

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL  
SECCIÓN DE POSGRADO



**MÉTODOS SIN MALLA COMO ALTERNATIVA  
AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

T E S I S

Para optar el Grado de Maestro en Ciencias  
con Mención en Ingeniería Estructural

Ing. Leonardo Flores González

LIMA - PERÚ

2011

# Índice General

Índice General iv

Resumen vii

Lista de Figuras viii

Lista de Tablas ix

Lista de Siglas y Símbolos x

1. Generalidades 1

1.1. Introducción . . . . . 1

1.2. Estado del Arte . . . . . 4

1.3. Objetivos y Alcances . . . . . 5

1.4. Metodología . . . . . 5

1.5. Organización de la Tesis . . . . . 6

2. Formulación Débil 7

2.1. Definiciones Preliminares . . . . . 7

2.1.1. Tensores . . . . . 7

2.1.2. Producto de Kronecker . . . . . 8

2.1.3. Operadores Tensoriales . . . . . 9

2.1.4. Mecánica del Medio Continuo . . . . . 10

2.1.5. Producto Interno . . . . . 10

2.1.6. Compacidad . . . . . 11

2.1.7. Sucesión de Cauchy . . . . . 11

2.2. Espacios de Hilbert . . . . . 12

2.3. Espacios de Sobolev . . . . . 15

Métodos sin Malla como Alternativa al Método de Elementos Finitos

2.3.1. Problemas de Contorno Elípticos . . . . .	16
2.4. Distribuciones y Derivada Distribucional . . . . .	18
2.5. Método de Galerkin . . . . .	19
2.6. Problema Débil de Elasticidad Lineal . . . . .	20
2.6.1. Formulación Débil Considerando Condiciones Mixtas . . . . .	20
2.6.2. Forma Distribucional de la Ecuación con Condiciones Mixtas . . . . .	26
3. Métodos sin Malla 29	
3.1. Métodos sin Malla Estructurados . . . . .	29
3.1.1. Separación Espacial y Temporal . . . . .	29
3.1.2. Método de Newmark . . . . .	31
3.2. Métodos sin Malla no Estructurados . . . . .	35
3.2.1. Funciones de Forma . . . . .	35
3.2.2. Dominio de Soporte . . . . .	35
3.2.3. Formas Monotónicas del Dominio de Soporte Local . . . . .	36
3.3. Técnicas de Aproximación sin Malla . . . . .	37
3.3.1. Método de Interpolación Radial de Puntos (RPIM) . . . . .	40
3.3.2. Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS) . . . . .	41
3.3.3. Método de Partición a la Unidad (PUM) . . . . .	42
3.3.4. Método Derivable de Partículas Hidrodinámicas (SPH) . . . . .	43
3.4. Desarrollo del Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS) . . . . .	43
3.4.1. Desarrollo Teórico . . . . .	43
3.4.2. Construcción de la Función de Forma . . . . .	47
3.5. Formulación Global Débil . . . . .	48
3.5.1. Matriz Enriquecida . . . . .	54
3.5.2. Incorporación de las Condiciones de Frontera . . . . .	54
3.6. Integración . . . . .	57
3.7. Aspectos de Implementación Computacional . . . . .	60
4. Aplicación del Método Libre de Malla 61	
4.1. Viga de Timoshenko . . . . .	61
4.2. Lámina con Agujero Central . . . . .	64
Métodos sin Malla como Alternativa al Método de Elementos Finitos	

4.3. Esfuerzo Vertical Causado por una Carga de Franja . . . . .	67
5. Conclusiones y Recomendaciones	71
5.1. Conclusiones . . . . .	71
5.2. Recomendaciones . . . . .	72
Apéndice 73	
Algoritmo de Método sin Malla (MM) . . . . .	73
Bibliografía 74	
Métodos	

## Resumen

En el presente trabajo de tesis se expone la solución de la formulación débil de la Elastostática con funciones de aproximación o interpolación libres de malla; se estudia la unicidad de la formulación débil con ayuda del lema Korn y el teorema de Lax, la exposición del desarrollo de la formulación débil se hace con teoría de espacios funcionales, se deduce también la representación en el espacio de distribuciones de la ecuación elíptica de Poisson. Finalmente, se presentan algunos ejemplos de estado plano de esfuerzos y deformaciones.

## Summary

This thesis work presents the solution of Elastostatic weak formulation with mesh-free approximation functions or interpolation functions. The uniqueness of the weak formulation using the Korn lemma and Lax theorem is studied, the exposure of weak formulation development is made with the theory of functional spaces. The representation in the distributions space of the Poisson's elliptical equation is studied. Finally some examples of plain state of stresses and strains are presented.

# Lista de Siglas y Símbolos

$a(, )$	Forma bilineal
$C^\infty(V)$	Conjunto de funciones infinitamente derivables sobre $V$
$C_0(\Omega)$	Espacio de funciones continuas con soporte compacto sobre $\Omega$
$C(\Omega)$	Espacio de funciones continuas sobre $\Omega$
$D(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto sobre $\Omega$
$D'(\Omega)$	Espacio de distribuciones sobre $\Omega$
$D^p$	Derivada distribucional de orden $p$
$E$	Matriz del material ó módulo de Young
$H$	Espacio de Hilbert
$H^m$	Espacio de Hilbert cuya derivada hasta de orden $m$ pertenece a $L^2$
$H_0^m$	Espacio de Hilbert cuya derivada hasta de orden $m$ pertenece a $L^2$ y con soporte compacto
$J$	Funcional lineal de energía ó funcional lineal de aproximación
$L^2(\Omega)$	Espacio de funciones cuadrado integrable
$L^p(\Omega)$	Espacio de funciones $L^p$ sobre $(\Omega)$
$L$	Transformación lineal del espacio vectorial de desplazamientos al espacio vectorial de deformación
$l( )$	Forma lineal
<i>EFGM</i>	Método Libre de Galerkin
<i>FDM</i>	Método de Diferencias Finitas
<i>FEM</i>	Método de Elementos Finitos
<i>GFDM</i>	Método General de Diferencias Finitas
<i>MLS</i>	Mínimos Cuadrados Móviles
<i>MM</i>	Métodos sin Malla
<i>MR</i>	Núcleo no trivial de la transformación de esfuerzos o espacio del cuerpo rígido de $H^1$
<i>NEM</i>	Método de los Elementos Naturales
<i>PUM</i>	Método de Partición a la Unidad
<i>PIM</i>	Método de Interpolación con Puntos
<i>RBF</i>	Funciones de base radial
<i>RPIM</i>	Método de Interpolación Radial de Puntos

$SPH$	Método de las Partículas Derivables
$WBF$	Funciones de base rectangular
$W^{m,p}$	Espacio de Sobolev cuya derivada hasta de orden $m$ pertenece a $L^p$
$tr$	Traza de una representación matricial
$\rightharpoonup$	Convergencia débil
$\nabla \cdot$	Divergencia
$\sigma$	Tensor de esfuerzos
$\otimes$	Producto de Kronecker
$\perp$	Ortogonal de un vector
$\underline{\epsilon}$	Tensor de deformación
$\bar{A}$	Función bilineal
$\nabla$	Gradiente
$\sigma : \epsilon$	Producto escalar de los tensores $\sigma$ y $\epsilon$
$( )^T$	Traspuesta de una forma lineal o bilineal
$( , )$	Producto interno
$\delta_{nm}$	Delta de Kronecker
$\  \ $	Norma de un espacio funcional
$\langle u   \varphi \rangle$	Acción de la distribución $u$ sobre $\varphi$
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	Producto vectorial, de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$
$\partial\Omega$	frontera de $\Omega$
$\overline{H^k}$	Complemento de $MR$ en $H^k$
$\oplus$	Suma directa de dos espacios vectoriales
$C_0^\infty$	Conjunto de funciones infinitamente derivables y con soporte compacto
$D_{j_1 \dots j_m} U_i$	Derivada distribucional de orden $m$ con respecto a la distribución $U_i$
$[a, b] \times [c, d]$	Producto cartesiano de $[a, b]$ y $[c, d]$
$\bigcup_i \Omega_i$	Unión de las particiones $\Omega_i$ de $\Omega$
$\bigcap_i \Omega_i$	Intersección de las particiones $\Omega_i$ de $\Omega$
$\lambda$	Multiplicadores de Lagrange ó valores propios
$\bar{J}$	Funcional que incluye las condiciones iniciales

# 1

## Generalidades

### 1.1. Introducción

Los modelos numéricos son útiles para representar de manera aproximada fenómenos físicos. Estos han alcanzado un alto desarrollo, como consecuencia del avance de la informática en estas últimas décadas. El método más investigado para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales ha sido el de Elementos Finitos (FEM). Sin embargo éste presenta algunos problemas relativos a situaciones de grandes desplazamientos, esto debido a que el enmallado requerido por el método, condiciona la convergencia del problema. A partir de la última década del siglo pasado se vienen desarrollando técnicas numéricas alternativas que superen estos problemas, estas han sido denominadas métodos libres de mallas. Es sobre este último punto que trata el presente trabajo. Estos métodos nacieron con el objetivo de eliminar la dependencia del empleo de mallas en las formulaciones variacionales, con la construcción de aproximaciones basadas en conjuntos de puntos conocidas como nubes de puntos.

En el presente trabajo se explica de manera secuencial y rigurosa la formulación variacional de la ecuación elíptica de Poisson, considerando condiciones no homogéneas de Dirichlet y condiciones de Neumann:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \sigma(u) + p &= 0 \\ \sigma(u) \cdot \nu &= t \\ u_{\Gamma_1} &= \bar{u}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Para obtener la ecuación anterior se emplea el cálculo variacional, a partir del cual se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas son ecuaciones diferenciales obtenidas de una funcional; en ingeniería esta funcional representa la energía de deformación elástica y está relacionada al principio de trabajos virtuales. Sin embargo, resolver la ecuación anterior en su forma diferencial para diversas condiciones de frontera no es tarea fácil, por lo que es necesario llevarla a su forma variacional.



Como introducción al tema, se puede revisar el problema de Dirichlet homogéneo, es decir se emplea la ecuación anterior con las condiciones esenciales:

$$u|_{\Gamma_1} = 0$$

Además, si se identifica el espacio funcional al que pertenecen las soluciones de la ecuación antes mencionada, se puede multiplicar la misma por alguna función que forme parte de la base del espacio funcional, y obtener la medida de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} [v \cdot \nabla \cdot \sigma(u) + p \cdot v] d\Omega = 0 \quad (1.2)$$

Si a esta última expresión se le aplica el teorema de Gauss, se emplea el tensor de deformación y se utilizan las condiciones de frontera, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} p \cdot v d\Omega \quad (1.3)$$

Esta última expresión se puede representar de la siguiente manera:

$$a(u, v) = l(v) \quad (1.4)$$

Donde  $a, l$  son aplicaciones bilineal y lineal respectivamente, de esta manera el término izquierdo de la ecuación y el término derecho de la misma vienen representados así:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) d\Omega \quad (1.5)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} p \cdot v d\Omega \quad (1.6)$$

Se debe notar que  $a(u, v)$  es una aplicación simétrica y cumple la propiedad de elipticidad, esto último se estudia en el siguiente capítulo para relacionar la solución de la formulación variacional y la solución de la ecuación original.

Una vez desarrollada la formulación variacional, se hace el tratamiento numérico de la misma con una técnica libre de mallas. Cabe mencionar que la ecuación a resolver es común en tópicos como mecánica del medio continuo y constituye la base de muchas aplicaciones relativas a la ingeniería estructural, como el estado plano de esfuerzos y el estado plano de deformaciones.

Como dato histórico se puede ver que el punto de partida de la solución de la primera ecuación del presente capítulo es la funcional de energía potencial y elástica, la que se puede representar en términos de  $a$  y  $l$  como se indica a continuación:

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \quad (1.7)$$

Dicha funcional representa la diferencia entre la energía elástica y el trabajo virtual de fuerzas externas. Se puede ver rápidamente que la solución de la funcional anterior es un problema de extremos. Así tenemos:

$$J(v) = J(u + v - u) = \frac{1}{2}a(u + v - u, u + v - u) - l(u + v - u)$$

Considerando la simetría de  $a(u, v)$ , la expresión se puede reescribir así:

$$J(v) = J(u) + a(u, v - u) - l(v - u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u)$$

Si  $u$  es solución de  $a(u, v) = l(v)$  entonces se cumple que  $a(u, u - v) = l(u - v)$ , además por la elipticidad de  $a(u, v)$  se tiene que:

$$\frac{1}{2}a(v - u, v - u) \geq \alpha \|v - u\|^2$$

Por tanto considerando  $u \neq v$  se puede ver que:

$$J(v) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2 \quad (1.8)$$

De esto se concluye que  $J(v) > J(u)$ , lo que indica que la solución del problema variacional débil es un problema de extremos. Si  $u$  es un mínimo de  $J(v)$ , se puede apreciar que para todo  $s \in \mathbb{R}$  se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{J(u + sv) - J(u)}{s} &\geq 0 \\ \frac{a(u + sv, u + sv) - a(u, u) + 2l(u) - 2l(u + v)}{s} &\geq 0 \\ 2(a(u, v) - l(v)) + sa(v, v) &\geq 0 \end{aligned}$$

Si tomamos el límite cuando  $s \rightarrow 0$  se tiene que

$$a(u, v) \geq l(v)$$

si hacemos el cambio de  $v$  por  $-v$  obtenemos

$$a(u, v) \leq l(v)$$

Estos dos últimos resultados indican que  $a(u, v) = l(v)$ . En este momento se sabe que el problema de extremos que conduce a las ecuaciones de elasticidad es un problema de mínimos estrictos. Lo que podría ser enunciado de la siguiente manera:

**Si  $a(u, v)$  es simétrico y elíptico, entonces  $u$  es solución de la ecuación (1.1) si y sólo si es un mínimo de  $J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - l(v)$ .**

Las formulaciones débiles como la expresada en el párrafo anterior, se desarrollan numéricamente con funciones que delimiten el dominio de influencia de cada nodo. A estas funciones se las conoce como las que cuentan con un soporte compacto. Es gracias a la interpolación de funciones con formas monotónicas, que se pueden crear métodos que ensamblen la matriz de rigidez sin la ayuda de una malla. La distribución de estos nodos por lo general es no estructurada y se le conoce como nube de puntos no estructurada.

Finalmente es necesario resaltar que estas técnicas han evolucionado desde métodos que emplean convergencias fuertes, como es el caso de las diferencias finitas y los métodos de integración directa, empleados muchas veces para problemas que varían en el tiempo. Dentro de estos métodos tenemos el famoso algoritmo de Newmark. Estos algoritmos requieren generalmente la colocación de los puntos de manera estructurada para la variable de tiempo y métodos de puntos no estructurados para representar el espacio. Esto último obliga a exponer la manera de desacoplar tales variables en capítulos posteriores; se menciona el método de Newmark porque es posible demostrar que es un método incondicionalmente estable y por tanto una buena alternativa numérica para la solución del problema dinámico.

## 1.2. Estado del Arte

Actualmente los métodos sin malla se encuentran en la mayoría de los casos en fase de desarrollo, aunque algunos trabajos en los últimos años, con la ayuda de conceptos sobre soluciones de ecuaciones diferenciales parciales con espacios funcionales, han contribuido de manera muy importante a la comprensión del funcionamiento de los mismos y de los principios que permiten construir espacios de funciones de aproximación de una manera adecuada [10]. Otros métodos han sufrido un desarrollo algo mayor y su estudio se ha extendido a problemas no lineales, como los problemas estudiados en [3]. El primer método sin malla fue desarrollado por Lucy y Monaghan entre 1977 y 1982, se llamó “Smooth Particle Hydrodynamics”, aunque su aplicación no fue originalmente en mecánica de sólidos, en realidad fue aplicado a problemas de ingeniería de fluidos. El método “Reproducing Kernel Particle Method” [13] es una generalización del anterior, en este se prueba la consistencia lineal del método. La familia de métodos más numerosa es la de mínimos cuadrados, estos derivan en mínimos cuadrados ponderados como los propuestos por G.R. Liu [14]. La fase final del desarrollo de estos métodos es el método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS), el que emplea diversos tipos de funciones monotónicamente decrecientes. Estas funciones son adecuadamente estudiadas por Fasshauer [9]. Destacan dentro de (MM) las formulaciones generalizadas como el método “Diffuse Element Method” [15]. Para la implementación de los códigos de ensamble de métodos sin malla se emplea el “Element Free Galerkin Method” (EFGM) [4], que es una técnica de implementación global para la solución de problemas relativos a ecuaciones diferenciales parciales; las nubes-hp [8] introducen los conceptos de partición a la unidad (PUM).

Un aporte importante fue propuesto por Sukumar [21] en 1998; este científico creó el Método de los Elementos Naturales (NEM), a partir del cual en diversas universidades como la Universidad Politécnica de Cataluña, la Universidad de Sevilla entre otras, se ha venido creando el código Mydas, en el cual tratan de hacer aplicaciones con la más alta tecnología numérica en lo referente a formulaciones variacionales.

### 1.3. Objetivos y Alcances

En general el contenido de esta tesis está orientado a la implementación de técnicas numéricas libres de malla en el contexto de la elasticidad bidimensional. Se desarrollan matrices de rigidez a partir de formulaciones débiles para problemas relativos al estado plano de esfuerzos. Se trata en lo posible de no perder la formalidad matemática en la construcción de la teoría propuesta.

Se busca introducir de manera sencilla conceptos de espacios funcionales, como los de Hilbert y Sobolev en el ámbito de la ingeniería estructural. A partir de estos se explica de manera rigurosa la obtención de la formulación variacional de la ecuación de la elastostática; así mismo se estudia la convergencia de la solución obtenida con la formulación variacional y la solución de la ecuación de Poisson.

Se introduce el método de los mínimos cuadrados móviles ponderados, para la construcción de las funciones de aproximación, por las recomendaciones sugeridas en [10]; éste es un método de aproximación global mas no de interpolación, de acá en adelante se abreviará su nomenclatura como MLS.

Aplicar la teoría expuesta en los primeros capítulos para formular problemas con condiciones de frontera mixtas, referentes a estado plano de esfuerzos o deformaciones.

### 1.4. Metodología

El desarrollo del presente trabajo exigirá principalmente una comparación entre los resultados del método libre de mallas escogido, con soluciones analíticas como las propuestas en el libro de teoría de la elasticidad [22]. Para la solución numérica de problemas relativos a métodos sin malla, se escriben pequeños programas desarrollados en Matlab.

Se presta especial atención a teoremas sobre la existencia y unicidad de las soluciones, se prueba la veracidad de su convergencia con lemas como el de Cea y el Teorema General de Convergencia. Para esto se desarrolla de manera robusta la teoría necesaria para la solución del problema de la elastostática.

## 1.5. Organización de la Tesis

La presente Tesis está estructurada en cinco capítulos, donde se pretende analizar de manera rigurosa la formulación variacional del problema de la ecuación de Poisson con condiciones de Neumann y de Dirichlet no homogéneas, y su solución mediante un método sin malla.

El primero de ellos que corresponde a la introducción y la descripción de los alcances y objetivos finales de la tesis, así como la metodología empleada en la misma.

En el segundo capítulo se define lo que es un tensor desde el punto de vista de formas multilineales, se hace una breve referencia a conceptos relacionados con la solución de ecuaciones diferenciales mediante espacios funcionales, se comentan conceptos básicos de los espacios de Hilbert y Sobolev, finalmente en base a estos conceptos se desarrolla la formulación variacional. El aporte en ese capítulo es la exposición del espacio solución de la ecuación como una suma directa del espacio de cuerpo rígido que en términos formales es representado por el núcleo de la transformación de deformación y la transformación de los desplazamientos propiamente dichos.

En el tercer capítulo se hace una recopilación y descripción de los principales métodos sin malla, se describe la estructura matemática en la que está basado el método MLS, se comenta brevemente sobre las funciones de base radial y rectangular que emplean estos métodos, las cuales son empleadas como funciones ponderadas de interpolación. Se describe la construcción de las matrices de rigidez local y global para métodos libres de malla, se explica la imposición de las condiciones de frontera.

En el cuarto capítulo se desarrollan ejemplos relativos al campo de la ingeniería estructural, los que se resuelven con la ayuda de un pequeño programa desarrollado en Matlab.

En el capítulo cinco se presentan las principales conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

## 2

# Formulación Débil

## 2.1. Definiciones Preliminares

Las siguientes definiciones tienen como objetivo ayudar en la comprensión del proceso de formulación débil del problema elástico lineal, que es la parte principal del presente capítulo.

