

# **UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL  
ADAPTIVO AUTOAJUSTADO PARA EL POSICIONAMIENTO DE  
UN ROBOT DE UN GRADO DE LIBERTAD**

**INFORME DE SUFICIENCIA  
PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
INGENIERO ELECTRÓNICO**

**PRESENTADO POR:  
CÉSAR HUARCAYA VASQUEZ**

**PROMOCIÓN  
2010- II**

**LIMA – PERÚ  
2014**

**DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL  
ADAPTIVO AUTOAJUSTADO PARA EL POSICIONAMIENTO DE  
UN ROBOT DE UN GRADO DE LIBERTAD**

**DEDICATORIA:**

A mis padres Deogenes y Clariza, por su amor, por ser guía, ejemplo, motivarme y su apoyo incondicional en todos los proyectos planteados y realizados, a mis hermanas Angela, Camila y Chris Andrea por brindarme su amistad y darme ánimos en todo momento.

## SUMARIO

En este trabajo, se aborda el estudio y diseño de la técnica de control adaptivo autosintonizado para realizar el posicionamiento de un robot de un grado de libertad. Esta meta se alcanza analizando y estudiando el movimiento dinámico de un robot de un grado de libertad a partir de las leyes de Newton, obteniendo así un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para su aplicación. Con las consideraciones dinámicas planteadas para este robot y las ecuaciones dinámicas, se elige un motor de corriente directa DC que permita actuar sobre la articulación del robot para un posicionamiento ubicado entre  $-180^\circ$  y  $180^\circ$ , respecto del punto más bajo. Posteriormente se efectúa la linealización del modelo no lineal alrededor de un punto (posición  $0^\circ$ ). El modelo linealizado permite la aplicación del método de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido variable, para estimar los parámetros del robot en tiempo real. El modelo linealizado estimado variante en el tiempo, se usa para el diseño de un sistema de control adaptivo autoajustado, que consiste en un controlador proporcional-integral óptimo cuadrático con realimentación de estados estimados (filtro de Kalman).

La validez de la técnica de control desarrollado se ha corroborado mediante resultados de simulación

Durante el desarrollo del trabajo, el modelo dinámico y los algoritmos son validados mediante simulación empleando el software Matlab-Simulink V11.0.

## INDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>CAPITULO I</b>	
<b>PLANTEAMIENTO DE INGENIERÍA DEL PROBLEMA</b> .....	4
1.1 Descripción del problema.....	4
1.2 Objetivos.....	5
1.3 Limitación del trabajo.....	5
<b>CAPITULO II</b>	
<b>ARQUITECTURA GENERAL DE ROBOT DE UN GRADO DE LIBERTAD</b> .....	7
2.1 Definiciones básicas.....	7
2.2 Dinámica de Solido Rígido.....	9
2.2.1 Momento de Fuerza.....	10
2.2.2 Relación entre Torque y Momento de Inercia.....	10
2.3 Engranajes.....	10
2.3.1 Tipos de Engranajes.....	11
2.3.2 Perdidas por Rozamiento.....	12
2.4 Esfuerzos en los Materiales.....	12
2.4.1 Velocidad crítica de ejes de rotación.....	13
2.4.2 Cálculo de la deflexión o desviación estática del eje.....	14
2.5 Fricción.....	15
2.5.1 Fricción estática y fricción de coulomb.....	15
2.5.2 Fricción viscosa.....	16
2.6 Cojinetes.....	16
2.7 Motor de corriente directa DC.....	17
2.7.1 Características generales de motor DC.....	17
2.7.2 Motor DC de Imán Permanente.....	18
2.7.3 Modelo Matemático Motor DC de Imán Permanente.....	18
2.7.4 Limite de corriente.....	19
2.8 Convertidor de electrónica de Potencia (CC-CC).....	19
2.8.1 Amplificador de potencia tipo puente H.....	20
2.9 Transductor de posición.....	21
2.9.1 Codificador (Encoder).....	21

2.10	Algoritmo de simulación del proceso - Runge Kutta Orden 4 .....	22
<b>CAPITULO III</b>		
<b>SISTEMA DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO .....</b>		<b>24</b>
3.1	Introducción.....	24
3.2	Marco teórico sistemas discreto.....	25
3.2.1	Tipos de señales .....	25
3.2.2	Muestreo y Retenedor.....	26
3.2.3	Diseño de sistemas de control digital.....	27
3.2.4	Sistemas de control en el espacio estado continuo .....	28
3.2.5	Estado y Variables de Estado discreto .....	33
3.2.6	Discretización de las ecuaciones en el espacio en tiempo continuo .....	35
3.2.7	Controlabilidad y Observabilidad .....	36
3.2.8	Control Óptimo Cuadrático.....	38
3.2.9	Observador Óptimo Cuadrático .....	42
3.2.10	Filtro de Kalman.....	45
<b>CAPITULO IV</b>		
<b>MODELO MATEMATICO DE ROBOT DE UN GRADO DE LIBERTAD .....</b>		<b>47</b>
4.1	Consideraciones mecánicas .....	47
4.2	Modelo matemático.....	48
4.3	Representación mediante ecuaciones de estado .....	59
4.4	Elección del motor DC .....	59
4.5	Linealización del modelo matemático .....	64
<b>CAPITULO V</b>		
<b>DISEÑO Y SIMULACION .....</b>		<b>66</b>
5.1	Introducción Control Adaptivo .....	66
5.2	Procedimiento de estimación Método mínimos cuadrados recursivos .....	67
5.2.1	Modelamiento de sistemas no lineales .....	67
5.2.2	Método de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido .....	69
5.3	Diseño de sistema de control adaptivo autosintonizado .....	71
5.4	Control adaptivo autosintonizado de robot de un grado de libertad.....	71
5.5	Simulación del algoritmo de estimación de parámetros.....	76
5.6	Simulación del algoritmo de control adaptivo autoajusto .....	80
5.6.1	Referencia señal tipo cuadrada .....	80
5.6.2	Referencia señal tipo sinusoidal .....	83
<b>CONCLUSIONES .....</b>		<b>86</b>
<b>ANEXO A .....</b>		<b>87</b>

Momento de Inercia de sólidos	
<b>ANEXO B</b> .....	88
Hoja de datos acero AISI 1045	
<b>ANEXO C</b> .....	89
Hoja de datos Motor DC de Imán permanente	
<b>ANEXO D</b> .....	91
Algoritmo de estimación de parámetros y control adaptivo autoajustado Matlab	
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	98

## INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente el control de los procesos industriales se ha realizado en base a la implementación de controladores PID (sean analógicos o digitales). Este tipo de controladores sigue teniendo validez actualmente y su empleo sigue siendo muy extendido, aunque sólo es recomendable en el caso de control de sistemas lineales o bien sistemas no lineales, que operen en un punto fijo o el punto de funcionamiento se desvíe muy ligeramente del mismo.

Si se añade a las limitaciones anteriores la posibilidad de variación con el tiempo (envejecimiento, cambio de alguno de los elementos, la no linealidad de la fricción, etc.) de los parámetros que definen el comportamiento del proceso a controlar, se entiende aun mejor la necesidad de un sistema que ajuste automáticamente sus parámetros en función de su comportamiento, tal que se cumplan las prestaciones de funcionamiento exigidas al mismo, dando lugar a lo que se denomina control adaptivo.

Una parte muy importante de los sistemas adaptivos es el algoritmo de identificación de parámetros, consumiendo éste la mayor parte del tiempo de cálculo entre cada periodo de muestreo.

Es importante señalar que la utilización de un controlador adaptivo no sustituye la necesidad del conocimiento del proceso que es importante para elegir las especificaciones, el controlador y el método de diseño.

La Metodología de investigación se basó en:

- Planteo del prototipo básico de la parte mecánica de robot: En esta parte se considera las dimensiones de la estructura, tipo de cojinete y reductores de velocidad (engranajes), así también la limitación de la velocidad de rotación de la estructura mecánica (eje y el brazo de robot).
- Selección del motor DC: Esta etapa comprende la selección del motor DC de acuerdo a las consideraciones de torque y tiempo de establecimiento máximo con un error mínimo de posición del brazo robótico, conocidas como criterio de diseño.

- Diseño del control de posicionamiento del robot: Se empieza con la identificación de parámetros del proceso de forma dinámica, para después estimar los estados (filtro de Kalman) y finalmente determinar el controlador proporcional-integral óptimo cuadrático con realimentación de estados estimados.
- Simulación del control aplicado: En esta parte del informe se realiza la simulación del sistema del control adaptivo autoajustado del robot de un grado de libertad usando el software Matlab V11.0. La simulación del proceso también se realiza en Matlab mediante el algoritmo de Runge Kutta Orden 4, adicionalmente se muestra la simulación de la estimación de parámetros entre intervalos de muestreo.

#### Alcances:

En el presente informe se considera algunos tópicos básicos especialmente relacionados con la parte mecánica, y conceptos generales sobre estimación de parámetros, controlabilidad y observabilidad, estimador de estado en presencia de ruido (filtro de Kalman).

#### Organización del trabajo:

En el capítulo 1 se describe el problema, los objetivos y las limitaciones o alcances del presente trabajo.

En el capítulo 2 se describe el fundamento teórico para el análisis de la dinámica rotacional, el actuador y sensado de forma general, también el método numérico utilizado en la simulación de la dinámica del robot de un grado de libertad.

En el Capítulo 3 se describe el fundamento de control en el espacio de estado continuo y digital, además en la parte digital el controlador, observador óptimo cuadrático y una introducción a estimador de estado óptimos (filtro de Kalman).

En el capítulo 4 se realiza el modelamiento matemático del robot de un grado de libertad, que puede resumirse con el cálculo de las ecuaciones matemáticas de la parte mecánica y eléctrica del sistema. Además estas ecuaciones permiten la elección del motor DC, que permita cumplir con el planteamiento del problema y con la consideración mecánica de velocidad de rotación menor que la velocidad crítica del movimiento del robot. A partir de estas ecuaciones diferenciales no lineales, se obtiene la representación en el espacio de estado del sistema. Se linealiza el modelo alrededor de un punto fijo, se plantea el periodo de muestreo para el diseño del sistema de control digital.

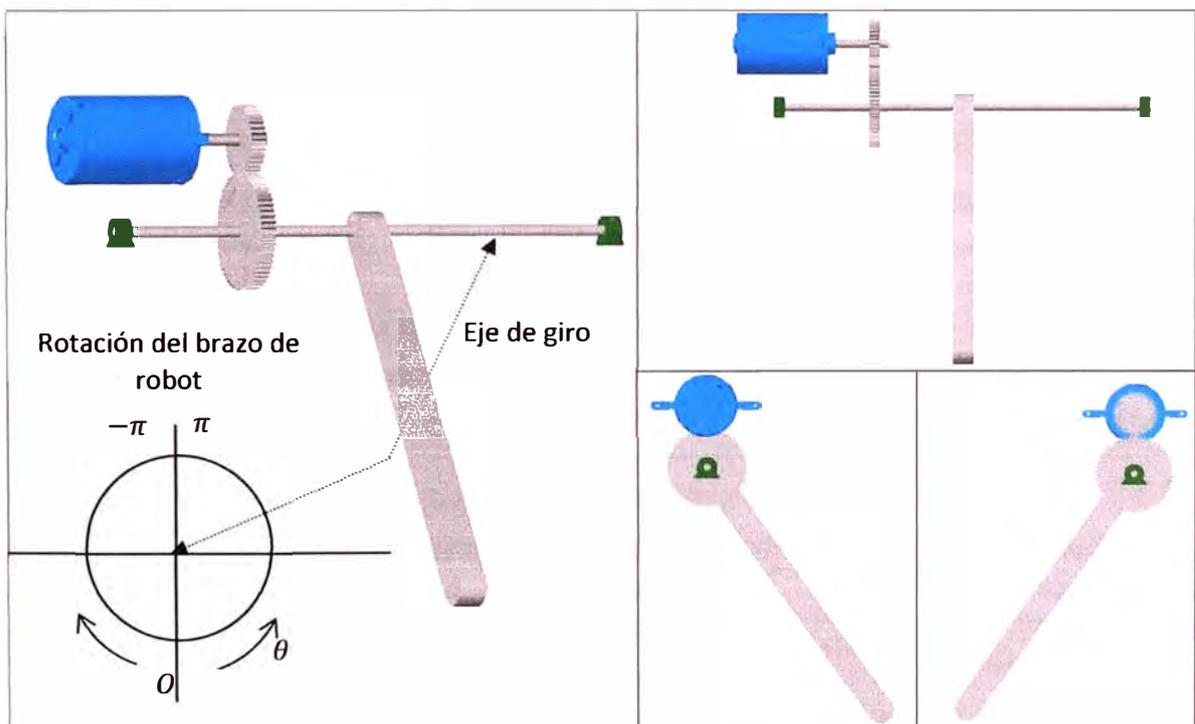
En el capítulo 5, se formuló el control adaptivo autosintonizado y el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido, para la estimación de parámetros de forma dinámica. Se comienza el diseño del sistema de control adaptivo autoajustado con la estimación de parámetros, teniendo como base al modelo linealizado del proceso; estos datos estimados permiten estimar los estados del proceso mediante el filtro de Kalman, para finalmente determinar el controlador proporcional-integral óptimo cuadrático con realimentación de estados estimados. Este capítulo concluye con la simulación de estimación de parámetros, simulación y verificación del diseño del sistema de control adaptivo autoajustado, que cumple con las especificaciones de diseño.

## CAPITULO I

### PLANTEAMIENTO DE INGENIERIA DEL PROBLEMA

#### 1.1 Descripción del problema

El posicionamiento del robot de un grado de libertad propuesto se muestra en la figura 1.1. El movimiento de rotación causa cambios en ciertos parámetros, por ejemplo al girar el brazo de robot el torque debido al peso del brazo varía a medida que rota sobre el eje. La fricción (en cojinetes y engranajes) y las perdidas en los circuitos eléctricos que no pueden ser medidas conllevan a incertidumbres, además el desgaste de las piezas mecánicas son factores que contribuyen a que el sistema sea no lineal y variante en el tiempo.



**Figura 1.1** Robot de un grado de libertad propuesto.

En la figura 1.1, el brazo de robot gira sobre el eje, que a su vez está fijado entre dos cojinetes. La estructura mecánica alcanza la posición angular final en un tiempo del orden de los segundos, es decir la estructura no puede cambiar instantáneamente su posición.

El posicionamiento angular del brazo de robot debe cumplir con las siguientes especificaciones:

El brazo de robot se debe mantenerse en una posición  $\theta \in (-\pi, \pi)$  rad, además debe ser posible su rotación en ese rango de valores.

Partiendo desde la posición  $\theta = 0$  rad, hasta cualquier posición  $(-\pi, \pi)$  rad se debe cumplir lo siguiente:

- Tiempo máximo de establecimiento debe ser igual 2 seg.
- El error máximo en el punto final, debe ser menor al 2% de la posición angular final.

La respuesta a obtener debe considerar la limitación mecánica del eje (brazo de robot) al girar, llamada velocidad crítica de rotación.

Las características de torque y velocidad angular del motor DC seleccionado, deben permitir cumplir con las especificaciones de diseño.

## 1.2 Objetivos

Aplicar las técnicas de control avanzado aprendidas en el programa de titulación por actualización de conocimientos.

Diseñar y simular un sistema de control adaptivo autoajustado que permita controlar de forma satisfactoria el posicionamiento de un robot de un grado de libertad.

## 1.3 Limitación del trabajo

En la parte mecánica del robot de un grado de libertad, se propone piezas con dimensiones realistas, los engranajes se consideran de tipo recto y ideal para un rápido análisis, la masa del engranaje de menor tamaño (piñón) se considera despreciable. Los valores de par de fricción considerados tienen como referencia valores calculados experimentalmente en otras aplicaciones de rotación de ejes [2].

En la parte eléctrica se considera componentes ideales y no se detalla la circuitería del amplificador electrónico de potencia tipo puente H.

El controlador se considera ideal y que cumple todas las características, que permita implementar el algoritmo de control adaptivo autosintonizado para el robot de un

grado de libertad. El controlador digital consiste en un computador y una tarjeta de adquisición de datos LABPC+ [14], cuyas características eléctricas se usan en el diseño.

El convertidor D/A de la tarjeta LABPC+, se usa para la variación de la señal de control en tiempo continuo.

El transductor de posición (encorder) se considera ideal y que trasmite datos digitales hacia la tarjeta LABPC+, con lo cual se realimenta el sistema de control.

Todas las simulaciones se realizaran en el software Matlab V11.0.

## CAPITULO II

### ARQUITECTURA GENERAL DE ROBOT DE UN GRADO DE LIBERTAD

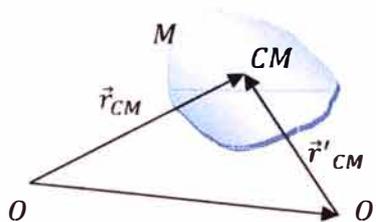
#### 2.1 Definiciones básicas

##### 2.1.1 Sólido Rígido

Es el sólido considerado no deformable, sin embargo las estructuras y máquinas reales nunca son absolutamente rígidas y se deforman bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellas. A pesar de ello, por lo general esas deformaciones son pequeñas y no afectan las condiciones de equilibrio o de movimiento de las máquinas o estructuras. No obstante tales deformaciones son importantes, en lo concerniente a la resistencia a la falla de las estructuras y están consideradas en el estudio de la mecánica de materiales. En el presente informe se considera algunos conceptos de mecánica de materiales, ya que da una idea para un diseño real.

##### 2.1.2 Centro de Masa

Es la posición geométrica de un sólido rígido donde se puede considerar concentrada toda su masa, corresponde a la posición promedio de todas las partículas de masa que forman el sólido rígido. A pesar de que el vector centro de masa  $\vec{r}_{CM}$  depende del origen que se elija para evaluarlo, la posición geométrica del centro de masa es independiente de la elección del origen, por ejemplo en la figura 2.1.



**Figura 2.1** Posición del centro de masa respecto a  $O$  y  $O'$ .

La posición del centro de masa se determina por la siguiente ecuación:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{M} \quad (2.1)$$

Donde:

$\vec{r}_{CM}$  = Vector posición de centro de masa (m).

$dm$  = Diferencial de masa (kg).

$M$  = Masa total (kg).

### 2.1.3 Centro de Gravedad

En un sólido rígido, es aquel punto geométrico en donde se considera actúa la fuerza de gravedad o peso del cuerpo resultante. Para cuerpos cercanos a la superficie de la tierra, se puede considerar que la acción gravitatoria es en la misma dirección, además para sólidos rígidos con densidad constante, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. La posición del centro de gravedad para el sólido que se muestra en la figura 2.1, se determina mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{r}_{CG} = \frac{\int \vec{r} dw}{W} \quad (2. 2)$$

Donde:

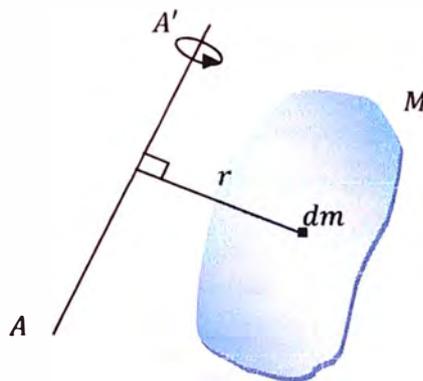
$\vec{r}_{CG}$  = Vector posición centro de Gravedad.

$dw$  = Diferencial de peso escalar ( $\text{kgm/s}^2$ ).

$W$  = Peso total escalar ( $\text{kgm/s}^2$ ).

### 2.1.4 Momento de Inercia

Proporciona una medida de la inercia o resistencia del cuerpo rígido cuando se trata de ponerlo en movimiento de rotación sobre algún eje, por ejemplo en la figura 2.2 (eje de rotación  $AA'$ ), el momento de inercia se determina con la ecuación (2.3), en el anexo A se muestra momentos de inercia para sólidos simétricos.



**Figura 2.2** Momento de inercia con respecto al eje  $AA'$ .

$$J = \int r^2 dm \quad (2. 3)$$

Donde:

$J$  = Momento de inercia con respecto al eje  $AA'$  ( $\text{kgm}^2$ ).

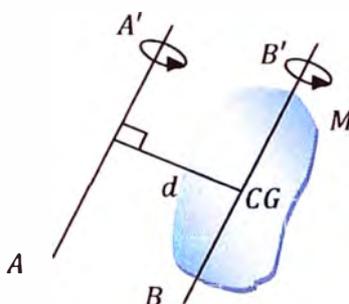
$dm$  = Diferencial de masa.

$r$  = Distancia perpendicular del  $dm$  con respecto al eje  $AA'$ (m).

El momento de inercia de una estructura compuesta por sólidos geométricos, es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto al mismo eje de los sólidos geométricos.

### 2.1.5 Teorema de los Ejes Paralelos

El momento de inercia de un sólido rígido con respecto a cualquier eje, es igual al momento de inercia con respecto a un eje paralelo que pasa por el centro gravedad más el producto de la masa y el cuadrado de la distancia entre los dos ejes, es decir considerando el sólido de la figura 2.3, el momento de inercia se determina con la ecuación (2.4).



**Figura 2.3** Teorema de los ejes paralelos

$$J_{AA'} = J_{BB'} + Md^2 \quad (2.4)$$

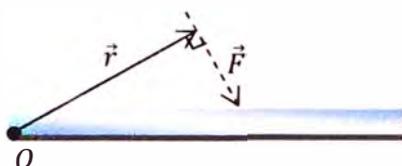
## 2.2 Dinámica de Sólido Rígido

En general un cuerpo puede tener tres tipos distintos de movimiento simultáneamente. De traslación a lo largo de una trayectoria, de rotación mientras se está trasladando, en este caso la rotación puede ser sobre un eje que pase por el cuerpo, y si a la vez este eje está girando en torno a un eje vertical, a la rotación del eje del cuerpo rotante se le llama movimiento de precesión (por ejemplo un trompo), y de vibración de cada parte del cuerpo mientras se traslada y gira. Por lo tanto el estudio del movimiento puede ser en general muy complejo, por esta razón se estudia cada movimiento en forma independiente. Cuando un cuerpo está en rotación, cada punto tiene un movimiento distinto de otro punto del mismo cuerpo, aunque como un todo se esté moviendo de manera similar, por lo que ya no se puede representar por una partícula. Pero se puede representar como un objeto extendido formado por un gran número de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración. Al tratar la rotación del cuerpo, el análisis se simplifica si se considera como un objeto rígido en la cual debe considerar las

dimensiones del cuerpo. En el presente informe para el modelamiento matemático se debe tener en cuenta la rotación sobre un eje.

### 2.2.1 Momento de Fuerza

Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje fijo. La propiedad de la fuerza para hacer girar al cuerpo se mide con una magnitud física que se denomina momento de la fuerza o torque. Se define el torque  $\tau$  de la fuerza  $F$  con respecto a un origen (ver figura 2.4) mediante la ecuación (2.5):



**Figura 2.4** Vector posición perpendicular al vector fuerza.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.5)$$

Donde:

$\vec{\tau}$  = Vector torque debido a la fuerza  $\vec{F}$  (Nm).

$\vec{r}$  = Vector posición perpendicular al vector fuerza respecto al eje giro que pasa por O (m).

$\vec{F}$  = Vector fuerza (N).

### 2.2.2 Relación entre Torque y Momento de Inercia

Si sobre un cuerpo rígido restringido a girar sobre un eje fijo que pasa por un punto  $O$ , actúan un sistema de fuerzas haciendo que adquiera una velocidad y aceleración angular, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\sum \vec{\tau}_O = J_O \vec{\alpha} \quad (2.6)$$

Donde:

$\sum \vec{\tau}_O$  = Vector suma de torques de fuerzas con respecto al eje de giro que pasa por el punto  $O$ .

$J_O$  = Momento de Inercia con respecto al eje de giro que pasa por el punto  $O$ .

$\vec{\alpha}$  = Vector aceleración angular del cuerpo rígido ( $\text{rad/s}^2$ ).

## 2.3 Engranajes

En muchos diseños, se hace necesaria la transmisión de movimiento de rotación entre dos ejes, y a menudo se quiere que la relación entre las velocidades angulares de estos se mantenga constante. Para conseguirlo, se utilizan ruedas de fricción, correas,

cadenas o engranajes. Los engranajes son ruedas dentadas cilíndricas, que se usan para transmitir movimiento y potencia desde un eje hasta otro.

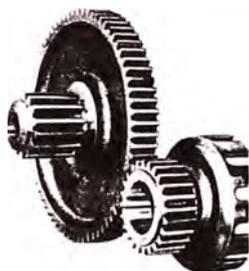
La transmisión de rotación de un eje a otro es necesaria por ejemplo:

- o Para la adecuación de velocidad, entre un motor y las características rotativas de la carga.
- o La aguja horaria de un reloj mecánico ha de girar a una velocidad angular 1/60 respecto a la correspondiente minutera.

### 2.3.1 Tipos de Engranajes

#### a. Engranajes Rectos (Cilíndricos)

Son ruedas dentadas cuyos elementos de diente son rectos paralelos al eje de rotación correspondiente; se emplean para transmitir el movimiento y la potencia entre dos ejes paralelos. Generalmente al más pequeño de dos engranajes apareados se les llama piñón y al mayor de estos se le llama engrane (ver figura 2.5). En la mayor parte de aplicaciones, el piñón es el elemento motriz y el engrane es el elemento impulsado.



**Figura 2.5** Engranajes rectos (fuente [3]).

La dinámica de los engranajes (piñón y engrane), cumplen con las siguientes ecuaciones [3].

- o Relación de velocidades

$$n = \frac{\omega_P}{\omega_G} = \frac{R_P}{R_G} \quad (2.7)$$

- o Relación Torque y potencia de engranaje

$$\tau_{eng P,G} = \frac{P_{P,G}}{\omega_{P,G}} \quad (2.8)$$

Donde:

$n$  = relación de velocidades entre engranajes piñón y engrane.

$\omega_{P,G}$  = Velocidad angular de los engranajes piñón y engrane (rad/s).

$R_{P,G}$  = Radio de los engranajes piñón y engrane (m).

$\tau_{eng P,G}$  = Torque ejecutado por los engranajes, piñón y engrane (Nm).

$P_{P,G}$  = Potencia desarrollada por los engranajes piñón y engrane (Nm/s).

**b. Engranajes Helicoidales**

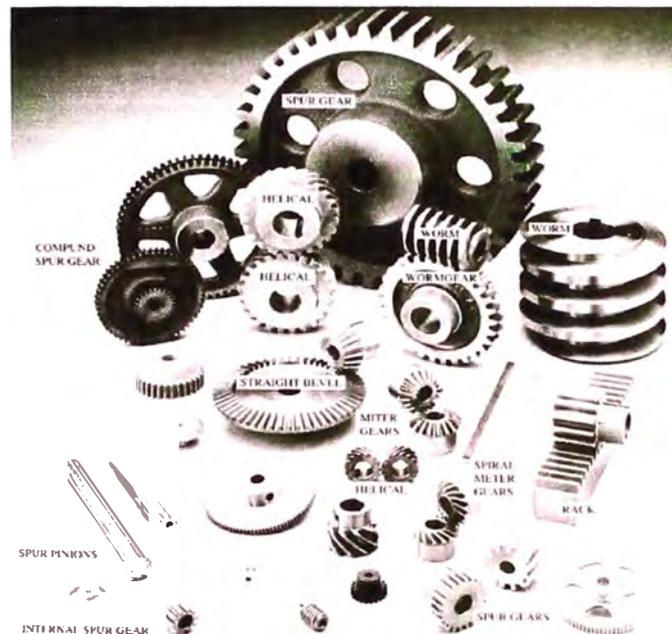
Estos tienen los dientes tallados en forma de una hélice. Estos engranajes se pueden usar para conectar ejes paralelos y no paralelos, se muestran en la figura 2.6.

**c. Engranajes Cónicos**

Se usan generalmente para conectar ejes que se cortan (Ver figura 2.6).

**d. Engranajes con tornillo sin fin**

Se utilizan ampliamente para transmitir potencia con altas relaciones de velocidades, entre ejes que no se cortan los cuales usualmente (pero no necesariamente) forman un ángulo recto. Consta de un tornillo sin fin acoplado a un engranaje denominado a veces rueda dentada de tornillo sin fin, como se muestra en la figura.2.6.



**Figura 2.6** Tipos de engranajes (fuente [3]).

**2.3.2 Perdidas por Rozamiento**

En engranajes rectos, helicoidales y cónicos las pérdidas por rozamiento generalmente son tan pequeñas que se puede considerar que estos engranajes operan con una eficiencia del 100% [4]. Los tornillos sin fin y los engranajes de tornillo sin fin, no son tan eficientes como los engranajes rectos, helicoidales y los cónicos [4].

**2.4 Esfuerzos en los Materiales**

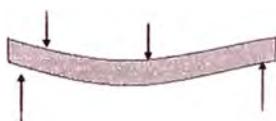
Esfuerzo es la resistencia que ofrece un área de material o sólido a una carga (fuerza) externa aplicada al material. Todo material o sólido que forma parte de un sistema mecánico está sujeto a esfuerzos, como:

Tracción o tensión: Se llama esfuerzo de tracción a toda carga o fuerza que tiende a alargar el objeto sobre el que actúa.

Compresión: Se llama esfuerzo de compresión a toda carga o fuerza que al actuar sobre un cuerpo sólido tiende a comprimirlo.

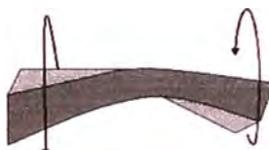
Cortadura: Se llama esfuerzo de cortadura a un par de fuerzas que al actuar sobre un cuerpo sólido tienden a cortarlo en dos mitades.

Flexión: un elemento está sometido a flexión cuando sobre él actúan una o más fuerzas que tratan de curvarlo. Actúan al mismo tiempo el esfuerzo de tracción y compresión.



**Figura 2.7** Esfuerzo y deformación por flexión

Torsión: se llama esfuerzo de torsión a un par de fuerzas que al actuar sobre un cuerpo sólido tienden a retorcerlo.



**Figura 2.8** Esfuerzo y deformación por torsión

Existen muchos factores que afectan la seguridad de sistemas mecánicos, se busca un diseño seguro en que el nivel de esfuerzo al que está sometido el componente de una máquina debe ser seguro, bajo condiciones previsiblemente razonables, es decir que nada se rompa o nada se deforme demasiado que puede comprometer la seguridad de estos [5].

En el presente informe se toma en cuenta solo una de las posibles fallas de sistemas mecánicos (velocidad crítica de flexión), que permite tener un rango de valores que se usa en el diseño de robot de un grado de libertad. Los demás tipos de esfuerzos son considerados despreciables.

#### **2.4.1 Velocidad crítica de ejes de rotación.**

Eje: Un eje es un componente de dispositivos mecánicos, que transmite movimiento rotatorio y potencia. Es parte de cualquier sistema mecánico donde la potencia se transmite desde un motor eléctrico a otras partes giratorias del sistema.

También un eje suele sostener elementos que transmiten potencia, como los engranajes, poleas para bandas transportadoras, etc.

