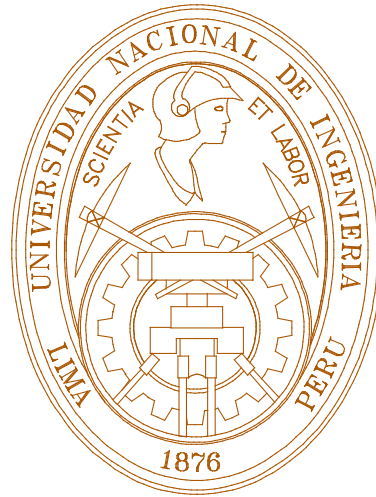


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**  
**SECCIÓN DE POSGRADO**



**ELEMENTOS HÍBRIDOS DE TREFFTZ**  
**PARA EL ANÁLISIS DE LOSAS**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**CON MENCIÓN EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

**WILHELM JUVENAL BENAVIDES MANCILLA**

LIMA - PERÚ  
2011

**ELEMENTOS HÍBRIDOS DE TREFFTZ  
PARA EL ANÁLISIS DE LOSAS**

**WILHELM JUVENAL BENAVIDES MANCILLA**

Presentado a la Sección de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil  
en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS  
CON MENCIÓN EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

de la

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

Febrero del 2011

© 2011, Wilhelm J. Benavides Mancilla. Todos los derechos reservados.  
El autor autoriza a la UNI a reproducir la tesis en su totalidad o en parte,  
con fines estrictamente académicos.

<b>Autor:</b>	Bach. Wilhelm J. Benavides Mancilla Facultad de Ingeniería Civil
<b>Asesor:</b>	Dr. Ing. Hugo Scaletti Farina Profesor de Posgrado
<b>Aceptado por:</b>	CE. Ing. Francisco Coronado del Aguila Jefe de la Sección de Posgrado

*A Dios.*

*A mis padres:  
Yolanda y Juvenal.*

*A mis hermanos:  
Ruth y Raúl.*

*A la  
Sección de Posgrado  
de la  
Facultad de Ingeniería Civil.*

## *AGRADECIMIENTOS*

*Debo aquí expresar mi agradecimiento al Dr. Ing. Hugo Scaletti Farina por su asesoramiento, comprensión y apoyo continuo en la realización de la presente tesis, y por haberme permitido conocer a un maestro universitario generoso que me brindó parte de su tiempo y de sus conocimientos a lo largo de muchas reuniones.*

*De igual modo, agradezco al CE. Ing. Francisco Coronado del Aguila y a todos quienes fueron mis profesores, en especial a los del área de Estructuras, quienes con sus enseñanzas y oportunos consejos acrecentaron mi pasión por la Ingeniería Estructural.*

*A mi familia, por su paciencia y apoyo constante en la elaboración de este trabajo.*

*Finalmente, quiero expresar mi gratitud a mis amigos Juan Carlos Nakamatzu y Leonardo Flores por sus persistentes y muy valiosos alientos.*

# ÍNDICE

	<i>Página</i>
<b>Resumen ejecutivo</b> .....	<b>xv</b>
<b>Executive summary</b> .....	<b>xvii</b>
<b>Lista de símbolos</b> .....	<b>xix</b>
<b>Lista de tablas</b> .....	<b>xxv</b>
<b>Lista de figuras</b> .....	<b>xxvii</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
Importancia del tema .....	1
Reseña histórica .....	2
Objetivos de este trabajo .....	4
Organización de la tesis .....	5
<b>Capítulo 1 TEORÍA CLÁSICA DE LOSAS DELGADAS</b> .....	<b>7</b>
1.1 Introducción .....	7
1.2 Definiciones básicas y consideraciones .....	8
1.3 Hipótesis fundamentales .....	10
1.4 Equilibrio de fuerzas .....	12
1.5 Relaciones deformación-desplazamiento (compatibilidad) .....	14
1.6 Relaciones esfuerzo-deformación (constitutivas) .....	15
1.7 Ecuación diferencial de la losa en flexión transversal (ecuación de Lagrange) .....	17
1.8 Condiciones de borde .....	23
<b>Capítulo 2 ALGUNOS TÓPICOS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y TEMAS AFINES</b> .....	<b>29</b>
2.1 Introducción .....	29
2.2 Los procesos de elementos finitos y como se desarrollaron .....	29
2.3 Métodos de parámetros indeterminados .....	31
2.3.1 Métodos de residuos ponderados .....	33
2.3.2 El método de Rayleigh-Ritz .....	38
2.3.3 Métodos de elementos finitos .....	40
2.4 Convergencia en un modelo de elementos finitos .....	42
2.4.1 Consistencia .....	43
2.4.2 Continuidad .....	44
2.5 Elemento clásico de losas (Melosh, 1962) .....	46

<b>Capítulo 3</b>	<b>ALTERNATIVAS PARA LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LOSAS .....</b>	<b>51</b>
3.1	Introducción .....	51
3.2	Principios variacionales y su relación con las ecuaciones diferenciales .....	52
3.2.1	Principio de mínima energía potencial .....	55
3.2.2	El funcional de Reissner .....	62
3.2.3	El funcional de energía complementaria .....	68
3.2.4	El funcional de energía complementaria modificada .....	71
3.3	Modelos de desplazamiento. Integración reducida .....	78
3.4	Modelos Discretos de Kirchhoff .....	83
3.4.1	Descripción del elemento DKQ cuadrilátero de losa delgada .	86
3.5	Modelos Mixtos .....	91
3.5.1	Elemento isoparamétrico mixto para el análisis de losas isotrópicas .....	93
3.6	Modelos Híbridos .....	101
3.6.1	Modelos Híbridos de Esfuerzos .....	102
3.6.1.1	Elemento rectangular para flexión de losas basado en aproximaciones para los esfuerzos .....	103
3.6.2	Modelos Híbridos de Trefftz .....	110
3.6.2.1	Formulación general del elemento finito híbrido de Trefftz .....	111
3.6.2.2	Aplicación a flexión de losas .....	118
<b>Capítulo 4</b>	<b>FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO HÍBRIDO DE TREFFTZ PARA EL ANÁLISIS DE LOSAS .....</b>	<b>123</b>
4.1	Introducción .....	123
4.2	Algunas consideraciones de orden práctico .....	124
4.2.1	Sistema coordenado .....	124
4.2.2	Convención de signos para desplazamientos, grados de libertad .....	124
4.2.3	Convención de signos para momentos y cortes .....	124
4.2.4	Definición de los desplazamientos y tracciones de borde generalizados .....	125
4.3	Aproximaciones para los campos de desplazamientos y algunas operaciones asociadas .....	127
4.3.1	Aproximación para $w$ .....	127
4.3.1.1	Funciones de aproximación $\phi_i$ .....	127
4.3.1.2	Funciones de aproximación $\overset{\circ}{w}$ .....	129
4.3.2	Aproximación para $\tilde{\mathbf{v}}$ .....	132
4.4	Evaluación de los vectores de borde generalizados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{T}$ en la aproximación para el campo de desplazamiento $w$ considerado .....	134
4.4.1	Matriz $\Phi_e$ y su correspondiente submatriz típica $\Phi_{eT}$ .....	134
4.4.2	Matriz $\theta_e$ y su correspondiente submatriz típica $\theta_{eT}$ para cada borde .....	135

4.4.3	Construcción de los vectores $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e$ y $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$ .....	137
4.5	Cálculo de la matriz de rigidez $\mathbf{K}_e$ y del término $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_e$ .....	139
4.6	Comportamiento del elemento cuando es sometido a movimientos de cuerpo rígido .....	141
4.7	Frecuencias naturales y modos de vibración de un elemento aislado ..	143
<b>Capítulo 5</b>	<b>EVALUACIÓN DEL ELEMENTO DE FLEXIÓN DE LOSAS HTR3 Y APLICACIONES</b> .....	<b>145</b>
5.1	Introducción .....	145
5.2	Número de funciones de aproximación $\phi_i$ y número de puntos de integración numérica .....	146
5.3	Algunos análisis simples para probar la exactitud del elemento .....	159
5.3.1	Análisis estándar de losas cuadradas .....	159
5.3.1.1	Análisis de desplazamientos y esfuerzos en el centro de la losa y en la mitad del lado .....	160
5.3.1.2	Análisis de desplazamientos y esfuerzos en la línea central de la losa .....	169
5.3.2	Análisis de losas cuadradas bajo cargas concentradas distribuidas sobre áreas circulares pequeñas .....	174
5.3.2.1	Análisis de desplazamientos y esfuerzos cuando el punto de aplicación corresponde al de un nudo .....	175
5.3.2.2	Análisis de desplazamientos y esfuerzos cuando el punto de aplicación no corresponde al de un nudo ....	184
5.3.3	Análisis de una losa rectangular con dos bordes opuestos simplemente apoyados, uno empotrados y el cuarto libre .....	191
5.4	Aplicaciones .....	196
	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b> .....	<b>207</b>
	<b>REFERENCIAS</b> .....	<b>211</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>TEORÍA DE LOSAS GRUESAS DE REISSNER-MINDLIN</b> .....	<b>215</b>
A.1	Introducción .....	215
A.2	Ecuaciones básicas .....	215
<b>Apéndice B</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN DE LA FORMULACIÓN. LOS PROGRAMAS DE CÓMPUTO FLt Y FLt-PLOT</b> .....	<b>221</b>
B.1	Introducción .....	221
B.2	El programa FLt .....	221
B.3	El programa FLt-PLOT .....	223



## **RESUMEN EJECUTIVO**

Esta tesis trata sobre el uso de los elementos finitos, y en particular de los llamados Elementos Híbridos de Trefftz, en la solución de problemas de análisis estático lineal y elástico de losas a flexión sometidas a cargas transversales como fuerzas concentradas aplicadas en los nudos de la malla (como normalmente se hace en la mayoría de formulaciones de elementos finitos) así como en puntos de ubicación arbitraria en la losa, cargas uniformemente distribuidas o cualquier combinación de las anteriores; asimismo, sujetas a condiciones de borde arbitrarias que típicamente se encontrarían en una formulación de desplazamientos tradicional.

Para el estudio de tal tipo de elemento, se ha desarrollado un elemento finito rectangular Híbrido de Trefftz de 4 nudos, cuyas expresiones mostradas a lo largo de la tesis terminan luego formando parte del código de un programa de cómputo, hecho en el lenguaje de programación Fortran, para realizar el análisis de las losas en mención con distintas condiciones de carga y de borde. Además, como soporte gráfico de los valores numéricos obtenidos con el programa de análisis, se desarrolló un post procesador, que permite que los resultados numéricos calculados por el primer programa sean luego mostrados gráficamente, ya sea en forma de líneas de contorno de igual valor o en forma de bandas de contorno de igual ancho de valores.

Se presentan resultados obtenidos con el elemento finito materia de esta tesis, los cuales son comparados con resultados de otros elementos desarrollados con algunas de las formulaciones más conocidas de elementos finitos y, donde fue posible, con soluciones teóricamente exactas extraídas de la literatura, para de ese modo analizar la convergencia y especialmente la exactitud del elemento desarrollado.

Por último, se desarrollan algunos ejemplos simples así como el de un caso un poco más ingenieril que se presenta en el diseño estructural referido al análisis de un puente losa simplemente apoyado sujeto a un tren de cargas móviles, los cuales permiten mostrar algunas de las ventajas de un modelo de elementos finitos híbrido de Trefftz para losas.

## **EXECUTIVE SUMMARY**

This work deals with finite elements, and more specifically with Hybrid Trefftz Elements, for the linear elastic static analysis of plates, either with concentrated nodal loads (as is usual in most finite element formulations) or at arbitrary points on the plate, uniformly distributed loads, or any combination of them, with boundary conditions as usually encountered in traditional displacement formulations.

