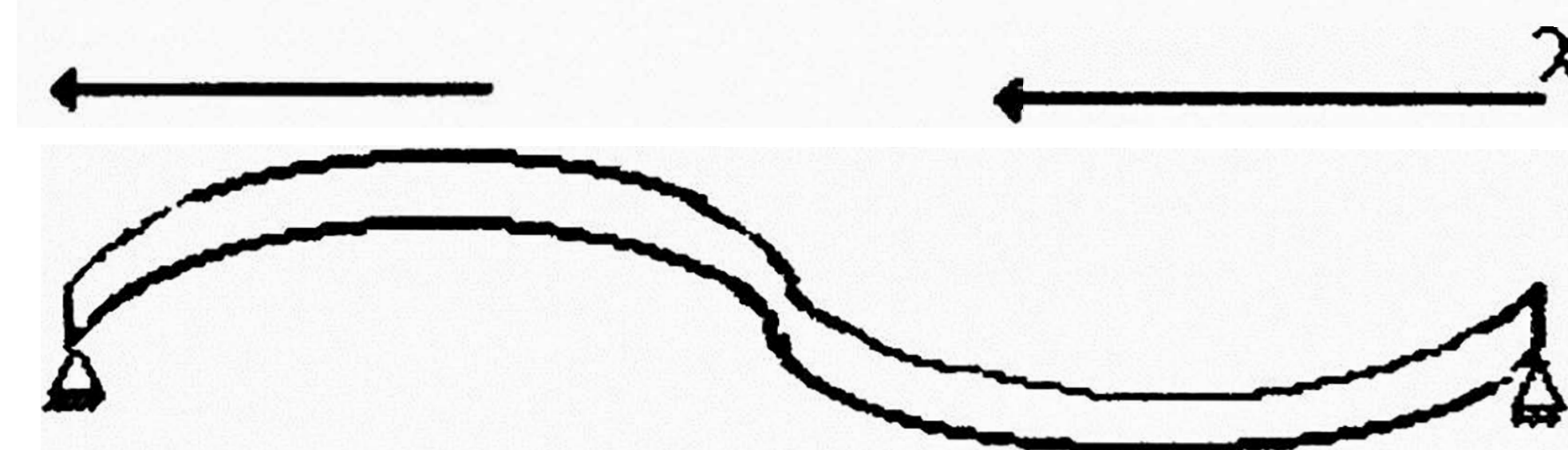


Figura 02

Fisicamente para que se genere esta nueva configuración, se debe producir un ligero impulso, este debe estar colocado a la mitad de la barra, cada carga que genera un nuevo estado es un valor propio del problema de valores de frontera.

Un problema de valores propios para la figura 01 puede tener la siguiente forma: Encontrar todas las funciones $x(t)$ que no sea idénticamente nula y todos los escalares λ que satisfacen la ecuación

$$-\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lambda x(t) , 0 \leq t \leq 1 \quad (9)$$

con la condición $x(0) = x(1) = 0$. En este modelo t es la medida de la distancia a lo largo de la viga y $x(t)$ es un momento angular de la viga ver la figura 02. Teóricamente existe un número infinito de estados donde la viga se pandea, pero en la práctica, la viga puede romperse después que la carga exceda el valor propio más pequeño λ_1 . Con una viga buckling, lo más interesante es el valor de λ_1 . La ecuación (9) puede ser transformada en un problema de valores propios de una matriz usando la técnica de diferencias finitas. El intervalo $[0, 1]$ es particionado en N subintervalos de longitud $\frac{1}{N}$. Sea $t_i = i\Delta t$ que denota un punto de la partición y sea x_i que denota a $x(t_i)$, la segunda derivada en la ecuación (9) tiene como aproximación

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} \approx \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

Esta sustitución en la ecuación (9) nos lleva a la relación $A \bar{x} = \lambda \bar{x}$, donde A es una matriz tridiagonal $(N-1) \times (N-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Cuando N es muy grande, el valor propio más pequeño de la matriz A se aproxima al valor más pequeño del problema del valor de frontera (9). Así cuando N es grande el valor más pequeño de A se aproxima al punto de quiebre de la estructura

Capítulo I.

Definiciones Previas

I.1 Preliminares

El campo \mathbb{R} de los números reales tiene el defecto de que un polinomio de grado n con coeficientes reales no necesariamente tiene ceros (o raíces) reales. Por ejemplo, el polinomio $p(x) = x^2 - 2x + 2$ carece de ceros reales. Esto se supera extendiendo el campo de modo que contenga al elemento (no real) i . Este elemento se caracteriza por la ecuación $i^2 = -1$. El campo que se obtiene de esta manera se denota con \mathbb{C} , y sus elementos se llaman números complejos. Estos números tienen la forma

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (\alpha, \beta \text{ números reales})$$

El conjugado y el módulo de γ se definen, respectivamente, por

$$\bar{\gamma} = \alpha - i\beta$$

$$|\gamma| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Observe que $\bar{\bar{\gamma}} = \gamma$ y $\gamma \bar{\gamma} = |\gamma|^2$.

El campo \mathbb{C} no tiene la deficiencia ya mencionada de los números reales. Es más, se cuenta con el teorema fundamental del álgebra, el cual establece que todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos un cero

plano complejo. Una de sus consecuencias es que todo polinomio de grado n se puede descomponer como un producto de n factores lineales.

El espacio vectorial \mathbb{C}^n se compone de todas las n -uplas complejas tales como

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$$

donde $x_j \in \mathbb{C}$ para $1 \leq j \leq n$. Si el vector complejo \bar{x} se multiplica por el número complejo λ , el resultado es otro vector complejo, a saber,

$$\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^t$$

De esta manera, podemos considerar a \mathbb{C}^n como un espacio vectorial sobre el campo de escalares \mathbb{C} en el espacio \mathbb{C}^n , el producto interno y la norma euclidiana se definen, respectivamente, como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \text{y} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Observe que

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \text{y} \quad \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$$

y

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

Si A es una matriz con elementos complejos, con A^* denotamos su conjugada transpuesta: $(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$. En particular, si \bar{x} es una matriz de orden $n \times 1$ (o

vector columna), entonces $x^*=(\bar{x})^t$ es una matriz de 1 x n (o vector fila), y

$$y^*x = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

$$x^*x = \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal. En muchas aplicaciones es útil encontrar un vector \bar{v} en V tal que $T\bar{v}$ y \bar{v} sean paralelos. Es decir, se busca un vector v y un escalar λ tal que

$$T \bar{v} = \lambda \bar{v} \quad (1.1)$$

Si $\bar{v} \neq 0$ y λ satisface (1), entonces λ se llama un *valor propio* de T y \bar{v} se llama un *vector propio* de T correspondiente al valor propio λ . El propósito de este informe es investigar las propiedades de los valores propios y vectores propios. Si V tiene dimensión finita, entonces T se puede representar por una matriz A . Por esta razón se estudiarán los valores propios y vectores propios de las matrices $n \times n$.

Definición 1.1. Un vector $\bar{v} \neq 0$ en \mathbb{R}^n se llama vector propio de una matriz $A_{n \times n}=(a_{ij})$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A \bar{v} = \lambda \bar{v} \quad (1.2)$$

y, el número λ se le llama valor propio de la matriz A , el valor propio λ

corresponde al vector propio v y, viceversa. Entonces para todo $\omega = \alpha v$ con $\alpha \neq 0$, tiene $A \omega = \lambda \omega$ esto es todo múltiplo de un vector propio también es un vector propio.

La ecuación (1.1) es equivalente a:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n & = & \lambda v_1 \\
 a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n & = & \lambda v_2 \\
 a_{31}v_1 + a_{32}v_1 + \dots + a_{3n}v_n & = & \lambda v_3 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nn}v_n & = & \lambda v_n
 \end{array}
 , \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Estas ecuaciones pueden reescribirse como un sistema homogéneo de ecuaciones pasando los términos λv_i a la izquierda. Recordemos por otra parte, que un sistema homogéneo de ecuaciones solo tiene solución distinta de la trivial si el rango de la matriz es menor que el número de incógnitas, lo que implica:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

El conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de soluciones se llaman valores propios de la matriz A .

Estos valores propios pueden ser reales o complejos y no son necesariamente todos distintos.

Definición 1.2. Denominamos *degeneración* de un valor propio a su grado de

multiplicidad.

Para determinar los vectores propios asociados a un valor propio hay que sustituir en el sistema de ecuaciones lineales (1.3) por el valor propio concreto λ_j . Puesto que el sistema es compatible indeterminado lo cual está garantizado por el hecho de que $\det(A - \lambda I) = 0$ las ecuaciones no son linealmente independientes (L.I.) y la forma de resolver el sistema, en la práctica, consiste en dar valores arbitrarios para tantas componentes de los valores propios como indique el valor de la multiplicidad.