La deflexión estática causada por los pesos de los componentes instalados en el eje, puede causar una desviación del centro de masa con respecto al eje de rotación. En consecuencia a medida que se incrementa la velocidad angular del eje, la energía cinética de las masas que están fijas al eje, también se incrementa. Cuando la energía cinética llega a ser igual a la energía potencial del eje causada por la deflexión estática de las masas montadas, el eje empieza a vibrar violentamente. La velocidad angular a la cual ocurre este fenómeno se llama Velocidad crítica del eje, al igual que otros sistemas vibratorios las velocidades críticas altas (de amplitudes pequeñas) pueden ocurrir en algunos múltiplos de la frecuencia fundamental (velocidad crítica).

Al igualar la energía cinética debida a la rotación de las masas montadas en el eje y la energía potencial del eje flexionado, resulta la ecuación (2.9) que define la velocidad crítica del eje. Esta ecuación se llama ecuación de Rayleigh y su demostración se puede encontrar en [6].

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum m_i Y_i}{\sum m_i Y_i^2}} \quad (2.9)$$

Donde:

$m_i$  = Valor de la i-ésima masa montada sobre el eje (kg).

$Y_i$  = Valor de la deflexión estática en la punto de la i-ésima masa (m).

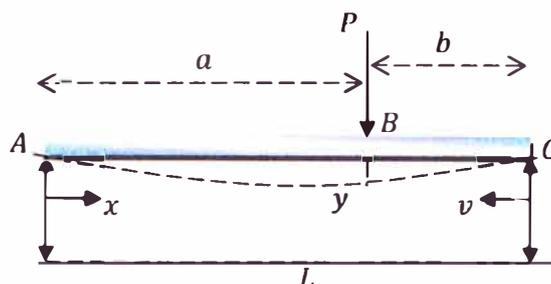
$g$  = Valor de la constante de gravedad (9.81 m/s<sup>2</sup>).

La ecuación (2.9), ignora el efecto del peso del eje y supone también que todos los pesos están concentrados. La ecuación no toma en cuenta el efecto de flexibilidad de los rodamientos o soportes. Esta flexibilidad adicional puede hacer en algunos casos que descienda el valor de la velocidad crítica por debajo del indicado por la ecuación (2.9).

Como una medida muy practica en la fabricación y ensamble se prevee que el centro de masa de un sistema rotatorio simétrico coincida con el centro real de rotación [7]. Mientras mayor sea la rigidez del material el valor de la velocidad crítica aumenta.

#### 2.4.2 Cálculo de la deflexión o desviación estática del eje:

Sea el sólido mostrado en la figura 2.9, en la cual los puntos A y C son de apoyo. La deflexión del solido entre los segmentos AB y BC debido a la fuerza P se muestra a continuación:



**Figura 2.9** Fuerza aplicada en el punto B del eje AC, A y C son puntos de apoyo.

Entre A y B la deflexión estática es:

$$y = \frac{-Pbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2) \quad (2.10)$$

Entre B y C la deflexión estática es:

$$y = \frac{-Pav}{6EIL} (L^2 - v^2 - a^2) \quad (2.11)$$

Donde:

$P$  = Valor de fuerza aplicada en el punto B (N).

$E$  = Modulo de elasticidad del material del eje ( $\text{N/m}^2$ ).

$I$  = Momento de Inercia de area ( $\text{m}^4$ ).

$x, y, b, v, a, L$  = Distancias (m).

Si el eje soporta más de dos cargas, la deflexión en un punto es igual a la suma de deflexiones en ese mismo punto debido a todas las cargas.

El momento de Inercia de área de un eje de radio  $r_1$  es igual a  $\pi r_1^4/4$ .

## 2.5 Fricción

La fricción es un fenómeno no lineal complicado en el cual se produce una fuerza o par que tiende a oponerse al movimiento en un sistema mecánico. El movimiento entre los cuerpos en contacto causa disipación de energía del sistema. El grado de disipación depende de las superficies de los materiales (rugosas, lisos, la lubricación aplicada). La fricción no puede ser eliminada, la idea es tratar de compensarla dependiendo de cada aplicación. Para poder compensar es necesario entender y tener modelos del proceso de fricción.

### 2.5.1 Fricción estática y fricción de coulomb

El par de fricción estática, es aquel que se opone al movimiento de rotación del sistema cuando la velocidad es cero. No se produce movimiento sin antes vencer dicho

par. Por lo tanto el par de fricción estática depende del par aplicado y no de la velocidad. La fricción de coulomb por el contrario es el par constante que se opone al movimiento a velocidades distintas de cero. El modelo matemático que representa el par de fricción estática y de coulomb es el siguiente, si se aplica un torque  $\tau$  a un cuerpo.

$$\tau_f = \begin{cases} \tau_E & , \quad \text{si } \dot{\theta} = 0 \text{ y } |\tau| < \tau_E \\ \tau_E \text{sgn}(\tau) & , \quad \text{si } \dot{\theta} = 0 \text{ y } |\tau| \geq \tau_E \\ \tau_C \text{sgn}(\dot{\theta}) & , \quad \text{si } \dot{\theta} \neq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Donde:

$\tau_f$  Es el torque de fricción,  $\tau_E$  y  $\tau_C$  representan el par de fricción estática y de Coulomb, respectivamente,  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular del cuerpo y  $\text{sgn}(\dot{\theta})$  es la función signo.

### 2.5.2 Fricción viscosa

Cuando empieza el movimiento entre dos cuerpos, el torque de fricción estática desaparece y el torque de fricción se puede modelar proporcional a la velocidad relativa.

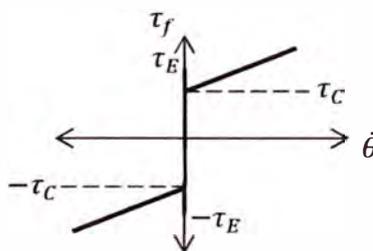
$$\tau_v = B\dot{\theta} \quad (2.13)$$

Un modelo que contenga la fricción estática, la fricción de coulomb y la fricción viscosa es mostrado en la figura 2.10, cuya curva tiene como función a la ecuación:

$$\tau_f = \begin{cases} \tau_E & , \quad \text{si } \dot{\theta} = 0 \text{ y } |\tau| < \tau_E \\ \tau_E \text{sgn}(\tau) & , \quad \text{si } \dot{\theta} = 0 \text{ y } |\tau| \geq \tau_E \\ \tau_C \text{sgn}(\dot{\theta}) + B\dot{\theta} & , \quad \text{si } \dot{\theta} \neq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Donde:

$\tau_f$  es el torque de fricción,  $\tau_E$  y  $\tau_C$  representan el par de fricción estática y de Coulomb, respectivamente y  $B$  es el coeficiente de viscosidad (Nm/rad/seg).



**Figura 2.10** Modelo de fricción estática+coulomb+viscosa

## 2.6 Cojinetes

El propósito de un cojinete es el de proporcionar una posición relativa y libertad de rotación entre un eje y una superficie de apoyo. Tipos de cojinetes:

### 2.6.1 Cojinetes de Deslizamiento

Un cojinete de deslizamiento es aquel en el que el eje y la superficie de apoyo, entran en contacto directo, realizándose un deslizamiento con fricción. Estos cojinetes tienen un agujero en la superficie de apoyo, el cual permite crear una película fluida (lubricantes como aceite, grasa) que impida en lo posible el contacto directo de las superficies móviles. Estos tipos de cojinetes solo se utilizan para pequeñas cargas y trabajos de poca responsabilidad.

### 2.6.2 Cojinetes de contacto por rodadura

Si se van a transmitir cargas entre superficies en movimiento relativo en una máquina, la acción se facilita de forma más efectiva, si se interponen elementos rodantes entre los miembros en deslizamiento. De esta forma la resistencia de fricción que se opone al deslizamiento, se reemplaza en gran medida por la resistencia mucho más pequeña que se asocia con el rodamiento [3], [7].

Ventajas:

- El rozamiento inicial en el arranque no es mucho mayor que en funcionamiento normal (condiciones de trabajo), esta propiedad hace que los cojinetes por contacto por rodadura sean particularmente adecuados para máquinas que arrancan y paran frecuentemente.
- Requieren poco lubricante y poca conservación.
- Son mas silenciosos.

Desventajas:

- Necesitan mayor espacio diametral para ejes de gran grosor.
- Son costosos
- Tiene duración limitada debido a falla eventual por fatiga.
- Menor capacidad para resistir choques.

## 2.7 Motor de corriente directa DC

Es un mecanismo que convierte la energía eléctrica en energía mecánica, la energía eléctrica es proporcionada por una fuente de tensión continua.

### 2.7.1 Características generales de motor DC

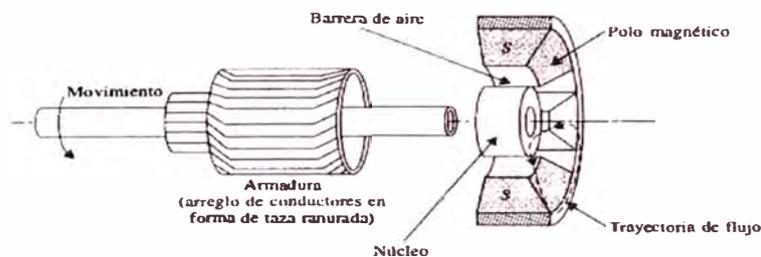
La dirección de rotación es reversible, al cambiar la polaridad del voltaje aplicado.

Se puede controlar el par torsional al variar la corriente aplicada al motor.

- Tienen respuesta rápida, acelerando con rapidez cuando cambia el voltaje, debido a que el diámetro del rotor es pequeño y permite tener una alta relación de Par torsional a inercia.
- La velocidad es variable, debido al cambio del voltaje aplicado al motor.

### 2.7.2 Motor DC de Imán Permanente

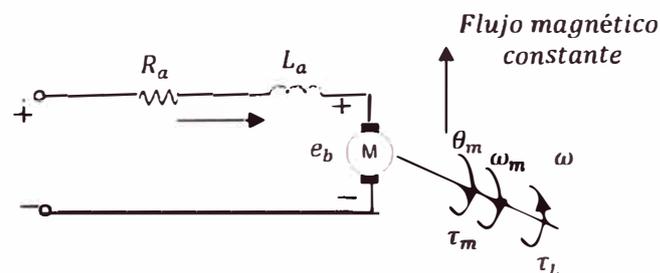
El motor DC de imán permanente mostrado en la figura 2.11 usa imanes para producir campo magnético en la armadura, la corriente directa pasa por la armadura, como se muestra en la figura 2.12. El campo es casi siempre constante, y da como resultado una curva lineal de velocidad/par torsional. También la corriente tomada varía linealmente con el par torsional. Debido a estos factores estos motores son usados en sistemas de control.



**Figura 2.11** Corte lateral de sección transversal de motor DC de imán permanente (fuente [8]).

### 2.7.3 Modelo matemático de motor DC de Imán Permanente

La armadura se representa de forma equivalente, como un circuito con resistencia  $R_a$  conectada en serie a una inductancia  $L_a$  y a una tensión  $e_b$ , que representa el voltaje contraelectromotriz en la armadura cuando el rotor gira. El circuito equivalente del motor DC de imán permanente se representa en la figura 2.12.



**Figura 2.12** Modelo circuital de un motor DC imán permanente.

Donde las variables y parámetros de motor son:

$I$  = Corriente de armadura (A).

$R_a$  = Resistencia de armadura (ohm).

$e_b$  = Fuerza contraelectromotriz (V).

$\tau_m$  = Torque del motor (Nm).

$\theta_m$  = Desplazamiento angular del eje (rad).

$\omega_m$  = Velocidad angular del eje (rad/s).

$L_a$  = Inductancia de la armadura (H).

$V_a$  = Voltaje aplicado en la armadura (V).

$K_b$  = Constante de fuerza contraelectromotriz (V/rad/s).

$J_m$  = Inercia del motor (kgm<sup>2</sup>).

$K_m$  = Constante de torque de motor (Nm/A).

$b_m$  = Coeficiente de fricción viscosa Nm/rad/s.

Al aplicar un voltaje  $V_a$ , al circuito de armadura, se genera una corriente  $I$ , esta corriente y el flujo magnético del imán generan un torque  $\tau_m$ . Este par produce velocidad  $\omega_m$  y desplazamiento angular  $\theta_m$  las siguientes ecuaciones describen la dinámica del motor DC de imán permanente:

$$V_a = IR_a + L_a \frac{dI}{dt} + e_b \quad (2. 15)$$

El torque del motor, es proporcional a la corriente en el circuito de armadura:

$$\tau_m = K_m I \quad (2. 16)$$

La tensión contraelectromotriz, es proporcional a la velocidad angular del rotor:

$$e_b = K_b \omega_m \quad (2. 17)$$

#### 2.7.4 Limite de corriente:

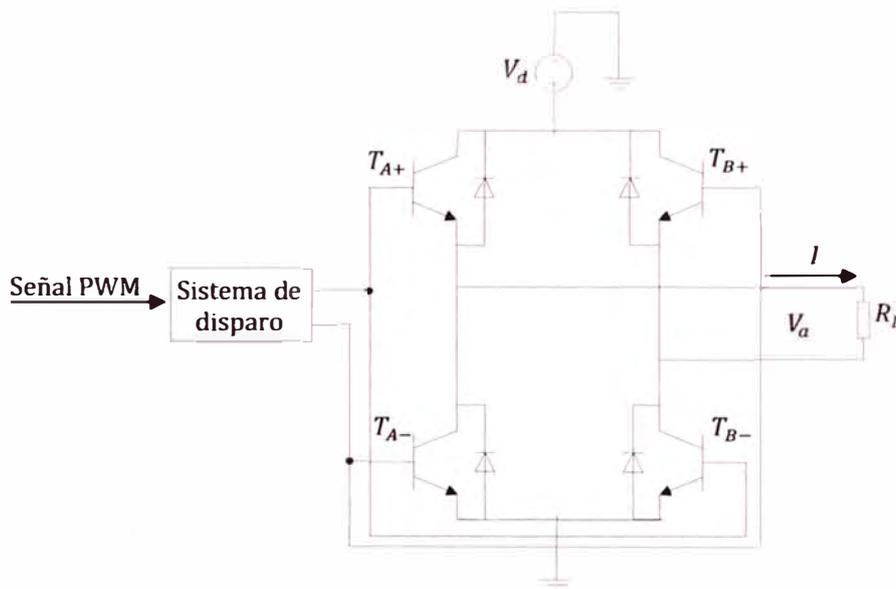
En la mayoría de las aplicaciones prácticas una respuesta muy rápida a un repentino cambio de posición requeriría un par de torsión pico grande, lo que produciría una corriente pico grande que podría dañar el aislamiento del motor DC. Estos valores de corriente se pueden limitar con protección del tipo eléctrica (relé térmico). La señal de control es limitada a valores talque la señal de alimentación no sobrepase el voltaje nominal del motor. La señal de control es limitada por software.

### 2.8 Convertidor de electrónica de potencia (CC-CC)

El convertidor de electrónica de potencia ofrece un voltaje controlado al motor, a fin de controlar la corriente del motor y por ende el par de torsión electromagnético producido por el motor.

### 2.8.1 Amplificador de potencia tipo puente H:

Es un convertidor de CC-CC de puente completo. La entrada al amplificador que se muestra en la figura 2.13 es un voltaje DC de magnitud fija  $V_d$ . La salida del amplificador, es un voltaje cuyo valor medio es  $V_a$  que se controla en magnitud y polaridad. Asimismo se controlan la magnitud y el sentido de la corriente de salida  $I$ . Por lo tanto el amplificador de potencia tipo puente H, opera en los cuatro cuadrantes ( $V_a$  vs  $I$ ). Los diodos conectados en configuración antiparalelo (figura 2.13), sirven de protección a los interruptores ante una corriente inversa.



**Figura 2.13** Amplificador de potencia tipo puente H

El amplificador consiste en dos divisiones A y B (cada división de dos interruptores). En este informe se considera la conmutación de los interruptores de forma instantánea. Se desprecia el tiempo muerto, que se da cuando se conmutan los interruptores de una misma división. (Este tiempo muerto es importante ya que si no se toma en cuenta ambos interruptores, en un punto de operación estarían activos y ocasionarían un corto circuito en la entrada).

#### a. PWM con conmutación de voltaje Bipolar

En la figura 2.13, ( $T_{A+}, T_{B-}$ ) y ( $T_{A-}, T_{B+}$ ) se tratan como dos pares de interruptores, los interruptores se activan y desactivan en forma simultanea. La señal PWM es el resultado de la comparación de una onda triangular periódica de amplitud  $\hat{V}_{tri}$  y una señal de control  $u$ . La señal PWM para este tipo de amplificadores está en el rango de decenas de Khz.

**b. PWM con conmutación de voltaje Unipolar:**

Llamada también conmutación por PWM doble. Aquí los interruptores ( $T_{A+}, T_{B-}$ ) y ( $T_{A-}, T_{B+}$ ) se controlan de manera independiente. Las señales PWM son el resultado de la comparación, de una onda triangular periódica de amplitud  $\hat{V}_{tri}$  y señales de control  $u + y u -$  .respectivamente. Estas señales PWM permiten conmutar a los interruptores ( $T_{A+}, T_{B-}$ ) y ( $T_{A-}, T_{B+}$ ).

El promedio de voltaje de salida en este esquema de conmutación es:

$$V_a = \frac{V_d}{\hat{V}_{tri}} u = K_a u ; u \leq \hat{V}_{tri} \quad (2.18)$$

Donde:

$V_a$  = Voltaje de salida del amplificador tipo puente H (Vdc).

$V_d$  = Voltaje de entrada al amplificador tipo puente H (Vdc).

$u$  = Señal de control (Vdc).

$\hat{V}_{tri}$  = Voltaje pico señal triangular periódica.

$K_a$  = Constante de amplificación amplificador tipo puente H.

La ecuación (2.18) muestra que el voltaje medio de salida  $V_a$  varía en forma lineal según la señal de control de entrada  $u$ . El presente informe considera PWM con conmutación de voltaje unipolar para el puente H.

La ventaja de usar PWM con conmutación voltaje unipolar, es debido a que genera una mejor forma de onda de salida casi continua y el rizado de la corriente disminuye.

## 2.9 Transductores de posición

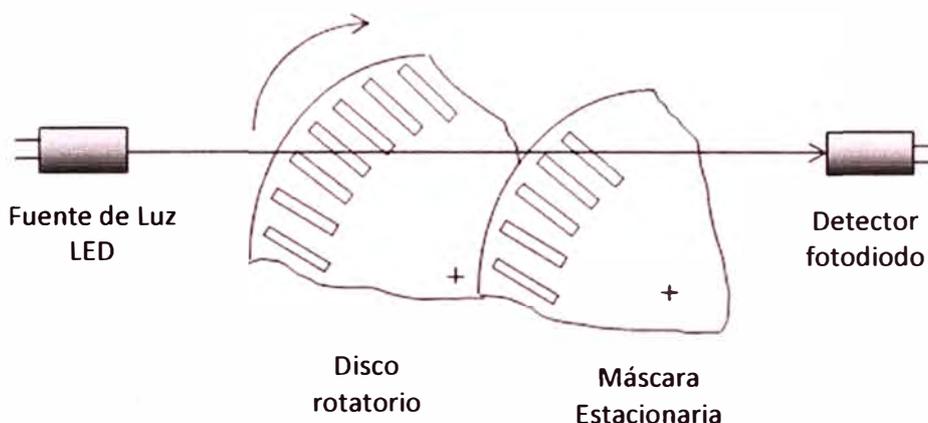
El transductor de posición es un componente empleado para supervisar el desempeño y la realimentación del sistema de control. Existen diferentes sensores de posición y velocidad angular para motores tales como: Tacómetro, resolver, codificador, etc.

### 2.9.1 Codificador (encoder)

El codificador es un transductor fotoeléctrico rotativo, que transforma un movimiento angular en una serie de pulsos digitales. Estos pulsos generados se pueden utilizar para controlar los desplazamientos de tipo angular o tipo línea, si se asocian a cremalleras o husillos. Las aplicaciones principales de estos transductores por ejemplo están en motores, robots en la parte de medición y control. Existen dos tipos de codificadores, absolutos e incrementales. Los codificadores absolutos producen como

respuesta un código digital distinto, que indica cada incremento menos significativo de resolución. Por otro lado, los codificadores incrementales proveen un pulso por cada incremento de resolución, pero no hace distinción entre dichos incrementos. La selección de un tipo de codificadores depende de objetivos económicos y de control. El uso de codificadores absolutos tiene que ver con la idea de no perder datos durante una falla, es decir las aplicaciones, que involucren periodos de movimiento mecánico que no son productivos.

Un codificador rotativo típico tiene cuatro partes básicas: Una fuente de luz, un disco girando, una máscara estacionaria y un detector como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 2.14** Partes de un codificador rotativo.

## 2.10 Algoritmo de simulación del proceso - Runge Kutta Orden 4

El modelamiento matemático de la dinámica del posicionamiento del robot de un grado de libertad, conlleva a sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, que por su dificultad son resueltas mediante métodos numéricos.

Esta solución permite simular el proceso para algún valor en la señal de entrada (tensión de alimentación del motor DC).

Se elige el algoritmo de Runge Kutta de orden 4, para la simulación del proceso debido a que el error de solución, es menor comparado con otros métodos (Euler, Runge Kutta orden 2).

El algoritmo de solución para un sistema de ecuaciones diferenciales, se muestra a continuación:

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales donde  $t$  es la variable independiente.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_p) = f(t, \mathbf{x}) \\ &\vdots \\ \dot{x}_p(t) &= f_p(t, x_1, x_2, \dots, x_p) = f_p(t, \mathbf{x})\end{aligned}$$

Con condiciones iniciales:

$$x_1^{(0)} = \alpha_1; x_2^{(0)} = \alpha_2 \dots x_p^{(0)} = \alpha_p$$

Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales por métodos numéricos, considerando un paso  $h$  pequeño, el método Runge-Kutta de cuarto orden plantea la solución en forma recursiva como:

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} + \frac{1}{6}[\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4] \quad (2.19)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= hf(t_j, \mathbf{x}^{(j)}) \\ \mathbf{K}_2 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, \mathbf{x}^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1\right) \\ \mathbf{K}_3 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, \mathbf{x}^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{K}_2\right) \\ \mathbf{K}_4 &= hf(t_j + h, \mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{K}_3) \\ i &= 1, \dots, p\end{aligned} \quad (2.20)$$

## CAPITULO III

### SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO

#### 3.1 Introducción

En las últimas décadas se ha incrementado el uso de controladores digitales, en sistemas de control ya que éstos tienen un desempeño óptimo, por ejemplo permiten implantar sistemas de control de mayores prestaciones (redes neuronales, lógica difusa, identificación de parámetros), que las obtenidas en control analógico a un menor precio.

En los controladores digitales también se implementan algoritmos basados en técnicas de control convencional, con ventaja de que en estos se tiene capacidad en toma de decisiones y flexibilidad en los programas de control. Algunas técnicas de sistemas de control digital basados en control analógico son: PID digital, control óptimo, control no lineal, control adaptivo, control predictivo.

Ventajas de control digital frente a control continuo son:

El control por computador (digital) es mucho más versátil que el control analógico. El programa que se realiza en un determinado controlador (computador), puede modificarse con facilidad sin necesidad de efectuar cambios en el hardware y se puede implementar cualquier tipo de ley de control, permitiendo controles adaptivos, no lineales, predictivos de cualquier proceso por muy complejo que parezca.

Los controladores digitales realizan cálculos complejos, con exactitud constante a alta velocidad, se puede aumentar el grado de exactitud con un incremento relativo del costo.

Los componentes digitales (procesadores, circuitos integrados, transductores, codificadores, dispositivos electrónicos digitales, etc.), son más confiables y robustos que los componentes analógicos. Además son menos susceptibles al envejeciendo y a los cambios de las condiciones ambientales.

Los componentes digitales son menos sensibles, al ruido y a las perturbaciones y proporcionan una mejor sensibilidad ante la variación de los parámetros.

Desventajas

- Los controles digitales tienen limitaciones en la velocidad de cálculo, lo cual provoca retrasos en el lazo de control que pueden llegar a provocar inestabilidad en el sistema en lazo cerrado, esto es debido a la velocidad de cálculo del procesador. Los sistemas analógicos trabajan en tiempo real.
- Los controles digitales tienen limitaciones en la resolución, como máximo es igual a la longitud de la palabra del procesador, el cual puede traer inestabilidad en el sistema. Los controladores analógicos tienen resolución infinita teóricamente.

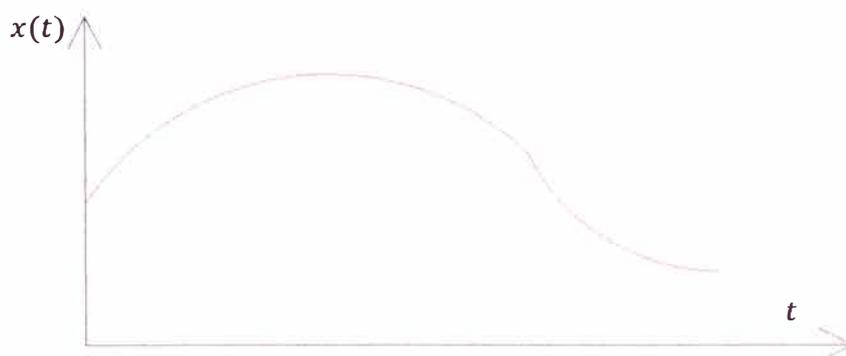
## 3.2 Marco teórico de sistemas discretos

### 3.2.1 Tipos de señales

Las señales utilizadas en el análisis de los sistemas de control en tiempo discreto se detallan a continuación:

#### a. Señal analógica o señal en tiempo continuo:

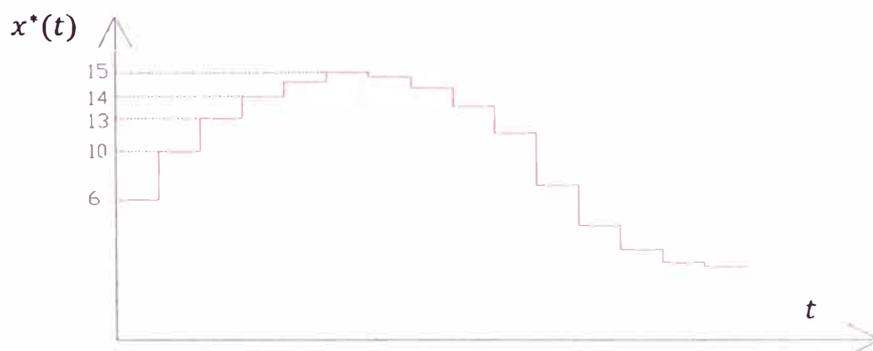
Es una señal que está definida en un intervalo de tiempo continuo y puede tomar un intervalo continuo de valores.



**Figura 3.1** Señal analógica en tiempo continuo.

#### b. Señal cuantificada en tiempo continuo

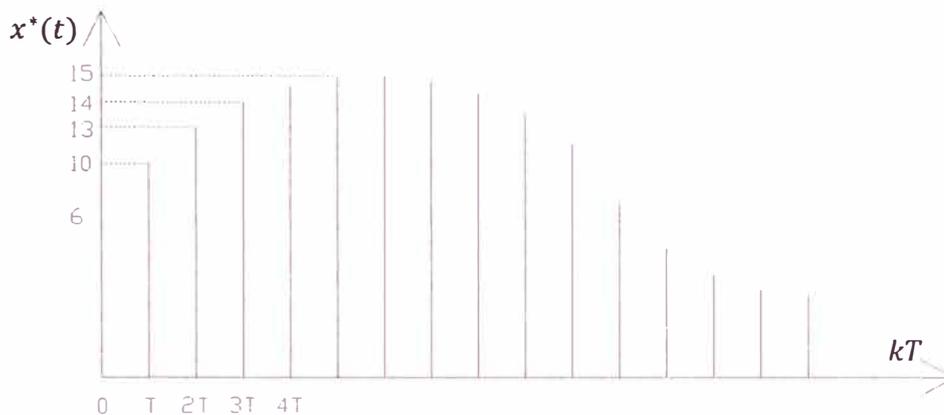
Es una señal que está definida en tiempo continuo con un número finito de valores cuantificados en tiempo discreto.



**Figura 3.2** Señal cuantificada en tiempo continuo.

### c. Señal de datos muestreados

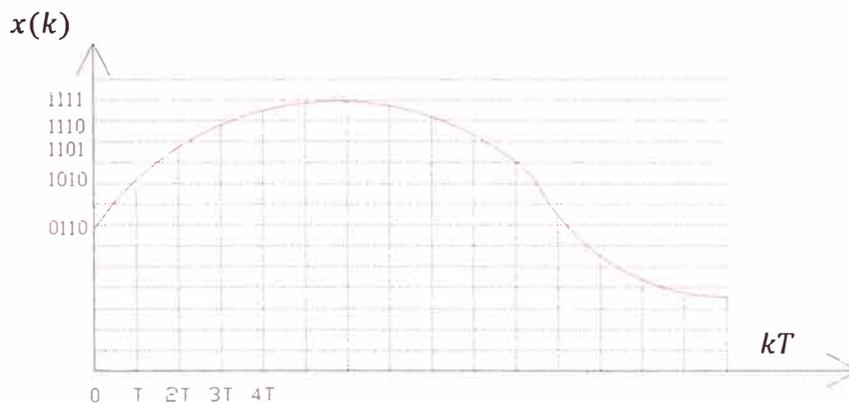
Es una señal definida en tiempo discreto, que puede tomar un número infinito de valores distintos. Esta señal se puede generar muestreando una señal analógica en valores discretos en tiempo.



**Figura 3.3** Señal de datos muestreados en tiempo discreto

### d. Señal digital

Es una señal en tiempo discreto que solo puede tomar un conjunto discreto de valores, es decir su valor está cuantificado, tanto en tiempo como en la amplitud y se puede representar mediante una secuencia de números normalmente en el sistema binario.



**Figura 3.4** Señal digital

El uso de control por computador requiere la utilización de señales digitales, que son señales cuantificadas tanto en amplitud como en el tiempo.

#### 3.2.2 Muestreo y Retenedor:

Este término describe un circuito que recibe como entrada una señal analógica y mantiene dicha señal en un valor constante durante un tiempo específico. En el presente informe se usará el muestreo periódico.

**a. Convertidor analógico-digital(A/D)**

Es un dispositivo que convierte una señal analógica en una señal digital, usualmente una señal codificada numéricamente.

**b. Convertidor digital-analógico (D/A)**

Es un dispositivo que convierte una señal digital (datos codificados numéricamente) en una señal analógica. Dicho dispositivo es necesario como interfaz entre un componente digital y uno analógico.

**c. Planta o proceso**

Una planta es cualquier objeto físico a ser controlado, por ejemplo un conjunto de partes de maquinaria que funcionan de manera conjunta para llevar a cabo una operación particular.

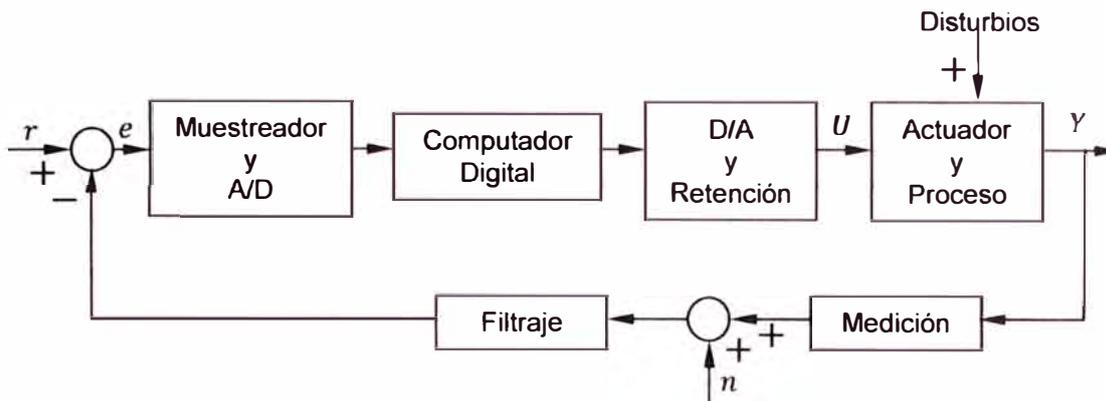
La parte más difícil en el diseño de sistemas de control puede situarse en el modelado preciso de una planta o proceso físico.

