

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL  
SECCION DE POSGRADO



DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS DE ACERO USANDO EL MÉTODO DE  
RELACIÓN DE ESFUERZOS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
• CON MENCIÓN DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL

ING. CARLOS ALBERTO ZAVALA TOLEDO

UNI, MAYO 2008

LIMA – PERÚ

## RESUMEN

El costo en la construcción especialmente en acero esta en incremento constantemente en países en desarrollo, por lo tanto el diseño debería proponer soluciones a bajo costo y de buen comportamiento estructural; la aplicación de tecnologías óptimas para el diseño de estructuras implica la búsqueda del diseño con el volumen mínimo de material. El presente estudio describe el problema de optimización estructural, definiendo cómo escoger las variables, restricciones y la función objetivo. Fundamentos matemáticos son presentados brevemente para resolver el problema multidimensional con diferentes restricciones usando el método de Lagrange. El objetivo es desarrollar el Método de Optimización de Criterio y aplicado para el desarrollo de un nuevo software para computadoras personales. Este método usa un criterio relacionado con el comportamiento de la estructura en la búsqueda de una solución óptima. Primeramente, el diseño de la estructura debería estar hecho para este propósito, entonces usando una relación de recurrencia derivado por el uso de la función objetivo y las restricciones del problema, las variables de diseño deberían ser modificadas antes de un proceso de rediseño para satisfacer el criterio. El criterio más popular es la relación entre el esfuerzo actual y el esfuerzo permisible conocido como el método de relación de esfuerzos. Aquí el desarrollo del criterio óptimo y la relación de recurrencia es presentado para los casos de estructuras aporticadas y de retícula. En ambos casos se ha desarrollado un programa de computadora para el diseño elástico óptimo de esta clase de estructura. Aplicaciones numéricas y ejemplos son presentados, como la búsqueda de un óptimo peralte de una retícula para cobertura, el problema de espaciamiento óptimo entre tijerales y de secciones optimas de pórticos con desplazamiento lateral. Comparaciones con otros reportes son mostrados para demostrar la buen performance del software desarrollado.

## ABSTRACT

The cost of the construction specially the steel is continually in increment in developing countries, therefore, the designer should propose solutions with a low cost and good structural behavior. The application of the optimum techniques to the design of structures involve the search of the design with the minimum volume of material. The present study describe the optimization problem defining how to choose the variables, constraints and the objective function. Mathematical fundamentals are presented briefly in order to solve the multidimensional problem with the inequality constraints using the Lagrange method. The objective point is the develop of the Optimum Criteria Methods and applied for the develop of a new software for personal computers. These methods use a criteria related with the behavior of the structure in the search of the optimum solution. At first the design of the structure should be done for these purpose, then using a recurrence relation derived trough the use of the objective function and the constraints of the problem, the design variables should be modified before the redesign process in order to satisfase the criteria. The most propular criteria is the ratio between the actual stress and the allowable stress knows as the stress ratio method. Here the develop of the optimum criteria and the recurrence relation is presented for the cases of truss structure and frame structure. In both cases a computer program has been developed for the optimum elastic design of these kind of structure. Numerical applications and examples are presented like the search of the optimum depth of a roof truss, the optimum spacing problem between trusses and the optimum shapes for sway frames. Compations with other reports are shown in order to present the godd feature of the software.

## INDICE

Resumen

Abstract

I. Introducción

II. La Optimización del Problema

- o Variables de Diseño
- o Restricciones
- o La Función Objetivo

III. El Método de Optimización Matemática

- o Fundamentos Matemáticos
- o El Problema Unidimensional
- o El Problema Multidimensional sin restricciones
- o El Problema Multidimensional con iguales restricciones
- o El Problema Multidimensional con diferentes restricciones

IV. El Método del Criterio Óptimo

- o Desarrollo del criterio óptimo
  - Criterio en Pórticos
  - Criterio en Reticulados
- o Derivación de la Relación de Recurrencia
  - Para las variables de diseño
  - Para los Multiplicadores de Lagrange

V. Criterio Óptimo Aplicado a Estructuras Aportricadas

- o Desarrollo del Programa Oparmd7

- Aplicaciones
- Conclusiones

## VI. Criterio Óptimo aplicado a Reticulados

- El modelo
- Relaciones empíricas
- Performance del programa Optu89
- Aplicaciones

## VII. Referencias

## VIII. Listados de Programas

A mis padres

Quienes me dan el mejor ejemplo  
y guía para continuar mis estudios

## Reconocimiento

Mi sincera gratitud al MSc. Ing. Luis Zapata Baglietto, Profesor de la Escuela de Graduados de la Universidad Nacional de Ingeniería por su supervisión y guía en este trabajo.

## I. INTRODUCCIÓN

La industria del acero es muy importante para la promoción de inversión privada en países en desarrollo, para la generación de una mediana industria, la creación de nuevos puestos de trabajo que pueden contribuir a modificar la situación económica de esos países para buscar el desarrollo en sus diferentes áreas. Las industrias necesitan infraestructura y plantas para llevar a cabo sus proyectos; la difícil situación económica en el Perú y otros países en desarrollo ha ido afectando el negocio de la construcción, la principal razón es el incremento en los costos de los materiales, en este medio el diseño debería proponer soluciones con bajo costo y buen comportamiento estructural; esto podría ser manejado para la aplicación de técnicas de optimización para los diseños de estructura con un volumen mínimo de material, en otras palabras ver buscar una estructura de menor peso.

El presente estudio muestra el problema general del diseño óptimo de estructuras y presentando dos rutas para la búsqueda del objetivo del proceso, introduciendo los métodos matemáticos y los métodos de criterio. El principal punto es desarrollar la solución de técnicas de optimización usando el método de la relación de esfuerzos con restricciones aplicadas a estructuras reticuladas y pórticos desarrollando un nuevo software para este propósito. Relaciones empíricas entre las propiedades de las secciones son desarrolladas para buscar la solución aplicando un criterio óptimo; finalmente son mostrados diferentes ejemplos y la comparación con otros trabajos. Se estuvo desarrollando un programa de computadora para aplicar esta técnica de optimización con el propósito de analizar y diseñar estructuras clásicas de acero de menor peso.



## II. LA OPTIMIZACIÓN DEL PROBLEMA

En estructuras, la técnica de optimización es conocida como un problema para minimizar una función no lineal de  $n$  variables sujetas a varias restricciones (con aspectos adicionales como el tipo de variable o condición creados para estas restricciones). La función para minimizar es llamado FUNCION OBJETIVO; esta solución debería existir en un pseudoespacio de  $n$  dimensiones llamado REGIÓN FACTIBLE donde es posible buscar la solución del problema.

### VARIABLES DE DISEÑO

La identificación de una estructura toma en consideración diferentes parámetros. Algunos de éstos podrían quedarse constantes durante el proceso de diseño o podrían ser seleccionados por el diseñador, los últimos parámetros se denominan VARIABLES DE DISEÑO, que durante el proceso de optimización podrían cambiar en valor, tal como: las propiedades físicas del material, la topología de la estructura, la configuración geométrica y el tamaño de las formas seleccionadas.

Si el problema toma estos cuatro grupos como clases diferentes de variables la búsqueda de la solución tomaría un gran esfuerzo computacional. En estructuras de acero el material es el mismo la propiedades serían constantes durante el proceso de búsqueda en el caso de análisis lineal. La topología podría ser optimizada automáticamente desechando los miembros no necesarios en el sistema. La configuración geométrica es considerada constante, porque las condiciones límites y la geometría son tomadas antes del proceso óptimo. Después de estas consideraciones, las variables de diseño son solo aquellas que involucran el tamaño de la sección como el área de una barra para un reticulado o el módulo de sección de un elemento viga columna en un pórtico. Estas variables en diseño práctico son restringidas por

valores discretos de secciones comerciales y depende del mercado o del tamaño de las planchas para miembros soldados.

## RESTRICCIONES

Todo el grupo de variables de diseño representa una solución para la estructura, alguno de estos diseños podrían ser absurdos y otros podrían ser soluciones óptimas. La solución debería estar dentro de la posible región; esta región se define por las restricciones, las cuales son de dos tipos:

- Restricciones tecnológicas: considera el máximo y el mínimo tamaño de las secciones usadas, el espesor mínimo de las planchas, el mínimo peralte de las viguetas, etc.
- Restricciones de comportamiento: considera el comportamiento estructural del sistema como esfuerzo máximo, desplazamientos máximos, relaciones de esbeltez, etc.

## LA FUNCION OBJETIVO

Hay un ilimitado número de soluciones para el diseño de una estructura, estas soluciones están incluidas en una región factible; en la búsqueda de la solución óptima es necesario para construir una función con un grupo seleccionado de variables que debería alcanzar las restricciones y un objetivo. El objetivo debería ser el valor mínimo como peso mínimo o mínimo costo de la estructura, que es frecuentemente tomado como función objetivo.

Para ilustrar este proceso consideremos la variable  $X_i$  que podría representar el área de la sección para un elemento Barra  $i$  con longitud  $L_i$  en una estructura reticulada; esta  $X_i$  es llamada la variable de diseño pero el objetivo es buscar el peso mínimo del reticulado, entonces:

$$F(X) = p [ X_1 \times L_1 + X_2 \times L_2 + \dots \dots X_i \times L_i ]$$

Donde  $p$  es el peso específico del acero. Ahora, las restricciones tecnológicas podrían ser representadas como una máxima y mínima secciones comerciales y las restricciones de comportamiento son tomadas como el esfuerzo límite, relaciones de desplazamientos y esbeltez. Finalmente la optimización del problema esta definido como:

$$\text{Encontrar } \text{Min } F(X) = p [ X_1 \times L_1 + X_2 \times L_2 + \dots \dots \dots X_i \times L_i ] \quad \text{Ec. 1}$$

$$\text{Sujeto a } X_{\text{min}} < X_1 < X_{\text{max}} \quad \text{Ec. 2}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$X_{\text{min}} < X_i < X_{\text{max}}$$

$$f_{a1} < F_{a1}$$

$$f_{a2} < F_{a2}$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$f_{ai} < F_{ai}$$

$$K_1 \times L_1 / R_1 < \text{Lim}$$

$$K_2 \times L_2 / R_2 < \text{Lim}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$K_i \times L_i / R_i < \text{Lim}$$

Donde Lim: Limite de esbeltez

$f_{ai}$  : esfuerzo actual en el elemento  $i$

$F_{ai}$  : esfuerzo permisible en el elemento  $i$

## II. METODOS MATEMÁTICOS DE OPTIMIZACION

Estos métodos consideran un problema matemático la búsqueda de la solución de la Ec. 1 restringido por la Ec. 2 con continuas condiciones con un rango dentro de la región factible. La solución es buscar la aplicación de algoritmos matemáticos, que demanda un gran esfuerzo computacional. Las restricciones son funciones lineales del problema presentandose finalmente el problema como una solución de un problema de Programación Lineal. Esto podría ser resuelto utilizando algoritmos simples como el Método Simplex. Si las restricciones son funciones no lineales, como en una estructura donde en general las restricciones son funciones no lineales de la variable de diseño, el problema es llamado Problema de Programación No Lineal donde la solución podría ser encontrada usando diferentes algoritmos, pero la demanda computacional es muy alta.

### FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL PROCESO

El problema es tomado como un problema en función al máximo y mínimo con varias variables; en este medio existe el problema con y sin restricciones.

#### o PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

Para un espacio real, la búsqueda del valor mínimo de  $F(X)$  es definido como:

$$\text{Buscar Min } F(X) / x \in R$$

Pero es conocido que la función podría aproximarse usando la extensión de la serie de Taylor como:

$$F(x + d) = F(X) + F'(x) * d + O(d) \quad \text{Ec. 3}$$

Donde  $O(d)$  se conoce como un error de esta aproximación de primer orden.