Por último, una vez determinados los vectores propios estos pueden normalizarse, por ejemplo, tomando la norma euclídea:

$$\sum_{i=1}^N v_i^2 = 1$$

Definición: 1.3. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores. El conjunto es L.I. si,

$$\vec{0} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Teorema 1.4. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto de n valores L.I. en \mathbb{R}^n entonces cualquier vector \mathbb{R}^n puede escribirse de manera única como:

$$x = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

para algún conjunto de constantes $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Demostración

Supongamos que A es la matriz cuyas columnas son $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$, entonces el conjunto $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$ es L.I. $\Leftrightarrow A\alpha = 0$ tiene solución única $\alpha = 0 \Leftrightarrow A\bar{\beta} = \bar{v}$ tiene solución única es decir para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\bar{x} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n$$

para algún conjunto de constantes $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$

Teorema 1.5 Si A es una matriz y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son distintos valores propios de A (es decir $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) con los vectores propios asociados $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$ entonces $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$ es L.I.

Demostración

Sean $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ los vectores propios correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$A \bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1, \dots, A \bar{v}_n = \lambda_n \bar{v}_n$$

donde $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i \neq j$. Probaremos que son linealmente independiente, por inducción matemática. Para $n = 1$ es obvio. Supongamos que es cumple para $(n-1)$ veamos para n :

$$\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \bar{0} \quad (*)$$

aplicando la matriz $A \Rightarrow$

$$A(\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n) = \bar{0}$$

$$\beta_1 A \bar{v}_1 + \dots + \beta_n A \bar{v}_n = \bar{0}$$

$$\beta_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \lambda_n \bar{v}_n = \bar{0} \quad (**)$$

multiplicando (*) por λ_n y restando de (**) \Rightarrow

$$(\lambda_1 - \lambda_n) \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \beta_{n-1} \bar{v}_{n-1} = \bar{0}$$

pero $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$, para todo $i=1, \dots, n-1 \Rightarrow \beta_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, luego de (*) se puede afirmar que $\beta_n = 0$ por consiguiente el conjunto $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$ es linealmente independiente.

Definición 1.6. Se dice que un conjunto de vectores $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$ es ortogonal. Si $\bar{v}_i^t \bar{v}_j = 0$ para todo $i \neq j$. Si además $\bar{v}_i^t \bar{v}_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$ entonces el conjunto es llamado ortonormal.

Teorema 1.7. Un conjunto ortogonal de vectores que no contiene al vector cero es linealmente independiente.

Demostración

Supongamos que el conjunto $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$ no es linealmente independiente luego, existe algún $\beta_i \neq 0$ tal que $\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \bar{0}$,

$$\Rightarrow \bar{v}_i = -\frac{\beta_1}{\beta_i} \bar{v}_1 - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_i} \bar{v}_n$$

multiplicando ambos miembros por v y, como el conjunto $\{ v_1, \dots, v_n \}$ es

ortogonal \Rightarrow

$$\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = -\frac{\beta_1}{\beta_i} \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_i - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_i} \bar{v}_n \cdot \bar{v}_i = \bar{0} \Rightarrow$$

lo cual es imposible por ser cualquier vector del conjunto $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$ diferente de cero. Por consiguiente el conjunto $\{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$ es linealmente independiente.

Definición 1.8. Se dice que dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son similares, si existe una matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular con $A = S^{-1}BS$.

Teorema 1.9. Supongamos que A y B son matrices similares y que λ es un valor propio de A con el vector propio asociado \bar{x} . Entonces λ es también un valor propio de B y si $A = S^{-1}BS$ entonces $S\bar{x}$ es un vector propio asociado a λ para la matriz B .

Demostración

Supongamos que $\bar{x} \neq \bar{0}$ es tal que

$$S^{-1}BS \bar{x} = A \bar{x} = \lambda \bar{x}$$

al multiplicar a la izquierda por la matriz S , obtenemos

$$B(S \bar{x}) = \lambda(S \bar{x})$$

Puesto que $\bar{x} \neq \bar{0}$ y S es no singular se tiene $S\bar{x} \neq \bar{0}$. Por tanto $S\bar{x}$ es un vector propio de B asociado al valor propio λ .

Los valores propios λ de una matriz triangular A , se obtienen de:

$$\det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda)$$

Teorema 1.10. *Sea A una matriz de orden $n \times n$. La matriz A es simétrica si, y sólo si, A es diagonalizable mediante una matriz ortogonal. Es decir, si existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^t A Q$ es diagonal*

Demostración

Si A es diagonalizable mediante una matriz ortogonal, entonces

$$D = Q^t A Q$$

ya que $Q^t = Q^{-1}$ por ser ortogonal. Luego $A = Q D Q^t$ y transponiendo esta expresión obtenemos

$$A^t = Q D^t Q^t = Q D Q^t = A$$

por ser diagonal. Luego A es simétrica.

Recíprocamente supongamos que A es simétrica. Procedemos por inducción sobre n . Si $n=1$ la matriz, de tamaño 1×1 , es diagonal, y se puede escribir como $A = I^t A I$, siendo I ortogonal.

Supongamos que toda matriz simétrica de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ es diagonalizable mediante una matriz ortogonal. Sea \bar{u}_1 un vector propio de A normalizado asociado a λ_1 . Entonces existe una base ortonormal $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ de \mathbb{R}^n que lo contiene. Sea $T = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$, claramente T es ortogonal y

$$AT = [\lambda_1 \bar{u}_1, A \bar{u}_2, \dots, A \bar{u}_n]$$

Luego la matriz $T'AT$ se puede escribir por bloques como

$$T'AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & Z \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (1)$$

Como $A = A'$ se tiene que

$$T'AT = (T'AT)' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ Z' & B' \end{bmatrix} \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que $Z = 0$ y que $B = B'$. Como la matriz B es de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, por la hipótesis de inducción, existe una matriz ortogonal Q_1 tal que $Q_1' B Q_1 = D_1$ siendo D_1 diagonal. Si construimos la matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

se cumple que R es ortogonal y

$$\begin{aligned} R'T'ATR &= R' \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} R \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por consiguiente A es semejante a una matriz diagonal, por lo tanto es diagonalizable.

Además se observa que la matriz de vectores propios $Q = TR$ es ortogonal ya que es producto de dos matrices ortogonales. Luego existe una base de vectores propios ortonormales.

Puesto que se puede construir una base de vectores propios ortonormales de una matriz simétrica, diremos que toda matriz simétrica es diagonalizable por una matriz ortogonal. Es decir si A es simétrica entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q'AQ = D$ es diagonal.

Teorema 1.11. *Sea A una matriz simétrica de orden $n \times n$, entonces los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales respecto al producto escalar canónico de \mathbb{R}^n .*

Demostración

Supongamos que $A\bar{u} = \lambda \bar{u}$ y $A\bar{v} = \mu \bar{v}$, con $\lambda \neq \mu$, entonces

$$\langle A\bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \lambda \bar{u}, \bar{v} \rangle = \lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$$

$$\langle A\bar{u}, \bar{v} \rangle = (A\bar{u})' \bar{v} = \bar{u}' A' \bar{v}$$

$$= \bar{u}' (A\bar{v}) = \langle \bar{u}, A\bar{v} \rangle = \mu \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$$

Luego $(\lambda - \mu) \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$ y como $\lambda \neq \mu$ se tiene que $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$ es decir \bar{u} y \bar{v} son ortogonales.

Lema 1.12. *Toda matriz simétrica tiene, al menos un valor propio real.*

Corolario 1.13. *Si A es una matriz simétrica de orden $n \times n$, entonces los valores propios de A son números reales, y existen n vectores propios de A que forman un conjunto ortonormal.*

Demostración

Si $P = (P_{ij})$ y si $D = (d_{ij})$ son las matrices especificadas en el teorema anterior, entonces

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow AP = PD$$

Sea $V = (P_{1i}, \dots, P_{ni})^t$ la i -ésima columna de P , entonces

$$A \bar{v} = d_{ij} \bar{v}$$

y las n columnas de P son vectores propios de A que forman un conjunto ortonormal.

Al multiplicar el lado izquierdo de esta ecuación por \bar{v}^t , obtenemos

$$\bar{v}^t A \bar{v} = d_{ij} \bar{v}^t \bar{v}$$

Dado que $\bar{v}^t A \bar{v}$ y $\bar{v}^t \bar{v}$ son números reales y que $\bar{v}^t \bar{v} \neq 0$, el valor propio d_{ij} también es un número real.

Definición 1.14 Una matriz simétrica A de orden $n \times n$ es definida positiva si $\bar{x}^t A \bar{x} > 0, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Teorema 1.15 *Una matriz simétrica A es definida positiva si y sólo si todos los*

valores propios de A son positivos.

Demostración

Supongamos primero que A es definida positiva y que λ es un valor propio de A con vector propio asociado \bar{x} . Entonces

$$0 < \bar{x}^t A \bar{x} = \lambda \bar{x}^t \bar{x} = \lambda \|\bar{x}\|_2^2$$

Así que $\lambda > 0$. En consecuencia, todo valor propio de una matriz definida positiva es positivo.