**d. Retenedor de Orden Cero**

El retenedor de orden cero permite construir señales continuas a partir de muestras. Este retenedor mantiene constante el último valor discreto hasta la llegada del siguiente valor discreto. El tiempo entre valores discretos es conocido como periodo de muestras.

### **3.2.3 Diseño de sistemas de control digital**

La figura 3.5 muestra la estructura de un sistema de control digital, cuyo objetivo de control es lograr que la señal de salida  $Y$  del proceso (de carácter continuo, como es en la mayoría de casos) siga a la señal de referencia  $r$ , cumpliendo determinadas especificaciones de diseño, tales como: mínimo tiempo de estabilización, mínimo sobre impulso y/o error en estado estacionario nulo (en  $Y$ ). En otras palabras, el algoritmo de control implementado, en este caso digitalmente, debe ser capaz de crear una señal de control  $U$  (la variable manipulada), la cual actuando sobre el proceso a través de un actuador, minimice la señal de error  $e$ . El bloque de filtraje es útil para eliminar las componentes contaminantes de alta frecuencia de la señal de ruido de medición  $n$ . El filtro de ruido puede ser analógico o digital y su inclusión depende de la magnitud del ruido y su relevancia dentro del funcionamiento del sistema de control.



**Figura 3.5** Estructura de sistema de control Digital.

En la estructura de control descrita en el párrafo anterior, el algoritmo de control se implementa en un dispositivo digital que puede ser un computador personal, un computador de procesos (con capacidad para manejar varios lazos de control), un microcontrolador o una tarjeta PDS (Procesamiento Digital de Señales).

El procesamiento digital del algoritmo de control requiere de la presencia de dispositivos de adquisición de datos: muestreadores, conversores de señal A/D (analógico a digital) y D/A (digital a analógico) y retenedores (reconstructores) de señal.

La configuración mostrada en la figura 3.5 no es única. Por ejemplo, dado el caso, la señal de referencia y la comparación de señales pueden ser generadas dentro del computador digital. En otros casos, si el actuador y los dispositivos de medición son capaces de procesar señales digitales, entonces tales dispositivos pueden actuar directamente sobre el proceso, dando lugar a nuevas configuraciones.

### 3.2.4 Sistemas de control en el espacio estado continuo

#### a. Estado y Variables de Estado continuo

La dinámica de un proceso multivariable (proceso que posee múltiples entradas y múltiples salidas), puede ser representada en el espacio de estado mediante dos conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, denominadas ecuaciones de estado y de salida respectivamente:

$$\dot{X} = f(X, U, v, t) \quad (3.1)$$

$$Y = g(X, U, w, t) \quad (3.2)$$

Donde:

$f$  : Función vectorial de orden  $nx1$

$g$  : Función vectorial de orden  $mx1$

- $X$  : Vector de estados de orden  $nx1$   
 $U$  : Vector Señal de control  $rx1$   
 $Y$  : Vector Señal de salida  $mx1$   
 $v$  : Vector de disturbios en los estados  $nx1$   
 $w$  : Vector de disturbios en las salidas  $mx1$

El tiempo  $t$  se incluye como parte del argumento para indicar que pueden existir parámetros variantes con el tiempo. De las ecuaciones anteriores se definen:

**Estado**, el estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables llamadas variables de estado, tales que el conocimiento de dichas variables en  $t = t_0$ , junto con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$ , determinan por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ .

**Variables de estado**, son las que conforman el conjunto mínimo de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Para describir en su totalidad el comportamiento de un sistema dinámico se requiere de por lo menos  $n$  variables  $X_1 X_2 X_3 \dots X_n$ , Las variables de estado no necesitan ser físicamente cantidades medibles. Sin embargo, en la práctica, lo conveniente es seleccionar cantidades fácilmente medibles como variables de estado.

**Vector de estado**, si  $n$  variables de estado son necesarias para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces estas  $n$  variables de estado se pueden considerar como las  $n$  componentes de un vector de estado  $X = (X_1 X_2 X_3 \dots X_n)^T$ .

#### b. Linealización de Procesos

Sea un sistema no lineal y variante en el tiempo, sin la presencia de disturbios es decir ( $v = w = 0$ ) en las ecuaciones (3.1) y (3.2), por lo que las ecuaciones de estado y salida son:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \quad (3.3)$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t), t) \quad (3.4)$$

Y cuya condición inicial de estado en  $t_0$  es:

$$X(t_0) = X_0 \quad (3.5)$$

Donde:

- $f$  : Función vectorial de orden  $nx1$   
 $g$  : Función vectorial de orden  $mx1$   
 $X$  : Vector de estados de orden  $nx1$   
 $U$  : Vector Señal de control  $rx1$

$Y$  : Vector Señal de salida  $m \times 1$

### b.1. Valores nominales o puntos de equilibrio

Se definen valores nominales o puntos de equilibrio como  $\bar{U}, \bar{X}, \bar{Y}$  los cuales representan el vector de control, vector de estado y vector de salida respectivamente. El punto de equilibrio en el espacio de estado, se determinan cuando no hay variación de los estados debido a la señal de entrada  $\bar{U}$ , es decir:

$$\dot{\bar{X}}(t) = f(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) = 0; \quad \bar{X}(t_0) = \bar{X}_0 \quad (3.6)$$

### b.2. Variables residuales

Las señales de control y estado inicial cercanas a los valores nominales o puntos de equilibrio ( $\bar{U}(t), \bar{X}_0$ ) están determinadas por las siguientes ecuaciones:

$$U(t) = \bar{U}(t) + \delta U(t)$$

$$X_0 = \bar{X}_0 + \delta X_0$$

Donde  $\delta U(t)$  y  $\delta X_0$ , son pequeñas variaciones de la señal de entrada y estado inicial en equilibrio.

Debido a las pequeñas variaciones en la señal de entrada y estado inicial de equilibrio, se generan también pequeñas variaciones en el vector estado y el vector de salida:

$$X(t) = \bar{X}(t) + \delta X(t)$$

$$Y(t) = \bar{Y}(t) + \delta Y(t)$$

Donde  $\delta X(t)$  y  $\delta Y(t)$  son variaciones del vector estado y salida respectivamente para cada  $t \geq t_0$ .

Por comodidad se hacen los siguientes cambios de variables:

$$\delta U(t) = u(t)$$

$$\delta X_0 = x_0$$

$$\delta X(t) = x(t)$$

$$\delta Y(t) = y(t)$$

Con el cambio de variables se tienen las siguientes ecuaciones:

$$U(t) = \bar{U}(t) + u(t) \quad (3.7)$$

$$X_0 = \bar{X}_0 + x_0 \quad (3.8)$$

$$X(t) = \bar{X}(t) + x(t) \quad (3.9)$$

$$Y(t) = \bar{Y}(t) + y(t) \quad (3.10)$$

Donde las variaciones  $u(t)$ ,  $x_0$ ,  $x(t)$  y  $y(t)$ , son las variables residuales de la señal de entrada, estado inicial de equilibrio, vector de estado y vector de salida respectivamente.

Reemplazando las ecuaciones (3.7) y (3.9) en la ecuación (3.3) se obtiene:

$$\dot{\bar{X}}(t) + \dot{x}(t) = f(\bar{X}(t) + x(t), \bar{U}(t) + u(t), t) \quad (3.11)$$

Aproximando la parte derecha de la ecuación (3.11), al polinomio de Taylor en el punto de equilibrio  $\bar{U}, \bar{X}$ . y considerando derivadas parciales de primer orden, se cumple la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} & f(\bar{X}(t) + x(t), \bar{U}(t) + u(t), t) \\ \approx & f(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial X}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)x(t) + \frac{\partial f}{\partial U}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)u(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Igualando las ecuaciones (3.11) y (3.12). y considerando la ecuación (3.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}}(t) + \dot{x}(t) & \approx f(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial X}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)x(t) + \frac{\partial f}{\partial U}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)u(t) \\ \dot{x}(t) & = \frac{\partial f}{\partial X}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)x(t) + \frac{\partial f}{\partial U}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)u(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

De igual manera para el vector de salida  $Y(t)$ , se obtiene:

$$y(t) = \frac{\partial g}{\partial X}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)x(t) + \frac{\partial g}{\partial U}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)u(t) \quad (3.14)$$

Considerando para las ecuaciones (3.13) y (3.14) las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} A(t) & = \frac{\partial f}{\partial X}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) \quad ; \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial U}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) \\ C(t) & = \frac{\partial g}{\partial X}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) \quad ; \quad D(t) = \frac{\partial g}{\partial U}(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) \\ A(t) & = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \frac{\partial f_n}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{U}, t)} \quad ; \quad B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial U_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U_1} & \frac{\partial f_2}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial U_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial U_1} & \frac{\partial f_n}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial U_r} \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{U}, t)} \\ C(t) & = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial X_1} & \frac{\partial g_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial X_1} & \frac{\partial g_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial X_1} & \frac{\partial g_n}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{U}, t)} \quad ; \quad D(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial U_1} & \frac{\partial g_1}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial U_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial U_1} & \frac{\partial g_2}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial U_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial U_1} & \frac{\partial g_n}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial U_r} \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{U}, t)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por lo tanto la ecuación lineal alrededor del punto  $\bar{U}, \bar{X}, \bar{Y}$ , es representada por las ecuaciones de estado y salida de las variables residuales, la figura 3.6 muestra el diagrama de bloques del sistema residual.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.16)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (3.17)$$

Con las variables residuales:

$$y(t) = Y(t) - \bar{Y}(t) \quad (3.18)$$

$$x(t) = X(t) - \bar{X}(t) \quad (3.19)$$

$$u(t) = U(t) - \bar{U}(t) \quad (3.20)$$

$$x_0 = X_0 - \bar{X}_0 \quad (3.21)$$

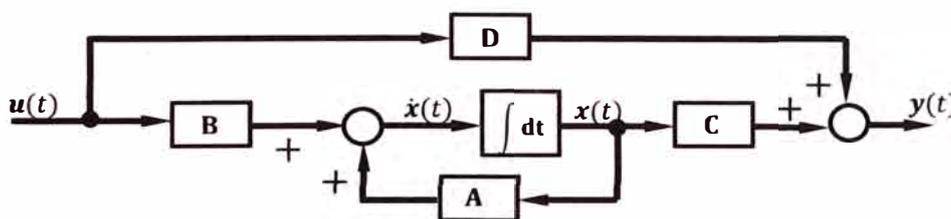
Donde

$A(t)$ =Matriz de estado de  $n \times n$ .

$B(t)$ =Matriz de entrada de  $n \times r$ .

$C(t)$ =Matriz de salida de  $m \times n$ .

$D(t)$ =Matriz de transmisión directa de  $m \times r$ .



**Figura 3.6** Diagrama de bloques de las ecuaciones residuales en tiempo continuo representado en el espacio de estado.

### c. Matriz de transferencia de procesos multivariables lineales

Se obtiene empleando la ecuación matricial siguiente:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (3.22)$$

Donde  $s$  es la variable laplaciana e  $I$  la matriz identidad.

### d. Ecuación característica

Se determina con la siguiente ecuación:

$$\det(sI - A) = 0 \quad (3.23)$$

Las raíces de la ecuación (3.23) son conocidas como: raíces características, eigenvalores o valores propios.

El proceso descrito por la ecuación (3.16) es estable, siempre que todos los eigenvalores de su ecuación característica (3.23), posean parte real negativa. Cuando al menos uno de tales eigenvalores posea parte real positiva o cero, entonces el proceso es inestable.

### 3.2.5 Estado y Variables de Estado discreto

Al igual que en variables de estado en tiempo continuo, la representación en el espacio de estados discreto de los sistemas de control, se basa en la descripción del sistema en términos de  $n$  ecuaciones en diferencias de primer orden, que se pueden combinar en una ecuación matricial en diferencias de primer orden.

La ecuación de estado para sistemas (no lineales o lineales) variantes en el tiempo perturbados.

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), v(k), k) \quad (3.24)$$

Y la correspondiente ecuación de salida:

$$y(k) = g(x(k), u(k), w(k), k) \quad (3.25)$$

Las ecuaciones de estado y salida para sistemas lineales en tiempo discreto y variantes en el tiempo, con perturbaciones son:

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) + E(k)v(k) \quad (3.26)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) + F(k)w(k) \quad (3.27)$$

Donde se define de las ecuaciones anteriores:

$x(k)$  = Vector de estado de  $nx1$ .

$y(k)$  = Vector de salida de  $mx1$ .

$u(k)$  = Vector de control de  $rx1$ .

$v(k)$  = Vector de perturbación de estado de  $sx1$ .

$w(k)$  = Vector de perturbación de salida de  $tx1$ .

$G(k)$  = Matriz de estado de  $nxn$ .

$H(k)$  = Matriz de entrada de  $nxr$ .

$C(k)$  = Matriz de salida de  $mxn$ .

$D(k)$  = Matriz de transmisión directa de  $m \times r$ .

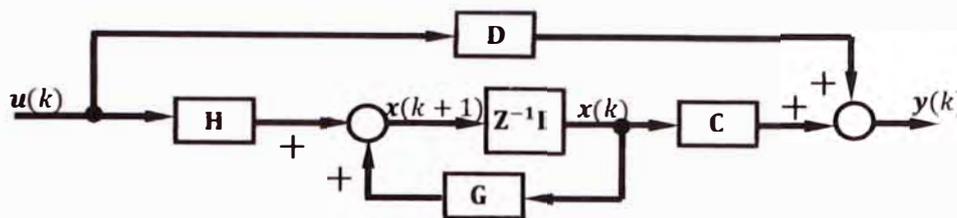
$E(k)$  = Matriz de perturbación de estado de  $nx s$ .

$F(k)$  = Matriz de perturbación de salida de  $m \times t$ .

Si el sistema es lineal, invariante en el tiempo y sin perturbaciones se obtienen las siguientes ecuaciones, cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 3.7:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.28)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (3.29)$$



**Figura 3.7** Diagrama de bloques de un sistema lineal en tiempo discreto invariante en el tiempo representado en el espacio de estado.

### a. Representación en el espacio de estados de sistemas en tiempo discreto

#### a.1. Formas canónicas de ecuaciones en el espacio estado en tiempo discreto.

Para el sistema en tiempo discreto con ecuaciones (3.28) y (3.29), existen muchas técnicas para obtener representaciones en el espacio de estado, correspondientes a sistemas de simple entrada y simple salida. Considerando el sistema en tiempo discreto descrito por:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (3.30)$$

Donde  $u(k)$  es la entrada e  $y(k)$  es la salida del sistema en el instante de muestreo  $k$ .

La función de transferencia pulso para la ecuación (3.30) es:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (3.31)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (3.32)$$

Existen muchas forma de llevar a cabo representaciones en el espacio de estado, para sistemas en tiempo discreto descrito por las ecuaciones (3.30), (3.31) o (3.32).

Algunas de ellas son:

- Forma canónica controlable (FCC)
- Forma canónica observable (FCO)
- Forma canónica diagonal (FCD)
- Forma canónica de Jordan (FCJ)

#### a.1.1 Forma canónica controlable:

La representación en el espacio estado del sistema en tiempo discreto obtenida de las ecuaciones (3.30), (3.31) o (3.32) se puede expresar en la forma canónica controlable mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \quad (3.33)$$

$$y(k) = (b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.34)$$

Para un sistema con función de transferencia pulso dado, la representación en el espacio de estado no es única, sino que existen distintas representaciones en el espacio de estado. Las ecuaciones de estado, sin embargo, están relacionadas unas con otras mediante una transformación de similitud.

#### b. Matriz de Función de transferencia pulso

Para sistemas en tiempo discreto con ecuaciones (3.28) y (3.29), la matriz de transferencia pulso es definida por la siguiente ecuación:

$$F(z) = \frac{C \operatorname{adj}(zI - G)H}{|zI - G|} + D \quad (3.35)$$

Donde  $F(z)$  se conoce como matriz transferencia pulso. Se trata de una matriz de orden  $m \times r$  y caracteriza la dinámica de entrada/salida del sistema en tiempo discreto.

La matriz de transferencia pulso es única, es decir cualquier representación en el espacio de estado tiene la misma matriz de transferencia pulso.

#### c. Ecuación característica del sistema en tiempo discreto:

Para el sistema en tiempo discreto con ecuaciones (3.28) y (3.29), la ecuación característica se determina con:

$$\det(zI - G) = 0 \quad (3.36)$$

### 3.2.6 Discretización de las ecuaciones en el espacio estado en tiempo continuo

En control digital de procesos en tiempo discreto, es necesario convertir ecuaciones en el espacio de estado de tiempo continuo, en ecuaciones de espacio de estado en tiempo discreto. Las siguientes ecuaciones representan la transformación de espacio continuo a espacio discreto para un periodo de muestreo  $T$ .

$$G(T) = e^{AT} \quad (3.37)$$

$$H(T) = \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B \quad (3.38)$$

La ecuación de salida resulta ser la misma que la ecuación (3.29) pero en tiempo discreto.

### 3.2.7 Controlabilidad y Observabilidad

Para un proceso cuyas ecuaciones de estado y salida están determinadas con las ecuaciones (3.28) y (3.29) se definen:

#### a. Controlabilidad

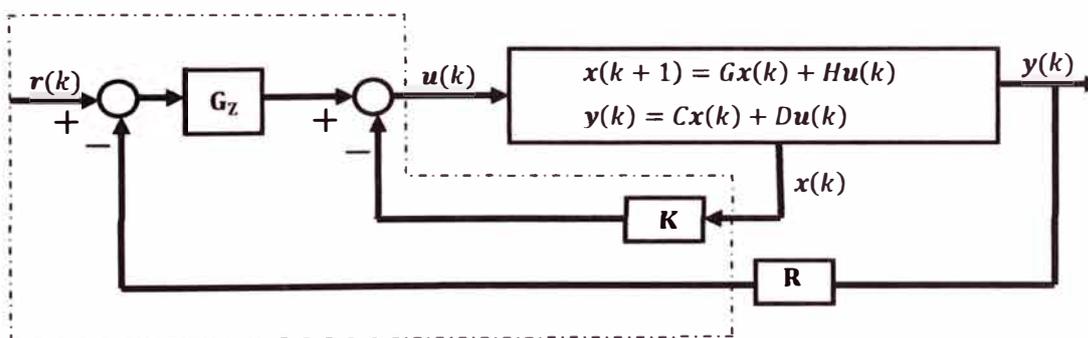
Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable en el tiempo, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario  $x(0)$  a cualquier otro estado deseado arbitrario  $x(kT)$ , mediante un vector de control  $u(kT)$  sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

La matriz de controlabilidad  $M$  de dimensión  $n \times nr$  se obtiene con la siguiente expresión:

$$M = (G \quad GH \quad G^2H \quad \dots \quad G^{n-1}H) \quad (3.39)$$

De donde se cumple que el sistema es controlable en estado completo, si la matriz  $M$  es de rango igual a  $n$ .

Si el sistema descrito por las ecuaciones (3.28) y (3.29), es completamente controlable (o controlable en estado completo), entonces se puede realimentar todas las variables de estado como se muestra en la siguiente figura 3.8.



**Figura 3.8** Diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación de estados y controlador  $G_z$

Donde la matriz  $K$  es la matriz de ganancia de realimentación de estado de dimensión  $r \times n$ ,  $r(k)$  es el vector referencia de orden  $m \times 1$  y  $R$  es la matriz de ganancia del vector de salida cuya dimensión es  $m \times m$ .  $G_z$  es la matriz de función de transferencia pulso de un controlador que puede ser un integrador en atraso o adelanto.

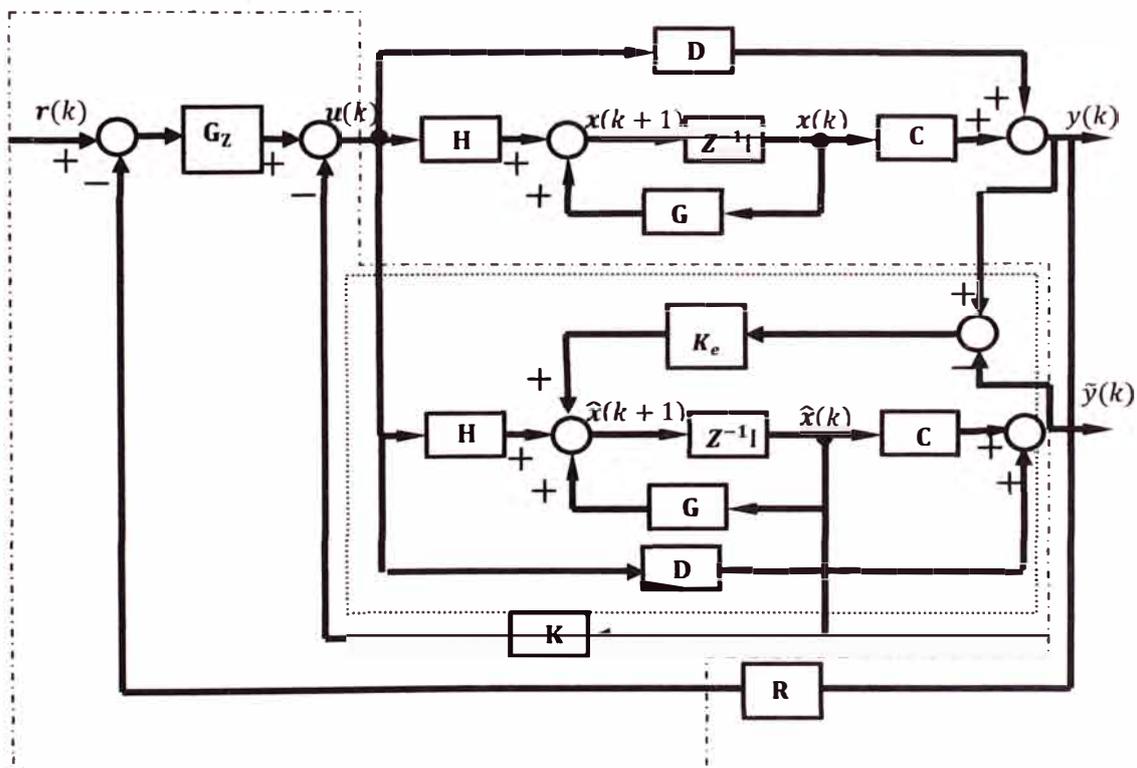
## b. Observabilidad

Se dice que un sistema de control es de estado completamente observable, si cualquier estado inicial  $x(0)$ , se puede determinar a partir de la observación de  $y(kT)$  sobre un número finito de periodos de muestreo. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida.

La matriz de observabilidad  $N$  de dimensión  $mn \times n$  se obtiene con la siguiente expresión:

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

De donde se cumple que el sistema es completamente observable si la matriz  $N$  es de rango igual a  $n$ . Si el sistema descrito por las ecuaciones (3.28) y (3.29) es completamente observable, entonces se puede estimar todas las variables de estado, para después diseñar un sistema de control con realimentación de estado estimado y controlador como se muestra en la figura 3.9. Se usa observadores de estado ya que en la práctica no todas las variables de estado están accesibles para su medición.



**Figura 3.9** Diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación del vector de estado estimado y controlador  $G_z$ .

Donde la matriz  $K$  es la matriz de ganancia de realimentación de estado estimado de dimensión  $rxn$ ,  $K_e$  es una matriz de ponderación de estados de dimensión  $nxm$ ,  $r(k)$  es el vector referencia de orden  $mx1$  y  $R$  es la matriz de ganancia del vector de salida cuya dimensión es  $mxm$ .  $G_z$  es la matriz de función de transferencia pulso de un controlador que puede ser un integrador en atraso o adelanto.

### 3.2.8 Control Óptimo Cuadrático

El control óptimo trata de determinar la mejor respuesta del sistema de control empleando una técnica óptima de diseño. Esta técnica asume la formulación de una función matemática denominada función costo, también conocida como función de rendimiento, índice de rendimiento o índice de funcionamiento, entre otras denominaciones. El procedimiento de diseño del sistema de control óptimo trata de encontrar un extremo (un mínimo o un máximo, dado el caso) de una función costo con el propósito de determinar los parámetros óptimos de una ley de control; de allí el término óptimo. En la mayoría de los casos, sin embargo, la búsqueda de la función costo involucra procedimientos de error y corrección; esto significa que no siempre se puede estar seguro acerca de la forma exacta que debería poseer la función de costo.

#### a. Control óptimo cuadrático estacionario de un sistema Regulador

Considerando el sistema descrito por las ecuaciones (3.28) y (3.29) como:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

Para sistemas de control discretos, la función costo generalmente posee la forma siguiente [2]:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x^T Q x(k) + u^T(k) R u(k)) \quad (3.41)$$

Donde  $Q$  es una matriz de ponderación simétrica semidefinida positiva y la matriz  $R$  es una matriz de ponderación simétrica definida positiva.

El problema de control óptimo cuadrático consiste en determinar un vector de control  $u(k)$  tal que el índice de desempeño cuadrático se minimice.

La matriz de ganancia  $K$  se calcula resolviendo la ecuación de Riccati:

$$P(k+1) = Q + G^T P(k) G - G^T P(k) H (R + H^T P(k) H)^{-1} H^T P(k) G \quad (3.42)$$

La solución comienza con  $P(0) = 0$  y iterando la ecuación (3.42), hasta obtener una solución en estado estacionario, es decir obtener una matriz  $P$  constante.

La matriz de ganancia se obtiene de:

$$K = (R + H^T P H)^{-1} H^T P G \quad (3.43)$$

La ley de control óptimo en estado estacionario está dada por:

$$u(k) = -Kx(k) \quad (3.44)$$

El control del sistema regulador se muestra en la figura 3.10.

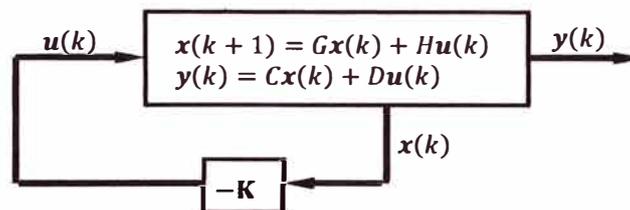


Figura 3.10 Diagrama de bloques de un sistema regulador

Para los casos de sistema de seguimiento proporcional y proporcional-integral, la matriz de ganancia  $K$  se obtiene llevando estos sistemas, a uno del tipo regulador aumentando la dimensión de las respectivas matrices de ecuaciones de estado, salida y matriz de ganancia del proceso.

#### b. Controlador óptimo proporcional integral

Generalmente es necesario añadir acción integral, a un controlador proporcional, debido a que errores de estado permanente pueden aparecer si los parámetros del proceso o su estructura (su ecuación de estado), no han sido estimados con suficiente exactitud. Para procesos que no poseen propiedades integradoras, la inclusión de acción integral en el sistema de control permite obtener un error estacionario nulo.

La acción integral puede ser en adelante o atraso, en este informe se usa el integrador en adelante, en la figura 3.11 se muestra la configuración para un proceso de simple entrada y simple salida.

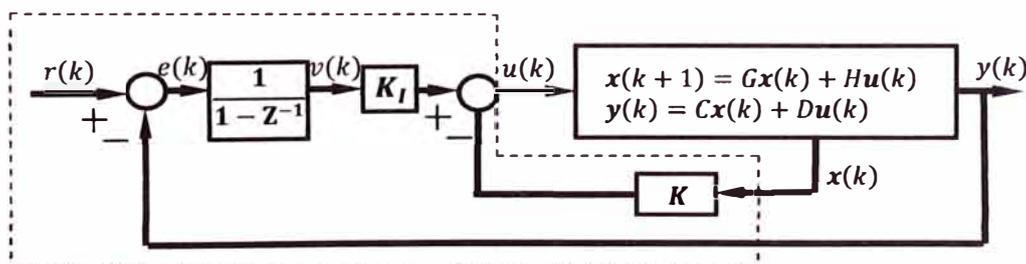


Figura 3.11 Controlador proporcional integral

De la figura 3.11, (con  $D = 0$  en las ecuaciones de estado y salida (3.28) y (3.29)), la señal de control  $u(k)$  viene dada por:

$$u(k) = -Kx(k) + K_I v(k) \quad (3.45)$$

Donde  $K$  es la matriz de ganancia de realimentación y  $K_I$  es la ganancia proporcional del integrador.

La ecuación para el integrador resulta:

$$v(k) = v(k-1) + e(k)$$

De donde se obtiene:

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - C(Gx(k) + Hu(k)) \\ v(k+1) &= (1 - CHK_I)v(k) + (-CG + CHK)x(k) + r(k+1) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Empleando las ecuaciones (3.28) y (3.45) se obtiene:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + H(-Kx(k) + K_I v(k)) \\ x(k+1) &= (G - KK)x(k) + HK_I v(k) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Y de las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.29) se deduce:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ v(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(k+1) \quad (3.48)$$

$$y(k) = (C \ 0) \begin{pmatrix} x(k) \\ v(k) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

En el estado de equilibrio (para  $k \rightarrow \infty$ ) los valores de  $x(k)$ ,  $u(k)$  y  $v(k)$  toman valores estacionarios  $x(\infty)$ ,  $u(\infty)$  y  $v(\infty)$ . Así la ecuación (3.48) es:

$$\begin{pmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \quad (3.50)$$

Se define:

$$x(k) - x(\infty) = x_e(k) \quad (3.51)$$

$$v(k) - v(\infty) = v_e(k) \quad (3.52)$$

Restando las ecuaciones (3.48) y (3.50) y usando las relaciones (3.51) y (3.52) se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G & 0 \\ -CG & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H \\ -CH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K & K_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

La ecuación (3.53) puede ser escrita como sistema regulador:

$$\begin{aligned}\epsilon(k+1) &= G^a \epsilon(k) + H^a \rho(k) \\ \rho(k) &= -K^a \epsilon(k)\end{aligned}\tag{3.54}$$

Donde:

$$\epsilon(k) = \begin{pmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{pmatrix}\tag{3.55}$$

$$G^a = \begin{pmatrix} G & 0 \\ -CG & 1 \end{pmatrix}\tag{3.56}$$

$$H^a = \begin{pmatrix} H \\ -CH \end{pmatrix}\tag{3.57}$$

$$C^a = (C \quad 0)\tag{3.58}$$

$$K^a = (-K \quad K_I)\tag{3.59}$$

$$D^a = D = 0\tag{3.60}$$

El índice  $a$  en las matrices representa una matriz ampliada, debido a la inclusión de un integrador en el sistema, es decir el orden del sistema aumenta en uno, ya que se han considerado entradas y salidas simples. Con estas nuevas matrices ampliadas se puede usar la técnica de control óptimo cuadrático de sistemas tipo regulación.

