

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

**Programa Académico Escuela de Graduados**



**"Optimización Estructural de Pórticos Sometidos  
Mayormente a Flexión"**

**T E S I S**

**Para Optar el Grado de Magister en Ciencias Mención en**

**E S T R U C T U R A S**

**PRESENTADO POR :**

**MANUEL ANTONIO DIAZ DIAZ**

**LIMA - PERU**

**1 9 7 9**

# I N D I C E

	Pág.
1. INTRODUCCION.....	1
2. CONCEPTOS BASICOS DE OPTIMIZACION ESTRUCTURAL.....	2
2.1. Variables de Diseño.....	2
2.2. Función Objetivo .....	2
2.3. Restricciones.....	3
2.4. Espacio de Diseño.....	3
3. METODOS DE OPTIMIZACION ESTRUCTURAL.....	4
3.1. Métodos Indirectos.....	4
3.1.1. Formulación Matemática del problema general en los Métodos Indirectos.....	5
3.1.2. Consideración de Restricciones de esfuerzo en los Métodos Indirectos.....	8
3.2. Métodos Directos.....	8
3.2.1. Optimización Restringida.....	9
3.2.2. Optimización no Restringida.....	11
4. CRITERIO DE OPTIMIZACION PARA EL ANALISIS DE PORTICOS SOME- TIDOS MAYORMENTE A FLEXION.....	13
4.1. Procedimiento de Diseño.....	17
4.2. Ejemplos Numéricos.....	17
5. CONCLUSIONES.....	20
6. BIBLIOGRAFIA.....	21
FIGURAS.....	23
TABLAS.....	24
APENDICE.....	25

## 1. INTRODUCCION

La Optimización Estructural, área de la Ingeniería Estructural, que en otros países ya ha alcanzado un desarrollo de importancia, viene introduciéndose al país en los últimos años, habiéndose ya, desarrollado algunos trabajos al particular, es así como haciendo eco a esta inquietud nace el presente trabajo de tesis.

El Trabajo se inicia dando un resumen de los conceptos básicos de Optimización Estructural, para luego en el acápite 3 presentar una recopilación de las bases teóricas de los diversos métodos existentes en esta nueva área de la Ingeniería.

En el acápite 4, en base a lo desarrollado en los acápites anteriores se desarrolla un método práctico para la optimización de pórticos sometidos mayormente a flexión tomando en cuenta restricciones de esfuerzos y desplazamientos. Dándose las conclusiones en el acápite 5.

Se incluye, en el Apéndice, un desarrollo paso a paso de uno de los ejemplos presentados como aplicación a fin de que sirva de guía a quienes deseen emplear el método propuesto.

Deseo expresar mi agradecimiento a los señores Profesores JAVIER PIQUE, RAFAEL TORRES y JORGE PEÑARANDA por sus valiosos consejos para la redacción final del presente trabajo.

En forma muy especial agradezco a mi Asesor de Tesis, Ing. LUIS ZAPATA BAGLIETTO, quien con sus constantes consejos y estímulos ha hecho posible la culminación de este trabajo.

### 2.3. RESTRICCIONES

Son las limitaciones que se deben satisfacer a fin de que el diseño sea aceptable. Una restricción es explícita cuando es impuesta directamente a una variable de diseño. Cuando la limitación es impuesta sobre cantidades cuya dependencia con las variables de diseño no puede establecerse directamente, la restricción es implícita. Otra clasificación importante de las mismas es en restricciones laterales y restricciones de comportamiento. Las primeras se refieren a una limitación específica en el valor de la variable de diseño o una relación que fija el valor relativo de un grupo de variables. Son por tanto explícitas. Las segundas son, por lo general, limitaciones en esfuerzos y en desplazamientos, pero pueden también incluir limitaciones sobre inestabilidad del sistema estructural, pandeo de los miembros, frecuencia vibracional. Estas pueden ser explícitas o implícitas. En general las restricciones se representarán por  $g(\bar{D})$ .

### 2.4. ESPACIO DE DISEÑO

Es un espacio matemático, que en su forma más general es "n" dimensional. Los ejes de referencia de este espacio "n" dimensional representan a cada una de las variables de diseño. Las restricciones dividen a este espacio en regiones aceptables e inaceptables de diseño, mientras que la función objetivo define contornos de valor constante en la propiedad elegida para definir el problema estructural (al costo, al peso, etc.) Con la notación dada la formulación más general de un problema de optimización estructural es:

$$\text{Encontrar } \bar{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ D_n \end{pmatrix} \quad \bar{D} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Tal que } F(\bar{D}) \rightarrow \text{Mínimo} \quad F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$\text{Sujeto a } g(\bar{D}) = \begin{pmatrix} g_1(\bar{D}) \\ g_2(\bar{D}) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(\bar{D}) \end{pmatrix} \geq \bar{0}$$

en donde  $\mathbb{R}^n$  representa al espacio n dimensional y  $\mathbb{R}^1$  representa al espacio unidimensional.



### 3. METODOS DE OPTIMIZACION ESTRUCTURAL

Los diversos métodos de optimización estructural puede agruparse en:

- 1.) METODOS INDIRECTOS (Métodos basados en criterios de Optimización)
- 2.) METODOS DIRECTOS (Métodos basados en Programación Matemática)

Ambo métodos poseen los mismos objetivos, pero los métodos numéricos que emplean difieren grandemente en su aplicabilidad y en su eficiencia de computación.

#### 3.1. METODOS INDIRECTOS

En estos métodos se selecciona un criterio relacionado con el comportamiento de la estructura y la premisa es que cuando la estructura se dimensiona de forma tal de satisfacer dicho criterio, la función mérito automáticamente alcanza un valor óptimo.

Los criterios para un determinado problema no difieren mucho, pero sí los métodos para alcanzar el diseño óptimo. Estos métodos son, por lo general iterativos, con excepción de los métodos para estructuras determinadas. Cualquiera de ellos no puede garantizar la convergencia al mejor diseño para todos los problemas y sus dificultades particulares. Es por ello que los programas de computación a que dan origen estos métodos son por lo general específicos y eficientes. A pesar del carácter específico de los mismos se ha pretendido emplearlos en forma general con el lógico fracaso de no poder obtener una estructura de mínimo peso. Es este uso indiscriminado el que ha desacreditado a los algoritmos basados en criterios de optimización.

Los primeros métodos basados en criterios de optimización fueron los Diseños Completamente Esforzados o Diseños de Resistencia Uniforme y los Diseños de Falla Simultánea.

El Diseño Completamente Esforzado es aquel en el cual cada miembro estructural soporta un esfuerzo permisible límite bajo por lo menos una de las condiciones de carga especificadas. Este representa un diseño de peso mínimo cuando el material es isotrópico con esfuerzos permisibles uniformes y la estructura está sujeta a un sólo sistema de carga. Requiere también - que no existan restricciones en el tamaño de los elementos, pues de ser así los miembros afectados no estarán completamente esforzados (3) (4).

El análisis se limita a la selección de las secciones de los miembros para una geometría estructural y los materiales especificados sin tener en cuenta limitaciones de desplazamiento.

En el caso de estructuras estáticamente indeterminadas, sometidas a múltiples condiciones de cargas, los diseños completamente esforzados no son necesariamente diseños de peso mínimo. Muchas veces las soluciones correspondientes a un diseño completamente esforzado son más pesadas que la solución de mínimo peso, más aún, muchas veces no puede hallarse un diseño completamente esforzado. Pero en los casos en que existe solución, ésta es la mínima o cercana a la mínima en la mayoría de los casos. (5)

Este método, combinado con el Cociente de Esfuerzos, permite buenas soluciones y con una rápida convergencia. En el método del Cociente de Esfuerzos se calcula el cociente entre esfuerzo real y el esfuerzo permisible para cada miembro de la estructura y cada sistema de carga, el mayor cociente se emplea para el rediseño.

El diseño de Modo en Falla Simultánea (6) (7) es aquel en el cual la estructura se dimensiona de forma tal que varios tipos preseleccionados de falla dependientes de los esfuerzos estén a punto de ocurrir simultáneamente. La mayor parte de la literatura sobre el particular está dirigida al análisis de los miembros individuales sujetos a más de un modo de falla y muy poco sobre sistemas sujetos a fallas en varios de sus distintos miembros. El Diseño de Modo en Falla Simultánea está íntimamente ligado con el concepto de los índices estructurales (7), que son funciones de alguna medida de intensidad de carga, que representan los valores óptimos de las variables de diseño.