Ahora suponga que A es simétrica con valores propios positivos, entonces existen n vectores de A $\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n$, que forman un conjunto ortonormal y linealmente independiente. Así para todo $\bar{x} \neq \bar{0}$ existe un conjunto único de constantes β_1, \dots, β_n no todos ceros tal que

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{v}^i$$

multiplicando miembro a miembro

$$\bar{x}^t A \bar{x} = \bar{x}^t \left(\sum_{i=1}^n \beta_i A \bar{v}^i \right) = \bar{x}^t \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i \bar{v}^i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_j \beta_i \lambda_i (\bar{v}^j)^t \bar{v}^i$$

Pero los vectores $\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n$ forman un conjunto ortonormal y, por tanto

$$(\bar{v}^j)^t \cdot \bar{v}^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

y como $\lambda_i > 0 \Rightarrow$

$$\bar{x}^t A \bar{x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_j \beta_i \lambda_i (\bar{v}^j)^t \bar{v}^i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i^2 > 0$$

$\Rightarrow A$ es definida positiva.

1.2 Los teoremas de Schur y Gershgorin

Hemos dicho que dos matrices A y B son semejantes entre sí, cuando existe una matriz no singular P tal que $B = PAP^{-1}$. La importancia de este concepto surge del teorema que establece que dos matrices que representan a una misma transformación lineal, con respecto a dos bases distintas, son semejantes entre sí.

Teorema 1.16 *Todas las matrices semejantes tienen los mismos valores propios.*

Demostración

Sean A y B dos matrices semejantes, es decir,

$$B = PAP^{-1}$$

Vamos a ver que A y B tienen el mismo polinomio característico. Ciertamente,

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(PAP^{-1} - \lambda I) \\ &= \det[P(A - \lambda I)P^{-1}] \end{aligned}$$

$$= \det P \det (A - \lambda I) \det P^{-1}$$

$$= \det (A - \lambda I)$$

Hemos incluido dos hechos básicos en esta prueba: el determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes; el determinante de la inversa de una matriz es el recíproco de su determinante.

1.2.1 Factorización de Schur

El teorema 1.16 sugiere una estrategia para encontrar los valores propios de A : convirtiendo A en una matriz B por medio de una transformación de semejanza, $B = PAP^{-1}$, y calculando los valores propios de B . Si B es más simple que A , el cálculo de sus valores propios quizá sea más simple. Específicamente si B es triangular los valores propios de B (y los de A) son simplemente los elementos diagonales de B . Esto nos lleva de un modo natural al teorema de Schur, según el cual la estrategia precedente siempre será posible (al menos teóricamente). Recuerde que una matriz U es *unitaria* si $UU^* = I$. Aquí, U^* denota a la conjugada transpuesta de U : $(U^*)_{ij} = U_{ji}$. El siguiente es el *teorema de Schur*.

Teorema 1.17 *Toda matriz cuadrada es unitariamente semejante a una matriz triangular*

Demostración

Procedemos por inducción sobre n , el orden de la matriz A . El teorema es trivial cuando $n = 1$. Suponga que el teorema ya se demostró para todas las matrices de orden $n-1$, y considere una matriz A de orden n . Sea λ un valor propio de A , y x

un vector propio correspondiente . No habrá pérdida de generalidad si suponemos que $\|x\|_2 = 1$. Como es usual, denotamos con $\bar{e}^1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. Sea $\beta = \frac{x_1}{|x_1|}$ si $x_1 \neq 0$, y $\beta = 1$ cuando $x_1 = 0$. Por el lema 1.20 que enunciaremos más adelante, hay una matriz unitaria U , tal que $U\bar{x} = \beta \bar{e}^1$. Dado que U es unitaria, $U^{-1} = U^*$, $\beta x = U^* \bar{e}^1$ de modo que

$$UAU^* = UAB^{-1} \bar{x} = \beta^{-1} \lambda U \bar{x} = \lambda \bar{e}^1$$

Esto demuestra que la primera columna de UAU^* es $\lambda \bar{e}^1$. Sea \bar{A} la matriz que se obtiene al eliminar en UAU^* la primera fila y la primera columna. Por hipótesis de inducción, hay una matriz unitaria Q de orden $n-1$, tal que $Q\bar{A}Q^*$ es triangular. La matriz unitaria con que se reduce A a una forma triangular es

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} U$$

pues

$$\begin{aligned} VAV^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} UAU^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & W \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & WQ^* \\ 0 & \bar{A}Q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & WQ^* \\ 0 & Q\bar{A}Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En esta ecuación, w es un vector fila de orden $n-1$, y los ceros representan vectores nulos de orden $n-1$. Como la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

es unitaria.

Hemos observado esta demostración no es constructiva, pues apela a (y hace uso de) la existencia de valores propios, mas no aborda el problema de cómo se pueden calcular.

Corolario 1.18 *Toda matriz cuadrada es semejante a una matriz triangular.*

Corolario 1.19 *Toda matriz hermitiana es semejante unitariamente a una matriz diagonal.*

Demostración

Si A es hermitiana, entonces $A = A^*$. Sea U una matriz unitaria tal que UAU^* es triangular superior. En tal caso $(UAU^*)^*$ es triangular inferior. Pero

$$(UAU^*)^* = U^{**}A^*U^* = UAU^*$$

Así, la matriz UAU^* es ambas cosas, triangular superior y triangular inferior; por consiguiente, se trata de una matriz diagonal.

Lema 1.20 *La matriz $I - \bar{v}v^*$ es unitaria si y solo si $\|\bar{v}\|_2^2 = 2$ o $\bar{v} = 0$*

Demostración

Para que la matriz $U = I - \bar{v}v^*$ sea unitaria se requiere

$$I = UU^* = (I - \bar{v}v^*)(I - \bar{v}v^*)$$

$$= I - 2 \bar{v}\bar{v}^* + \bar{v}\bar{v}^* \bar{v}\bar{v}^*$$

$$= I - 2 \bar{v}\bar{v}^* + (\bar{v}\bar{v}^*) (\bar{v}\bar{v}^*)$$

$$= I - (2 - \bar{v}^* \bar{v}) \bar{v}\bar{v}^*$$

Una condición necesaria y suficiente para que \bar{v} es que $\bar{v}^* \bar{v} = 2$ o $\bar{v}\bar{v}^* = 0$.

Lema 1.21 Sean \bar{x} y \bar{y} dos vectores tales que $\|\bar{x}\|_2 = \|\bar{y}\|_2$ y $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ es real. En este caso hay una matriz unitaria U de la forma $I - \bar{v}\bar{v}^*$ tal que $U\bar{x} = \bar{y}$.

Demostración

Si $\bar{x} = \bar{y}$, tomese $\bar{v} = \bar{0}$. Si $\bar{x} \neq \bar{y}$, podemos suponer que $\bar{v} = \alpha(\bar{x} - \bar{y})$, con $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\|\bar{x} - \bar{y}\|_2}$

Esta elección de \bar{v} nos conduce a:

$$\begin{aligned} U \bar{x} - \bar{y} &= (I - \bar{v}\bar{v}^*) \bar{x} - \bar{y} = \bar{x} - \bar{v}\bar{v}^* \bar{x} - \bar{y} = \bar{x} - \bar{y} - \alpha^2 (\bar{x} - \bar{y})(\bar{x}^* - \bar{y}^*) \\ &= (\bar{x} - \bar{y}) \left[1 - \alpha^2 (\bar{x}^* \bar{x} - \bar{y}^* \bar{x}) \right] \end{aligned}$$

Esta última expresión es igual con cero, pues el factor entre paréntesis es nulo.

Para ver esto, apoyémonos en las hipótesis $\bar{x}^* \bar{x} = \bar{y}^* \bar{y}$ y $\bar{y}^* \bar{x} = \bar{x}^* \bar{y}$, pues $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ es real para calcular:

$$1 - \alpha^2 (\bar{x}^* \bar{x} - \bar{y}^* \bar{y}) = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\bar{x}^* \bar{x} + \bar{x}^* \bar{x} - \bar{y}^* \bar{x} - \bar{y}^* \bar{x})$$

$$=1-\frac{1}{2}(\bar{x}^* \bar{x} + \bar{y}^* \bar{y} - \bar{y}^* \bar{x} - \bar{x}^* \bar{y})$$

$$=1-\frac{1}{2}\alpha^2(\bar{x}^* - \bar{y}^*)(\bar{x} - \bar{y})$$

$$=1-\frac{1}{2}\alpha^2\|\bar{x} - \bar{y}\|_2^2=0$$

Nota: Si se conoce un valor propio λ de una matriz A de $n \times n$, entonces la demostración del teorema de Schur nos indica cómo producir una matriz \bar{A} de $(n-1) \times (n-1)$ que tiene los mismos valores propios que A , salvo λ . Este proceso se conoce bajo el nombre de deflación.