### c. Selección de matrices de ponderación

En general las matrices  $R$  y  $Q$  de la ecuación (3.41) son hermitianas, además se observa que la matriz  $R$  pondera la señal de control  $u(k)$ , mientras que la matriz  $Q$  pondera el vector de estado  $x(k)$ .

Una matriz es hermitiana cuando su transpuesta conjugada es la misma matriz, es decir:

$$(R^*)^T = (R^T)^* = R \quad \text{y} \quad (Q^*)^T = (Q^T)^* = Q$$

Si las matrices  $R$  y  $Q$  son reales, entonces ambas deben ser simétricas y se verifica que  $R^T = R$  y  $Q^T = Q$ .

Una matriz cuadrada  $R$  es definida positiva si las raíces de su ecuación característica ( $|zI - R| = 0$ ), son todas positivas.

Una matriz cuadrada  $Q$  es semidefinida positiva si las raíces de su ecuación característica son positivas o nulas (sin embargo, no todas las raíces deben ser nulas).

La matriz  $R$ , por conveniencia, puede tomar la forma de una matriz real diagonal:

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_p \end{pmatrix}\tag{3.61}$$

Donde los elementos  $r_1, r_2, \dots, r_p$  deben ser todos positivos para que  $R$  sea una matriz simétrica definida positiva. Para sistemas con una sola señal de entrada,  $R$  resulta un escalar de valor positivo.

La matriz  $Q$ , por conveniencia también, puede tomar la forma de una matriz real diagonal:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Donde los elementos  $q_1, q_2, \dots, q_n$  pueden ser positivos y algunos de ellos nulos para que  $Q$  sea una matriz simétrica semidefinida positiva.

Cada elemento  $q_i$  o cada elemento  $r_i$ , dan un peso correspondiente a cada variable de estado  $x_i$  o a cada señal de control  $u_i$ , respectivamente. El criterio para escoger los pesos está en relación con la importancia que se le da a cada variable o señal en cuestión.

Para el caso del observador de estados (sección 3.2.9), las matrices de ponderación  $R_e$  y  $Q_e$  deben ser elegidas de tal forma que la respuesta del observador, sea dos o tres veces más rápida en comparación con la respuesta del proceso [2]. Es decir, la salida  $y(k)$  del proceso (ver figura 3.12) debe alcanzar su estado estacionario, después que la salida  $\tilde{y}(k)$  del observador ya la haya alcanzado. Generalmente para que esto ocurra, los elementos de  $R_e$  deben ser bastante menores que los elementos de  $Q_e$ . Debemos tener en cuenta que un mayor peso en una de las variables ocasiona una mejor respuesta con relación a tal variable, pero disminuye el desempeño de las demás. Es entonces necesario balancear en forma adecuada los pesos, de manera tal que obtengamos un desempeño general del sistema, que se acerque en lo posible al óptimo y que evidentemente, cumpla las especificaciones de diseño.

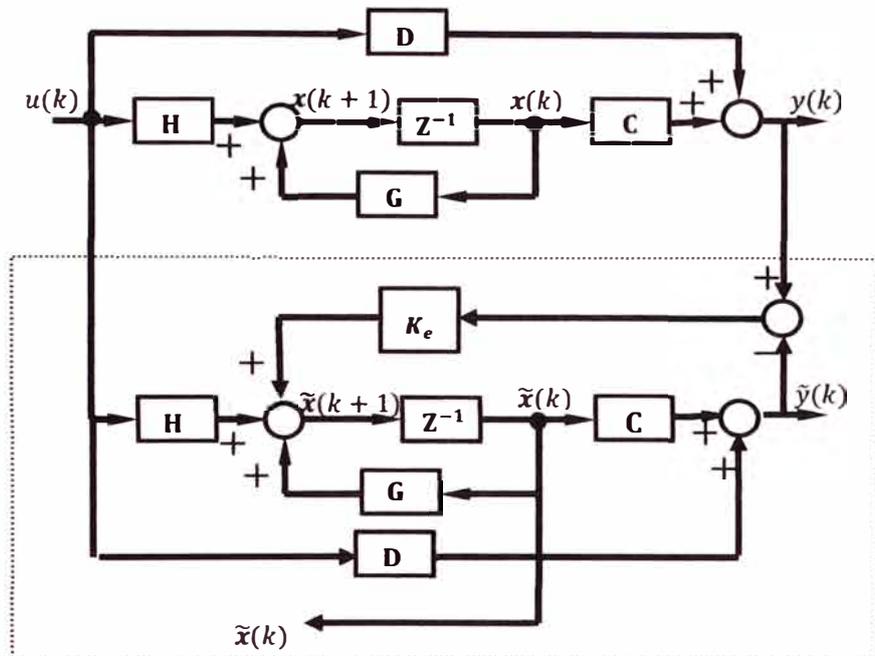
### 3.2.9 Observador Óptimo Cuadrático

Considerando el sistema descrito por las ecuaciones (3.28) y (3.29) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

En muchos casos prácticos, solo unas cuantas variables del vector de estado  $\mathbf{x}(k)$  del proceso son susceptibles de ser medidas en forma directa. En tales situaciones se necesita estimar dicho vector de estado; es decir, requerimos hallar un vector de estado estimado  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ . Esto puede lograrse mediante el empleo de un observador discreto de

estados (líneas punteadas en la figura 3.12). El diseño de dicho observador implica determinar su matriz de ganancia  $K_e$  que puede ser calculada a partir de la minimización de una función costo cuadrático. El diagrama de bloques del observador de estados se representa en la figura 3.12, donde se nota que el observador emplea las mediciones de la salida  $y(k)$  y de la señal de control  $u(k)$ .



**Figura 3.12** Diagrama de bloques de un Observador óptimo cuadrático

De la figura 3.12, la ecuación del observador toma la forma ( $D=0$ ):

$$\tilde{x}(k+1) = G\tilde{x}(k) + Hu(k) + K_e(y(k) - C\tilde{x}(k)) \quad (3.63)$$

Donde  $\tilde{x}(k)$  es el vector de estado estimado de dimensión  $n$ ,  $\tilde{y}(k)$  representa el vector de salida estimado de dimensión  $m \times 1$ ,  $K_e$  es la matriz de ganancia de realimentación del observador con dimensión  $n \times m$  y  $C$  es la matriz de salida de dimensión  $m \times n$ . Reemplazando la ecuación (3.29) en (3.63) y restando la ecuación resultante con (3.28), podemos obtener la ecuación del error del observador:

$$e(k+1) = (G - K_e C)e(k) \quad (3.64)$$

$$e(k) = x(k) - \tilde{x}(k) \quad (3.65)$$

Mientras que su ecuación característica toma la forma:

$$\det(zI - G + K_e C) = 0 \quad (3.66)$$

Donde la matriz  $K_e$  debe ser escogida apropiadamente para que el error tienda a cero con una velocidad adecuada. Cabe mencionar también que las raíces de dicha

ecuación característica, deben posicionarse dentro del círculo unitario para la operación satisfactoria del observador.

Un proceso completamente observable cumple que cualquier estado inicial pueda determinarse a partir de la observación de los vectores de salida y de control, en un número finito de periodos de muestreo.

#### a. Sistema dual

Mediante el principio de no unicidad de la representación en el espacio estado se puede representar un sistema de control dual al sistema original (ecuaciones (3.28) y (3.29)) por las ecuaciones:

$$\alpha(k+1) = G^T \alpha(k) + C^T \beta(k) \quad (3.67)$$

$$\gamma(k) = H^T \alpha(k) + D \beta(k) \quad (3.68)$$

Considerando un sistema de regulación, entonces la señal de control se expresa como:

$$\beta(k) = -K \alpha(k) \quad (3.69)$$

Remplazando la ecuación (3.69) en la ecuación (3.67):

$$\alpha(k+1) = (G^T - C^T K) \alpha(k) \quad (3.70)$$

La ecuación característica es:

$$\det(zI - G^T + C^T K) = 0 \quad (3.71)$$

Usando la propiedad:  $\det(A) = \det(A^T)$  en la ecuación (3.71) entonces se obtiene:

$$\det((zI - G^T + C^T K)^T) = \det(zI - G + K^T C) \quad (3.72)$$

De las ecuaciones (3.66) y (3.72) se obtiene de:

$$K_e = K^T \quad (3.73)$$

Por lo tanto para calcular la matriz  $K$ , se aplica el método de control óptimo cuadrático estacionario de un sistema regulador para el sistema en tiempo discreto con ecuaciones (3.67) y (3.68), entonces:

De la ley de control del sistema dual, ecuaciones (3.73) y (3.69):

$$\beta(k) = -K_e^T \alpha(k) \quad (3.74)$$

Empleando la función costo siguiente:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^T Q_e \alpha(k) + \beta^T(k) R_e \beta(k)) \quad (3.75)$$

Entonces la ecuación de Riccati es:

$$P_e(k+1) = Q_e + GP_e(k)G^T - GP_e(k)C^T(R_e + CP_e(k)C^T)^{-1}CP_e(k)G^T \quad (3.76)$$

Y la matriz de ganancia  $K_e$  se expresa como:

$$K_e = (R_e + CP_eC^T)^{-1}CP_eG^T \quad (3.77)$$

### 3.2.10 Filtro de Kalman

Uno de los factores más importantes en el desempeño de sistemas de control, a menudo no tenido en cuenta, es el efecto de perturbaciones y ruido. Todos los sistemas están sujetos a ruido, sea en forma de alinealidades de entrada no modeladas, dinámica no modelada, o señales de entrada no deseadas.

Con un modelo en ecuaciones de estado que incluye ruido, se genera el mejor observador posible, es decir, el que mejor rechaza el efecto del ruido. Estos observadores suelen llamarse estimadores (uno de los estimadores es conocido como filtro de Kalman).

El filtro de Kalman se desarrolla en el marco de la teoría moderna de control, y está adaptado a la utilización del computador. En efecto, la estimación es recurrente, lo cual conduce a una fácil programación del algoritmo correspondiente. Por otra parte el filtro de Kalman puede generalizarse, para la estimación de señales cuyas propiedades estadísticas varían en el tiempo.

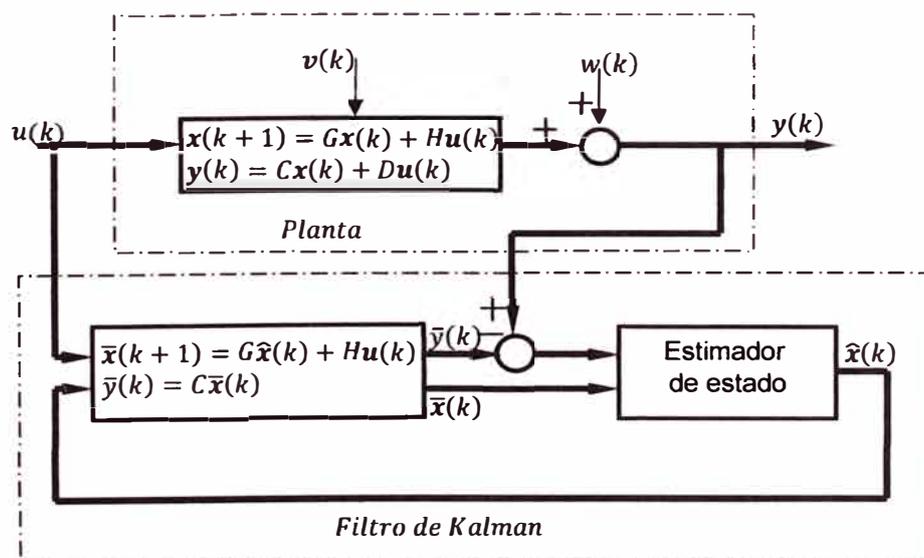


Figura 3.13 Filtro de Kalman

Considerando el sistema discreto ( $D = 0$ ), con ruido que se muestra en la figura 3.13, se obtiene el siguiente modelo perturbado:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) + v(k) \\y(k) &= Cx(k) + w(k)\end{aligned}\tag{3.78}$$

Donde:

Las señales  $v(k)$  y  $w(k)$  son procesos aleatorios que se consideran como ruido blanco estacionario, con media cero y no correlacionados entre sí.

La entrada  $v(k)$  se llama ruido de planta o proceso y la entrada  $w(k)$  que actúa a la salida ruido de medición. El ruido de planta modela el efecto de entradas ruidosas que actúan en los estados mismos, mientras que el ruido de medición modela efectos tales como el ruido en los sensores. La entrada  $u(k)$  es la habitual entrada de control, considerada determinista. Con base a estos fundamentos y con la demostración encontrada en [10]. El vector estimado  $\hat{x}(k)$  se obtiene empleando el filtro de Kalman cuya ecuación de observación es definida como:

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + K_0(k)(y(k) - C(k)\bar{x}(k))\tag{3.79}$$

Y la ecuación de actualización de estados esta representada en la figura 3.13 como:

$$\bar{x}(k+1) = G\hat{x}(k) + Hu(k)\tag{3.80}$$

La matriz de ganancia  $K_0(k)$  se calcula de:

$$K_0(k) = P_0(k)C^T(k)(C(k)P_0(k)C^T(k) + R_0)^{-1}\tag{3.81}$$

Donde  $P_0(k)$  es la matriz definida positiva, cuyo valor se obtiene de la solución de la ecuación matricial discreta asociada a Riccati.

$$P_0(k+1) = Q_0 + G^T(k)P_0(k)G(k) - G^T(k)K_0(k)C(k)P_0(k)G(k)\tag{3.82}$$

Donde  $Q_0$  y  $R_0$  son matrices de covarianza definidas positivas correspondiente a los disturbios de las medidas  $w$  y del sistema  $v$  respectivamente.

La ecuación (3.79) indica que la estimación es un procedimiento matemático que opera por medio de un mecanismo de predicción y corrección. En esencia este algoritmo pronostica el nuevo estado a partir de su estimación previa, añadiendo un término de corrección proporcional al error de predicción, de tal forma que este último es minimizado estadísticamente.



**Tabla 4.1** Dimensiones a considerar para la estructura de la figura 4.1.

$r_1$	0.004m
$r_2$	0.030m
$r_3$	0.010m
$l_1$	0.040m
$l_2$	0.003m
$l_3$	0.040m
$l_4$	0.010m
$l_5$	0.083m
$l_6$	0.400m

En la sección 2.7, se indican posibles fallas mecánicas en la estructura debido a tipos de esfuerzos en los materiales. En este informe se considera el esfuerzo de tipo flexión, que es peligrosa cuando el eje del brazo de robot alcance una velocidad de rotación igual a la velocidad crítica descrita en 2.7.1. Los demás tipos de esfuerzos se consideran despreciables. En la sección 2.7.1 se indica que la rigidez del material es directamente proporcional a la velocidad crítica, con este dato se propone como material al acero AISI 1045 que es comercial, cuyas características mecánicas se describen en el anexo B. En adelante la densidad de los componentes del brazo de robot es constante y igual a  $\rho = 7.87 \text{ g/cm}^3$ . La masa el piñón se considera despreciable.

## 4.2 Modelo Matemático

Para el cálculo del modelo matemático, se determina las ecuaciones diferenciales referente a la dinámica del robot de un grado de libertad, para después relacionarlo con la parte eléctrica, es decir usando las ecuaciones diferenciales que modelan matemáticamente el motor y el amplificador de potencia tipo puente H.

### 4.2.1 Ecuaciones dinámicas

En esta sección se determina la ecuación diferencial de la dinámica del robot de un grado de libertad.

#### a. Centro de masa

Cálculo del centro de masa de la estructura (eje, engranaje y brazo) que se muestra en la figura 4.1.

Debido a que el centro de masa no depende del origen de coordenadas, se escoge el centro de coordenadas como se muestra en la figura 4.1. Con la consideración de que la densidad es igual en toda la estructura y la ecuación (2.1) se obtiene:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{M} = \frac{\rho \int \vec{r} dv}{\rho V} = \frac{\int \vec{r} dv}{V} \quad (4.1)$$

También se cumple:

$$\vec{r}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) = \left( \frac{\sum_{i=0}^n \bar{x}_i v_i}{V}, \frac{\sum_{i=0}^n \bar{y}_i v_i}{V}, \frac{\sum_{i=0}^n \bar{z}_i v_i}{V} \right) \quad (4.2)$$

Donde

$x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}$  = coordenadas del centro de masa de la estructura.

$\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$  = coordenadas del centro de masa del i-ésimo sólido que compone la estructura.

$v_i$  = Volumen del i-ésimo sólido que compone la estructura.

$V$  = Volumen de la estructura del robot de un grado de libertad.

$$V = \sum_{i=0}^n v_i \quad (4.3)$$

La estructura del robot de un grado de libertad está compuesta de 5 sólidos simétricos cuyos centros de masa son conocidos. A continuación se definen los sólidos y su centro de masa respectivamente (ver figura 4.1):

Sólido 1: Barra cilíndrica de longitud  $l_1$  y radio  $r_1$ :

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) = \left( 0, \frac{l_1}{2}, 0 \right) \quad (4.4)$$

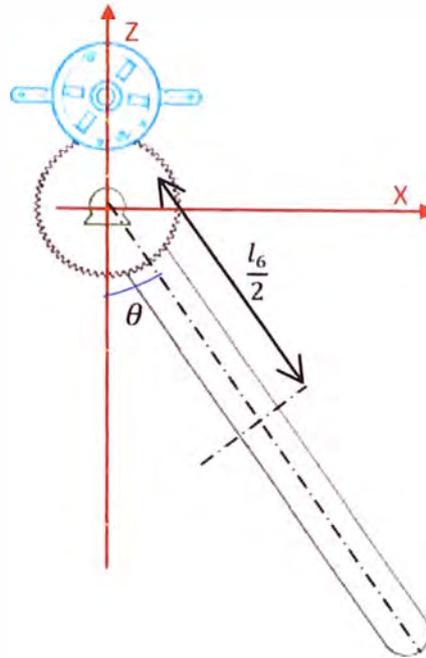
Sólido 2. Engrane de longitud  $l_2$  y radio  $r_2$ :

$$(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2) = \left( 0, l_1 + \frac{l_2}{2}, 0 \right) \quad (4.5)$$

Sólido 3. Barra cilíndrica de longitud  $l_3$  y radio  $r_1$ :

$$(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3) = \left( 0, l_1 + l_2 + \frac{l_3}{2}, 0 \right) \quad (4.6)$$

Sólido 4. Brazo de robot (ver figura 4.1) y en una posición angular  $\theta$  rad, como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 4.2** Brazo de robot.

$$(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4) = \left( \frac{l_6}{2} \sin \theta, l_1 + l_2 + l_3 + \frac{l_4}{2}, -\frac{l_6}{2} \cos \theta \right) \quad (4.7)$$

Sólido 5: Barra cilíndrica de longitud  $l_5$  y radio  $r_1$ :

$$(\bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{z}_5) = \left( 0, l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \frac{l_5}{2}, 0 \right) \quad (4.8)$$

El volumen de cada sólido es respectivamente:

$$v_1 = \pi r_1^2 l_1 \quad (4.9)$$

$$v_2 = \pi r_2^2 l_2 \quad (4.10)$$

$$v_3 = \pi r_1^2 l_3 \quad (4.11)$$

$$v_4 = \pi r_3^2 l_4 + 2l_6 l_4 r_3 \quad (4.12)$$

$$v_5 = \pi r_1^2 l_5 \quad (4.13)$$

El volumen total o volumen de la estructura es:

$$V = \sum_{i=0}^5 v_i = \pi r_1^2 (l_1 + l_3 + l_5) + \pi r_2^2 l_2 + \pi r_3^2 l_4 + 2l_6 l_4 r_3 \quad (4.14)$$

Entonces en el cálculo de centro de masa de la estructura con la ecuación (4.2), se obtiene:

$$x_{CM} = \frac{\frac{l_6}{2} \sin \theta v_4}{V} \quad (4.15)$$

$$y_{CM} = \frac{l_1}{2} v_1 + \left( l_1 + \frac{l_2}{2} \right) v_2 + \dots$$

$$\frac{\dots \left( l_1 + l_2 + \frac{l_3}{2} \right) v_3 + \left( l_1 + l_2 + l_3 + \frac{l_4}{2} \right) v_4 + \left( l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \frac{l_5}{2} \right) v_5}{V} \quad (4.16)$$

$$z_{CM} = -\frac{\frac{l_6}{2} \cos \theta v_4}{V} \quad (4.17)$$

La distancia  $d$  del eje  $Y$ , al centro de masa de la estructura (ver figura 4.1 y 4.2), es:

$$d^2 = x_{CM}^2 + z_{CM}^2$$

$$d = \frac{\frac{l_6}{2} v_4}{V} \quad (4.18)$$

### b. Momento de Inercia

Cálculo del momento de Inercia de la estructura con respecto al eje de giro  $Y$  (ver figura 4.1). El momento de inercia se calcula como la suma de los momentos de inercia de sólidos simétricos que componen la parte mecánica, es decir:

$$J_Y = \sum_{i=0}^n J_i \quad (4.19)$$

Con los momentos de inercia de sólidos simétricos (anexo A) y considerando las dimensiones dadas en la figura 4.1, el momento de inercia para cada uno de los 5 sólidos simétricos que componen la estructura son:

Solido 1: Barra cilíndrica de longitud  $l_1$  y radio  $r_1$ :

$$J_1 = \frac{1}{2} M_1 r_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_1 r_1^2 \quad (4.20)$$

Solido 2: Engranaje de longitud  $l_2$  y radio  $r_2$ :

$$J_2 = \frac{1}{2} M_2 r_2^2 = \frac{1}{2} \rho v_2 r_2^2 \quad (4.21)$$

Solido 3: Barra cilíndrica de longitud  $l_3$  y radio  $r_1$ :

$$J_3 = \frac{1}{2} M_3 r_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_3 r_1^2 \quad (4.22)$$

Solido 4: El brazo de robot consta de dos mitades de cilindro en sus extremos (4-1 y 4-3) y un prisma cuadrangular (4-2) como se muestra en la siguiente figura:

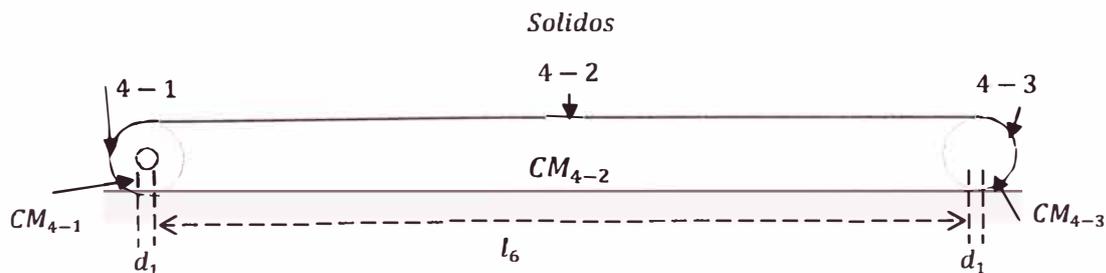


Figura 4.3 Brazo de robot

El momento de inercia del brazo de robot, es igual a la suma de momentos de inercia de los sólidos 4\_1, 4\_2 y 4\_3 considerando al eje  $Y$  como eje de rotación. El momento de inercia del sólido 4\_1 (medio cilindro) con respecto al eje  $Y$ , se determina con el teorema de ejes paralelos (sección 2.4.1), y esta determinada por:

$$J_{4_1} = J_{CM4_1} + (d_1)^2 M_{4_1}$$

$$J_{CM4_1} = J_{4_1} - (d_1)^2 M_{4_1} \quad (4.23)$$

De la figura 4.3, se observa que el sólido 4\_3 es igual que 4\_1, entonces el momento de inercia con respecto al eje  $Y$  del sólido 4\_3, aplicando el teorema de ejes paralelos es:

$$J_{4_3} = J_{CM4_1} + (l_6 + d_1)^2 M_{4_3} \quad (4.24)$$

De igual forma el momento de inercia del prisma cuadrangular, con respecto a  $Y$  esta dado por:

$$J_{4_2} = J_{CM4_2} + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2 M_{4_2} \quad (4.25)$$

Donde para las ecuaciones (4.23), (4.24) y (4.25).

$J_{CM4_1}$ =Momento de inercia de medio cilindro con respecto a un eje que pasa su CM.

$J_{CM4_2}$ =Momento de inercia de prisma cuadrangular respecto a un eje que pasa su CM.

$J_{CM4_3}$ =Momento de inercia de medio cilindro con respecto a un eje que pasa su CM.

$d_1$ =Distancia del CM de medio cilindro al eje de giro  $Y$  (anexo A).

$M_i$ =Masa del  $i$ -ésimo elemento (4-1, 4-2, 4-3).

Entonces el momento de inercia del sólido 4 (brazo de robot), es la suma de momentos de inercia parciales:

$$J_4 = J_{4_1} + J_{4_2} + J_{4_3} \quad (4.26)$$

Sólido 5: Barra cilíndrica de longitud  $l_5$  y radio  $r_1$ :

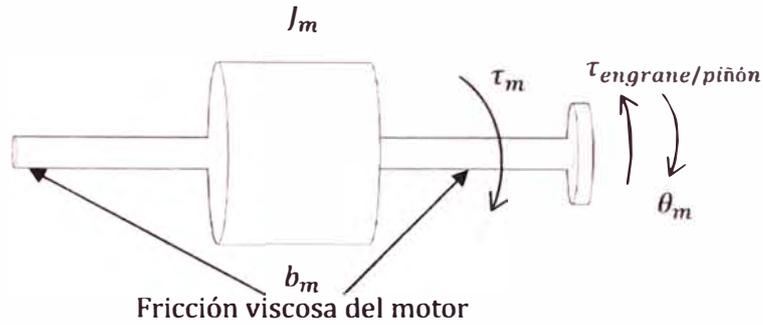
$$J_5 = \frac{1}{2} M_5 r_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_5 r_1^2 \quad (4.27)$$

Por lo tanto el momento de inercia total de la estructura (brazo, engrane y eje) con respecto al eje  $Y$  es:

$$J_Y = \sum_{i=0}^5 J_i = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 \quad (4.28)$$

### c. Dinámica de rotación de eje de motor y estructura de robot

El diagrama de cuerpo libre del eje y rotor del motor DC, engranaje (piñón), se muestra en la siguiente figura (ver sección 4.1):



**Figura 4.4** Diagrama de cuerpo libre rotor motor DC y piñón.

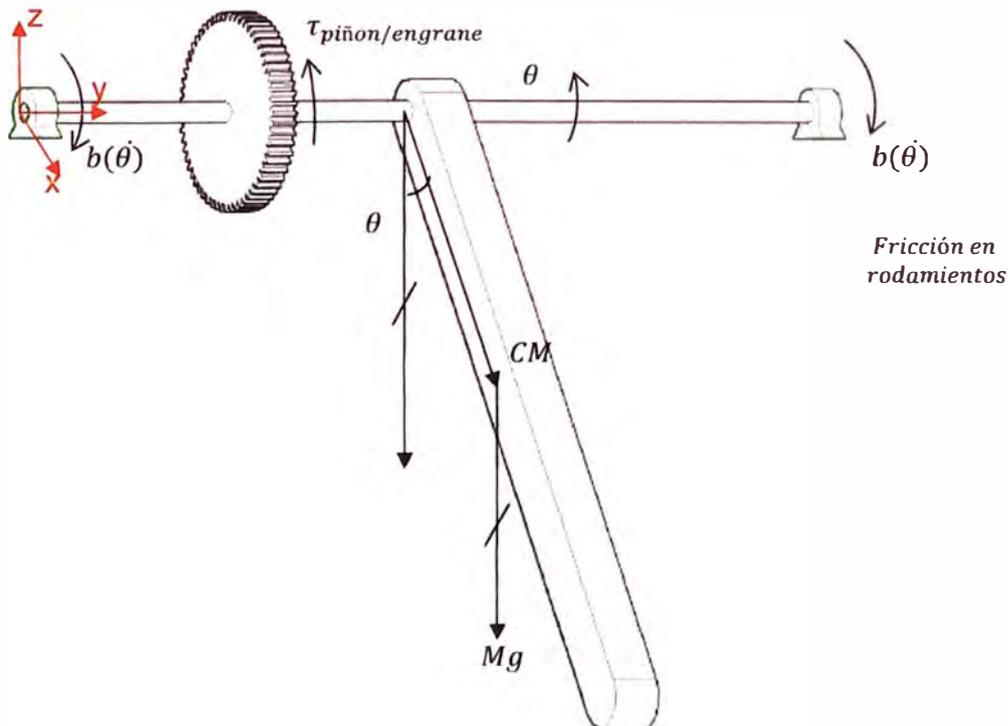
En la figura 4.4, se muestra los torques desarrollados en el sistema. Aplicando la ecuación (2.6), el cual es:

$$\sum \tau = J\ddot{\alpha} = J\ddot{\omega}$$

Por simplicidad y debido a que el movimiento es sobre un eje fijo la dinámica es representada por ecuaciones escalares, del diagrama de cuerpo libre (figura 4.4), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\tau_m - \tau_{engrane/piñón} - b_m\dot{\theta}_m = J_m\dot{\omega}_m \quad (4.29)$$

Por otra parte en la figura 4.5, se muestra el diagrama de cuerpo libre de la estructura mecánica compuesto por el brazo, el eje y engrane. Los rodamientos son del tipo de deslizamiento.



**Figura 4.5** Diagrama de cuerpo libre de la estructura mecánica del robot.

De la figura 4.5 y con la ecuación (2.6) se obtiene la siguiente ecuación dinámica escalar:

$$\tau_{\text{piñon/engrane}} - 2b_{(\dot{\theta})} - Mgd \sin \theta = J_Y \dot{\omega} \quad (4.30)$$

El modelo de fricción para este tipo de rodamiento, es descrito en la sección 2.8.1 (torque de fricción estática +coulomb+viscosa). Por lo que las ecuaciones de torque de fricción están dadas por las ecuaciones (4.31) y (4.32):

$$b_{(\dot{\theta} \neq 0)} = C_c \text{Sign}(\dot{\theta}) + b_L \dot{\theta} \quad (4.31)$$

El torque de fricción estática:

$$b_{(\dot{\theta}=0)} = C_F \quad (4.32)$$

En el caso de engranajes se considera engranajes rectos por su facilidad de análisis y se desprecia los efectos de rozamiento.

La transmisión de potencia y movimiento desde el eje del rotor, al eje de la carga se da por medio de engranajes (piñón y engrane):

Adaptando las ecuaciones (2.7) y (2.8), a los engranajes (piñón y engrane) del robot de un grado de libertad se obtiene:

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \frac{r_2}{r_m} = n \quad (4.33)$$

$$P = \tau_{\text{engrane/piñón}} \omega_m = \tau_{\text{piñón/engrane}} \omega \quad (4.34)$$

Donde:

$\omega_m$  =Velocidad angular del motor.

$\omega$  =Velocidad angular del eje del brazo.

$n$  =Relación de velocidades entre los engranajes piñón y engrane respectivamente.

$\tau_{\text{piñón/engrane}}$  =Torque desarrollado por el engrane en el piñón.

$\tau_{\text{engrane/piñón}}$  =Torque desarrollado por el piñón en el engrane.