Otro método de criterio de optimización es el que se basa en la densidad uniforme de la energía de deformación (5). Este criterio, derivado para la rigidez total de la estructura, establece que el peso mínimo de la misma ocurre cuando la densidad de energía de deformación es la misma en todos los miembros. Para un peso dado, la estructura con tal distribución de energía de deformación, será la estructura más rígida para una determinada condición de carga. En el caso de que los esfuerzos permisibles sean diferentes para los distintos miembros, el método pierde validez, pero puede emplearse en forma aproximada.

Prager ha desarrollado un método bastante general para el diseño óptimo de estructuras con restricciones generalizadas de compatibilidad. Se define compatibilidad generalizada al trabajo virtual de un sistema ficticio de carga cuando está sujeto al campo de desplazamiento del sistema real de cargas (5). Por ejemplo, una única restricción de desplazamiento en un punto de la estructura se trata como una restricción de compatibilidad. Compatibilidad en este caso es el trabajo virtual de una carga unitaria en el punto donde está sujeta al campo de desplazamiento de la carga real. Cuando la carga ficticia coincide con la carga real la compatibilidad representa la rigidez generalizada de la estructura.

### 3.1.1. Formulación Matemática del Problema General en los Métodos Indirectos

La condición necesaria para que el vector de las variables de diseño  $\bar{D}$ , represente valores que hagan mínima la función objetivo  $F(\bar{D})$  la que se encuentra sujeta a restricciones del tipo :

$$g_i(\bar{D}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

es que,

$$\frac{\partial F}{\partial D_i} + \sum_{j=1}^c \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial D_i} = 0 \quad (2)$$

donde  $\lambda_j$  representa a los multiplicadores de Lagrange, además  $\lambda_j \geq 0$  y  $c$  representan el número de restricciones críticas. En el caso de un ensamblaje estructural de "n" elementos las funciones  $F(\bar{D})$  y  $g_j(\bar{D})$  toman la forma :

$$F(\bar{D}) = \sum_{i=1}^n W_i(\bar{D}) \quad (3)$$

y

$$\alpha_j(D) = (u_R^t K u_V)_j - L_j \leq 0 \quad (4)$$

para el caso de restricciones generales a satisfacer. Aquí  $W_i$  es el "costo" asociado con el  $i$ ésimo elemento. En la Ec. (4)  $u_R$  y  $u_V$  son los desplazamientos debidos a cargas reales y a cargas virtuales respectivamente,  $u^t$  indica la transpuesta de  $u$ ,  $K$  es la matriz de rigidez del sistema, y  $L_j$  representa el valor límite de la restricción  $j$ , definido como el trabajo virtual de un sistema de cargas virtuales  $V$  a lo largo de los desplazamientos causados por las fuerzas reales  $R$ . En el caso de que  $V$  represente cargas unitarias la restricción será de desplazamiento. Cuando  $R$  sea igual  $V$  se tendrá el caso de restricción de rigidez generalizada.

Por lo general  $W_i$  puede considerarse como una función de la  $i$ ésima variable de diseño, en  $i$  cambio  $u_R$ ,  $u_V$  y  $K$  son funciones de todas las variables de diseño, con lo que la Ec. (2) se convierte en :

$$\frac{\partial W_i}{\partial D_i} + \sum_{j=1}^c \lambda_j \frac{\partial}{\partial D_i} (u_R^t K u_V)_j = 0 \quad (5)$$

teniendo en cuenta que

$$K u_R = R \quad (6)$$

$$K u_V = V \quad (7)$$

y como las fuerzas aplicadas no se ven afectadas por el rediseño se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial D_i} (u_R^t K u_V)_j = - \left( u_R^t \frac{\partial K_i}{\partial D_i} u_V \right)_j \quad (8)$$

donde  $K_i$  es la matriz de rigidez del  $i$ ésimo elemento expresada en las coordenadas del sistema. El criterio de optimización puede ahora escribirse como :

$$\frac{\partial W_i}{\partial D_i} - \sum_{j=1}^c \lambda_j \left( u_R^t \frac{\partial K_i}{\partial D_i} u_V \right)_j = 0 \quad (9)$$

La Ec (9) puede particularizarse para el caso más frecuente en donde el costo de los elementos y la matriz de rigidez de los mismos son lineales en las variables de diseño  $D_i$ . Si se representa un costo unitario ( $W_i$ ) como  $(W_i/D_i)$ , resulta :

$$\frac{\partial W_i}{\partial D_i} = \bar{W}_i \quad (10)$$

La linealidad en la matriz de rigidez implica que :

$$\frac{\partial K_i}{\partial D_i} = \frac{K_i}{D_i} \quad (11)$$

con lo que la Ec. (9) se convierte en

$$\bar{W}_i = \sum_j \lambda_j \frac{1}{D_i} (u_R^T \quad K_i \quad u_V)_j = 0 \quad (12)$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_j \lambda_j \frac{(u_R^T \quad K_i \quad u_V)_j}{\bar{W}_i} D_i \quad (13)$$

La Ec. (13) indica que las variables de diseño son una combinación lineal de las cantidades entre paréntesis.

En esencia los métodos de criterio de optimización consisten en establecer de alguna forma un criterio, como el de la Ec. (13), y un proceso numérico que permita obtener el vector de diseño (D) que lo satisfaga. El proceso numérico es donde generalmente ocurre la principal diferencia de los métodos de criterio de optimización. Por ejemplo una posible fórmula de recursión sería :

$$\sum_{j=1}^c \lambda_j \frac{(u_R^T \quad K_i \quad u_V)_j}{\bar{W}_i} = D_i^{n+1} \quad (14)$$

donde n se refiere al n<sup>ésimo</sup> ciclo del rediseño.

Los métodos basados en criterios de optimización son, por lo general, muy eficientes y requieren para converger un número poco significativo de análisis estructurales que es esencialmente independiente del tamaño del problema, caracterizado por el número de variables de diseño. El inconveniente que presentan es que su convergencia es inestable en algunos problemas. La tendencia actual es reducir este inconveniente y para ello se han desarrollado algoritmos que incluyen modificaciones del tipo heurístico de manera de evitar la inestabilidad de su convergencia (8). Además del problema de la convergencia de la Ec. (14) u otras, queda el de la evaluación de los multiplicadores de Lagrange ( $\lambda_j$ ). En el caso de una sola restricción el único multiplicador constante puede ser considerado como una constante escalar que satisfaga la restricción y puede fácilmente ser evaluado como tal. En el caso de múltiples restricciones,  $\lambda_j$  debe obtenerse a partir de un conjunto de ecuaciones simultáneas de restricción. Un método aproximado para evaluar los multiplicadores, en este caso, es el método de la "envolvente", donde se considera cada restricción separadamente y se evalúa su respectivo multiplicador (5).

Otro enfoque que puede darse a los criterios de optimización surge cuando se consideran los elementos de una estructura como activos y pasivos respecto de las variables de diseño (5). Un elemento es activo cuando la variable de diseño que lo caracteriza puede tomar diversos valores hasta el óptimo. Un elemento es pasivo, con relación a un criterio de optimización, si éste se dimensiona teniendo en cuenta alguna otra consideración, tal como, tamaño mínimo, restricción de esfuerzo, etc. La forma en que se agrupen los elementos pasivos y activos y en que momento del ciclo de redimensionamiento da origen a diversos métodos.



### 3.2.1. Optimización no Restringida

- a.) METODOS AD HOC.- Aunque se sabe que estos métodos han sido superados por otros, algunos de ellos son aún útiles, particularmente cuando los valores de la función pueden estar sujetos a errores, en cuyo caso el empleo de métodos más sofisticados no es justificatorio. Un ejemplo típico es el METODO SIMPLEX el cual ha sido también ampliado a fin de poder resolver problemas con restricciones. Entre los más eficientes de estos métodos se encuentran el DSC. Este es uno de los pocos métodos que permite trabajar eficientemente con problemas de más de tres variables.

Cuando es posible obtener las primeras derivadas, el METODO DEL DESCENSO DE LA MAYOR PENDIENTE resulta de mucha utilidad. Este se basa en el empleo del gradiente de la función ( $\nabla F$ ) con signo cambiado como la dirección de búsqueda. Aunque el método es convergente la velocidad de convergencia es lenta.

- b.) METODOS BASADOS EN DIRECCIONES CONJUGADAS. - Cuando la matriz de las segundas derivadas de la función objetivo no puede evaluarse, se procede a almacenar información sobre la misma en forma indirecta - estableciendo una secuencia finita de operaciones que permite obtener el mínimo de una función cuadrática.