Si  $x^*$  es la solución del problema, es posible aproximar el valor de la función usando la Ec. 3, entonces:

$$F(x^* + d) - F(x^*) = F'(x^*) * d + O(d)$$

Pero  $O(d)$  es un valor pequeño cuando  $d$  se aproxima a 0 entonces:

$$F'(x^*) > 0 \quad \text{Ec. 4}$$

Que es llamado la condición de primer orden

Dentro de un camino similar, es posible tomar una segunda extensión de la serie de Taylor para aproximar la función como:

$$F(x + d) = F(X) + F'(x) * d + 0.5 F''(x) * d^2 + O(d^2) \quad \text{Ec. 5}$$

Donde para un pequeño valor de  $d$ ,  $O(d^2)$  es 0. Entonces en el punto de solución  $x^*$  y considerando la Ec. 4 es reducida a la ecuación 5a que es una condición de segundo orden para un punto óptimo.

$$F(x^* + d) - F(x^*) - F'(x^*) * d = 0.5 F''(x^*) * d^2 + O(d^2) > 0$$

Luego  $F''(x^*) > 0 \quad \text{Ec. 5a}$

#### o PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL SIN RESTRICCIONES

Para un problema multidimensional consideremos  $X = X_1 X_2 X_3 \dots X_n$  como un vector de variables para el punto de solución de la estructura de diseño; si tomamos  $X^*$  como el vector solución óptimo y  $D$  como un incremento vectorial del punto mínimo, se conoce que si la función es evaluada en las

proximidades del vector óptimo  $X^*$  la siguiente ecuación debería ser verdadera:

$$F(X^* + D) \geq F(X^*)$$

Luego  $F(X^* + D) - F(X^*) \geq 0$  Ec. 6

Definamos la gradiente de la función como:

$$\nabla F(X^*) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F}{\delta X_1}(X^*) \\ \frac{\delta F}{\delta X_2}(X^*) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\delta F}{\delta X_n}(X^*) \end{pmatrix}$$

Si usamos una aproximación de Taylor de primer orden, en el punto óptimo se conoce que:

$$F(X^* + D) = F(X^*) + \nabla F^t(X^*) D + O(D)$$

Luego usando la ecuación 6 para un pequeño incremento  $D$ , la ecuación se reduce a:

$$F(X^* + D) - F(X^*) = \nabla F^t(X^*) D + O(D) > 0$$

$$\nabla F^t(X^*) D > 0$$

Pero  $D$  podría ser cualquier vector, tomemos un incremento vectorial  $\nabla F(X^*)$ , entonces:

$$\nabla F^t(X^*) \nabla F(X^*) > 0$$

Luego

$$\nabla F (X^*) = 0 \quad \text{Ec. 7}$$

que es tomado como una condición de primer orden para la solución vectorial.

Si usamos la aproximación de segundo orden de la serie de Taylor para encontrar el valor de la función definimos el Hessiano como:

$$\nabla^2 F(X^*) = \begin{pmatrix} \nabla' \left( \frac{\delta F}{\delta X_1} (X^*) \right) \\ \nabla' \left( \frac{\delta F}{\delta X_2} (X^*) \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla' \left( \frac{\delta F}{\delta X_n} (X^*) \right) \end{pmatrix}$$

Luego la aproximación de la función es definida como:

$$F(X + D) = F(X) + \nabla^t F (X) D + 0.5 D^t \nabla^2 F (X) D + O(D) > 0$$

Simplificando para un D pequeño en el punto de solución X\*, tenemos la condición de segundo orden:

$$D^t \nabla^2 F (X^*) D > 0 \quad \text{Ec. 8}$$

Finalmente para el punto de solución de las ecuaciones 7 y 8 debería satisfacer un problema sin restricciones.

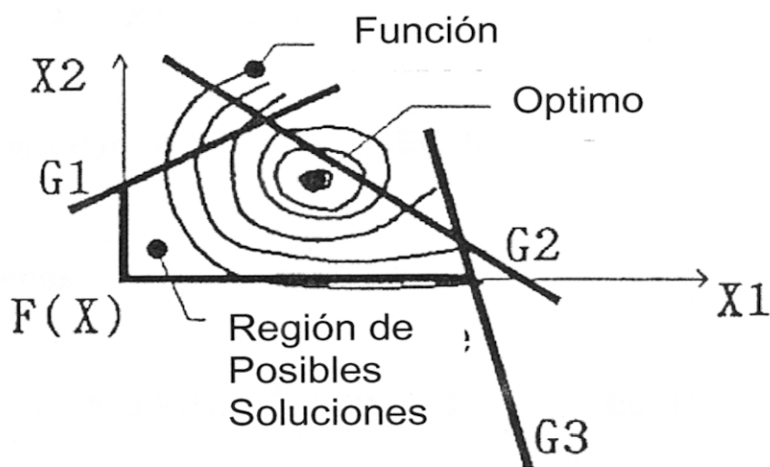
○ PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL CON RESTRICCIONES IGUALES

En la búsqueda de la solución del proceso de minimización se ha supuesto que el vector solución podría ser representado por  $X^*$  y para el punto mínimo debería satisfacer que:

$$F(X^* + D) \geq F(X^*)$$

Por ejemplo la función esta sujeta para un grupo de restricciones iguales definido como  $g_i(x)$  que podrían ser funciones lineales o no lineales, entonces:

- $g_1(X) = a_1$
- $g_2(X) = a_2$
- .
- .
- .
- $g_i(X) = a_i$



y podría ser reducido en forma vectorial como:

$$G(X) = \begin{pmatrix} g_1(X) = a_1 \\ g_2(X) = a_2 \\ . \\ . \\ . \\ g_i(X) = a_i \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_i \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 9}$$

Para un caso simple de una función  $F(X)$  de dos variables es considerado que  $F(X) = F(X_1, X_2)$  y las restricciones  $G(X) = A$  representa una superficie que define la región factible; en este caso es posible expresar  $X_2$  como una



función de  $X_1$ , en otras palabras  $X_2 = h(X_1)$ , conocido como una variable expresada, este factor transforma el problema, a un problema sin restricciones porque las restricciones fueron usadas para encontrar  $h(X_1)$ , entonces el problema se redefine como:

$$\text{Min } F(X_1, h(X_1)) = \text{Min } F(X) / X \in R$$

En el punto de solución debería satisfacer que:

$$X^* = X_1^*, h(X_1^*)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}(X_1^*, h(X_1^*)) = 0 \quad \text{Ec. 10}$$

ampliando la expresión tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}(X_1^*, h(X_1^*)) + \frac{\partial F}{\partial X_2}(X_1^*, h(X_1^*)) \frac{\partial h}{\partial X_1}(X_1^*) = 0 \quad \text{Ec. 11}$$

sabemos que  $G(X_1^*, h(X_1^*)) = A$  de la Ec. 9 entonces podemos usar y derivar esta expresión:

$$\frac{\partial G}{\partial X_1} + \frac{\partial G}{\partial X_2} \frac{\partial h}{\partial X_1} = 0$$

Luego

$$\frac{\partial h}{\partial X_1}(X_1^*) = \frac{-\left(\frac{\partial G}{\partial X_1}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial X_2}\right)} \quad \text{Ec. 12}$$

Reemplazando la Ec. 12 en la Ec. 11 tenemos:

$$\frac{\delta F}{\delta X_1}(X_1^*, h(X_1^*)) - \frac{\delta F}{\delta X_2}(X_1^*, h(X_1^*)) \frac{\left(\frac{\delta G}{\delta X_1}(X_1^*, h(X_1^*))\right)}{\left(\frac{\delta G}{\delta X_2}(X_1^*, h(X_1^*))\right)} = 0$$

llamaremos:  $\lambda_1 = - \frac{\left(\frac{\delta F}{\delta X_2}(X_1^*, h(X_1^*))\right)}{\left(\frac{\delta G}{\delta X_2}(X_1^*, h(X_1^*))\right)}$

Esta es una constante que expresa la relación entre la derivada parcial de la función en el punto de solución y la derivada parcial de la restricción con respecto de la variable expresada X2 (expresada como una función de X1); entonces simplificando la expresión:

$$\frac{\delta F}{\delta X_1}(X_1^*, h(X_1^*)) + \lambda_1 \frac{\delta G}{\delta X_1}(X_1^*, h(X_1^*)) = 0$$

agrupando y simplificando tenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\delta F}{\delta X_1} [ F(X_1^*, h(X_1^*)) + \lambda_1 G(X_1^*, h(X_1^*)) ] = 0 \quad \text{Ec. 13}$$

En esta ecuación el término  $\lambda_1$  expresa la relación de las derivadas parciales de la función y el vector restricción respecto a la variable expresada X2; en este caso sólo hay un valor para la variable del problema y la otra es la variable expresada X2, desarrollado como una función de X1. En general, para n variables es posible generalizar la condición como:

$$\nabla F(X^*) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \nabla G(X^*) = 0 \quad \text{Ec. 14}$$

que significa que la gradiente de la función en el punto mínimo es paralela con la gradiente del vector restricción; esta es una condición para un mínimo local; los valores  $\lambda_i$  son llamados multiplicadores de Lagrange.

Estos multiplicadores define la Función de Lagrange para encontrar el óptimo:

$$L(X, \lambda) = F(X) + \sum_{i=1}^N \lambda_i (-G(X) + A) \quad \text{Ec. 15}$$

La función L debería satisfacer las condiciones de primer orden para ambas variables X y  $\lambda_i$ ; entonces:

$$\frac{\delta L}{\delta X_i} = \frac{\delta F}{\delta X_i} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\delta G}{\delta X_i} = 0$$

en el punto óptimo esto significa:  $\nabla F(X^*) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla G(X^*) \quad \text{Ec. 16}$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_j} = -G + A = 0 \quad \text{Ec. 17}$$

Las ecuaciones 16 y 17 son las condiciones para el óptimo usando el método de los multiplicadores de Lagrange; la interpretación geométrica de la Ec. 16 es que en el mínimo la gradiente de la función F podría expresarse como una combinación lineal de los vectores normales de las superficies (condiciones de restricción).

## PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL CON RESTRICCIONES DESIGUALES.

Un problema de restricciones desiguales podría transformarse en una de restricciones iguales añadiendo variables de holgura (slacks variables= Y) para las restricciones y entonces resolver el problema como una igualdad de la Metodología de Lagrange. El problema es transformado para:

Encontrar el mínimo  $F(X)$  si  $G(X) \leq A$  y  $X > 0$

Pero usando la contribución del slack  $G(X) + Y = A$  con  $X \geq 0$  y  $Y \geq 0$

Aplicando el Método de Lagrange (Ec. 15) el problema se redefine como:

Encontrar al mínimo de  $L(X, Y, \lambda) = F(X) + \lambda^t (A - G(X) - Y)$

Entonces el problema debería satisfacer las siguientes condiciones:

$$\nabla F(X) - \lambda \nabla' G(X) \leq 0$$

$$X \geq 0$$

$$(\nabla' F(X) - \lambda \nabla' G(X)) X \leq 0 \quad \text{Ec. 18}$$

$$\lambda^t (A - G(X)) \geq 0$$

$$A - G(X) \geq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

El grupo de ecuaciones 18 son conocidas como las condiciones Kunt-Turkey para un punto óptimo usando estrictamente procedimientos matemáticos.

La búsqueda de un vector solución necesita un gran esfuerzo computacional porque éste debería buscar primero la región factible y entonces buscar el punto que satisface las condiciones Kunt-Turkey; esto demanda el uso de sistemas multiusuarios y un gran tiempo computacional, aquí es donde el método de criterio óptimo toma ventaja en la búsqueda del mínimo.

#### IV. MÉTODO DE CRITERIO ÓPTIMO

Los Métodos de Criterio Óptimo son considerados métodos indirectos para encontrar la solución del problema de optimización; esta clase de métodos tienen los mismos objetivos de los métodos matemáticos directos pero difiere en el concepto de búsqueda; mientras en los métodos directos la función objetivo es minimizada aplicando algoritmos numéricos, en los indirectos se define un criterio relacionado con el comportamiento y la premisa es que cuando el criterio ha sido satisfecho el óptimo es encontrado.

En general, se ha considerado un diseño óptimo como un proceso iterativo donde cada ciclo tiene dos pasos: el primero es el análisis de la estructura sujeta a las cargas actuales, encontrando la respuesta para estas cargas aplicadas; la segunda es el paso del proceso de rediseño donde las variables de diseño son modificados para minimizar la función objetivo. Aquí las variables son modificadas utilizando una relación de recurrencia derivado desde el criterio de optimización.

La aplicación de estos métodos implica la derivación de un apropiado criterio para las condiciones especiales de diseño y estableciendo un proceso iterativo para lograr el diseño final. El desarrollo de este criterio, para el presente trabajo ha sido restricto para la optimización de estructuras elásticas lineales cuyos tamaños de miembros son la única variable de diseño. En general, el criterio óptimo es relacionado con las restricciones de esfuerzo y desplazamiento; sin embargo otros criterios como pandeo lateral y local, respuesta dinámica, comportamiento no lineal, etc. pueden ser considerados en la búsqueda de la solución óptima para cualquier estructura.

La potencialidad del método es que el número de iteraciones necesarias para converger a un óptimo es virtualmente independiente al número de miembros estructurales. Esta propiedad hace de este método provechosamente conveniente para el diseño óptimo de grandes estructuras. Fue mencionado

que una relación de recurrencia debería ser derivada desde el criterio óptimo; esta relación de recurrencia comparte dos grupos de variables desconocidas, un grupo consiste en las gradientes de las restricciones y el otro grupo consiste en los multiplicadores de Lagrange. En estructuras típicas con una sola restricción el multiplicador de Lagrange asociado podría ser escrito como una expresión explícita.