I.2.2 Localización de valores propios

Para determinar donde se sitúan los valores propios, enunciaremos el *teorema de Gershgorin*.

Teorema 1.22 *El espectro de una matriz A de $n \times n$ (es decir el conjunto de sus valores propios) está contenido en la unión de los siguientes n discos, D_i , en el plano complejo:*

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Demostración

Sea λ un elemento del espectro de A . Elija un vector \bar{x} tal que $\|\bar{x}\|_\infty = 1$ y $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$.

Sea i un índice para el cual $|x_i| = 1$. Como $(A\bar{x})_i = \lambda \bar{x}_i$, tenemos que

$$\lambda \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j$$

En consecuencia

$$(\lambda - a_{ii}) \bar{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \bar{x}_j$$

Tomando valores absolutos, aplicando la desigualdad del triángulo y utilizando la desigualdad $|\bar{x}_j| \leq |\bar{x}_i|$, tenemos que

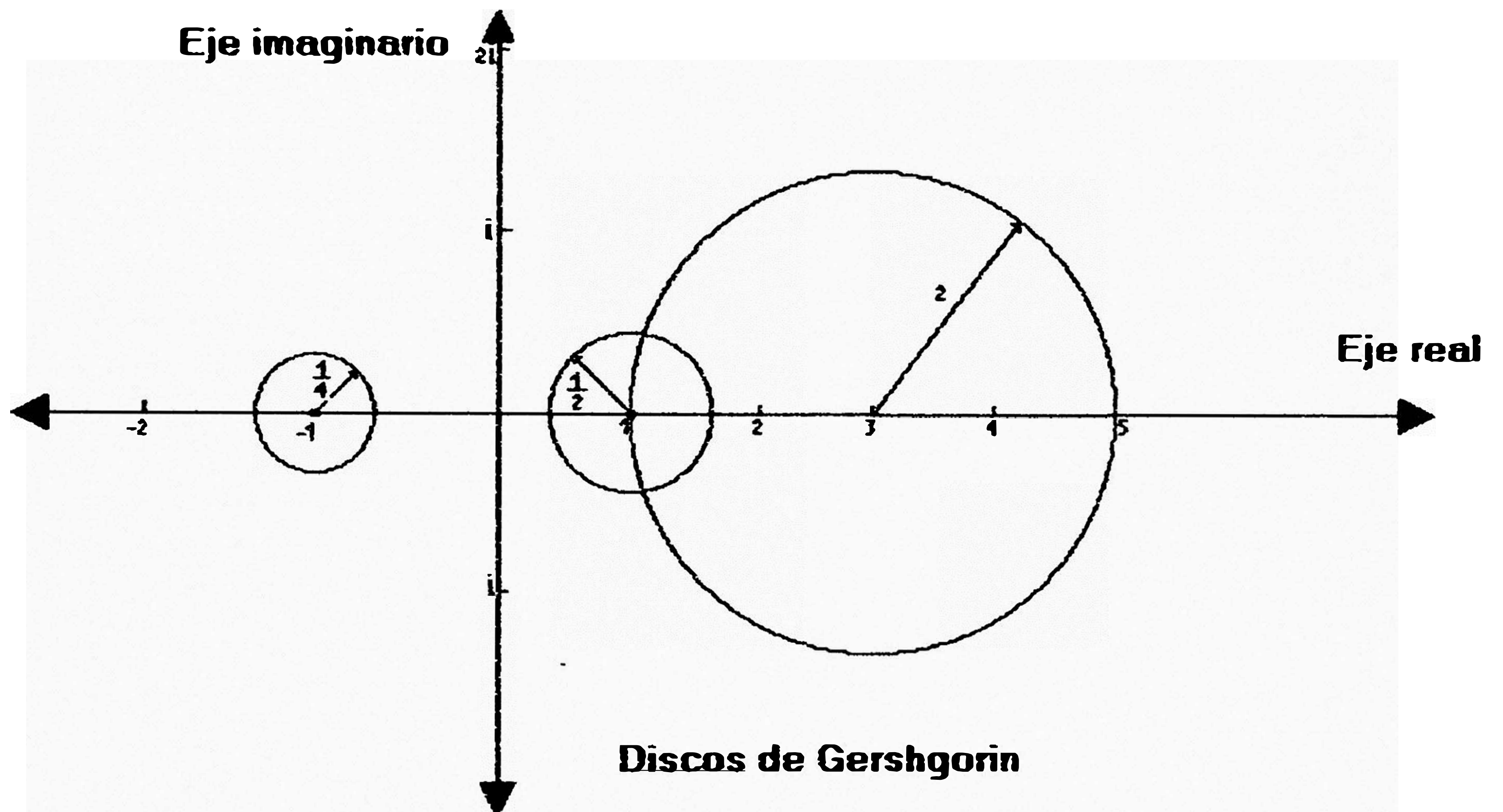
$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |\bar{x}_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

de modo que $\lambda \in D_i$

Los discos de Gershgorin para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

se muestran en la siguiente figura, donde podemos deducir que todos los valores propios de A satisfacen la desigualdad $\frac{1}{2} \leq |\lambda| \leq 5$.



Teorema 1.23 Si una matriz A se diagonaliza por medio de la transformación de semejanza $P^{-1}AP$, y si B es una matriz arbitraria, entonces los valores propios de $A+B$ se encuentran en la unión de discos

$$\left\{ \lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - \lambda_i| \leq \kappa_\infty(P) \|B\|_\infty \right\}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A y $\kappa_\infty(P)$ es el número de condición de P .

Demostración

Vamos a demostrar un resultado, en cierto modo más preciso. Si $P^{-1}AP = D$, la diagonal de la matriz diagonal D consta de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Luego para el espectro se cumple:

$$\text{esp}(A+B) = \text{esp}[P^{-1}(A+B)P] = \text{esp}(D+P^{-1}BP)$$

Aplicando el teorema de Gershgorin a $D + C$, con $C = P^{-1}BP$, concluimos que el espectro de $A+B$ se encuentra en la unión de los discos de Gershgorin de $D+C$, los cuales son

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda - \lambda_i - c_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |d_{ij} + c_{ij}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}| \right\}$$

por la desigualdad del triángulo y la definición de $\|C\|_\infty$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_i| &\leq |\lambda - \lambda_i - c_{ii}| + |c_{ii}| \leq |c_{ii}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}| \\ &\leq \|C\|_\infty \leq \|P^{-1}\|_\infty \|B\|_\infty \|P\|_\infty = \kappa_\infty(P) \|B\|_\infty \end{aligned}$$

Este último teorema indica que cuando se perturba una matriz A , sus valores propios se ven perturbados por una cantidad que no excede de $\kappa_\infty(P)\|B\|_\infty$, donde B es la matriz de perturbación y $\kappa_\infty(P)$ es el número de condición de P con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Para las matrices hermitianas (es decir, aquellas para las que $A^* = A$) se puede elegir una matriz P unitaria; se trata en realidad del corolario 1.18 del teorema de Suchr. por lo tanto, en este caso las filas de P son vectores que satisfacen $\|x\|_2 = 1$. De lo anterior se obtiene que $\|P\|_\infty \leq \sqrt{n}$. Esto también es cierto para P^{-1} , de modo que $\kappa_\infty(P) \leq n$. En consecuencia, para toda matriz B , los valores propios de $A + B$ están situados en la unión de discos

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_i| \leq \kappa_\infty(P) \|B\|_\infty \right\}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de la matriz hermitiana A .

Capítulo II

Método de la Potencia

Es un método iterativo para aproximar el valor propio (dominante). Supongamos que la matriz A de orden $n \times n$ tiene n valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con un conjunto asociado de vectores propios linealmente independientes $\{v^{(1)}, \dots, v^{(n)}\}$.

Supongamos que los valores propios de A cumplen $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

Si $x^{(0)} \in \mathbf{C}^n - \{0\}$ que cuando se escribe como una combinación lineal de la base $\{v^{(1)}, \dots, v^{(n)}\}$ el coeficiente de $v^{(1)}$ es distinto de cero, así

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \beta_i v^{(i)} \quad (\beta_1 \neq 0) \quad (2.1)$$

$$x^{(1)} = A x^{(0)}$$

$$\bar{x}^{(2)} = A \bar{x}^{(1)}$$

\vdots

$$\bar{x}^{(k)} = A \bar{x}^{(k-1)}$$

luego:

$$\bar{x}^{(k)} = A^k \bar{x}^{(0)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x^{(k)} &= \sum_{i=1}^n \beta_i A^k (v^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i^k \bar{v}^{(i)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x}^{(k)} = \lambda_1^k \left[\beta_1 \bar{v}^{(1)} + \beta_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \bar{v}^{(2)} + \dots + \beta_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \bar{v}^{(n)} \right] \quad (2.2)$$

Sea

$$\bar{\varepsilon}^{(k)} = \beta_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \bar{v}^{(2)} + \dots + \beta_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \bar{v}^{(n)} \quad (2.3)$$

de (2.2) y (2.3) se tiene:

$$\bar{x}^{(k)} = \lambda_1^k \left[\beta_1 \bar{v}^{(1)} + \bar{\varepsilon}^{(k)} \right] \quad (2.4)$$

como $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ para todo $j = 2, \dots, n$ y se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k = 0 \quad (2.5)$$

$$y \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\beta_1 \bar{v}^{(1)} + \bar{\varepsilon}^{(k)} \right] = \beta_1 \bar{v}^{(1)} \quad (2.6)$$

Sea Ψ una funcional lineal sobre \mathbb{C}^n tal que $\Psi(\bar{v}^{(1)}) \neq 0$.