Una forma eficiente de efectuar lo anterior es mediante las direcciones conjugadas. Un conjunto de vectores  $\bar{N}^i$  se dice que son mutuamente conjugados con respecto a una matriz simétrica y definida positivamente  $\bar{G}$  si

$$(\bar{N}^i)^T \bar{G} \bar{N}^j = 0 \quad \forall i, j; \quad i \neq j \quad (15)$$

En este método la primera dirección de búsqueda es el vector del descenso de mayor pendiente. En el caso de tratarse de una búsqueda lineal, esto es

$$\bar{D}^{k+1} = \bar{D}^k + \alpha^k \bar{N}^k \quad (16)$$

se tomará  $\bar{N}^1$  igual a  $(-\bar{\nabla} F^1)$

- c.) METODOS DEL TIPO NEWTONIANO. - Cuando pueden evaluarse las segundas derivadas, el vector  $\alpha \bar{N}$  puede calcularse como

$$\alpha \bar{N} = -\bar{G}^{-1} \bar{\nabla} F$$

donde  $\bar{G}$ , en este caso, es la matriz  $(\partial^2 F / \partial D^i \partial D^j)$  (17)

con lo que se obtiene

$$\bar{D}^{k+1} = \bar{D}^k - \bar{G}^{-1} \bar{\nabla} F \quad (18)$$

El empleo de esta ecuación iterativamente se conoce como el METODO de NEWTON. La Ec. (18) puede también generarse truncando la serie de Taylor para el  $\bar{\nabla} F$  expandido alrededor de  $\bar{D}^k$ .

Cuando solamente son disponibles las primeras derivadas, el Método de Newton no puede implementarse directamente, esto da origen a los METODOS QUASI NEWTONIANOS, en los que se mantiene la idea básica del Método de

Newton. En estos métodos se emplea una matriz  $\bar{H}^k$  como una aproximación de  $\bar{G}^{-1}$ . Después de cada iteración  $\bar{H}^{k+1}$  se calcula corrigiendo  $\bar{H}^k$  de tal forma de tomar en cuenta la información acerca de las segundas derivadas que ha llegado a ser disponible en esa iteración. Luego el vector  $\Delta \bar{H}^k$  se determina en función de  $\bar{H}^k$ . El método más conocido de este tipo es el DFP (DAVIDON-FLETCHER-ROWELL) - (9), en el cual el primer valor de la matriz  $\bar{H}$  se toma por lo general, igual a la matriz identidad, esto es

$$\bar{H}^1 = I \quad (19)$$

lo que asegura que los subsecuentes valores de  $\bar{H}^k$  serán positivamente definidos. El DFP termina cuando la función es cuadrática.

- d.) METODOS DEL PASO RESTRINGIDO. - Las dificultades ocasionales que se originan con el empleo de los métodos Newtonianos son por lo general, problemas de confiabilidad cuando la aproximación está muy alejada del mínimo. En estas circunstancias, la predicción dada por los métodos Newtonianos es de poca importancia, porque la serie de Taylor a partir de la cual ésta se deriva está dominada por los términos de mayor orden de tal forma que el truncamiento no es representativo. Una manera mucho más razonable de emplear la información acerca de las segundas derivadas de la función objetivo considerando que las primeras derivadas son dadas es el suponer que la función cuadrática  $q^k(\bar{D})$  que se determina mediante esa información es solamente una aproximación válida de  $F(\bar{D})$  en una región limitada  $\bar{R}$  alrededor de  $\bar{D}$ . Entonces el nuevo punto  $\bar{D}^{k+1}$ , toma como el vector que resuelve el problema.

$$\begin{array}{l} \text{mínimo} \\ \bar{D} \end{array} \quad q^k(\bar{D}); \quad \bar{D} \in \bar{R} \quad (20)$$

Un método representativo de este tipo es el METODO DE LOS HIPERCUBOS desarrollado por Fletcher (10).

- e) METODOS BASADOS EN SUMA DE CUADRADOS. - En el caso que la función objetivo  $F(\bar{D})$  pueda expresarse como la suma de los cuadrados de  $P$  funciones  $f_j(\bar{D})$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, P$  donde  $P \geq n$  ( $n =$  número de variables de diseño), esto es

$$F(\bar{D}) = \sum_{j=1}^P \{f_j(\bar{D})\}^2 = \bar{F}^T \bar{F} \quad (21)$$

se obtiene que el gradiente de la función objetivo está dado por

$$\bar{V} F = 2\bar{J}^T \bar{F} \quad (22)$$

donde  $\bar{J}$  es el Jacobiano de  $f$  ( $J_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial D_k}$ ), lo que permite obtener

$$\bar{G} = 2\bar{J}^T J + 2\sum_j f_j \bar{B}^j \quad (23)$$

donde  $\bar{G}$  es el Hessiano de  $F$  y  $\bar{B}^j$  es la matriz de segundas derivadas de  $f_j$ . La forma de emplear estos resultados es utilizando una expresión aproximada de  $\bar{G}$  la que puede obtenerse a partir de la Ec. (23).



como

$$\bar{G} = 2 \bar{J}^T J \quad (24)$$

considerando que los  $f_j$  son pequeños cerca de la solución que son cerca lineales de tal forma que  $B^j$  sea pequeño.

Cuando la aproximación dada por la Ec. (24) se emplea en el Método Newton resulta el método generalizado de los mínimos cuadrados o Método de Gauss-Newton.

### 3.2.2. Optimización Restringida.

Esta puede subdividirse en dos subgrupos según que las restricciones sean lineales o no lineales.

En el caso de que la función objetivo y las restricciones sean lineales resulta de mucha utilidad la programación lineal. En este caso la solución debe encontrarse en un punto en el cual se intersecan  $n$  restricciones independientes, y éste es generalmente el vértice de una región poliédrica admisible formada por las inequaciones de restricción. Al existir un número finito de tales vértices, la técnica de solución puede ser finita.

Una técnica dentro de la programación lineal es el Método Simplex Revisado (9). Dada una región poliédrica de  $n$  vértices y teniendo en cuenta que el método trabaja sistemáticamente analizando vértice por vértice se puede considerar que se ha llegado a un vértice admisible  $A$ . Si  $\bar{N}$  representa la matriz cuadrada cuyas columnas son vectores normales de las restricciones que se intersecan en  $A$ , entonces las filas de  $\bar{N}^{-1}$  representan las direcciones ( $n^i$ ) que permiten alejarse de  $A$ . La componente de estos vectores a lo largo de la gradiente de la función objetivo, esto es,

$$\bar{v}^T \bar{N}^{-1} n^i \quad (25)$$

representa un escalar ( $\lambda_i$ ) el cual será negativo si  $n^i$  es con pendiente descendente. Consecuentemente, si todos los  $\lambda_i$  son no negativos,  $A$  es la solución ( $A = B$ ) puesto que no existirá ninguna dirección descendente en  $A$ . En caso contrario el método escogería la dirección  $n^i$  correspondiente al valor  $\lambda_i$  más negativo y buscaría a lo largo de  $n^i$  el nuevo vértice y así sucesivamente. Los  $\lambda_i$  se conocen como multiplicadores de Kuhn-Tucker, multiplicadores generalizados de Lagrange, costos reducidos, etc.

Una importante característica del método simplex revisado es que las matrices  $\bar{N}$  correspondientes a los vértices vecinos difieren solamente en una columna con la correspondiente ventaja de que una puede evaluarse a partir de la otra. La forma de hacerlo conduce a la llamada "técnica del pivote"

En el caso que las restricciones sean igualdades se emplean éstas para reducir el número de variables del problema, transformándolo en uno de minimización no restringida; entre estos métodos se encuentran el Método de la Gradiente Reducida y el Método de la Proyección de la Gradiente.

Cuando las restricciones son no lineales, el problema lógicamente, es más complicado. Existen, al igual que en el caso anterior, dos subproblemas: restricciones de igualdad no lineales y restricciones de desigualdad no lineales. En ambos casos la idea básica es linealizar el problema en determinados intervalos de forma tal de aplicar los métodos anteriores.



Entre los métodos más difundidos se encuentra el Método Generalizado de la Gradiente Reducida.

Otras aproximaciones consisten en resolver subproblemas lineales o cuadráticos en cada interacción. Esto puede hacerse de muchas formas. Una de ellas es considerando la función objetivo como :

$$F(\bar{D}) = F(\bar{D}^k) + (\bar{V} F^k)^T (\bar{D} - \bar{D}^k) \quad (26)$$

y resolver el problema de programación lineal así obtenido. El nuevo punto se emplea para construir nuevas linealizaciones, las que se suman al programa lineal el cual es nuevamente resuelto y así sucesivamente. Este se conoce como el Método de los Planos cortados (10); cada linealización de la restricción corta una parte de la región admisible en la cual la solución no podría ubicarse. El cálculo se lleva a cabo empleando una formación dual del programa lineal, el cual fácilmente permite la adición de ecuaciones extras. Su convergencia es de primer orden y está lleno de dificultades numéricas.