For the study of such class of elements, a hybrid Trefftz rectangular finite element with 4 nodes was developed. The expressions detailed at the end of this document were implemented in a Fortran computer program for the analysis of plates with any loading and boundary conditions. Furthermore, a graphical post processor allows to show the numerical results obtained with the main program, either in the form of contour lines of same value or as contour bands of equal ranges of values.

Results obtained with the finite element developed in this work are presented and compared with those computed using some of the most common finite element formulations and, when it was possible, with theoretically exact solutions found in the literature, with the purpose of studying the convergence and accuracy of the proposed element.

Finally, some simple examples are presented, including the analysis of a simple simply-supported slab bridge under moving loads, which show some of the advantages of hybrid Trefftz finite element models for plates.

# LISTA DE SÍMBOLOS

Se muestra a continuación una lista de los símbolos principales empleados en este trabajo, aún cuando todos se definen en la tesis a medida que aparecen. En algunas ocasiones se utilizan otros adicionales para operaciones secundarias y puede que se repita el mismo símbolo.

Los símbolos se listan poco más o menos de acuerdo al orden de su aparición a través de los capítulos. Las matrices y los vectores se denotan por letras negritas, por ejemplo  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}$ ;  $\mathbf{G}^T$  indica la transpuesta de  $\mathbf{G}$ .

## CAPÍTULO 1

$x, y, z$	= coordenadas cartesianas.
$u, v, w$	= componentes del vector de desplazamientos en las direcciones $x, y$ y $z$ .
$t$	= espesor de la losa.
$\sigma_z$	= esfuerzo normal en la dirección perpendicular al plano de la losa.
$p$	= carga uniformemente distribuida sobre la losa (fuerza de superficie).
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	= deformaciones de corte transversales.
$\epsilon_z$	= deformación normal en la dirección perpendicular al plano de la losa.
$w$	= desplazamiento transversal (deflexión) del plano medio de la losa.
$Q_x, Q_y$	= fuerzas cortantes transversales por unidad de ancho.
$M_x, M_y, M_{xy}$	= momentos flectores y de torsión por unidad de ancho.
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	= deformaciones unitarias normales.
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	= deformaciones unitarias tangenciales.
$u_0, v_0$	= desplazamientos del plano medio de la losa.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	= esfuerzos normales.
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	= esfuerzos de corte.
$E$	= módulo de elasticidad longitudinal.
$G$	= módulo de elasticidad transversal o de corte.
$\nu$	= coeficiente de Poisson.
$\kappa$	= vector de curvaturas (componentes $\kappa_x, \kappa_y$ y $\kappa_{xy}$ ).
$D$	= rigidez flexionante (o flexional) de la losa.
$\nabla^2$	= operador de Laplace en dos dimensiones = $[\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2]$ .
$Q_x^*$	= fuerza cortante efectiva por unidad de longitud.
$R$	= resultante de fuerzas concentradas en la esquina de una losa rectangular.

## CAPÍTULO 2

$L(u), B_i(u)$	= operadores que definen las ecuaciones diferenciales del problema y las condiciones de borde.
$\Omega$	= región estudiada (dominio).
$S_i$	= borde o contorno de $\Omega$ .
$u$	= función incógnita que es solución del problema diferencial.
$\hat{u}$	= aproximación de la función incógnita $u$ .
$N_j$ ( $j = 1, m$ )	= funciones de aproximación (o de forma) conocidas.
$\alpha_j$ ( $j = 1, m$ )	= parámetros o coeficientes indeterminados.
$m$	= número de términos de la aproximación; orden de derivación que tiene la función incógnita en la formulación.
$\mathbf{N}$	= función de aproximación (vector fila).

$\alpha$	=	parámetros o coeficientes indeterminados (vector columna).
$R$	=	error o residuo.
$w_i$	=	funciones ponderadas o funciones de peso.
$q$	=	carga uniformemente distribuida sobre una viga.
$L$	=	longitud de una viga.
$EI$	=	rigidez a la flexión de una viga.
$v$	=	función incógnita (desplazamiento transversal en una viga).
$\hat{v}$	=	aproximación de la función incógnita $v$ .
$\Delta$	=	deflexión máxima en una viga simplemente apoyada cargada uniformemente.
$\Delta_{exacta}$	=	solución exacta para $\Delta$ .
$\Pi$	=	un funcional o principio variacional estacionario.
$\Pi_p$	=	funcional de energía potencial.
$u_j$ ( $j = 1, m$ )	=	valores de la incógnita en los $m$ nudos del elemento.
$\mathbf{u}$	=	vector columna que agrupa los valores de la incógnita en los $m$ nudos del elemento.
$C_0$	=	tipo de continuidad en el que solamente la función de aproximación es continua.
$C_1$	=	tipo de continuidad en el que solamente la función de aproximación y su primera derivada son continuas.
$2a, 2b$	=	longitudes de los lados del elemento rectangular para losas de Melosh.
$w_n, (\theta_x)_n, (\theta_y)_n$	=	GDL en cada nudo $n$ del elemento de Melosh: desplazamiento transversal, giro alrededor del eje $x$ , giro alrededor del eje $y$ .

### CAPÍTULO 3

$u$	=	función desconocida que hace estacionario a un cierto funcional.
$F$	=	función conocida de $x, u$ y de eventualmente sus derivadas.
$\eta$	=	pequeña variación de la función $u$ .
$\delta\Pi$	=	primera variación del funcional.
$\delta^2\Pi$	=	segunda variación del funcional.
$U$	=	energía de deformación.
$V$	=	potencial de las cargas aplicadas.
$\sigma_{ij}$	=	componentes de esfuerzo.
$\varepsilon_{ij}$	=	componentes de deformación.
$V$	=	región o medio estudiado (volumen).
$S$	=	borde o contorno de $V$ .
$S_\sigma$	=	parte del borde donde las tracciones están prescritas.
$S_u$	=	parte del borde donde los desplazamientos son conocidos.
$C_{ijkl}$	=	constantes elásticas que relacionan esfuerzos con deformaciones.
$u_i$	=	componentes de desplazamiento.
$u_{i,j}$	=	derivada de la componente de desplazamiento $u_i$ con relación a $x_j$ .
$\bar{b}_i$	=	componentes de las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen.
$\bar{t}_i$	=	componentes de las tracciones de borde prescritas en el borde $S_\sigma$ .
$x_i$	=	coordenadas.
$G$	=	función conocida de $x_i, u_i$ y de eventualmente sus derivadas.
$n_j$	=	componentes del vector unitario normal al borde y hacia afuera.
$\mathbf{u}$	=	vector de desplazamientos (componentes $u, v$ y $w$ ) en el interior del elemento; vector de desplazamientos solamente en los bordes entre elementos; vector de desplazamientos (componentes $w, \theta_y$ , y $\theta_x$ ) a lo largo de cada borde; vector de desplazamientos generalizados.
$\mathbf{N}$	=	función de interpolación de desplazamientos; función de aproximación para el desplazamiento transversal $w$ ; función de aproximación para la función de esfuerzos $\phi$ ; función de interpolación para los desplazamientos que corresponden a los bordes.
$\mathbf{q}$	=	vector de desplazamientos de los nudos del elemento; vector de desplazamientos transversales de los nudos del elemento.
$\varepsilon$	=	vector de deformaciones unitarias (componentes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ); vector de deformaciones unitarias en el plano (componentes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ).

---

$\partial \mathbf{u}$	= denota ciertas derivadas apropiadas de las $\mathbf{u}$ .
$\mathbf{B}$	= matriz asociada con ciertas derivadas apropiadas de la función de interpolación de desplazamientos $\mathbf{N}$ ; matriz que se obtiene de derivar apropiadamente la función de interpolación del desplazamiento transversal $\mathbf{N}_w$ .
$\boldsymbol{\sigma}$	= vector de esfuerzos (componentes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ); vector de esfuerzos en el plano (componentes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ).
$\mathbf{D}$	= matriz de constantes elásticas.
$\bar{\mathbf{b}}$	= fuerzas de cuerpo por unidad de volumen (vector columna).
$\bar{\mathbf{t}}$	= tracciones de borde prescritas en el borde $S_\sigma$ (vector columna).
$\mathbf{K}$	= matriz de rigidez.
$\mathbf{f}$	= vector de fuerzas nodales.
$\nabla$	= operador gradiente en dos dimensiones = $[\partial/\partial x, \partial/\partial y]^T$ .
$\mathbf{L}$	= operador matricial diferencial lineal ( $\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{L} \nabla w$ , $\mathbf{L} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}}$ ); función de aproximación de las tracciones de borde ( $\mathbf{t} = \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}$ , $\mathbf{t} = \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi}$ ); función de aproximación para los momentos en el borde ( $\mathbf{M}_b = \mathbf{L} \mathbf{m}$ ).
$A$	= región estudiada (área).
$\Pi_R$	= funcional de Reissner.
$S_{ijkl}$	= cantidades que relacionan las componentes de deformación con las correspondientes componentes de esfuerzo.
$t_i$	= componentes de tracciones de borde.
$\bar{u}_i$	= valores conocidos de los desplazamientos en el borde $S_u$ .
$\mathbf{S}$	= matriz que relaciona las medidas de deformación con las correspondientes medidas de esfuerzo.
$\mathbf{t}$	= vector columna que agrupa a las componentes de tracciones de borde.
$\bar{\mathbf{u}}$	= vector que contiene los valores conocidos de los desplazamientos en el borde $S_u$ .
$\mathbf{P}$	= función de aproximación de los esfuerzos.
$\boldsymbol{\beta}$	= vector de parámetros nodales asociados a los esfuerzos (componentes $\beta_1, \beta_2, \dots$ ).
$-\mathbf{H}, \mathbf{G}, \mathbf{G}^T$	= submatrices componentes de la matriz de coeficientes en una formulación mixta.
$\Pi_C$	= funcional de energía complementaria.
$\phi$	= función de esfuerzos de Airy.
$\partial \phi$	= derivadas apropiadas de $\phi$ .
$\boldsymbol{\Phi}$	= vector de parámetros nodales asociados a $\phi$ .
$\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Delta}$	= matriz de coeficientes y vector de desplazamientos prescritos en una formulación basada en el funcional de energía complementaria.
$t_i^{(a)}, t_i^{(b)}$	= componentes de tracción de borde sobre los respectivos lados de un borde común a dos elementos adyacentes $a$ y $b$ .
$\lambda_i$	= multiplicadores de Lagrange.
$\Pi_{mc}$	= funcional de energía complementaria modificada.
Subíndice $e$	= indica elemento.
$V_e$	= volumen de un elemento.
$S_{ue}$	= borde de $V_e$ donde los desplazamientos están prescritos.
$S_e$	= borde interelemento de $V_e$ .
$S_{\sigma e}$	= borde de $V_e$ donde las tracciones están prescritas.
$\partial V_e = S_e + S_{\sigma e} + S_{ue}$	= indica todo el borde de $V_e$ .
Superíndice $(e)$	= denota elemento y en algunos casos como en $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$ enfatiza la independencia para cada elemento.
$\mathbf{H}^{(e)}, \mathbf{G}^{(e)}$	= matrices que intervienen en el cálculo de la matriz de rigidez del elemento en un modelo híbrido de esfuerzos.
$\mathbf{K}^{(e)}$	= matriz de rigidez del elemento.
$\mathbf{f}^{(e)}$	= vector de fuerzas nodales del elemento.
$\boldsymbol{\theta}$	= vector de giros (componentes de rotación $\theta_x, \theta_y$ ).
$\beta$	= constante que corrige la distribución del esfuerzo cortante sobre el espesor.
$\nabla^T$	= operador divergencia en dos dimensiones = $[\partial/\partial x, \partial/\partial y]$ .
$\mathbf{N}_w$	= función de aproximación (o de forma) para el desplazamiento transversal.
$\bar{\mathbf{w}}$	= vector de desplazamientos transversales en los nudos del elemento.
$\mathbf{N}_\theta$	= función de aproximación (o de forma) para los giros.