Luego, de (2.4) se tiene

$$\Psi(\bar{x}^{(k)}) = \lambda_1^k [\beta_1 \Psi(\bar{v}^{(1)}) + \Psi(\bar{\varepsilon}^{(k)})] \quad (2.7)$$

Sea

$$r_k = \frac{\Psi(\bar{x}^{(k+1)})}{\Psi(\bar{x}^{(k)})} = \frac{\lambda_1^{k+1} [\Psi(\bar{v}^{(1)}) + \Psi(\bar{\varepsilon}^{(k+1)})]}{\lambda_1^k [\Psi(\bar{v}^{(1)}) + \Psi(\bar{\varepsilon}^{(k)})]} \quad (2.8)$$

de (2.6) y (2.8) se obtiene

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lambda_1 \quad (2.9)$$

de (2.4)

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \bar{x}^{(k)} = \beta_1 \bar{v}^{(1)} + \bar{\varepsilon}^{(k)} \quad (2.10)$$

de (2.10) y (2.6)

$$\bar{v}^{(1)} = \frac{1}{\beta_1} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} \bar{x}^{(k)}$$

vector propio correspondiente a λ_1

2.1. ALGORITMO DEL METODO DE LA POTENCIA

Entrada: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $x \in \mathbb{R}^n$
 M : número de iteraciones
Para $k = 1, 2, \dots, M$ **hacer**
 $y := Ax$
 $r := \frac{\Psi(y)}{\Psi(x)}$
 $x := y$
Salida: r (aproximación del valor propio)
 x (aproximación del vector propio)

Para asegurar la convergencia de \bar{x}^k en la práctica, esto es para evitar que tienda al vector cero o crezca sin límite, en el método de la potencia se introduce una normalización de los vectores $\bar{x}^{(k)}$.

Luego: se tiene el algoritmo normalizado

Entrada: $A \in \mathbb{R}^n$
 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
 M : número de iteraciones
Para $k = 1, 2, \dots, M$ **hacer**
 $y := Ax$
 $r := \frac{\Psi(y)}{\Psi(x)}$
 $x := \frac{y}{\|y\|_\infty}$
Salida: r (aproximación del valor propio)
 x (aproximación del vector propio)

Algoritmo Modificado del Método de la Potencia

A partir de (2.4) si $|x_{pk}^{(k)}| = \|x^{(k)}\|_\infty$, consideramos

$$r^{(k)} = \frac{x_{p_k}^{(k+1)}}{x_{p_k}^{(k)}} = \frac{\lambda_1 [\beta_1 v_{p_k}^{(1)} + \varepsilon_{p_k}^{(k+1)}]}{[\beta_1 v_{p_k}^{(1)} + \varepsilon_{p_k}^{(k)}]}$$

$$= \lambda_1 \frac{[\beta_1 v_{p_k}^{(1)} + \varepsilon_{p_k}^{(k+1)}]}{[\beta_1 v_{p_k}^{(1)} + \varepsilon_{p_k}^{(k)}]}$$

como $\varepsilon^{(k)} \rightarrow 0$, se espera que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)} = \lambda_1$$

Para estabilizar el cambio de índices p_k y para k grande y evitar overflow, en cada paso se elige

$$p_k := \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid |x_j^{(k)}| = \|\bar{x}^{(k)}\|_{\infty}\}$$

Entrada: $A \in \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^n$

M : número de iteraciones

tol : tolerancia

$p := \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : |x_j| = \|\bar{x}\|_\infty\};$

$\bar{x} := \frac{\bar{x}}{x_p};$

Para $k = 1, 2, \dots, M$ hacer

$\bar{y} := A \bar{x};$

$r := y_p;$

$p := \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : |y_j| = \|\bar{y}\|_\infty\}$

Si $y_p = 0$, entonces escribir ('criterio falla')

escribir('correr nuevamente')

Parar!

sino

$x := \frac{\bar{y}}{y_p};$

$Err := \|\bar{x} - \frac{1}{y_p} \bar{y}\|_\infty$

Si $Err < tol$ entonces escribir('vector propio aprox', x)

escribir('valor propio aproximado', r)

Parar!

fin_si

fin_si

Nota: ver programa en anexo

2.2. MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA

Se sabe que si λ es un valor propio de una matriz no singular A se cumple que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1} . Esto sugiere un mecanismo, para calcular el valor propio más pequeño de A como sigue:

Supongamos que los valores propios de A , son tales que

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \dots \leq |\lambda_1|$$

Luego los valores propios de A^{-1} son tales que

$$0 < |\lambda_1^{-1}| \leq |\lambda_2^{-1}| \leq \dots < |\lambda_n^{-1}|$$

Luego, con el método de la potencia se puede calcular el valor propio de máximo modulo $\hat{\lambda} = \lambda_n^{-1}$ de $\hat{A} = A^{-1}$. Recordando

$$\bar{x}^{(k+1)} = \hat{A} \bar{x}^{(k)} \quad \text{ó} \quad \bar{x}^{(k+1)} = A^{-1} \bar{x}^{(k)}$$

Evitando el cálculo de A^{-1} , en cada paso se debe determinar $\bar{x}^{(k+1)}$ solucionando el sistema lineal

$$A \bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)}$$

aplicando por ejemplo el método de eliminación de Gauss. Se necesita efectuar solo una vez la fase de eliminación de Gauss y se repite en cada iteración cambiando solo la parte derecha de la ecuación.

2.2.1. ALGORITMO DEL METODO DE LA POTENCIA INVERSA

```
Entrada:       $A \in \mathbb{R}^n$   
              $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$   
              $M$  : número de iteraciones  
              $tol$  : tolerancia;  
 $p := \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : |x_j| = \|\bar{x}\|_\infty\};$   
 $x := \frac{x}{x_p};$   
Para  $k = 1, 2, \dots, M$  hacer  
     $\bar{y} := A^{-1} \bar{x};$   
     $\bar{y} := \text{SolGauss}(A, \bar{x});$   
     $r := \frac{x_1^{k+1}}{x_1^k};$   
     $\bar{x} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_2};$   
     $\bar{x} = \bar{y};$   
     $Err := \|\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\|_2$   
    Si  $Err < tol$  entonces escribir('vector propio aprox',  $\bar{x}$  )  
                                escribir('valor propio aproximado',  $r$ )  
                                Parar!  
  
    fin_si  
fin_para
```

Nota: ver programa en el anexo

2.3. POTENCIA INVERSA CON DESPLAZAMIENTO

Al considerar la matriz desplazada $(A - \mu I)$ se puede calcular el valor propio de A más cercano a μ .

Sea λ_k el valor propio de A tal que $0 < |\lambda_k - \mu| < \varepsilon$, donde $\mu \in \mathbb{C}$ ha sido determinado con anterioridad y

$|\lambda_j - \mu| > \varepsilon$, para los otros valores propios $\lambda_j \neq \lambda_k$ de A . Como los valores

propios de $A - \mu I$ son los números $\lambda_j - \mu$, el método de la potencia inversa se puede aplicar a $(A - \mu I)$ para obtener una aproximación de $\beta = (\lambda_k - \mu)^{-1}$. Para determinar $x^{(k+1)}$ de

$$(A - \mu I) \bar{x}^{(k)}$$

la descomposición gaussiana de $A - \mu I$ se debe calcular una sola vez. Finalmente de $\beta = (\lambda_k - \mu)^{-1}$ se obtiene $\lambda_k = \beta^{-1} + \mu$.