Un método de mayor confiabilidad aunque posiblemente más lento, es aquél en el que mediante funciones de penalidad (11) se reduce el problema no lineal restringido a una secuencia de problemas de minimización no restringida. En este caso la función a minimizar es de la forma.

$$\text{Min}_D \phi(\bar{D}, r_k) = F(\bar{D}) + r_k \sum_{m=1}^M G(g_m(\bar{D})) \quad (27)$$

donde

$\phi(\bar{D}, r_k)$  = superficies de repuesta

$r_k$  = factor de repuesta

$G$  = función que se escoge de forma tal como para lograr la convergencia hacia la restricción.

$M$  = número de restricciones

El segundo término de la Ec. (27) representa la función de penalidad. Esta puede ser una función de penalidad interior o una función de penalidad exterior.

Cuando se emplea una función de penalidad interior para la obtención del mínimo es necesario comenzar la búsqueda con un punto interior (de ahí su nombre) esto es, un punto dentro de la región admisible (9). Por lo tanto esta función tiene como ventaja que los diseños intermedios durante la búsqueda son diseños factibles. En este tipo de función  $G$  es por lo general la inversa de las restricciones, con esto la Ec. (27) se transforma en

$$\phi(\bar{D}, r_k) = F(\bar{D}) + r_k \sum_{m=1}^M \frac{1}{g_m(\bar{D})} \quad (28)$$

El mínimo de la función  $\phi$  se obtiene para una secuencia de valores decrecientes de  $r_k$  tal que  $r_k$  tiende a cero cuando  $k$  se incrementa ( $r_1 > r_2 > \dots > r_k$ )

Las funciones de penalidad exterior son del tipo (9)

$$\phi(\bar{D}) = F(\bar{D}) - r \sum_{k=1}^M \min\{0, g_k(\bar{D})\} \quad (29)$$

o

$$\phi(\bar{D}) = F(\bar{D}) + r \sum_{k=1}^M \{\min\{0, g_k(\bar{D})\}\}^2 \quad (30)$$

En este caso  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$ . Son de especial interés cuando se trata de problemas con restricciones de igualdad.

En diversos problemas de optimización muchas veces, una o más variables de diseño resultan ser variables discretas. Como ejemplo puede citarse la determinación del tamaño de planchas, tamaño de miembros, número de atornilladores u otros elementos (11). En algunos casos basta redondear al valor discreto más cercano para obtener una solución. En otros, es necesario comenzar con un procedimiento que tome en cuenta el carácter discreto de las variables (12). Es en este último caso que los métodos de programación dinámica cuando pueden emplearse resulta ser muy eficientes. Por lo general se requiere en estos casos, de una considerable experiencia en programación(11).

#### 4. CRITERIO DE OPTIMIZACION PARA EL ANALISIS DE PORTICOS SOMETIDOS MAYORMENTE A FLEXION.

Para el desarrollo de este método se parte de una estructura conformada por  $n$  miembros y sometida a la acción de un sistema de cargas  $P$ . Asociado con el sistema de cargas existe una configuración de deformación, lo que da origen a desplazamientos nodales en la estructura, los que se representan por  $\Delta$ . Se considera además que la estructura no incursiona en el rango inelástico.

Si se aplica un sistema de cargas virtuales  $V$ , correspondiendo a los desplazamientos nodales y según la dirección de estos, se cumple que

$$\text{TRABAJO EXTERNO VIRTUAL} = \text{TRABAJO INTERNO VIRTUAL}$$

en otras palabras

$$(\text{FUERZA VIRTUAL} \times \text{DESPLAZAMIENTO REAL}) = (\text{FUERZAS VIRTUALES} \times \text{DESPLAZ. INTER. REAL})$$

Si  $M_i$  representa al momento flector interno real y  $m_i$  al momento flector interno de miembro  $i$ , lo anterior puede escribirse como

$$R = \underline{V}^T \cdot \underline{\Delta} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_i m_i}{E_i I_i} dx \quad (1)$$

expresión en la cual sólo se considera el efecto de  $\Delta$  a la flexión y  $l_i$  la longitud de cada miembro.

$E_i I_i$  es la rigidez

Considerando que existen ciertos miembros activos y otros pasivos durante el proceso de optimización de variables de diseño se puede dividir en dos grupos respectivamente. Para el caso particular se considerará como variable de diseño el momento de inercia  $I_i$ . Miembros activos son aquellos cuyo momento de inercia  $I_i$  puede variarse hasta alcanzar una configuración óptima de desplazamiento, mientras que los miembros pasivos permanecen invariables.

Con esta división la Ec. (1) puede reescribirse como:

$$\Pi = \sum_{i=1}^p \int_0^{l_i} \frac{M_i m_i}{E_i I_i} dx + \sum_{i=p+1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_i m_i}{E_i I_i} dx \quad (2)$$

donde la primera sumatoria contiene  $p$  miembros pasivos.

Dado que los miembros pasivos no presentarán variación alguna, el primer término de la Ec.(2) puede reemplazarse por una constante  $\Pi_0$ , esto es

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=p+1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_i m_i}{E_i I_i} dx \quad (3)$$

El peso de la estructura  $W$  viene dado por

$$W = \sum_{i=1}^n V_i \rho_i = \sum_{i=1}^n A_i l_i \rho_i \quad (4)$$

donde  $\rho_i$  es el peso específico del material del miembro  $i$ ,  $V_i$  su volumen y  $A_i$  el área de la sección transversal del mismo. Teniendo en cuenta invariablemente los miembros activos y pasivos la Ec. (4) puede transformarse en

$$W = W_0 + \sum_{i=p+1}^n A_i l_i \rho_i \quad (5)$$

Si el máximo valor permisible del trabajo virtual del sistema de cargas  $\underline{V}$  es  $\Pi_{adm}^*$ , se obtiene la restricción de igualdad:

$$\Pi = \Pi_{adm} \quad (6)$$

Empieando la técnica de los multiplicadores de Lagrange ( $\lambda$ ) se obtiene como función objetivo.

$$W = (W_0 + \sum_{i=p+1}^n A_i l_i \rho_i) + \lambda (\Pi_0 - \Pi_{adm} + \sum_{i=p+1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_i m_i}{E_i I_i} dx) \quad (7)$$

Considerando que cada elemento es de sección transversal constante y que el módulo de elasticidad no varía a lo largo del mismo, y teniendo en cuenta la relación existente entre radio de giro ( $r_i$ ) momento de inercia ( $I_i$ ) y área ( $A_i$ ), la Ec. (7) puede transformarse en

---

\*  $\Pi_{adm} = \underline{V}^T \underline{\Delta}_{m\acute{a}x}$ ;  $\underline{\Delta}_{m\acute{a}x}$  = Maximos desplazamientos permisibles  
(Una forma de obtenerlos es a partir de un Reglamento)

$$W = (W_0 + \sum_{i=p+1}^n \frac{1_i \rho_i}{r_i^2}) + \lambda (\Pi_0 - \Pi_{adm} + \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{E_i I_i} \int_0^{l_i} M_i m_i dx) \quad (8)$$

para un mínimo

$$\frac{\partial W}{\partial I_j} = 0 = \frac{1_j \rho_j}{2 r_j} - \lambda \frac{\int_0^{l_j} M_j m_j dx}{E_j I_j^2} + \lambda \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{E_k I_k} \left( \frac{\partial M_k}{\partial I_j} m_k + M_k \frac{\partial m_k}{\partial I_j} \right) dx \quad (9)$$

Para estructuras determinadas, los  $M_i$  son independientes de los  $I_i$ , y las derivadas son por lo tanto iguales a cero. Para estructuras indeterminadas las derivadas forman un sistema de cargas internas equilibrado en sí mismo. El trabajo virtual de este sistema, representado por la sumatoria, es cero, por el principio de los desplazamientos virtuales (4). Luego la Ec. (9) se transforma en

$$\frac{1_j \rho_j}{r_j^2} - \lambda \frac{\int_0^{l_j} M_j m_j dx}{E_j I_j^2} = 0 \quad (10)$$

de donde

$$I_j = \sqrt{\lambda \frac{r_j^2}{1_j \rho_j E_j} \int_0^{l_j} M_j m_j dx} \quad (11)$$

sustituyendo la Ec. (11) en la Ec. (3) y teniendo en cuenta la Ec. (6) :

$$\Pi_{adm} = \Pi_0 + \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{E_i} \frac{\int_0^{l_i} M_i m_i dx}{\sqrt{\lambda \frac{r_i^2}{1_i \rho_i E_i} \int_0^{l_i} M_i m_i dx}} \quad (12)$$

simplificado:

$$\Pi_{adm} = \Pi_0 + \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{r_i} \sqrt{\frac{1_i \rho_i}{E_i}} \sqrt{\int_0^{l_i} M_i m_i dx} \quad (13)$$