Los procedimientos Fully Stress Design (FSD, diseño plenamente esforzado) están basados sobre la asunción que en una estructura óptima cada miembro esta sometido a sus esfuerzos permisibles. Esta aproximación generalmente consiste de la aplicación iterativa de la regla de análisis y rediseño. Si el análisis muestra que miembros seguros son sobreesforzados en una condición de carga crítica la regla de rediseño aumenta el tamaño de este miembro para reducir el esfuerzo, lo opuesto es hecho si el miembro esta bajo el esfuerzo admisible. Desde las modificaciones del tamaño de los miembros en una estructura estáticamente indeterminadas cambiaría la distribución de la fuerza sobre el miembro. Unos pocos ciclos de análisis iterativo y diseño son necesarios para encontrar la estructura óptima. Para determinar estáticamente la estructura bajo una sola condición de carga el FSD es el mínimo peso de diseño. Esta consideración puede no extenderse, sin embargo para estructuras indeterminadas con múltiples condiciones de carga tiene más de un FSD; si quisiéramos conocer si el FSD es el diseño óptimo es posible para ser revisado para la aplicación de las condiciones Kunt-Turkey

#### o Desarrollo del Criterio Óptimo

Como fue mencionado, se han desarrollado dos tipos de criterio para la derivación de una relación de recurrencia en este trabajo, uno para estructuras reticuladas y otras para estructuras aporticadas.

## CRITERIO PARA UN RETICULADO

Hemos visto que la Ec. 1 define la función objetivo usando la variable de diseño  $X_i$ , consideramos  $X_i = A_i$  donde  $A_i$  es el área de corte de la barra  $i$  entonces:

$$\text{Encontrar Min } W(X) = p [A_1 \times L_1 + A_2 \times L_2 + \dots + A_i \times L_i]$$

$$\text{Sujeto a las siguientes restricciones: } g_j = \bar{C}_j - C_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, j$$

Donde  $C_j$  representa el esfuerzo actual en la barra y  $\bar{C}_j$  representa el esfuerzo permisible de la misma barra. Usando la Ec. 15 es posible expresar la función de Lagrange como:

$$L(A, \lambda) = W(A) + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(A)$$

$$L(A, \lambda) = p \sum_{i=1}^n A_i L_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j (\bar{C}_j - C_j) \quad \text{Ec. 19}$$

Diferenciando la ecuación anterior respecto a  $A_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial A_i} [p \sum_{i=1}^n A_i L_i + \dots + p_i A_i L_i] + \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j (\bar{C}_j - C_j) \right) < 0$$

$$p_i L_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial}{\partial A_i} (C_j) < 0$$

Si  $T_i$  es la fuerza actual en la barra hacemos:  $C_i = T_i / A_i$  y usando las teorías matemáticas básicas



$$p_i L_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\delta}{\delta A_i} \left( \frac{T_j}{A_j} \right) \leq 0$$

$$p_i L_i + \lambda_i \left[ \frac{1}{A_i^2} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\delta T}{\delta A_i} - \frac{T_i}{A_i^2} \right) \right] \leq 0$$

$$p_i L_i - \lambda_i \frac{T_i}{A_i^2} + \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\delta T_j}{\delta A_i} \leq 0$$

Es posible asumir que  $\frac{\delta T_i}{\delta A_i} = 0$  entonces:

$$p_i L_i - \lambda_i \frac{T_i}{A_i^2} = 0 \quad \text{Ec. 20}$$

pero para la solución óptima la barra debería trabajar en los esfuerzos permisibles:  $F_a = T_i / A_i$ , entonces en la Ec. 20 tenemos:

$$\lambda_i = \frac{p_i L_i A_i}{F_a} \quad \text{Ec. 21}$$

donde  $F_a$  es el esfuerzo axial permisible.

Pero en general, de la Ec. 20 en cualquier punto con un esfuerzo actual  $f_a = T_i / A_i$  que representa el esfuerzo axial actual, tenemos:

$$\lambda_i = \frac{p_i L_i A_i}{f_a} \quad \text{Ec. 22}$$

Entonces haciendo la Ec. 21 igual Ec. 22 se ha demostrado que:

$$\frac{p_i L_i A_i}{p_i L_i A_i} = \frac{f_a}{F_a} = 1 = R_i \quad \text{Ec.23}$$

Entonces la ecuación 23 expresa que en el punto óptimo donde el esfuerzo permisible esta activo la relación de esfuerzo entre los esfuerzos actual y permisible se vuelve uno. Este es el criterio de relación de esfuerzos desarrollado para una estructura reticulada.

### CRITERIO APORTICIADO

Un pórtico tiene básicamente dos clases de restricciones: restricciones de esfuerzo axial ( $g_j$ ) y restricciones de capacidad de flexión ( $h_j$ ), éstos deberían ser menores que cero; entonces la diferencia entre estas restricciones serían menores que cero, entonces:

$$g_j = C_j - \bar{C}_j < 0$$

$$h_j = D_j - \bar{D}_j < 0$$

---


$$g_j - h_j = C_j + D_j - (\bar{C}_j + \bar{D}_j) < 0 \quad \text{Ec. 24}$$

aquí podemos considerar que  $D_j = f_b$  es el esfuerzo de flexión actual y  $\bar{D}_j = F_b$  es el esfuerzo de flexión permisible entonces consideremos que le área del elemento es una función lineal del momento de inercia de la sección y toma:  $C_j = f_a = Th / A_j$

$\bar{D}_j = M_j h / I_j$  y  $A = \alpha I_j$ ; entonces considerando que el esfuerzo máximo total de la sección es la superposición de efectos de carga axial y capacidad de flexión:

$$F = F_a + F_b$$

Usando la Ec. 15 y reemplazando todas las consideraciones mencionadas antes definimos Lagrange como:

$$L(l_i, \lambda_j) = \sum_{i=1}^N p \alpha I_i l_i + \sum_{i=1}^N \lambda_j (T_j / \alpha I_j + M_j h / I_j - F_j) = 0 \quad \text{Ec. 25}$$

Diferenciando la Ec. 25 respecto de  $\lambda_j$  tenemos:

$$T_i / (\alpha I_j) + M_j h / I_j - F + \frac{\delta}{\delta \lambda_j} (T_i / (\alpha I_j) + M_i h / I_j - F) < 0$$

Entonces:  $T_i / (\alpha I_j) + M_i h / I_j < F$

$$f_a + f_b < F_a + F_b \quad \text{Ec. 26}$$

diferenciando la Ec. 25 respecto a  $l_i$  tenemos:

$$\alpha p l_i + \frac{\delta}{\delta l_i} (\lambda_i \frac{T_1}{I_1}) \dots + \frac{\delta}{\delta l_i} (\lambda_i \frac{T_i}{I_i}) + \frac{\delta}{\delta l_i} (\frac{\lambda_i M_1 h}{I_1}) \dots + \frac{\delta}{\delta l_i} (\frac{\lambda_i M_i h}{I_i}) - \frac{\delta}{\delta l_i} F < 0$$

cambiando y simplificando tenemos que:

$$\alpha p l_i + \sum_{j=1}^k (\frac{\lambda_j}{\alpha I_j}) (\frac{\delta T_j}{\delta l_i}) - \frac{\lambda_i T_i}{\alpha I_i} + \sum_{j=1}^k (\frac{\lambda_j}{I_j}) (\frac{\delta M_j h}{\delta l_i}) - \lambda_i \frac{M_i h}{I_i^2} \leq 0 \quad \text{Ec. 27}$$

para estructura típicas  $\frac{\delta T_i}{\delta l_i} = \frac{\delta M_j}{\delta l_i} = 0$

en la Ec. 27:  $\alpha p Li - \frac{\lambda_i T_i}{\alpha l_i^2} - \lambda_i \frac{M_{ih}}{l_i^2} < 0$  Ec. 28

en todos los casos de la Ec. 28 encontramos que el operador de Lagrange es:

$$\lambda_i = \frac{\alpha p Li}{l_i^2} \left( \frac{T_i}{\alpha} + M \right)^{-1} \quad \text{Ec. 29}$$

pero en cualquier punto con esfuerzo máximo desde la Ec. 28:

$$\alpha p Li = \frac{\lambda_i}{l_i} \left( \frac{T_i}{\alpha l_i} + \frac{M_{ih}}{l_i} \right) = \frac{\lambda_i}{l_i} (f_a + f_b) \quad \text{Ec. 30}$$

De la Ec. 29 para el punto de solución y reemplazando en la Ec. 30, entonces:

$$\alpha p Li = \frac{\alpha p Li}{l_i} \left( \frac{T_i}{\alpha l_i^2} + \frac{M_{ih}}{l_i^2} \right)^{-1} (f_a + f_b)$$

entonces para el óptimo y reorganizando:

$$1 = \frac{l_i}{l_i} \left( \frac{1}{F_a + F_b} \right) (f_a + f_b)$$

$$R_i = (f_a + f_b) / (F_a + F_b) < 1 \quad \text{Ec. 31}$$

La ecuación 31 es la condición de criterio óptimo para un elemento de estructura aporticada durante un proceso de optimización.

- o Derivación de la Relación de Recurrencia
- o Relación de Recurrencia para el Diseño de Variables

El criterio óptimo derivado antes, no da ninguna indicación de cómo encontrar la solución de diseño óptimo; en general cuando las restricciones están activas, se puede desarrollar un esquema iterativo para obtener el peso mínimo de diseño. Este esquema iterativo consiste en el cambio de variables de diseño utilizando una relación de recurrencia derivado del criterio óptimo; en resumen esta relación de recurrencia es la relación de criterio óptimo escrito en una forma de modo que esto puede ser usado repetitivamente. Se ha demostrado que en los casos de un reticulado o pórticos el criterio óptimo para las restricciones de esfuerzos es que la relación entre los esfuerzos actuales y permisibles pueden ser igual a la unidad ( $R_i = 1$ ) para un elemento típico.

Entonces la forma general del criterio óptimo es que:

$$R_i < 1$$

Utilicemos el grupo de Ec. 18 que expresa la función de Lagrange y las condiciones Kunt-Turkey; es posible decir que:

$$\frac{\delta F}{\delta X_i} + \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\delta g_j}{\delta X_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k$$

asumiendo  $\frac{\delta F}{\delta X_i} \neq 0$  entonces en el punto óptimo:

$$1 = - \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\delta g_j}{\delta X_i} / \frac{\delta F}{\delta X_i} = R_i \quad \text{Ec. 32}$$

Si para un diseño dado el grupo de restricciones activos  $k$  son tal que el correspondiente  $\lambda_j$  son positivos y la Ec. 32 es satisfecha entonces el diseño es un óptimo local.

Varias relaciones de recurrencia para las variables de diseño puede ser derivados desde el criterio de optimización; si multiplicamos ambos lados de la Ec. 32 por  $X_i$  y tomando la raíz  $\beta$

$$X_i = (R_i)^{1/\beta} X_i \quad i = 1 \dots n \quad \text{Ec. 33}$$

Donde el parámetro  $\beta$  determina el tamaño de paso, entonces Ec. 33 podría expresarse como la siguiente relación de recurrencia.

$$X_i^{(s+1)} = (R_i^{(s)})^{1/\beta} X_i^{(s)} \quad \text{Ec. 34}$$

Donde  $s$  es el número de iteraciones y puede ser llamado como exponencial de la relación de recurrencia.

Otra posibilidad es multiplicar ambos lados por  $(1-\alpha)X_i$ , donde  $\alpha$  es un factor de relajación que controla el tamaño de paso en la relación de recurrencia llamado relación de recurrencia lineal dado por:

$$X_i^{(s+1)} = (\alpha + (1-\alpha)R_i^{(s)}) X_i^{(s)} \quad \text{Ec. 35}$$

#### o Relación de Recurrencia para los Multiplicadores de Lagrange

En orden para usar las relaciones de recurrencia para  $X_i$  los multiplicadores de Lagrange pueden ser determinados. Será demostrado que las ecuaciones de restricción pueden ser usadas para obtener relaciones de recurrencia para la evaluación de los Multiplicadores de Lagrange. Considerar por ejemplo la restricción de esfuerzo activo como sigue:

$$f_j = F_j$$

entonces multiplicando ambos lados por  $j$  y tomando la raíz  $q$  tenemos:

$$\lambda_j = \frac{f_j}{F_j} \lambda_j \quad \text{Ec. 36}$$

donde  $q$  es un parámetro que determina el tamaño de paso; esta ecuación puede ser escrita como la siguiente relación de recurrencia:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \left[ \frac{f_j}{F_j} \right]^{1/q} \lambda_j^{(k)} \quad \text{Ec. 37}$$

utilizando esta relación exponencial simple no es necesario asumir el grupo de restricciones activas, las restricciones pasivas pueden ser eliminadas automáticamente colocando el multiplicador correspondiente a cero; valores iniciales para ser especificados y el valor de  $q$  debería ser asumido. Khot, Berke y Benkaya recomiendan valores de  $\beta = 4$  y  $q = 0.25$  para una estructura reticulada que da el  $j$  en una sola iteración.