Entonces de las ecuaciones (4.33) y (4.34) se obtiene:

$$\tau_{\text{engrane/piñón}} \frac{\omega_m}{\omega} = \tau_{\text{engrane/piñón}} n = \tau_{\text{piñón/engrane}} \quad (4.35)$$

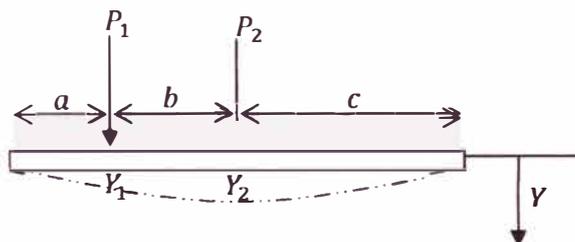
De las ecuaciones (4.29), (4.30), (4.31), (4.33) y (4.35), se obtiene la ecuación que representa la dinámica de rotación del robot de un grado de libertad:

$$\begin{aligned} \tau_m n &= (J_Y + J_m n^2) \dot{\omega} + 2b_{(\dot{\theta})} + n^2 b_m \dot{\theta} + Mgd \sin \theta \\ \tau_m n &= (J_Y + J_m n^2) \dot{\omega} + 2C_c \text{Sign}(\dot{\theta}) + (n^2 b_m + 2b_L) \dot{\theta} + Mgd \sin \theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

**d. Cálculo de la velocidad crítica de flexión del eje del brazo de robot:**

La velocidad angular de rotación del eje del brazo de robot debe mantenerse menor al 20% de la velocidad crítica [3].

Considerando las constantes del acero AISI 1045 descritos en el anexo B, lo visto en la sección 2.7 y las dimensiones que se muestran en la figura 4.1. Se elabora el diagrama de cuerpo libre del eje de rotación (ver figura 4.6), en donde actúan esfuerzos del tipo flexión. Se desprecia la flexión desarrollada por el peso del eje ya que es menor en relación al peso del brazo de robot y engrane:



**Figura 4.6** Pesos que deforman el eje de rotación.

Donde:

$P_1$  = Peso del engrane (N).

$P_2$  = Peso del brazo de robot (N).

$Y_1$  = Deflexión en el punto 1 debido a los pesos  $P_1$  y  $P_2$  (m).

$Y_2$  = Deflexión en el punto 2 debido a los pesos  $P_1$  y  $P_2$  (m).

Las dimensiones mostradas en 4.6 como función de las dimensiones de diseño (figura 4.1) son:

$$\begin{aligned} a &= l_1 + \frac{l_2}{2} \\ b &= l_3 + \frac{l_2}{2} + \frac{l_4}{2} \\ c &= l_5 + \frac{l_4}{2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Con estas dimensiones y mediante las ecuaciones (2.10) y (2.11) se obtiene:

Deformación en el punto P1:

$$\begin{aligned} Y_{1/1} &= -\frac{P_1 a^2 (b+c)^2}{3EIL} \\ Y_{1/2} &= -\frac{P_2 c a (L^2 - c^2 - a^2)}{6EIL} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Deformación en el punto P2:

$$Y_{2/2} = -\frac{P_2 (a+b)^2 (c)^2}{3EIL} \quad (4.39)$$

$$Y_{2/1} = -\frac{P_1 a c (L^2 - c^2 - a^2)}{6 E I L}$$

Donde:

$Y_{1/1}$  = Deformación el punto 1 debido a la carga 1 (m).

$Y_{2/1}$  = Deformación el punto 2 debido a la carga 1 (m).

$Y_{1/2}$  = Deformación el punto 1 debido a la carga 2 (m).

$Y_{2/2}$  = Deformación el punto 2 debido a la carga 2 (m).

La deformación en el punto  $P_1$  y  $P_2$  es respectivamente:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_{1/2} + Y_{1/1} \\ Y_2 &= Y_{2/1} + Y_{2/2} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Remplazando la ecuación (4.40) en la ecuación (2.9), se obtiene la velocidad crítica de flexión:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g(m_{\text{Engrane}} Y_1 + m_{\text{Brazo}} Y_2)}{m_{\text{Engrane}} Y_1^2 + m_{\text{Brazo}} Y_2^2}} \quad (4.41)$$

Reemplazando valores en la ecuación (4.41). Se obtiene como velocidad crítica  $\omega_c = 1068.359 \text{ rad/s}$ .

La siguiente tabla muestra los valores principales de cálculo, en esta sección:

**Tabla 4.2** Valores principales a considerar para la estructura (brazo de robot, eje y engranaje).

$M$	Masa de la estructura de robot (kg).	0.4584
$d$	Distancia CM a eje de rotación (m).	0.1427
$J_Y$	Inercia de carga ( $\text{kgm}^2$ ).	0.0178
$\omega_c$	Velocidad crítica de rotación (rad/s).	1068.3

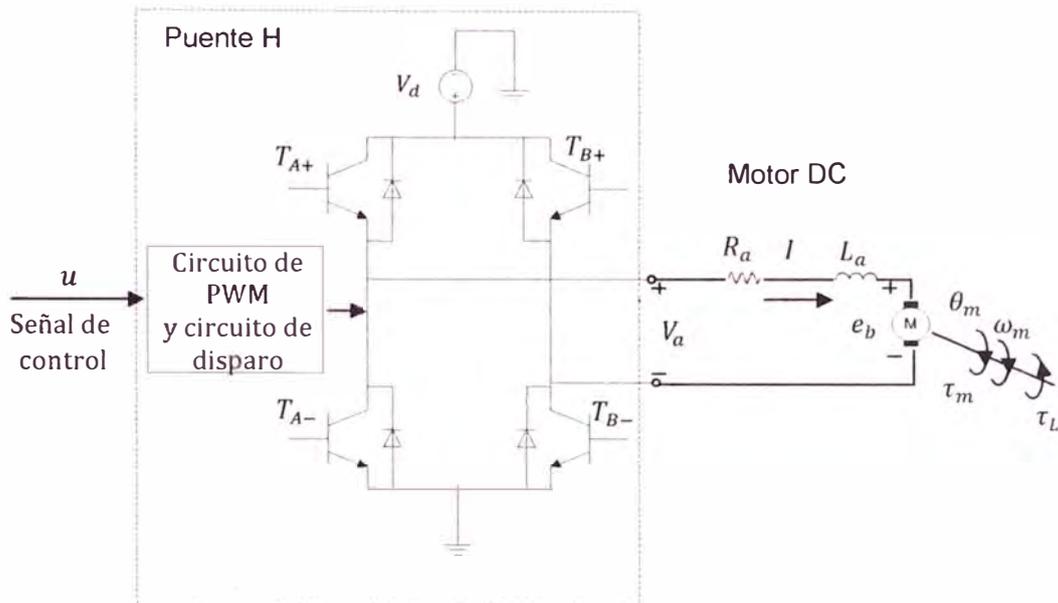
#### 4.2.2. Ecuaciones del sistema eléctrico

El actuador usado para el control de posición de un robot de un grado de libertad, es un motor DC de imán permanente visto en la sección 2.10.2, debido a las características lineales que presenta, y también a que una variación en el voltaje aplicado al motor refleja un cambio de velocidad. Esto último se usa para obtener el control de velocidad del motor e indirectamente la posición (velocidad cero), cumpliendo las condiciones de diseño planteadas en la sección 1.1.

La tensión, corriente nominal y corriente máxima del motor dependen de la carga y las condiciones de diseño. En su mayoría los controladores digitales son diseñados

para ejecutar algoritmos de control y no para alimentar motores, con esta consideración se plantea el uso de un amplificador electrónico de potencia, tipo puente H visto en la sección 2.11, se supone que los dispositivos electrónicos del amplificador tipo puente H son ideales.

El uso del amplificador tipo puente H conlleva a que el actuador esté constituido por el motor DC y el amplificador tipo puente H como se muestra en la figura 4.6, donde  $u$  es la señal de control y  $V_a$  es la tensión de alimentación del motor.



**Figura 4.7** Diagrama eléctrico: amplificador tipo puente H y Motor DC.

En la figura 4.7, la parte dentro de las líneas punteadas representa el amplificador de potencia tipo puente H, en donde la relación entre  $u$  y  $V_a$  es dada por la ecuación (2.18).

La señal de control  $u$ , es una señal analógica cuyo valor se considera por la inecuación (4.42), esto se debe a que en el mercado industrial existe la tarjeta electrónica de entradas y salidas analógicas, digitales denominada LABPC+ [14].

$$-5V \leq u \leq 5V \quad (4.42)$$

La tarjeta electrónica LABPC+ se considera como el periférico de un controlador, que puede ser un computador en el cual se ejecuta el algoritmo de control.

El circuito amplificador tipo puente H de la figura 4.7 se considera sin pérdidas, es decir el circuito amplifica la tensión de control  $u$  a un valor de tensión que alimente al motor DC,  $u$  máximo refleja  $V_a$  máximo. Remplazando en la ecuación (2.18) se obtiene:

$$K_a = \frac{V_{a\_max}}{u_{max}} \quad (4.43)$$

Se considera a  $V_{a\_max}$  como la tensión nominal del motor DC y  $u_{max}$  es la señal de control máxima igual 5 (inecuación 4.42).

Con estas consideraciones previas, se procede a calcular las ecuaciones diferenciales del sistema eléctrico:

De la figura 4.7 y la ecuación (2.15) se obtiene:

$$V_a = IR_a + L_a \frac{dI}{dt} + e_b \quad (4.44)$$

De la figura 4.7, y la ecuación (2.18), la tensión de armadura es:

$$V_a = \mu K_a \quad (4.45)$$

De la figura 4.7, y la ecuación (2.17), se obtiene la siguiente relación para el motor:

$$e_b = K_b \omega_m \quad (4.46)$$

El torque del motor es proporcional a la corriente y es dada por la ecuación (2.16):

$$\tau_m = K_m I \quad (4.47)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.43), (4.45) y (4.46) en (4.44) y ordenando se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{-e_b - IR_a + uK_a}{L_a} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{-K_b n \omega}{L_a} - \frac{IR_a}{L_a} + \frac{uK_a}{L_a} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Reemplazando la ecuación (4.47) en (4.36) y ordenando se obtiene:

$$\begin{aligned} K_m I n &= (J_Y + J_m n^2) \dot{\omega} + 2Cc \text{Sign}(\dot{\theta}) + (n^2 b_m + 2b_L) \dot{\theta} + Mgd \sin \theta \\ (J_Y + J_m n^2) \dot{\omega} &= -2Cc \text{Sign}(\dot{\theta}) - (n^2 b_m + 2b_L) \dot{\theta} - Mgd \sin \theta + K_m I n \end{aligned} \quad (4.49)$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$$(J_Y + J_m n^2) = J \quad (4.50)$$

$$(n^2 b_m + 2b_L) = B \quad (4.51)$$

$$2Cc \text{Sign}(\dot{\theta}) = Tr \quad (4.52)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.50), (4.51), (4.52) en (4.49) y despejando la variable  $\dot{\omega}$  la ecuación (4.49) queda como:

$$J \dot{\omega} = -2Cc \text{Sign}(\dot{\theta}) - B \dot{\theta} - Mgd \sin \theta + K_m I n$$

$$\dot{\omega} = \frac{K_m I n}{J} - \frac{Tr}{J} - \frac{Mgd \sin \theta}{J} - \frac{B\dot{\theta}}{J} \quad (4.53)$$

### 4.3 Representación mediante ecuaciones de estado

Asumiendo las siguientes variables, como variables de estado:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \omega = \dot{\theta} \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Reemplazando las variables de estado en las ecuaciones (4.48) y (4.53), se obtiene las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{X}_1 = \dot{\theta} = X_2 \quad (4.55)$$

$$\dot{X}_2 = \dot{\omega} = -\frac{Mgd}{J} \sin X_1 - \frac{B}{J} X_2 + \frac{K_m n}{J} X_3 - \frac{Tr}{J} \quad (4.56)$$

$$\dot{X}_3 = \dot{I} = \frac{-K_b n}{L_a} X_2 - \frac{R_a}{L_a} X_3 + \frac{K_a}{L_a} U \quad (4.57)$$

Agrupando y representando el sistema no lineal (dinámica de rotación y fricción) en el espacio de estado, con las siguientes ecuaciones de estado y salida respectivamente:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, U, t) \quad (4.58)$$

$$Y = \mathbf{g}(\mathbf{X}, U, t) \quad (4.59)$$

Donde:

$$\mathbf{X}^T = (X_1, X_2, X_3) \quad (4.60)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, U, t) = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{Mgd}{J} \sin X_1 - \frac{B}{J} X_2 + \frac{K_m n}{J} X_3 - \frac{Tr}{J} \\ \frac{-K_b n}{L_a} X_2 - \frac{R_a}{L_a} X_3 + \frac{K_a}{L_a} U \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, U, t) = X_1 \quad (4.62)$$

### 4.4 Elección del motor DC

Para la elección del motor se debe calcular o tener en cuenta los siguientes parámetros:

- Tensión de alimentación.
- Torque nominal y torque máximo.
- Velocidad de rotación de la carga.
- La potencia desarrollada por el motor.

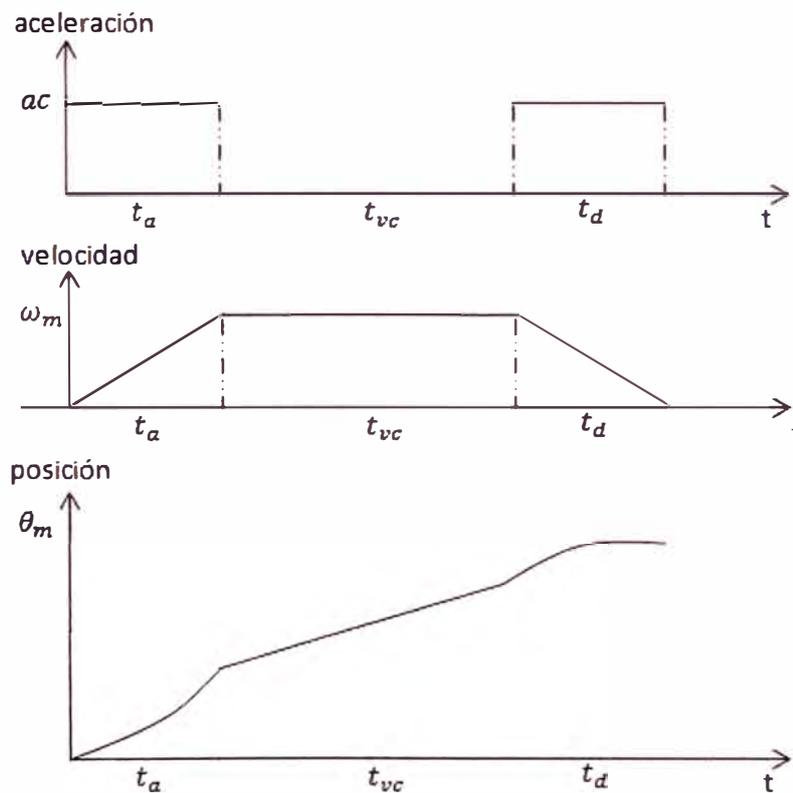
Para calcular el torque desarrollado por el motor, en la ecuación (4.36), se reemplaza la velocidad angular  $\omega$  de la carga por la del motor  $\omega_m$ , que es descrita en la ecuación (4.33). Reemplazando se obtiene:

$$\tau_m n = (J_Y + J_m n^2) \frac{\dot{\omega}_m}{n} + 2Cco \text{Sign}(\dot{\theta}) + (n^2 b_m + 2b_L) \frac{\omega_m}{n} + Mgd \sin \theta$$

Entonces el torque referido al eje del motor es:

$$\tau_m = (J_Y + J_m n^2) \frac{\dot{\omega}_m}{n^2} + \frac{2Cco}{n} \text{Sign}(\dot{\theta}) + (n^2 b_m + 2b_L) \frac{\omega_m}{n^2} + \frac{Mgd \sin \theta}{n} \quad (4.63)$$

Donde la posición  $\theta$  de rotación es referido al movimiento del brazo robótico alrededor de su eje de rotación. Para el control de posición de un motor que tiene acoplada mediante engranajes una carga, se puede asumir una etapa de aceleración constante, otra de velocidad constante y una última etapa de desaceleración constante, como se muestra en la figura 4.8. Todo esto permite que en la posición final se obtenga en el eje del motor una aceleración y velocidad igual a cero.



**Figura 4.8** Aceleración, velocidad y posición del eje del motor en el tiempo.

Considerando las condiciones de diseño (sección 1.1), en que el tiempo de establecimiento debe ser menor a 2 *seg*, con un error de 2% para la posición final, desde el reposo a cualquier posición, dentro del rango  $(-\pi, \pi)$  rad.

De la ecuación (4.63), se observa que son variables la velocidad angular nominal, momento de inercia y fricción viscosa que depende, del motor a seleccionar. También la relación de engranajes y el torque debido al peso del brazo de robot.

El torque máximo de carga (brazo de robot) se da en la posición  $\pi/2$  rad, si se quiere mantener el brazo en esa posición el motor debe ser capaz de equilibrar el torque de carga que es igual a  $Mgd$  dividido entre la relación de engranajes, es decir equilibrar el torque  $Mgd/n$ . El torque del motor necesario para mantener esta posición en un tiempo  $t_r$  (tiempo en que se debe mantener la posición), es representada mediante la siguiente ecuación (cabe recordar que este es el torque más desfavorable con velocidad angular igual a cero).

$$\tau_r = \frac{Mgd}{n} \quad (4.64)$$

De la figura 4.8 y con la ecuación (4.63) se puede calcular los torques de aceleración ( $\tau_a$ ), de velocidad constante ( $\tau_{vc}$ ) y de desaceleración ( $\tau_d$ ) considerando el torque máximo de carga, es decir  $\sin(\theta) = 1$ :

En el tramo de aceleración ( $t_a$ ) la condición más desfavorable:

$$\begin{aligned} \tau_a &= (J_Y + J_m n^2) \frac{\dot{\omega}_m}{n^2} + \frac{2Cco}{n} \text{Sign}(\dot{\theta}) + (n^2 b_m + 2b_L) \frac{\omega_m}{n^2} + \frac{Mgd \sin \theta}{n} \\ \tau_a &= (J_Y + J_m n^2) \frac{\omega_m}{t_a} \times \frac{1}{n^2} + \frac{2Cco}{n} \text{Sign}(\dot{\theta}) + (n^2 b_m + 2b_L) \frac{\omega_m}{n^2} - \frac{Mgd}{n} \end{aligned} \quad (4.65)$$

En el tramo de velocidad constante ( $t_{vc}$ ) no hay aceleración, la condición más desfavorable:

$$\tau_{vc} = \frac{2Cco}{n} \text{Sign}(\dot{\theta}) + (n^2 b_m + 2b_L) \frac{\omega_m}{n^2} + \frac{Mgd}{n} \quad (4.66)$$

En el tramo de desaceleración ( $t_d$ ) la condición más desfavorable es:

$$\tau_d = (J_Y + J_m n^2) \frac{\omega_m}{t_d} \times \frac{1}{n^2} \pi - \frac{2Cco}{n} \text{Sign}(\dot{\theta}) - (n^2 b_m + 2b_L) \frac{\omega_m}{n^2} - \frac{Mgd}{n} \quad (4.67)$$

El torque es calculado como el torque eficaz en el intervalo de tiempo más desfavorable ( $t_a + t_{vc} + t_d = 2$  *seg* y  $t_r$ ), es decir:

$$\tau_{rms} = \sqrt{\frac{t_a \tau_a^2 + t_{vc} \tau_{vc}^2 + t_d \tau_d^2 + t_r \tau_r^2}{t_a + t_{vc} + t_d + t_r}} \quad (4.68)$$

El posicionamiento implica movimientos entre diferentes ángulos  $(-\pi, \pi)$ , no se quiere movimiento rotación a velocidad constante, por ende es más importante considerar la potencia desarrollada en un ciclo de trabajo del motor, con esta consideración se calcula la potencia, que es el torque eficaz multiplicado por la velocidad angular (caso más desfavorable igual a la velocidad nominal de operación), es decir:

$$P = \tau_{rms} \omega_m \quad (4.69)$$

Donde  $\tau_{rms}$  esta en Nm y  $\omega_m$  en rad/s , la potencia facilita la elección del motor, debido a que este es dado por los fabricantes, al igual que la velocidad y el torque nominal.

De las condiciones de diseño sobre el tiempo de establecimiento (sección 1.1). El tiempo de posicionamiento debe cumplir, en el caso más desfavorable la siguiente expresión:

$$t_a + t_{vc} + t_d \leq 2 \text{ seg} \quad (4.70)$$

En este punto se observa que no hay restricción sobre el valor de relación de engranajes, tampoco hay restricción sobre la tensión nominal del motor.

La relación de engranajes debe presentar un valor que permita que la velocidad de rotación de la carga no supere la velocidad crítica calculada en la sección 4.1.1-d.

Los valores para la fricción de coulomb, fricción viscosa del cojinete de deslizamiento se consideran aproximados a valores obtenidos en aplicaciones con par de fricción [2]. Estos valores se indican en la siguiente tabla 4.3

**Tabla 4.3** Constante de fricción del cojinete de deslizamiento.

$C_{co}$	Constante de coulomb (Nm)	0.15
$b_L$	Constante de fricción viscosa (Nm/rad/s)	$10^{-3}$

Se escoge como tensión nominal de alimentación al motor un valor igual a 24V DC (valor comercial), podría ser otro valor. Con el valor de tensión, se eligen motores de 24V DC y potencia dada de un fabricante cualquiera.

Finalmente con estas consideraciones previas y con las ecuaciones (4.64), (4.65), (4.66), (4.67), (4.68), (4.69) y (4.70), mediante prueba y error se encuentra el motor

adecuado cuyo torque nominal es 0.060 Nm cuya potencia máxima es mayor que la potencia calculada. Las características del motor se describen en el anexo C. La siguiente tabla muestra los valores consignados a las variables y cálculos de variables que permiten calcular el torque nominal del motor  $\tau_m$ :

**Tabla 4.4** Resumen de valores de diseño

$t_a$	Tiempo de aceleración (s)	0.200
$t_{vc}$	Tiempo de velocidad constante (s)	1.800
$t_d$	Tiempo de desaceleración (s)	0.200
$t_r$	Tiempo en reposo (posición final) (s)	5.000
$\omega_m$	Velocidad nominal del motor RPM	3000
$\omega_m$	Velocidad nominal del motor rad/s	314.15
$n$	Relación de engranajes	18
$\omega$	Velocidad nominal de robot RPM	166.66
$\omega$	Velocidad nominal de robot rad/s	17.45
$\tau_a$	Torque aceleración (Nm)	0.212
$\tau_{vc}$	Torque velocidad constante (Nm)	0.114
$\tau_d$	Torque desaceleración (Nm)	0.017
$\tau_r$	Torque en la posición $\pi/2$ rad	0.0356
$\tau_{rms}$	Torque eficaz (Nm)	0.072
$P$	Potencia desarrollada por el motor (w)	22.614
$\tau_m$	<b>Torque nominal motor (Nm)</b>	<b>0.060</b>

La siguiente tabla muestra las características generales del motor DC a usar:

**Tabla 4.5** Resumen de valores de diseño

$V_N$	Tensión de alimentación nominal VDC	24
$R_a$	Resistencia de armadura (ohm)	4.2
$L_a$	Inductancia de armadura (mH)	1.7
$K_m$	Constante de torque del motor (Nm/A)	$56 \times 10^{-3}$
$J_m$	Inercia del rotor ( $\text{kgm}^2$ )	$70 \times 10^{-7}$
$b_m$	Coefficiente fricción del motor (Nm/rad/s)	$1.9 \times 10^{-4}$
$K_b$	Const. de fuerza contraelectromotriz (V/rad/s)	$56 \times 10^{-3}$
$P$	Potencia nominal (w)	20
$P$	Potencia máxima (w)	30

Con la tensión  $V_N$  del motor y la ecuación (4.43) se obtiene la constante de amplificación que es igual a  $K_a = 24/5 = 4.8$ .

#### 4.5 Linealización del modelo matemático

Por facilidad la linealización que se plantea es alrededor de  $\theta = X_1 = 0$  (figura 4.5) y no se considera la fricción de coulomb  $Cco$  que se opone al movimiento. Ya que la linealización es alrededor de cero se considera que  $\sin(X_1) \approx X_1$ , por tanto las ecuaciones (4.61) y (4.62) simplificadas son:

$$f(\mathbf{X}, U, t) = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{Mgd}{J}X_1 - \frac{B}{J}X_2 + \frac{K_m n}{J}X_3 \\ \frac{-K_b n}{L_a}X_2 - \frac{R_a}{L_a}X_3 + \frac{K_a}{L_a}U \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$g(\mathbf{X}, U, t) = X_1 \quad (4.72)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.71) y (4.72) en la ecuación (3.15), se obtiene las ecuaciones residuales de estado y salida alrededor de  $X_1 = 0$  (ecuaciones linealizadas). Estas ecuaciones son:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.73)$$

$$\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.74)$$

Donde:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{Mgd}{J} & -\frac{B}{J} & \frac{K_m n}{J} \\ 0 & -\frac{K_b n}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix}; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_a}{L_a} \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

$$C(t) = (1 \quad 0 \quad 0) \quad ; \quad D(t) = (0)$$

#### Elección del Periodo de Muestreo

Teniendo en cuenta tanto la dinámica del sistema, como las prestaciones computacionales de cálculo, se debe seleccionar un periodo de muestreo basado en las siguientes consideraciones:

- Dinámica del sistema suficientemente lenta frente al periodo de muestreo.
- Tiempo de conversión A/D y D/A de la tarjeta utilizada.
- Tiempo de cálculo estimado para el algoritmo de control
- Tiempo dedicado a las comunicaciones entre la estación de desarrollo y el computador de control.

En el presente informe, ya que no considera una implementación del sistema de control, la elección del periodo de muestro se realiza teniendo en cuenta las

características de respuesta en lazo cerrado que se desea obtener, este periodo de muestreo se debe elegir menor que 10 veces la duración de un ciclo de oscilación sinusoidal amortiguada de la señal de respuesta (para el caso de respuesta subamortiguada), para el caso de respuesta sobreamortiguada se escoge un periodo de muestreo 10 veces menor que el tiempo de levantamiento [2].

En las condiciones de diseño se pretende controlar la posición en un tiempo de establecimiento de 2 *seg*. Con lo cual se escoge un periodo de muestreo:

$$T \leq 0.2 \text{ seg}$$

También el periodo de muestreo debe ser menor que la constante de tiempo mecánico (10 *mseg*) (anexo C). La simulación del sistema de control para diferentes periodos de muestreo menores que 0.2 *seg*, permite obtener un periodo de muestreo adecuado cuyo valor está dado por la ecuación 4.76.

$$T = 0.001 \text{ seg} \tag{4. 76}$$

Un periodo de muestreo demasiado bajo implica demasiada carga computacional en la ejecución del algoritmo de control.

## CAPITULO V

### DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

#### 5.1 Introducción al Control Adaptivo

Los sistemas de control adaptivo ajustan su comportamiento a las propiedades cambiantes, del proceso controlado y de las señales que interactúan sobre dicho proceso. Por el contrario, los sistemas de control fijos se caracterizan por la presencia de una ley de control invariable con el tiempo.

La investigación sobre controladores adaptivos se ha centrado en dos grupos principales: controladores adaptivos con un modelo referencial y controladores con autosintonización [1]. En este informe se emplea la configuración de un sistema de control adaptivo con autosintonización cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 5.1.

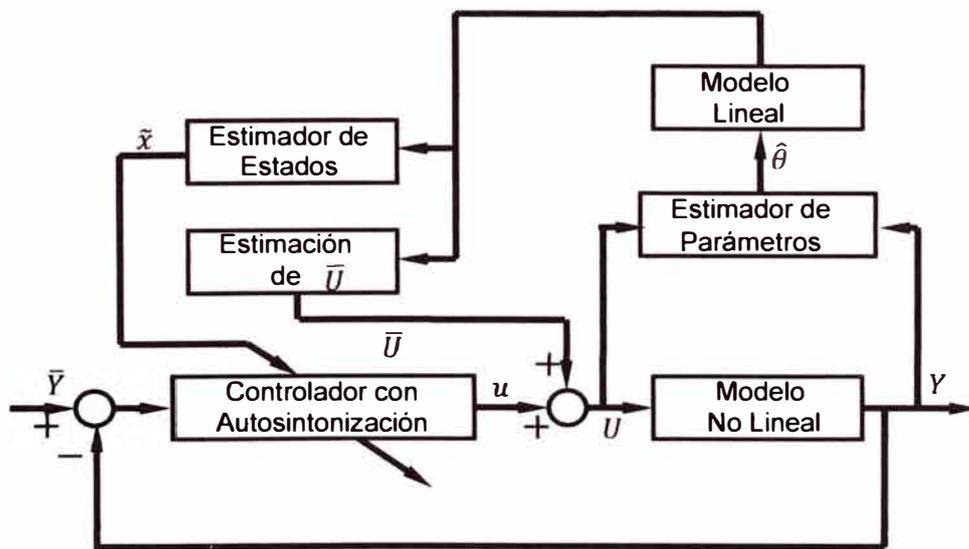


Figura 5.1 Control adaptivo con autosintonización.

Esta configuración combina en su diseño un método de estimación de parámetros (mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido), una técnica de estimación de estados, una representación lineal del modelo del proceso, y una ley de control (el controlador proporcional integral óptimo cuadrático con realimentación de estados). El

objetivo del control es determinar una fuerza de control capaz de minimizar la diferencia entre la salida del proceso y la señal de referencia.

El sistema de control con autosintonización mostrado en la figura 5.1, opera como sigue: luego de cada tiempo de muestreo, el vector estimado de parámetros  $\hat{\theta}$  se actualiza empleando los datos proporcionados por la variable de entrada  $U$  del proceso y por la respuesta  $Y$  del mismo. Luego, los elementos de  $\hat{\theta}$  se usan para recuperar el modelo lineal del proceso, lo cual permite estimar el vector de estado  $\hat{x}$  del modelo del proceso (empleando observadores de estado óptimo) y el valor de equilibrio  $\bar{U}$  de la ley de control actual  $U$ . Tales resultados se usan luego para calcular la ley de control residual  $u$  y para actualizar la ley de control actual  $U$  a partir de la relación  $U = \bar{U} + u$ .

## 5.2 Procedimiento de estimación Método mínimos cuadrados recursivos

Una parte muy importante de los sistemas de control adaptivos es el algoritmo de identificación de parámetros, consumiendo este la mayor parte del tiempo de cálculo en cada periodo de muestreo.

### 5.2.1 Modelamiento de sistemas no lineales

En la figura 5.1, para estimar los parámetros del modelo del proceso se usa las señales  $U$  e  $Y$ .

Sea un sistema no lineal y variante en el tiempo representada por las ecuaciones (3.3) y (3.4) en donde la salida y la señal de control son vectores de dimensión  $1 \times 1$ , es decir:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \quad (5.1)$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t), t) \quad (5.2)$$

Linealizando alrededor de un punto de equilibrio  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{U})$  se obtiene las ecuaciones residuales de estado y salida como las descritas en las ecuaciones (3.16) y (3.17):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (5.3)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (5.4)$$

Con las variables residuales:

$$y(t) = Y(t) - \bar{Y}(t) \quad (5.5)$$

$$x(t) = X(t) - \bar{X}(t) \quad (5.6)$$

$$u(t) = U(t) - \bar{U}(t) \quad (5.7)$$

Con base en las ecuaciones (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7), se puede decir en tiempo discreto, que en cada periodo de muestreo se puede representar el sistema no lineal como un sistema lineal cuyas ecuaciones de estado y salida son representados por las ecuaciones (3.28) y (3.29), en donde se considera la matriz D nula (D=0):

$$X(k+1) = GX(k) + HU(k) \quad (5.8)$$

$$Y(k) = CX(k) \quad (5.9)$$

Donde  $k$  es el tiempo discreto y las matrices  $G$  y  $H$  poseen las mismas dimensiones que las matrices  $A$  y  $B$  correspondiente al sistema continuo.