---

---

$\bar{\theta}$	=	vector de giros en los nudos del elemento.
$\mathbf{f}_w, \mathbf{f}_\theta$	=	componentes del vector de fuerzas nodales $\mathbf{f}$ en un modelo de desplazamientos con integración reducida.
$\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_{sb}, \mathbf{K}_{bs}, \mathbf{K}_b$	=	submatrices componentes de la matriz de rigidez $\mathbf{K}$ en un modelo de desplazamientos con integración reducida.
$\bar{\mathbf{M}}, \bar{Q}_n$	=	momentos y cortante prescritos en el borde $S_\sigma$ .
L, QS, QL, QH	=	elemento cuadrilátero bilineal, cuadrático Serendípito, cuadrático Lagrangiano y Heterosis.
R	=	integración reducida.
N	=	integración normal.
$x_\alpha$ y $x_\beta$	=	coordenadas de dos puntos de una viga en donde se aplican las condiciones de Kirchhoff (deformación transversal nula).
$U_b^e$	=	energía de deformación del elemento debida a flexión.
$A^e$	=	área del elemento.
$N_i$ ( $i = 1,8$ )	=	funciones de interpolación correspondientes a las de un elemento cuadrilateral Serendípito de segundo orden.
$\theta_{x_i}, \theta_{y_i}$	=	variables de giro correspondientes al nudo $i$ de un elemento.
$w_{,x_i}$	=	derivada del desplazamiento transversal $w$ con respecto a $x$ en el nudo $i$ .
$s$	=	coordenada a lo largo del borde del elemento.
$w_{,s_k}$	=	derivada del desplazamiento transversal $w$ con respecto a $s$ en el nudo $k$ .
$l_{ij}$	=	longitud del lado $ij$ .
$\theta_{n_k}, \theta_{s_k}$	=	giros normal y tangencial a un borde en el nudo $k$ .
$\mathbf{U}_n$	=	vector columna que contiene las 12 variables nodales finales del elemento DKQ.
$U^*$	=	energía complementaria.
$M_{ns}, M_{nn}$	=	componentes de momento en las direcciones tangencial y normal al borde.
$\theta_s, \theta_n$	=	componentes de giro en las direcciones tangencial y normal al borde.
$\bar{\theta}_n, \bar{M}_{nn}$	=	giro y momento en dirección normal al borde, prescritos en el borde $S_u, S_\sigma$ .
$Q_n$	=	corte en el borde.
$\mathbf{n}$	=	vector unitario normal a un borde y hacia afuera.
$\mathbf{s}$	=	vector unitario tangencial a un borde.
$\mathbf{M}$	=	vector de momentos (componentes $M_x, M_y, M_{xy}$ ) por unidad de ancho.
$\mathbf{Q}$	=	vector de cortes (componentes $Q_x, Q_y$ ) por unidad de ancho.
$\mathbf{S}_M$	=	matriz que relaciona las curvaturas y los momentos.
$\mathbf{S}_Q$	=	matriz que relaciona las deformaciones cortantes y los cortes.
$\boldsymbol{\gamma}$	=	vector de deformaciones de corte vertical (componentes $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ).
$\mathbf{N}_M$	=	función de interpolación para las componentes de momento.
$\mathbf{m}$	=	vector que agrupa los momentos $M_x, M_y, M_{xy}$ de cada uno de los nudos del elemento.
$\mathbf{R}$	=	matriz asociada con ciertas derivadas apropiadas de la función de interpolación de momentos $\mathbf{N}_M$ .
$\mathbf{N}_b$	=	función de aproximación para el desplazamiento transversal en el borde.
$\mathbf{M}_b$	=	vector de momentos en el borde (componentes $M_{nn}, M_{ns}$ ) por unidad de ancho.
$a, b$	=	longitudes de los lados del elemento rectangular para losas de Severn y Taylor.
$\beta_i$ ( $i = 1, 24$ )	=	parámetros nodales asociados a los esfuerzos empleados inicialmente en el elemento rectangular de Severn y Taylor.
$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$	=	funciones de interpolación para los momentos $\mathbf{M}$ y cortes $\mathbf{Q}$ respectivamente.
$A_e$	=	área de un elemento.
$\partial A_e$	=	indica todo el borde de $A_e$ .
$S = \partial\Omega$	=	borde o contorno de la región estudiada $\Omega$ .
$\bar{\mathbf{f}}$	=	vector conjugado de fuerzas de cuerpo generalizadas conocidas.
$\mathbf{v}$	=	vector de desplazamientos de borde generalizados.
$\mathbf{T}$	=	vector de tracciones de borde generalizadas.
$\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{T}}$	=	desplazamientos y tracciones de borde conocidas en $S_v$ y $S_T$ respectivamente.
$S_v, S_T$	=	porciones de $\partial\Omega$ en la cual o los desplazamientos o las tracciones están prescritas.

---

$\Omega_e$	= subregión (elemento finito).
$\mathbf{u}_e$	= solución sobre cada subregión $\Omega_e$ .
$\overset{\circ}{\mathbf{u}}_e$	= solución particular de la ecuación diferencial gobernante (función de desplazamiento dependiente de la carga).
$\phi_i$ ( $i = 1, m$ )	= soluciones homogéneas apropiadas a la ecuación diferencial gobernante.
$m$	= número de funciones de aproximación $\phi_i$ usado en un elemento híbrido de Trefftz.
$\mathbf{a}_e$	= vector de coeficientes indeterminados $a_i$ .
$\phi_e$	= matriz de funciones de aproximación $\phi_i$ .
$\tilde{\mathbf{v}}_e$	= desplazamiento interelemento independiente (función marco).
$\mathbf{N}_e$	= función de interpolación para la función marco $\tilde{\mathbf{v}}_e$ .
$\mathbf{d}_e$	= vector de desplazamientos nodales.
$\mathbf{f}_e$	= vector de fuerzas nodales equivalentes.
$\overset{\circ}{\mathbf{f}}_e$	= parte de $\mathbf{f}_e$ que representa el efecto del término particular $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_e$ .
$\mathbf{K}_e$	= matriz de rigidez para un elemento híbrido de Trefftz.
$\partial\Omega_e$	= borde o contorno de $\Omega_e$ .
$S_{Ie}$	= porción interelemento de $\partial\Omega_e$ .
$S_{Se} = S_{Sve} + S_{STe}$	= porción de $\partial\Omega_e$ en la cual $\mathbf{u}_e$ satisface <i>a priori</i> las condiciones de borde prescritas.
$S_{ve}$ y $S_{Te}$	= porciones de $\partial\Omega_e$ en la cual o los desplazamientos ( $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ ) o las tracciones de borde ( $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}$ ) están prescritas (pero no verificadas <i>a priori</i> ).
$J$	= funcional típico empleado en una formulación híbrida de Trefftz.
$\delta$	= operador de variaciones.
$\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e, \overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$	= resultados de la sustitución del término particular $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_e$ en los vectores de borde generalizados $\mathbf{v}_e$ y $\mathbf{T}_e$ respectivamente.
$\Phi_e, \theta_e$	= matrices que se obtienen al sustituir $\phi_e \mathbf{a}_e$ en los vectores de borde generalizados $\mathbf{v}_e$ y $\mathbf{T}_e$ respectivamente.
$\mathbf{H}_e, \mathbf{G}_e, \mathbf{h}_e, \mathbf{g}_e$	= matrices y vectores obtenidos para cada elemento, necesarios para el cálculo de la matriz de rigidez $\mathbf{K}_e$ y el vector $\mathbf{f}_e$ en un modelo híbrido de Trefftz.
$n, r$	= números de GDL y de los términos de movimiento de cuerpo rígido de un elemento híbrido de Trefftz.
$\overset{\circ}{w}$	= solución particular de la ecuación de Lagrange $\nabla^4 w = p/D$ (función de desplazamiento dependiente de la carga).
$\phi_i$ ( $i = 1, m$ )	= soluciones homogéneas a la ecuación de Lagrange.
$\alpha$	= ángulo que define la dirección del vector unitario normal $\mathbf{n}$ a un cierto borde.
$Q_n, M_{nx}, M_{ny}$	= componentes del vector de tracciones de borde generalizadas $\mathbf{T}$ para un cierto borde.
$P$	= carga concentrada sobre la losa.

#### CAPÍTULO 4

$2a, 2b$	= longitudes de los lados del elemento rectangular para losas HTR3.
$w, \theta_y, \theta_x$	= grados de libertad en cada nudo del elemento HTR3.
$\mathbf{T}_{1-2}, \mathbf{T}_{3-4}, \mathbf{T}_{1-3}, \mathbf{T}_{2-4}$	= particularizaciones del vector de tracciones de borde para cada borde del elemento rectangular HTR3.
$m$	= número de funciones de aproximación $\phi_i$ empleado en el elemento HTR3.
$z$	= variable compleja.
$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	= polinomios biarmónicos utilizados como funciones de aproximación $\phi_i$ en el elemento HTR3.
$k$	= número entero empleado en la generación de las funciones $\phi_i$ así como en la de sus derivadas.
$(r, \theta)$	= coordenadas polares del punto $(x, y)$ que corresponde a un número complejo $z$ .
$(x_p, y_p)$	= coordenadas cartesianas del punto de aplicación de la carga concentrada $P$ .
$r$	= distancia del punto $(x, y)$ al punto de aplicación de la carga concentrada $P$ .

---

$R$	=	radio del círculo pequeño sobre el cual se distribuye uniformemente la carga $P$ .
$c, \rho, \beta$	=	parámetros utilizados en la función $w$ para el caso de una carga concentrada $P$ .
$s = x/2a$	=	cambio de variable que permite simplificar algunas expresiones de interpolación.
$\mathbf{N}_{1-2}$	=	función de interpolación para la función marco $\tilde{\mathbf{v}}_e$ correspondiente al borde 1-2 del elemento HTR3.
$\Phi_{eT}$	=	submatriz típica de $\Phi_e$ para un particular valor de $k$ .
$\theta_{eT_{1-2}}$	=	submatriz típica de $\theta_e$ para el borde 1-2 y para un específico valor de $k$ .
$\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{e_{1-2}}$	=	vector $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$ particularizado para el borde 1-2 del elemento HTR3.
$\mathbf{d}_{e_a}, \mathbf{d}_{e_b}, \mathbf{d}_{e_c}$	=	vectores de desplazamientos nodales correspondientes a movimientos de cuerpo rígido.
$n$	=	número de GDL del elemento.
$\Phi$	=	matriz que almacena los vectores propios $\phi_i$ ( $i = 1, n$ ) de un elemento.
$\Lambda$	=	matriz diagonal que almacena los valores propios $\lambda_i$ ( $i = 1, n$ ) de un elemento.

## CAPÍTULO 5

$a, b$	=	longitudes de los lados de una losa rectangular.
$M$	=	densidad de una cierta malla de elementos finitos.
$C$	=	indica el centro de la losa estudiada.
grp.	=	grupo de funciones de aproximación $\phi_i$ estándar.
pto.	=	punto de integración numérica.
$a$	=	longitud del lado de una losa cuadrada.
$\alpha, \beta$	=	coeficientes adimensionales típicamente encontrados en la literatura para algunos casos sencillos de análisis de losas.
$B$	=	indica el punto en la mitad del lado de la losa estudiada.
$r$	=	radio del círculo pequeño sobre el cual se distribuye uniformemente la carga $P$ .
$E$	=	punto de ubicación arbitraria en el cuarto de losa cuadrada estudiada.
$A$	=	indica la esquina de la losa cuadrada; punto medio del borde libre de la losa rectangular estudiada.
$A_1, A_2$	=	áreas de contacto de las llantas del camión HS20 de las especificaciones AASHTO estándar [1].
$L$	=	luz del puente losa estudiado.