Reescribiendo la Ec. (13):

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{(\Pi_{adm} - \Pi_0)} \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r_i} \sqrt{\frac{1_i \rho_i}{E_i}} \sqrt{\int_0^{l_i} M_i m_i dx} \quad (14)$$

Sustituyendo la Ec. (14) en la Ec. (11)

$$I_j = \frac{1}{(\Pi_{adm} - \Pi_0)} \frac{r_j}{\sqrt{1_j \rho_j E_j}} \sqrt{\int_0^{l_j} M_j m_j dx} \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r_i} \sqrt{\frac{1_i \rho_i}{E_i}} \sqrt{\int_0^{l_i} M_i m_i dx} \quad (15)$$

La Ec. (15) representa el criterio de optimización que deben cumplir las variables  $I_j$  para obtener el diseño de peso mínimo con restricciones de desplazamiento.\*

Para estructuras estáticamente determinadas la Ec. (15) generará el tamaño de los miembros activos directamente para el peso mínimo de la estructura con un desplazamiento crítico igual al valor especificado de  $\bar{\pi}_{adm}$ , pues como se sabe, en este tipo de estructuras la variación en el tamaño de los miembros no da origen a una redistribución de las fuerzas internas.

Se sabe que, para estructuras estáticamente determinadas sujetas a restricciones de esfuerzos solamente y a un sólo sistema de cargas, el diseño por peso mínimo tiene todos sus miembros completamente esforzados o con el tamaño mínimo permisible. Si se satisface la restricción de desplazamiento no será necesario un rediseño. En el caso contrario, esto es cuando no se cumple con la restricción de desplazamiento, ciertos miembros (activos) deben incrementarse en tamaño.

Un miembro de la estructura puede considerarse como miembro pasivo si su dimensionamiento está gobernado por alguna condición externa, que impone la necesidad de emplear dimensiones mayores que las que se requieren para satisfacer la restricción de desplazamiento (4). Otro criterio para la selección de miembros pasivos puede obtenerse de un análisis de la Ec. (2). Si en esta ecuación el producto  $M_i m_i$  fuese negativo, un incremento en el tamaño del miembro originaría una disminución de la componente negativa de  $\Pi$ , incrementando de esta forma el valor total de  $\Pi$  (lo que haría que se viole aún más la restricción de desplazamiento impuesta). Por otro lado si se disminuye el tamaño del miembro se estaría violando la restricción de esfuerzos o los requerimientos de fabricación. De todo esto se concluye que un miembro para el cual el producto  $M_i m_i$  fuese negativo no permite variación alguna en su tamaño o sea es un miembro pasivo.

En el caso de estructuras estáticamente indeterminadas la ecuación (15) puede emplearse como una ecuación de recursión para la determinación iterativa de  $I_j$ . La Ec. (15) puede escribirse

$$I_j^{k+1} = \frac{1}{\bar{\pi}_{adm} - \bar{\pi}_0} r_j^k \left( \frac{\int_0^L \frac{I_j^k M_j m_j dx}{\sqrt{I_j^k \rho_j v_j}} \right)^k = \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r_i^k} \sqrt{\left( \frac{I_i^k \rho_i}{E_i} \right)^k} \sqrt{\left( \int_0^L \frac{M_i m_i dx}{c} \right)^k} \quad (16)$$

donde los superíndices  $k$  y  $k+1$  se refieren a las iteraciones

Para el caso especial de un sólo desplazamiento, el correspondiente sistema de cargas virtuales (V) consiste en una sola carga unitaria, y por lo tanto,  $\bar{\pi}$  evaluado según la Ec. (1), es el valor del desplazamiento, luego la Ec. (16) puede escribirse, en este caso, como

\* Estas restricciones están representadas por  $\bar{\pi}_{adm}$  que a su vez es función de  $\Delta$  máx

$$I_j^{k+1} = \frac{1}{\Delta_{adm} - \Delta_o} r_j^k \sqrt{\frac{\int_0^l M_j^2 dx}{I_j \rho_j E_j}} \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r_i^k} \left( \sqrt{\frac{I_i \rho_i}{E_i}} \sqrt{\int_0^l M_i^2 dx} \right) \quad (17)$$

para el empleo de la Ec. (16) o la Ec. (17) bastará un punto inicial arbitrario de partida. Aplicándolas luego un número finito de veces se logrará converger a la estructura estáticamente indeterminada de peso mínimo que cumple con la restricción  $\Delta_{adm}$  o  $\Delta_{adm}$  según sea el caso.

#### 4.1. PROCEDIMIENTO DE DISEÑO

Dada una estructura aporticada, en la cual predomina la flexión, sometida a varios sistemas de carga y para la cual se desea obtener un diseño de mínimo peso cumpliendo con restricciones de esfuerzo y desplazamiento, se sugiere el siguiente procedimiento:

- 1.) Obtenga un diseño por peso mínimo aplicando el Método de Cociente de Esfuerzos (modificado para su aplicación a pórticos). La ecuación a emplearse en este caso (13).

$$S_i^{k+1} = S_i^k \left( \frac{F}{f} \right)_i^k \quad (18)$$

en donde  $S_i$  es el módulo de flexión del miembro  $i$  y  $(F/f)_i$  la relación de interacción en ese miembro.

- 2.) Verifique si se cumplen las restricciones de desplazamiento. Si estas se cumplen la estructura obtenida será la de peso mínimo.
- 3.) Si no se cumple con alguna restricción de desplazamiento, aplique iterativamente la Ec. (16) o la Ec. (17), pero teniendo cuidado de que no se viole ninguna restricción de esfuerzo, mediante la Ec. (18).

#### 4.2. Ejemplos Numéricos :

Para el dimensionamiento de vigas y columnas se han respetado las prescripciones dadas en el AISC - 70.

Las relaciones de interacción  $(f/F)$  a emplearse son:

- Elementos sujetos solamente a flexión

$$\left( \frac{f}{F} \right) = \frac{f_b}{F_b}$$

- Elementos sujetos a flexo - comprensión

$$\text{Si } f_a/F_a \leq 0.15 : \quad f/F = \frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0$$

$$\text{Si } f_a/F_a > 0.15 \quad f/F = \frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx}}{(1 - f_a/F'_{ax})F_{bx}} + \frac{C_{my} f_{by}}{(1 - f_a/F'_{ay})F_{by}} \leq 1.0$$

y

$$f/F = \frac{f_a}{0.60F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0$$

donde  $f_b$  = Esfuerzo unitario actuante en flexión  
 $F_b$  = " " Permisible en flexión  
 $f_a$  = " " actuante en compresión  
 $F_a$  = " " Permisible en compresión  
 $F_y$  = Esfuerzo de fluencia  
 $F'_e = \frac{12 \pi^2 E}{23(k l/r)^2}$   
 $\pi = 3.1416$   
 $E$  = Módulo de elasticidad  
 $k$  = factor de longitud efectiva  
 $l$  = longitud de pandeo  
 $r$  = radio de giro  
 $C_m$  = Factor de reducción

Los subíndices x, y, indican el eje de flexión analizado.

Se supone que los elementos que formen la estructura serán hechos de Perfiles de Planchas Soldadas con las siguientes características (14)

$$\text{Módulo de Elasticidad, } E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Esfuerzo de Fluencia, } F_y = 1500 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Peso Específico, } = 7.85 \times 10^{-3} \text{ Kg/cm}^3$$

Ejemplo 1. - PORTICO RECTANGULAR (Fig. 1)

La viga del pórtico se considera continuamente arriostrada, mientras que las columnas lo están cada 1.50 m.; la deflexión lateral máxima es de 2 cm.

Los valores iniciales de tanteo son:

$$I_1 = 159400 \text{ cm}^4 \quad (\text{CS } 45 \times 326)$$

$$I_2 = 17380 \text{ cm}^4 \quad (\text{VS } 75 \times 123)$$

$$I_3 = 87200 \text{ cm}^4 \quad (\text{VS } 50 \times 156)$$

lo que da un peso  $W = 5121 \text{ Kg.}$

En la Tabla 1 se muestran los resultados de las diferentes iteraciones. Es interesante observar que a pesar de haber iniciado las iteraciones con un vector de diseño bastante alejado del óptimo la convergencia es rápida. Se llega al resultado final en dos iteraciones. Algunos miembros resultan sobreesforzados, pero para los casos prácticos de ingeniería los resultados son aplicables. La deflexión resultante es de 0.34 cm menor que la máxima permisible (2cm) por lo tanto, no fue necesario seguir el rediseño por restricciones de desplazamiento.