2.3.1. ALGORITMO DE LA POTENCIA INVERSA CON DESPLAZAMIENTO

```

Entrada:   $A \in \mathbb{R}^n$ 
           $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 
           $M$  : número de iteraciones
           $tol$  : tolerancia;

 $x := \frac{x}{x_p}$ ;
Para  $k = 1, 2, \dots, M$  hacer
     $\bar{y} := (A - \mu I)^{-1} \bar{x}$ ;
     $\bar{y} := SolGauss(A - \mu I, \bar{x})$ ;
     $r := \frac{x_1^{k+1}}{x_1^k}$ ;
     $\bar{x} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_2}$ ;
     $\bar{x} = \bar{y}$ ;
     $Err := \|\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\|_2$ 
Si  $Err < tol$  entonces escribir('vector propio aprox',  $\bar{x}$ )
                    escribir('valor propio aproximado',  $r^{-1} + \mu$ )
                    Parar!

    fin_si
fin_para

```

2.4. METODO DE LA POTENCIA CON DESPLAZAMIENTO

Al considerar la matriz desplazada $(A - \mu I)$ también se puede calcular el valor propio de A más alejado de un valor propio dado μ . Sea λ_k el valor propio tal que $|\lambda_k - \mu| > \varepsilon$ para algún k y $|\lambda_j - \mu| < \varepsilon$ para los otros valores propios de A . Al aplicar el método de la potencia a $(A - \mu I)$ se obtiene $\beta = \lambda_k - \mu$ y de aquí $\lambda_k = \beta + \mu$.

2.4.1. ALGORITMO DE LA POTENCIA CON DESPLAZAMIENTO

Entrada: $A \in \mathbb{R}^n$
 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
 M : número de iteraciones
 tol : tolerancia
 μ : para determinar un valor más próximo
 $p := \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : |x_j| = \|\bar{x}\|_\infty\};$
 $x := \frac{\bar{x}}{x_p};$
 Para $k = 1, 2, \dots, M$ hacer
 $\bar{y} := (A - \mu I) \bar{x};$
 $r := y_p;$
 $p := \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : |y_j| = \|\bar{y}\|_\infty\}$
 Si $y_p = 0$, entonces escribir ('criterio falla')
 sino
 $x := \frac{\bar{y}}{x_p};$
 $Err := \left\| \bar{x} - \frac{1}{y_p} \bar{y} \right\|_\infty$
 Si $Err < tol$ entonces escribir('vector propio aprox', x)
 escribir('valor propio aproximado', $r + \mu$)
 Parar!
 fin_si
 fin_si

Nota: ver programa en el anexo

DEFINICION 2.5. Supongamos que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión que converge a P con $P_n \neq P$ para todo n . Si existen las constantes positivas λ y α con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|P_{m+1} - P|}{|P_m - P|^\alpha} = \lambda$$

entonces $\{P_m\}_{m=0}^\infty$ convergera a P , con orden α con una constante de error.

DEFINICIÓN 2.6. Supongamos que $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión que converge a cero y que $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ converge en un número α . Si \exists una constante positiva K con $|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|$ para un valor mas alto de n , entonces diremos que $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ converge en α con un rapidez de convergencia $O(\beta_n)$ ($\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$ ó $\alpha_n \rightarrow \alpha$ con rapidez de convergencia $O(\beta_n)$)

La rapidez con que $\{\mu^m\}_{m=1}^\infty$ converge a λ_1 ($\mu^m \approx \lambda_1 + \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^m$) se determina mediante las razones $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^m$, para $j=2,3,\dots,m$ y particularmente con $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m$, la rapidez de convergencia $O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right)$ por lo cual hay un aconstante K tal que para m grande .

$$|\mu^m - \lambda_1| \approx K \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^m \quad (*)$$

2.5. ACELERACIÓN DEL MÉTODO DE LA POTENCIA

2.5.1. PROCEDIMIENTO DE AITKEN Δ^2

Cuando una sucesión tiene una convergencia lineal , se puede mejorar su convergencia es decir:

Sea $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión que converge linealmente a P , para obtener la construcción de una sucesión $\left\{ \hat{P}_n \right\}$ que converja mas rápidamente a P que $\{P_n\}$ supongamos que los signos de $P_n - P$, $P_{n+1} - P$, $P_{n+2} - P$ son iguales y que n

es suficientemente grande como para que

$$\frac{P_{n+1} - P}{P_n - P} \approx \frac{P_{n+2} - P}{P_{n+1} - P}$$

entonces

$$(P_{n+1} - P)^2 \approx (P_{n+2} - P)(P_n - P)$$

por tanto

$$P_{n+2}^2 - 2P_{n+1}P + P^2 \approx P_{n+2}P_n - (P_n + P_{n+2})P + P^2$$

$$(P_{n+2} + P_n - 2P_{n+1})P \approx P_{n+2}P_n - P_{n+1}^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{P_{n+2}P_n - P_{n+1}^2}{P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n}$$

sumando y restando P_n^2 y $2P_nP_{n+1}$:

$$P = \frac{P_n^2 + P_{n+2}P_n + 2P_nP_{n+1} - 2P_nP_{n+1} - P_n^2 - P_{n+1}^2}{P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n}$$

$$P = P_n - \frac{(P_{n+1} - P_n)^2}{P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n}$$

El método Δ^2 de Aitken se fundamenta en que la sucesión $\{\hat{P}_n\}$ definida por

$$P = P_n - \frac{(P_{n+1} - P_n)^2}{P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n}$$

converge más rápidamente a P que la sucesión $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$

2.5.2. ALGORITMO ACELERADO DEL MÉTODO DE LA POTENCIA

Entrada: $A \in \mathbb{R}^n$
 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
 M : número de iteraciones
 tol : tolerancia

$k = 1;$
 $\mu_0 = 0;$
 $\mu_1 = 0;$
 $p := \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : |x_j| = \|\bar{x}\|_\infty\};$
 $\bar{x} := \frac{\bar{x}}{x_p};$

Para $k = 2, \dots, M$ **hacer**

$\bar{y} := A \bar{x};$
 $\mu = y_p;$
 $\hat{\mu} = \mu_0 - \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{\mu - 2\mu_1 + \mu_0}$
 $p := \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : |y_j| = \|\bar{y}\|_\infty\}$
Si $y_p = 0$, **entonces** *escribir* ('criterio falla')
sino

$x := \frac{\bar{y}}{x_p};$
 $Err := \|\bar{x} - \frac{1}{y_p} \bar{y}\|_\infty$
Si $Err < tol$ **entonces** *escribir*('vector propio aprox', \bar{x})
escribir('valor propio aproximado', r)
Parar!

fin_si

fin_si
 $\mu_0 = \mu_1;$
 $\mu_1 = \mu;$
fin_para

Nota: ver programa en el anexo

2.6. MÉTODO DE LA POTENCIA SIMÉTRICA

Cuando A es simétrica, podemos hacer una variación en la elección de los vectores x^m , y^m y escalares μ^m para mejorar significativamente la razón de convergencia entre la sucesión $\{\mu^m\}_{m=1}^{\infty}$ y el valor propio dominante λ_1 . De hecho, aunque la razón de convergencia del método general de potencias es $O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right)$, la del método modificado para matrices simétricas es $O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2m}\right)$. La sucesión $\{\mu^m\}$ es todavía linealmente convergente, de modo que podemos volver a aplicar el procedimiento Δ^2 de Aitken.

2.6.1 ALGORITMO DEL MÉTODO DE LA POTENCIA SIMÉTRICA

Para aproximar el valor propio dominante y el vector propio asociado de una matriz simétrica A de $n \times n$, dado un vector $\bar{x} \neq \bar{0}$

Entrada: $A \in \mathbb{R}^n$
 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
 M : número de iteraciones
 tol : tolerancia

$k = 1$;
 $\bar{x} := \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_2}$;
Para $k = 2, \dots, M$ **hacer**
 $\bar{y} := A \bar{x}$;
 $\mu = \bar{x}^T \cdot \bar{y}$;
Si $\|\bar{y}\|_2 = 0$, *entonces escribir ('criterio falla')*
Parar !
sino
 $x := \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|_2}$;
 $Err := \left\| \bar{x} - \frac{1}{\mu} \bar{y} \right\|_\infty$
Si $Err < tol$ *entonces escribir('vector propio aprox', \bar{x})*
escribir('valor propio aproximado', r)
Parar!

fin_si

fin_si
fin_para

TEOREMA 2.9. Si A es una matriz simétrica de $n \times n$ con los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y $\|A \bar{x} - \lambda \bar{x}\|_2 < \varepsilon$ para algún vector \bar{x} con $\|\bar{x}\|_2 = 1$ y con el número real λ , entonces

$$\min_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j - \lambda| < \varepsilon$$

Demostración: supongamos que $\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n$ forman un conjunto ortogonal de vectores propios de A asociados, respectivamente, a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. entonces para algún conjunto único de las constantes β_1, \dots, β_n , podemos expresar \bar{x} como sigue:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{v}^j$$