### 2.1.1. Tensores

El presente acápite trata de explicar la definición de un tensor específicamente de orden 2, que es al que en el ámbito de ingeniería se le conoce propiamente como *Tensor*. Pues bien un tensor viene a ser aquel elemento que representa a una aplicación  $F : V \rightarrow U$ , donde  $U$  y  $V$  son espacios vectoriales y dicha aplicación es una función lineal de variable vectorial. Entonces un tensor viene a ser un elemento transformador que aplica sobre un vector para poder evaluar a la función lineal en dicho vector.

A continuación trataremos de obtener la forma de los tensores de orden 2, específicamente trataremos de demostrar que las formas bilineales aplicadas a espacios vectoriales reciben el nombre de tensores de orden 2. En general es posible obtener funciones lineales de variable vectorial que sean representadas por tensores de orden superior, para esto se puede ver [11].

#### **Definición 2.1.1.** (*Tensores de Orden 1*)

*Toda función lineal que haga corresponder a cada vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  un número real (función real de variable vectorial), se puede representar por cierto vector  $\mathbf{u}$ , es decir sea:*

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (2.1)$$

Donde  $f : \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  y  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}$ .

Ahora para extender la definición anterior a funciones vectoriales de variable vectorial requerimos el conocimiento de cierto tipo de operaciones y funciones las cuales serán presentadas a continuación.

### 2.1.2. Producto de Kronecker

Conocido también como producto tensorial; a continuación procederemos a definir el producto tensorial de 2 vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ;  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ) según:

Sea:  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Se puede expresar el siguiente producto como:

$$\mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [ b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n ] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

de esta manera se define el producto tensorial  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  de dos vectores como:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

El resultado anterior también puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}$$

Entonces, podemos definir una función vectorial lineal  $f$ , tal que:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ f(\mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{v}$$

Donde  $\mathbf{ab}$  representa al producto tensorial de 2 vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ), además éste resulta ser una función bilineal, entonces podemos extender la definición anterior a funciones vectoriales de variable vectorial como sigue:

**Proposición 2.1.1. (Tensor de Orden 2)**

Toda función lineal que haga corresponder a cada vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  otro vector de  $\mathbb{R}^n$ , se puede representar mediante el producto de Kronecker.

*Demostración.* Sea  $f$  una función lineal vectorial de variable vectorial y sea el conjunto  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Esta puede ser evaluada si se conocen las imágenes de una base cualquiera en este caso  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Entonces sean las imágenes de la siguiente forma:

$$f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j$$

Entonces para cierto vector  $v$  se tiene que:

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^n f(\mathbf{e}_i) (\lambda_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

El resultado anterior se puede reescribir así:

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \left( (f(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i) \cdot \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_j \right) \right) = \sum_{i=1}^n (f(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i) \cdot \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_j \right)$$

Ahora reemplazando los valores de  $f(\mathbf{e}_i)$  :

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \cdot \sum_{j=1}^n (\lambda_j \mathbf{e}_j) \quad (2.3)$$

Donde  $\bar{\bar{A}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = a_{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i$  es una diádica, ahora se puede plantear análogamente a la proposición (2.1.1) lo siguiente:

$$f(\mathbf{v}) = \bar{\bar{A}} \cdot \mathbf{v} \quad (2.4)$$

Con esto la proposición anterior queda demostrada. Además la diádica  $\bar{\bar{A}}$  representa una función bilineal y recibe el nombre de *tensor de orden 2*.  $\square$

### 2.1.3. Operadores Tensoriales

En la presente sección se indican algunas transformaciones lineales aplicables a tensores en los diversos espacios vectoriales empleados, estas transformaciones lineales serán útiles sobre todo en el acápite 2.6. Existe la necesidad de definir la transformación *gradiente* y la transformación *divergencia* para cada espacio vectorial, ya que de un espacio a otro estas transformaciones presentan diferencias. A continuación se las define:

- El gradiente  $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y su ortogonal, como:

$$\nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix}; \quad (\nabla p)^\perp = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_1} \end{bmatrix};$$

- El gradiente  $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , como:

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

- La divergencia  $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , como:



$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

- El gradiente  $\nabla : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , como:

$$\nabla \tau = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Además, se define el producto escalar de tensores de orden 2, como:

$$\sigma : \epsilon = tr(\sigma^T \cdot \epsilon) = tr(\sigma \cdot \epsilon^T) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

Este producto es utilizado en el planteamiento de la formulación débil del problema de la Elastostática.

#### 2.1.4. Mecánica del Medio Continuo

La mecánica del medio continuo es la ciencia que describe la interacción entre la fuerza y el movimiento que actúan sobre determinado medio continuo, esta interacción es modelada con ayuda de formas bilineales [12], en el caso de la ingeniería estas formas bilineales, son el tensor de esfuerzos y el tensor de deformaciones.

El tensor de esfuerzos se representa por  $\sigma = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  y el tensor de deformación con la siguiente relación:

$$\epsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes v + (\nabla \otimes v)^T) \quad (2.5)$$

Para el tratamiento de problemas de mecánica del medio continuo generalmente se utilizan dos tipos de ecuaciones; la primera representa el estado de equilibrio según las leyes universales de la física (conservación de la energía, masa), y la segunda describe el comportamiento mecánico de los materiales y es denominada relación constitutiva (Ley de Hooke generalizada).

En el presente trabajo se plantea la formulación débil del problema general de la Elastostática y se implementa su solución numérica con el empleo de métodos sin malla, el principal ejemplo expuesto es relativo al estado plano de esfuerzos, el cual implica que el tensor de esfuerzos sólo toma valores diferentes de cero sobre un plano.

#### 2.1.5. Producto Interno

Es la estructura matemática común a los espacios vectoriales de  $\mathbb{R}^n$ , y que se puede generalizar a espacios vectoriales de dimensión infinita. La definición del producto interno juega un papel importante en la definición de la unicidad de formas bilineales como son los tensores de orden 2. Además esta definición induce a la creación de normas como la euclidiana, la cual es una métrica en estos espacios.

**Definición 2.1.2.** Sea  $H$  un espacio funcional vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Una forma bilineal

$$\begin{aligned} H \times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

se denomina producto interno si es simétrica y definida positiva, es decir, si cumple que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \\ (\mathbf{v}, \mathbf{u}) &\geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in H \\ (\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

En tal caso

$$\|(\mathbf{u})\| := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad \mathbf{u} \in H$$

define una norma sobre  $H$ . Un espacio vectorial dotado de un producto interno se dice pre-Hilbert.

### 2.1.6. Compacidad

A continuación se define una propiedad especial de ciertos conjuntos, la cual es principalmente útil para definir funciones de soporte compacto, que son necesarias en el tratamiento del problema de interés de este trabajo, como por ejemplo en este capítulo, las funciones de prueba y en el siguiente las funciones de ponderación.

**Definición 2.1.3.** El espacio de funciones continuas con soporte compacto se denomina  $C_0(\Omega)$ .

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) / f(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K, K \text{ compacto} \subseteq \Omega\}$$

donde  $C(\Omega)$  es el espacio de las funciones continuas sobre  $\Omega$

### 2.1.7. Sucesión de Cauchy

Es la herramienta que se usará para demostrar la convergencia en espacios vectoriales completos.

**Definición 2.1.4.** Dada una sucesión de funciones de un espacio pre-Hilbert, se dice que es de Cauchy si cumple que

$$\lim_{\min\{n,m\} \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0$$

## 2.2. Espacios de Hilbert

En esta sub sección se definirán y describirán algunas características de los espacios de Hilbert, las cuales son importantes ya que sobre éstos se desarrolla la formulación variacional del problema en derivadas parciales que se desea resolver. Esto en virtud de que las bases del espacio funcional en mención, son las que hacen posible la solución de la ecuación en su forma débil. Por esta razón es importante el estudio de la separabilidad, densidad, numerabilidad y completitud de estos espacios, ya que gracias a estas propiedades, este tipo de espacios resulta útil para la construcción de la forma débil de la ecuación de elíptica de Poisson.

**Definición 2.2.1.** *Un espacio vectorial  $H$  dotado de un producto escalar se dice espacio de Hilbert si es completo para la norma asociada, es decir, si toda sucesión de Cauchy del espacio es convergente.*

**Definición 2.2.2.** *Dado un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos el espacio  $L^1(\Omega)$  como el espacio de las funciones integrables en  $(\Omega)$ . A su vez, se define*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Con  $(p < \infty)$  es un espacio vectorial cuya norma euclidiana viene dado por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Notar que los espacios  $L^p(\Omega)$  son espacios de Banach, es decir, espacios vectoriales normados y completos.

De lo anterior si  $p = 2$  en el conjunto abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , tal que

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} / \int_{\Omega} (f)^2 dx < \infty\}$$

con el producto escalar

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert [16]. La mayor parte de las integrales del presente trabajo se desarrollan en espacios  $L^2$ .

**Definición 2.2.3.** *Dado un espacio de Hilbert, se denomina convergencia fuerte a la convergencia en la norma asociada al producto escalar, es decir  $(f_n) \subset H$  converge (fuertemente) a  $f \in H$  si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

se denota por

$$f_n \rightarrow f$$

**Definición 2.2.4.** Dado el conjunto abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \exists c \geq 0 \text{ tal que } \|f(x)\| \leq c \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$$

con  $p < \infty$ .  $L^\infty$  es un espacio vectorial que tiene inducida la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c / \|f(x)\| \leq c \text{ c.t.p. } x \in \Omega\} = \text{supess}_{x \in \Omega} \|f(x)\|.$$

$L^\infty$  es un espacio vectorial normado. Se denota por  $\text{supess}$  al supremo esencial.

**Definición 2.2.5.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $(f_n) \subset H$  converge débilmente a  $f \in H$  y lo denotaremos por

$$f_n \rightharpoonup f$$

si

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g), \quad \forall g \in H.$$

A continuación se presentan algunos resultados que se derivan directamente de las definiciones anteriores. Muchas de las demostraciones de dichos resultados se omiten pues son resultados reconocidos que se pueden encontrar, por ejemplo, en textos clásicos de Análisis Matemático de reconocido prestigio, como por ejemplo, [6], [7], [16], [17], [18].

**Proposición 2.2.1.** Si  $f_n \rightarrow f$ , entonces  $f_n \rightharpoonup f$ , es decir, la convergencia fuerte implica la convergencia débil.

El recíproco de este resultado no es cierto en general y la demostración es trivial.

**Proposición 2.2.2.** Si  $H$  es un espacio de Hilbert de dimensión finita, la convergencia fuerte y débil son equivalentes.

*Demostración.* Basta con tomar una base ortonormal y demostrar que las componentes convergen. Sea  $e_1, \dots, e_m$  base ortonormal de  $H, f_n \rightharpoonup f$ .

Se tiene que

$$f = \sum_{j=1}^m (f, e_j) e_j \quad \forall f \in H$$

Teniendo en cuenta que converge débilmente,

$$(f_n, e_j) \rightarrow (f, e_j) \quad \forall j$$

Entonces,  $(f_n, e_j) e_j \rightarrow (f, e_j) e_j$  en  $H$ . Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^m (f_n, e_j) e_j \rightarrow \sum_{j=1}^m (f, e_j) e_j$$

O lo que es lo mismo,  $f_n \rightarrow f$ , dado que las coordenadas son únicas.  $\square$

**Teorema 2.2.1.** En un espacio de Hilbert, toda sucesión débilmente convergente es acotada.

*Demostración.* Véase [2]. □

**Definición 2.2.6.** Un subespacio  $V$  de un espacio de Hilbert  $H$ ,  $V \subset H$  se denomina denso en  $H$  si para toda función  $u$  en  $H$  se puede encontrar una sucesión de funciones  $u_n \in V$  que converge a  $u$  en  $H$ .

**Lema 2.2.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $V \subset H$  denso en  $H$ . Sea una sucesión  $(f_n) \subset H$ . Entonces si  $(f_n)$  es acotada, es decir, existe  $M$  tal que:

$$\|f_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y además

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g), \quad \forall g \in V$$

entonces

$$f_n \rightarrow f.$$

*Demostración.* Sean  $u \in H$  y  $v \in V$  cualesquiera. Entonces:

$$\|(f_n - f, u)\| \leq \|(f_n, u - v)\| + \|(f_n - f, v)\| + \|(f, u - v)\|$$

de donde se deduce el resultado ya que los términos del lado derecho de la inecuación son convergentes y se podría acotar cada uno por un  $\varepsilon/3$ . □

**Definición 2.2.7.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Una sucesión  $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$  se dice base Hilbertiana (numerable) de  $H$  si:

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm}, \quad \forall n, m$$

y  $\mathbb{R}\langle e_n : n \geq 1 \rangle$ , el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) generado por  $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$ , es denso en  $H$ .

**Teorema 2.2.2.** Sea  $u \in H$ . Entonces:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n$$

Es decir, la serie anterior converge en  $H$  a  $u$ . Además se tiene la llamada igualdad de Bessel-Parzenal:

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u, e_n\|^2.$$

*Demostración.* Puede consultarse en [2]. □

**Teorema 2.2.3.** Sea  $(e_n)$  una base Hilbertiana de un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces la sucesión  $(e_n)$  converge débilmente a 0, pero no fuertemente.

*Demostración.* Sea  $g \in \mathbb{R}\langle e_n, n \geq 1 \rangle$ , entonces

$$(e_n, g) = (e_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) \rightarrow 0 = (0, g)$$

$$\|e_n\| \leq 1 \quad \forall n \Rightarrow e_n \rightarrow 0$$

converge débilmente, por el lema (2.2.1) ya que

$$\|e_n\| = 1 \quad \Rightarrow e_n \not\rightarrow 0$$

□

## 2.3. Espacios de Sobolev

En este acápite se definen conceptos relativos a los espacios de Sobolev, paso previo para un estudio posterior de los problemas variacionales, ya que serán necesarias funciones de clase 1 en  $\Omega$  que satisfagan la condición de Poisson, lo cual involucra el hecho de que estas funciones y sus derivadas sean medibles en espacios de Hilbert (elementos de  $L^2$ ). Además, con ayuda de estos espacios se definirán las formas variacionales abstractas.

**Definición 2.3.1.** Se denota por  $D(\Omega)$  el espacio de funciones indefinidamente diferenciable sobre  $\Omega(C^\infty)$  y con soporte compacto en  $\Omega$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $\Omega$  un abierto de el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Se denomina Espacio de Sobolev  $a$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

En el caso  $p = 2$ , se denota  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ . Introducimos en  $W^{m,p}(\Omega)$  la norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

y por tanto

$$\|u\|_{m,2,\Omega} = \|u\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Definición 2.3.3.** Un espacio vectorial se dice que es separable, si posee un subconjunto denso y numerable.

**Teorema 2.3.1.** El espacio  $H^m(\Omega)$  es un espacio de Hilbert separable.

**Lema 2.3.1.**  $D(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $H^m(\mathbb{R}^n)$ , es decir,  $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$

Para ver la demostración del teorema y el lema anteriores, se puede revisar [2].

**Definición 2.3.4.** Sea  $V$  espacio de Hilbert, con producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  y norma asociada  $\|\cdot\|$ . Sea  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal continua. y sea  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma lineal y continua. Entonces el problema

$$(P) \begin{cases} \text{Calcular } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

(P) se denomina Problema Variacional Abstracto.

**Definición 2.3.5.** Se dice que una forma bilineal  $a$  es  $V$ -elíptica (o coercitiva) si  $\exists$  una constante  $\alpha > 0$  tal que  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V$

**Teorema 2.3.2.** (Lax-Milgram). Supongamos que en el problema variacional (P), la forma bilineal es  $V$ -elíptica. Entonces existe solución única y la aplicación que lleva de la forma bilineal a la solución  $u$  es continua.

*Demostración.* Para una lectura de su demostración se puede consultar la mayoría de los textos clásicos, como por ejemplo [6] o [7].  $\square$

### 2.3.1. Problemas de Contorno Elípticos

Veamos a continuación la formulación variacional de los problemas de contorno elípticos: Dados

- a)  $V$  espacio de Hilbert ( $H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$ ).
- b)  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal continua sobre  $V \times V$ .
- c)  $l(\cdot)$  una forma lineal continua sobre  $V$ .
- d) El problema variacional abstracto

$$(P) \begin{cases} \text{Calcular } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Se considera ahora  $\{V_h\}_{h>0}$  ( $h \rightarrow 0$ ) con  $V_h$  sub espacio de dimensión finita de  $V$ . Por lo tanto podemos definir para cada índice  $h$ , el problema (que también será variacional).

$$(P_h) \begin{cases} \text{Calcular } u_h \in V_h \text{ tal que,} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

$V_h$  también será espacio de Hilbert por ser subespacio de dimensión finita de un espacio de Hilbert  $V$ , con su correspondiente norma inducida de  $V$ . Si la forma bilineal  $a$  es  $V$ -elíptica, es decir, si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in V,$$

entonces también la forma bilineal  $a$  es  $V$ -elíptica es decir

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|^2, \forall u_h \in V_h \subseteq V.$$

De acuerdo al teorema de Lax, los problemas abstractos  $P$  y  $P_h$  tienen solamente una solución. El problema  $P_h$  está definido en un espacio de dimensión finita denso en el espacio solución de  $P$ .

**Lema 2.3.2.** (*Lema de Céa*). Si se cumplen las condiciones del Teorema de Lax se tiene

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \text{Inf}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

donde  $M$  es la constante de continuidad de la forma bilineal, y  $\alpha$  es la constante de coercitividad de la misma.

*Demostración.*

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - u_h + v_h - v_h) \\ a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) - a(u - u_h, u_h - v_h) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la bilinealidad y el hecho de que la solución de  $P_h$  está en el espacio solución de  $P$ , entonces haciendo  $w_h = u_h - v_h$ , se obtendrá:

$$\begin{aligned} a(u, u_h - v_h) &= l(u_h - v_h) \\ a(u_h, u_h - v_h) &= l(u_h - v_h) \end{aligned}$$

Por lo que restando las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} a(u, u_h - v_h) - a(u_h, u_h - v_h) &= 0 \\ a(u - u_h, u_h - v_h) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, de la última expresión de la página anterior:

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$$

Ahora, por coercitividad y según la identidad de Schwartz:

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - u_h\|$$

De donde:

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h,$$

□

Se puede observar que a medida que la dimensión de  $V_h$  aumenta  $V_h \rightarrow V$ , entonces la norma:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \rightarrow 0$$

Lo que significa que se obtiene la solución del problema  $P$ , a través de la de  $P_h$ .

**Teorema 2.3.3. (Teorema General de Convergencia)**

Supongamos que existe  $\mathcal{V}$  subespacio denso de  $V$  y  $v_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$ , tales que se cumple que  $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h(v)\| = 0$ ,  $v \in \mathcal{V}$ . Entonces el método de aproximación variacional converge, es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0, \quad v \in \mathcal{V}$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , con  $\mathcal{V}$  subespacio denso en  $V$ , entonces  $\exists v \in \mathcal{V}$ , tal que:

$$\|u - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2c}$$

con  $c = \frac{M}{\alpha}$ . Por la hipótesis del teorema:

$$\exists h_0 \text{ tal que } \|v - v_h(v)\| < \frac{\varepsilon}{2c}, \quad \forall h \leq h_0$$

Finalmente, en virtud del Lema de Céa:

$$\|u - u_h(v)\| \leq c \|u - v_h(v)\| \leq c (\|u - v\| + \|v - v_h(v)\|) \leq \varepsilon$$

Ya que  $v_h(v) \in V_h$ .

□



**Teorema 2.3.4.** *Si la forma bilineal continua  $a(u, v)$  es  $V$ -elíptica (coercitiva), entonces  $\exists u_m \in V_m$ , solución única del problema  $(P_m)$ , y el  $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$ , en  $V$  (converge fuertemente), donde  $u$  es la solución del problema  $(P)$ .*

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema General de Convergencia, reemplazando  $h = \frac{1}{m}$ ,  $V_h = V_m$ ,  $\mathcal{V} = \mathcal{V}$  y  $v_h =$  elementos de la proyección ortogonal de  $V$  en  $V_m$ .  $\square$

Con estas definiciones, se formaliza la idea intuitiva de que, mientras más grande sea la dimensión del espacio de funciones aproximantes, éstas tendrán mucha más semejanza a las soluciones reales.