#### Ejemplo 2 : Pórtico con TECHO INCLINADO (Fig. 2)

El pórtico se encuentra sometido a los tres sistemas de carga que se muestran en la Fig. 3. Para los casos en que se combine carga lateral con carga vertical los resultados del análisis estructural se han reducido en un 25% para efectos de diseño tal como lo permite el AISC-70

La viga se considera arriostrada cada 1.70 m; la columna izquierda cada 1.50 m, y la columna derecha a  $h/3$  (siendo  $h$  la altura de dicha columna). La deflexión máxima a considerarse es de 2 cm.

Los valores iniciales de tanteo son:

$$I_1 = 25420 \text{ cm}^4 \quad (\text{VS40x60})$$

$$I_2 = 12710 \text{ cm}^4 \quad (\text{VS40x37})$$

$$I_3 = 25420 \text{ cm}^4 \quad (\text{VS40x60})$$

lo que da un peso  $W = 977 \text{ Kg}$ .

En la Tabla 2 se muestran los resultados de las diferentes iteraciones. De los resultados de dicha Tabla puede nuevamente observarse la rápida convergencia del método. El mayor valor de la deflexión lateral (1.79cm) se obtiene para las condiciones de carga 2 y 3, como resulta ser menor que el valor máximo permitido (2cm), el problema se considera terminado.

#### Ejemplo 3. - Pórtico de una CRUJIA Y DOS NIVELES (fig. 4)

El pórtico se encuentra sometido a un sistema de cargas (Fig.4). Las vigas se encuentran arriostradas cada 2.00 m, las columnas del primer nivel cada metro. La deflexión máxima a considerarse en este caso es de 2.64 cm.

Las variables de diseño se han reducido de 6 a 4 considerando que las columnas de cada nivel deben ser iguales.

Los valores iniciales de Tanteo son:

$$I_1 = 37125 \text{ cm}^4 \quad (\text{CVS40x102})$$

$$I_2 = 14376 \text{ cm}^4 \quad (\text{VS40x40})$$

$$I_3 = 42850 \text{ cm}^4 \quad (\text{VS45x78})$$

$$I_4 = 11376 \text{ cm}^4 \quad (\text{VS40x40})$$

Lo que da un peso  $W = 2000\text{Kg}$ .



En la Tabla 3 se muestran los resultados de las diferentes iteraciones. Una vez más puede observarse la rapidez de convergencia, como la deflexión resultante en la última iteración (2.77cm.) es mayor que la máxima admisible (2.64cm.), se empleo el criterio de optimización - desarrollado a fin de cumplir con restricciones de desplazamiento. - Puede observarse en la Tabla 4 que basta una iteración para cumplir con las restricciones de desplazamiento. El incremento en peso con respecto a la solución de este Ejemplo puede verse en el Apéndice.

## 5. CONCLUSIONES

El método de diseño estructural presentado, el cual se basa en criterios de optimización, resulta altamente eficiente. Puede observarse, de los diferentes ejemplos, el residuo número de iteraciones necesarias para converger el valor del peso mínimo.

Los ejemplos muestran que el número de iteraciones necesarias para converger es prácticamente independiente del vector inicial de diseño y de la magnitud del problema.

El método propuesto resulta ser un método práctico de diseño, cuyo objetivo es encontrar eficientemente la estructura de peso mínimo.

La diferencia del método propuesto con el método del cociente de esfuerzos está en el empleo de la Ec. (16) o la Ec. (17). Estas se usan cuando al emplear la Ec. (18) la estructura obtenida no cumple con las restricciones de desplazamiento.\*

Al considerarse sólo el efecto de flexión en la deducción de la Ec. (17) queda limitada su aplicación a estructuras sometidas principalmente a este efecto.

El método de análisis propuesto es válido para estructuras linealmente elásticas.

---

\* Ver páginas 14 y 16

## 6. BIBLIOGRAFIA

1. GALLAGHER R.H. "Terminology and Basic Concepts"  
Optimum Structural Design; Ed. by Gallagher R.H. and Zienkiewicz. O.C. pp -17. Willey Pub. Co. 1973.
2. ZAPATA, L.F., "Apuntes de Clase del Curso Seminario de Optimización Estructural"  
Escuela de Graduados - UNI Perú 1977
3. GALLAGHER R.H.; "Fully Stressed Design"  
Optimum Structural Design; Ed. by Gallagher R.H. and Zienkiewicz, O.C. pp 19 - 32 Willey Pub. Co. 1973.
4. BERKE, L. and VENKAYVA. V.B., "Review of Optimality Criteria Approaches To Structural Optimization". Structural Optimization Symposium. AND Vol. 7 Ed. by SCHMIT, L.A. Jr. UNIVERSITY OF CALIFORNIA, Los Angeles 1974. pp 23-24
5. GELLATY, R.A. and BERKE, L. "Optimality - Criterion - Based Algorithms"  
Optimum Structural Design; Ed. by Gallagher R.H. and Zienkiewicz, O.C. pp 33 - 49 Willey Pub. Co. 1973.
6. FELTON, L.P. "Structural Index Methods and Optimum Design".  
pp 1 - 22.
7. SPUNT, L., "Optimum Structural Design".
8. CASSIS, J. "Programación Matemática versus Criterios de Optimidad"  
XIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural V. II Tema F.15 "Santiago - de Chile 1972
9. FLETCHER, K. "Mathematical - Programming Methods - A Critical Review" . Optimum Structural Design Ed. by Gallagher R.H. and Zienkiewicz, O.C. pp 51 Willey Pub. Co. 1973.
10. MOSES, F., "Mathematical Programming Methods for Structural Symposium. AND VOL. 7 Ed. by SCHMIT. L.A. UNIVERSITY OF CALIFORNIA, Los Angeles 1974 pp 35 - 47.
11. MOE, J "Convexity - Function Methods"  
pp 143 - 177.
12. REINSCHMIDT, K.F., "Discrete Programming Problems in Structural Design Research Report R 69-50, Department of Civil Engineering, M.I.T. August 1969.

13. CASSIS, J y GUZMAN, J. "Diseño Automático de Pórticos de Acero Aplicando Criterios de Optimidad"  
XIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural V. II. Tema F. II Santiago - de Chile - 1973.
14. DIAZ D., M. "Perfiles de Planchas Soldadas"  
Tesis de Grado - UNI 1975
15. ZAPATA, L.F. "Diseño Estructural en Acero"  
LIMA - PERU - 1977
16. A. DARKOV and V. KUZNETZOV "Structural Mechanics"  
Mir Publishers Moscow - 1969