## APÉNDICE A

$w_0$	=	desplazamiento transversal de la superficie media.
$\Pi_p(w, \theta)$	=	funcional de energía potencial para losas gruesas.



## LISTA DE TABLAS

	<i>Página</i>
<b>CAPÍTULO 3</b>	
Tabla 3.1 Elementos estándar de losa híbridos de Trefftz triangulares y cuadriláteros [15] .....	121
<b>CAPÍTULO 5</b>	
Tabla 5.1 Comparación del desplazamiento transversal $w$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 2 grupos de funciones $\phi_i$ y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10] .....	148
Tabla 5.2 Comparación del momento flector $M_x$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 2 grupos de funciones $\phi_i$ y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10] .....	149
Tabla 5.3 Comparación del momento flector $M_y$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 2 grupos de funciones $\phi_i$ y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10] .....	150
Tabla 5.4 Comparación del desplazamiento transversal $w$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 3 grupos de funciones $\phi_i$ y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10] .....	151
Tabla 5.5 Comparación del momento flector $M_x$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 3 grupos de funciones $\phi_i$ y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10] .....	152
Tabla 5.6 Comparación del momento flector $M_y$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 3 grupos de funciones $\phi_i$ y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10] .....	153
Tabla 5.7 Particulares números de puntos de integración numérica para cada número de grupos de funciones $\phi_i$ obtenidos por experimentación numérica utilizando el elemento HTR3 para la losa de la Figura 5.1 .....	154
Tabla 5.8 Comparación del porcentaje de error en el desplazamiento transversal $w$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) para el elemento HTR3 empleando 2, 3, ... y hasta 10 grupos de funciones $\phi_i$ con sus correspondientes números óptimos de puntos de integración para distintas densidades de malla .....	156
Tabla 5.9 Comparación del porcentaje de error en el momento flector $M_x$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) para el elemento HTR3 empleando 2, 3, ... y hasta 10 grupos de funciones $\phi_i$ con sus correspondientes números óptimos de puntos de integración para distintas densidades de malla .....	157
Tabla 5.10 Comparación del porcentaje de error en el momento flector $M_y$ (en el centro de la losa de la Figura 5.1) para el elemento HTR3 empleando 2, 3, ... y hasta 10 grupos de funciones $\phi_i$ con sus correspondientes números óptimos de puntos de integración para distintas densidades de malla .....	158
Tabla 5.11 Deflexiones en el centro de una losa cuadrada con distintas condiciones de borde y de carga para algunos tipos de elementos finitos y valores teóricos, $\nu = 0.3$ .....	162

Tabla 5.12	Momentos flectores $M_x$ en el centro de una losa cuadrada simplemente apoyada o empotrada en todos sus bordes pero uniformemente cargada para algunos tipos de elementos finitos y valores teóricos, $\nu = 0.3$ .....	164
Tabla 5.13	Momentos flectores $M_x$ en la mitad del lado de una losa cuadrada y empotrada en todos sus bordes con carga uniforme o carga concentrada para algunos tipos de elementos finitos y valores teóricos, $\nu = 0.3$ .....	166
Tabla 5.14	Deflexiones a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) de una losa cuadrada con distintas condiciones de borde y de carga para algunos tipos de elementos finitos ( $M=5$ ) y valores teóricos, $\nu = 0.3$ .....	170
Tabla 5.15	Giros a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) de una losa cuadrada con distintas condiciones de borde y de carga para algunos tipos de elementos finitos ( $M=5$ ) y valores teóricos, $\nu = 0.3$ .....	171
Tabla 5.16	Momentos flectores $M_x$ a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) de una losa cuadrada simplemente apoyada o empotrada en sus cuatro bordes pero uniformemente cargada para algunos tipos de elementos finitos ( $M=5$ ) y valores teóricos, $\nu = 0.3$ .....	172
Tabla 5.17	Cortes $Q_x$ a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) de una losa cuadrada simplemente apoyada o empotrada en sus cuatro bordes pero uniformemente cargada para algunos tipos de elementos finitos ( $M=5$ ) y valores teóricos, $\nu = 0.3$ .....	173
Tabla 5.18	Deflexiones en el centro de una losa cuadrada, simplemente apoyada o empotrada, sujeta a una carga puntual $P$ aplicada en el centro pero que es distribuida sobre un área circular pequeña (elemento HTR3) .....	177
Tabla 5.19	Momentos flectores $M_x$ en el centro de una losa cuadrada, simplemente apoyada o empotrada, sujeta a una carga puntual $P$ aplicada en el centro pero que es distribuida sobre un área circular pequeña (elemento HTR3) .....	179
Tabla 5.20	Momentos flectores $M_x$ en la mitad del lado de una losa cuadrada, con apoyo simple o empotrada, sujeta a una carga puntual $P$ aplicada en el centro pero que es distribuida sobre un área circular pequeña (elemento HTR3) .....	181
Tabla 5.21	Fuerzas cortantes $Q_x$ en la mitad del lado de una losa cuadrada, con apoyo simple o empotrada, sujeta a una carga puntual $P$ aplicada en el centro pero que es distribuida sobre un área circular pequeña (elemento HTR3) .....	183
Tabla 5.22	Momentos flectores $M_x$ máximos (en azul los máximos absolutos) obtenidos para cada una de las 10 posiciones de desplazamiento longitudinal del tren de cargas HS20, empleando la malla de 8318 elementos HTR3 de la Figura 5.56 .....	200
Tabla 5.23	Resultados de desplazamientos y esfuerzos en los puntos C y B, obtenidos con los elementos EFM8, DKE y HTR3 correspondientes al <i>primer análisis</i> y para la posición longitudinal del camión HS20 donde se obtuvo el máximo momento flector $M_x$ .....	202
Tabla 5.24	Resultados de desplazamientos y esfuerzos en los puntos C y B, obtenidos con los elementos EFM8, DKE y HTR3 correspondientes al <i>segundo análisis</i> y para la posición longitudinal del camión HS20 donde se obtuvo el máximo momento flector $M_x$ .....	202

## LISTA DE FIGURAS

		<i>Página</i>
<b>CAPÍTULO 1</b>		
Figura 1.1	Una losa delgada en su estado libre de cargas; sistema de coordenadas .....	9
Figura 1.2	Deformación de un pedazo de losa delgada .....	9
Figura 1.3	Orden de magnitud del esfuerzo normal $\sigma_z$ .....	11
Figura 1.4	Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de losa. a) Fuerzas de superficie y cortantes. b) Momentos flexionantes y de torsión .....	12
Figura 1.5	Esfuerzos y resultantes de esfuerzos en losas. a) Distribución de los esfuerzos que actúan en las secciones transversales a los ejes $x$ e $y$ de un elemento diferencial de losa cuyo material es homogéneo y elástico lineal. b) Fuerzas y momentos resultantes (vistos desde arriba) producto de la integración de tales esfuerzos. Fuerzas $\otimes$ y $\odot$ que actúan en el sentido positivo y negativo del eje $z$ respectivamente .....	19
Figura 1.6	Representación de los bordes de la losa en dibujos y esquemas .....	23
Figura 1.7	Sustitución de los momentos de torsión por pares equivalentes de fuerzas verticales. a) Momentos de torsión. b) Pares equivalentes de fuerzas verticales que simulan el efecto de torsión. c) Los mismos pares equivalentes junto con los cortantes; además, las fuerzas que actúan en la esquina de la losa .....	26
<b>CAPÍTULO 2</b>		
Figura 2.1	Una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida .....	35
Figura 2.2	Medio estudiado descompuesto en una serie de subregiones o elementos triangulares ...	41
Figura 2.3	Medio estudiado monodimensional y diferenciación de una función con la primera derivada discontinua (continuidad $C_0$ ) .....	45
Figura 2.4	Elemento rectangular para losas de Melosh. a) Geometría del elemento. b) Grados de libertad en cada nudo .....	46
<b>CAPÍTULO 3</b>		
Figura 3.1	Barra sometida a una fuerza repartida axial .....	52
Figura 3.2	Equilibrio de las tracciones de borde a lo largo de un borde interior .....	72
Figura 3.3	Algunos primeros elementos compatibles para losas gruesas. a) cuadrilátero bilineal (L). b) cuadrático Serendípito (QS). c) cuadrático Lagrangiano (QL). d) Heterosis (QH) ...	81
Figura 3.4	Comportamiento de elementos. a) cuadráticos Serendípitos (QS) y b) cuadráticos Lagrangianos (QL), al variar la relación $L/t$ ; carga uniforme en una losa cuadrada con una subdivisión normal 434 en un cuarto. R es integración reducida 232 y N es integración normal 333 .....	82
Figura 3.5	Elemento de viga con una interpolación independiente para $w$ y $\theta$ con la condición $\partial w/\partial x - \theta = 0$ aplicada en los puntos $x$ . a) estado original del elemento de viga con 3 nudos. b) estado final con la eliminación del nudo central .....	85
Figura 3.6	Geometría inicial del elemento DKQ .....	88
Figura 3.7	Poca sensibilidad de los modelos discretos de Kirchhoff a las distorsiones de los elementos. a) malla irregular. b) malla regular .....	91
Figura 3.8	Algunas consideraciones a lo largo del borde de un elemento. a) componentes del vector momento en dirección tangencial y normal al borde. b) vectores unitarios normal y tangencial a dicho borde .....	94
Figura 3.9	Elemento finito mixto isoparamétrico [6]. a) geometría. b) incógnitas nodales .....	97

Figura 3.10	Elementos híbridos [31] .....	102
Figura 3.11	Elemento híbrido de esfuerzos para losas de Severn y Taylor [25]. a) Geometría. b) Grados de libertad en cada nudo. c) Acciones sobre los lados del elemento .....	103
Figura 3.12	Malla típica de elementos híbridos de Trefftz sofisticados [15]: A) Singularidades debido a cargas concentradas; B) Concentraciones de esfuerzos debido a agujeros circulares o a esquinas entrantes redondeadas; C) Singularidades de esquinas angulares .....	113
Figura 3.13	Elementos híbridos de Trefftz [15]: a) Regular. b) De propósito especial perforado y con corte de forma de V agudo .....	114
Figura 3.14	Método alternativo para la definición de las tracciones de borde generalizadas para los elementos de flexión de losa .....	119

CAPÍTULO 4

Figura 4.1	Elemento finito híbrido de Trefftz para losas desarrollado en esta tesis. a) Geometría y convención de signos para los desplazamientos. b) Grados de libertad en cada nudo. c) Acciones sobre los lados del elemento .....	125
Figura 4.2	Distribución práctica de cargas concentradas .....	131
Figura 4.3	Representación gráfica del producto matricial $\theta_e^T \Phi_e$ utilizada en el cálculo de la matriz $H_e$ .....	140
Figura 4.4	Elemento unitario empleado para verificar la consistencia del elemento HTR3 y para obtener los valores y vectores propios de un elemento aislado .....	141
Figura 4.5	Movimientos de cuerpo rígido aplicados al elemento unitario de la Figura 4.4 y utilizados para verificar la consistencia del elemento de losa rectangular de cuatro nudos HTR3. a) Traslación pura. b) Traslación y rotación alrededor del eje y. c) Traslación y rotación alrededor del eje x .....	142
Figura 4.6	Valores y vectores propios del elemento de losa rectangular de cuatro nudos HTR3. $2a = 1.0, 2b = 1.0, t = 1.0, E = 1.0, \nu = 0.3$ .....	144