Ya que el sistema descrito por las ecuaciones (5.8) y (5.9), va cambiando conforme cambia el número de muestras, las variaciones con respecto a un punto de equilibrio se representa por la ecuación polinomial residual (ya que en el informe la variable de entrada y la respuesta del proceso son unidimensionales):

$$\mathcal{A}(z^{-1})y(k) = \mathcal{B}(z^{-1})u(k) \quad (5.10)$$

Donde  $z$  es el operador de desplazamiento, con:

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n} \quad (5.11)$$

$$\mathcal{B}(z^{-1}) = b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n} \quad (5.12)$$

Las variables residuales en forma digital al igual que las ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.7) que están en tiempo continuo son:

$$u(k) = U(k) - \bar{U}(k) \quad (5.13)$$

$$x(k) = X(k) - \bar{X}(k) \quad (5.14)$$

$$y(k) = Y(k) - \bar{Y}(k) \quad (5.15)$$

Reemplazando estas ecuaciones residuales digitales, en las ecuaciones (5.8), (5.9) y (5.10). Y considerando que en el equilibrio se cumple:

$$\bar{X}(k+1) = G\bar{X}(k) + H\bar{U}(k) \quad , \quad \bar{Y}(k) = C\bar{X}(k)$$

Se obtiene:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (5.16)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (5.17)$$

$$\mathcal{A}(z^{-1})Y(k) = \mathcal{B}(z^{-1})U(k) + c \quad (5.18)$$

Donde la constante  $\mathcal{C}$  se obtiene de la ecuación:

$$\mathcal{C} = (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)\bar{Y} - (b_1 + b_2 + \dots + b_n)\bar{U} \quad (5.19)$$

Ya llegado a este punto las matrices  $G$  y  $H$  se deben actualizar en cada periodo de muestreo, para esto se usa el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido [1].

### 5.2.2 Método de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido

La estimación de parámetros se realiza en línea en cada periodo de muestreo, por lo que se usa el método recursivo del algoritmo. Por todo ello es interesante de disponer de un algoritmo de identificación que sea adecuado en tiempo de ejecución y convergencia.

Para estimar los parámetros se usan las señales actuales:  $U(k)$  e  $Y(k)$  mostradas en la figura 5.1, la ecuación (5.18) también se puede expresar como ecuación de diferencias para obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z^{-1})Y(k) &= \mathcal{B}(z^{-1})U(k) + \mathcal{C} \\ Y(k) &= -\hat{a}_1 Y(k-1) - \dots - \hat{a}_n Y(k-n) + \hat{b}_1 U(k-1) + \dots + \hat{b}_n U(k-n) + \hat{c} \\ Y(k) &= (Y(k-1), \dots, Y(k-n), U(k-1), \dots, U(k-n), 1) \begin{pmatrix} -\hat{a}_1 \\ \vdots \\ -\hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \\ \hat{c} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

De la ecuación (5.20) se denota las siguientes matrices como:

$$\psi^T(k) = (Y(k-1), \dots, Y(k-n), U(k-1), \dots, U(k-n), 1) \quad (5.21)$$

$$\hat{\theta}^T(k) = (-\hat{a}_1, \dots, -\hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{c}) \quad (5.22)$$

Donde  $\psi$  y  $\hat{\theta}$  son el vector información y el vector parámetros estimados los cuales son del orden  $2n + 1$ .

Reemplazando las ecuaciones (5.21) y (5.22) en (5.20) la ecuación (5.20) queda:

$$Y(k) = \psi^T(k)\hat{\theta}(k) \quad (5.23)$$

Con la ecuación (5.23) y minimizando el cuadrado del error de estimación ( $e(k) = Y(k) - \psi^T(k)\hat{\theta}(k-1)$ ), se obtiene el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido [1].

Este algoritmo se implementa de la siguiente manera:

1. Obtener el vector de parámetros inicial  $\hat{\theta}(k)$ , para ello se usan los valores del modelo linealizado del proceso.
2. Obtener el valor inicial del parámetro  $C(k)$ , de la ecuación (5.19) considerando  $\bar{U} = 0$  e  $\bar{Y}$  igual a la señal de referencia.
3. La matriz de covarianza inicial  $P(k)$  puede tener la forma  $P = \alpha I$ , donde  $I$  es la matriz identidad y  $\alpha \gg 1$ .
4. La matriz  $R_p$  es positiva, esta matriz asegura que la matriz de covarianza  $P$  permanezca limitada a un valor superior a  $R_p$  y el valor de  $traza_{max}$  acota superiormente a la matriz de covarianza  $P$ . Estos son valores escogidos a priori.
5. El parámetro  $S_0$  está relacionado con la suma de errores al cuadrado del proceso de estimación, este parámetro se escoge aleatoriamente (a priori).
6. El factor de olvido  $\lambda$  depende de cada aplicación y generalmente toma valores entre 0.98 y .1.
7. Tomar nuevas mediciones de  $Y(k + 1)$  y de  $U(k + 1)$  para obtener el vector  $\psi(k + 1)$ .
8. Calcular el error de estimación  $e(k + 1) = Y(k + 1) - \psi^T(k + 1)\hat{\theta}(k)$
9. Calcular  $L(k + 1)$ , el cual es dado por la expresión:

$$L(k + 1) = \frac{P(k)\psi(k + 1)}{\lambda(k) + \psi^T(k + 1)P(k)\psi(k + 1)}$$

10. Calcular los parámetros estimados:

$$\hat{\theta}(k + 1) = \hat{\theta}(k) + L(k + 1)e(k + 1)$$

11. Calcular el nuevo factor de olvido  $\lambda(k + 1)$ :

$$\lambda(k + 1) = 1 - (1 - \psi^T(k + 1)L(k + 1))\frac{e(k + 1)^2}{S_0}$$

$$\text{Si: } \lambda(k + 1) < \lambda_{min} \quad \text{Entonces } \lambda(k + 1) = \lambda_{min}$$

$$\text{Si: } \lambda(k + 1) > 1 \quad \text{Entonces } \lambda(k + 1) = 1$$

12. Actualizar la matriz de covarianza

$$W(k + 1) = (1 - L(k + 1)\psi^T(k + 1))P(k) + R_p$$

Si:  $\text{traza} \left( \frac{W(k+1)}{\lambda(k+1)} \right) > \text{traza}_{max}$  Entonces  $\lambda(k+1) = 1$

En caso contrario dejar  $\lambda(k+1)$ .

$$P(k+1) = \frac{W(k+1)}{\lambda(k+1)}$$

13. Hacer  $k = k + 1$  y volver al paso 7.

### 5.3 Diseño de sistema de control adaptivo autosintonizado

Con la teoría ya descrita sobre estimación de parámetros, con el modelo lineal del robot de un grado de libertad, estimación de estados y con la teoría de control óptimo cuadrático, se procede al diseño de un sistema de control adaptivo autoajustado para el posicionamiento de un robot de un grado de libertad.

El procedimiento de diseño puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Formular el problema, definir especificaciones de diseño (sección 1.1).
2. Determinar el modelo no lineal y lineal del proceso (sección 4)
3. Implementar el método de los mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido, para estimar los parámetros del modelo del proceso.
4. Implementar el procedimiento de estimación de estados del modelo del proceso, definir las matrices de covarianza y  $R_0$  y  $Q_0$  para el filtro de Kalman.
5. Implementar la ley de control residual  $u(k)$  dada por la ecuación (5.13), computar  $\bar{U}(k)$  usando la ecuación (5.19), y actualizar la ley de control actual empleando la relación  $U(k) = u(k) + \bar{U}(k)$ .
6. Simular el sistema de control adaptivo variando las matrices de ponderación,  $R$  y  $Q$  de la función costo en la realimentación de estados, hasta obtener un rendimiento satisfactorio del sistema.

### 5.4 Control adaptivo autosintonizado de robot de un grado de libertad

En esta sección se diseña el control adaptivo autosintonizado, aplicado al movimiento de rotación del robot de un grado de libertad, en base al modelo matemático calculado, las condiciones de diseño y la teoría de control adaptivo autosintonizado.

#### 5.4.1 Formulación del Problema

El robot de un grado de libertad consta de un motor DC de imán permanente, el cual es acoplado mediante engranajes a un brazo mecánico (sistema no lineal visto en la

sección 4, de simple de entrada y simple salida (posición)), que es controlado por el voltaje de armadura. El objetivo del control es diseñar un sistema de control adaptivo con autosintonización, de modo tal que el brazo se posicione en una referencia predeterminada, con mínimo sobreimpulso en su respuesta y cumpliendo los criterios de diseño, a pesar de la presencia de la carga no lineal y de las no linealidades inherentes del proceso como son las fricciones estática y de Coulomb.

#### 5.4.2 El Modelamiento del Proceso

La figura 5.1 representa la estructura del proceso no lineal a controlar. Las tablas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 describen las variables consideradas para el proceso. Se ha visto en la sección 4.3 que el proceso no lineal, puede ser descrito mediante un modelo lineal en el espacio de estado mediante las ecuaciones (4.71), (4.72), (4.73) y (4.74):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad ; \quad y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Donde:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{Mgd}{J} & -\frac{B}{J} & \frac{K_m n}{J} \\ 0 & -\frac{K_b n}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix} ; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_a}{L_a} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$C(t) = (1 \quad 0 \quad 0) \quad ; \quad D(t) = (0)$$

La función de transferencia pulso  $G_p(z)$  (ecuación 4.35), para un tiempo de muestreo  $T = 0.001 \text{ seg}$  tiene la forma:

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} \quad (5.25)$$

De la ecuación (5.25), el proceso puede adoptar múltiples representaciones en el espacio de estado como las ecuaciones (3.28) y (3.29), en donde la forma canónica controlable está dada por las ecuaciones (3.33) y (3.34), por lo que la la representación canónica controlable de la ecuación (5.25) es:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad ; \quad y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (5.26)$$

Donde:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} ; \quad H = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_1 b_1 - a_2 b_0 \\ b_3 - a_1(b_2 - a_1 b_1 - a_2 b_0) - a_2(b_1 - a_1 b_0) - a_3 b_0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

$$C = (1 \quad 0 \quad 0) \quad ; \quad D = (0)$$

Donde  $G$ ,  $H$  y  $C$  son las matrices de estado, de control y de salida respectivamente,  $b_0 = 0$  (de la ecuación 5.25).

### 5.4.3 Estimación de parámetros

Para estimar (o identificar) los parámetros del modelo del proceso, se emplea el método de los mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido, descrito en la subsección 5.2.2 y es desarrollado como sigue:

Como primer paso, se calcula el vector inicial de parámetros en base al modelo lineal, con los valores respectivos alrededor de la posición  $\theta = 0$ , con la que la ecuación (5.22) queda:

$$\theta(0) = (-a_1 \quad -a_2 \quad -a_3 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \mathcal{C}(0))^T$$

Como segundo paso se calcula el valor inicial de  $\mathcal{C}(0)$  (ecuación (5.19)) con  $\bar{U} = 0$  e  $\bar{Y}$  igual a la señal de referencia es decir:

$$\mathcal{C}(0) = (1 + a_1 + a_2 + a_3) \bar{Y}$$

En tercer paso se fija la matriz de covarianza inicial  $P$  y la matriz  $R_p$  de orden 7:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} ; \quad \alpha = 9 \times 10^6$$

$$R_p = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} ; \quad \alpha_1 = 9$$

Como cuarto paso, definir valores de  $traza_{max}$ ,  $S_0$ ,  $\lambda_{min}$ ,  $\lambda_0$ :

$$traza_{max} = 5 \times 10^8$$

$$S_0 = 9 \times 10^{-6}$$

$$\lambda_{min} = 0.98$$

$$\lambda_0 = 0.99$$

Como quinto paso se obtiene nuevas mediciones de  $Y$  y  $U$ ; para después ejecutar el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido visto en la sección 5.2.2.

#### 5.4.4 Estimación de estados

El procedimiento para la estimación óptima de estados (filtro de Kalman), se ha descrito en la sub sección 3.2.10, el procedimiento de estimación de parámetros (sección 5.4.3) proporciona el vector de parámetros estimados del proceso es decir:

$$\hat{\theta}(k) = (-\hat{a}_1(k) \quad -\hat{a}_2(k) \quad -\hat{a}_3(k) \quad \hat{b}_1(k) \quad \hat{b}_2(k) \quad \hat{b}_3(k) \quad \hat{c}(k))^T$$

Con los elementos del vector de parámetros, se reconstruye las matrices estimadas  $\hat{G}(k)$ ,  $\hat{H}(k)$  y  $\hat{C}(k)$  que corresponden a la representación canónica controlable ecuación (5.27). Es decir:

$$\hat{G}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\hat{a}_3(k) & -\hat{a}_2(k) & -\hat{a}_1(k) \end{pmatrix}; \quad \hat{H}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{C}(k) = (\hat{b}_3(k) \quad \hat{b}_2(k) \quad \hat{b}_1(k)); \quad \hat{D}(k) = (0)$$

Las ecuaciones para estimar el vector de estados  $\hat{x}$  (filtro de Kalman), han sido descritos en la sección 3.2.10:

$$\hat{x}(k) = x^-(k) + K_0(k) (y(k) - \hat{C}(k)x^-(k))$$

$$x^-(k+1) = \hat{G}(k)\hat{x}(k) + \hat{H}(k)u(k)$$

$$K_0(k) = P_0(k)C^T(k)(\hat{C}(k)P_0(k)\hat{C}^T(k) + R_0)^{-1}$$

Las matrices de covarianza de los disturbios  $v$  y  $w$  son  $Q_0 = 0.0001$  y  $R_0 = 0.01$ .

#### 5.4.5 La ley de control

Para determinar el controlador proporcional-integral, óptimo cuadrático con realimentación de estados estimados, la representación en el espacio de estado aumentado toma la siguiente forma descrita en 3.2.8-b:

$$X^a(k+1) = G^a(k)X^a(k) + H^a(k)u(k) \quad ; \quad y(k) = C^a(k)X^a(k)$$

$$X^a(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix}; \quad G^a(k) = \begin{pmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{pmatrix}$$

$$H^a(k) = \begin{pmatrix} H \\ -CH \end{pmatrix}; \quad C^a(k) = (C \quad 0)$$

La matriz de control  $K^a$  (ecuación 3.43), se obtiene de:

$$K^a(k) = \left( R + (H^a(k))^T P^a(k) H^a(k) \right)^{-1} \left( (H^a(k))^T P^a(k) G^a(k) \right)$$

Donde la matriz  $P^a$  se obtiene al iterar la ecuación de Riccati en cada periodo de muestreo. Los valores de  $R$  y  $Q^a$  que proporcionan resultados aceptables son:

$$R = 0.01 \quad ; \quad Q^a = \begin{pmatrix} 0.088 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.09 \end{pmatrix}$$

#### 5.4.6 La ley de control Residual

Para el sistema de control en lazo cerrado se puede tomar la señal  $\bar{Y}(k)$ , igual a la referencia para todo  $k$ . Así podemos calcular la ley de control residual empleando la relación:

$$u(k) = U(k) - \bar{U}(K)$$

Donde:

$$\bar{U}(K) = \left( \hat{b}_1(k) + \hat{b}_2(k) + \hat{b}_3(k) \right)^{-1} \left[ (1 + \hat{a}_1(k) + \hat{a}_2(k) + \hat{a}_3(k)) \bar{Y}(k) - \hat{c}(k) \right]$$

Finalmente, se actualiza la ley de control actual:

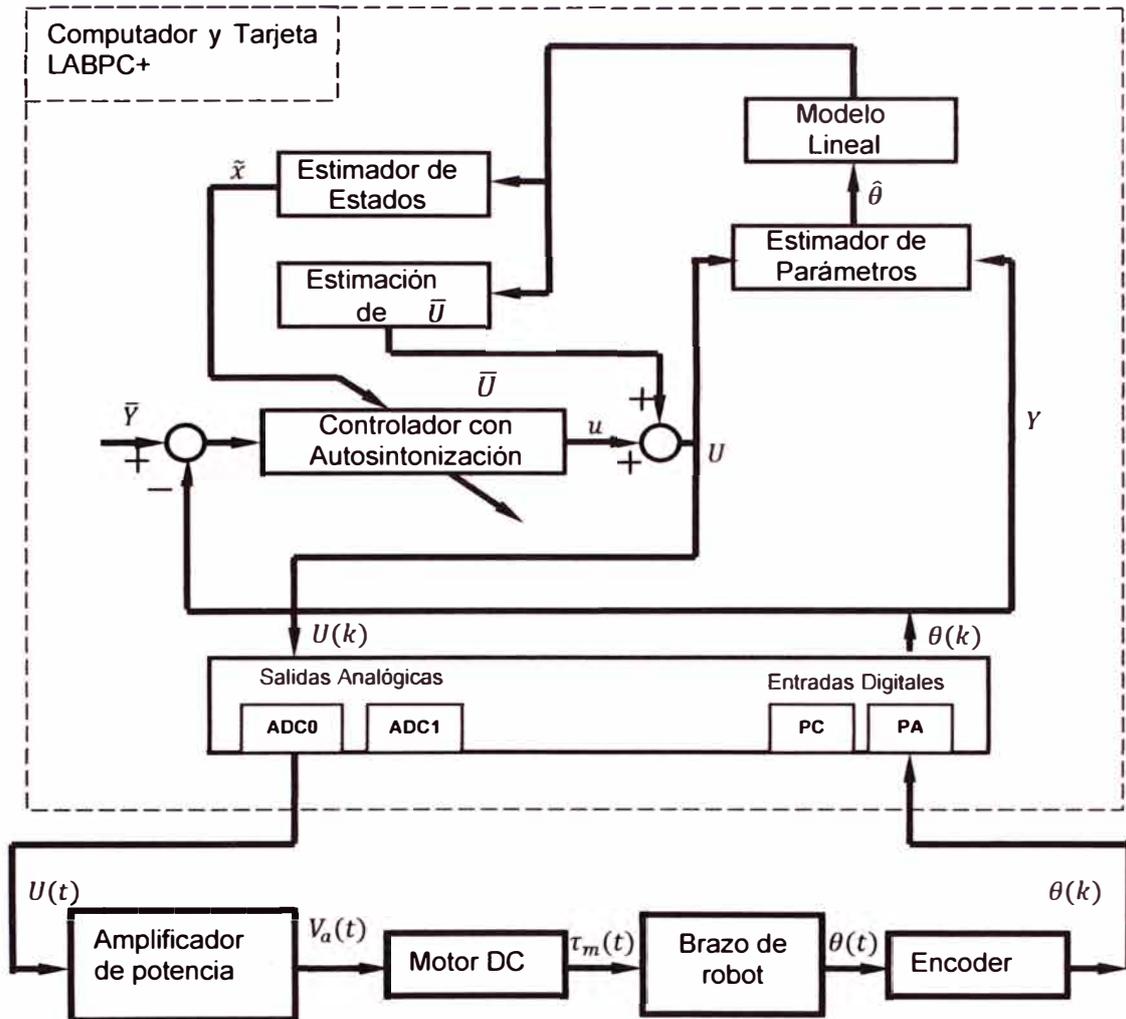
$$U(k) = u(k) + \bar{U}(K)$$

#### 5.4.7 Simulación de control adaptivo autosintonizado:

La figura 5.2 muestra el diagrama de bloques, del sistema de control adaptivo autoajustado del posicionamiento del robot de un grado de libertad que se plantea.

Se usa el software Matlab V11.0 para la simulación del proceso mediante el método de Runge Kutta de orden 4, el software también permite simular el algoritmo de control adaptivo autoajustado que se diseña en las secciones anteriores, es decir permite la estimación de parámetros mediante el método de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido, además del cálculo de la matriz de ganancia del filtro de Kalman, de la matriz de ganancia de realimentación de estados estimados para el control proporcional integral. El algoritmo de control y estimación de parámetros se muestra en el anexo D.

Previamente se muestra el algoritmo de estimación de parámetros, para después mostrar la simulación del control adaptivo autoajustado para el posicionamiento del robot de un grado de libertad, considerando dos tipos de referencia una onda senoidal y otra de tipo cuadrada con la misma frecuencia y amplitud, cuyo fin es mostrar las respuestas para entradas de referencia suaves y bruscas (señal escalón), en el posicionamiento del robot de un grado de libertad.



**Figura 5.2** Diagrama de bloques del control adaptivo con autosintonización del posicionamiento del robot de un grado de libertad.

### 5.5. Simulación del algoritmo de estimación de parámetros

La simulación del algoritmo de estimación de parámetros con el método de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido (anexo D), consiste en mostrar entre cada periodo de muestreo, la variación de los parámetros estimados para una variación en la señal de entrada y respuesta considerando el sistema en lazo abierto, adicionalmente se muestran la señal de respuesta estimada y el error de estimación.

Los parámetros estimados se calculan entre cada periodo de muestreo, para la simulación se considera una señal de entrada como se indica:

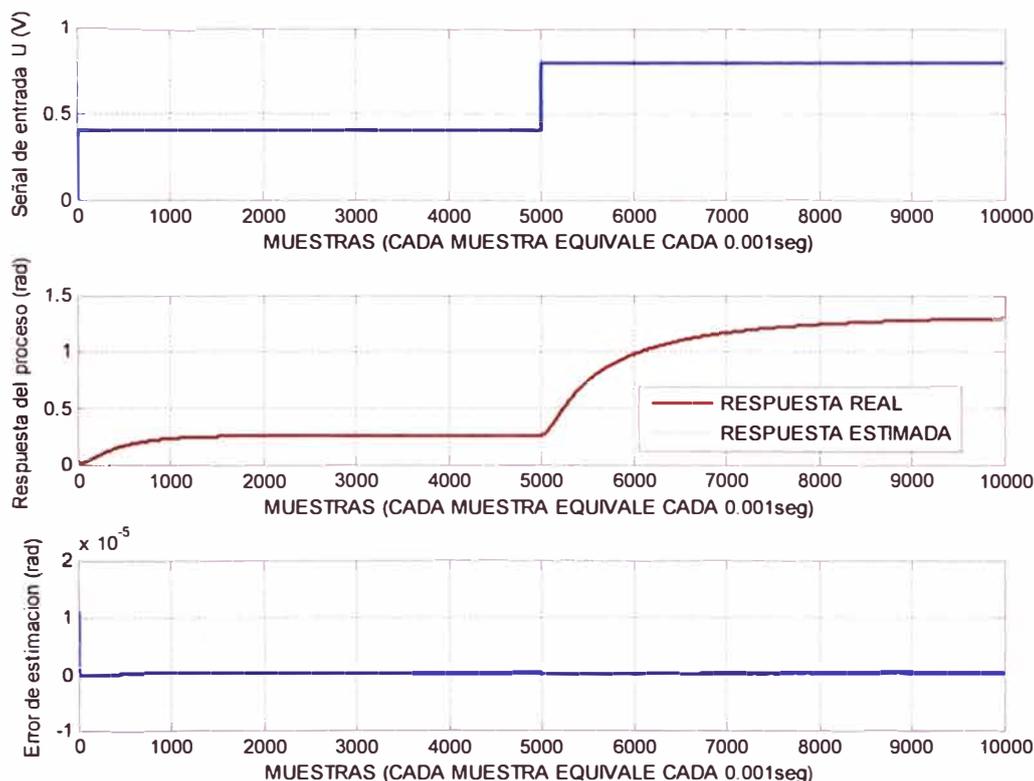
$$u = 0.4 \text{ V} \quad \text{si} \quad 0 < t < 5 \text{ seg}$$

$$u = 0.8 \text{ V} \quad \text{si} \quad 5 \text{ seg} \leq t < 10 \text{ seg}$$

El tiempo de 5 *seg* (puede ser otro valor) es el tiempo en el cual se observa el establecimiento del proceso en lazo abierto para una señal de entrada de 0.4 V, a partir

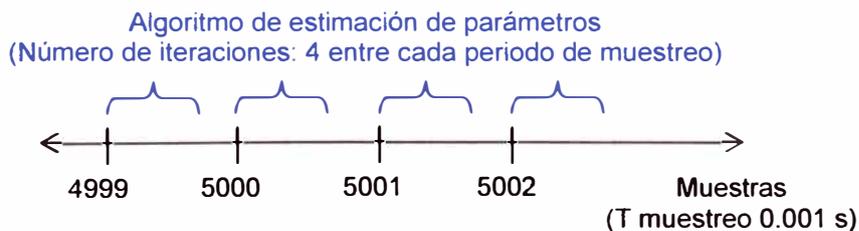
de este punto, se cambia la señal de entrada a  $0.8\text{ V}$ . Este cambio permite variar los valores de los parámetros estimados (se logra observar el cambio en los parámetros estimados).

La figura 5.3 muestra la señal de entrada, la señal de respuesta real y estimada (posición del brazo de robot) y el error de estimación en cada muestra, para un total de 10000 muestras, el periodo de muestreo es  $T = 0.001\text{ seg}$ .



**Figura 5.3** Señal de entrada, respuesta del proceso y error de estimación.

Debido a que el periodo de muestreo es igual a  $0.001\text{ s}$ , el cambio de señal de entrada ( $t = 5\text{ s}$ ) se da en el muestreo número 5000 de la simulación del proceso (ver figura 5.3). Se analiza la estimación de parámetros para un cambio de la señal de entrada como se mencionó anteriormente, para esto se escoge los siguientes números de muestreo alrededor del muestreo número 5000 (ver figura 5.4).



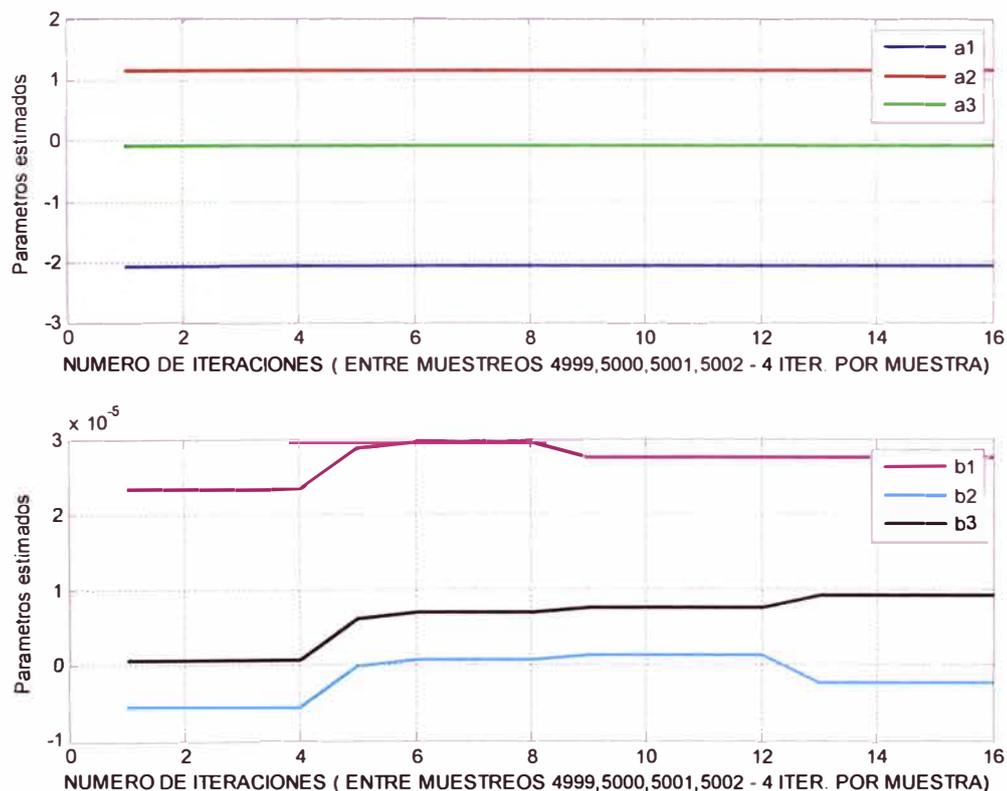
**Figura 5.4** Estimación de parámetros entre los muestreos número 4999, 5000, 5001, 5002.

El número de iteraciones del algoritmo de estimación de parámetros con factor de olvido entre cada muestra se considera igual a 4 (puede ser otro), (ver figura 5.4).

Por otra parte la función de transferencia pulso en lazo abierto del sistema (robot de un grado de libertad) linealizado en cada periodo de muestreo, es considerada según la ecuación (5.25), es decir:

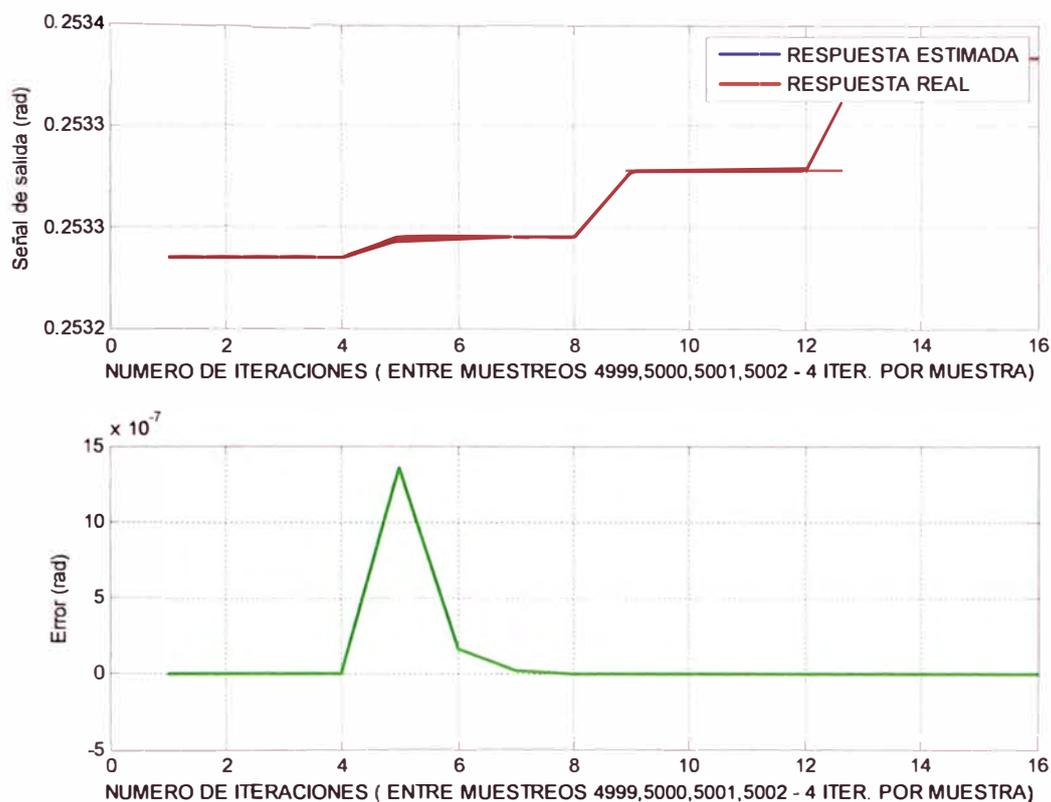
$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$$

La figura 5.5 muestra los valores del cálculo recursivo de los parámetros entre cada periodo de muestreo ( $T = 0.001 \text{ seg}$ ), entre los muestreos número 4999, 5000, 5001 y 5002, es decir se muestra la variación de los valores de los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  de la ecuación anterior, calculados entre números de muestreos mencionados anteriormente (El número de iteraciones (método mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido) es 4).