## V. MÉTODO DE CRITERIO ÓPTIMO APLICADO A ESTRUCTURAS RETICULADAS

La optimización estructural es la búsqueda para la solución más adecuada para una estructura sin violación alguna de restricciones en todos sus elementos. Para algunos investigadores esta búsqueda termina cuando se encuentra la solución de menor peso y al mismo tiempo esfuerzos permisibles y deflexiones no son sobrepasados.

Para otras personas, la búsqueda lleva a una estructura en que todos los elementos satisfacen todos los criterios previos establecidos i.e. todos sus elementos tienen sus esfuerzos actuales bastante cercano a los esfuerzos permisibles.

Para obtener el peso mínimo, se han aplicado métodos de optimización como programas matemáticos para conseguir la aplicación de variables para rendir el mínimo de la función objetivo. Métodos de criterio óptimo buscan la satisfacción de un criterio usando una relación de recurrencia derivado desde ésta, y esto no necesariamente va al mínimo peso pero ello tiene la ventaja para ser más fácil al aplicarse en programas y han probado ser cercanos al mínimo peso para la mayoría de casos.

La solución óptima escogida dentro de la región factible intenta ser la minimización de la función objetivo. Si el peso es el objetivo, su función puede ser expresada utilizando las ecuaciones 1 y 2 como sigue:



Encontrar  $\text{Min } F(X) = p [X_1 \times L_1 + X_2 \times L_2 + \dots + X_i \times L_i]$

Ec. 1

Tal que  $X_{\text{min}} < X_1 < X_{\text{max}}$

Ec. 2

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$X_{\text{min}} < X_i < X_{\text{max}}$$

$$f_{a1} < F_{a1}$$

$$f_{a2} < F_{a2}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$f_{ai} < F_{ai}$$

$$K_1 \times L_1 / R_1 < \text{Lim}$$

$$K_2 \times L_2 / R_2 < \text{Lim}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$K_i \times L_i / R_i < \text{Lim}$$

Donde Lim: Limite de esbeltez

$f_{ai}$  : esfuerzo actual en el elemento i

$F_{ai}$  : esfuerzo permisible en el elemento i

Se propone un método que está dentro de esos denominados criterios de optimización, cuando el óptimo es alcanzado en el momento en que el esfuerzo actuante iguala a unos permisibles. En estructuras reticuladas, es usado el criterio de reticulado derivado en el Capítulo IV (Ec. 23) corrigiendo las áreas

obtener el mejor radio de giro para un área dada (Ver Fig

de los elementos por la relación de los esfuerzos actuales para unos permisibles después de cada iteración, tal que:

$$A_k^{p+1} = (f_k^p / F_k^p) \times A_k^p$$

Y al mismo tiempo:  $A_{\min} \leq A_k \leq A_{\max}$

Donde:

$A_k^p$  = Área del elemento k en la iteración p

$f_k^p$  = Esfuerzo actual en el elemento k en la iteración p

$F_k^p$  = Esfuerzo permisible en el elemento k en la iteración p

Es conocido que para miembros en compresión los esfuerzos permisibles dependen de la relación de esbeltez  $kl/r$  siendo  $r$  una función de  $A$ . Es conocido también que códigos especifican la relación máxima de esbeltez para miembros en compresión o tensión. Varios investigadores han propuesto diferentes relaciones entre los radios de giro y el área de ángulos dobles; sin embargo, comparando los resultados teóricos obtenidos con esta relación para esos de doble ángulo de lámina en caliente no hay una buena correspondencia. Una fórmula a menudo usada para presentar esta relación es:

$$r = \phi \times \text{sqr}(A)$$

que es una expresión de regresión estadística, simple pero con una alta dispersión.

En este trabajo se propone una relación que sigue el actual de características mencionadas arriba que fueron obtenidas de un gráfico radio de giro vs. área. Fue encontrado que una serie de líneas rectas podría mejorar aproximadamente esta relación. Al mismo tiempo es seleccionada una envolvente para obtener el mejor radio de giro para un área dada (Ver Fig.

Nº1). Relación similar podría ser propuesta para otros tipos de secciones como ángulos simples, secciones tubulares, esos perfiles en que dimensiones exteriores permanecen constantes mientras el espesor cambia.

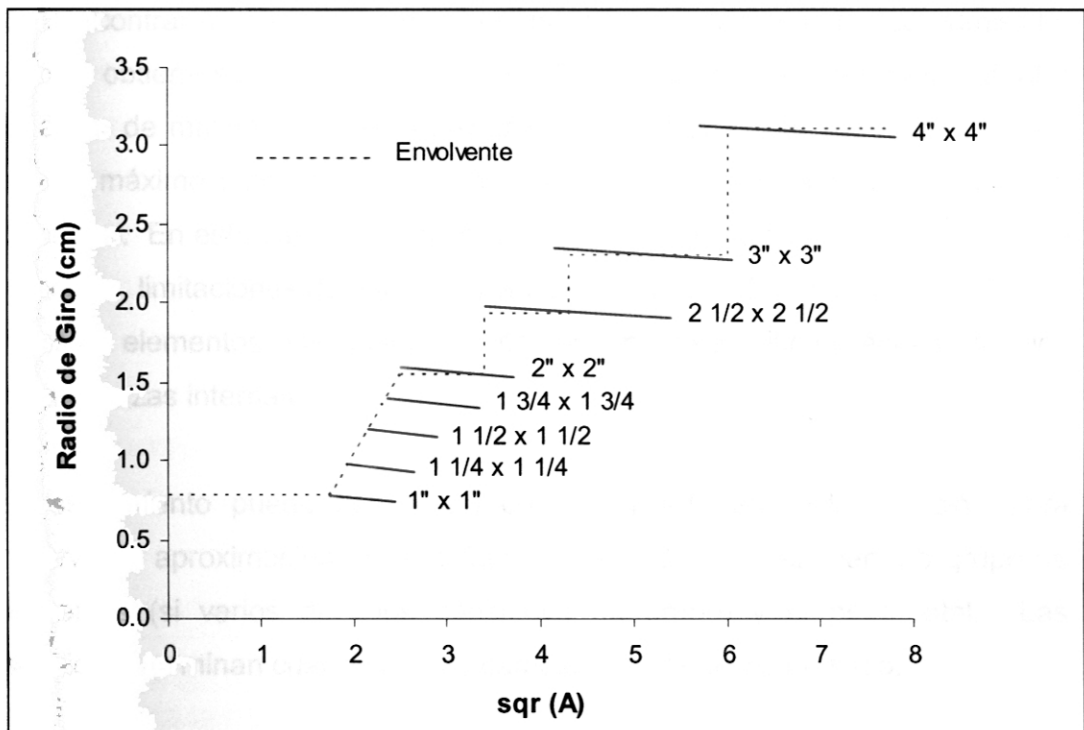


Fig. Nº1 Relación de Área vs. Radio de Giro para ángulos dobles de alas iguales.

Describamos ahora el Método propuesto de Relación de Esfuerzos con Restricciones. Conocemos las cargas, geometría, propiedades de los elementos, probable combinación de cargas y un conjunto inicial de áreas de los elementos de la estructura, es posible encontrar los esfuerzos permisibles. Por la relación de esfuerzos las áreas iniciales están entonces corregidas. En este momento, diferenciando del método de relación de esfuerzos tradicional, no se realiza inmediatamente un nuevo análisis, se desarrolla una búsqueda para encontrar en cada elemento la igualdad del actual al esfuerzo admisible. Esto se obtiene siguiendo la envolvente  $A$  vs.  $r$ . Cada área debe estar dentro de áreas de máximo y mínimo disponible, y la relación de esbeltez debe ser bajo el máximo estipulado. Una nueva iteración empieza con las áreas ya obtenidas. En este camino la solución es localizada rápidamente satisfaciendo esfuerzos, limitaciones de esbeltez y áreas extremas. Cambios importantes en áreas de elementos reticulados no necesariamente significa grandes cambios en las fuerzas internas.

Un seguimiento puede ser hecho con un listado en cada iteración para observar la aproximación entre esfuerzos, área de cada elemento o grupo de elementos (si varios de ellos constituye un grupo) y el peso total. Las iteraciones terminan cuando no hay cambios significativos en peso.

Las áreas finalmente obtenidas son un buen punto de salida para seleccionar en un directorio los perfiles prácticos. Con estas áreas esto es necesario, sin embargo un nuevo análisis para verificar que los perfiles seleccionados siguen las estipulaciones del Código.

## DESARROLLO DEL PROGRAMA OPARMD7

El procedimiento ya explicado requiere un programa que ha sido preparado para una Computadora Personal, como sigue:

1. Datos de la estructura: se ha escrito un programa especial para generar una base de datos para identificar la geometría de las estructuras, las propiedades del material, cargas, secciones iniciales, peso de los elementos o grupo de elementos y presentar un gráfico de la estructura.
2. Análisis estructural: se aplica un análisis matricial por el método de rigideces para cada sistema de carga.
3. Combinación de cargas: con los resultados previos, las diferentes acciones son combinadas para determinar las fuerzas reales máximas en los elementos.
4. Corrección de áreas por la Relación de Esfuerzos: los resultados obtenidos en el paso 3 permite calcular los esfuerzos actuales. En este paso las fórmulas específicas dadas por el AISC son introducidas para tener los esfuerzos permisibles. El Radio de giro vs. Área ya descritos son usados. Áreas iniciales son corregidas.
5. Consideración de Restricciones. Si  $A \leq A_{min}$  entonces  $A = A_{min}$ . Un subprograma es agregado para seguir la envolvente mostrada en la Fig. N°1 hasta conseguir el área tal que esfuerzos actuales y permisibles se vuelven tan cercanos como sea posible. Debe usarse las relaciones entre esbeltez y esfuerzos del AISC en la búsqueda. En este camino, el método de relación de esfuerzos esta restringido a limitaciones dadas por el código, áreas disponibles siguen una relación cercana entre el radio de giro y áreas de perfiles reales.
6. Iteraciones: el procesamiento indicado en los pasos previos es llevado varias veces hasta que el usuario decida terminar el proceso, generalmente después de pocas iteraciones cuando no hay cambios significativos en el peso total. No ha sido observado carencia de convergencia. Después de cada iteración, es presentada una lista para identificar cada elemento, la

fuerza máxima actuante, relación de esfuerzo y esbeltez actual y permisible, áreas individuales o áreas en grupos y finalmente el peso teórico del reticulado hecho de diferentes áreas o conjunto de áreas.

7. Selección de Perfiles: con las áreas obtenidas en la última iteración la computadora puede seleccionar desde un directorio los perfiles reales i.e. ésas próximas a áreas obtenidas por el método.
8. Reanálisis y Verificación: es necesario reanalizar la estructura con las áreas de los perfiles seccionados y con las fuerzas máximas obtenidas para verificar que todo ello satisfaga las estipulaciones del Código. Según la experiencia no usar diferentes perfiles para cada barra. Es sabio hacer grupos. Estos grupos que usan el mismo perfil constituye un compromiso entre los resultados obtenidos por un método teórico y los problemas prácticos de fabricación de estructuras.

## APLICACIONES

El problema propuesto y el programa han sido aplicados para diferente plano y reticulados espaciales, ya mencionado en la literatura, para comparar resultados en peso y esfuerzos en sus elementos. Ha demostrado una excelente correlación. Con respecto al tiempo de ejecución, es reportado, un reticulado plano para un Hangar, tipo pórtico abierto de red a dos aguas, 40 m de luz, 8 m de altura de columnas, 137 elementos, 70 nodos, dos sistemas de carga; fueron resueltas por una computadora personal de 640 Kb y 10 Mh como sigue:

- a) Análisis inicial: 4 seg.
- b) Primera iteración: 15 seg.
- c) Segunda y otras iteraciones: 12 seg.

Fueron requeridas cuatro iteraciones para conseguir la convergencia deseada.