## 2.4. Distribuciones y Derivada Distribucional

Las distribuciones son funcionales lineales continuas en ciertos espacios de funciones diferenciables indefinidamente. En este caso debe entenderse la diferenciabilidad en el sentido distribucional, así que para entender mejor estos conceptos se definirán a continuación. Como se verá más adelante, la ecuación de Poisson tiene su forma distribucional análoga a la ecuación original. Esto indica que lo que se obtiene como solución de la ecuación, en su forma de derivadas distribucionales, es la representación matricial de la forma bilineal, es decir los coeficientes de la representación matricial del tensor de segundo orden.

### Definición 2.4.1. *Espacio Fundamental $D$*

Sea  $C$  el conjunto de las partes compactas de  $\mathbb{R}^n$ ,  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables. Entonces designaremos por  $D$  a la totalidad de las funciones de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  con soporte compacto, es decir, aquellas funciones de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  que se anulan fuera de un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ :

$$D := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall M \in C \exists \text{ algún } x \notin M \text{ tal que } \varphi(x) = 0 \}$$

### Definición 2.4.2. *Distribuciones*

Sea  $D'(\Omega) = L(D(\Omega), \mathbb{R})$  el conjunto de las funcionales aplicadas sobre el espacio  $D(\Omega)$ , al cual se le define como el espacio Dual de  $D(\Omega)$ , es llamado *Espacio de Distribuciones*. Los elementos del Dual  $D'$  de  $D$  se llaman *distribuciones*.

En otras palabras una distribución es una funcional que opera sobre un espacio de funciones con ciertas propiedades especiales denominado  $D$ . Entonces  $u : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  será una distribución si es una funcional lineal acotada. Si  $\varphi \in D(\Omega)$  la acción de  $u$  sobre  $\varphi$  la denotamos por  $\langle u | \varphi \rangle$ .

### Definición 2.4.3. *Operador Diferencial*

Sea  $p$  una  $n$ -upla  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  de números enteros,  $p_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  designaremos por  $|p|$  a la suma de los componentes:

$$|p| = \sum_{i=1}^n p_i$$

Entonces entendemos por operador diferencial  $D^p$  aplicado a una función:

$$D^p f = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} f$$

**Definición 2.4.4. Diferenciación en  $Du$**

En general llamaremos  $Du$  a la derivada de la distribución  $u$  y la definimos a partir de su acción sobre una función  $\varphi$  como:

$$\langle Du | \varphi \rangle \equiv \langle u | \varphi' \rangle$$

En general, podemos definir derivadas de cualquier orden para las distribuciones mediante una extensión de lo anterior:

$$\langle D^p u | \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle u | D^p \varphi \rangle$$

Considerando esta definición para espacios  $L^p$  tendremos que si  $f$  es una función definida en cierto conjunto  $\Omega$ , entonces decimos que la función  $f^{(p)}$  definida en  $\Omega$  es su derivada en el sentido distribucional si:

$$\int_{\Omega} f^{(p)}(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|p|} \int_{\Omega} f(x) \varphi^{(p)}(x) dx \tag{2.6}$$

Donde  $\varphi^{(p)}$  es la derivada de orden  $p$  de  $\varphi$  en el sentido tradicional.

## 2.5. Método de Galerkin

Por lo mencionado anteriormente, se está en condiciones de describir el método de Galerkin. Dada

$$Au = f \tag{2.7}$$

una ecuación diferencial en el espacio  $H$ , si es posible encontrar un elemento  $u_0 \in D_A$  (Dominio de A) que cumpla

$$(Au_0 - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

entonces, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, se tendría que:

$$Au_0 - f = 0 \quad \text{en } H$$

de forma que  $u_0$  sería la solución del problema.

Este razonamiento constituye la base del método de Galerkin, que es la base fundamental de la mayoría de los métodos sin malla y del método de los Elementos Finitos. A continuación, consideremos de nuevo la base del subespacio  $M$ ,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Podemos construir una solución aproximada  $u_0$  a partir de esta base, en la forma:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \tag{2.8}$$

siendo  $n$  un numero arbitrario, pero fijo. Los coeficientes  $a_k$  serán, a partir de este momento, nuestras incógnitas. En el método de Galerkin, estas constantes se calculan imponiendo la siguiente igualdad:

$$(Au_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

La ecuación anterior representa un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas (los coeficientes  $a_k$ ). Dado que el operador diferencial  $A$  es lineal, las ecuaciones anteriores se podrán transformar en:

$$(a_1 A\varphi_1 + \dots + a_n A\varphi_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

o bien,

$$\begin{aligned} (A\varphi_1, \varphi_1)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_1)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_1)a_n &= (f, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_2)a_n &= (f, \varphi_2) \\ &\dots \\ (A\varphi_1, \varphi_n)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_n)a_n &= (f, \varphi_n) \end{aligned}$$

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente teorema:

**Teorema 2.5.1.** *Sea  $A$  un operador definido positivo sobre un conjunto  $D_A$ , denso en un espacio separable de Hilbert  $H$  y sea también  $f \in H$ . Consideramos los elementos  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in D_A$ , que constituyen una base de  $D_A$ . Entonces, la sucesión de Galerkin, presentada en un principio, con las constantes  $a_1, a_2, \dots$  determinadas unívocamente por las condiciones mostradas, esto es, por el sistema de ecuaciones final en el caso lineal, converge a la solución de la ecuación  $Au = f$ .*

## 2.6. Problema Débil de Elasticidad Lineal

### 2.6.1. Formulación Débil Considerando Condiciones Mixtas

En la mayoría de las aplicaciones físicas, las magnitudes relativas a funcionales multilineales están relacionadas por sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Así por ejemplo debe considerarse que un sistema de este tipo procede de la mecánica de medios continuos aplicada a sólidos, la cual se denomina “ecuación de equilibrio”. Así que para tratar este problema se aplicará la teoría desarrollada anteriormente. Gran parte del trabajo estará en el establecimiento de la coercitividad de la formulación variacional, la cual garantiza el cumplimiento del Teorema de Lax-Milgram. Una vez hecho esto, la aplicación de la teoría es inmediata para el caso general.

Entonces, considérese un material elástico e isotrópico definido sobre  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . Además sea  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  el vector de desplazamiento y  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  el vector de fuerzas de cuerpo. Entonces según la teoría de elasticidad lineal,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  debe satisfacer la ecuación:

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.10)$$

Además, definamos:

$$\epsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes v + (\nabla \otimes v)^T) \quad (2.11)$$

$$\epsilon(v) = \nabla \otimes v + \frac{1}{2}(\nabla \times v)\chi \quad (2.12)$$

Entonces, para un medio estático el tensor de esfuerzos está definido por la ecuación constitutiva, según:

$$\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda tr(\epsilon(\mathbf{u}))\delta \quad (2.13)$$

Con:

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Las constantes  $\mu$  y  $\lambda$  son denominadas “Constantes de Lamé” y son positivas. Entonces, sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos subconjuntos abiertos de  $\partial\Omega$  tal que  $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$  y  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . Se impondrán las condiciones de Dirichlet no homogéneas (desplazamiento) en la frontera, sobre  $\Gamma_1$ , como:

$$u|_{\Gamma_1} = g$$

Y las condiciones de Neumann (tensión) en la frontera, sobre  $\Gamma_2$ , como:

$$(\sigma(u) \cdot \nu)|_{\Gamma_2} = t$$

Donde  $\nu$  es el vector unitario normal. Nótese que, si  $\Gamma_1 = \emptyset$  o  $\Gamma_2 = \emptyset$ , el problema de contorno es llamado de Neumann o Dirichlet (tracción o desplazamiento) puro, respectivamente. Además, también se debe notar que  $\epsilon(u)$  posee un núcleo no trivial, dado por:

$$MR := \{v : v = c + b(x_2, -x_1)^T, c \in \Omega, b \in \mathbb{R}\}$$

el cual representa el espacio de los movimientos infinitesimales de cuerpo rígido, ya que al ser núcleo (es decir  $\epsilon(v) = 0$ ) las deformaciones siempre son nulas. Ahora, supongamos que  $u \in H^2(\Omega)$  satisface la ecuación de equilibrio. Entonces para cualquier  $v \in H^1(\Omega)$  y  $v|_{\Gamma_1} = 0$ , se obtiene lo siguiente:

$$\int_{\Omega} f \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma(u) \cdot v d\Omega$$

Al usar la identidad de Green y el teorema de la divergencia y reemplazar la ecuación constitutiva, se obtiene:

$$\int_{\Omega} f \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \{2\mu\epsilon(u) + \lambda tr(\epsilon(u))\delta\} : \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma_2} \sigma(u) \cdot \nu \cdot v dS$$

Entonces, se obtiene la formulación débil de la ecuación de equilibrio, como sigue:

Encontrar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que  $u|_{\Gamma_1} = g$  y:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v ds \quad (2.16)$$

Para todo  $v \in V$ , donde:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v))d\Omega$$

$$V := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

Notar que  $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v)d\Omega$ . Esta representación sera útil en el capítulo 3 para la representación matricial de la formulación débil.

Naturalmente, la pregunta necesaria que se debe hacer, respecto de la ecuación, es “¿Posee solución única?”. Según lo planteado por el “Teorema de Lax-Milgram” para responder afirmativamente a esta pregunta se necesita establecer la coercitividad de la forma bilineal acotada  $a(u, v)$ , así que esto último se garantizará mediante las “Desigualdades de Korn”, cuyas demostraciones se encuentran en [6], las cuales se presentan a continuación:

Sea  $\overline{H^k}(\Omega)$  definido por:

$$\overline{H^k}(\Omega) := \{v \in H^k(\Omega) : \int_{\Omega} v d\Omega = 0, \int_{\Omega} \nabla \times v d\Omega = 0\}$$

Los cuales son subespacios cerrados de  $H^k(\Omega)$  para  $k \geq 1$ . Además, también es importante notar que para los elementos de  $\overline{H^k}(\Omega)$  se tiene que  $\epsilon(v) \neq 0 \quad \forall v \neq 0$ , entonces el complemento de este conjunto sería aquel conjunto donde  $\epsilon(v) = 0 \quad \forall v$ , el cual fue presentado anteriormente con el nombre de  $MR$  y el elemento  $v = 0 \in \overline{H^k}(\Omega)$  y  $v = 0 \in RM$ , entonces, como los espacios de Hilbert mencionados son densos y numerables, entonces son separables y los espacios mencionados anteriormente cumplen con las condiciones necesarias para la existencia de la suma directa, se tiene que  $H^k(\Omega) = \overline{H^k}(\Omega) \oplus MR$ .

**Teorema 2.6.1. (Primera Desigualdad de Korn)**

Existe una constante positiva  $\alpha$  tal que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

**Teorema 2.6.2. (Segunda Desigualdad de Korn)**

Existe una constante positiva  $C$  tal que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in \overline{H^1}(\Omega)$$

Con estos teoremas es posible obtener el siguiente resultado:

**Corolario 2.6.1.** Sea  $V$  definido por:  $V := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$  donde se considera que la medida  $(\Gamma_1) > 0$ . Existe una constante positiva tal que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

*Demostración.* Por condición del corolario, se tiene que:  $v|_{\Gamma_1} = 0$ , además,  $v \in V \subset H^1 = MR \oplus \overline{H^1}$ , entonces, analizar en primer lugar todos los  $v \in MR \cap V$  tal que se cumpla la condición de que  $v|_{\Gamma_1} = 0$ , como los elementos de  $MR$  son polinomios de primer grado, estos solo cumplirán con la condición si sus coeficientes constantes son idénticamente nulos, es decir si  $v \equiv 0$ , por lo que, este elemento es el único que pertenece al conjunto mencionado, pero como además se tiene la condición de que  $medida(\Gamma_1) > 0$ , esto implica el hecho de que existan más elementos que satisfagan la condición inicial y ya que todos los demás elementos son  $v \neq 0$ , se tiene que  $\|v\|_{H^1(\Omega)} \neq 0$ . Entonces en virtud de la Primera Desigualdad de Korn (la cual es válida  $\forall v \in H^1$ ) se tiene que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Pero como se manifestó anteriormente, el único elemento de este conjunto cumple que:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} v^2 d\Omega = 0$$

Por lo tanto:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Ahora, por lo expuesto anteriormente, se concluye que los demás elementos de  $V$ , deben pertenecer a  $\overline{H^1}$  ya que  $V \subset H^1 = MR \oplus \overline{H^1}$ , y para estos elementos se cumple la segunda desigualdad de Korn, es decir:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.17)$$

Entonces, habiendo analizado todas las posibilidades, se concluye que:

$$\|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

□

Ahora, es momento de explicar cómo este corolario ayuda a probar la coercitividad de la aplicación bilineal  $a(u, v)$ , el cual obviamente es el motivo del corolario. Se debe notar que:

$$a(v, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot v)(\nabla \cdot v)) d\Omega$$

$$a(v, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot v)^2) d\Omega \geq 2\mu \int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) = 2\mu \|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$a(v, v) \geq 2\mu \|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Entonces, gracias a éste último corolario, se puede concluir que efectivamente la funcional bilineal  $a(u, v)$  es coercitiva en  $V$ , con lo cual se garantiza la solución única del problema abstracto (resultado de la “Ecuación de Equilibrio”) como consecuencia del “Teorema de Lax-Milgram”.

**Nota 1.** *Un hecho importante en este desarrollo es que inicialmente se exigía para  $u$  que  $\nabla \cdot \sigma(u)$  existiera, con lo que la función solución fuerte o clásica del problema, en caso de existir, debe pertenecer al espacio  $C^2(\Omega)$  de lo contrario no existiría la expresión. Como consecuencia de la manipulación efectuada anteriormente, la solución débil del problema se busca en el espacio  $H^1$ , es decir, se han rebajado las exigencias sobre el espacio de búsqueda, a funciones con solo una derivada continua en casi todos los puntos.*

Si bien es cierto con esto queda resuelto el problema, se debe observar que durante el trabajo de las ecuaciones, las condiciones de Neumann surgieron naturalmente. No ocurrió lo mismo con las condiciones de desplazamiento; más aún, al abordar estas condiciones aparece un nuevo problema, ya que se pierde la linealidad del conjunto de funciones en el que se busca la solución. Para resolver este problema se puede utilizar un cambio de variable y se plantearía de la siguiente manera:

Suponga que las condiciones de deformación en la frontera son:

$$g = w|_{\Gamma_1}$$

Entonces, sea  $u^* = u - w$ , además del problema abstracto:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v ds \\ a(u^* + w, v) &= \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v ds \\ a(u^*, v) &= \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v ds - a(w, v) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Así, el problema es equivalente a encontrar  $u^* \in V$  tal que para todo  $v \in V$ , se cumple:

$$a(u^*, v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_2} t \cdot v ds - \int_{\Omega} (2\mu\epsilon() : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot w)(\nabla \cdot v)) d\Omega \quad (2.19)$$

Nótese que en el lado derecho de la ecuación  $f, t, w$  son conocidos, así que todo este lado es únicamente una funcional lineal de  $v$ . Por lo tanto, definiendo al lado derecho de la ecuación como  $F(v)$ , el problema consistiría en encontrar  $u^*$  tal que:

$$a(u^*, v) = F(v) \quad (2.20)$$

El cual vuelve a ser el problema abstracto desarrollado anteriormente, para el que ya se demostró la unicidad de su solución, con ayuda del teorema de Lax. Además, se debe mencionar también que la función que depende de  $w$  en la funcional  $F(v)$  es formulable por métodos matemáticos conocidos, tal como el “Método de los Multiplicadores de Lagrange”. Este punto resulta importante, ya que este método será

utilizado, posteriormente, en el proceso de solución numérica del problema, para introducir las condiciones de frontera esenciales.

Ahora, una vez concluida la formulación y demostración de la solución única del problema deseado, se puede mostrar que resultados físicos conocidos y esperados para este tipo de problemas resultan naturalmente de las definiciones presentadas anteriormente, en este caso el principio de “Equilibrio de Fuerzas”, el cual será presentado en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.6.3.** *Supongamos  $f \in L^2(\Omega)$  y  $t \in L^2(\Gamma)$ . Entonces el problema variacional:*

*Encontrar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que:*

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

*Posee solución única si y solo si, se cumple la siguiente condición de compatibilidad:*

$$\int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS = 0 \quad \forall v \in MR$$

*Y cuando el problema variacional posee solución, existe una solución única en  $\overline{H^1}(\Omega)$ .*

*Demostración.* (Necesidad) Si el problema variacional posee solución, entonces:

$$\int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS = a(u, v)$$

Pero:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)) d\Omega; \quad \epsilon(v) = 0 \quad y \quad \nabla \cdot v = 0 \quad \forall v \in MR$$

$$\therefore a(u, v) = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS = 0 \quad \forall v \in MR$$

(Suficiencia) Suponga que se cumple la segunda condición del problema, es decir que:

$$\int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS = 0 \quad \forall v \in MR$$

Según la segunda desigualdad de Korn y el teorema de Lax, se garantiza la coercitividad de la funcional bilineal  $a(u, v)$  y por lo tanto existe una única solución  $u^* \in \overline{H^1}(\Omega)$  tal que:

$$a(u^*, v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS \quad \forall v \in \overline{H^1}(\Omega)$$



Pero por razones análogas a las mencionadas en la primera parte de esta demostración, se tiene que:

$$a(u^*, v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS = 0 \quad \forall v \in MR$$

Entonces como  $H^1(\Omega) = MR \oplus \overline{H^1}(\Omega)$ :

$$a(u^*, v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v dS \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Y por lo tanto  $u^*$  es la solución única del problema variacional.  $\square$

## 2.6.2. Forma Distribucional de la Ecuación con Condiciones Mixtas

Si bien es cierto que se ha resuelto el problema relativo a la “ecuación de equilibrio”, para la solución numérica del problema se debe trabajar un poco más la ecuación, y expresarla en su sentido distribucional, así que se quiere ver que el problema débil es solución de una ecuación de distribuciones análoga a la ecuación diferencial original (“Ecuación de la Elastostática con Condiciones Mixtas”). En esta sección se amplía el criterio dado por [23] a condiciones mixtas.

Considerar un campo  $u \in H_0^1$  solución de la ecuación original, con el cual se puede definir un esfuerzo  $\sigma(u)$  usando la ecuación constitutiva, y escogiendo  $v \in C_0^\infty$  y empleando notación indicial se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ &= 2 \int_{\Omega} p_i \cdot v_i d\Omega + 2 \int_{\Gamma_2} \tau_i \cdot v_i d\Omega - \int_{\Omega} (2\mu \epsilon(w)_{ij} \epsilon(v)_{ij} + \lambda (\nabla \cdot w)_i (\nabla \cdot v)_i) d\Omega, \\ & \quad \forall v \in C_0^\infty \end{aligned}$$

Al considerar las definiciones de las derivadas distribucionales de  $u \in H_0^1$ , la siguiente identidad será válida:

$$\langle D^p u | \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle u | D^p \varphi \rangle$$

Lo que se puede escribir de manera equivalente, de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_r} \frac{\partial v_s}{\partial x_t} d\Omega = - \int_{\Omega} u_p \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_r \partial x_t} d\Omega, \quad \forall v \in C_0^\infty$$

Con lo cual la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} -\lambda u_k \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_i} \right) \delta_{ij} - \mu u_i \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) - \mu u_j \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \right) d\Omega \\ &= 2 \int_{\Omega} p_i v_i d\Omega + 2 \int_{\Gamma_2} \tau_i \cdot v_i dS - \int_{\Omega} (2\mu \epsilon(w)_{ij} \epsilon(v)_{ij} + \lambda (\nabla \cdot w)_i (\nabla \cdot v)_i) d\Omega, \quad \forall v \in C_0^\infty \end{aligned}$$

Ahora, se debe notar que:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \tau_i \cdot v_i dS &= \int_{\Gamma_2} (\sigma \cdot \nu)_i \cdot v_i dS \\ \int_{\Gamma_2} \tau_i \cdot v_i dS &= \int_{\Gamma_2} (\sigma \cdot \nu)_i \cdot \nu dS\end{aligned}$$

Por el Teorema de la Divergencia se obtiene:

$$\int_{\Gamma_2} \sigma \cdot v_i \cdot \nu dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma \cdot v_i d\Omega$$

Si se define  $U_i$  como la distribución asociada a la función  $u_i$  y las derivadas  $D_{j_1 \dots j_m} U_i$  de la distribución  $U_i$ , se obtendrá:

$$\langle D_{j_1 \dots j_m} U_i | \phi \rangle = (-1)^m \left\langle U_i \left| \frac{\partial^m \phi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \right. \right\rangle$$

Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned}-\lambda \delta_{ij} \langle D_{kj} U_k | v_i \rangle - \lambda \delta_{ij} \langle D_{ki} U_k | v_j \rangle - \mu \langle D_{jj} U_i | v_i \rangle - \mu \langle D_{ij} U_i | v_j \rangle \\ - \mu \langle D_{ij} U_j | v_i \rangle - \mu \langle D_{ii} U_j | v_j \rangle = 2 \langle L_i | v_i \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty\end{aligned}$$

Llamando  $L_i$  a la distribución asociada a  $p_i, \tau_i, w_i$ .