Por tanto,

$$\|A \bar{x} - \lambda \bar{x}\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j (\lambda_j - \lambda) \bar{v}^j \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 |\lambda_j - \lambda|^2 \geq \min_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j - \lambda|^2 \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2$$

pero

$$\sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 = \|\bar{x}\|_2^2 = 1$$

así que

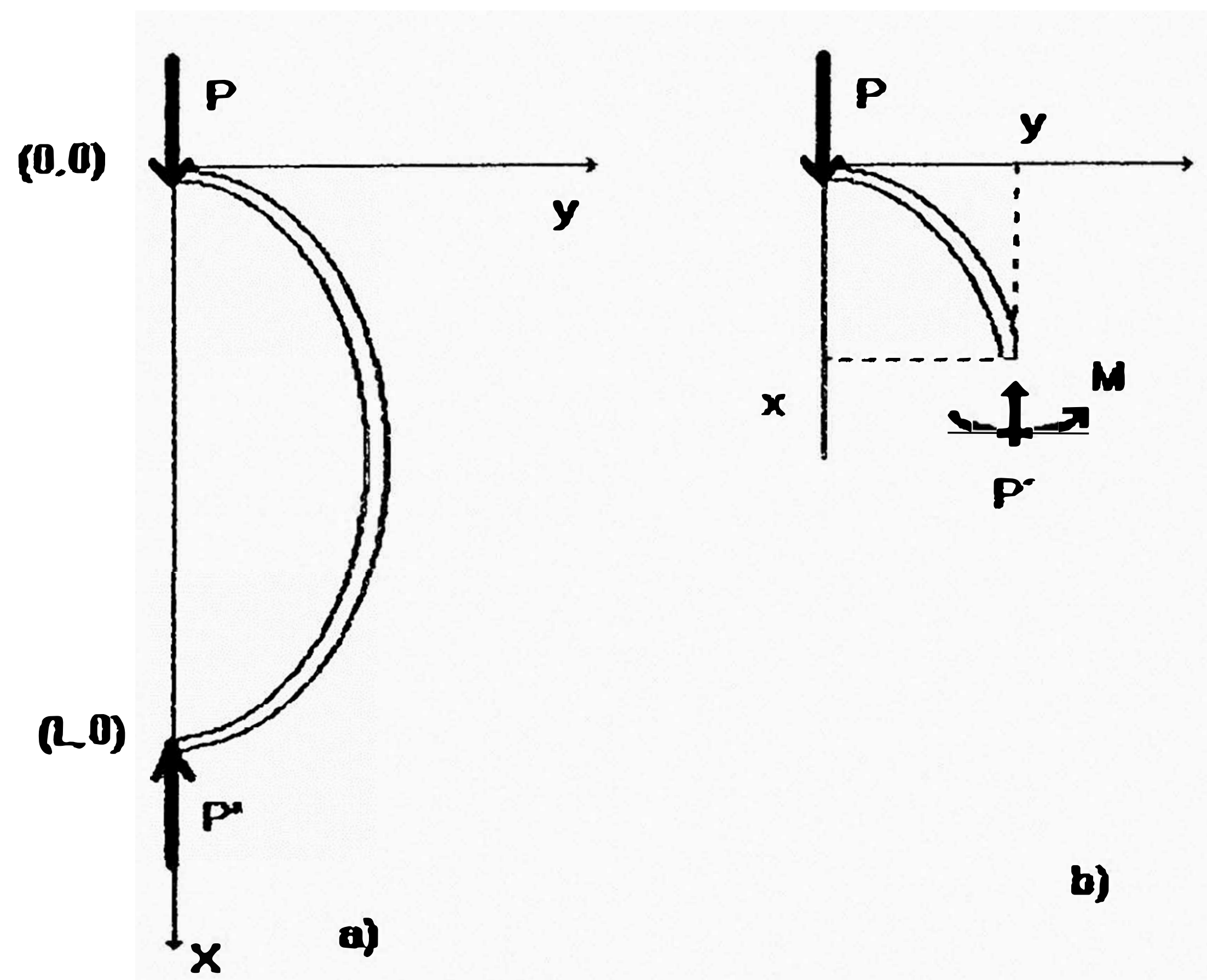
$$\varepsilon \geq \|A \bar{x} - \lambda \bar{x}\|_2 > \min_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j - \lambda|$$

Capítulo III.

Una Aplicación para un problema de Valor en la Frontera

3.1. Introducción

Describimos el siguiente sistema físico que puede servir como contexto para examinar este tipo de problema.



La curvatura de una columna esbelta sujeta a una carga axial P se puede modelar por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

donde $\frac{d^2y}{dx^2}$ especifica la curvatura, M = momento de la flexión, E = módulo de elasticidad e I = momento de inercia de la sección transversal con respecto a su eje neutro. Tomando en consideración el diagrama de cuerpo libre de la figura (b), está claro que el momento de flexión en x es $M = -Py$. Sustituyendo este valor en la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P^2y = 0 \quad (2)$$

donde

$$P^2 = \frac{P}{EI} \quad (3)$$

Para el sistema de la figura , sujeta a las condiciones de frontera

$$y(0) = 0 \quad (4)$$

$$y(L) = 0 \quad (5)$$

la solución general para la ecuación (2) es

$$y = A \sin(px) + B \cos(px) \quad (6)$$

donde A y B son constantes arbitrarias que serán evaluadas por medio de las condiciones de frontera. De acuerdo con la primera condición (4)

$$0 = A \sin(0) + B \cos(0)$$

Por tanto, concluimos que $B = 0$

De acuerdo con la segunda condición (5)

$$0 = A \sin(pL) + B \cos(pL)$$

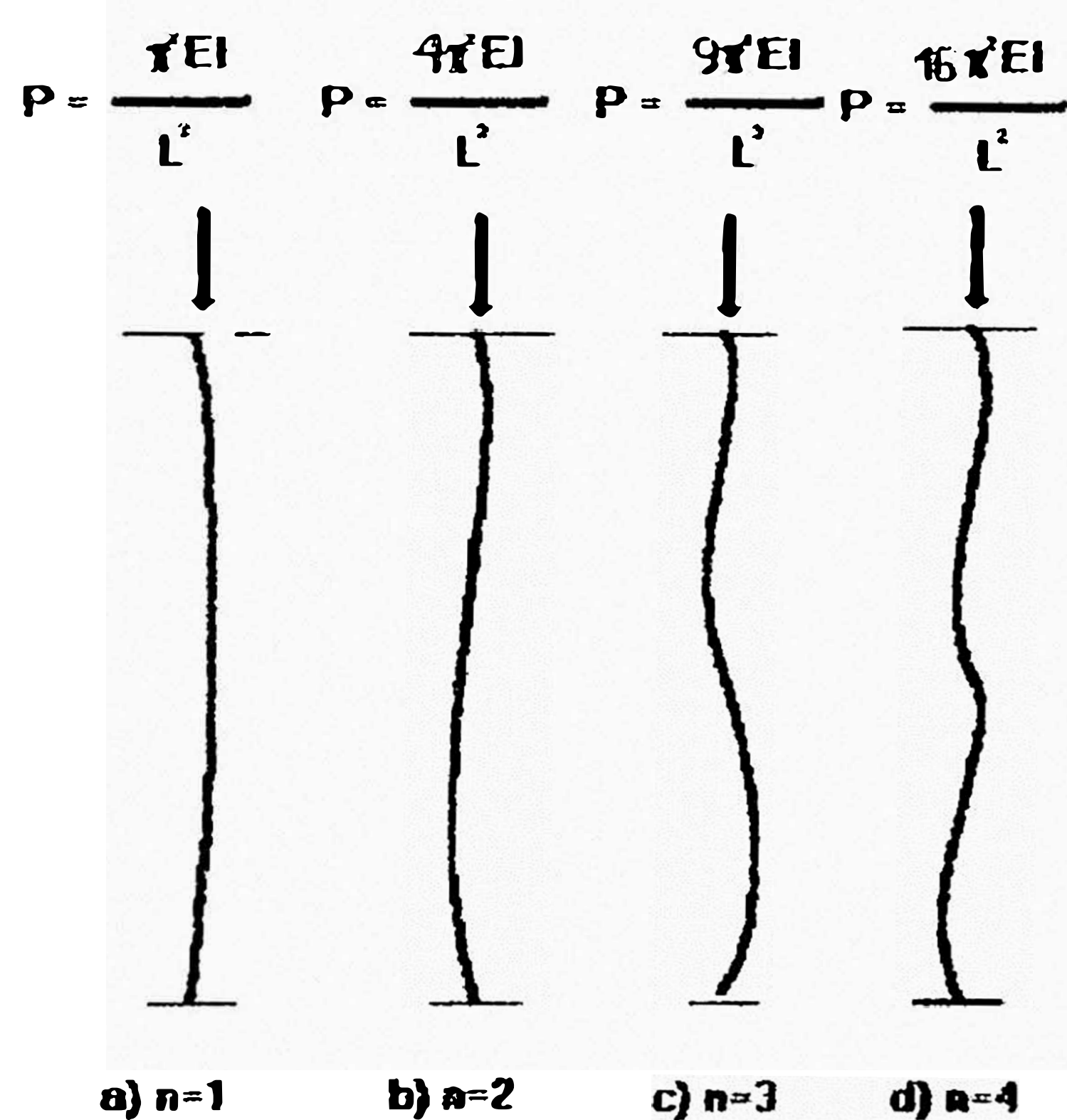
Pero, puesto que $B = 0$, $A \sin(pL) = 0$. Ya que $A = 0$ representa una solución trivial, concluimos que $\sin(pL) = 0$. Para que esta igualdad se cumpla

$$pL = n\pi \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Así existe un número finito de valores que cumplen con las condiciones a la frontera, la ecuación (7) se puede resolver para

$$p = \frac{n\pi}{L} \quad (8)$$

los cuales son los valores propios para la columna.