Para un mejor entendimiento de los resultados de este método se da una comparación obtenido por otros investigadores. Aunque es una estructura simple de 3 barras, es suficientemente bueno para este propósito (Ref. 3)

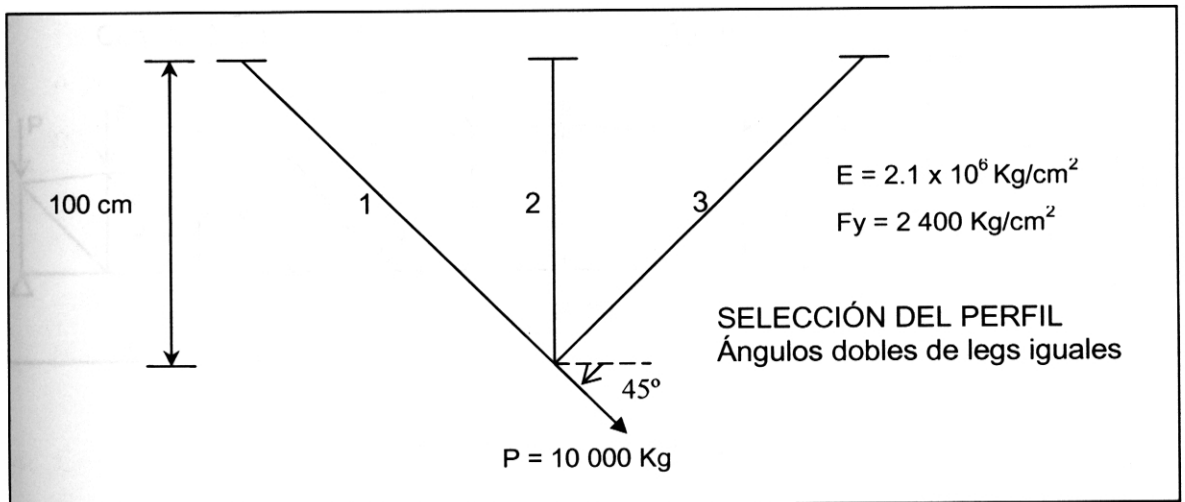


Fig. N°2 Sistema de tres barras

### COMPARACIÓN DE RESULTADOS

	DE REREFENCIA (3)	DEL PRESENTE TRABAJO
METODO	Programa no Lineal	Relación de esfuerzo con restricciones
ÁREAS	A1 = A3 = 5.633 cm <sup>2</sup> A2 = 2.196 cm <sup>2</sup>	A1 = A3 = 5.713 cm <sup>2</sup> A2 = 3.026 cm <sup>2</sup>
PESO	W min = 14.7 Kg	W min = 15 Kg
ESFUERZO F2 = 1025	F1 = 1400 Kg/cm <sup>2</sup> F3 = - 375	F1 = 1400 Kg/cm <sup>2</sup> F2 = 1030 F3 = - 400
ÁREAS		A1 = 5.713 cm <sup>2</sup> A2 = 3.026 cm <sup>2</sup> A3 = 3.830 cm <sup>2</sup>
PESO		W min = 13 Kg
DISEÑO FINAL		A1 = A2 = A3 Peso = 16.3 Kg  Elem. 1 = 2 L 2" x 2" x 1/8" Elem. 3 = 2 L 2" x 2" x 1/8" Elem. 2 = 2 L 1" x 1" x 1/8"

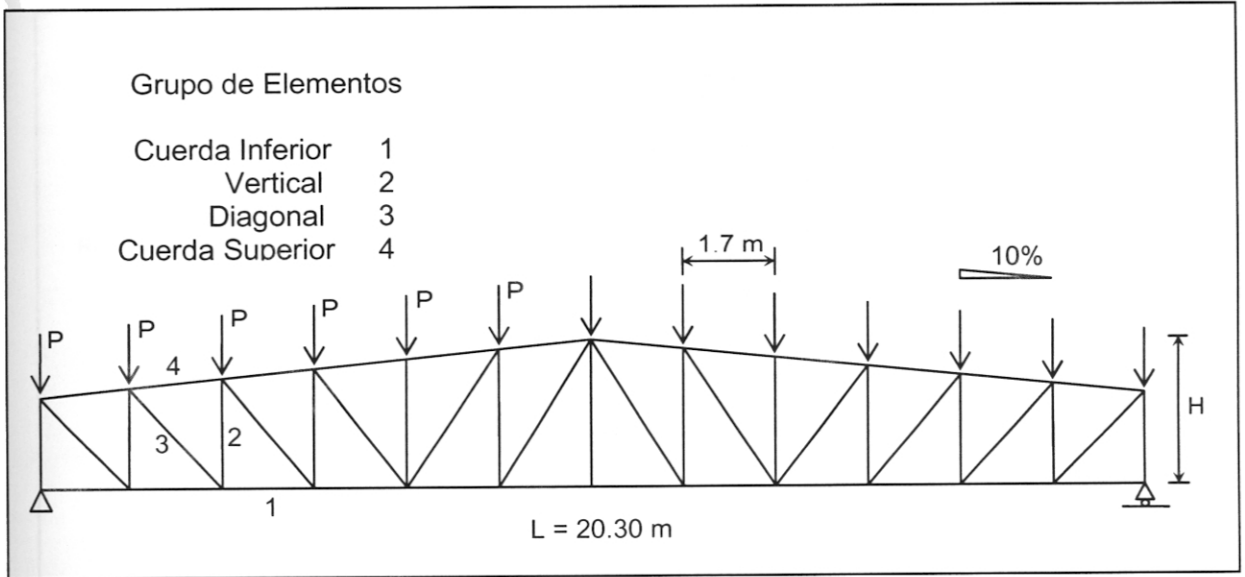


Fig N°3 Techo Reticulado

APLICACIÓN 1: Buscar el peralte óptimo de un techo reticulado. En la Fig. N°3 se muestra el tijeral. Los resultados son mostrados en la Fig. N°4. En el caso estudiado, independientemente de la intensidad de la carga aplicada, para ambos casos, el peralte óptimo es 1/9 o 1/10 de la luz para el mínimo peso.

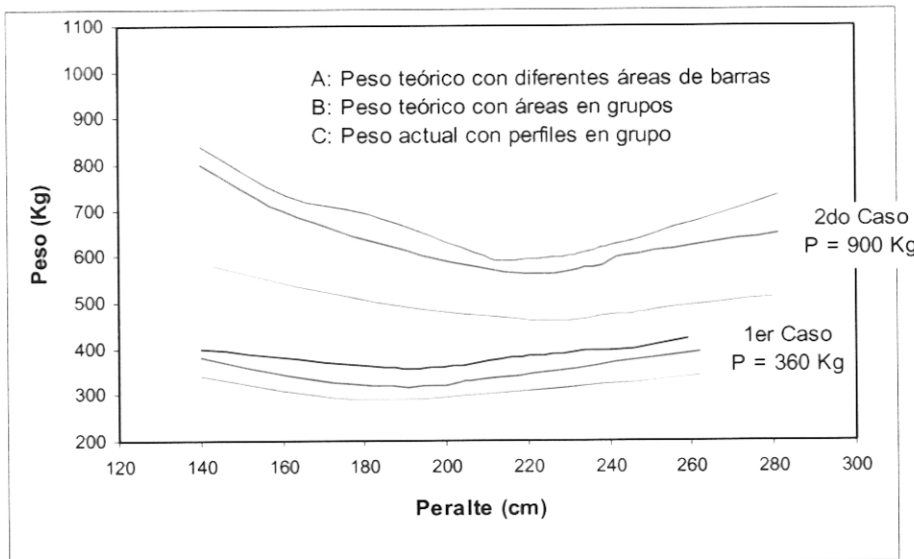


Fig. N°4 Registro Unidireccional para el Peralte Óptimo  
Peso vs. Curva de Peralte



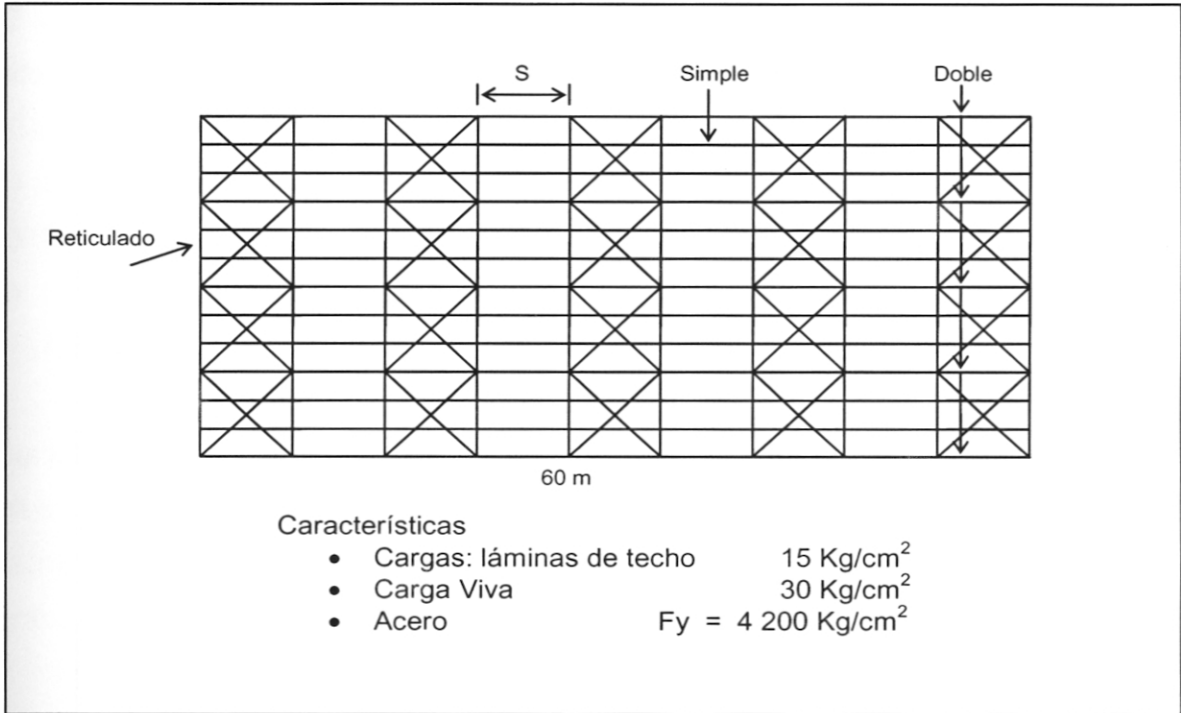


Fig. N°5 Planta del techo de la estructura de acero

APLICACIÓN 2: para un techo con dimensiones perimétricas fijadas, siendo soportado por columnas perimétricas (no considerado en el proceso de optimización), se desea conocer cuál es el espaciamiento a ser dado al reticulado para obtener el peso mínimo de la estructura de acero (reticulados y viguetas). La Fig. N°5 muestra la planta de la estructura típica seleccionado para este propósito.

Se inicia una búsqueda para el peso mínimo, cambiando el peralte del reticulado por cada "S" (Fig. N°6). Esto es fácil, entonces agregar el peso de todas las retículas y viguetas para cada espaciamiento de retícula y graficar como se ha hecho en la Fig. N°7, donde se muestra un gráfico de peso vs. espaciamiento. Es un aviso interesante que 4 a 6 m es un adecuado espaciamiento entre reticulados, en este caso. Un espaciamiento de más de 6 m incrementaría significativamente el peso total.