Dado que se suma sobre todos los índices  $i, j, k$ , se pueden renombrar arbitrariamente y obtiene:

$$-2\lambda \langle D_{ki} U_k | v_i \rangle - 2\mu \langle D_{jj} U_i | v_i \rangle - 2\mu \langle D_{ij} U_j | v_i \rangle = 2 \langle L_i | v_i \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty$$

Si escogemos  $v_i = \phi \in C_0^\infty \quad \forall i$ , entonces se tiene una ecuación diferencial de distribuciones:

$$-\lambda D_{ki} U_k - \mu D_{jj} U_i - \mu D_{ij} U_j = L_i$$

Se puede definir una distribución de esfuerzos  $\sigma$  a partir de sus componentes  $[\sigma]_{ij}$ . En términos de las derivadas de distribuciones presentes en la ecuación y un análogo en distribuciones de la ecuación constitutiva:

$$[\sigma]_{ij} = \lambda D_k U_k \delta_{ij} + \mu (D_i U_j + D_j U_i)$$

Ahora se aplica la divergencia mediante derivadas en el sentido de las distribuciones de  $[\sigma]_{ij}$ :

$$D_j [\sigma]_{ij} = \lambda D_{jk} U_k \delta_{ij} + \mu (D_{ij} U_j + D_{jj} U_i) = \lambda D_{ik} U_k + \mu (D_{ij} U_j + D_{jj} U_i)$$

Pero el lado derecho de esta expresión es idéntico al presentado anteriormente (considerando la simetría de las dobles derivadas en los índices). Consecuentemente, se puede reescribir como:

$$D_j [\sigma]_{ij} + L_i = 0 \tag{2.21}$$

Esta ecuación es análoga de la ecuación de equilibrio para la elasticidad lineal pero en sentido distribucional, considerando las condiciones de Dirichlet no homogéneas.

# 3

## Métodos sin Malla

### 3.1. Métodos sin Malla Estructurados

Para resolver problemas en derivadas parciales con condiciones de frontera se discretiza el dominio del problema mediante un conjunto de nudos, los cuales pueden estar estructurados o no. En este caso debe entenderse al conjunto de nodos como estructurado, si el conjunto en el que dichos nodos es uniformemente distribuido y espaciado. Por el contrario el conjunto de nodos no estructurados hace referencia al conjunto en el cual los nodos se encuentran arbitrariamente distribuidos y espaciados en todo el dominio. A continuación se describe el uso de cada uno de estas estructuraciones.

Generalmente los métodos sin malla estructurados se emplean cuando el tiempo es una variable del problema; sin embargo, un problema dinámico involucra el uso de nubes de puntos estructuradas y no estructuradas. En este caso el tiempo se discretiza en una nube estructurada de puntos y el espacio en una nube no estructurada. Para poder comprender mejor este tipo de formulación se define el concepto de separación espacial y temporal.

#### 3.1.1. Separación Espacial y Temporal

Sea la ecuación diferencial bidimensional con valor inicial y frontera.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= f(x, y, t) \quad \text{sobre } (x, y) \in \Omega, t \in [0, T] \\ u(x, y, t) &= 0 \quad \text{sobre } (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= 0 \quad \text{sobre } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, 0) &= 0 \quad \text{sobre } (x, y) \in \Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y  $U = [a, b] \times [c, d]$  es acotado. En esta sección se explica con un ejemplo como se hace la separación espacial y temporal para resolver la ecuación

diferencial mencionada anteriormente con el método de Galerkin. Nótese que la ecuación anterior es Hiperbólica.

1. **Aproximación espacial.** Por el método de separación de variables suponga que la solución  $u$  de la ecuación, es aproximada de la siguiente forma:

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \phi_i(x) \quad (3.2)$$

luego se procede a hacer la sustitución de la solución aproximada en la formulación variacional, para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del tiempo y del espacio de forma desacoplada.

2. **Aproximación temporal.** En esta parte se procede a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con un método de integración directa, como por ejemplo el método de Newmark. Al resolver este sistema de manera discreta se obtiene un sistema de ecuaciones en diferencias cuyas incógnitas son  $u_j$ , el intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ) se puede considerar constante.

A continuación se obtendrá la formulación variacional de la ecuación diferencial mencionada, siguiendo el procedimiento explicado en la capítulo anterior, multiplicando la ecuación por una función  $v \in H_0^1$  y luego integrando sobre  $\Omega$  se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) v dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy, \quad \forall v \in H_0^1$$

Aplicando la identidad de Green y  $u \equiv 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx dy + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) v dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy$$

Aplicando la separación espacial y temporal, se tiene lo siguiente:

$$u(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^N u_i(t) \phi_i(x, y) \quad \text{y} \quad v = \phi_j(x, y)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_i}{dt^2} \phi_i \phi_j dx dy + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N u_i \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} f \phi_j dx dy$$

Haciendo

$$M_{ij} : = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx dy$$

$$K_{ij} : = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$f_j : = \int_{\Omega} f \phi_j dx dy$$

Por tanto se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + K \mathbf{u} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donde a la matriz  $M$  se les conoce como matriz de masa,  $K$  la matriz de rigidez y  $f$  el vector de carga.

Se debe observar que la matriz de rigidez  $K$  y la matriz de masa  $M$  se obtienen a partir de una nube de puntos no estructurada, y el sistema de ecuaciones diferenciales se resuelve con una discretización estructurada del tiempo. Para resolver este último punto se debe trabajar con algoritmos de integración directa. El problema más importante en estos algoritmos es el referente a su estabilidad. Generalmente se dice que son mejores aquellos algoritmos que son estables incondicionalmente, dentro de este tipo de algoritmos uno muy difundido relativo a problemas de ingeniería sísmica es el de Newmark. Este mismo será explicado a continuación.

### 3.1.2. Método de Newmark

En los métodos de integración directa es importante el estudio de su estabilidad. Para el estudio de la estabilidad es necesario emplear la matriz de amplificación. Si se tiene el problema de valores y vectores propios  $A\phi = \lambda B\phi$ , donde  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas de orden  $n$ . Sea la sucesión de vectores  $d_i$  definida por  $Bd_{n+1} = Ad_n$ . Cualquier vector de  $\mathbb{R}^n$  se puede expresar como  $d_0 = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k$ , donde  $c_k$  y  $\phi_k$  son constantes y vectores linealmente independientes. Empleando inducción matemática podemos considerar  $d_n = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^n \phi_k$  de donde:

$$Ad_n = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^n A \phi_k \Rightarrow Bd_{n+1} = B \left( \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^{n+1} \phi_k \right) \Rightarrow d_{n+1} = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^{n+1} \phi_k, \quad (3.4)$$

confirmando así la hipótesis inductiva  $d_n = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k^n \phi_k$ . Si además se cumple que  $|\lambda_k| < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$

**Teorema 3.1.1.** Sea  $Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  una matriz cuadrada de orden  $2n$ ,  $A, B, C, D$  matrices diagonales de orden  $n$ . Si  $a_j, b_j, c_j, d_j$  son los elementos que ocupan la  $j$ -ésima posición en las diagonales de  $A, B, C, D$ , entonces:

$$\det Q = \det \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & \cdots & H_n \end{bmatrix} = \det H_1 \cdot \det H_2 \dots \det H_n$$

donde  $H_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix}$ .

*Demostración.* Por condición del teorema se tiene que:

$$\det(Q) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones elementales fila de la forma  $fila_{n+i} = fila_{n+i} - \left(\frac{c_{ii}}{a_{ii}}\right) \cdot f_i$ , se tiene:

$$\det(Q) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

Donde,  $M$  resulta una matriz diagonal con  $M_{ii} = d_{ii} - \left(\frac{c_{ii}}{a_{ii}}\right) b_{ii}$ , como  $A$  también es una matriz diagonal, se cumple que:

$$\begin{aligned} \det(Q) &= \det(A) \cdot \det(M) \\ \det(Q) &= \prod_{i=1}^n a_{ii} \cdot \prod_{i=1}^n \left( d_{ii} - \left( \frac{c_{ii}}{a_{ii}} \right) b_{ii} \right) \end{aligned}$$

Como las dos productorias tienen los mismos índices se pueden reagrupar así:

$$\det(Q) = \prod_{i=1}^n (d_{ii} a_{ii} - c_{ii} b_{ii})$$

Se puede observar que el  $i$ -ésimo producto es el determinante de la matriz  $H_i$ , entonces se concluye que:

$$\det(Q) = \det(H_1) \cdot \det(H_2) \cdot \dots \cdot \det(H_n)$$

□

**Estabilidad del método de Newmark:** Para encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$Ma + Cv + f_{int} = 0 \tag{3.5}$$

Donde  $a, v, f_{int}$  son el vector aceleración, el vector velocidad y el vector de fuerzas internas. La ecuación en diferencias asociada a cada paso de integración de la ecuación (3.5) es  $Ma_n + Cv_n + Kd_n = 0$ , donde  $C = \alpha_1 M + \alpha_2 K$  es la matriz de amortiguamiento. Los integradores consistentes son:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + \Delta t v_n + \Delta t^2 (\bar{\beta} a_n + \beta a_{n+1}) \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t (\bar{\gamma} a_n + \gamma a_{n+1}) \end{aligned}$$

Donde  $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$  y  $\bar{\beta} = \frac{1 - 2\beta}{2}$ . Para probar la estabilidad numérica del método de Newmark, se multiplican los integradores anteriores por la matriz  $M$ , y se reemplaza:  
 $Ma_n = -Cv_n - Kd_n$

$$\begin{aligned} Md_{n+1} &= Md_n + \Delta t M v_n - \Delta t^2 [\bar{\beta} (Cv_n + Kd_n) + \beta (Cv_{n+1} + Kd_{n+1})] \\ Mv_{n+1} &= Mv_n - \bar{\gamma} \Delta t (Cv_n + Kd_n) - \gamma (Cv_{n+1} + Kd_{n+1}) \end{aligned}$$

expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M + \beta \Delta t^2 K & \beta \Delta t^2 C \\ \gamma \Delta t K & M + \gamma \Delta t C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M - \beta \Delta t^2 K & \Delta t M - \bar{\beta} \Delta t^2 C \\ -\bar{\gamma} \Delta t K & M - \bar{\gamma} \Delta t C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

Debe notarse que esta matriz es importante para el estudio de la estabilidad, entonces, considerando la matriz de amplificación:

$$\begin{bmatrix} M - \bar{\beta} \Delta t^2 K & \Delta t M - \beta \Delta t^2 C \\ -\bar{\gamma} \Delta t K & M - \bar{\gamma} \Delta t C \end{bmatrix} [z] = \mu \begin{bmatrix} M + \beta \Delta t^2 K & \beta \Delta t^2 C \\ \gamma \Delta t K & M + \gamma \Delta t C \end{bmatrix} [z]$$

Donde  $[z] = \begin{bmatrix} d^T & v^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^T & z_2^T \end{bmatrix}$ , como el problema de valores y vectores propios  $K\phi = \lambda M\phi$  tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes, sea  $\Phi$  la matriz de vectores propios, entonces los vectores  $z_1 = \Phi a$ ,  $z_2 = \Phi b$  se pueden expresar como una combinación lineal de las columnas de  $\Phi$  ( $a, b$  son vectores de constantes de orden  $n$ ):

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Phi & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \Phi \end{bmatrix}$$

Multiplicando la matriz de amplificación por la matriz  $\Theta$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I - \bar{\beta} \Delta t^2 L & \Delta t I - \bar{\beta} \Delta t^2 G \\ -\bar{\gamma} \Delta t L & I - \bar{\gamma} \Delta t G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} I + \beta \Delta t^2 L & \beta \Delta t^2 G \\ \gamma \Delta t L & I + \gamma \Delta t G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\text{donde: } L = \begin{bmatrix} w_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n^2 \end{bmatrix} \text{ y además } G = \begin{bmatrix} 2\xi_1 w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\xi_n w_n \end{bmatrix}$$

la penúltima expresión se puede expresar así:  $H z = 0$ , donde:

$$\begin{aligned} H z &= \begin{bmatrix} I - \bar{\beta} \Delta t^2 L - \mu (I + \beta \Delta t^2 L) & \Delta t I - \bar{\beta} \Delta t^2 G - \mu (\beta \Delta t^2 G) \\ -\bar{\gamma} \Delta t L - \mu (\gamma \Delta t L) & I - \bar{\gamma} \Delta t G - \mu (I + \gamma \Delta t G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$



Se puede notar que las matrices  $A, B, C, D$  son matrices diagonales de orden  $n$ , los elementos de sus diagonales son  $a_j, b_j, c_j, d_j$ , donde  $j = 1, \dots, n$ , de acuerdo al teorema anterior, el determinante de la matriz  $H$  se puede expresar:

$$\det H = \det \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_n \end{bmatrix} = \det H_1 \cdot \det H_2 \dots \det H_n \quad \text{donde } H_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix}$$

considerando  $\xi_1 = \xi_2 = \dots \xi_n = \xi$  se tiene

$$\begin{aligned} a_j &= 1 - \bar{\beta} \Delta t^2 w_j^2 - \mu (1 + \beta \Delta t^2 w_j^2) \\ b_j &= \Delta t - 2 \Delta t^2 \bar{\beta} \xi w_j - \mu (2 \beta \Delta t^2 \xi w_j) \\ c_j &= \Delta t \bar{\gamma} w_j^2 - \mu (\Delta t \gamma w_j^2) \\ d_j &= 1 - 2 \bar{\gamma} \Delta t \xi w_j - \mu (1 + 2 \gamma \Delta t \xi w_j) \end{aligned}$$

Si los valores propios de  $H$  son menores que uno el algoritmo es estable, al desarrollar el  $\det H_j$  se tiene:

$$\mu = \left( \frac{(0,5\gamma - \beta) \Delta t w_j}{\xi \bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma} + 0,25 - \beta + \xi^2 \bar{\gamma}^2}} \right) \quad \text{si } \mu < 1 \Rightarrow \Delta t < \frac{\xi \bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma} + 0,25 - \beta + \xi^2 \bar{\gamma}^2}}{(0,5\gamma - \beta) w_j} \quad (3.6)$$

para  $\gamma = 0,5$  y  $\beta = 0,25$  la expresión anterior es incondicionalmente estable.

**Algoritmo 3.1.1.** *Algoritmo de Newmark*

1. Iniciar los parámetros  $\gamma, \beta$ ; calcular  $K, M, C$  iniciales, seleccionar  $\Delta t$ . Hacer  $i = 0$  leer la tolerancia (parámetro empleado para detener el método).
2. Indicar las condiciones iniciales del paso 0,  $(u_0, \dot{u}_0)$ , encontrar:

$$a = \frac{1}{\beta \Delta t} M + \frac{\gamma}{\beta} C, b = \frac{1}{2\beta} M + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) C$$

y

$$\ddot{u}_0 = M^{-1} (F_0 - C \dot{u}_0 - K u_0).$$

3. Hacer  $K_{Di} = K_{ti} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} M + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} C$ .
4. Resolver  $K_{Di} \Delta u_i = \Delta F_{Di}$ . (Se itera si se utiliza el método de Newton para considerar la no linealidad). Hacer  $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$ .
5. Hacer  $\Delta \dot{u}_{i+1} = \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_{i+1} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \frac{1}{\beta \Delta t} \Delta u_{i+1}$ ,  $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i$ .
6. Hacer  $\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\gamma \Delta t} \Delta \dot{u}_i - \frac{1}{\gamma} \ddot{u}_i$ ,  $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i$ .
7. hacer  $i = i + 1$ , repetir el algoritmo desde el paso 3 hasta el paso 7, mientras el error relativo del desplazamiento sea mayor que la tolerancia dada inicialmente.

## 3.2. Métodos sin Malla no Estructurados

### 3.2.1. Funciones de Forma

En la búsqueda de una solución aproximada a un problema gobernado por ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de frontera, primero es necesario aproximar la función de campo desconocida utilizando funciones conocidas a las cuales llamamos funciones de forma (polinomios o funciones correspondientes a espacios de Hilbert), antes de que cualquier procedimiento de formulación variacional pueda ser aplicado para establecer el sistema de ecuaciones discretas. Estas funciones de forma son localmente definidas, ya que sólo un conjunto de nodos de campo en un pequeño dominio local son utilizados en la construcción, y la función de forma no se utiliza o se considera como cero fuera del dominio local. Como dominio local se entenderá al *dominio de soporte* o *dominio de influencia*.

En el método de elementos finitos (FEM), las funciones de forma se crean mediante técnicas de interpolación basadas en elementos formados por un conjunto de nodos fijos. Este tipo de interpolación se denomina interpolación basada en *elementos estacionarios*. En los métodos sin malla, el dominio del problema suele estar representado por nodos de campo que en general están arbitrariamente distribuidos. Las variables de campo en un punto arbitrario del dominio del problema se aproximan utilizando un grupo de nodos de campo en un dominio de soporte local. Por lo tanto, un dominio móvil basado en técnicas de interpolación o aproximación, es necesario para construir la función de forma, para la aproximación de las variables de campo, utilizando un conjunto de nodos distribuidos arbitrariamente. En el desarrollo de un método sin malla, la construcción de funciones de forma eficientes es importante para obtener las variables de campo.

### 3.2.2. Dominio de Soporte

La precisión de la interpolación para un punto de interés depende de los nodos en el dominio de soporte como se muestra en la Figura 3.1. Por lo tanto, un dominio de soporte adecuado debe ser elegido para garantizar una aproximación eficaz y precisa. Para un punto de interés  $x_Q$ , la dimensión del dominio de soporte  $d_S$  está determinada por:

$$d_S = \alpha_S d_C \quad (3.7)$$

Donde,  $\alpha_S$  es el tamaño adimensional del dominio de soporte, y  $d_C$  es el espaciamiento nodal cerca del punto  $x_Q$ . Si los nodos están uniformemente distribuidos,  $d_C$  es simplemente la distancia entre dos nodos vecinos. Cuando los nodos no están uniformemente distribuidos,  $d_C$  puede ser definida como un espaciamiento nodal promedio en el dominio de soporte de  $x_Q$ .

La magnitud adimensional del dominio soporte  $\alpha_S$  controla su dimensión. Por ejemplo,  $\alpha_S = 2,1$  significa un dominio de soporte cuyo radio es de 2,1 veces el espaciamiento nodal promedio. El número de nodos,  $n$ , se puede determinar contando todos los nodos incluidos en el dominio de soporte. De acuerdo a G. R. Liu un valor

recomendable para la magnitud adimensional del dominio de soporte es  $\alpha_S \in [2; 3]$ . Se debe tener en cuenta que el dominio de soporte generalmente se centra en un punto de interés  $x_Q$ .

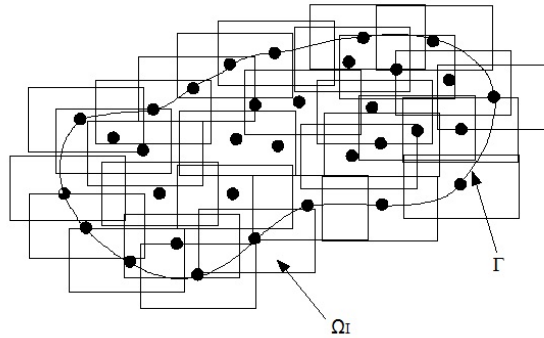


Figura 3.1: Dominio de soporte local

### 3.2.3. Formas Monotónicas del Dominio de Soporte Local

Si bien es cierto las funciones de forma se pueden construir con el uso de polinomios en  $\mathbb{R}^n$ , para que puntos más cercanos tengan mayor influencia entre si, se debe construir funciones monotónicas decrecientes, las cuales combinadas con funciones de un espacio de Hilbert conduzcan a la creación de los dominios de soporte local. Para que los sistemas de ecuaciones lineales resultantes sean sistemas reducidos, es necesario que estos dominios sean de soporte compacto. A continuación se definen dos funciones monotónicas decrecientes empleadas generalmente en métodos sin malla.

#### Definición 3.2.1. Funciones de Base Radial (RBF).

Una función  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada radial, si existe una función  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Phi(x) = \varphi(r)$ , donde  $r = \|x\|$ . Generalmente se considera como  $\|x\|$  la norma euclidiana.