La figura muestra la solución para los primeros cuatro valores propios, puede proporcionar el significado físico de los resultados. Cada valor propio corresponde a una manera en la que se pandea la columna. Combinando las ecuaciones (3) y (8), se obtiene

$$p = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

ésta se pueden tomar como *cargas de pandeo*, pues representan los niveles a los cuales se mueve la columna en cada configuración de pandeo sucesiva. En un sentido práctico, usualmente el primer valor es el interés, ya que en general, las fallas ocurren cuando primero se pandea la columna. Así, una carga crítica se puede definir como

$$p = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

la cual es conocida de manera formal como *formula de Euler*.

Aplicando el Método de la Potencia

La ecuación (2) se puede resolver numéricamente sustituyendo una aproximación por diferencias divididas finitas centradas para la segunda derivada, lo que da

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \lambda y_i = 0$$

la cual puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{h^2}\right) & \frac{-1}{h^2} & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \left(\frac{2}{h^2}\right) & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \frac{-1}{h^2} & \left(\frac{2}{h^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Determinaremos el valor propio, más grande para la columna cargada axialmente usando 3 nodos. Para poner en práctica el método de la potencia, el sistema que se analizará debe expresarse en la forma

$$A \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad (12)$$

ésta es la base para una técnica de solución iterativa que finalmente da el valor propio más grande y su vector propio asociado.

Escribiremos , el sistema según (12)

$$\begin{bmatrix} 3.556x_1 & -1.778x_2 & 0 \\ -1.778x_1 & +3.556x_2 & -1.778x_3 \\ 0 & -1.778x_3 & +3.556x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Metodo de la Potencia con el procedimiento de Aitken

$$\text{Matriz } A = \begin{vmatrix} 3.556 & -1.778 & 0 \\ -1.778 & 3.556 & -1.778 \\ 0 & -1.778 & 3.556 \end{vmatrix}$$

$$\text{Vector Inicial } x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

{{0.6}, {-0.6}, {1.}} U[1]=2.96333 0
{{0.692308}, {-1.07692}, {1.}} U[2]=4.6228 6.73485
{{0.8}, {-1.25}, {1.}} U[3]=5.47077 6.35685
{{0.876923}, {-1.32308}, {1.}} U[4]=5.7785 5.95379
{{0.925926}, {-1.36111}, {1.}} U[5]=5.90843 6.00338
{{0.955923}, {-1.38292}, {1.}} U[6]=5.97606 6.04945
{{0.973941}, {-1.39577}, {1.}} U[7]=6.01483 6.06695
{{0.984652}, {-1.40336}, {1.}} U[8]=6.03767 6.0704
{{0.990981}, {-1.40784}, {1.}} U[9]=6.05117 6.07068
{{0.994707}, {-1.41047}, {1.}} U[10]=6.05913 6.07058
{{0.996896}, {-1.41202}, {1.}} U[11]=6.06382 6.07052
{{0.998181}, {-1.41293}, {1.}} U[12]=6.06657 6.07049
{{0.998934}, {-1.41346}, {1.}} U[13]=6.06818 6.07048
{{0.999375}, {-1.41377}, {1.}} U[14]=6.06913 6.07047
{{0.999634}, {-1.41395}, {1.}} U[15]=6.06969 6.07047
{{0.999786}, {-1.41406}, {1.}} U[16]=6.07001 6.07047
{{0.999874}, {-1.41412}, {1.}} U[17]=6.0702 6.07047

Comprobacion por definicion :

$$AX - U^2 X = \{(0.000223331)\}$$

Conclusiones

- © Es un método iterativo para aproximar valores propios (dominantes), así como también su vector propio asociado.
- © El método de la potencia con desplazamiento inverso es una modificación del método de las potencias que ofrece una convergencia más rápida. Se usa para determinar el valor propio de A más cercano a un número μ específico.
- © La elección de μ determina la convergencia siempre y cuando $1/(\lambda_k - \mu)$ sea un valor propio dominante y único de $(A - \mu I)^{-1}$ (aunque puede ser un valor propio dominante múltiple).
- © Cuanto más se acerque q a un valor propio λ_k de la matriz A , más rápida será la convergencia.
- © Este método de la potencia tiene la desventaja de que al inicio no se sabe si la matriz tiene un solo valor propio dominante.
- © Cuando A es simétrica, podemos hacer una variación en la elección de los vectores x^m , y^m y escalares μ^m para mejorar significativamente la razón de convergencia.
- © El método de la potencia también puede ser aplicado para hacer el cálculo del valor propio más pequeño, para ello calculamos la matriz inversa de A y (A^{-1}) , y el método de la potencia convergerá al valor propio $\frac{1}{\lambda}$.

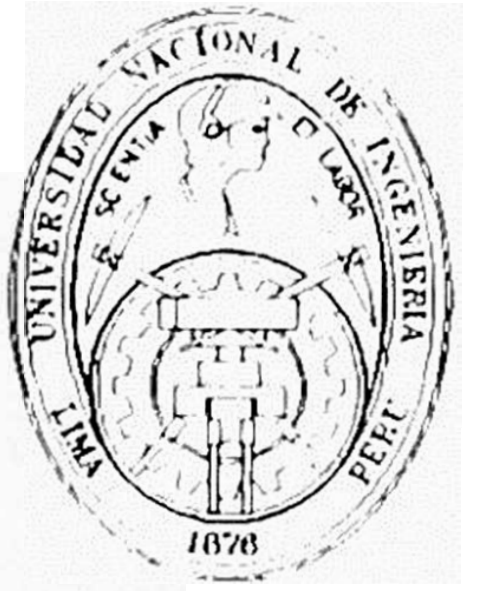
© También podemos hacer el cálculo de los valores propios aproximados intermedios, reemplazando la matriz original por una que incluya sólo los valores propios restantes

© En el algoritmo de la potencia se puede mejorar la rapidez de convergencia, mediante la normalización del vector obtenido antes de una nueva iteración.

© El algoritmo del método de la potencia se puede optimizar, aplicando el *PROCEDIMIENTO DE ACCELERACION DE AITKEN*.

Bibliografía.

- ▶**BURDEN RICHARD L. & FAIRES J. DOUGLAS. Análisis Numérico. Sexta Edición. International Thomson Editores (1998).**
- ▶**COHEN ALAN M.; CUTTS J.F; FIELDER R.; JONES D.E.; RIBBANS J.; STUART E. Análisis Numérico. Reverté S.A., Barcelona (1977).**
- ▶**HAMMING. R. W. Numerical Methods for Scientists and Engineers, 2a. ed., MCGRAW-HILL, Nueva York (1973)**
- ▶**NOMIZU KATSUMI . Fundamentals of linear Algebra. Mc Graw-Hill Book Company, New York (1966).**
- ▶**KINCAID DAVID & CHENEY WARD. Análisis Numérico: las matemáticas del cálculo científico. Addison-Wesley Iberoamericana (1994).**
- ▶**RAFAEL BRU JOAN-JOSEP CLIMENT .Algebra Lineal.Universidad Politecnica de Valencia (2001)**
- ▶**STEVEN C. CHAPRA RAYMOND P. CANALE. Métodos Numéricos para Ingenieros. c MCGRAW-HILL(1995)**
- ▶**WILLIAM W. HAGER. Applied Numerical Linear Algebra. Prentice Hall International, Inc (1988)**



**ACTA DE SUSTENTACIÓN DEL INFORME DE SUFICIENCIA
PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO
EN MATEMÁTICA**

Nombre: ECHEANDIA CESPEDES, JAVIER FRANCISCO

Título:

..... CALCULO DE VALORES PROPIOS MEDIANTE

..... EL METODO DE LA POTENCIA

Miembros del Jurado:

Decano o su representante:

Félix ESCALANTE

(Firma)
(firma)

Profesor Asesor:

ALESSANDRI CANCHUA G.

(Firma)
(firma)

Profesor Especialista:

WILLIAM C. ECHEGARAY C.

(Firma)
(firma)

Luego de sustentado el Informe de Suficiencia y absueltas las preguntas, el Jurado otorgó el calificativo de:

APROBADO CON DISTINCION

tal como consta en el Libro de Actas N° 208-408, Folio N° 335

Dado en la ciudad de Lima en la fecha: 06/01/03 a horas: 17:15

(Firma)
Decano



(Firma)
Director de la Escuela Profesional