CAPÍTULO 5

Figura 5.1	Cuarto de una losa rectangular (área sombreada) empotrada cargada uniformemente, utilizada para el estudio numérico del número de funciones de aproximación $\phi_i$ y número de puntos de integración numérica para el elemento HTR3 .....	146
Figura 5.2	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.1, correspondientes a los porcentajes de error en el desplazamiento central de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 2 grupos de funciones $\phi_i$ con 1 o 2 puntos de integración numérica .....	148
Figura 5.3	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.2, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector $M_x$ en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 2 grupos de funciones $\phi_i$ con 1 o 2 puntos de integración numérica .....	149
Figura 5.4	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.3, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector $M_y$ en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 2 grupos de funciones $\phi_i$ con 1 o 2 puntos de integración numérica .....	150
Figura 5.5	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.4, correspondientes a los porcentajes de error en el desplazamiento central de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 3 grupos de funciones $\phi_i$ con 2 o 3 puntos de integración numérica .....	151
Figura 5.6	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.5, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector $M_x$ en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 3 grupos de funciones $\phi_i$ con 2 o 3 puntos de integración numérica .....	152
Figura 5.7	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.6, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector $M_y$ en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 3 grupos de funciones $\phi_i$ con 2 o 3 puntos de integración numérica .....	153

Figura 5.8	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.8, correspondientes a los porcentajes de error en el desplazamiento central de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando el número óptimo de puntos de integración numérica para cada número de grupos de funciones $\phi_i$ analizadas .....	156
Figura 5.9	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.9, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector $M_x$ en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando el número óptimo de puntos de integración numérica para cada número de grupos de funciones $\phi_i$ analizadas .....	157
Figura 5.10	Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.10, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector $M_y$ en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando el número óptimo de puntos de integración numérica para cada número de grupos de funciones $\phi_i$ analizadas .....	158
Figura 5.11	Cuarto de una losa cuadrada (área sombreada ABCD) con distintas condiciones de borde y carga, empleada para realizar algunos análisis comparativos y estudios de convergencia con distintos elementos finitos y particularmente con el elemento HTR3 .	160
Figura 5.12	Losa cuadrada con apoyo simple cargada uniformemente: porcentaje de error en el desplazamiento central .....	163
Figura 5.13	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error en el desplazamiento central .....	163
Figura 5.14	Losa cuadrada empotrada cargada uniformemente: porcentaje de error en el desplazamiento central .....	163
Figura 5.15	Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error en el desplazamiento central .....	163
Figura 5.16	Losa cuadrada con apoyo simple cargada uniformemente: porcentaje de error del momento flector en el centro de la losa .....	165
Figura 5.17	Losa cuadrada empotrada cargada uniformemente: porcentaje de error del momento flector en el centro de la losa .....	165
Figura 5.18	Losa cuadrada empotrada cargada uniformemente: porcentaje de error del momento flector $M_x$ en la mitad del lado .....	167
Figura 5.19	Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error del momento flector en la mitad del lado .....	167
Figura 5.20	Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error del corte $Q_x$ en la mitad del lado .....	168
Figura 5.21	Losa cuadrada empotrada y cargada uniformemente: a) Deflexiones a lo largo de la línea central b) Porcentajes de error en $w$ a lo largo de la línea central .....	170
Figura 5.22	Losa cuadrada empotrada y cargada uniformemente: a) Giros a lo largo de la línea central b) Porcentajes de error en los giros a lo largo de la línea central .....	171
Figura 5.23	Losa cuadrada empotrada y cargada uniformemente: a) Momentos flectores $M_x$ a lo largo de la línea central b) Porcentajes de error en $M_x$ a lo largo de la línea central .....	172
Figura 5.24	Losa cuadrada simplemente apoyada y cargada uniformemente: a) Cortes $Q_x$ a lo largo de la línea central b) Porcentajes de error en $Q_x$ a lo largo de la línea central .....	173
Figura 5.25	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: porcentaje de error en el desplazamiento central .....	177
Figura 5.26	Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: porcentaje de error en el desplazamiento central .....	177
Figura 5.27	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga seudo concentrada aplicada en el centro: a) Momento flector $M_x$ en el centro de la losa. b) Porcentaje de error del momento flector .....	179
Figura 5.28	Líneas de contorno del momento flector $M_x$ para el cuarto de losa analizada (Figura 5.11), simplemente apoyada y: a) Con carga concentrada $P$ ideal. b) Con carga concentrada $P$ uniformemente distribuida sobre un área circular pequeña de radio $r = a/100$ ; en ambos casos aplicadas en el centro de la losa, empleando una malla regular de 838 elementos HTR3 .....	180
Figura 5.29	Líneas de contorno del momento flector $M_x$ para el cuarto de losa analizada (Figura 5.11), empotrada y: a) Con carga concentrada $P$ ideal. b) Con carga concentrada $P$ uniformemente distribuida sobre un área circular pequeña de radio $r = a/100$ ; en ambos	

	casos aplicadas en el centro de la losa, empleando una malla regular de 838 elementos HTR3 .....	180
Figura 5.30	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: momento flector $M_x$ en la mitad del lado .....	181
Figura 5.31	Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: porcentaje de error del momento flector $M_x$ en la mitad del lado .....	181
Figura 5.32	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: porcentaje de error del corte $Q_x$ en la mitad del lado .....	183
Figura 5.33	Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: porcentaje de error del corte $Q_x$ en la mitad del lado .....	183
Figura 5.34	Cuarto de una losa cuadrada (área sombreada ABCD) con borde exterior simplemente apoyado o empotrado sometido a una carga concentrada excéntrica $P$ de ubicación arbitraria con respecto a los nudos de la malla (punto E) pero uniformemente distribuida sobre una región circular pequeña de radio $r$ .....	184
Figura 5.35	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas $P$ ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error en el desplazamiento central .....	186
Figura 5.36	Losa cuadrada empotrada sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas $P$ ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error en el desplazamiento central .....	186
Figura 5.37	Líneas de contorno del desplazamiento transversal $w$ para el cuarto de losa analizada (Figura 5.34), empotrada y con carga concentrada $P$ aplicada en el punto de ubicación arbitraria $(X,Y)=(11a/60,11a/60)$ pero distribuida sobre un área circular pequeña de radio $r = a/1000$ ; empleando una malla regular de 838 elementos HTR3 .....	186
Figura 5.38	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas $P$ ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del momento flector $M_x$ en el centro de la losa .....	188
Figura 5.39	Losa cuadrada empotrada sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas $P$ ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del momento flector $M_x$ en el centro de la losa .....	188
Figura 5.40	Líneas de contorno del momento flector $M_x$ para el cuarto de losa analizada (Figura 5.34), simplemente apoyada y con carga concentrada $P$ aplicada en el punto de ubicación arbitraria $(X,Y)=(11a/60,11a/60)$ pero distribuida sobre un área circular pequeña de radio $r = a/100$ ; empleando una malla regular de 16316 elementos HTR3 ....	188
Figura 5.41	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas $P$ ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del momento torsor $M_{xy}$ en la esquina de la losa .....	189
Figura 5.42	Losa cuadrada empotrada sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas $P$ ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del momento torsor $M_{xy}$ en la esquina de la losa .....	189
Figura 5.43	Líneas de contorno del momento torsor $M_{xy}$ para el cuarto de losa analizada (Figura 5.34), empotrada y con carga concentrada $P$ aplicada en el punto de ubicación arbitraria $(X,Y)=(11a/60,11a/60)$ pero distribuida sobre un área circular pequeña de radio $r = a/100$ ; empleando una malla regular de 16316 elementos HTR3 .....	189
Figura 5.44	Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas $P$ ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del corte $Q_x$ en la mitad del lado .....	190
Figura 5.45	Losa cuadrada empotrada sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas $P$ ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del corte $Q_x$ en la mitad del lado .....	190
Figura 5.46	Líneas de contorno de la fuerza cortante $Q_x$ para el cuarto de losa analizada (Figura 5.34), simplemente apoyada y con carga concentrada $P$ aplicada en el punto de ubicación arbitraria $(X,Y)=(11a/60,11a/60)$ pero distribuida sobre un área circular pequeña de radio $r = a/40$ ; empleando una malla regular de 16316 elementos HTR3 .....	190
Figura 5.47	Losa rectangular con relación de lados $b/a=0.5$ y con dos bordes opuestos simplemente apoyados, uno empotrado y el cuarto libre, sujeta a dos distintos estados de carga .....	192
Figura 5.48	Losa rectangular con 3 tipos de apoyos en su contorno, cargada uniformemente en toda el área: porcentaje de error para el desplazamiento $w$ en la mitad del borde libre .....	194
Figura 5.49	Losa rectangular con 3 tipos de apoyos en su contorno, sometida a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error para el desplazamiento $w$ en la mitad del borde libre .....	194

Figura 5.50	Bandas de contorno del desplazamiento transversal $w$ para la mitad de la losa rectangular mostrada en la Figura 5.47 con las condiciones de borde indicadas pero sujeta a una carga uniformemente distribuida $p$ en toda el área, empleando una malla regular de 838 elementos HTR3 .....	194
Figura 5.51	Losa rectangular con 3 tipos de apoyos en su contorno, cargada uniformemente en toda el área: porcentaje de error del momento flector $M_y$ en la mitad del borde empotrado ...	195
Figura 5.52	Losa rectangular con 3 tipos de apoyos en su contorno, sometida a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error del momento flector $M_y$ en la mitad del borde empotrado .....	195
Figura 5.53	Bandas de contorno del momento flector $M_y$ para la mitad de la losa rectangular mostrada en la Figura 5.47 con las condiciones de borde indicadas pero sujeta a una carga concentrada $P$ (en realidad seudo concentrada con $r = \text{lado promedio}/1000$ ) aplicada en el centro de la losa, empleando una malla regular de 838 elementos HTR3 .	195
Figura 5.54	Sección transversal del puente losa analizado .....	197
Figura 5.55	Camión estándar HS20 .....	198
Figura 5.56	Malla de 144 elementos HTR3 y tren de cargas HS20 ubicado en la 8va. posición longitudinal (en color azul), así como en la teórica posición también longitudinal para el máximo momento flector $M_x$ en una viga simplemente apoyada (en color rojo) .....	199
Figura 5.57	Diagrama de líneas de contorno del momento flector $M_x$ correspondiente al primer análisis, empleando una malla de 144 elementos HTR3, para la posición del camión donde se obtuvo el respectivo <i>máximo momento flector</i> $M_x$ .....	199
Figura 5.58	Malla de 144 elementos finitos empleada para el análisis con los elementos DKE y EFM8 utilizando el camión HS20 en la misma 8va. posición longitudinal de la Figura 5.56 .....	201
Figura 5.59	Malla de 264 elementos finitos (utilizada para el análisis con los elementos DKE y EFM8), proveniente de aquella de la Figura 5.58 a causa de un sencillo refinamiento local en el vecindario de las cargas concentradas .....	203
Figura 5.60	Líneas de contorno del desplazamiento transversal $w$ correspondiente al primer análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20 .....	203
Figura 5.61	Bandas de contorno del momento torsor $M_{xy}$ correspondiente al primer análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20 .....	204
Figura 5.62	Líneas de contorno del momento flector $M_x$ correspondiente al segundo análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20 .....	204
Figura 5.63	Líneas de contorno del momento flector $M_y$ correspondiente al segundo análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20 .....	205
Figura 5.64	Bandas de contorno del corte $Q_x$ correspondiente al segundo análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20 .....	205