#### Definición 3.2.2. Funciones de Base rectangular (WBF).

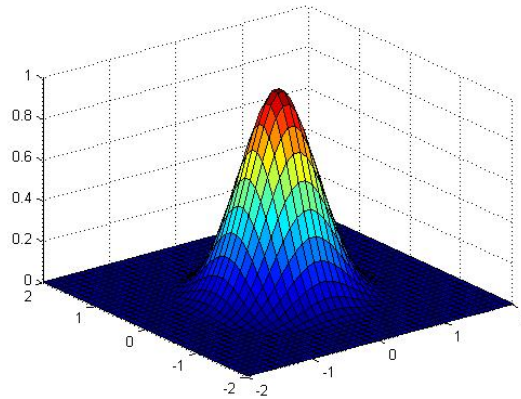
Una función  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada rectangular, si existe una función  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Phi(x) = \varphi(r)$  donde  $\varphi(r) = \prod_i^n \|r_i\|_1$ ;  $\|r_i\|_1 = |y_i - x_i|$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$  es la  $i$ -ésima componente del nodo y que se quiere evaluar,  $x_i \in \mathbb{R}$  es la  $i$ -ésima componente de un nodo  $x$  que pertenece a su dominio de soporte compacto.

#### Definición 3.2.3. Función estrictamente definida positiva.

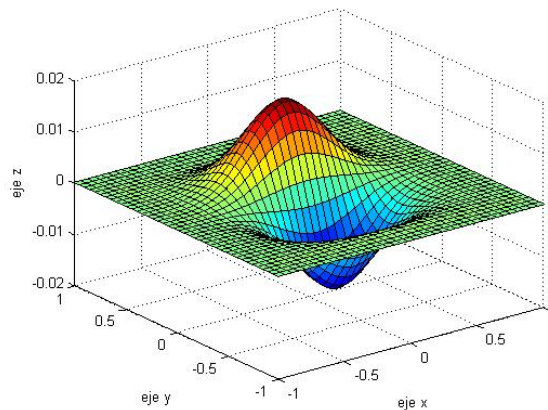
Una función  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sera estrictamente definida positiva si:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0$$

tal que la forma cuadrática anterior es nula si y solo si  $c_j = 0$ .



**Figura 3.2:** Función radial de soporte compacto



**Figura 3.3:** Derivada en x de función de forma radial de soporte compacto

Un ejemplo de este tipo de funciones son las funciones de forma Gaussiana.

$$\Phi(x) = e^{-\varepsilon^2 \|x\|^2}, \quad \varepsilon > 0$$

### 3.3. Técnicas de Aproximación sin Malla

Un buen método para crear funciones de forma libre de mallas debe cumplir algunos requisitos básicos:

1. *Debe dar buenos resultados para nodos distribuidos razonable y arbitrariamente (distribución arbitraria nodal).*
2. *Debe ser numéricamente estable (estabilidad).*
3. *Se debe cumplir un cierto orden de consistencia (consistencia).*

4. *Debe ser soportada compactamente (compacto), es decir, debe anularse fuera de una región acotada, llamada el dominio de soporte.*
5. *La función desconocida aproximada utilizando la función de forma, debe ser compatible (compatibilidad) a través del dominio del problema cuando se utiliza una forma global débil, o debe ser compatible dentro de la cuadratura del dominio cuando se utiliza una forma local débil.*
6. *Lo ideal es que la función de forma posea la propiedad de la función delta de Kronecker (propiedad de función Delta), es decir, la función de forma es la unidad en el nodo y cero en los otros nodos en el dominio de apoyo, sin embargo esto no ayuda a la disminución de aproximación en forma global, por lo que se emplea también funciones de aproximación que minimicen este error.*
7. *Debe ser computacionalmente eficiente (eficiencia).*

El requisito de una distribución nodal arbitraria es esencial para el desarrollo de un método sin malla robusto para los problemas prácticos de ingeniería. La condición de estabilidad se refiere a dos cuestiones. La primera es la estabilidad de interpolación, lo que significa que las funciones de forma construidas deben ser estables con respecto a pequeñas perturbaciones de la localización del nodo en el dominio de soporte. Esto requiere que la matriz, creada usando los nodos distribuidos arbitrariamente, esté bien acondicionada. La segunda cuestión es la estabilidad de la solución, lo que significa que la solución numérica usando las funciones de forma, junto con un procedimiento de formulación variacional, no debe tener las así llamadas oscilaciones numéricas que en general no forman parte del problema; esto es conocido como problemas de convección dominada. Debido a la segunda inestabilidad, incluso si la interpolación local es estable, la solución podría ser inestable debido a la discordancia del esquema de interpolación (o procedimiento de formulación) con la naturaleza física del problema. Cambiar los esquemas de interpolación es una posible forma de resolver este problema. El procedimiento de formulación también puede jugar un papel muy importante en la producción de un sistema de ecuaciones discretas que produzca una solución estable. Esto requiere un procedimiento de formulación adecuadamente diseñado en base a la naturaleza del problema que tiene los términos dominantes debidamente reflejados en la formulación. Este aspecto del tratamiento numérico es revisado con cierto grado de satisfacción en el Método de Diferencias Finitas (FDM). Una discusión más detallada sobre esta cuestión se puede encontrar en [24] y las referencias que allí se presentan.

Lamentablemente, la inestabilidad en los métodos sin malla para los problemas de convección dominada no ha sido debidamente tratada, y el tema está lejos de ser concluido. Por tanto en este trabajo no se darán soluciones concretas sobre este tema.

La consistencia es importante para una buena aproximación a la función exacta, pues de esta manera el límite de la solución discreta será la solución exacta y también para la convergencia del método sin malla. Se requiere un soporte compacto para producir un sistema discreto de ecuaciones esparcido que se pueda resolver

con eficacia. Esto es extremadamente importante para los sistemas grandes; cuando se emplea interpolación con funciones monotónicas como las mencionadas en el acápite anterior, es recomendable una alta densidad de puntos de manera que se tengan nubes de puntos próximas y los puntos lejanos no tengan intersección entre sí. Esto último genera una matriz que tiende a ser banda, que desde luego es mejor condicionada que una matriz esparcida.

La propiedad de función delta de Kronecker no es obligatoria, porque uno puede tomar medidas especiales para imponer condiciones esenciales de borde si la función de forma sin malla no tiene esta propiedad. El desarrollo de métodos de construcción efectiva de las funciones de forma sin malla ha sido una de las áreas más importantes en la investigación de éstos métodos. Varias formulaciones de aproximación sin malla se han propuesto. G. R. Liu [14] clasifica estas formulaciones en tres grandes categorías sobre la base de los tipos de teorías de la aproximación o representación de la función, es decir, la representación integral, la representación en serie, y la representación diferencial. En la tabla (3.1) se enumeran algunas de las técnicas en estas categorías.

Categorías	Técnicas de aproximación sin malla
Representación Integral	Partícula Hidrodinámica Suavizada (SPH)
Representación Integral	Método de Reproducción del Núcleo de Partículas (RKPM)
Representación en Series	Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)
Representación en Series	Métodos de Interpolación Puntual (PIM, RPIM)
Representación en Series	Métodos de Partición de la Unidad (PUM)
Representación Diferencial	Método General de Diferencias Finitas (GFDM)

**Tabla 3.1:** Categorías de técnicas de interpolación sin malla

En el método de representación integral, la función se representa usando su información en un dominio local (dominio suavizado o dominio de influencia) a través de una operación integral ponderada. La consistencia se logra mediante la adecuada elección de la función de peso; a menudo se utiliza en el método de Partícula Hidrodinámica Suavizada (SPH). Los métodos de representación en series tienen una larga historia. Ellos están bien desarrollados en el FEM y ahora se utilizan en los Métodos sin Malla (MM) basados en distribuciones arbitrarias de nodos. La consistencia está asegurada por la completitud de las funciones de base, que generalmente pertenecen a un espacio de Hilbert; la aproximación por Mínimos Cuadrados Móviles (MLS), es el método más utilizado; el Método de Interpolación Puntual (PIM) usando funciones de base radial (RPIM), es también de uso frecuente. El MLS será discutido detalladamente en este capítulo. El método de representación en diferencias, que también se ha desarrollado y utilizado durante mucho tiempo, es el Método de Diferencias Finitas (FDM); los métodos de representación en diferencias se utilizan generalmente para el establecimiento de sistemas de ecuaciones basados en formulaciones fuertes, FDM tiene una versión general conocido como el Método General de Diferencias Finitas (GFDM).

Antes de desarrollar el MLS se describen algunos métodos de aproximación sin malla.

### 3.3.1. Método de Interpolación Radial de Puntos (RPIM)

Las formulaciones de aproximación de PIM y RPIM son similares a la de MLS, sin embargo requieren de menos esfuerzo computacional. Una vez construidas las funciones de forma, ambos métodos emplean el Método Libre de Galerkin (EFGM) para la formulación débil de la ecuación diferencial. La última fase de desarrollo de PIM es RPIM, posee la propiedad de Kronecker, es decir es un método estrictamente interpolante, con investigaciones como las de Fasshauer acerca de RBF, esta forma de aproximación se convierte en una buena alternativa de trabajo para los MM, además también es una partición a la unidad. RPIM emplea funciones RBF de todo tipo, con lo que se consigue matrices bien condicionadas y una aproximación estable. Las RBF empleadas en esta aproximación son generalmente de soporte compacto.

El método de interpolación puntual (PIM) es uno de los métodos cuya función de aproximación se representa en series, y es ampliamente usado para la creación de funciones de forma de métodos sin malla. La función de aproximación PIM  $u(x)$  en un punto de interés  $x$  tienen la forma:

$$u(x) = \sum_{i=1}^m B_i(x)a_i \quad (3.8)$$

Donde  $B_i(x)$  son las funciones base definidas de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $m$  es el número de funciones base, y  $a_i$  son los coeficientes. Para la función de aproximación, primero se forma un dominio de soporte local en el punto de interés  $x$ , el cual incluye un total de  $n$  nudos de campo.

En RPIM, generalmente se considera el uso de dos tipos de funciones base, es decir tanto las funciones polinomiales como las de base radial, así, la función de interpolación se puede expresar de la siguiente manera:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x)a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x)b_j \quad (3.9)$$

Donde  $R_i(x)$  es la función de base radial (RBF),  $n$  es el número de funciones (RBF),  $p_j(x)$  es la base polinomial de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $m$  es el número de funciones base polinomiales.

Para determinar los coeficientes  $a_i$  y  $b_j$ , se plantea un sistema de ecuaciones lineales basado en el dominio de soporte local formado para el punto de interés  $x$ , entonces al evaluar la función de aproximación en cada uno de los  $n$  nodos del dominio de soporte local, se obtiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_0 \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b} \quad (3.10)$$

Sin embargo, hay  $n + m$  variables en esta ecuación, así que, las  $m$  ecuaciones adicionales pueden obtenerse utilizando las siguientes  $m$  restricciones:

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i)a_i = \mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Incorporando estas ecuaciones al sistema inicial, se obtiene:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{a}_0$$

Ya que la matriz  $\mathbf{R}_0$  es simétrica,  $\mathbf{G}$ , también es simétrica, la solución del sistema planteado:

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1}\tilde{u}$$

Entonces la función de interpolación planteada inicialmente se puede reescribir como:

$$u(x) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T \mathbf{a} + \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{x})^T & \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Reemplazando el resultado anteriormente obtenido, se tiene:

$$u(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{x})^T & \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} \mathbf{G}^{-1}\tilde{u} \quad (3.11)$$

El resultado anterior también se puede expresar como:

$$u(x) = \tilde{\Phi}^T(x)\tilde{u}$$

Con este último resultado se obtienen las funciones funciones de forma:

$$\tilde{\Phi}^T(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \dots \quad \phi_n(x) \quad \phi_{n+1}(x) \quad \dots \quad \phi_{n+m}(x)]$$

Finalmente, la función de forma RPIM correspondiente al vector de desplazamiento nodal  $\Phi(x)$  es obtenida como:

$$\Phi^T(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \dots \quad \phi_n(x)]$$

Y la función inicial se podría expresar como sigue:

$$u(x) = \Phi^T(x)\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \quad (3.12)$$

### 3.3.2. Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)

Una alternativa para emplear funciones de interpolación radial (RBF) y funciones de interpolación rectangular (WBF), es el Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS), el cual consiste en resolver la formulación global de la aproximación



mediante la solución de varios sistemas lineales pequeños. A continuación se expone sucintamente la estructura lineal algebraica de MLS.

El problema consiste en encontrar los  $c_j$  de

$$u(x) = \sum_{j=1}^m c_j p_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.13)$$

Donde,  $c_j \in \mathbb{R}$ ,  $p_j(x)$  un polinomio de aproximación; a través de

$$\min \|f - u\|_{2,w}$$

Se define el producto interno como:

$$(f, g)_w = \sum_{i=1}^N f(x_i)g(x_i)w(x_i) \quad (3.14)$$

Además, es recomendable usar como función de ponderación  $w_i$  definida positiva y monotónicamente decreciente, notar que:

$$\|f\|_{2,w}^2 = \sum_{i=1}^N [f(x_i)]^2 w(x_i)$$

Se sabe que la menor distancia entre dos espacios normados es el espacio ortogonal, si  $u \in U$ , entonces

$$f - u \perp_w U \Leftrightarrow (f - u, p_k)_w = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

reemplazando la aproximación de  $u = \sum_{i=1}^m c_j p_j$ , se obtiene:

$$\sum_{i=1}^m c_j (p_j, p_k)_w = (f, p_k)_w. \quad (3.15)$$

Lo que puede ser expresado de la siguiente manera:

$$Gc = f_p \quad (3.16)$$

donde  $G_{ij} = (p_i, p_j)$ ;

el cual es un esquema tipo Gram.

### 3.3.3. Método de Partición a la Unidad (PUM)

A mediados de los 90, surge el Método de Partición de la Unidad [1], los autores expresaban que cuando se tiene cierta información acerca de la solución de un problema, parece lógico intentar incluir dicha información en el espacio de funciones de forma del método de Galerkin. Una de las características que los autores destacan del método es la capacidad de incluir este conocimiento previo de la solución

del problema en el espacio de aproximación. Cabe destacar que MLS es un tipo de PUM.

En éste tipo de aproximación se particiona el dominio del problema es decir:

$$\bigcup_i \Omega_i = \Omega \text{ ya que } \bigcap_i \Omega_i \neq \emptyset$$

Al igual que RPIM o MLS la función de aproximación se presenta en series.

### 3.3.4. Método Derivable de Partículas Hidrodinámicas (SPH)

El método de nubes h-p podría ser catalogado dentro de los métodos de partición de la unidad, pero teniendo en cuenta una particularidad, y es que construyen las familias de aproximación multiplicando una partición a la unidad, que se obtiene por mínimos cuadrados móviles, por polinomios u otra clase de función apropiada para el problema en estudio. Esto introduce la posibilidad de aumentar el grado de polinomios que forman las funciones de forma (adaptatividad p), a la que se le puede añadir también la introducción de nuevos nodos (adaptatividad h). Las familias resultantes conservan la propiedad de la partición de la unidad.

## 3.4. Desarrollo del Método de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)

Las aproximaciones de mínimos cuadrados móviles fueron propuestas en 1981 por Lancaster y Salkauscas. Se comenzaron a emplear con éxito en formulaciones globales por Belytschko [3], con el llamado método libre de Galerkin (EFGM).

### 3.4.1. Desarrollo Teórico

Supongase que se quiere aproximar una función continua  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2 \text{ ó } 3$  y se conocen sus valores  $u_i$  en los puntos  $x_i \in \bar{\Omega}, i = 1, 2, \dots, N$ . En el método de mínimos cuadrados móviles, una función de aproximación global de  $u$  se construye primero formando en cada punto  $x \in \bar{\Omega}$  una aproximación local de mínimos cuadrados ponderados,  $u^h(x)$  con  $u^h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en términos de alguna base  $\{P_i\}_{i=1}^n, n \leq N$ . El vector  $P$  que contiene los elementos de la base se puede expresar así:

$$P^T(x) = [P_1(x) \ P_2(x) \ \dots \ P_n(x)]$$

Donde  $P_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , estas funciones generalmente son polinomios de grado mucho menor que  $N$ . La base  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , con  $P_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tiene la siguientes propiedades:

- (i)  $P_1 \equiv 1$
- (ii)  $P_i \in C^m(\Omega), \quad i = 1, \dots, n$

- (iii)  $\{P_i\}_{i=1}^n$  es linealmente independiente sobre cualquier conjunto  $n$  dado de  $N$  puntos de  $\bar{\Omega}$ .

La aproximación local  $u^h(x)$ , para cada punto  $x \in \bar{\Omega}$ , está definida como

$$u^h(x) := \sum_{i=1}^n a_i(x)P_i(x) \quad (3.17)$$

Donde  $a_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ . La estrategia para calcular los coeficientes  $a_i(x)$  consiste en encontrar  $a^*(x) \in R^n$  tales que  $\forall a(x) \in R^n$  se cumpla:

$$J(a^*) = \left( u - \sum_{i=1}^n a_i^* P_i, u - \sum_{i=1}^n a_i^* P_i \right)_x \leq \left( u - \sum_{i=1}^n a_i P_i, u - \sum_{i=1}^n a_i P_i \right)_x \quad (3.18)$$

Es decir es un problema de aproximación, que busca minimizar la funcional  $J$ ; donde  $(\cdot, \cdot)_x$  es un producto interno ponderado que depende del punto  $x$ , y está definido por

$$(u, v)_x = \sum_{i=1}^N u(x_i)W_i(y)v(x) \quad (3.19)$$

$W_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , son funciones de peso,  $W_i(x) > 0, \forall x \in \bar{\Omega}$  y  $u, v \in C^0(\bar{\Omega})$ . Así el valor mínimo del rango de la funcional  $J$ , se consigue evaluando la misma en  $a^*$ .

$$J(a^*) = \sum_{i=1}^N W_i(x) \left[ u(x_i) - \sum_{k=1}^n a_k^* P_k \right]^2 \quad (3.20)$$

Si  $\partial J / \partial a = 0$  se encuentra el extremo mínimo. La inecuación (3.19) implica la siguiente ecuación:

$$\left( u - \sum_{i=1}^n a_i^* P_i, P_j \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

Así tenemos

$$\sum_{i=1}^n (P_i, P_j)_x a_i^* = (u, P_j)_x \quad j = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

Con el producto interno definido como en (3.20) y la hipótesis inicial, donde se supone que son conocidos los valores de la función  $u$  en  $x_i \in \bar{\Omega}$   $i = 1, \dots, N$ , podemos encontrar  $a^*$  siempre que se pueda invertir  $\sum_{i=1}^n (P_i, P_j)$ , esto implica que pueda ser evaluado en cada punto  $x \in \bar{\Omega}$ . Para asegurar la existencia de tal inversa, se enuncia el siguiente teorema:

**Teorema 3.4.1.** Si la matriz  $(P_i, P_j)_x$  es definida positiva  $\forall x \in \bar{\Omega}$  entonces los coeficientes  $a_i(x)$  están unívocamente determinados.

*Demostración.* La matriz  $A(x) = (P_i, P_j)_x$  puede escribirse así:

$$\begin{bmatrix} P_1(x_1) & \cdots & P_1(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(x_1) & \cdots & P_n(x_N) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} W_1(\|x - x_1\|) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_2(\|x - x_2\|) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_N(\|x - x_N\|) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P_1(x_1) & \cdots & P_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_N) & \cdots & P_n(x_N) \end{bmatrix} = FWF^T$$

Las filas de  $F$  son linealmente independientes por la hipótesis (iii) mencionada al principio del presente acápite. Así se puede afirmar que  $rango(F) = rango(F^T) = n$ . Como  $W_i(x) > 0$ , la matriz  $W$  es definida positiva. Se puede ver que  $FWF^T$  es definida positiva si y sólo si  $W$  es definida positiva, ya que si  $v \in \mathbb{R}^n$  se puede ver que  $F^T v \in \mathbb{R}^N$ ; de esta manera si  $FWF^T$  es definida positiva implica que  $v^T FWF^T v > 0$ , lo que indica que  $W$  es definida positiva. La prueba del recíproco es trivial; así  $FWF^T$  es definida positiva y de orden  $n$ , además toda matriz definida positiva es no singular.  $\square$

Si se considera  $a^T(x) = [a_1(x) \ \cdots \ a_n(x)]$ ,  $u^T = [u_1 \ \cdots \ u_N]$  y  $A_{ij} = (P_i, P_j)_x$ ; la ecuación (3.22) la podemos escribir de esta manera:

$$A(x)a(x) = B(x)u \quad (3.23)$$

Donde:

$$B(x) = \begin{bmatrix} W_1(y) \begin{bmatrix} P_1(x_1) \\ P_2(x_1) \\ \vdots \\ P_n(x_1) \end{bmatrix} & W_2(y) \begin{bmatrix} P_1(x_2) \\ P_2(x_2) \\ \vdots \\ P_n(x_2) \end{bmatrix} & \cdots & W_N(y) \begin{bmatrix} P_1(x_N) \\ P_2(x_N) \\ \vdots \\ P_n(x_N) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

A partir de la solución de la ecuación (3.23) se concluye que

$$a_k(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n A_{kj}^{-1} B_{ji}(y) u_i \quad (3.24)$$

De esta manera reemplazando esta última expresión en la aproximación local se tiene

$$u^h(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) P_k(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n P_k(x) A_{kj}^{-1} B_{ji}(y) u_i \quad (3.25)$$

con ayuda de (3.25) se puede definir

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n P_k(x) A_{kj}^{-1} B_{ji}(x) \quad (3.26)$$

Que se puede representar en forma matricial en función de la  $i$ -ésima columna de  $(A^{-1}B)$  así:

$$\phi_i(x) = P^T(x) (A^{-1}B)_i$$

Con esta última expresión se define la función de aproximación global.