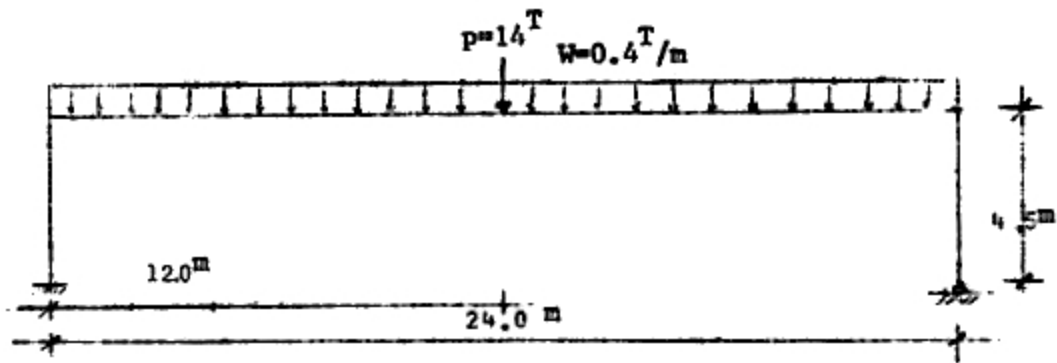


Fig. 1 ESTRUCTURA DEL EJEMPLO 1



Fig. 2 ESTRUCTURA DEL EJ. 2

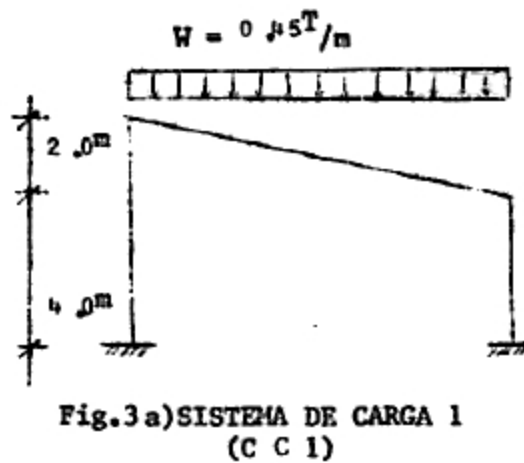
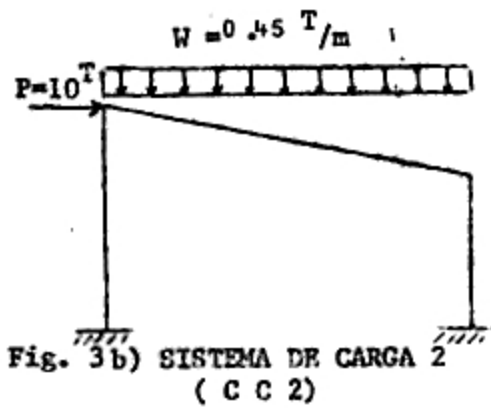
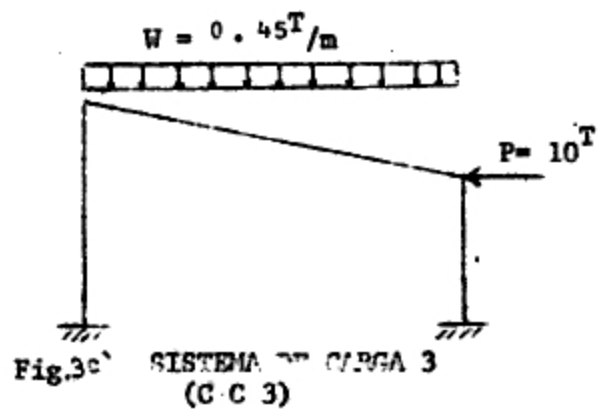
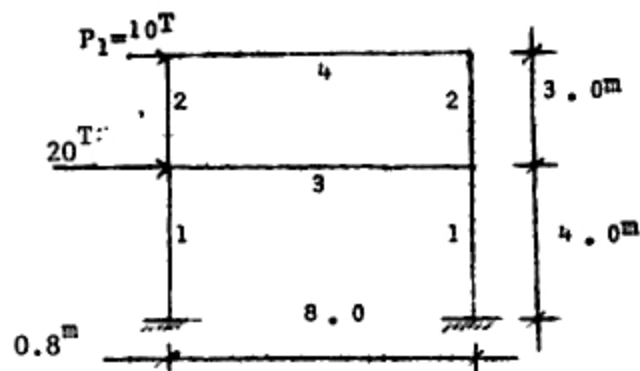
Fig. 3a) SISTEMA DE CARGA 1  
(C C 1)Fig. 3b) SISTEMA DE CARGA 2  
(C C 2)Fig. 3c) SISTEMA DE CARGA 3  
(C C 3)

Fig. 4 ESTRUCTURA DEL EJEMPLO 3

Iteración	Variable de Diseño cm	f/F			Perfil	Peso (Kg)
		cc1	cc2	cc3		
0	1	25420	0.22	0.38	VS 40x60	977
	2	12710	0.42	0.94	VS 40x37	
	3	25420	0.20	0.97	VS 40x60	
1	1	14660	0.36	0.51	VS 45x34	753
	2	11760	0.39	0.89	VS 40x33	
	3	27620	0.21	1.09	VS 50x53	
2	1	9072	0.47	0.38	VS 40x27	670
	2	9744	0.51	0.98	VS 40x29	
	3	36930	0.10	1.02	VS 50x57	

TABLA 2 : RESULTADOS DEL EJ. 2

Iteración	Variable de Diseño cm	f/F	Perfil	Peso (Kg)
0	1	159400	VS45x326	5121.0
	2	173800	VS75x123	
	3	87200	VS50x156	
1	1	141100	VS75x107	3958.5
	2	160330	VS75x122	
	3	16830	VS75x122	
2	1	13652	VS75x101	3673.5
	2	154729	VS75x112	
	3	165842	VS75x118	

TABLA 1 : RESULTADOS DEL EJ. 1

Iteración	Variable de Diseño cm	f/F	Perfil	Peso (Kg)
0	1	37125	VS40x102	2210
	2	18272	VS40x47	
	3	53179	VS45x92	
	4	18272	VS40x47	
1	1	11533	VS75x93	1912
	2	16298	VS45x36	
	3	69683	VS60x83	
	4	16238	VS45x36	
2	1	94578	VS60x100	1682
	2	10893	VS40x31	
	3	51160	VS50x57	
	4	11760	VS40x30	

TABLA 3 : RESULTADOS DEL EJ. 3, SIN CONSIDERAR RESTRICCIONES DE DESPLAZAMIENTO

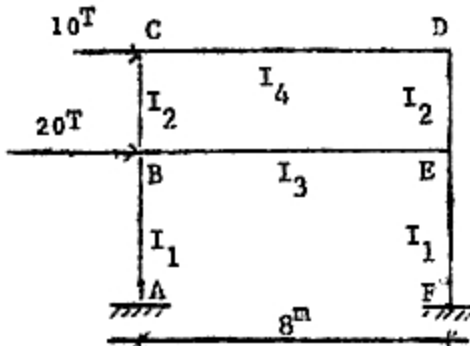
Iteración	Variable de Diseño	f/F	Perfil	Deflexión Lateral (cm)	Peso Kg
0	1	94578	VS60x100	2.77	1682
	2	10893	VS40x31		
	3	51160	VS50x57		
	4	11760	VS40x30		
1	1	94578	VS60x100	2.35	1752
	2	13917	VS45x36		
	3	51160	VS60x60		
	4	11760	VS40x32		

TABLA 4 : RESULTADOS DEL EJEMPLO 3, CONSIDERANDO LA RESTRICCION POR DESPLAZAMIENTO.

(Nótese que la Iteración o equivale a la Iteración 2 de la Tabla 3.)

## A P E N D I C E

Desarrollo paso a paso del Ejemplo 3



Los valores iniciales de tanteo son

$$I_1 = 37125 \text{ cm}^4 \text{ (vs } 40 \times 102)$$

$$I_2 = 18272 \text{ cm}^4 \text{ (vs } 40 \times 47)$$

$$I_3 = 53179 \text{ cm}^4 \text{ (vs } 45 \times 92)$$

$$I_4 = 18272 \text{ cm}^4 \text{ (vs } 40 \times 47)$$

1. DISEÑO OPTIMO CONSIDERANDO SOLO RESTRICCIONES DE ESFUERZO

Los resultados se muestran en la Tabla 5.

TABLA 5

ITERACION 0

Momentos flectores t-m	Miembro	Esfuerzos Permisi- bles (Kg/cm <sup>2</sup> )	Esfuerzos actuantes (Kg/cm <sup>2</sup> )	f/F	Módulo de sección requerido (cm <sup>3</sup> )	Nuevo Perfil
M <sub>AB</sub> = -37.08 M <sub>BA</sub> = -23.31 M <sub>BE</sub> = 30.12	1	F <sub>a</sub> = 1359 (k1/r=35.31) F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>a</sub> = 57.03 f <sub>b</sub> = 1942	1.34	2558	vs 75x93 (S=2923)
M <sub>BC</sub> = -6.81 M <sub>CB</sub> = -8.4 M <sub>CD</sub> = 8.4 M <sub>DC</sub> = 8.4	2	F <sub>a</sub> = 1365 (k1/r=34.13) F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>a</sub> = 35.17 f <sub>b</sub> = 975	0.68	578	vs 45x36 (S= 691)
M <sub>DE</sub> = -8.4 M <sub>ED</sub> = -6.81	3	F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>b</sub> = 1319	0.92	2009	vs 60x83 (S=2223)
M <sub>EB</sub> = 30.12 M <sub>EF</sub> = -23.31 M <sub>FE</sub> = -37.08	4	F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>b</sub> = 975	0.65	544	vs 40x32 (S=550)

TABLA 5 (cont...)