**Figura 5.5** Parámetros estimados.

La figura 5.6 muestra la respuesta (estimada y real) y el error de estimación debido al algoritmo de estimación de parámetros para los puntos de análisis (muestreo número 4999, 5000, 5001 y 5002).



**Figura 5.6** Señal de respuesta y error de estimación.

Los parámetros se mantienen constantes antes del tiempo de 5 *seg*, como se muestra en la figura 5.5. Es decir en el muestreo número 4999 no hay variación de los parámetros calculados con el algoritmo de estimación (iteraciones 1 hasta 4).

En la figura 5.5 se observa el cambio del valor de los parámetros ( $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$ ) entre las iteraciones 5 y 8 que corresponden a la estimación de parámetros entre el muestreo número 5000 y 5001, se estiman los parámetros a partir del cambio en la señal de entrada (de 0.4 V a 0.8 V a partir del tiempo 5 *seg*). En la figura 5.6 se muestra el error (diferencia entre la señal de salida estimada y real), para el cambio de señal de entrada ( $t = 5$  *seg*) (figura 5.3).

El algoritmo usa los valores de señal de entrada y salida que se miden en cada periodo de muestreo de la simulación de la dinámica del robot de un grado de libertad, con estos datos se estiman nuevos parámetros con el fin de minimizar el error de estimación, esto se da en el muestreo número 5001. Se toman nuevos valores de señal de entrada y salida, con estos valores se itera (algoritmo de estimación de parámetros) y se calcula nuevos valores de parámetros como se muestra en la figura 5.5 (iteraciones entre 9 y 12), estos nuevos parámetros permiten disminuir el error de estimación como se observa en la figura 5.6 (iteraciones entre 9 y 12).

Finalmente en el muestreo número 5002 se obtienen nuevos parámetros (iteración entre 13 y 16 en la figura 5.5) que permiten que el error entre la salida estimada y real sea prácticamente cero como se muestra entre la iteración 13 y 16 de la figura 5.6.

Los parámetros estimados varían en valores pequeños hasta que el proceso alcance una señal de salida constante (aproximadamente en  $2 \text{ seg}$ ), pero siempre manteniendo el error cercano a cero (figura 5.6).

## 5.6 Simulación del algoritmo de control adaptivo autoajustado

En esta sección se presenta los resultados de simulación del algoritmo de control adaptivo autoajustado del posicionamiento del robot de un grado de libertad que se plantea inicialmente, el posicionamiento del robot se ha diseñado para movimientos de rotación entre dos puntos, este movimiento se puede dar de manera rápida o lenta, estos movimientos se aproximan a señales tipo escalón (cambio brusco) y sinusoidal (cambio lento). Se va simular en primer lugar para una señal de referencia tipo escalón y después del tipo sinusoidal (frecuencia de la señal de referencia igual para ambos).

El tiempo de establecimiento de la señal de respuesta debe ser menor a  $2 \text{ seg}$ , es decir medio periodo de la señal de referencia tiene que ser mayor a  $2 \text{ seg}$ , como mínimo para garantizar que la respuesta se aproxime a la referencia con un error de 2%. Con esta consideración se elige medio periodo igual a  $7 \text{ seg}$  para la señal de referencia.

Se considera para la posición de referencia final  $2 \text{ rad}$  (puede ser cualquier valor entre  $-\pi$  y  $\pi \text{ rad}$ ). La posición angular del brazo se considera inicialmente igual a  $0 \text{ rad}$ , ya que se linealiza el proceso en este punto, además de obtener los primeros parámetros del sistema.

### 5.6.1 Referencia señal tipo cuadrada

La señal de referencia tiene la forma  $Y_0 = 2 \text{sign}(\sin(wt)) \text{ rad}$ .

La figura 5.7 muestra la señal de referencia, señal de salida (posición), la señal de control y el error entre la señal de referencia y la respuesta (posición) del proceso. En esta figura se muestra que ante un cambio de la señal de referencia de  $0 \text{ rad}$  a  $2 \text{ rad}$ , el algoritmo de control adaptivo autoajustado permite que la respuesta del proceso (posición del brazo de robot) alcance la posición final con un error menor al 2% en un tiempo menor a los  $2 \text{ seg}$  como se muestra (punto  $X = 2, Y = -0.0159$ ) en la figura 5.7.

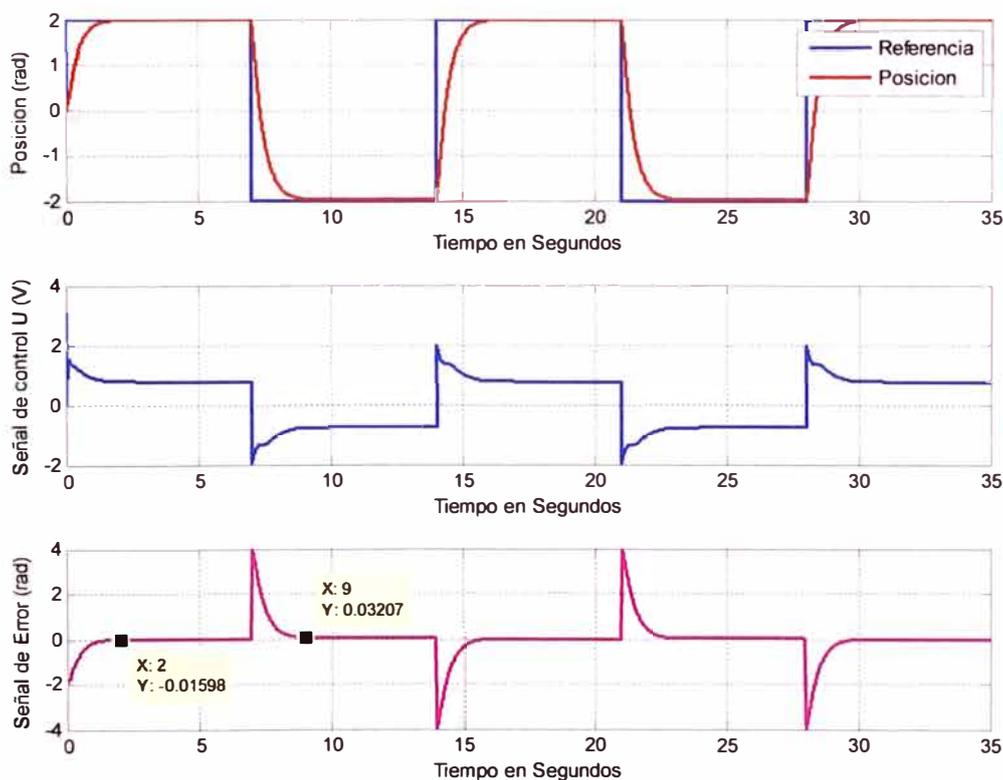
Además se observa que la señal de respuesta (posición) en la etapa transitoria (antes de alcanzar la posición final) no presenta sobreimpulsos. Los valores mencionados en el

párrafo anterior, muestra que el diseño del algoritmo de control adaptivo autoajustado cumple con las consideraciones de diseño planteadas en la sección 1.1.

En la figura 5.7 para el tiempo (segundos)  $7 < t < 14$ , la señal de referencia cambia de  $2 \text{ rad}$  a  $-2 \text{ rad}$ , en estas condiciones de operación se observa lo siguiente, el posicionamiento se da en un tiempo menor a  $2 \text{ seg}$  y con un error final menor a  $2\%$  (ver puntos  $X = 9, Y = 0.032$ ).

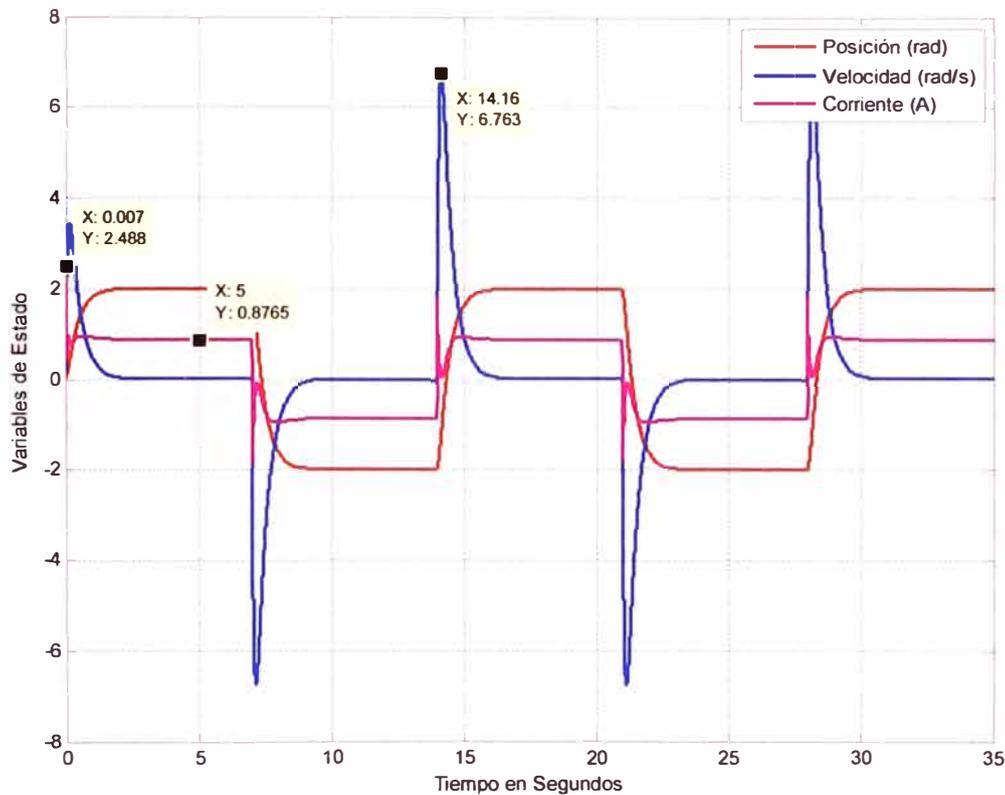
En la figura 5.7, también se observa que la señal de control no sobrepasa los  $5 \text{ V}$  que corresponde a  $24\text{V DC}$ , que es la tensión nominal de alimentación del motor DC empleado. Esto es debido a que en el algoritmo de control se limita la señal de control al rango  $-5 < u < 5$ . Esta señal de control tiene un valor máximo en el inicio debido a que se debe vencer la inercia del brazo de robot.

También se observa que no hay sobreimpulso en la señal de la salida esto se debe a la limitación de la señal de control y la acción integral del controlador.



**Figura 5.7** Señal de respuesta, control y error de estimación.

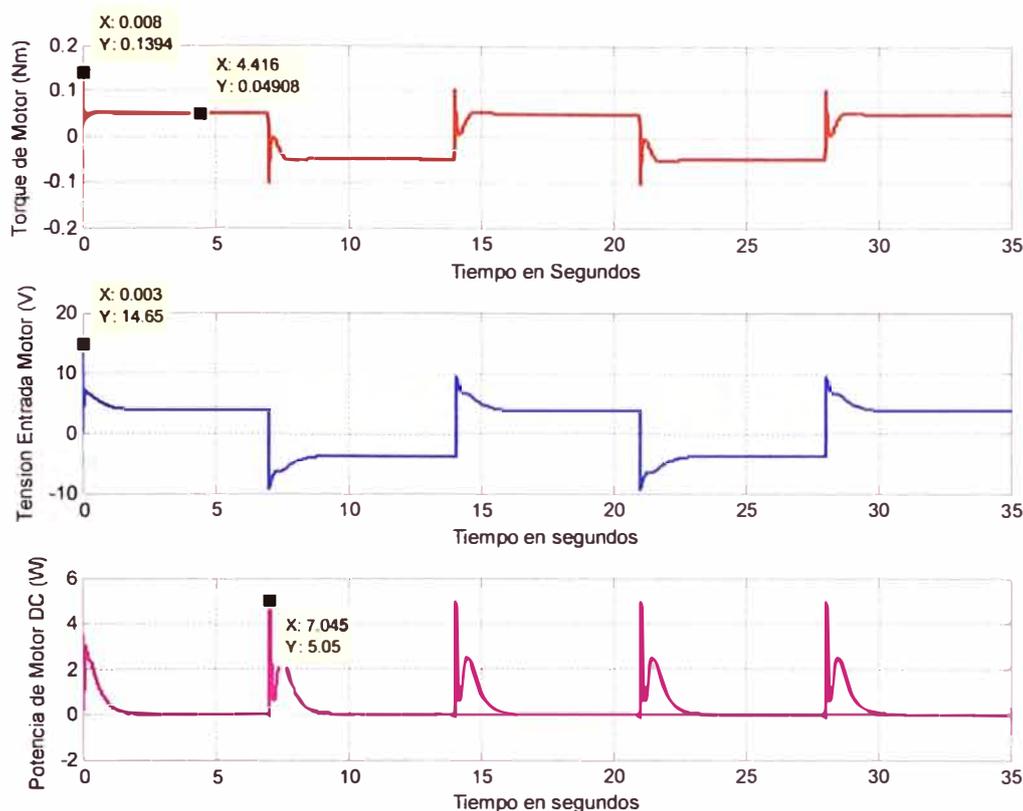
La figura 5.8, muestra las variables de estado de la dinámica del movimiento de rotación del brazo de robot. En esta figura se muestran la señal de salida (posición), la velocidad de rotación del brazo de robot y la corriente que circula por el motor DC que permite cumplir con las condiciones de diseño.



**Figura 5.8** Variables de estado reales del proceso.

La figura anterior muestra que la corriente máxima se da en el inicio con un valor de 2.488 A (punto  $X = 0.007$ ;  $Y = 2.488$ ), que es menor que la corriente máxima de operación del motor DC y que el punto ( $X = 5$ ,  $Y = 0.876$ ) muestra que la corriente de operación es 0.876 A, que es menor a la corriente nominal del motor. También se observa que la velocidad máxima desarrollada en el brazo es de 6.76  $rad/s$  (punto  $X = 14.16$ ,  $Y = 6.76$ ) que equivale a 1161.9  $RPM$  de velocidad del motor que es inferior a la velocidad nominal. (los valores nominales de operación del motor están en el anexo D).

La figura 5.9 muestra el torque desarrollado por el motor, la tensión de alimentación del motor DC y la potencia entregada por el motor en el control de posicionamiento.



**Figura 5.9** Torque y tensión en el motor DC.

En esta figura se muestra valores máximos: Torque máximo igual a  $0.1394 \text{ Nm}$  (punto  $X = 0.008, Y = 0.1394$ ), tensión máxima de motor igual a  $24 \text{ VDC}$  (punto  $X = 0.003, Y = 14.65$ ) y la potencia máxima entregada por el motor que  $5.2 \text{ W}$  (punto  $X = 7.045, Y = 5.05$ ) estos valores están en el rango de operación en arranque del motor DC.

### 5.6.2 Referencia señal tipo sinusoidal

La señal de referencia tiene la forma  $Y_0 = 2 \sin(\omega t) \text{ rad}$ .

La figura 5.10 muestra la referencia, posición (salida del proceso), la señal de control y el error entre la señal de referencia y la respuesta (posición) del proceso. Se muestra que las dos graficas están desfasadas, la respuesta desfasada con respecto a la señal de referencia en un tiempo igual a  $0.47 \text{ seg}$  (tiempo entre los puntos  $X = 17.5, Y = 2$  y  $X = 17.97, Y = 1.972$ ). El error es calculando mediante la diferencia entre la traslación de la señal de referencia un tiempo igual a  $0.47 \text{ seg}$  y la señal de salida (posición).

En la figura se observa que el error máximo es  $0.036 \text{ rad}$  (punto  $X = 12.52, Y = 0.036$ ) y es menor al 2%. La señal de control es máxima al iniciarse el movimiento y oscila entre  $-5$  y  $5 \text{ VDC}$ .

La figura 5.11 muestra las variables de estado del proceso.

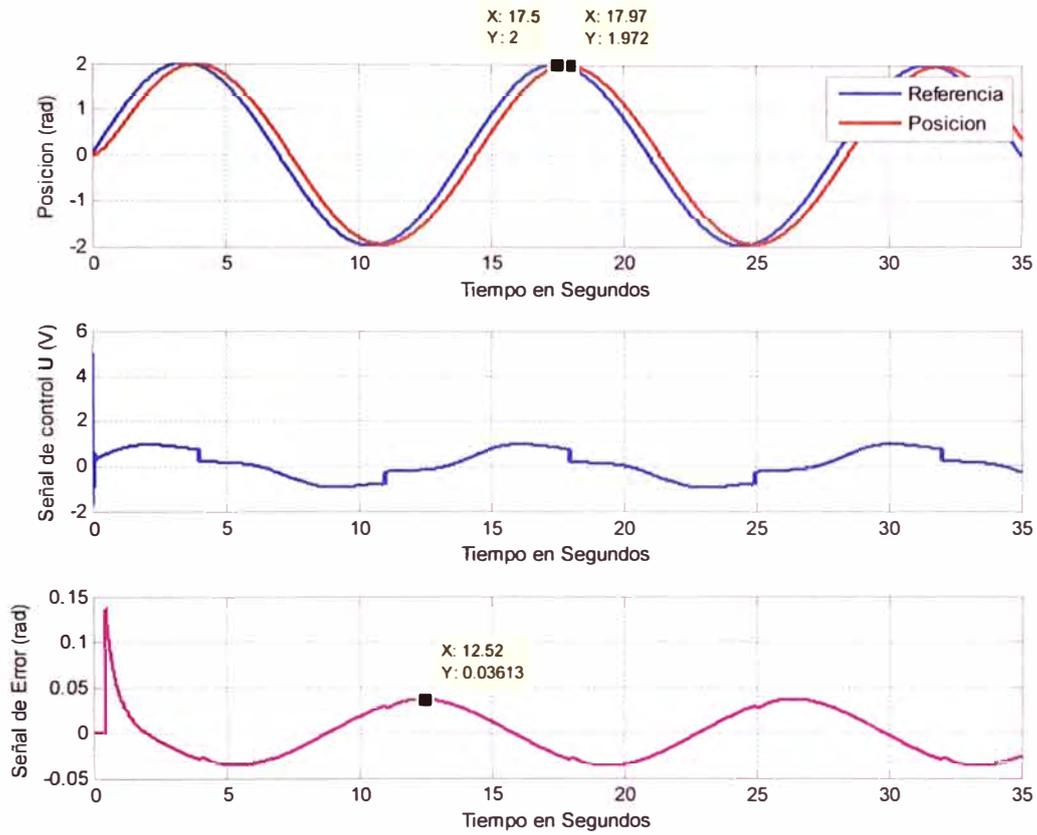


Figura 5.10 Señal de respuesta, control y error de estimación.

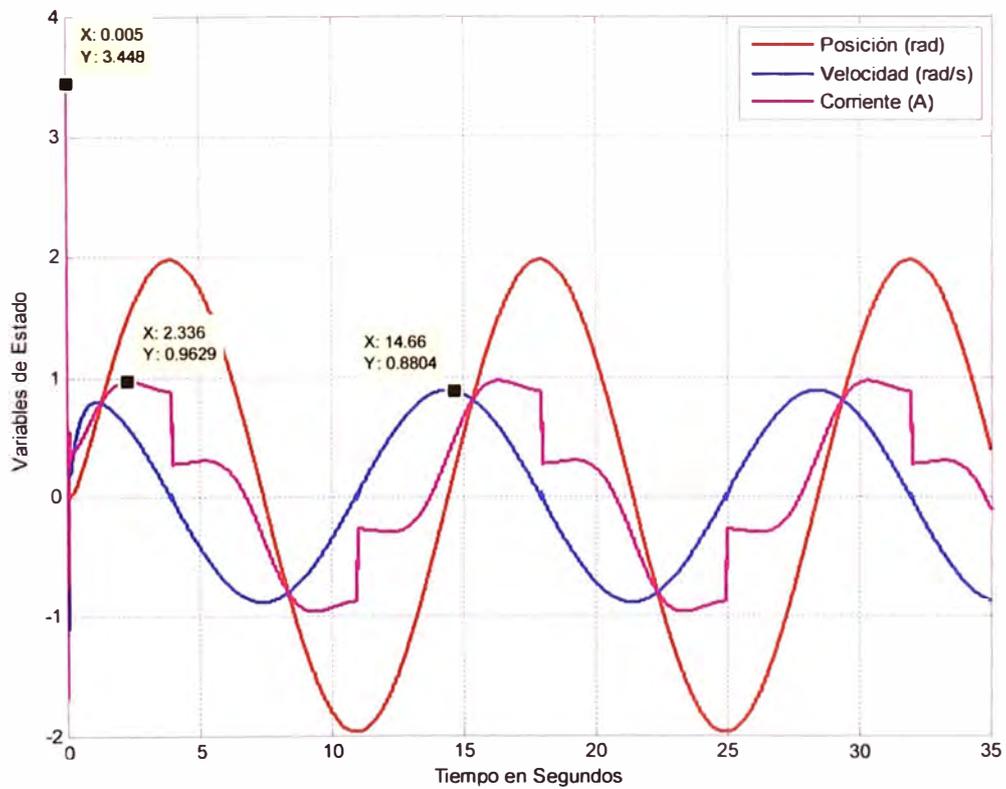
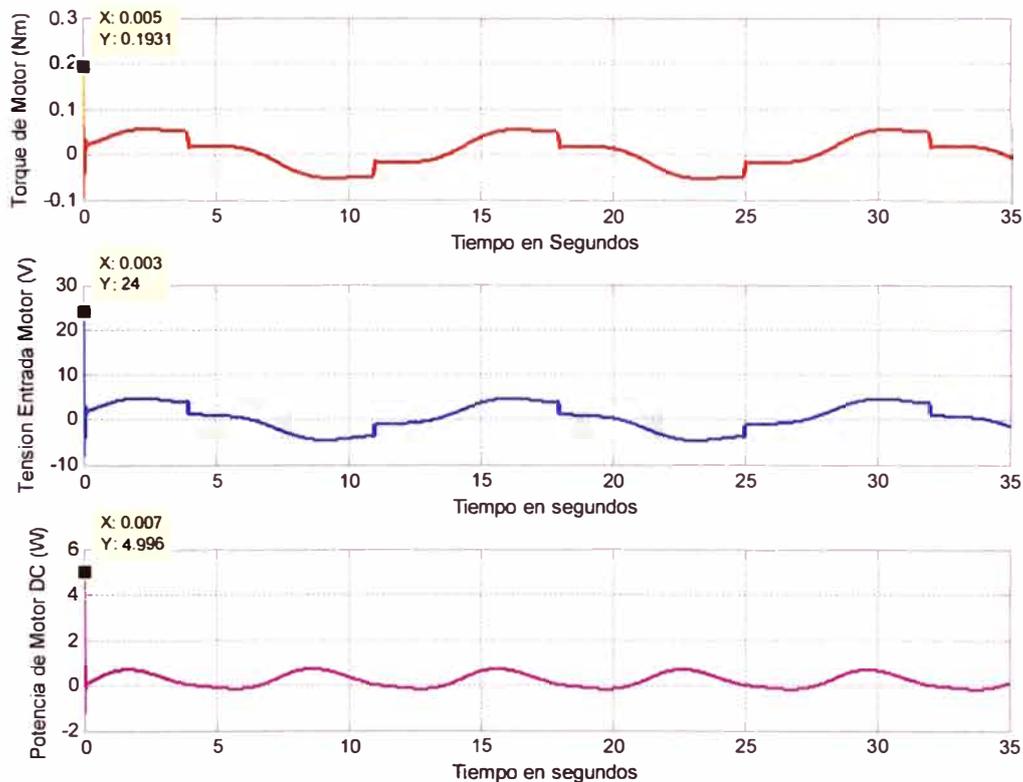


Figura 5.11 Variables de estado reales del proceso.

La figura anterior muestra para el posicionamiento del brazo de robot las variables de estado, la corriente máxima del motor igual a  $3.488\text{ A}$  (punto  $X=0.005$ ,  $Y=3.488$ ), la corriente de operación normal que es igual a  $0.962\text{ A}$  (punto  $X=2.336$ ,  $Y=0.962$ ) y la velocidad máxima  $0.880\text{ rad/s}$  (punto  $X=14.66$ ,  $Y=0.880$ ) que equivale a  $151.2\text{ RPM}$ . Estos valores están en el rango de operación del motor DC (anexo D).

La figura 5.12 muestra el torque desarrollado por el motor, la tensión de alimentación del motor DC y la potencia entregada por el motor en el control de posicionamiento.



**Figura 5.12** Torque y tensión en el motor DC.

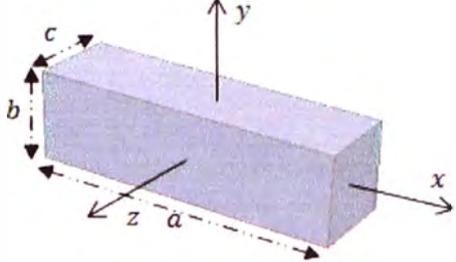
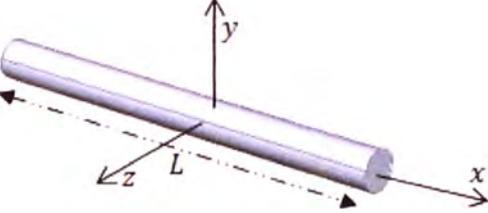
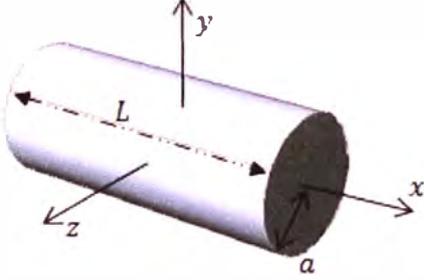
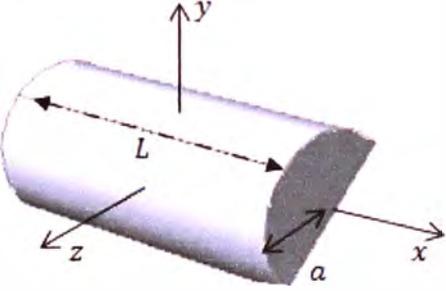
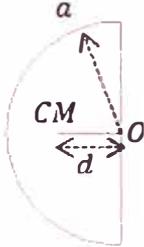
En esta figura se muestra valores máximos: Torque máximo igual a  $0.193\text{ Nm}$  (punto  $X = 0.005$ ,  $Y = 0.193$ ), tensión máxima de motor igual a  $24\text{ VDC}$  (punto  $X = 0.003$ ,  $Y = 24$ ) y la potencia máxima entregada por el motor que  $4.99\text{ W}$  (punto  $X = 0.007$ ,  $Y = 4.996$ ), estos valores están en el rango de operación en arranque del motor DC.

## CONCLUSIONES

- 1 El diseño de control realizado, que permite el posicionamiento del robot de un grado de libertad, se ha validado y verificado demostrando que satisface las condiciones planteadas inicialmente, lo cual es confirmado en las simulaciones realizadas.
- 2 El diseño realizado permite comprender y aplicar esta técnica de control en alguna planta con modelo desconocido.
- 3 El control adaptivo autoajustado se adapta y controla la naturaleza no lineal del robot, como son fuerza de gravedad y los torques de fricción no lineales que se presentan en el robot durante el movimiento.
- 4 Utilizando esta técnica se puede elegir cualquier magnitud de condiciones iniciales del sistema, para la obtención del modelo linealizado del proceso de forma dinámica.
- 5 El filtro de Kalman permite estimar las variables de estado en tiempo real y la utilidad de este método permite obtener la ganancia del error de realimentación (entre señal de salida real y estimada), de forma óptima conociendo la covarianza del ruido que afecta a los estados y la respuesta del proceso real.
- 6 En el caso de una señal de referencia variable, el control adaptivo presenta una respuesta en la posición, desfasada respecto de la señal de referencia.
- 7 Es importante establecer los valores para las matrices de ponderación de forma adecuada y así se obtiene una mejor respuesta en la variable de salida, teniendo en cuenta que si se reduce el tiempo de establecimiento ocasiona sobre impulsos en la salida del sistema.

## ANEXO A

Momento de Inercia de sólidos y distancia al centro de masa de medio cilindro.

Prisma Rectangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$
Barra delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{2} mL^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$
Mitad de cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$
Vista de mitad de cilindro desde una de sus bases		$d = \frac{3}{4\pi} a$

**ANEXO B**

## Hoja de datos acero AISI 1045

**ACERO AISI-SAE 1045 (UNS G10450)**

**1. Descripción:** es un acero utilizado cuando la resistencia y dureza son necesarios en condición de suministro. Este acero medio carbono puede ser forjado con martillo. Responde al tratamiento térmico y al endurecimiento por llama o inducción, pero no es recomendado para cementación o cianurado. Cuando se hacen prácticas de soldadura adecuadas, presenta soldabilidad adecuada. Por su dureza y tenacidad es adecuado para la fabricación de componentes de maquinaria.

**2. Normas involucradas:** ASTM A108

**3. Propiedades mecánicas:** Dureza 163 HB (84 HRb)  
Esfuerzo de fluencia 310 MPa (45000 PSI)  
Esfuerzo máximo 565 MPa (81900 PSI)  
Elongación 16% (en 50 mm)  
Reducción de área (40%)  
Módulo de elasticidad 200 GPa (29000 KSI)  
Maquinabilidad 57% (AISI 1212 = 100%)

**4. Propiedades físicas:** Densidad 7.87 g/cm<sup>3</sup> (0.284 lb/in<sup>3</sup>)

**5. Propiedades químicas:** 0.43 – 0.50 % C  
0.60 – 0.90 % Mn  
0.04 % P máx  
0.05 % S máx

**6. Usos:** los usos principales para este acero es piñones, cuñas, ejes, tornillos, partes de maquinaria, herramientas agrícolas y remaches.

**7. Tratamientos térmicos:** se da normalizado a 900°C y recocido a 790°C

**NOTA:**

Los valores expresados en las propiedades mecánicas y físicas corresponden a los valores promedio que se espera cumple el material. Tales valores son para orientar a aquella persona que debe diseñar o construir algún componente o estructura pero en ningún momento se deben considerar como valores estrictamente exactos para su uso en el diseño.