**Definición 3.4.1.** *La función de aproximación global se define como sigue*

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) P_i(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (3.27)$$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i \quad (3.28)$$

donde  $\phi_i(x)$  ha sido definida en (3.26)

**Teorema 3.4.2.** *Si  $P_i, i = 1, \dots, n \in C^m(\Omega)$  y  $W_I, I = 1, \dots, N \in C^l(\Omega)$  entonces  $u^h(x)$  definida anteriormente  $\in C^{\min\{m,l\}}(\Omega)$*

*Demostración.* Derivando  $A(x)a(x) = B(x)u$  con respecto a una de sus variables se obtiene  $A_{,i}a + Aa_{,i} = B_{,i}u$ , además se puede escribir así  $Aa_{,i} = B_{,i}u - A_{,i}a$ . Esta última expresión tiene la misma estructura que la primera, es decir  $Aa_{,i}$  hace el papel de  $Aa$  en la segunda expresión y  $B_{,i}u - 2A_{,i}a$ , a la que por simplicidad llamaremos  $Z_1$  (donde el sub índice indica que corresponde a la primera derivada), hace el papel de  $Bu$ . Esto quiere decir que se podrá derivar hasta que  $Aa_{,i\dots i} = Z_{\min\{m,l\}}$ . En todos los casos para obtener  $a_{,i\dots i}$ , la condición suficiente es que  $A^{-1}$  exista.  $\square$

Este último teorema sugiere un procedimiento para calcular las derivadas de las funciones de forma, esto resulta útil para el cálculo de la matriz de rigidez de cada nodo. De la ecuación (3.23) tenemos la expresión:

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)u$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.25) y (3.26)

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i = \Phi^T(x)u$$

Esta última expresión indica

$$\Phi^T(x) = [ \phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \dots \quad \phi_N(x) ]_{1 \times N} = P^T(x)A^{-1}(x)B(x) \quad (3.29)$$

Si se hace  $\Phi^T(x) = \gamma^T(x)B(x)$ , inmediatamente resulta que  $A\gamma = P$ . Si se sigue el esquema de derivación del teorema anterior tenemos:

$$A\gamma_{,i} = p_{,i} - A_{,i}\gamma \quad (3.30)$$

$$A\gamma_{,ij} = p_{,ij} - (A_{,i}\gamma_{,j} + A_{,j}\gamma_{,i} + A_{,ij}\gamma) \quad (3.31)$$

Este proceso se puede repetir, hasta llegar al orden de derivación permitido para A. Análogamente podemos repetir el procedimiento para  $\Phi$ , así tenemos:

$$\Phi_{,i}^T = \gamma_{,i}^T B + \gamma^T B_{,i} \quad (3.32)$$

$$\Phi_{,ij}^T = \gamma_{,ij}^T B + \gamma_{,i}^T B_{,j} + \gamma_{,j}^T B_{,i} + \gamma^T B_{,ij} \quad (3.33)$$

**Teorema 3.4.3.** *Si  $W_i(x) \in C^\infty(\Omega)$ , entonces la colección de funciones  $\phi_i(x)$  definidas anteriormente representa una partición de la unidad.*

*Demostración.* Sumando desde  $i = 1$  hasta  $i = N$  los cocientes de (3.26) resulta la suma total de las funciones de forma.  $\square$

Finalmente se enuncia la propiedad de consistencia de (MLS), con el siguiente teorema, esta propiedad indica hasta que grado de polinomio se puede representar de manera exacta con el método.

**Teorema 3.4.4.** *La aproximación por Mínimos Cuadrados Móviles es consistente de orden  $k$  si la base polinomial es completa hasta el orden  $k$ .*

*Demostración.* Como la funcional  $J$  definida en (3.20), es positiva o cero, su mínimo será mayor o igual que cero, si  $a_i(x) = \alpha_i$  el funcional  $J$  se anulará alcanzando su mínimo y reproducirá de manera exacta:

$$u^h(x) := \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(x)$$

Si la base contiene todos los términos hasta de orden  $k$ , se tiene que MLS reproduce derivadas hasta de orden  $k$ , es decir es consistente hasta de orden  $k$ .  $\square$

### 3.4.2. Construcción de la Función de Forma

Para la construcción de la función de forma se siguen los siguientes pasos:

1. *Se selecciona una base polinomial completa que pertenezca a  $\mathbb{R}^n$ , en nuestro caso  $n = 2$ .*
2. *Con la ayuda de la base y las funciones monotónicas  $W_i$  (RBF ó WBF) se calculan las matrices  $A$  y  $B$ .*
3. *Se expresa  $a(x) = A^{-1}(x)B(x)$ .*
4. *Finalmente la función de forma se calcula  $\Phi(x) = p(x).A^{-1}(x)B(x)$ ,  $p(x)$  denota el vector que contiene la base polinomial; y  $\phi_i = A^{-1}(x)B(x)_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $\Phi$  y representa el valor de la función de forma en el  $i$ -ésimo punto del soporte compacto de  $x$ .*

A continuación se indica el código en matlab para la construcción de la función de forma. La función `mat_p.m`, genera la base polinomial.

```

function [p]=mat_p(mpol,xc,yc) %x,y deben entrar como columnas
p=[1 xc yc];aux=[xc yc];
for i=2:mpol
    for j=1:i
        aux(1,j)=aux(1,j)*xc;
    end
    aux=[aux aux(1,i)*yc];
    p=[p aux];
end
    
```

La función *fiw.m* genera una función monotónica de base rectangular

```

function [frx , fry]=fiw (nWBF, rrx , rry)
switch nWBF
case 1
frx=(2/3-4*rrx^2+4*rrx^3)*(rrx<=0.5)+(4/3-4*rrx+4*rrx^2-4/3*rrx^3)*...
... (rrx<=1)*(rrx>0.5);
fry=(2/3-4*rry^2+4*rry^3)*(rry<=0.5)+(4/3-4*rry+4*rry^2-4/3*rry^3)*...
... (rry<=1)*(rry>0.5);
case 2
frx=(1-6*rrx^2+8*rrx^3-3*rrx^4)*(rrx>=0)*(rrx<=1);
fry=(1-6*rry^2+8*rry^3-3*rry^4)*(rry>=0)*(rry<=1);
end
    
```

La función *AB.m* genera las matrices *A* y *B*

```

function [A,B]=AB(mpol,npts,nWBF,x,y,xc,yc,di)
m=(mpol+2)*(mpol+1)/2
A=zeros(m,m);B=zeros(m,npts);
for i=1:npts
    rrx=abs((x(i)-xc)/di);
    rry=abs((y(i)-yc)/di);
    [frx , fry]=fiw (nWBF, rrx , rry);
    [p]=mat_p(mpol,x(i),y(i))
    W=frx*fry
    A=A+W*p'*p; B(:,i)=W*p';
end
    
```

La función *MLS\_Phi.m* construye la función de forma con el método de mínimos cuadrados móviles.

```

function [phi]=MLS_Phi(npts,nWBF,mpol,xc,yc,x,y,di)
%convert
[A,B]=AB(mpol,npts,nWBF,x,y,xc,yc,di);
a=A\B;
[p]=mat_p(mpol,xc,yc);
phi=p*a;
end
    
```

### 3.5. Formulación Global Débil

La formulación que se detalla a continuación corresponde al Método de Elementos Libres de Galerkin (EFGM). Considerando lo expuesto en el capítulo inicial, donde se pone de manifiesto que la solución del problema de ecuaciones en derivadas parciales resulta de la minimización de la funcional  $J(u) = \frac{1}{2}a(u, v) - l(v)$ , y de acuerdo a la formulación desarrollada en el capítulo 2, y los conceptos allí expuestos, se puede decir que la solución del problema se obtiene de resolver la siguiente funcional:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega - \int_{\Omega} v^T b d\Omega - \int_{\Gamma_2} v^T t d\Gamma = 0 \quad (3.34)$$

Donde, para trabajar matricialmente la formulación expuesta, se define la transformación lineal:  $L : u \rightarrow \epsilon(u)$ , que transforma el espacio vectorial de desplazamientos en el espacio vectorial de deformación, los cuales están incluidos en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$  ó  $3$ , la transformación mencionada se representa matricialmente como:

$$L := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Se debe notar que la representación matricial de esta transformación lineal facilita el cálculo y además satisface:

$$(Lv)^T E(Lu) = \sigma : \epsilon$$

Para resolver el problema mencionado, se utiliza la función de forma presentada en la sección anterior para aproximar los desplazamientos en cualquier punto de interés usando un conjunto de nodos en un dominio de soporte local del punto. La función de forma puede ser escrita en una sumatoria nodal de la siguiente manera:

$$u_{(2 \times 1)}^h = \sum_i^n \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \sum_i^n \Phi_i u_i \quad (3.35)$$

$\Phi_i$  es la matriz de funciones de forma del nodo  $i$ , y  $u_i$  es el parámetro que representa desplazamiento nodal.

En la ecuación anterior,  $u^h$  es la función de aproximación de dimension finita para el punto de interés, el cual puede ser un punto de muestreo o un punto de cuadratura.

De la misma manera también podemos plantear lo siguiente:

$$v_{(2 \times 1)}^h = \Phi_{(2 \times 2n)} v_{(2n \times 1)} = \sum_i^n \Phi_i v_i$$

Al aplicar el tensor de deformación al vector  $u$  del espacio de desplazamientos se tiene:



$$\begin{aligned}
\epsilon(u)_{(3 \times 1)} &= Lu^h = L_{(3 \times 2)} \Phi_{(2 \times 2n)} u_{(2n \times 1)} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \cdots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} = B_{(3 \times 2n)} u_{(2n \times 1)} \\
&= \sum_i^n B_i u_i \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Donde  $\mathbf{B}$  es la matriz de deformaciones, y  $B_i$  es la matriz de deformaciones para el nodo  $i$ . De igual modo:

$$Lv^h = L_{(3 \times 2)} \Phi_{(2 \times 2n)} v_{(2n \times 1)} = B_{(3 \times 2n)} v_{(2n \times 1)} = \sum_i^n (B_i)_{(3 \times 2)} (v_i)_{(2 \times 1)}$$

De donde resulta:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \epsilon(u)^T E \epsilon(v) d\Omega \tag{3.37}$$

$E$  es conocida como la matriz del material. Esta ultima presentación sirve para trabajar de manera adecuada la representación matricial de la formulación, la cual es de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\sigma &= E\epsilon = EBu = \sum_i^n E(B_i)(u_i) \\
\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega &= \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n v_i^T [B_i^T E B_j] u_j d\Omega \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Notar que, hasta este punto,  $i$  y  $j$  están basados en un sistema de numeración local para los nodos del dominio de soporte local. Es posible cambiar este sistema de numeración de uno local a uno global en el cual se tengan almacenados todos los nodos del dominio completo de manera única desde el 1 hasta el  $N$ . Por lo tanto, ambos índices  $i$  y  $j$  pueden variar de 1 a  $N$ . Cuando los nodos  $i$  y  $j$  no están en

el mismo dominio de soporte local, el integrando se anula y consecuentemente la integral, con esta operación la expresión anterior se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_i^N \sum_j^N v_i^T [B_i^T E B_j] u_j d\Omega$$

Ahora se puede hacer ingresar la integral dentro de las sumatorias de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega = \sum_i^N \sum_j^N v_i^T \underbrace{\left( \int_{\Omega} B_i^T E B_j d\Omega \right)}_{K_{ij}} u_j \quad (3.39)$$

Donde  $K_{ij}$ , es llamada matriz de rigidez nodal o también denominada **Matriz de Rigidez Local** y se define como:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (B_i^T)_{2 \times 3} E_{3 \times 3} (B_j)_{3 \times 2} d\Omega \quad (3.40)$$

Donde  $B_i$  es:

$$B_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{i,y} \\ \Phi_{i,y} & \Phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Notar que cuando los nodos  $i$  y  $j$  no están en el mismo dominio de soporte del mismo punto de cuadratura de integración,  $K_{ij}$  se anula.

La ecuación (3.39) puede entonces ser expresada como:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega = \sum_i^N \sum_j^N v_i^T K_{ij} u_j$$

La sumatoria del lado derecho de la ecuación es de hecho un proceso de ensamblaje. Esto se puede observar desarrollando la expresión de la siguiente manera:

$$\sum_i^N \sum_j^N v_i^T K_{ij} u_j = V^T K U$$

Finalmente la ecuación anterior se expresa como:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega = V^T K U \quad (3.42)$$

Donde  $K$  es la **Matriz de Rigidez Global** y posee la siguiente forma:

$$K_{(2N \times 2N)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

La dimension de la matriz  $K$  es de  $(2N) \times (2N)$  en dimension  $\mathbb{R}^2$ . Análogamente en  $\mathbb{R}^3$  será de  $(3N) \times (3N)$ . En ambos casos el número total de puntos del dominio del problema es  $N$ .

El vector de desplazamientos globales es:

$$U_{(2N \times 1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{bmatrix}$$

El término correspondiente a las fuerzas de cuerpo de la formulación se trabaja de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} v^T b d\Omega = \int_{\Omega} \left( \sum_i^n \Phi_i v_i \right)^T b d\Omega$$

y argumentando el cambio de índices de manera análoga a lo referido en la numeración local y global se obtiene:

$$\int_{\Omega} v^T b d\Omega = \int_{\Omega} \left( \sum_i^N \Phi_i v_i \right)^T b d\Omega$$

Que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} v^T b d\Omega = \sum_i^N v_i^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_i^T b d\Omega}_{F_i^b}$$

Donde  $F_i^{(b)}$  es el vector de fuerzas de cuerpo nodales y se define como:

$$F_i^b = \int_{\Omega} \Phi_i^T b d\Omega \quad (3.44)$$

La última sumatoria puede ser expandida y reagrupada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_l^N v_l^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_l^T b d\Omega}_{F_l^b} &= [v_1^T \cdots v_N^T]_{(1 \times 2N)} \begin{bmatrix} F_1^b \\ \vdots \\ F_N^b \end{bmatrix}_{(2N \times 1)} \\ &= V^T F^b \end{aligned} \quad (3.45)$$

Donde  $F^{(b)}$  es el vector de fuerzas de cuerpo global.

El último término de la ecuación distribucional se trata de la misma manera que el caso del vector de fuerzas de cuerpo, con la salvedad de que la región de integración es la frontera de fuerzas de tensión. De esta manera se tiene:

$$\int_{\Gamma_2} v^T t d\Gamma = \sum_i^N v_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_2} \Phi_i^T t d\Gamma}_{F_i^{(t)}} = V^T F^{(t)}$$

Donde  $F^{(t)}$  es el vector de fuerzas de tensión global.

$$(F_i^{(t)})_{(2 \times 1)} = \int_{\Gamma_2} \Phi_i^T t d\Gamma \quad (3.46)$$

Reemplazando los resultados obtenidos en la formulación, resulta:

$$\begin{aligned} V^T K U - V^T F^{(b)} - V^T F^{(t)} &= 0 \\ V^T [K U - F^{(b)} - F^{(t)}] &= 0 \end{aligned}$$

como  $V$  es un vector arbitrario, la expresión que hace idénticamente nula la representación matricial de la formulación débil es:

$$K U - F^{(b)} - F^{(t)} = 0$$

La que se puede reescribir de la siguiente manera:

$$K U = F \quad (3.47)$$

Donde:

$$F = F^{(b)} + F^{(t)}$$

De esta manera se termina de plantear la formulación débil considerando las condiciones de frontera tipo Neumann.

### 3.5.1. Matriz Enriquecida

Para obtener la matriz enriquecida se incorporan funciones discontinuas como las de Shepard, funcionales wavelet, funciones de Heaviside [20] o cualquier tipo de función que reproduzca discontinuidades de manera coherente al problema que se quiere estudiar. En general así se formulan las matrices en métodos sin malla cuando se desea trabajar un problema no lineal.

$$B = [B \mid B^{enr}]$$

Donde, como se vio en el acápite anterior:

$$B_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{i,y} \\ \Phi_{i,y} & \Phi_{i,x} \end{bmatrix}$$

Además:

$$B_i^{enr} = \begin{bmatrix} (\Phi_i)_{,x} \Psi_i + \Phi_i (\Psi_i)_{,x} & 0 \\ 0 & (\Phi_i)_{,y} \Psi_i + \Phi_i (\Psi_i)_{,y} \\ (\Phi_i)_{,y} \Psi_i + \Phi_i (\Psi_i)_{,y} & (\Phi_i)_{,x} \Psi_i + \Phi_i (\Psi_i)_{,x} \end{bmatrix}$$

### 3.5.2. Incorporación de las Condiciones de Frontera

A continuación se procede a incorporar las condiciones de frontera no homogéneas de Dirichlet, las cuales no fueron consideradas en acápites anteriores; con este objetivo se utilizara el método de multiplicadores de Lagrange, motivados por la formulación variacional del capítulo 2 (ecuación (2.19)), según este método, las condiciones deseadas se incorporan como:

$$\int_{\Gamma_1} \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma$$

Recordar la funcional  $J$  planteada en el capítulo 1 e incorporar las condiciones de frontera a través de los multiplicadores de Lagrange para obtener la siguiente funcional:

$$\bar{J}(u, \lambda) = J(u) + \lambda^T \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) d\Gamma \quad (3.48)$$

Ahora, al aplicar la primera derivada en el sentido distribucional, se obtiene:

$$D\bar{J} = DJ(u) + D\lambda^T \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) d\Gamma + \lambda^T \int_{\Gamma_1} D(u - \bar{u}) d\Gamma \quad (3.49)$$

El resultado anterior se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega - \int_{\Omega} v^T b d\Omega - \int_{\Gamma_2} v^T t d\Gamma - D\lambda^T \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) d\Gamma - \lambda^T \int_{\Gamma_1} Du d\Gamma = 0$$

Ahora, se debe recordar que en virtud del teorema de Lax-Milgram presentado en el capítulo 2, la solución débil buscada  $u$  es solución fuerte del problema (por ser única). Entonces, gracias a esto podemos concluir que si  $u \in H^1$  entonces también  $Du \in H^1$  y éste es el espacio al que pertenecen las funciones de prueba  $v$ , las cuales además son elegidas arbitrariamente. Por lo tanto  $Du$  puede ser expresada efectivamente como  $v$ , se puede escribir:

$$\int_{\Omega} (Lv)^T (ELu) d\Omega - \int_{\Omega} v^T b d\Omega - \int_{\Gamma_2} v^T t d\Gamma - D\lambda^T \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) d\Gamma - \lambda^T \int_{\Gamma_1} v d\Gamma = 0 \quad (3.50)$$

Para poder expresar matricialmente los dos últimos términos de esta funcional, se debe notar que el vector de multiplicadores de Lagrange se expresa de la siguiente manera:

$$\lambda^h = \begin{bmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_{n_\lambda} & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_{n_\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{u_1} \\ \lambda_{v_1} \\ \vdots \\ \lambda_{u_\lambda} \\ \lambda_{v_\lambda} \end{bmatrix} = N(s)_{(2 \times 2n_\lambda)} \lambda_{(2n_\lambda \times 1)}$$

Donde  $n_\lambda$  denota el número de nodos empleados en la interpolación,  $N_i$  es la función de forma referida a las condiciones esenciales del  $i$ -ésimo nodo,  $s$  es la longitud de arco a lo largo de las condiciones esenciales. La expresión matricial anterior se puede expresar de manera reducida como:

$$\lambda_{(2 \times 1)} = \sum_i^{n_\lambda} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{u_i} \\ \lambda_{v_i} \end{bmatrix} = \sum_i^{n_\lambda} \mathbf{N}_i \lambda_i \quad (3.51)$$

Donde  $\mathbf{N}_i$  es la matriz de funciones de forma referida a las condiciones esenciales del  $i$ -ésimo nodo, las cuales representan una base del espacio vectorial de polinomios de grado  $n$ ; si se quiere una función de interpolación lineal en el nodo  $i$ , las bases antes referidas serán de primer grado; estas bases polinomiales en dimension 2 se pueden expresar de la siguiente manera:

$$N_k^n = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{s - s_i}{s_k - s_i}$$

A continuación se expresa el penúltimo término de la formulación débil con condiciones esenciales de Dirichlet no homogéneas.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} D\lambda^T(u - \bar{u})d\Gamma &= \int_{\Gamma_1} D \left( \sum_i^{n_\lambda} N_i \lambda_i \right)^T \sum_{j=1}^n \Phi_j u_j d\Gamma - \int_{\Gamma_1} D \left( \sum_i^{n_\lambda} N_i \lambda_i \right)^T \bar{u} d\Gamma \\ &= \sum_i^{n_\lambda} \sum_{j=1}^n D\lambda_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_1} N_i^T \Phi_j d\Gamma}_{-G_{ij}^T} u_j - \sum_i^{n_\lambda} D\lambda_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_1} N_i^T \bar{u} d\Gamma}_{-q_i} \end{aligned}$$

Considerando los dominios de soporte compacto e integrando se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} D\lambda^T(u - \bar{u})d\Gamma &= - \sum_i^{n_{\lambda t}} \sum_{j=1}^n D\lambda_i^T G_{ij}^T u_j + \sum_{i=1}^{n_\lambda} D\lambda_i^T q_i \\ &= D\lambda^T (-G_{(2n_{\lambda t} \times 2N)}^T U_{(2n_{\lambda t} \times 1)} + Q_{(2n_{\lambda t} \times 1)}) \end{aligned}$$

Donde  $\lambda$  es el vector de los multiplicadores de Lagrange para todos los nodos sobre las condiciones esenciales de frontera;  $n_{\lambda t}$  es el número total de nodos sobre las condiciones esenciales de frontera. De esta manera quedan las definidas las siguientes matrices:

$$G_{ij}^T = - \int_{\Gamma_1} N_i^T \Phi_j d\Gamma \quad (3.52)$$

$$q_i = - \int_{\Gamma_1} N_i^T \bar{u} d\Gamma \quad (3.53)$$

Donde,  $G$  es la matriz global generada por el ensamblaje de  $G_{ij}$  y  $Q$  es el vector global generado por el ensamblaje de  $q_i$ .