## APÉNDICE A

Figura A.1	Definición de variables para la aproximación de losas gruesas. a) Desplazamientos y giros. b) Momentos y fuerzas cortantes .....	216
------------	--	-----

## APÉNDICE B

Figura B.1	Gráfico del tipo <i>Número fijo de Bandas de Contorno</i> , utilizado en este caso para mostrar los momentos flectores $M_x$ en forma de bandas de contorno de igual ancho de valores .....	224
------------	---	-----

# INTRODUCCIÓN

## IMPORTANCIA DEL TEMA

Se utilizan los elementos finitos como herramienta de análisis en situaciones en las que, por la complejidad de la geometría o de las acciones aplicadas, las técnicas tradicionales tienen limitaciones o no dan buenos resultados. Por ejemplo, si se tuviera que analizar una presa de arco, un modelo constituido por barras, que en el pasado pudo plantearse, sería demasiado pobre en el contexto actual, en que lo más apropiado sería utilizar una técnica de elementos finitos. En el tema de análisis de losas, se cuenta con soluciones analíticas mayormente basadas en series de Fourier, y resultados obtenidos con tales técnicas, expresados en gráficos y tablas. Casi la totalidad de esos trabajos se refieren a losas rectangulares, o en algunos casos circulares, con condiciones de apoyo y de carga relativamente simples. A partir de la década de 1960 se desarrollaron elementos finitos rectangulares para el análisis de losas y más adelante elementos triangulares o cuadriláteros de forma arbitraria. La mayor parte de tales elementos, incluyendo aquellos incorporados en los programas de cómputo más conocidos, requieren utilizar mallas muy finas para conseguir resultados adecuados para fines de ingeniería, particularmente al estudiarse los efectos de cargas móviles concentradas en áreas relativamente pequeñas.

Es por lo tanto de mucho interés para el ingeniero contar con elementos finitos más exactos y eficientes, que permitan al usuario reducir el tiempo y el esfuerzo de cómputo,



especialmente en el contexto del análisis no lineal, en donde se requiere una buena predicción de los esfuerzos para el adecuado control del proceso incremental e iterativo que permita satisfacer las condiciones de equilibrio, de continuidad y constitutivas.

Los modelos Híbridos de Trefftz ofrecen buenas perspectivas frente a muchos problemas y/o limitaciones de las formulaciones más tradicionales de elementos finitos, especialmente para el caso del análisis de losas. Los resultados de varios estudios numéricos, entre otros los de la presente tesis, muestran la excelente exactitud y eficiencia del tipo de modelo presentado en este trabajo. En los modelos Híbridos de Trefftz se utilizan, como funciones de aproximación, entre otras, las soluciones exactas en una losa infinita cuando se tiene una fuerza distribuida sobre un área circular pequeña (*carga pseudo concentrada*), las cuales permiten desarrollar elementos finitos que pueden aproximar bastante bien las condiciones que se dan bajo una carga concentrada puntual, solucionando al mismo tiempo y en forma práctica el problema teórico del valor infinito de momento que se daría bajo dicha carga, además de permitir que la ubicación de la carga no necesariamente coincida con algún nudo de la malla. En los elementos finitos tradicionales, como los llamados modelos de desplazamiento, existe un problema muy serio, pues cuando se quiere tener precisión en la zona que está inmediatamente debajo de la carga concentrada se requiere refinar mucho la malla. El concentrar elementos es una solución factible mientras que las cargas estén en un mismo sitio, pero cuando las cargas son móviles y por tanto pueden estar en cualquier lugar, se tendría que concentrar los elementos en cualquier sitio donde la carga concentrada pudiera estar, y al ser esa carga móvil se tendría que tener una malla muy fina en prácticamente toda la losa.

La calidad de las aproximaciones obtenidas con los modelos Híbridos de Trefftz es mejor, y se tiene la ventaja con respecto a otras formulaciones alternativas de que su forma final es la tradicional expresión de rigidez.

## RESEÑA HISTÓRICA

El análisis de losas fue una de las primeras aplicaciones del método de elementos finitos en los inicios de la década de 1960. En aquel tiempo no se apreciaron las diversas dificultades que se pondrían en evidencia más tarde y por esta razón en este tema se desarrolló y se

desarrolla todavía una investigación muy activa, a tal punto que el número de trabajos que cubren varios aspectos de los elementos de flexión de losas probablemente exceda a cualquier otro tópico de elementos finitos y el proceso de mejorar los elementos existentes aún no parece haber terminado.

El primer elemento finito para el análisis de losas, publicado por Melosh en 1962 y que se estuvo usando por varios años, corresponde a la formulación de desplazamientos más tradicional. Es un elemento problemático ya que, entre otras razones, satisface sólo en forma incompleta las condiciones llamadas de continuidad (las cuales tienen que ver con poder expresar las integrales en todo el medio estudiado como la suma de integrales análogas sobre cada subregión o elemento).

Este elemento y otros análogos fueron un tema de conflicto entre matemáticos e ingenieros durante toda la década de los años 60, porque habían elementos como el de Melosh que producían resultados ingenierilmente adecuados y sin embargo los matemáticos argumentaban que la aproximación era incorrecta. A raíz de ello, se inventó la llamada Prueba de la Parcela, como una forma de clarificar qué elementos finitos realmente funcionaban y cuales no, a pesar de que incumpliesen dichas condiciones de continuidad.

Sin embargo, el elemento de Melosh no solo incumple la condición de continuidad, sino que además, cuando se intenta hacer transformaciones para hacer de dicho elemento lo que se llamaría un elemento isoparamétrico, prácticamente el estándar en los programas de cómputo actuales, se incumple la condición llamada de consistencia, indispensable para que el proceso funcione.

En conclusión y como se mencionó anteriormente, el elemento de Melosh es un elemento problemático, pero tiene un *valor histórico* para entender las dificultades que se tuvieron en el caso de losas, especialmente al utilizar un modelo de desplazamientos.

Como alternativas para resolver las dificultades observadas se plantearon primero elementos con funciones de aproximación más elaboradas, que se resumen en las referencias [18, 31]. Esas formulaciones, todavía modelos de desplazamiento basados en interpolaciones del desplazamiento transversal, demandan mucho esfuerzo de cómputo y no producen resultados mejores, en algunos casos hasta de inferior calidad, que los obtenidos con modelos *no conformes* como el de Melosh.

En la década de 1970 se propusieron ideas distintas, entre ellas las de elementos Mixtos basados en el funcional de Reissner [6]. En esta clase de elementos se interpolan separadamente los desplazamientos transversales y los momentos flectores y torsores, con los que se pueden obtener resultados de mejor calidad para estos últimos. Sin embargo, las expresiones finales no son las tradicionales de rigidez y los elementos mixtos no pueden *ensamblarse* directamente con los elementos viga-columna comunes.

En los elementos híbridos de esfuerzos, formalmente desarrollados por Pian y Tong [20], se resolvió el problema de continuidad, sin incumplir las condiciones de consistencia y obteniendo como ecuaciones finales las que corresponden a un proceso de rigidez.

En la década de 1980 se propusieron los modelos Discretos de Kirchhoff, en los que se interpolan los giros y se satisfacen más fácilmente las condiciones de continuidad. Esta clase de elementos se emplea en diversos programas comerciales [28, 29].

Finalmente, entre muchas otras formulaciones de elementos finitos, se tienen los modelos híbridos de Trefftz aplicados al caso de losas, como son los que propone el profesor J. Jirousek [15], los cuales como se verá más adelante a través del desarrollo y estudio numérico de un elemento finito, presentan algunas posibilidades mejores que la de algunos otros modelos de elementos finitos para losas.

## **OBJETIVOS DE ESTE TRABAJO**

El objetivo principal de este trabajo es presentar una alternativa para el análisis de losas planas con cargas transversales utilizando el método de los elementos finitos, a través de un moderno enfoque de los elementos híbridos, los llamados de “Trefftz”. En dicha presentación se muestran algunas de las bondades de la formulación mencionada, en especial la forma como se resuelve eficientemente el problema del refinamiento de la malla de elementos finitos al tener cargas concentradas, con ubicaciones arbitrarias respecto a los nudos de la malla analizada.

Asimismo, con la finalidad de estudiar mejor tal formulación, se desarrolla en detalle un elemento finito rectangular Híbrido de Trefftz de 4 nudos para el análisis de flexión de losas en el rango elástico lineal, el cual incluye las funciones de aproximación adecuadas para

tratar distintos tipos de carga. Dicho desarrollo se implementa luego en un programa de cómputo, que permite la obtención de resultados numéricos.

Finalmente, se presentan comparaciones de los resultados obtenidos para algunos casos típicos, empleando el elemento desarrollado junto con otros modelos de elementos finitos para losas y con soluciones teóricas que se encuentran en la literatura, pudiéndose observar y analizar el grado de precisión de los distintos modelos estudiados.

## **ORGANIZACIÓN DE LA TESIS**

Con el objeto de darle al lector una visión más clara sobre el tema desarrollado, en el Capítulo 1 se revisan los aspectos básicos de la teoría clásica de losas delgadas, como son las hipótesis de Kirchhoff, la ecuación diferencial de equilibrio, las relaciones deformación-desplazamiento, las relaciones constitutivas y la ecuación diferencial de la losa en flexión transversal, con las condiciones de borde más comunes para el caso de una losa rectangular.

El Capítulo 2 empieza con una reseña histórica sobre el desarrollo del método de los elementos finitos así como con una descripción de ciertos procesos afines a tal metodología de análisis como son los llamados métodos de parámetros indeterminados, para luego dedicarse básicamente a algunos temas sobre el método de los elementos finitos que tienen relación especialmente con el capítulo siguiente, como son por ejemplo las condiciones de consistencia y de continuidad y el clásico elemento finito para losas de Melosh.

El Capítulo 3 se inicia con una revisión de conceptos básicos del cálculo variacional y de algunos de los principios variacionales más importantes en el análisis estructural, lo cual permite a continuación revisar más fácilmente algunas de las alternativas más comunes para la formulación de elementos finitos aplicados al análisis de losas, exponiendo lo principal en que se basa cada formulación y haciendo comparaciones entre ellas, especialmente con el modelo tradicional de desplazamientos. La parte final del capítulo se dedica a presentar la formulación relacionada con la alternativa de análisis para losas mencionada en los objetivos de este trabajo de tesis, cual es la del modelo de elementos finitos Híbrido de Trefftz, así como su uso en el análisis de flexión de losas.

En el Capítulo 4 se desarrolla un elemento finito rectangular Híbrido de Trefftz de 4 nudos para el análisis de flexión de losas, en base a la formulación teórica presentada en el capítulo anterior así como en consideraciones de orden práctico, por ejemplo para la elección del tipo de aproximación para los bordes del elemento. Además, al finalizar el capítulo, se hacen algunos cálculos simples para verificar la consistencia del elemento desarrollado, así como para obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración de un elemento aislado.

El Capítulo 5 empieza definiendo ciertos parámetros básicos para un funcionamiento eficiente del elemento desarrollado, como son el número de funciones de aproximación  $\phi_i$  y el número de puntos de integración numérica. Para ello, se hacen algunos análisis (utilizando el programa de cómputo FLt) sobre la base de un cuarto de losa rectangular empotrada cargada uniformemente. A continuación, con la finalidad de verificar la exactitud del elemento desarrollado así como para observar algunas otras ventajas propias de un modelo de elementos finitos Híbrido de Trefftz para losas, se hacen análisis de casos relativamente simples, cuyos resultados se comparan con aquellos de otros elementos que se recogen de la bibliografía y asimismo con resultados que se obtienen de utilizar programas de cómputo conocidos que trabajan con algunas de las formulaciones de elementos finitos más usuales. Seguidamente, se presenta una aplicación un poco más ingenieril, correspondiente al análisis de un sencillo puente losa simplemente apoyado sujeto a un tren de cargas, con la cual se pretende mostrar básicamente la exactitud y eficiencia de un modelo híbrido de Trefftz para losas al tratar con problemas asociados con cargas concentradas móviles.