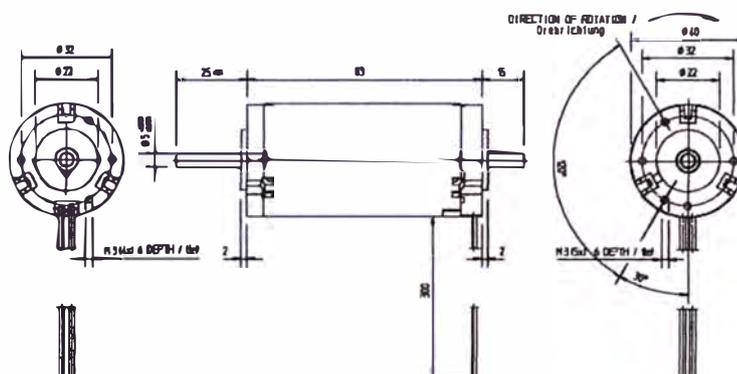


## ANEXO C

Hoja de datos Motor DC de Imán permanente:



Stock Service



DC Motor 40 x 83  
1.13.049.4 XX

Type / Baureihe 1.13.049.XXX

401

402

Characteristics*	Nenndaten*				
Rated voltage	Nennspannung	U/N	V	12	24
Rated power	Nennleistung	P <sub>n</sub>	W	20	20
Rated torque	Nenn Drehmoment	T <sub>n</sub> /M <sub>n</sub>	Ncm	6.0	6.0
Rated speed	Nenn Drehzahl	n <sub>n</sub>	rpm/min <sup>-1</sup>	3000	3000
Rated current	Nennstrom	I <sub>n</sub>	A	2.30	1.15

No load characteristics*	Leertlaufdaten*				
No load speed	Leerlauf Drehzahl	n <sub>0</sub>	rpm/min <sup>-1</sup>	3800	3800
No load current	Leerlaufstrom	I <sub>0</sub>	A	0.2	0.1

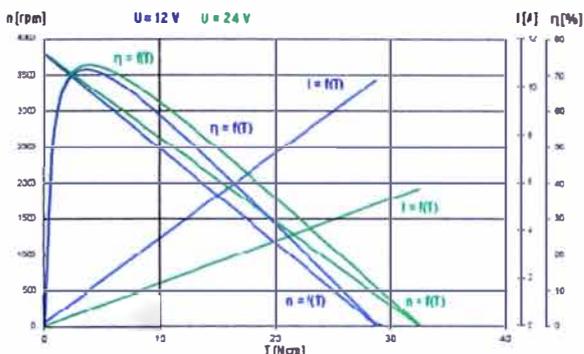
Stall characteristics*	Anlaufdaten*				
Stall torque	Anlaufmoment	T <sub>s</sub> /M <sub>s</sub>	Ncm	30	30
Stall current	Anlaufstrom	I <sub>s</sub> /I <sub>s</sub>	A	10	5.0

Performance characteristics*	Leistungsdaten*				
max. Output power	max. Abgabeleistung	P <sub>max</sub>	W	30	30
max. Constant torque	max. Dauer Drehmoment	T <sub>max</sub> /M <sub>max</sub>	Ncm	4.0	4.0

Motor parameters*	Motorparameter*				
Weight	Gewicht	G	g	420	420
Rotor inertia	Läuferträgheitsmoment	J	gcm <sup>2</sup>	70	70
Terminal resistance	Anschlusswiderstand	R	Ohm	1.1	4.2
Inductance	Induktivität	L	mH	0.8	1.7
Mech. time constant	Mech. Zeitkonstante	τ <sub>m</sub>	ms	10	10
Electr. time constant	Elektr. Zeitkonstante	τ <sub>e</sub>	ms	0.7	0.4
Speed regulation constant	Drehzahlregelkonstante	R <sub>g</sub>	rpm/Ncm	130	130
Torque constant	Drehmomentkonstante	K <sub>t</sub> /k <sub>t</sub>	Ncm/A	2.8	5.6
Thermal resistance	Thermischer Widerstand	R <sub>th</sub>	K/W	13	13
Thermal time constant	Thermische Zeitkonstante	τ <sub>th</sub>	min	16	16
Axial play	Axialspiel		mm	< 0.01	< 0.01
Direction of rotation	Drehrichtung			bidirectional / bidirektional	

DC Motor 40 x 83

1.13.049.4XX



Design	
Commutator	Copper/7-segments
RFI Protection	2 chokes
Insulation class	Windig H, otherwise A
Protection class	IP40
Commutation	Carbon brushes
Armature	skewed slot
Magnet system	Permanent magnets, 2-pole
Bearings	2 preloaded ball bearings
Housing	Steel, corrosion protected
End shields	zinc die-cast on both sides
Typical life expectancy	1500 h

Aufbau	
Kollektor	Kupfer/7-teilig
Gründerstörung	2 Drosseln
Isolierstoffklasse	Wicklung H, ansonsten A
Schutzart	IP40
Kommütierung	Kohlenbürsten
Anker	geschränkte Nut
Magnetsystem	Permanenzmagnete, 2-polig
Motorlager	2 vorgespannte Kugellager
Gehäuse	Stahl, korrosiongeschützt
Lagerschilde	beidseitig Zinkdruckguss
Typische Lebensdauer	1500 h

Operational conditions*	Einzelbedingungen*			
Temperature range	Temperaturbereich	T	°C	-10 - +70
Axial force	Axialkraft	$F_A$	N	25
Radial force, 15 mm from mounting surface	Radialkraft, 15 mm ab Anschraubfläche	$F_R$	N	100

\* at 25 °C

\* bezogen auf 25 °C

Customized Bühler drives / Maßgeschneiderte Bühler Antriebe

- ▶ Variants: p. 84 / Varianten: S. 84
- ▶ Customer specific developments: p. 88 / Kundenspezifische Entwicklungen: S. 83

Application Examples / Anwendungsbeispiele

- ▶ Paper handling / Papierverarbeitende Industrie
- ▶ Building automation / Gebäudeautomatisation

## ANEXO D

## 1. Algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido.

```

%% ESTIMACION DE PARAMETROS METODO DE MINIMOS CUADRADOS CON FACTOR DE OLVIDO
%PARAMETROS CONSIDERADOS EN EL CONTROL ADAPTIVO AUTOSINTONIZADO
%DEL POSICIONAMIENTO DE UN ROBOT DE UN GRADO DE LIBERTAD
%TABLAS 4.1,4.2,4.3,4.4 Y 4.5
Ka=4.8
Ra=4.2; %ohmios
La=1.7*10^-3; %H
n=18;
g=9.81 %m/s^2
%PARAMETROS MECANICOS
Kb=56*10^-3; %v/rad/s
Km=56*10^-3; % Nm/A
Jy=0.01783 %kgm^2
Jm=70*10^-7 %Kgm^2
J=Jy+Jm*n^2
bL=10^-3 %Nm/rad/s
bm=6/pi()*10^-4 %Nm/rad/s
B=n^2*bm+2*bL
Cco=0.15; %N-m
TEE=0;
M=0.45839 %m
d=0.1427 %
%MODELO LINEAL CONTINUO DEL PROCESO DE TERCER ORDEN
Ac=[0 1 0; -M*g*d/J -B/J Km*n/J; 0 -Kb*n/La -Ra/La];
Bc=[0; 0; Ka/La];
Cc=[1 0 0];
Dc=[0];
%MODELO CONTINUO EN S DEL PROCESO
[nums,dens]=ss2tf(Ac,Bc,Cc,Dc);
GP_S=tf(nums,dens);
%MODELO LINEAL DISCRETO DEL PROCESO DE TERCER ORDEN
T=0.001; % PERIODO DE MUESTREO
[G,H,C,D]=c2dm(Ac,Bc,Cc,Dc,T,'zoh');
[num,den]=ss2tf(G,H,C,D);
a1=den(2); a2=den(3); a3=den(4);
b1=num(2); b2=num(3); b3=num(4);
%FUNCION DE TRANSFERENCIA PULSO
GP_Z=tf(num,den,T);
% CONDICIONES INICIALES
Y(1)=0; Y(2)=0; Y(3)=0; % SALIDA ACTUAL
U(1)=0; U(2)=0; U(3)=0; %SEÑAL DE CONTROL
X1=0; X2=0; X3=0; %ESTADOS ACTUALES
error(1)=0; error(2)=0; error(3)=0; %ERROR INICIAL
Y1(1)=0; Y1(2)=0; Y1(3)=0; %SALIDA INICIAL ESTIMADA
%CONDICIONES INICIALES DE LOS PARAMETROS
thetai=[-a1 -a2 -a3 b1 b2 b3]'; %VECTOR INICIAL DE PARAMETROS
alfa=9*10^6; Pi=alfa*diag([1,1,1,1,1,1]); %
lambda=0.99; %FACTOR DE OLVIDO INICIAL
lambdamin=0.98; %FACTOR DE OLVIDO MINIMO
alfar=9; %MATRIZ POSITIVA
Rp=alfar*diag([1,1,1,1,1,1]);
So=9*10^-6; %ERROR AL CUADRADO
Trmax=5*10^8; %TRAZA MAXIMA
Mm=10000;% MUESTRAS DEL PROCESO
Mmm=4; % NUMERO DE ITERACIONES METODO MINIMO CUADRADO RECURSIVO
Mmmm=4*Mmm
for r=1:Mm
t=r+3;
if t<5000
U(t)=0.4; %SEÑAL DE ENTRADA
elseif t>=5000
U(t)=0.8;
end

```

```

%MODELO NO LINEAL DE PROCESO:RUNGE KUTTA 4 ORDEN:
%PASO DE T=0.001 seg.
Tr=Cco*sign(X2);
XX1=[X1;X2;X3];
K1=T*[X2; (-M*g*d/J)*sin(X1)-(B/J)*X2+(Km*n/J)*X3-2*Tr/J; (-Kb*n/La)*X2-
(Ra/La)*X3+(Ka/La)*U(t)];
XX=[X1;X2;X3]+K1/2;
X1=XX(1,1);
X2=XX(2,1);
X3=XX(3,1);
K2=T*[X2; (-M*g*d/J)*sin(X1)-(B/J)*X2+(Km*n/J)*X3-2*Tr/J; (-Kb*n/La)*X2-
(Ra/La)*X3+(Ka/La)*U(t)];
XX=[X1;X2;X3]+K2/2;
X1=XX(1,1);
X2=XX(2,1);
X3=XX(3,1);
K3=T*[X2; (-M*g*d/J)*sin(X1)-(B/J)*X2+(Km*n/J)*X3-2*Tr/J; (-Kb*n/La)*X2-
(Ra/La)*X3+(Ka/La)*U(t)];
XX=[X1;X2;X3]+K3;
X1=XX(1,1);
X2=XX(2,1);
X3=XX(3,1);
K4=T*[X2; (-M*g*d/J)*sin(X1)-(B/J)*X2+(Km*n/J)*X3-2*Tr/J; (-Kb*n/La)*X2-
(Ra/La)*X3+(Ka/La)*U(t)];
XX=XX1+1/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
X1=XX(1,1);
X2=XX(2,1);
X3=XX(3,1);
Y(t)=X1;
%ESTIMACION DE PARAMETROS (METODO MINIMO CUADRADOS
%RECURSIVO CON FACTOR DE OLVIDO
for rr=1:Mmm
tt=rr+3;
psi=[Y(t-1) Y(t-2) Y(t-3) U(t-1) U(t-2) U(t-3)]';%VECTOR INFORMAC
e=Y(t)-psi'*thetai;%ERROR DE ESTIMACION
i=Pi*psi;
j=psi'*i;
L=i/(lambda+j);
theta=thetai+L*e;%VECTOR DE PARAMETROS
% CALCULO DE FACTOR DE OLVIDO
lambda=1-(1-psi'*L)*e^2/So;
if lambda< lambdamin
lambda=lambdamin;
elseif lambda>1
lambda=1;
end
% MATRIZ DE COVARIANZA
%COTA INFERIOR
W=Pi-L*psi'*Pi+Rp;
%COTA SUPERIOR
if trace(W/lambda)>Trmax
lambda=1;
end
%ACTUALIZACION
thetai=theta;
Pi=W/lambda;
%PARAMETROS ESTIMADOS EN CADA PERIODO DE MUESTREO
if t==4999
r1=rr;
ae1(r1)=-thetai(1); %PARAMETRO a1 ESTIMADO
ae2(r1)=-thetai(2); %PARAMETRO a2 ESTIMADO
ae3(r1)=-thetai(3); %PARAMETRO a3 ESTIMADO
be1(r1)=thetai(4); %PARAMETRO b1 ESTIMADO
be2(r1)=thetai(5); %PARAMETRO b2 ESTIMADO
be3(r1)=thetai(6); %PARAMETRO b3 ESTIMADO
Y11(r1)=psi'*thetai;%SALIDA ESTIMADA EN UN PERIDO T
Y22(r1)=Y(t);

```

```

e11(rr1)=Y22(rr1)-Y11(rr1);
end
if t==5000
    rrl=rr+Mmm;
    ae1(rr1)=-thetai(1);    %PARAMETRO a1 ESTIMADO
    ae2(rr1)=-thetai(2);    %PARAMETRO a2 ESTIMADO
    ae3(rr1)=-thetai(3);    %PARAMETRO a3 ESTIMADO
    be1(rr1)=thetai(4);     %PARAMETRO b1 ESTIMADO
    be2(rr1)=thetai(5);     %PARAMETRO b2 ESTIMADO
    be3(rr1)=thetai(6);     %PARAMETRO b3 ESTIMADO
    Y11(rr1)=psi'*thetai;   %SALIDA ESTIMADA EN UN PERIDO T
    Y22(rr1)=Y(t);
    e11(rr1)=Y22(rr1)-Y11(rr1);
end
if t==5001
    rrl=rr+2*Mmm;
    ae1(rr1)=-thetai(1);    %PARAMETRO a1 ESTIMADO
    ae2(rr1)=-thetai(2);    %PARAMETRO a2 ESTIMADO
    ae3(rr1)=-thetai(3);    %PARAMETRO a3 ESTIMADO
    be1(rr1)=thetai(4);     %PARAMETRO b1 ESTIMADO
    be2(rr1)=thetai(5);     %PARAMETRO b2 ESTIMADO
    be3(rr1)=thetai(6);     %PARAMETRO b3 ESTIMADO
    Y11(rr1)=psi'*thetai;   %SALIDA ESTIMADA EN UN PERIDO T
    Y22(rr1)=Y(t);
    e11(rr1)=Y22(rr1)-Y11(rr1);
end
if t==5002
    rrl=rr+3*Mmm;
    ae1(rr1)=-thetai(1);    %PARAMETRO a1 ESTIMADO
    ae2(rr1)=-thetai(2);    %PARAMETRO a2 ESTIMADO
    ae3(rr1)=-thetai(3);    %PARAMETRO a3 ESTIMADO
    be1(rr1)=thetai(4);     %PARAMETRO b1 ESTIMADO
    be2(rr1)=thetai(5);     %PARAMETRO b2 ESTIMADO
    be3(rr1)=thetai(6);     %PARAMETRO b3 ESTIMADO
    Y11(rr1)=psi'*thetai;   %SALIDA ESTIMADA EN UN PERIDO T
    Y22(rr1)=Y(t);
    e11(rr1)=Y22(rr1)-Y11(rr1);
end
end
%VALORES PARA GRAFICAS:
error(t)=e;                %ERROR DE ESTIMACION
Y1(t)=psi'*thetai;        %SALIDA ESTIMADA
end
% GRAFICOS
q=0:Mm-1;
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(q,U(1:Mm),'linewidth',1.5); grid
ylabel('Señal de entrada U (V)')
xlabel('MUESTRAS (CADA MUESTRA EQUIVALE CADA 0.001seg)')
subplot(3,1,2)
plot(q,Y(1:Mm),'r','linewidth',1.5); hold on
plot(q,Y1(1:Mm)); grid; hold off
ylabel('Respuesta del proceso (rad)')
xlabel('MUESTRAS (CADA MUESTRA EQUIVALE CADA 0.001seg)')
legend('RESPUESTA REAL','RESPUESTA ESTIMADA')
subplot(3,1,3)
plot(q,error(1:Mm),'linewidth',1.5);grid
xlabel('MUESTRAS (CADA MUESTRA EQUIVALE CADA 0.001seg)')
ylabel('Error de estimacion (rad)')
q1=1:Mmm;
figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(q1,ae1,'b','linewidth',1.5); hold on
plot(q1,ae2,'r','linewidth',1.5)
plot(q1,ae3,'g','linewidth',1.5);grid ; hold off

```

```

xlabel('NUMERO DE ITERACIONES ( ENTRE MUESTREOS 4999,5000,5001,5002 - 4 ITER.
POR MUESTRA) ')
ylabel('Parametros estimados')
legend('a1','a2','a3')
subplot(2,1,2)
plot(q1,be1,'m','linewidth',1.5); hold on
plot(q1,be2,'c','linewidth',1.5)
plot(q1,be3,'k','linewidth',1.5);grid ; hold off
xlabel('NUMERO DE ITERACIONES ( ENTRE MUESTREOS 4999,5000,5001,5002 - 4 ITER. POR
MUESTRA) ')
ylabel('Parametros estimados')
legend('b1','b2','b3')
figure(3)
subplot(2,1,1)
plot(q1,Y11(1:Mmmm),'b','linewidth',1.5); hold on
plot(q1,Y22(1:Mmmm),'r','linewidth',1.5);grid ; hold off
xlabel('NUMERO DE ITERACIONES ( ENTRE MUESTREOS 4999,5000,5001,5002 - 4 ITER.
POR MUESTRA) ')
ylabel('Señal de salida (rad)')
legend(' RESPUESTA ESTIMADA','RESPUESTA REAL')
subplot(2,1,2)
plot(q1,e11(1:Mmmm),'g','linewidth',1.5);grid;
xlabel('NUMERO DE ITERACIONES ( ENTRE MUESTREOS 4999,5000,5001,5002 - 4 ITER.
POR MUESTRA) ')
ylabel('Error (rad)')

```

## 2.Algoritmo de control adaptivo autoajustado para el posicionamiento de robot de un grado de libertad.- Matlab.

```

clc
close all
clear all
Ka=4.8
Ra=4.2; %ohmios
La=1.7*10^-3; %H
n=18;
g=9.81 %m/s^2
%PARAMETROS MECANICOS
Kb=56*10^-3; %v/rad/s
Km=56*10^-3; % Nm/A
Jy=0.01783 %kgm^2
Jm=70*10^-7 %Kgm^2
J=Jy+Jm*n^2
bL=10^-3 %Nm/rad/s
bm=6/pi()*10^-4 %Nm/rad/s
B=n^2*bm+2*bL
Cco=0.15; %N-m
TEE=0;
M=0.45839 %m
d=0.1427 %
%MODELO LINEAL CONTINUO DEL PROCESO DE TERCER ORDEN
Ac=[0 1 0;-M*g*d/J -B/J Km*n/J;0 -Kb*n/La -Ra/La];
Bc=[0;0;Ka/La];
Cc=[1 0 0];
Dc=[0];
%MODELO CONTINUO EN S DEL PROCESO
[nums,dens]=ss2tf(Ac,Bc,Cc,Dc);
GP_S=tf(nums,dens);
%MODELO LINEAL DISCRETO DEL PROCESO DE TERCER ORDEN
T=0.001; % PERIODO DE MUESTREO
[G,H,C,D]=c2dm(Ac,Bc,Cc,Dc,T,'zoh');
[num,den]=ss2tf(G,H,C,D);
a1=den(2); a2=den(3); a3=den(4);
b1=num(2); b2=num(3); b3=num(4);
%FUNCION DE TRANSFERENCIA PULSO
GP_Z=tf(num,den,T);
% CONDICIONES INICIALES

```

```

Y(1)=0; Y(2)=0; Y(3)=0; Y(4)=0; % SALIDA ACTUAL
y(1)=0; y(2)=0; y(3)=0; %SALIDA RESIDUAL
U(1)=0; U(2)=0; U(3)=0; U(4)=0 ; %SEÑAL DE CONTROL
u(1)=0; u(2)=0; u(3)=0; % SEÑAL DE CONTROL RESIDUAL
xmas1(1)=0; xmas2(1)=0; xmas3(1)=0;
xmas1(2)=0; xmas2(2)=0; xmas3(2)=0;
xmas1(3)=0; xmas2(3)=0; xmas3(3)=0;
Z=2;
%INTEGRADOR EN ADELANTO CONDICION INICIAL
xmenos=zeros(3,1); %VECTOR OBSERVACION INICIAL
X1=0; X2=0; X3=0; %ESTADOS ACTUALES
%CONDICIONES INICIALES DE LOS PARAMETROS
ref=2; %60° MAGNITUD DE LA SEÑAL DE REFERENCIA
frec=pi()/7000 %FRECUENCIA DE LA SEÑAL DE REFENCIA(periodo 6seg)
Ce=(1+a1+a2+a3)*ref; % VALOR INICIAL DE Ce
thetai=[-a1 -a2 -a3 b1 b2 b3 Ce]'; %VECTOR INICIAL DE PARAMETROS
alfa=9*10^6; Pi=alfa*diag([1,1,1,1,1,1,1]);
lambda=0.99; %FACTOR DE OLVIDO INICIAL
lambdamin=0.98; %FACTOR DE OLVIDO MINIMO
alfar=9; %MATRIZ POSITIVA Rp=alfar*diag([1,1,1,1,1,1,100000000000]);
So=9*10^-6; %ERROR AL CUADRADO
Trmax=5*10^8;
Qo=10^-14 ; Ro=10^-8; %PARA EL FILTRO DE KALMAN
R=0.01; Qa=[0.088 0 0 0;0 0.02 0 0;0 0 0.06 0;0 0 0 0.09]
Mm=35000;
Mmm=4; %NUMERO DE ITERACIONES ALGORITMO DE ESTIMACION PARAMETROS
%DEFASAJE
NN=470;
for r=1:Mm
t=r+3;
%SEÑAL DE REFERENCIA
Yo(t)=ref*sign(sin(frec*(t-3)));
%ESTIMACION DE PARAMETROS (METODO MINIMO CUADRADOS
%RECURSIVO CON FACTOR DE OLVIDO
for rr=1:Mmm
tt=rr+3;
psi=[Y(t-1) Y(t-2) Y(t-3) U(t-1) U(t-2) U(t-3) 1]';%VECTOR INFORMAC
e=Y(t)-psi'*thetai; %ERROR DE ESTIMACION
i=Pi*psi;
j=psi'*i;
L=i/(lambda+j);
theta=thetai+L*e; %VECTOR DE PARAMETROS
% CALCULO DE FACTOR DE OLVIDO
lambda=1-(1-psi'*L)*e^2/So;
if lambda<= lambdamin
lambda=lambdamin;
elseif lambda>=1
lambda=1;
end
% MATRIZ DE COVARIANZA
%COTA INFERIOR
W=Pi-L*psi'*Pi+Rp;
%COTA SUPERIOR
if trace(W/lambda)>Trmax
lambda=1;
end
%ACTUALIZACION
thetai=theta;
Pi=W/lambda;
end
end
%PARAMETROS ESTIMADOS
ae1=-thetai(1); %PARAMETRO a1 ESTIMADO
ae2=-thetai(2); %PARAMETRO a2 ESTIMADO
ae3=-thetai(3); %PARAMETRO a3 ESTIMADO
be1=thetai(4); %PARAMETRO b1 ESTIMADO
be2=thetai(5); %PARAMETRO b2 ESTIMADO
be3=thetai(6); %PARAMETRO b3 ESTIMADO

```

```

Ce=thetai(7);      %PARAMETRO Ce ESTIMADO
%RECUPERACION DE ECUACION CANONICA CONTROLABLE
%MATRIZ GE
ae11=0; ae12=1; ae13=0;
ae21=0; ae22=0; ae23=1;
ae31=-ae3; ae32=-ae2; ae33=-ae1;
GE=[ae11 ae12 ae13;ae21 ae22 ae23;ae31 ae32 ae33];
%MATRIZ HE
bell=be1; be21=be2-ae1*be1 ; be31=be3-ae1*(be2-ae1*be1)-ae2*be1;
HE=[bell;be21;be31];
%MATRIZ CE Y DE
cell=1; cel2=0; cel3=0;
CE=[cell cel2 cel3];
DE=[0];
%SALIDA RESIDUAL
y(t)=Y(t)-Yo(t);
%CALCULO DE GANANCIA DE Ko DEL ESTIMADOR DE KALMAN
%HEEE=[1 1 10]';
HEE=[0 0 1]'*Qo;
[Ko,PP,ZZ,EE]=dlqe(GE,HEE,CE,Qo,Ro);
Z_1(t)=ZZ(1,1); % ERROR COVARIANZA
xmas=xmenos+Ko*(y(t)-CE*xmenos); % OBSERVACION DE ESTADOS
yy(t)=y(t)-CE*xmenos; %error de estimacion
%CALCULO DE LA GANANCIA Ka DEL CONTROLADOR OPTIMO AUMENTADO
Ga=[GE zeros(3,1);-CE*GE 1];
Ha=[HE;-CE*HE];
Ca=[CE 0];
Da=DE;
Kaa=dlqr(Ga,Ha,Qa,R);
Z=Z-CE*xmas;
%CALCULO DE LA LEY DE CONTROL RESIDUAL
u(t)=-Kaa*[xmas;Z];
%ACTUALIZACION DE ESTADOS
xmenos=GE*xmas+HE*u(t);
xmenos1(t)=xmenos(1);
xmenos2(t)=xmenos(2);
xmenos3(t)=xmenos(3);
%CALCULO DE Uin (VALOR DC DE U(t)
AE=1+ae1+ae2+ae3; BE=be1+be2+be3;
Uin=inv(BE)*(AE*Yo(t)-Ce);
%CALCULO DE LA SEÑAL DE CONTROLU(t)
U(t)=u(t)+Uin;
%LIMITE DE TENSION MOTOR DC U(t)
if(U(t)>5)
    U(t)=5;
elseif(U(t)<-5)
    U(t)=-5;
end
%MODELO NO LINEAL DE PROCESO:RUNGE KUTTA 4 ORDEN:
%PASO DE T=0.001 seg.
Tr=Cco*sign(X2);
XX1=[X1;X2;X3];
K1=T*[X2;(-M*g*d/J)*sin(X1)-(B/J)*X2+(Km*n/J)*X3-2*Tr/J;(-Kb*n/La)*X2-(Ra/La)*X3+(Ka/La)*U(t)];
XX=[X1;X2;X3]+K1/2;
X1=XX(1,1);
X2=XX(2,1);
X3=XX(3,1);
K2=T*[X2;(-M*g*d/J)*sin(X1)-(B/J)*X2+(Km*n/J)*X3-2*Tr/J;(-Kb*n/La)*X2-(Ra/La)*X3+(Ka/La)*U(t)];
XX=[X1;X2;X3]+K2/2;
X1=XX(1,1);
X2=XX(2,1);
X3=XX(3,1);
K3=T*[X2;(-M*g*d/J)*sin(X1)-(B/J)*X2+(Km*n/J)*X3-2*Tr/J;(-Kb*n/La)*X2-(Ra/La)*X3+(Ka/La)*U(t)];
XX=[X1;X2;X3]+K3;

```

```

X1=XX(1,1);
X2=XX(2,1);
X3=XX(3,1);
K4=T*[X2;(-M*g*d/J)*sin(X1)-(B/J)*X2+(Km*n/J)*X3-2*Tr/J;(-Kb*n/La)*X2-
(Ra/La)*X3+(Ka/La)*U(t)];
XX=XX1+1/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
X1=XX(1,1);
X2=XX(2,1);
X3=XX(3,1);
Y(t+1)=X1;
%VALORES PARA GRAFICAS:
Y1(t)=X1; %VALOR REAL DE X EN EL TIMPO t
error(r)=Y1(t)-Yo(t); %ERROR RESPUESTA - REFERENCIA
pos(r)=X1; %POSICION ANGULAR BRAZO
vel(r)=X2; %VELOCIDAD ANGULAR BRAZO
corr(r)=X3; %CORRIENTE MOTOR DC
tor(r)=Km*X3; %TORQUE DESARROLLADO POR MOTOR DC
volt(r)=Ka*U(r); %VOLTAJE APLICADO A MOTOR DC
pot(r)=corr(r)*volt(r); %POTENCIA INSTANTANEA ENTREGADA MOTOR DC
pot1(r)=n*tor(r)*vel(r); %POTENCIA INSTANEA ENTREGADA POR EL MOTOR
% if r>NN; ERROR PARA ENTRADA SENOIDAL
% error2(r)=Y1(r)-Yo(r-NN);
% end
end
%GRAFICOS
ejex=linspace(0,Mm*T,Mm);
% RESPUESTA, SEÑAL DE CONTROL Y ERROR
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(ejex,Yo(1:Mm),'b','linewidth',1.5); hold on
plot(ejex,Y1(1:Mm),'r','linewidth',1.5); grid; hold off
ylabel('Posicion (rad)')
xlabel('Tiempo en Segundos')
legend('Referencia','Posicion')
subplot(3,1,2)
plot(ejex,U(1:Mm),'b','linewidth',1.5);grid
ylabel('Señal de control U (V)')
xlabel('Tiempo en Segundos')
subplot(3,1,3)
plot(ejex,error(1:Mm),'m','linewidth',1.5);grid
ylabel('Señal de Error (rad)')
xlabel('Tiempo en Segundos')
%VARIABLES DE ESTADO
figure(2)
plot(ejex,pos(1:Mm),'r','linewidth',1.5); hold on
plot(ejex,vel(1:Mm),'b','linewidth',1.5)
plot(ejex,corr(1:Mm),'m','linewidth',1.5); grid; hold off
ylabel('Variables de Estado')
xlabel('Tiempo en Segundos')
legend('Posición (rad)','Velocidad (rad/s)','Corriente (A)')
%TORQUE , TENSION DEL MOTOR Y POTENCIA
figure(3)
subplot(3,1,1)
plot(ejex,tor(1:Mm),'r','linewidth',1.5);grid
ylabel('Torque de Motor (Nm)')
xlabel('Tiempo en Segundos')
subplot(3,1,2)
plot(ejex,volt(1:Mm),'b','linewidth',1.5);grid
ylabel('Tension Entrada Motor (V)')
xlabel('Tiempo en segundos')
subplot(3,1,3)
plot(ejex,pot1(1:Mm),'m','linewidth',1.5);grid
ylabel('Potencia de Motor DC (W)')
xlabel('Tiempo en segundos')

```

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Francisco Rodríguez Rubio, "Control Adaptivo y Robusto", Secretariado de publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1996.
- [2] Arturo Rojas Moreno "Control Avanzado Diseño y aplicaciones en Tiempo Real", Arturo Rojas Moreno, 2001.
- [3] Aaron D. Deutsschman, Walter J. Michels, Charles E. Wilson "Diseño de Maquinas Teoría y Práctica", Editorial Continental S: A México 2000.
- [4] A. S. Hall A.R. Holowenco y H.G. Laughlin, "Diseño de Maquinas: Teoría y 320 Problemas Resueltos", Schaum-McGraw-Hill, 1995.
- [5] L. Mott, P.E., "Diseño de elementos de Maquinas", Pearson Education, 2006.
- [6] W. T. Thompson, "Vibrations Theory and Aplications" Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J, 1982.
- [7] V.M.Faires, "Diseño de elementos de Maquinas", Montaner y Simon S.A. Barcelona, 1980.
- [8] Benjamin Kuo, "Sistemas de control automático", Prentice Hall Hispanoamérica S. A. 1996.
- [9] Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, David F. Mazuerk y Elliot R. Eisenberg, "Mecánica vectorial para Ingenieros", McGraw-Hill Interamericana Editores S: A, 2010.
- [10] M. G. Sofonov, "Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems", MA London, UK: The MIT Press Cambridge, 1980.
- [11] Ned Mohan, Tore M. Undeland, William P. Robbins "Electrónica de Potencia Convertidores, aplicaciones y diseño", McGraw-Hill, 3ra Edición, 2009.
- [12] Katsuhiko Ogata "Ingenieria de Control Moderna", Pearson Prentice Hall, Tercera Edición, 2003.
- [13] Katsuhiko Ogata "Sistema de Control en Tiempo Discreto", Pearson Educación, Segunda Edición, 1996.
- [14] Texas Instruments : Hoja de datos tarjeta electrónica LABPC+ <http://www.ni.com/pdf/manuals/320502b.pdf>
- [15] Universidad de Concepción (Chile): Esfuerzos en materiales. <http://www2.udec.cl/~jinzunza/fisica/cap6.pdf>