El último termino de la formulación débil se puede escribir de manera similar al anterior. Así se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (\Phi v)^T \lambda d\Gamma &= \int_{\Gamma_1} \left( \sum_i^n \Phi_i v_i \right)^T \sum_j^{n_\lambda} N_j \lambda_j d\Gamma \\ &= \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{j=1}^n v_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_1} \Phi_i^T N_j d\Gamma}_{-G_{ij}^T} \lambda_j \\ &= - \sum_{i=1}^{n_{\lambda t}} \sum_{j=1}^N v_i^T G_{ij} \lambda_j \\ &= -V^T G \lambda \end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones obtenidas en la forma débil, la representación matricial de la formulación débil considerando condiciones de Dirichlet no homogéneas sería la siguiente:

$$V^T [KU - F] + D\lambda^T (G^T U - Q) + V^T G\lambda = 0$$

La que se puede escribir de la siguiente manera:

$$V^T [KU + G\lambda - F] + D\lambda^T (G^T U - Q) = 0$$

Dado que el vector  $[V^T \ D\lambda]$  es un vector arbitrario, se tiene que:

$$\begin{aligned} KU + G\lambda - F &= 0 \\ G^T U - Q &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Que puede ser expresado matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times (2N+2n_{\lambda t})} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times 1} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times 1}$$

### 3.6. Integración

Con respecto al ensamblaje de las matrices de rigidez se debe mencionar que la mayor desventaja de los métodos sin malla que usan un esquema EFGM, es la integración numérica; esto debido a la forma complicada de las funciones de forma. Generalmente, son empleadas dos aproximaciones que se indican a continuación:

**Integración nodal directa.** Las integrales son evaluadas en los nodos más cercanos al punto de integración. En este tipo de integración se corre el riesgo de obtener incompatibilidades en los resultados.

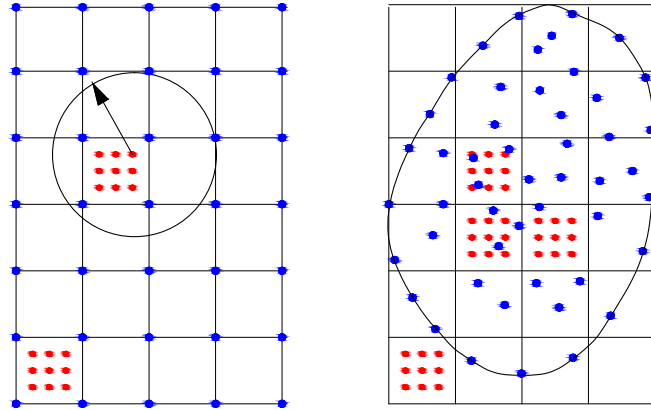
**Malla de fondo o Estructura de celdas.** El dominio es dividido en celdas de integración sobre las cuales se forman las cuadraturas de Gauss. En el caso de la malla de fondo, los nodos coinciden con los nodos de la malla. En el caso de la estructura de celdas, generalmente los nodos no son coincidentes con los nodos de la malla de fondo.

Para evaluar las integrales implicadas en el proceso de ensamblaje de las matrices se utilizara un esquema de cuadratura de Gauss, en el cual las integrales son evaluadas de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} \psi d\Omega = \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} \psi d\Omega = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} w_i \psi(x_{gi}) |J_{ik}^D|$$

Donde  $\psi$  representa la función que se desea integrar,  $w_i$  es el factor de ponderación para el  $i$ -ésimo punto  $x_{gi}$ , y  $|J_{ik}^D|$  es la matriz Jacobiana para el área de





**Figura 3.4:** Esquemas de integración: malla de fondo (izquierda) y fondo con estructura de celdas (derecha)

integración de la celda  $k$ , en el cual se ubica el punto de Gauss  $x_{gi}$ ,  $n_c$  es el número de celdas y  $n_g$  es el número de puntos de Gauss. De manera similar se puede integrar sobre la frontera.

Con respecto al ensamblaje de la matriz de rigidez, el integrando tiene la siguiente forma:

$$\psi(x_{gi}) = B_i^T(x_{gi})EB_j(x_{gi})$$

Consecuentemente, el valor de la integral será obtenida según:

$$K_{IJ} = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} w_i B_I^T(x_{gi})EB_J(x_{gi}) |J_{ik}^D| = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} K_{IJ}^{ik} \quad (3.55)$$

Donde,  $K_{IJ}^{ik}$  se define como:

$$K_{IJ}^{ik} = w_i B_I^T(x_{gi})EB_J(x_{gi}) |J_{ik}^D| \quad (3.56)$$

Se debe notar que la matriz de rigidez nodal  $K_{IJ}$  se obtiene numéricamente por contribución de todos los puntos de cuadratura cuyo dominio de soporte local incluye a los puntos  $I$  y  $J$  conjuntamente, es decir que si el nudo  $I$  y el nudo  $J$  no se encuentran en el dominio de soporte local del punto  $x_{gi}$ , entonces  $K_{IJ}^{ik}$  se anula.

De manera similar se puede obtener el vector de fuerzas de cuerpo nodales y el vector de tensiones nodales. Así, se tiene el vector de fuerzas de cuerpo nodales como sigue:

$$F_I^{(b)} = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} w_i \Phi_I^T(x_{gi})b(x_{gi}) |J_{ik}^D| = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} F_I^{ik(b)} \quad (3.57)$$

Donde,  $F_I^{ik(b)}$  se define como:

$$F_I^{ik(b)} = w_i \Phi_I^T(x_{gi}) b(x_{gi}) |J_{ik}^D| \quad (3.58)$$

Y el vector de fuerzas de tensión como:

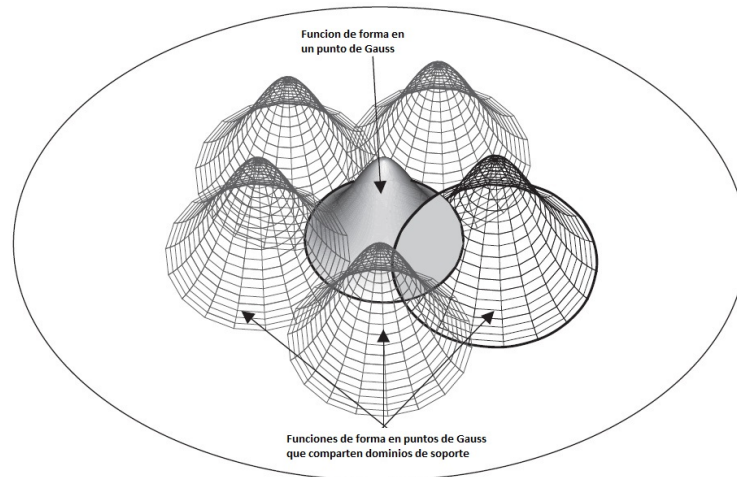
$$F_I^{(t)} = \sum_l^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} w_i \Phi_I^T(x_{gi}) t(x_{gi}) |J_{il}^B| = \sum_l^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} F_I^{il(t)} \quad (3.59)$$

Donde,  $F_I^{il(t)}$  se define como:

$$F_I^{il(t)} = w_i \Phi_I^T(x_{gi}) t(x_{gi}) |J_{il}^B| \quad (3.60)$$

Cabe resaltar que, como se manifestó anteriormente, en el ensamblaje de las matrices se está considerando la contribución de cada punto de Gauss  $x_{gi}$  en cuyo dominio de soporte local se encuentren los nodos  $I$  y  $J$ , es decir que no se discrimina entre la contribución de puntos de Gauss que se encuentren en celdas diferentes o en celdas no vecinas a dicho punto, pues se están considerando todas las celdas. Esta forma de integrar es diferente a la del FEM, donde se consideran sólo los puntos de Gauss internos a cada elemento finito.

**Puntos de Gauss**, los puntos de Gauss se obtienen para cada celda calculando las raíces del polinomio de Legendre de grado  $n$ , las cuales se encuentran en el intervalo  $[-1 \ 1]$  y los factores de ponderación se obtienen utilizando procesos de cuadratura conocidos.



**Figura 3.5:** Dominios de soporte de los puntos de Gauss

### 3.7. Aspectos de Implementación Computacional

Con respecto a la implementación computacional, existen diferencias considerables entre los métodos sin malla y el método de elementos finitos. Por ejemplo, podemos mencionar algunas:

- El cálculo de las funciones de forma y sus derivadas.
- El proceso de ensamblaje.
- La forma de imposición de condiciones de frontera.

A continuación se presenta de manera genérica el proceso que se debe seguir para escribir una rutina que siga el esquema EFGM:

#### Rutina genérica del método libre de malla

1. *Generación de los nodos, es decir, sus coordenadas y factores de ponderación asociados. En cada nodo se debe especificar además:*
  - *La forma del dominio de influencia (base radial o rectangular).*
  - *El tamaño del dominio de soporte (por ejemplo el radio).*
  - *La funcional, con la que se construyen las funciones de forma.*
2. *Construcción de los puntos de integración (coordenadas y factores de ponderación) del dominio.*
3. *Integración de los puntos a lo largo de las condiciones de frontera.*
4. *Integración sobre el dominio para cada punto de Gauss ( $x_{gi}$ ):*
  - *Encontrar los nodos dentro del dominio de soporte de  $x_{gi}$ .*
  - *Para cada ( $x_{gi}$ ), calcular los factores de ponderación, funciones de forma y sus derivadas.*
  - *Construir la matriz  $B$ .*
  - *Ensamblar la matriz  $K$ .*
5. *Proceder de la misma manera sobre las condiciones de frontera.*
6. *Resolver el sistema de ecuaciones. El problema que se puede presentar es el de obtener una matriz mal condicionada para lo cual se deben utilizar algoritmos que mejoren el condicionamiento de la matriz o procedimientos que calculen la inversa de la matriz.*
7. *Esta parte sólo es aplicable cuando las funciones de forma son de aproximación y no de interpolación. En estos casos se debe de calcular los desplazamientos nodales ya que las funciones de aproximación no cumplen con la propiedad de delta de Kronecker.*

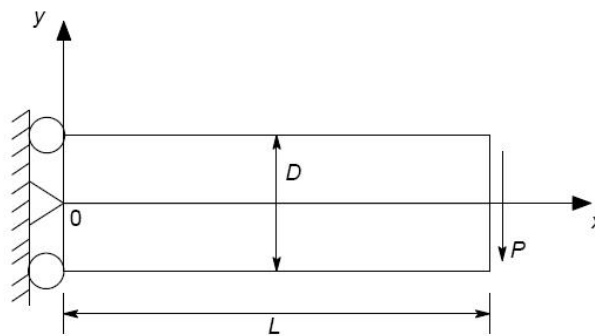
# 4

## Aplicación del Método Libre de Malla

### 4.1. Viga de Timoshenko

A continuación se presenta una aplicación relativa a los temas expuestos en los capítulos dos y tres, se trata un ejemplo numérico de elasticidad lineal, conocido como la Viga de Timoshenko, ejemplo que es adecuado para la exposición de un problema con condiciones de frontera mixtas y también porque es posible comparar los resultados obtenidos a través de la formulación débil con propuestas teóricas como [22]. La aplicación ha sido desarrollada con la ayuda de un programa escrito en Matlab para tal efecto.

Considere una viga de dimensiones  $L$  por  $D$ , supeditada a la acción de una fuerza parabólica en el extremo libre como se muestra en Figura (4.1). Para efectos prácticos se considera que la viga es de profundidad unitaria y está en el estado de plano de esfuerzos.



**Figura 4.1:** Viga de Timoshenko

La fuerza parabólica está dada por:

$$t_y = -\frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (4.1)$$

Donde el momento de inercia está dado por

$$I = \frac{D^3}{12}$$

Las fórmulas para calcular los valores de los desplazamientos de este problema están dadas por las siguientes expresiones:

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[ (6L - 3x)x + (2 + v) \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (4.2)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[ 3vy^2(L - x) + (4 + 5v) \frac{D^2x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (4.3)$$

Los esfuerzos por:

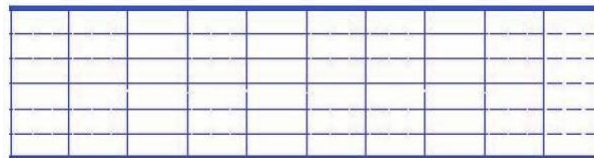
$$\sigma_x = -\frac{P(L - x)y}{I} \quad (4.4)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (4.5)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (4.6)$$

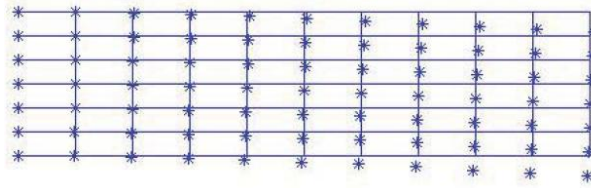
Se considera las siguientes propiedades para los materiales:  $E = 3,0 \times 10^7 \text{ psi}$ , la razón de Poisson  $\nu = 0,3$  y las dimensiones de la viga, altura  $D = 12 \text{ pulgadas}$ , longitud  $L = 48 \text{ pulgadas}$ . La fuerza en el extremo de la viga es  $P = 1000 \text{ poundal}$ .

La distribución de los nodos conjuntamente con la malla de fondo destinada para integración numérica de la forma débil se muestra en la figura (4.2) y los desplazamientos en (4.3). En cada celda de integración, se usa la cuadratura de Gauss de  $4 \times 4$ . La base polinomial es lineal y la función monotónica es un spline cúbico como el mencionado en el capítulo tres para funciones de base rectangular (*WBF*) o radial (*RBF*). Se considera un radio de soporte con un espaciamiento de 6 veces la mayor dimensión del domino nodal.



**Figura 4.2:** Estructura de celdas de la Viga de Timoshenko

En la tabla (4.1), el desplazamiento vertical en el punto  $(L, 0)$  es calculado por *EFGM*, y comparado con la solución de [22]. Este cuadro muestra la concordancia excelente entre la solución *EFGM* y la analítica. En las tablas siguientes se puede



**Figura 4.3:** Desplazamientos de la Viga de Timoshenko

Nodos	$u_y$ Timoshenko	$u_y$ EFGM	error %
$7 \times 5$	-0,0089	-0,0083	-6,74
$11 \times 5$	-0,0089	-0,0087	-2,24
$15 \times 9$	-0,0089	-0,0088	-1,12
$20 \times 9$	-0,0089	-0,0088	-1,12

**Tabla 4.1:** Comparación de desplazamientos verticales al extremo de la viga

observar muy buena aproximación entre los resultados obtenidos con el método sin malla y los calculados con las fórmulas de Timoshenko. Para aproximar mejor las respuestas con los esfuerzos de corte se trabaja con una nube de veinte por nueve nodos y en cada región de integración cuatro por cuatro puntos de Gauss son usados en la evaluación. La tabla 4.2 contiene valores de los esfuerzos obtenidos en algunos nodos.

Nodo	$x$	$y$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xy}$
1	2.3509	-4.6041	-1456.9772	2.7915	-52.2462
2	2.3509	-5.8959	-1870.1739	-0.4782	-0.6113
3	2.3509	-4.9950	-1582.1331	2.8692	-37.6070
4	2.3509	-5.5050	-1745.8232	1.3665	-17.1768
5	2.3509	-4.6041	-1529.5285	1.0327	-53.3273
6	2.3509	-5.8959	-1949.4569	-5.7158	0.7138
7	2.3509	-4.9950	-1656.9899	0.7626	-38.5772
8	2.3509	-5.5050	-1822.5390	-1.2920	-17.1855

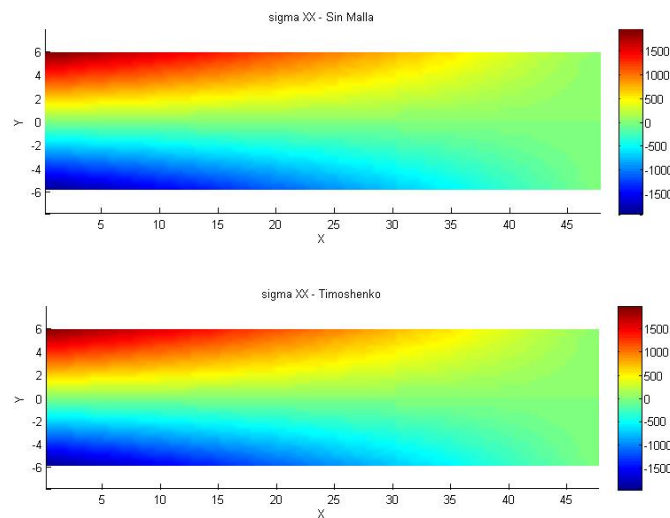
**Tabla 4.2:** Esfuerzos calculados con Método sin Malla

Los esfuerzos obtenidos con las fórmulas de [22] se muestran en la tabla 4.3

Para una mejor comparación entre los resultados de los esfuerzos calculados con métodos sin malla y las fórmulas de Timoshenko, se presenta en las figuras (4.4) y (4.5) la distribución de esfuerzos a lo largo de toda la viga. Se debe notar en particular que los esfuerzos se obtienen de manera directa gracias a la contribución de los puntos de Gauss, no se requiere de ningún proceso adicional.