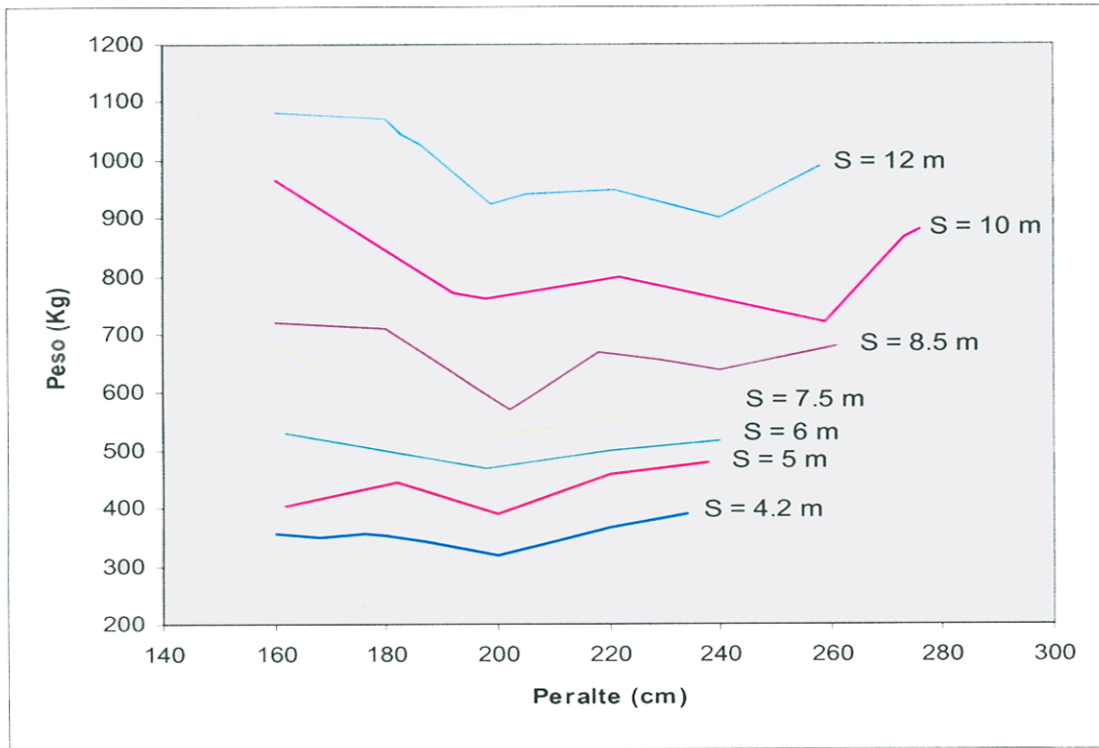


Fig. N°6 Registro Unidireccional Curva Peralte vs. Peso  
S = espaciamento de reticulado

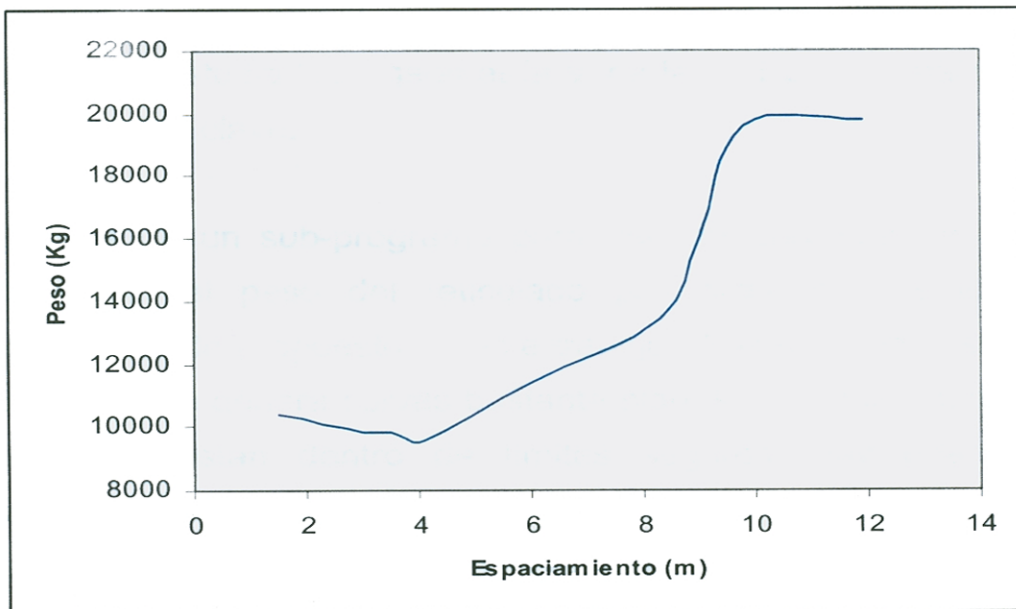


Fig. N°7 Peso óptimo vs. Espaciamento de reticulado

El Método de la Relación de Esfuerzos con Restricciones produce 3 soluciones diferentes:

- 1) Si las tres barras tienen diferentes áreas, el peso obtenido es menor.
- 2) Si el elemento 1 y 3 son iguales el peso obtenido es un poco mayor.
- 3) Finalmente el programa OPARMD7 permite la selección de los perfiles reales.

Se ha encontrado que el peso práctico es un poco alto que el dado por el Método de Relación de Esfuerzos con Restricciones, demostrando por este camino que hay una buena aproximación entre los resultados teóricos y los prácticos.

Tomando ventaja de las características del Programa OPARMD7 que permite alcanzar soluciones rápidamente y pesos cercanos al mínimo, aplicamos esto para buscar el peralte óptimo de un reticulado y el espaciamiento óptimo de reticulados para obtener el mínimo peso posible, como un ejemplo.

En la Fig. N°3 se muestra el reticulado, estando sujeta a condiciones de carga (dos casos son estudiados), geometría variada. El peralte ha sido escogido como una variable clave.

Con la ayuda de un sub-programa para generar coordenadas de nodos es posible obtener el peso del reticulado por cada incremento de peralte, aplicando el método propuesto en este trabajo. Los resultados son mostrados en la Fig. N°4, ello genera curvas bastante planas, indicando que, en este tipo de reticulados, están dentro de límites seguros, hay una variedad de soluciones para varios peraltes sin tener un cambio significativo en peso. De este modo la selección del peralte está en manos del diseñador quien también podría tomar en consideración deflexiones o razones de arquitectura.

Una buena aproximación, en el caso estudiado, independientemente de la intensidad de la carga aplicada, para ambos casos, el peralte óptimo de  $1/9$  o  $1/10$  de la luz producirá un mínimo peso.

Ahora se propone el siguiente problema: para un techo con dimensiones perimétricas fijas, siendo soportado por columnas perimétricas (no considerado en el proceso de optimización), se desea conocer cuál es el espaciamiento a ser dado para conseguir el peso mínimo para la estructura de acero (retículas y purlins). Este problema que puede ser algo complejo puede ser resuelto por una búsqueda secuencial unidireccional como sigue:

Las viguetas son escogidos usando perfiles de acero Z (perfiles plegados). Pueden ser secciones Z simples o dobles de acuerdo a requerimientos de arisotramiento de techo, mostrado en la Fig. N°5. entonces es posible preparar una tabla para la selección de secciones Z para diferentes luces (espaciamiento de reticulado). Para los reticulados, la misma retícula mostrada en la Fig. N°3 es usada. Con una subrutina que varía el vector de carga como varía el espaciamiento "S" (Fig. N°6). Esto es fácil, entonces agregar el peso de todos los reticulados y viguetas para cada espaciamiento de retícula y graficar, como se ha hecho en la Fig. N°7, donde se muestra un gráfico de peso vs. espaciamiento.

Es interesante notar que de 4 a 6 m es un adecuado espaciamiento entre retículas, en este caso. Un espaciamiento mayor a 6 m incrementaría significativamente el peso total.

Aunque este es un ejemplo particular ha sido presentado por dos razones: 1) Mostrar cómo usar el Programa OPARMD7 en conexión con algunos otros elementos de diseño y 2) Mostrar la importancia de los resultados obtenidos en referencia al peso mínimo por medio de un desarrollo secuencial simple.

## Conclusiones

1. Se ha preparado un programa que permite encontrar soluciones prácticas siguiendo el Método de la Relación de Esfuerzos con Restricciones propuesto en este trabajo que obtiene estructuras con pesos cercanos al mínimo.
2. Se ha previsto la necesidad de realizar estudios más profundos agrupando los elementos en una estructura para compatibilizar sus pesos y la facilidad de fabricación.
3. Un programa como este, hace fácil para un ingeniero llevar a cabo una búsqueda unidireccional para soluciones con diferentes elementos estructurales.

## VI. MÉTODO DE CRITERIO ÓPTIMO APLICADO A ESTRUCTURAS APORTICADAS

El problema óptimo aplicado a estructuras aporticadas es definido como la búsqueda de un grupo de formas  $W$  que proporciona el peso mínimo de la estructura. Podemos conseguirlo evaluando la llamada función objetivo que relaciona varias variables como las áreas de los elementos (u otro parámetro geométrico como  $S_x$  o  $I_x$ ). Pero hay condiciones impuestas en las variables llamadas restricciones, como el esfuerzo permisible, máxima estabilidad, máximos desplazamientos, área mínima, etc.

El modelo matemático del problema usando las ecuaciones 1 y 2 es la siguiente:

$$\text{Encontrar } W = [b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 \dots + b_nA_n]$$

$$\text{Para } W \longrightarrow \text{Mínimo}$$

$$\text{Si } c_i R_i < A < c_{i+1} R_{i+1}$$

El grupo de solución de criterio óptimo es llevado por el método de Fully Stress Design (Diseño Plenamente Esforzado FSD). Éste propone que la solución óptima da el esfuerzo completo en cada elemento de la estructura, en otras palabras que el máximo esfuerzo de trabajo da la posible solución óptima.

Una variación de este método es el Método de Relación de Esfuerzo que busca la solución con el esfuerzo máximo que no violenta las restricciones (como estabilidad, esfuerzo permisible, desplazamientos).

## EL MODELO

Deberíamos buscar áreas (como variables de diseño) para evaluar la función objetivo que da el valor mínimo; con el criterio óptimo que un posible óptimo podría tener el esfuerzo máximo actual:

$F_i$  = Esfuerzo permisible

$f_i$  = Esfuerzo actual

$R_i$  = Relación de esfuerzo =  $f_i / F_i$

$R_i$  se vuelve uno para un elemento viga columna donde los elementos del pórtico están sujetos a esfuerzos axiales y de flexión entonces, es decir una relación de interacción de esfuerzos:

$$R_i = f_a / F_a + f_b / F_b$$

Estas ecuaciones fueron derivadas usando las fórmulas para miembros a flexocompresión de las especificaciones AISC o podrían ser tomados la fórmula derivada desde el criterio aporticado, entonces:

$$R_i = (f_a + f_b) / (F_a + F_b) \leq 1 \quad \text{Ec. 31}$$

Si  $R_i$  se vuelve uno estamos buscando una posible solución óptima.

El modelo propuesto es:

$W = L_i \times A_i \times p$        $p$  = peso específico

$R_i$  = giro a 1/3 del eje de       $L_i$  = longitud del elemento  $i$

$D$  = profundidad de la flange       $A_i$  = área del elemento  $i$

$w$  = espesor de la Web       $W$  = Función objetivo

$I_i$  = Momento de inercia de la sección de corte

Para

$$l_i^{(k+1)} = R_i^{(k)} \times l_i^{(k)} \quad k = \text{número de iteraciones}$$

Pero

$$\begin{aligned} f_a \leq F_a & \quad f_a = \text{esfuerzo en compresión actual} \\ & \quad F_a = \text{esfuerzo en compresión permisible} \\ f_b \leq F_b & \quad f_b = \text{esfuerzo en flexión actual} \\ & \quad F_b = \text{esfuerzo en flexión permisible} \\ g_i \leq G_i & \quad g_i = \text{restraint actual número } i \\ & \quad R_i = \text{restraint permisible número } i \end{aligned}$$

Se conoce que  $F_a$  y  $F_b$  están en función del área pero están involucrados otros términos como  $R_t$ ,  $R_x$ ,  $I_x$ , etc. que deberían estar en función del área. Para esa propuesta se hicieron un análisis de regresión de las series económicas  $W$ ; se encontraron relaciones empíricas entre estos términos con el momento de inercia fue (Fig. N°8):

$$R_t = 15.356 + 0.000474 I_x$$

$$D = 34.774 + 0.000110 I_x$$

$$R_x = 14.501 + 0.000044 I_x$$

$$R_y = 8.520 + 0.000030 I_x$$

$$A_x = 103.47 + 0.000582 I_x$$

$$W = 1.0189 + 0.000002 I_x$$

Donde  $A$  = área del elemento ( $\text{cm}^2$ )

$R_x$  = radio de giro respecto al eje x (cm)

$R_t$  = giro a 1/3 del eje del alma (cm)

$D$  = profundidad de la forma (cm)

$w$  = espesor de la Web



## CARACTERÍSTICAS DEL SOFTWARE

OPTU89 es un nuevo paquete de software para describir el modelo estructural aporticado, condiciones de carga, combinaciones de carga, análisis y diseño óptimo. OPTU89 fue desarrollado por IBM o computadoras personales compatibles y escrito en lenguaje BASIC. El desarrollo del programa de computadora empezó en 1987 con el desarrollo de ÓPTIMO (Ref. N°1) un programa de computadora para diseño óptimo de los elementos en flexión y fue complementado con OPARMD7 (Ref. N°2). La versión actual del software tiene las siguientes características:

1. No se requiere experiencia con sistemas de operación de microcomputadoras.
2. Se ha adoptado el Diseño de Esfuerzos Permisibles ASD – AISC – 1989 para el diseño de pórticos de acero.
3. Los miembros horizontales pueden ser asumidos soportados o no soportados completamente por la acción de las cargas laterales; un subprograma para calcular  $K_x$  para la relación de esbeltez esta incluido en el software.
4. El coeficiente  $C_m$ , para miembros en compresión ha sido considerado en el programa.
5. OPTU89 puede trabajar por interacción con el diseñador o automáticamente si el diseñador esta ocupado. Para cada posibilidad el programa crea un archivo de salida SALIDA que contiene los resultados del análisis (consiste en deflexiones, momentos flectores, corte y fuerzas axiales); las iteraciones de criterio óptimo, la iteración final y los resultados de diseño para el método ASD consiste de secciones de menor peso seleccionadas y de esfuerzos actuales. Se incluye un procedimiento de reanálisis y rediseño al final del archivo. Para el modo automático el diseñador utilizando su criterio debería dar el número de iteraciones que él cree conveniente, y el programa genera el archivo de salida y se detiene automáticamente mientras el diseñador puede trabajar en otro proyecto; este proceso no sólo optimiza la estructura, también optimiza el tiempo del diseñador.