Por último, se presentan algunas conclusiones y recomendaciones recogidas de la experiencia de este trabajo.

## Capítulo 1

# TEORÍA CLÁSICA DE LOSAS DELGADAS

### 1.1 INTRODUCCIÓN

La teoría del cálculo de losas sujetas a cargas normales a su plano existe desde hace dos siglos y se basa en simplificaciones de la elasticidad tridimensional análogas a las que se tienen en el análisis de vigas.

Al resolver tales problemas, se introdujeron distintas hipótesis que son hoy en día tradicionales para modelar el comportamiento de dichas estructuras. Así, la teoría más clásica hablando de *losas delgadas* se basa en las hipótesis formalizadas por Kirchhoff en 1850 y comúnmente su nombre se asocia a menudo con esta teoría, a pesar de que Sophie Germain presentó anteriormente una versión en 1811. Más adelante, Reissner introdujo en 1945 una relajación de las hipótesis de Kirchhoff y lo mismo hizo Mindlin de manera ligeramente diferente en 1951. Estas últimas teorías modificadas amplían el campo de aplicación a *losas gruesas* y es por ello que se asocia este nombre con los postulados de Reissner-Mindlin.

Básicamente, ambas teorías de losas se diferencian, similarmente al caso de vigas, en las hipótesis sobre el giro de las normales al plano medio, pues, mientras que la teoría de losas delgadas de Kirchhoff considera que tales normales se mantienen rectas y ortogonales a la deformada de dicho plano, la teoría de losas gruesas de Reissner-Mindlin mantiene la

condición de deformación recta de la normal, pero no exige su ortogonalidad con la deformada del plano medio.

En este capítulo se ha creído conveniente presentar una revisión tan solo de la teoría *clásica* de flexión de losas delgadas con pequeñas deflexiones, y es que este trabajo de tesis gira esencialmente en torno a un tipo de formulación de Elementos Finitos aplicado al análisis de dicha clase de losas.

## 1.2 DEFINICIONES BÁSICAS Y CONSIDERACIONES

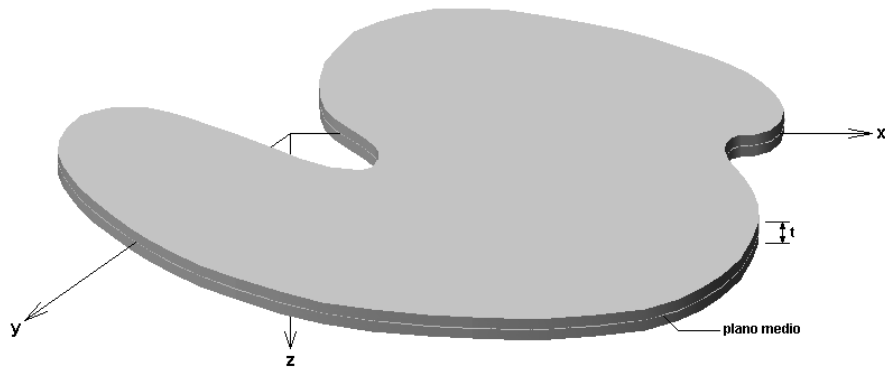
Una *losa delgada* es un sólido de forma prismática o cilíndrica en el cual una de sus dimensiones (espesor) es pequeña comparada con las otras dimensiones. Tal espesor se considera que no debe ser mayor que  $1/5$  de la menor dimensión en planta [16].

Cuando la losa es de *espesor uniforme*, la superficie plana equidistante de las caras de mayores dimensiones de la losa, que divide al espesor de la misma en dos partes iguales, se denomina *plano medio* o *plano neutro* de la losa. Asimismo, se conoce como *superficie elástica* a la superficie en la cual se convierte el plano medio como consecuencia de la deformación de la losa.

Por otro lado, *flexión de losa* significa que solo actúan como cargas exteriores fuerzas normales al plano medio, es decir, que dichas cargas no tienen componentes paralelas al plano de la losa.

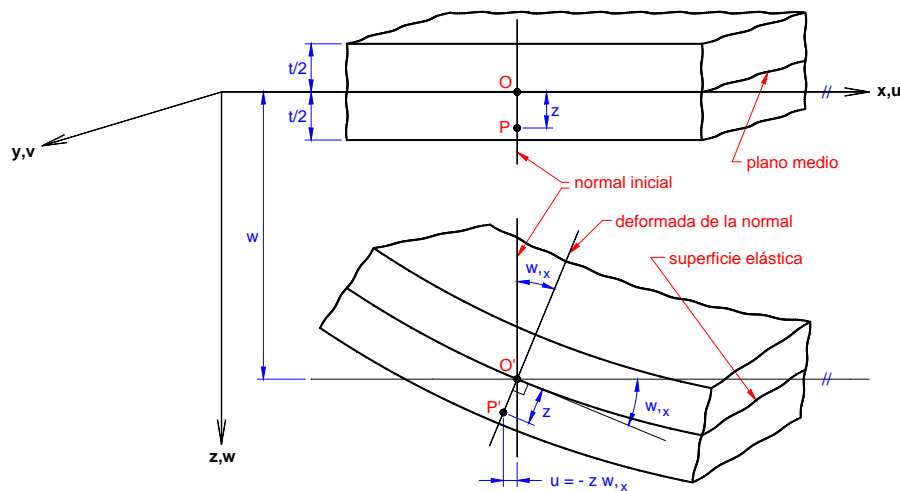
En lo que sigue, se considerará solo losas delgadas de espesor uniforme y de material homogéneo y elástico lineal.

Por otra parte, en esta tesis se trabajará (a excepción de un par de casos en donde para no alterar el contenido del documento original de investigación, se mantiene la convención de signos y el sistema de referencia adoptado en dichos trabajos) con un *marco de referencia cartesiano rectangular derecho fijo* con el plano  $x$ - $y$  coincidiendo con el plano medio de una losa en su estado inicial libre de carga, y con el eje  $z$  dirigido hacia abajo como está mostrado en la Figura 1.1



**Figura 1.1** Una losa delgada en su estado libre de cargas; sistema de coordenadas.

En tal estructura elástica, la imposición de cargas normales a su plano origina la *deformación de la losa*, esquematizada en la Figura 1.2



**Figura 1.2** Deformación de un pedazo de losa delgada.

Dicha deformación trae como consecuencia el *desplazamiento* de los puntos del cuerpo cuyas componentes para un punto  $P$  referido al sistema de coordenadas  $xyz$  están dadas por  $u$ ,  $v$  y  $w$  respectivamente. Valores positivos de tales componentes corresponden al sentido positivo de los ejes coordenados. En particular, se considera que los puntos del plano medio solo se mueven en la dirección  $z$ , es decir verticalmente.



### 1.3 HIPÓTESIS FUNDAMENTALES

Las hipótesis sobre las que se basa la teoría de losas de Kirchhoff, también llamada teoría de losas delgadas con pequeñas deflexiones o teoría clásica para losas isotrópicas, homogéneas y elásticas, son las siguientes:

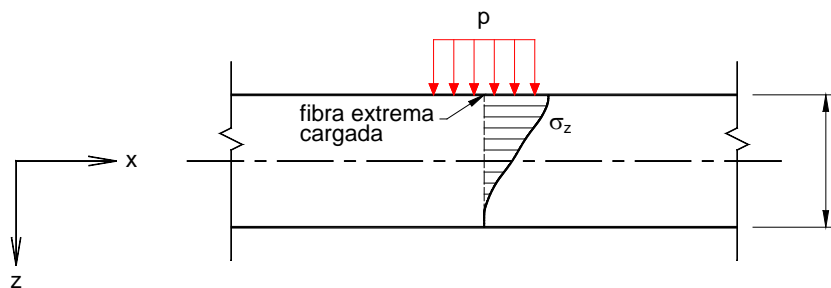
- 1) La deflexión del plano medio es pequeña en comparación con el espesor de la losa. De igual modo, es asimismo muy pequeña la pendiente de la superficie elástica.
- 2) No hay deformación en la superficie elástica de la losa. Esta superficie permanece *neutra* durante la flexión.
- 3) Los esfuerzos normales en la dirección perpendicular al plano de la losa,  $\sigma_z$ , son despreciables. De este modo, se puede considerar en cada plano horizontal la existencia de un estado plano de esfuerzos.
- 4) Los puntos situados inicialmente en una línea normal al plano medio de la losa permanecen, después de la flexión, sobre una recta perpendicular a la superficie elástica de la losa deformada; además, las distancias entre dichos puntos se mantienen invariables.

La primera hipótesis permite aplicar la teoría lineal así como la de hacer algunas simplificaciones como la de despreciar el cuadrado de la pendiente comparativamente con la unidad. Además, cuando las deflexiones no son pequeñas en comparación con el espesor, la flexión de la losa está acompañada de deformaciones del plano medio, en cuyo caso, las hipótesis 1) y 2) no son aplicables.

Por otro lado, si además de las cargas normales existen fuerzas externas que actúan en el plano medio de la losa, la hipótesis 2) nuevamente no es aceptable.

En la tercera hipótesis simplemente se desprecia el esfuerzo normal  $\sigma_z$ . Esta afirmación pareciera ser un absurdo, porque justamente se aplican las fuerzas perpendicularmente a la losa y de hecho tal esfuerzo no es nulo en el plano superior cargado, aunque si lo sea en el plano inferior descargado (ver Figura 1.3). Sin embargo, *el orden de magnitud* de dicho esfuerzo comparado con la de los esfuerzos de flexión es pequeño, esto es, del orden de las cargas laterales aplicadas  $p$ , digamos por ejemplo que se tenga una sobrecarga de 100 Kg/m<sup>2</sup>

para una cierta losa, mientras que el orden de magnitud que podría tenerse para el esfuerzo normal en la dirección  $x$  para la fibra extrema y para una situación de ese estilo podría ser de  $100 \text{ Kg/cm}^2$ . O sea, se está hablando de 10,000 veces menos esfuerzo el aplicado sobre la superficie que la que ocurre en la dirección  $x$ . Por ello, para fines ingenieriles y en forma análoga al caso de vigas, se termina haciendo un análisis argumentando de que  $\sigma_z$  es cero, la cual es una aproximación razonable.