Nodo	$x$	$y$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xy}$
1	2.3509	-4.6041	-1459.5503	0.0	-51.3952
2	2.3509	-5.8959	-1869.0295	0.0	-4.3019
3	2.3509	-4.9950	-1583.4574	0.0	-38.3675
4	2.3509	-5.5050	-1745.1223	0.0	-19.7748
5	2.3509	-4.6041	-1529.1080	0.0	-51.3952
6	2.3509	-5.8959	-1958.1017	0.0	-4.3019
7	2.3509	-4.9950	-1658.9202	0.0	-38.3675
8	2.3509	-5.5050	-1828.2895	0.0	-19.7748

**Tabla 4.3:** Esfuerzos calculados con fórmulas de Timoshenko



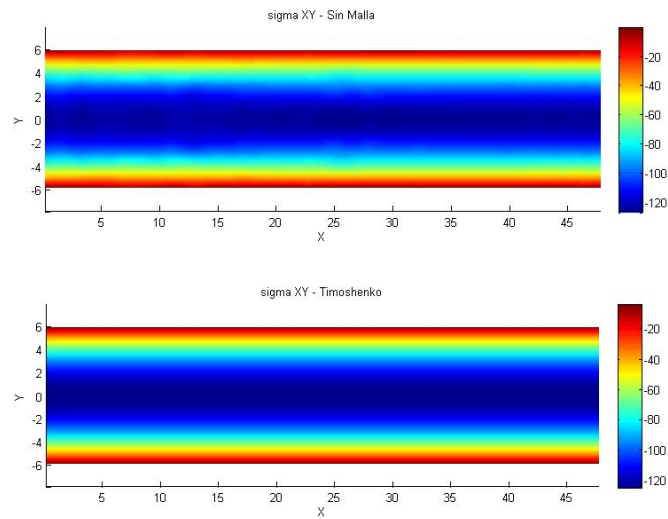
**Figura 4.4:** Comparación de la distribución de esfuerzos longitudinales en la viga

## 4.2. Lámina con Agujero Central

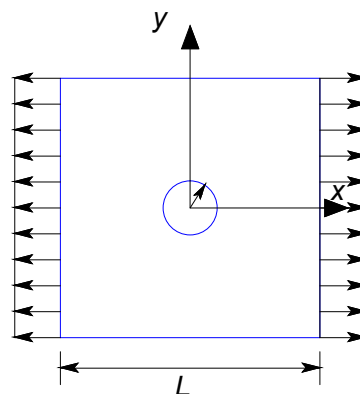
Otro ejemplo que sirve para ilustrar el comportamiento del método con una malla irregular es el de una placa de 10 pulgadas por 10 pulgadas con un agujero central circular de 1 pulgada, el mismo se puede ver en la figura (4.6). Las condiciones de borde son esenciales en  $x = 0$  donde  $(u_y = 0)$  y en  $y = 0$  donde  $u_x = 0$ , así mismo las condiciones naturales se encuentran en el extremo derecho, es decir el vector normal es  $n = (1, 0)$ , los esfuerzos en dicho extremo corresponden a la siguiente fórmula:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (4.7)$$

Los resultados obtenidos muestran valores de esfuerzos con buena precisión. Los mismos se indican más adelante de manera gráfica. Los nodos se distribuyen de acuerdo a la figura (4.7).



**Figura 4.5:** Comparación de la distribución de esfuerzos de corte en la viga



**Figura 4.6:** Lámina con agujero central

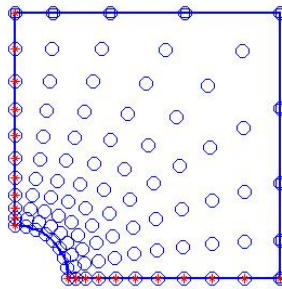
Para poder generar la matriz de cada nodo se debe integrar sobre particiones de la lámina, las que se indican en la figura (4.8), las funciones de soporte se construyen con ayuda de un spline cúbico, estas funciones tiene un dominio radial, que debe ser pequeño cerca al agujero y grande en los extremos, los puntos de Gauss en las particiones están distribuidos en nubes de  $4 \times 4$ .

En cada región se definen las coordenadas de los puntos de Gauss con una transformación isoparamétrica, esto se muestra en la figura (4.9).

Las distribución de los esfuerzos obtenidos en la dirección  $x$  así como en los esfuerzos de corte se muestran en las figuras (4.10) y (4.11), cabe resaltar que se obtienen esfuerzos muy próximos a los calculados con las fórmulas de [22].

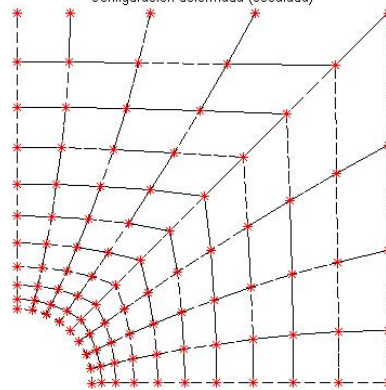


Distribución de Nodos



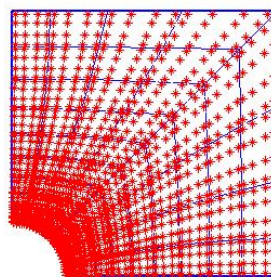
**Figura 4.7:** Distribución de nodos

Configuración deformada (escalada)

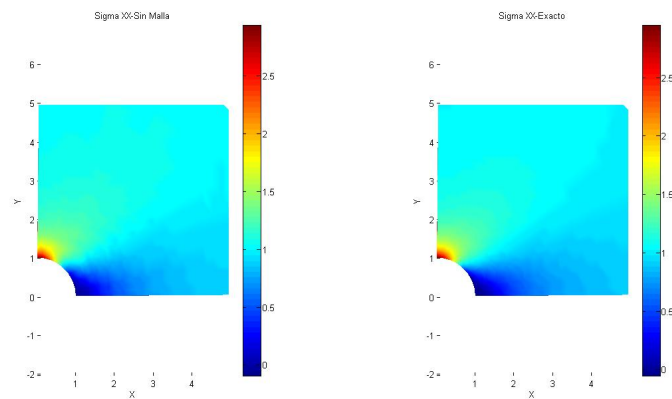


**Figura 4.8:** Regiones de integración

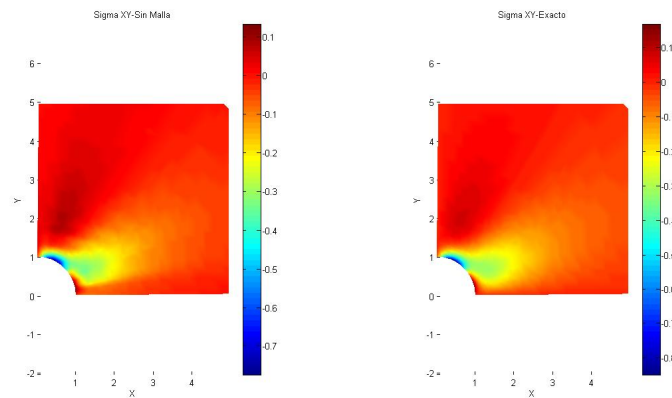
Puntos de Gauss



**Figura 4.9:** Dieciséis puntos de Gauss por cada región



**Figura 4.10:** Esfuerzos en la dirección  $x$  en lámina con agujero central

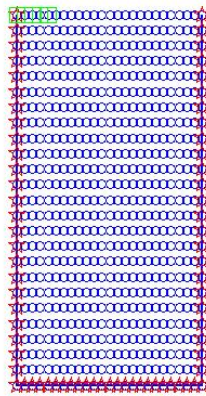


**Figura 4.11:** Esfuerzos de corte en lámina con agujero central

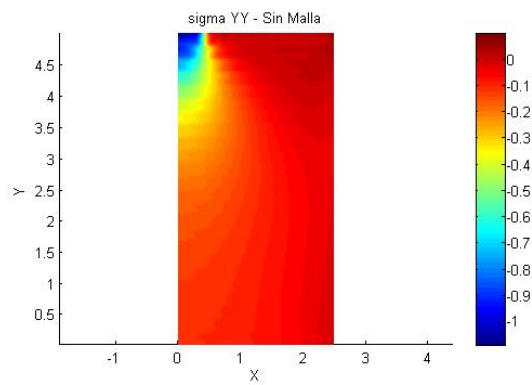
### 4.3. Esfuerzo Vertical Causado por una Carga de Franja

Para determinar el esfuerzo vertical en un punto producido por una carga lineal, se emplean las recomendaciones de [5], de esta manera se utiliza una relación entre ancho y profundidad de  $1/2$  con un ancho de 2.5 unidades, un esfuerzo unitario. Los nodos y los puntos de la frontera se indican en la figura (4.12), como resultado de esto se obtiene el bulbo presiones verticales y de corte indicados en las figuras (4.13) y (4.14). Estos resultados son muy aproximados a los obtenidos en la página 131 de [5].

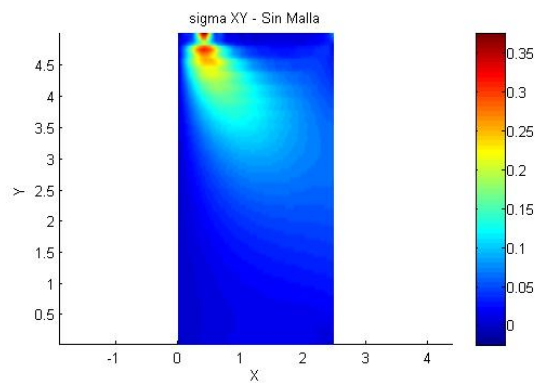
Un ejemplo para múltiples capas, es desarrollado considerando en todas ellas un módulo de Young equivalente, de acuerdo a [19], dicho ejemplo actualmente viene siendo desarrollado por el tesista Rogers Córdova, algunos resultados preliminares se muestran a continuación.



**Figura 4.12:** Distribución de nodos y condiciones de frontera



**Figura 4.13:** Esfuerzos en la dirección vertical



**Figura 4.14:** Esfuerzos de corte

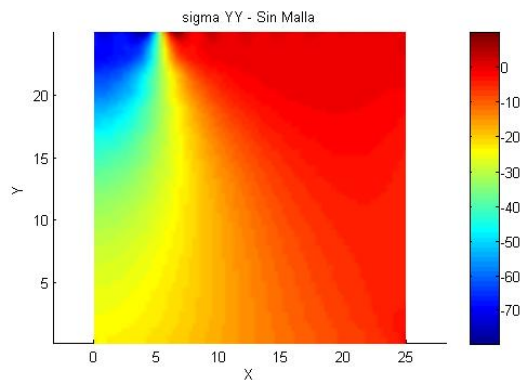
$$E_{equivalente} = E_1 \left[ \frac{h_1 + h_2 \sqrt[3]{\frac{E_2}{E_1}} + \dots + h_n \sqrt[3]{\frac{E_n}{E_1}}}{\sum_{i=1}^n h_i} \right]^3 \quad (4.8)$$

Considerando los siguientes datos, una carga uniformemente distribuida de 70 *psi* en una longitud de 12,8 *pulgadas*, es aplicada en la superficie del suelo de 25 *pulgadas* de profundidad, los módulos de Young de cada estrato y las razones de Poisson de los mismos son indicados en la tabla 4.4.

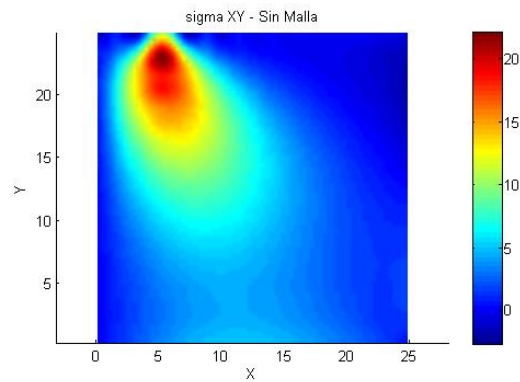
$i$	$E$ ( $psi$ )	$\nu$	$h_i$ ( <i>pulgadas</i> )
1	500000	0.3	4
2	29290	0.35	6
3	25520	0.35	8
4	22340	0.35	10
5	19730	0.35	12
6	17620	0.35	14
7	15930	0.35	16
8	14660	0.35	18
9	1376	0.35	20
10	4993	0.45	25

**Tabla 4.4:** Módulos de Young ( $E$ ) y razones de Poisson ( $\nu$ )

Los resultados obtenidos se indican esquemáticamente en las siguientes figuras.



**Figura 4.15:** Esfuerzos en la dirección vertical, para el problema con módulo de Young equivalente



**Figura 4.16:** Esfuerzos de corte, para el problema con módulo de Young equivalente

# 5

## Conclusiones y Recomendaciones

### 5.1. Conclusiones

Por lo expuesto en el capítulo dos, se concluye que una buena alternativa para representar los movimientos de cuerpo rígido en un modelo matemático, la constituye el núcleo de la transformación lineal del espacio de deformaciones.

En el caso de la ecuación lineal de la Elastostática, se puede hacer la búsqueda de soluciones de espacios funcionales que tengan segunda derivada continua, con espacios que tengan primera derivada continua, siempre y cuando la forma débil sea coercitiva. Esto implica que la solución del problema de la Elastostática se puede resolver con funciones cuya primera derivada sea cuadrado integrable.

A partir del ítem 2.3.1 y por la formulación expuesta en el ítem 2.6.1, se puede afirmar que el problema débil de elasticidad lineal con condiciones mixtas es una funcional coercitiva, por lo tanto su solución débil converge a su solución fuerte.

De acuerdo al desarrollo del ítem 2.6.2, se observa que la ecuación diferencial de la Elastostática en el espacio de desplazamientos tiene su análoga en el espacio de distribuciones y al ser esta última una funcional, da como respuestas para nuestro caso formas bilineales, que en el caso de la Elastostática representan las componentes de la representación matricial del tensor de esfuerzos o de deformaciones.

Se concluye, a partir del capítulo tres, que la separación del espacio y tiempo en ecuaciones elásticas lineales es un problema sin mallas estructurado.

Las funciones monotónicas de soporte compacto que emplea la aproximación MLS, resultan más estables que los métodos radiales como PIM ó RPIM, ya que son de mayor consistencia en cuanto a sus derivadas de orden superior.

Si se tiene una nube de puntos densa y una función radial o rectangular de soporte compacto adecuado, se puede observar que los datos numéricos se concentran alrededor de la diagonal principal de la matriz de rigidez.

Los Métodos Libres de Malla consideran toda la vecindad de puntos de Gauss que se encuentran dentro de su dominio de soporte, a diferencia del Método de Elementos Finitos que generalmente considera los puntos de Gauss de cada elemento.

Los Métodos sin Malla ponderan la proximidad de un punto cercano, es decir las diferencias son directamente proporcionales a sus distancias.

En las formulaciones de los Métodos sin Malla, primero se ensambla la matriz de rigidez de cada nodo y luego a partir de éstas se ensambla la matriz de rigidez global.

En los ejemplos presentados en el capítulo cuatro, la diferencia de los valores calculados con las fórmulas de Timoshenko y el método EFGM se encuentran dentro del uno por ciento en lo referente a desplazamientos, se nota una muy buena aproximación en cuanto a esfuerzos y deformaciones.

## 5.2. Recomendaciones

Los Métodos sin Malla requieren de una gran nube de puntos para tener buenos resultados, lo que demanda mucho esfuerzo computacional, por lo que se recomienda un mayor estudio de métodos con puntos enriquecidos.

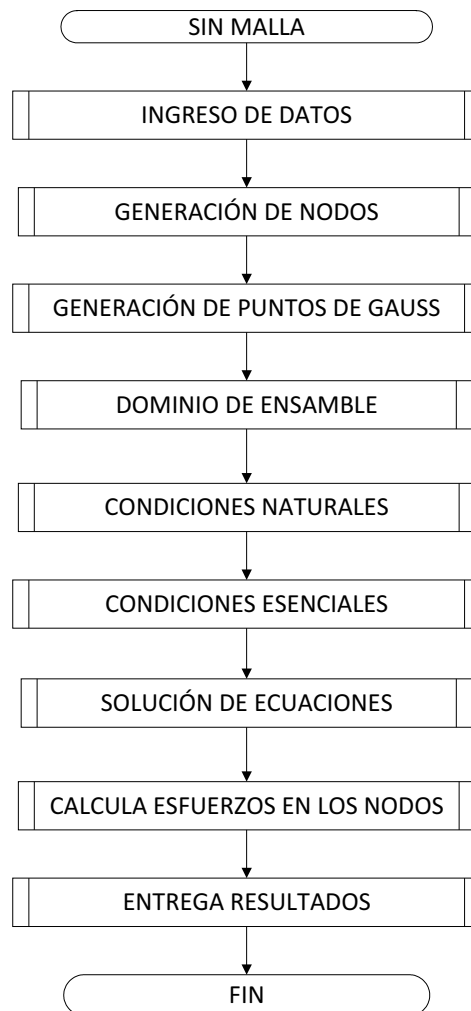
La integración con puntos de Gauss, implica el empleo de celdas de fondo, consecuentemente para integrar se necesita una malla de todas maneras, por lo que se recomienda el estudio con métodos de integración racional como los propuestos para el Método de los Elementos Naturales (NEM).

La imposición de las condiciones de frontera con multiplicadores de Lagrange resulta muy trabajosa y más aún si se trata de problemas en tres dimensiones, por lo que se recomienda la implementación del método de penalización para problemas con condiciones de frontera esenciales, ya que es de fácil programación, más no se conoce actualmente su comportamiento en problemas relativos a técnicas sin malla.

Se recomienda estudiar el comportamiento de la matriz de rigidez enriquecida, con funciones discontinuas, para implementar no linealidad en Métodos sin Malla.

# Apéndice

## Algoritmo de Método sin Malla (MM)



**Figura 5.1:** Diagrama de flujo de Algoritmo MM



# Bibliografía

- [1] Babuska I. y Melenk J. “The partition of unity finite element method”. Technical report BN-1185, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, 1995.
- [2] Bachman G. y Narici L. “Análisis Funcional”. Editorial Tecnos, Madrid, 1981.
- [3] Belytschko T., Gu L. y Lu Y. “Fracture and crack growth by element free Galerkin method”. Modelling and Simulation in Material Science and Engineering 2, 519-534, 1994.
- [4] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. y Krysl P. “Meshless Methods: An Overview and Recent Developments”. Northwestern University, 1996.
- [5] Braja M. “Fundamentos de Ingeniería Geotécnica”. Thomson Editores S.A., México, 2001.
- [6] Brenner S. C. y Scott L. R., “The Mathematical Theory of Finite Element Methods”. Springer-Verlag New York Inc., 1994.
- [7] Brézis H. “Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones”. Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [8] Duarte C. y Oden J. “H-p clouds-an h-p meshless method”. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1-34, 1996.
- [9] Fasshauer G. E. “Meshfree Approximation Methods with Matlab”. Interdisciplinary Mathematical Sciences, Vol 6, 2008.
- [10] Lancaster P. y Salkauskas K. “Surface generated by moving least square method”. Mathematics of Computation 37, 141-158, 1981.
- [11] Lima E. L. “Cálculo Tensorial”. Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, 1965.
- [12] Linero D. L. y Garzón D. A. “Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos”. Vol 1 Temas Básicos, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2010.

- [13] Liu W.K., Chen Y. y Uras R.A. “Enrichment of the finite element method whit reproducing kernel particle methods”. Current Topics in Computational Mechanics, Volume 305, 253-258, ASME PPV, In J. J. Cory and J. L. Gordon Editions, 1995.
- [14] Liu W.K. “Computational Implement of Mesh Free Methods”. Springer, 2001.
- [15] Nayroles B., Touzot G. y Villon P. “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements”. Computational Mechanics 10, 307-318, 1992.
- [16] Nieto J. “Introducción a los Espacios de Hilbert”. Organización de los Estados Americanos, Washinton D. C., 1978.
- [17] Pflaumann E. y Unger H. “Análisis Funcional I”. Editorial Alhambra S. A., Madrid, 1974.
- [18] Rektorys K. “Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering”. D. Reidel Publisher Company, Inc. Praga, Chekoslovaquia, 1980.
- [19] Reyes L. “Diseño Racional de Pavimentos”. Centro Editorial Javeriano, Bogotá, 2003.
- [20] Shepard D. “A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced point”. ACM National Conference, 517-524, 1968.
- [21] Sukumar N. “The Natural Element Method in Solid Mechanics”. Tesis Doctoral Northwestern University Evanston, Illinois, 1998.
- [22] Timoshenko S. P. y Goodier J. N. “Theory of Elasticity”. Editorial McGraw Hill, New York, 1970.
- [23] Toro G. J. “Problemas variacionales y elementos finitos en ingeniería mecánica”. Editorial Uniandes, Bogotá, 2007.
- [24] Zienkiewicz O. y Taylor R. “El Método de los Elementos Finitos”. Volumen 2, Editorial McGraw Hill Interamericana de España S.A., 1994.