## ESTRUCTURA DEL OPTU89

El diagrama de flujo del OPTU89 es mostrado en la Fig. N°12. Consiste en varios subprogramas que son controlados por un programa principal y tuvo los siguientes bloques:

**INPUT:** da la información desde un archivo de datos creado por un editor comercial como KEDIT, que contiene la información general de geometría, cargas y combinación de cargas de la estructura.

**STIFFNESS:** calcula la matriz de rigidez de un elemento y ensambla la matriz de la estructura.

**FORCE-BOUND:** considera las fuerzas aplicadas por la estructura en la matriz arrangement y condiciones de borde en ésta.

**SOLVE:** soluciona el sistema  $k d = P$  para cada condición de carga utilizando el método de rigideces usando el método de eliminación de Gauss.

**RESULT:** calcula los resultados.

**COMBINE:** con los resultados de cada condición de carga y utilizando los datos calcula la combinación de carga máxima en el elemento.

**STRESS:** utilizando relaciones empíricas evalúa las propiedades de la sección para el área y la inercia actual. Con estos resultados calcula los esfuerzos actuales y permisibles. Este programa llama otras:

- **SLENDERNESS** para calcular  $K_x$  en el elemento.
- **FI** para calcular la relación de nudos de rigidez.

**CONSTRAINS:** calcula las restricciones en el elemento y los compara con el esfuerzo para conocer si es posible ese comportamiento, si no es posible el programa cambia el área y la inercia hasta que el comportamiento pueda ser

aceptable, después que la relación de esfuerzos es calculado y corregido el área e inercia aceptables se obtiene un nuevo grupo de variables para la siguiente iteración.

OPTU89 presente algunas ventajas respecto al proceso de diseño Ref. N°3, pero tuvo una limitación en la entrada de gráficos y salida de los resultados.

## EJEMPLO DE DISEÑO

Ejemplo N°1: es un pórtico de dos pisos y un bay. La Figura N°9 muestra la geometría, dimensiones y dos caso de carga para la estructura. Este ejemplo fue presentado en la Ref. N°4 y verifica en la Ref. N°5 y Ref. N°6. Los datos para el problema son:

Modulo de elasticidad =  $2.1 \times 10^6$  Kg/cm<sup>2</sup>; densidad = 0.0078 Kg/cm<sup>3</sup>; esfuerzo en el punto de fluencia = 2 500 Kg/cm<sup>2</sup>; inercia inicial =  $1.4 \times 10^5$  cm<sup>4</sup>; área inicial = 350 cm<sup>2</sup>.

Ejemplo N°2: es un pórtico de dos pisos y tres bay. La figura N°10 muestra la segunda geometría para optimizar este pórtico presentado en la referencia N°7, condiciones de carga y parámetros estructurales son mostrados.

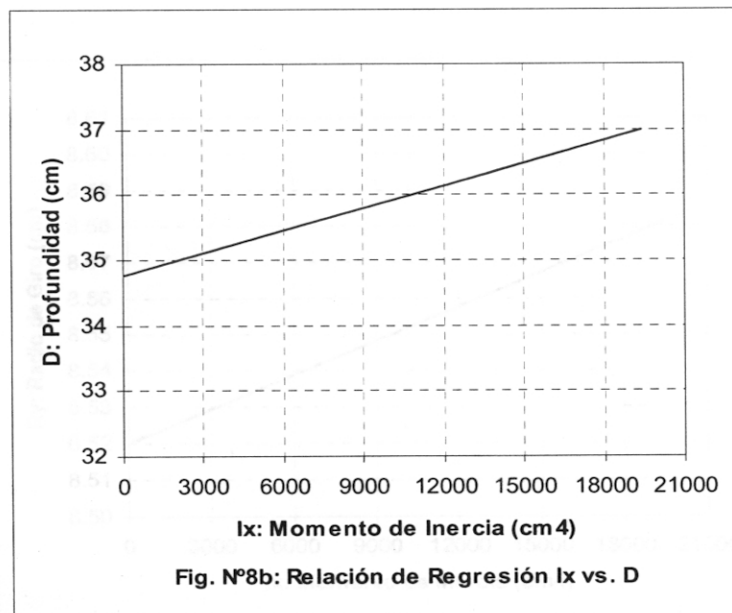
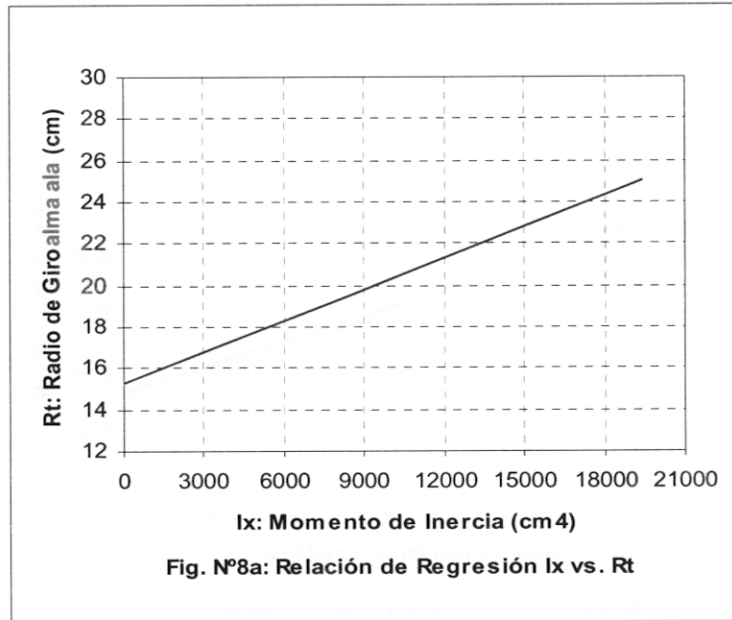
## RESULTADOS

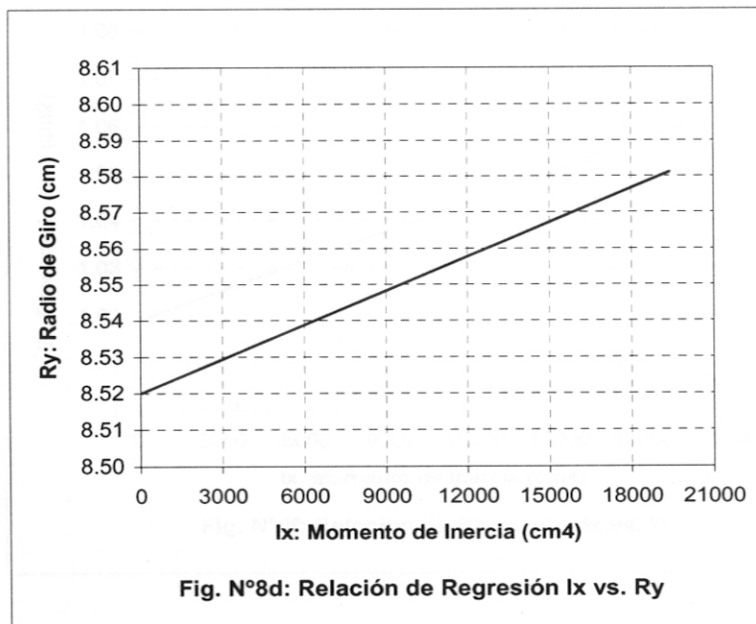
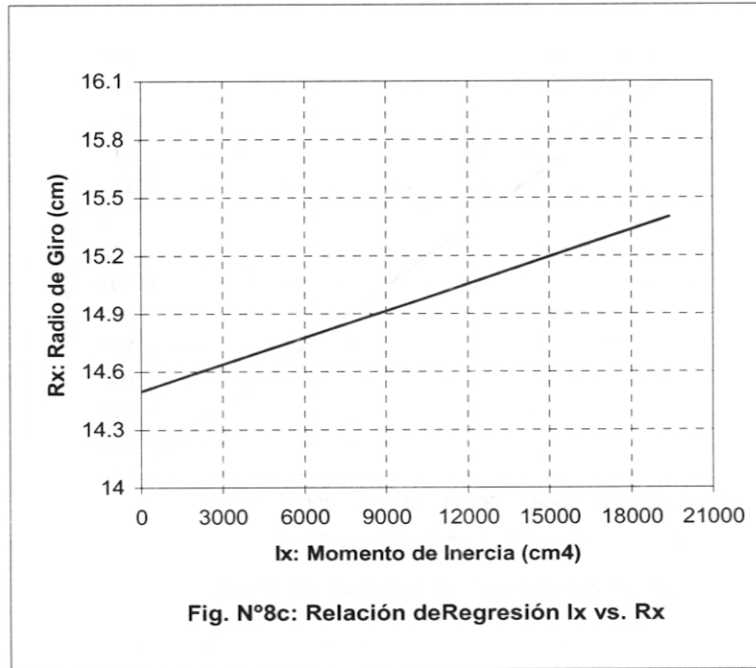
El problema es resuelto usando el método de relación de esfuerzos implementado en el OPTU89. Para el ejemplo N°1 después de seis iteraciones se encontró el diseño óptimo, en un tiempo total de 300 seg. para una computadora personal estándar; el peso teórico fue 3882 Kg. La Fig. N°9 compara los resultados con la Ref. N°3, N°4, N°5, N°6 mostrando que el peso de diseño de la estructura fue 4290 Kg después del proceso de reanálisis y rediseño.

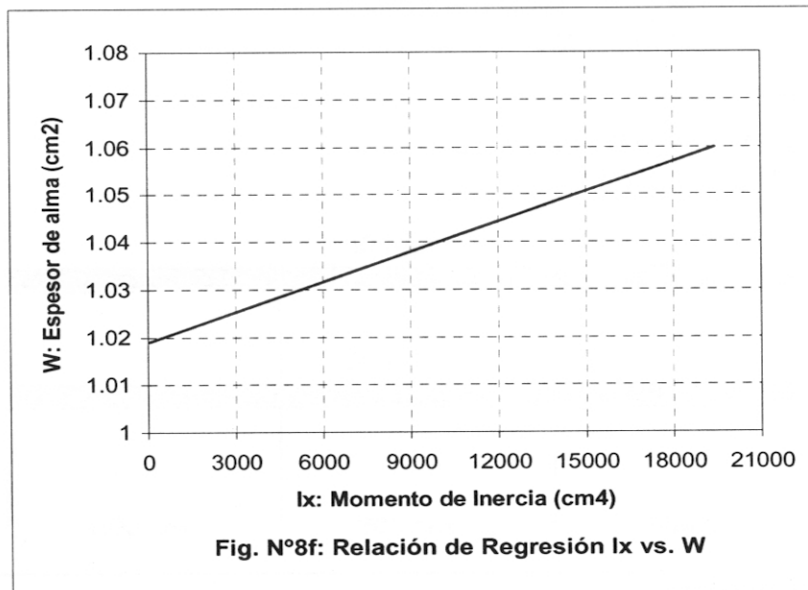
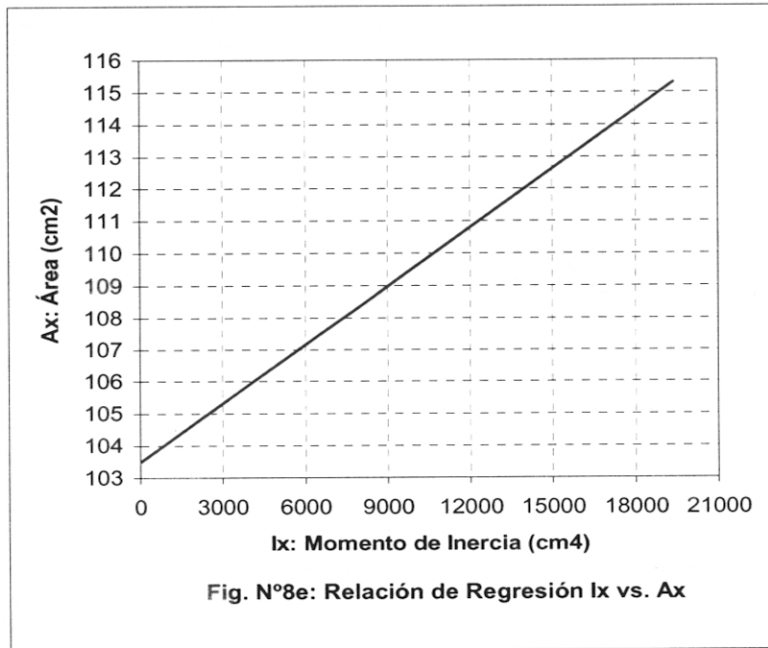
Para el pórtico de tres bay Fig. N°9 ilustra los resultados teóricos y los compara con el resultado de la Ref. N°7.