## Iteración 1

Momentos Flectores T - m	MIR BRO	Esfuerzos Permisibles (Kg/cm <sup>2</sup> )	Esfuerzos actuales (Kg/cm <sup>2</sup> )	f/F	Módulo de sección requerido (cm <sup>3</sup> )	Nuevo Perfil
M <sub>AB</sub> = -47.14 M <sub>BA</sub> = 12.76 M <sub>DE</sub> = 20.17 M <sub>BC</sub> = -7.41 M <sub>CB</sub> = -7.6 M <sub>CD</sub> = 7.6 M <sub>DC</sub> = 7.6 M <sub>DE</sub> = -7.6 M <sub>ED</sub> = -7.41 M <sub>EB</sub> = 20.17 M <sub>EF</sub> = -12.76 M <sub>FE</sub> = -47.14	1	F <sub>a</sub> = 1429 (k1/r=20.63) F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>a</sub> = 42.71 f <sub>b</sub> = 1613	1.08	3157	vs60x100 (S=3036)
	2	F <sub>a</sub> = 1389 (k1/r=29.36) F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>a</sub> = 41.45 f <sub>b</sub> = 1100	0.76	525	vs40x31 (S=52)
	3	F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>b</sub> = 907	0.61	1356	vs50x57 (S=1384)
	4	F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>b</sub> = 1094	0.73	504	vs40x36 (S= 490)

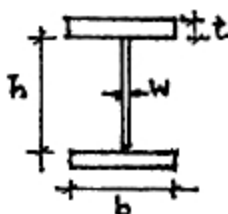
## Iteración 2

M <sub>AB</sub> = -47.87 M <sub>BA</sub> = -12.32 M <sub>BE</sub> = 0.33 M <sub>EC</sub> = -8.01 M <sub>CB</sub> = -6.86 M <sub>CD</sub> = 6.86 M <sub>DC</sub> = 6.86 M <sub>DE</sub> = -6.06 M <sub>ED</sub> = -8.01 M <sub>EB</sub> = 20.33 M <sub>EF</sub> = -12.32 M <sub>FE</sub> = -47.89	1	F <sub>a</sub> = 1408 (k1/r=25.12) F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>a</sub> = 38.96 f <sub>b</sub> = 1577	1.08	—	—
	2	F <sub>a</sub> = 1354 (k1/r=36.1) F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>a</sub> = 43.47 f <sub>b</sub> = 1537	1.06	—	—
	3	F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>b</sub> = 1469	0.98	—	—
	4	F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>b</sub> = 1401	0.93	—	—

Como los resultados de la fórmula de interacción en la última iteración son cercanos a la unidad ( $\pm 10\%$ ) puede considerarse este como un di señor definitivo que cumple con las restricciones de esfuerzo.

Como los perfiles solución no figuran en las referencias (14), (15) a continuación se dan las características geométricas de los mismos.

	vs60x100	vs40x31	vs50x57	vs40x36
b (mm)	357	150	187	147
t (mm)	12.5	6.4	12.5	6.4
h (mm)	598	405	505	405
w (mm)	6.4	5.0	5.0	5.0



2. Verificación de la restricción de desplazamiento ( $\delta_{adm} = 2.64^{cm}$ )

Del análisis estructural se obtiene que el desplazamiento lateral correspondiente al último diseño es de 2.77 cm, como este valor es mayor que la restricción impuesta (2.64cm) será necesario emplear la Ec. (17). Para el empleo de la misma se hará previamente algunas transformaciones en su forma. Como la Ec. (17) esta dada por

$$I_j^{k+1} \frac{1}{\Delta_{adm} - \Delta_0} r_j^k \left( \frac{\int_0^L M_j m_j dx}{\sqrt{I_j} \rho_j E_j} \right)^k \dots \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r_i^k} \left( \frac{I_i \rho_i}{E_i} \right)^k \left( \sqrt{\int_0^L M_i m_i dx} \right)^k$$

teniendo en cuenta que y que el peso específico ( $\rho$ ) y el módulo de elasticidad (E) son constantes puede transformarse en

$$S_j^{k+1} = \frac{1}{\Delta_{adm} - \Delta_0} \left( \frac{r_j}{h_j} \right)^k \left( \frac{\int_0^L M_j m_j dx}{E \sqrt{I_j}} \right)^k \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r_i^k} \left( \sqrt{I_i} \right)^k \left( \sqrt{\int_0^L M_i m_i dx} \right)^k$$

llamando  $y = \frac{2}{\Delta_{adm} - \Delta_0} \frac{1}{E} \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r_i} \sqrt{I_i} \sqrt{\int_0^L M_i m_i dx}$

La Ec. anterior se transforma en

$$S_j^{k+1} = y^k \left( \frac{r_j}{h_j} \right)^k \left( \frac{\int_0^L M_j m_j dx}{\sqrt{I_j}} \right)^k$$

Los Diagramas de Momentos Flectores a considerar

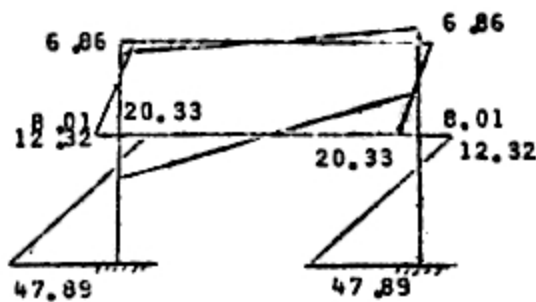
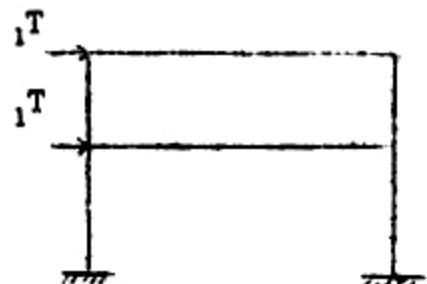


Diagrama H



Sistema de Fuerzas para la Obtención del Diagrama m

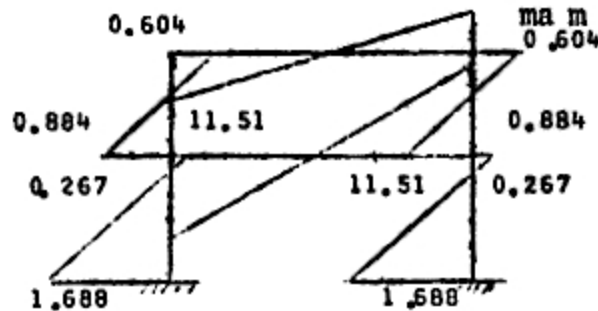


Diagrama m



Los resultados se muestran en la Tabla 6

TABLA 6

Miembro	$\int M dx$ (Kg-cm <sup>3</sup> )	Nuevo Módulo de sección (cm <sup>3</sup> )	Nuevo Perfil
1	89.782x10 <sup>9</sup>	2571	vs60x100 (S=3036)
2	5.773x10 <sup>9</sup>	685	vs45x 36 (S= 691)
3	62.399x10 <sup>9</sup>	1477	vs60x60 (S=1525)
4	11.049x10 <sup>9</sup>	565	vs40x32 (S= 550)

Obsérvese que el nuevo módulo de sección para el miembro 1 es menor que el que se obtuvo considerando solamente restricciones de esfuerzo, razón por la cual no se ha variado el perfil.

Con los nuevos perfiles se obtienen un desplazamiento lateral - igual a 2.35 cm < 2.63 cm .

### 3. Verificación de esfuerzos.

Momentos Flectores T - m	MIEMBRO	Esfuerzos Permisibles (Kg/cm <sup>2</sup> )	Esfuerzos actuantes (Kg/cm <sup>2</sup> )	f/F
M <sub>AB</sub> = 45.11	1	F <sub>a</sub> = 1411	f <sub>a</sub> = 44.58	1.02
M <sub>BA</sub> = 14.62		(kl/r=24.67)	f <sub>b</sub> = 1485	
M <sub>BE</sub> = 22.74	2	F <sub>a</sub> = 1370	f <sub>a</sub> = 36.90	0.81
M <sub>BC</sub> = -8.12		(kl/r=33. )	f <sub>b</sub> = 1175	
M <sub>CB</sub> = -6.73		F <sub>b</sub> = 1500		
M <sub>CD</sub> = 6.73	3	F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>b</sub> = 1491	0.99
M <sub>DC</sub> = 6.73				
M <sub>DE</sub> = -6.73	4	F <sub>b</sub> = 1500	f <sub>b</sub> = 1224	0.82
M <sub>ED</sub> = -8.12				
M <sub>EB</sub> = 22.74				
M <sub>EF</sub> = -14.62				
M <sub>FE</sub> = -45.11				

De los resultados se concluye que también se cumple con las restricciones de esfuerzos, por lo tanto los perfiles a emplearse son

Miembro	Perfil
1	vs60x100
2	vs45x36
3	vs60x60
4	vs40x32