## CONCLUSIONES

- Un método de criterio simple busca en un fácil y rápido camino los resultados que podrían ser obtenidos aplicando programas matemáticos u otras tecnologías.
- Este estudio no pretende mostrar un nuevo método; las soluciones encontradas deben ser (wants to be) el punto de partida para los usuarios de programas de grandes diseños con computadoras sofisticadas.
- La aplicación del Factor de Diseño de Carga y Resistencia debería desarrollarse, porque el programa tiene la capacidad de combinación de cargas y sólo necesita las modificaciones del proceso de diseño.







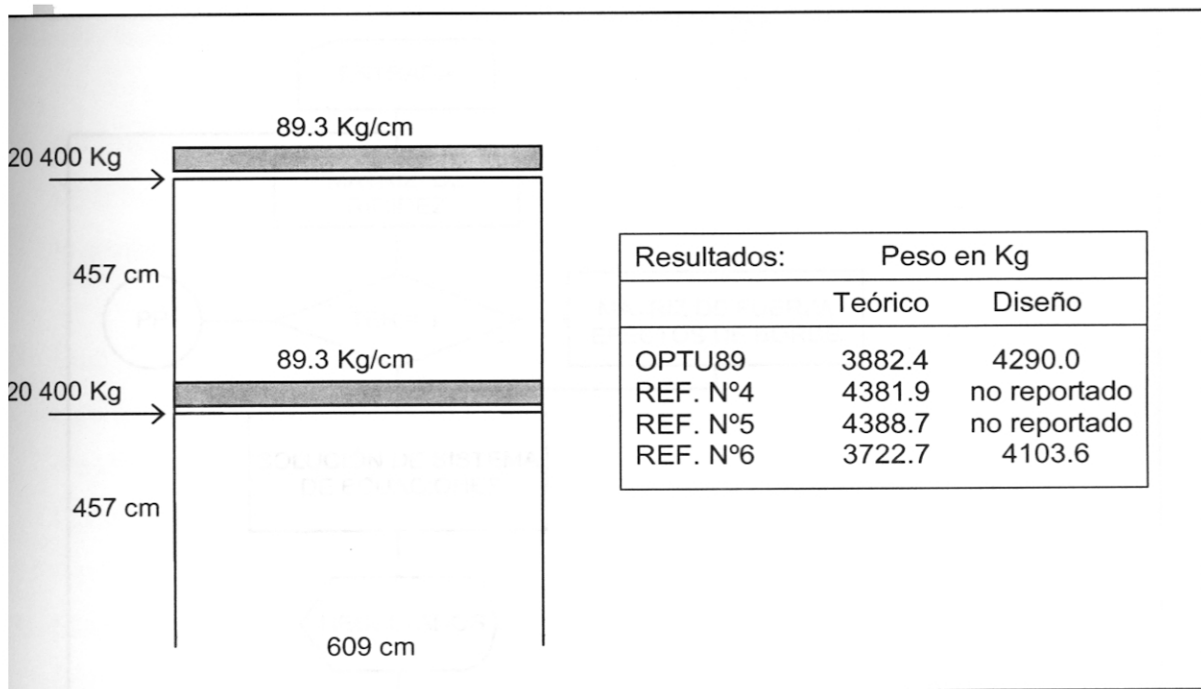


Figura N°9: Ejemplo 1 Pórtico de dos pisos y un bay

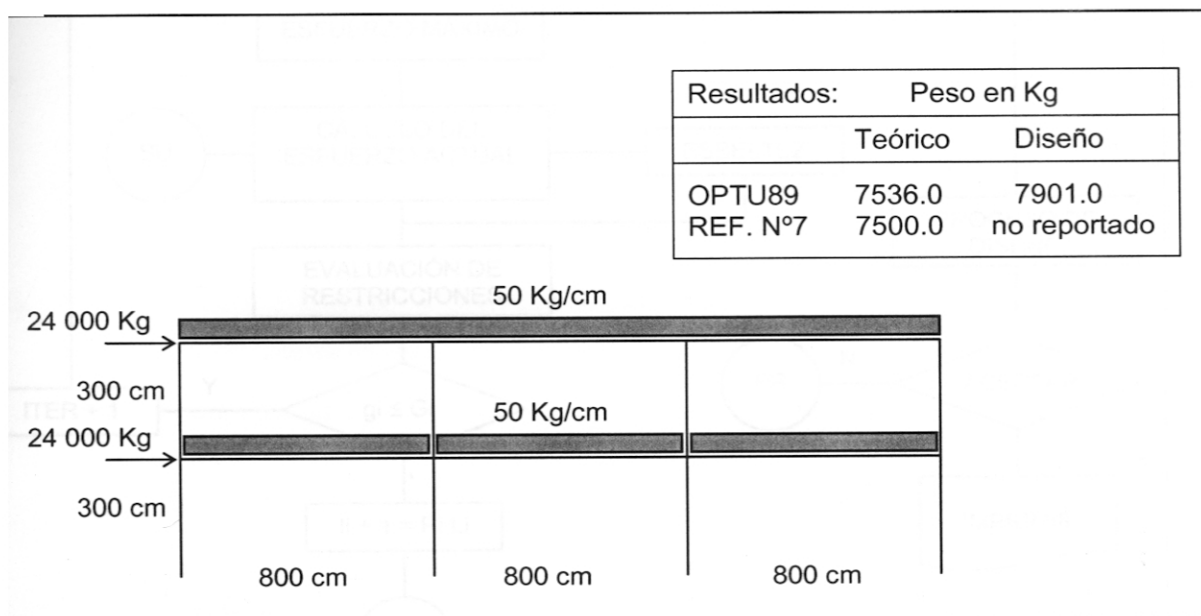


Figura N°10: Pórtico de dos pisos y tres bay



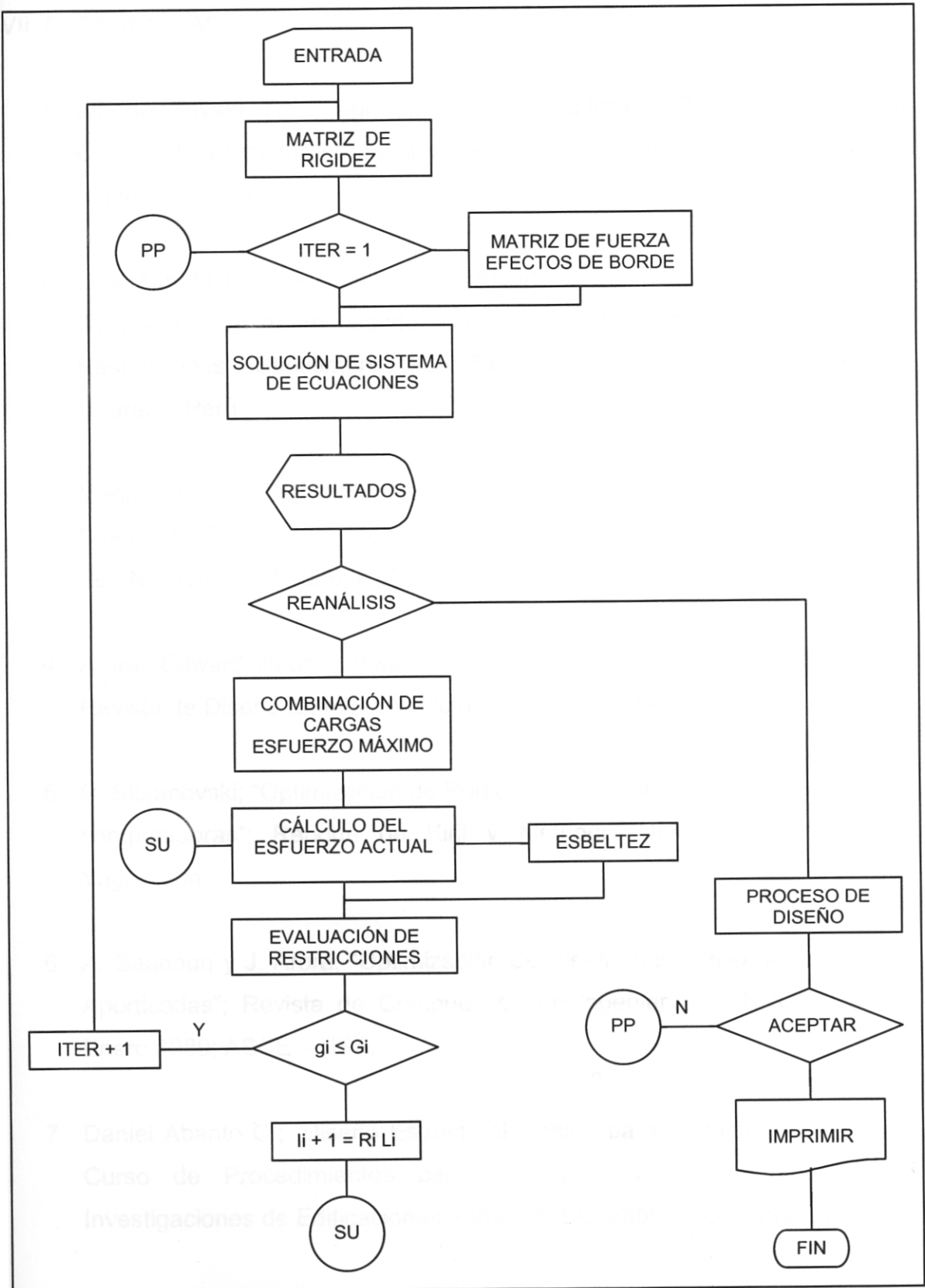


Fig. Nº 12 Diagrama de Flujo del OPTU89

## VII REFERENCIAS

1. Alberto Zavala T.; "Programa de Computadora – Óptimo para Diseño Óptimo de Elementos a Flexión"; Agosto 1987; Universidad Nacional de Ingeniería; Lima – Perú.
2. Luis Zapata B., Juan Chávez Z., Alberto Zavala T.; "Diseño Óptimo de Reticulados de Acero usando el Método de Relación de Esfuerzos con Restricciones"; Septiembre 1988; Séptimo Congreso de Ingeniería Civil; Huaraz – Perú.
3. Magdy Raufiel, Frank Monada; "Análisis de Microcomputadoras Aided y Diseño de Pórticos en Acero"; Revista de Computación en Ingeniería Civil Vol. N°3 N-2; Abril 1989; ASCE – USA.
4. Arora, Edward Haug y Kwan Kim; "Diseño Óptimo de Pórticos Planos"; Revista de Diseño Estructural; Octubre 1975; ASCE. – USA.
5. P. Stojanovski; "Optimización de Pórticos No Arriostrados por medio de mini computadoras"; Reporte de Kiril y Methodij; Universidad de Skopje; Yugoslavia.
6. A. Saadaun y J. Arora; "Optimización de Diseño Interactivo de Estructuras Aporticadas"; Revista de Computación en Ingeniería Civil Vol. N°3 N-1; Enero 1989; ASCE – USA.
7. Daniel Abanto C.; "Diseño Estructural Óptimo para Estructuras de Acero"; Curso de Procedimientos para la Ingeniería Sísmica; Instituto de Investigaciones de Edificaciones – Vol. 24; Diciembre 1988; Japón.

8. Juan Cassis y Julio Guzmán; "Diseño Automático de Pórticos en Acero usando el Método de Criterio Óptimo"; del Reporte de la Universidad de Chile; Santiago – Chile.
9. Manual de Construcción en Acero 9na Edición; Instituto Americano de Construcción en Acero AISC 1978; Chicago – USA.
10. Manual de Construcción en Acero 9na Edición; Instituto Americano de Construcción en Acero AISC 1989 (ASD); Chicago – USA.
11. Uri Kirsh; "Diseño Estructural Óptimo" – Conceptos, Métodos y Aplicaciones; Compañía de Libros McGraw Hill; 1981; New York – USA.
12. R.H. Gallagher; "Fully Stressed Design" – Diseño Estructural Óptimo; John Wiley e Hijos; 1973; New York – USA.
13. E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell y O.C. Zienkiewicz; "Nuevas Direcciones en Diseño Estructural Óptimo"; John Wiley e Hijos Ltd.; 1984; New York – USA.
14. N.S. Khot y L. Berke; "Optimización Estructural usando Métodos de Criterio de Optimización"; John Wiley e Hijos Ltd.; 1984; New York – USA.

# ANEXOS

USTED PUEDE CONSULTAR LOS ANEXOS ACCEDIENDO  
AL FORMATO FÍSICO DE LA TESIS