**Figura 1.3 Orden de magnitud del esfuerzo normal  $\sigma_z$ .**

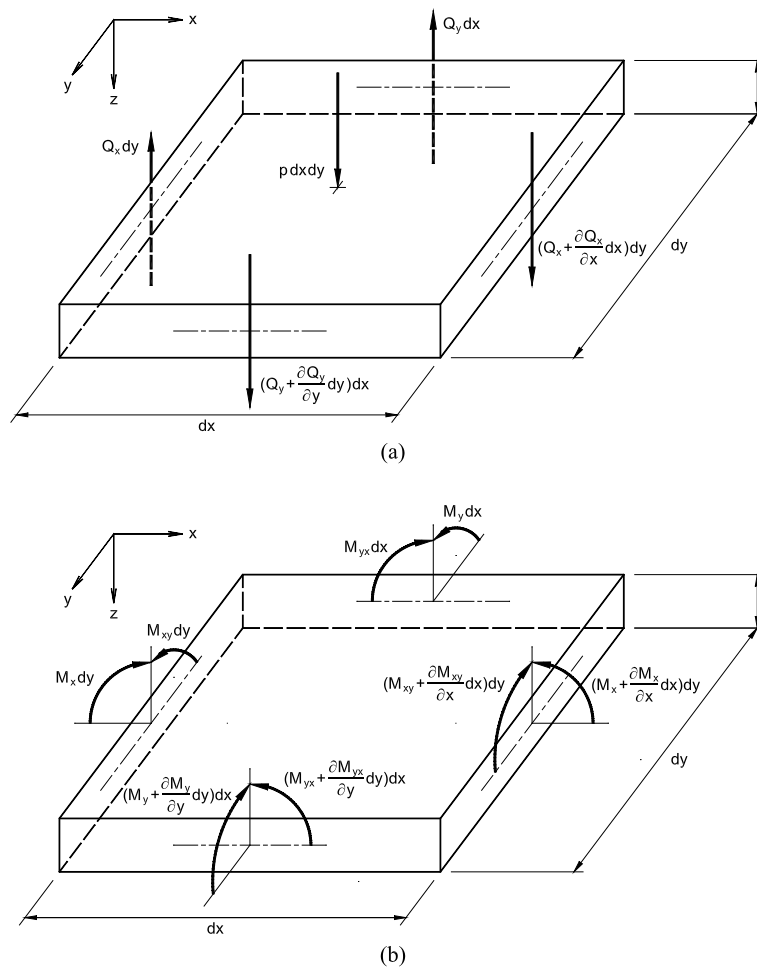
La última hipótesis equivale a despreciar el efecto de las deformaciones de corte verticales  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$ ; por tanto, la deflexión de la losa está asociada principalmente con las deformaciones flexionantes. Asimismo, se concluye que la deformación normal  $\varepsilon_z$  puede ser ignorada. En el caso de losas gruesas, las deformaciones por corte transversal mencionadas arriba sí son importantes y no se deben despreciar; por consiguiente, en tal situación la hipótesis 4) no sería aceptable.

Finalmente, estas hipótesis, las cuales son similares a las de la teoría de flexión de vigas de Euler-Bernoulli, permiten llevar el problema tridimensional de la losa delgada a uno bidimensional; además, al aplicar tales suposiciones, el estado de deformación puede ser enteramente descrito por el desplazamiento transversal,  $w$ , del plano medio, que a su vez es función de las coordenadas en el plano de la losa. Esta función tiene que satisfacer una ecuación diferencial de cuarto orden como se verá más adelante y para lo cual se requiere formular previamente las siguientes relaciones:

- Equilibrio de Fuerzas
- Deformación-desplazamiento (Compatibilidad)
- Esfuerzo-deformación (Constitutivas)

## 1.4 EQUILIBRIO DE FUERZAS

Considérese el equilibrio de un elemento diferencial de losa como se aprecia en la Figura 1.4. En ella se está tomando para las sollicitaciones básicamente la nomenclatura y convención de signos propuestos por Timoshenko y Woinowsky-Krieger [27]. Además, tales acciones sobre la losa son por unidad de ancho y han sido multiplicadas por las dimensiones del elemento para obtener las fuerzas que actúan sobre él. Para mayor claridad, se han separado las fuerzas en dos grupos: las fuerzas de superficie y de cortante vertical (Figura 1.4a) y los momentos de flexión y de torsión (Figura 1.4b). Nótese que no habrá fuerzas cortantes horizontales ni fuerzas normales en las caras del elemento (fuerzas de membrana), puesto que se considera despreciable la deformación en el plano medio de la losa según lo indica la hipótesis 2) de la teoría clásica de losas.



**Figura 1.4** Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de losa. a) Fuerzas de superficie y cortantes. b) Momentos flexionantes y de torsión.

Del equilibrio de las fuerzas verticales, se tiene:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad \text{Ec. (1.1)}$$

Del equilibrio de los momentos con respecto al eje de dirección  $x$ , se tiene:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad \text{Ec. (1.2)}$$

En forma similar, del equilibrio de los momentos con respecto al eje de dirección  $y$ , se obtiene:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad \text{Ec. (1.3)}$$

Al no haber fuerzas en las direcciones  $x$  e  $y$  ni momentos alrededor del eje  $z$ , las tres Ecs. (1.1), (1.2) y (1.3) definen completamente el equilibrio del elemento. Ahora bien, con la finalidad de eliminar las fuerzas cortantes por unidad de ancho  $Q_x$  y  $Q_y$  de tales ecuaciones, se despejará primeramente dichos cortantes de las expresiones (1.2) y (1.3) y luego, derivándolas apropiadamente y sustituyendo en la Ec. (1.1), se obtiene *la ecuación diferencial de equilibrio de la losa*:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p \quad \text{Ec. (1.4)}$$

expresión en la que se ha considerado  $M_{yx} = M_{xy}$  por ser  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ .

Debe notarse que la expresión anterior es sencillamente una ecuación de equilibrio, pues se basa puramente en tales requerimientos, por tanto es independiente del estado de elasticidad o plasticidad, de la relación de Poisson, o de que la losa sea isotrópica u ortotrópica.

## 1.5 RELACIONES DEFORMACIÓN-DESPLAZAMIENTO (COMPATIBILIDAD)

Partiendo de las expresiones de la elasticidad tridimensional para las relaciones deformación-desplazamiento en un punto [26]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & ; & \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & ; & \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & ; & \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{Ec. (1.5)}$$

donde  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  son las deformaciones normales y  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  las deformaciones tangenciales.

Por otro lado, teniendo en cuenta las simplificaciones de la teoría de losas delgadas con pequeñas deflexiones:

$$\varepsilon_z = 0 \quad ; \quad \gamma_{xz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{yz} = 0 \quad \text{Ec. (1.6)}$$

se llegan a deducir las siguientes expresiones:

$$\text{con: } \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \text{se halla que: } w = w(x, y) \quad \text{Ec. (1.7)}$$

$$\text{con: } \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \text{se halla que: } u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad \text{Ec. (1.8)}$$

$$\text{con: } \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{se halla que: } v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad \text{Ec. (1.9)}$$

Sin embargo,  $u_0(x,y)$  y  $v_0(x,y)$  constituyen los desplazamientos del plano medio de la losa, por consiguiente ambas cantidades son nulas a juzgar por la hipótesis 2) de la teoría

clásica de losas de Kirchhoff así como por la consideración mencionada en la Sección 1.2 de que los puntos del plano medio solo se mueven en la dirección  $z$ . De ese modo, las Ecs. (1.8) y (1.9) quedan como:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Ec. (1.10)

Por último, la sustitución de las Ecs. (1.6) y (1.10) en las Ecs. (1.5) da lugar a la reducción y simplificación de estas últimas a las siguientes tres deformaciones unitarias consideradas en el análisis de losas delgadas:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Ec. (1.11)

Más adelante, serán presentadas las expresiones de las curvaturas, que son en lugar de las mostradas arriba para las deformaciones unitarias, las medidas de deformación más convenientes en el análisis de losas.

## 1.6 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN (CONSTITUTIVAS)

De la teoría de la elasticidad, para un material isotrópico, se tienen las siguientes relaciones deformación-esfuerzo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}(\tau_{xy}) \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}(\tau_{xz}) \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}(\tau_{yz})\end{aligned}\tag{Ec. (1.12)}$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal,  $G$  es el módulo de elasticidad transversal o de corte, y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson. En un material isotrópico, tales constantes elásticas pueden reducirse a dos por la relación:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}\tag{Ec. (1.13)}$$

De otro lado, considerando la hipótesis 3) de Kirchhoff, el estado de esfuerzos en la losa corresponde al de las condiciones de esfuerzo plano, es decir:

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0\tag{Ec. (1.14)}$$

por lo cual, al sustituir las Ecs. (1.14) en (1.12) y teniendo en cuenta las Ecs. (1.6), se obtiene una nueva expresión entre las deformaciones y esfuerzos no nulos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\tag{Ec. (1.15)}$$

Finalmente, despejando los esfuerzos en función de las deformaciones, se obtienen las relaciones constitutivas buscadas:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\tag{Ec. (1.16)}$$

Estas relaciones pueden asimismo expresarse en términos de momentos resultantes por unidad de longitud y curvaturas, que son las medidas de esfuerzo y de deformación respectivamente utilizadas típicamente en el análisis de losas. Tales expresiones serán deducidas en la sección siguiente.

## 1.7 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA LOSA EN FLEXIÓN TRANSVERSAL (ECUACIÓN DE LAGRANGE)

Tal ecuación depende esencialmente de los tres grupos de relaciones expresadas por las Ecs. (1.4), (1.11) y (1.16). Para empezar su deducción, se obtienen las relaciones esfuerzo-desplazamiento tras sustituir las Ecs. (1.11) en (1.16):



$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E z}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E z}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{E z}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad \text{Ec. (1.17)}$$

Pero, como se mencionó anteriormente, la situación de la losa (y de la viga también) es un poco peculiar en cuanto a que las medidas de *deformación* apropiadas son las curvaturas (o razón de cambio de los desplazamientos angulares de las normales al plano medio de la losa) más que las deformaciones unitarias. Por consiguiente, el vector de curvaturas:

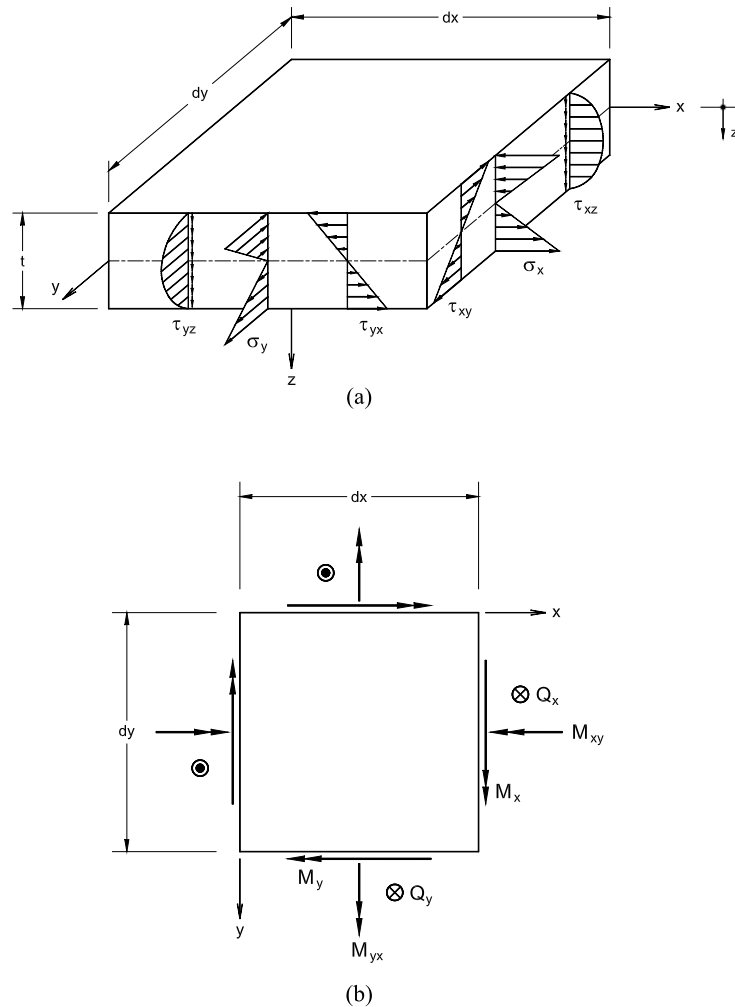
$$\mathbf{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}\quad \text{Ec. (1.18)}$$

reemplaza al campo de deformaciones unitarias expresada por la Ec. (1.11).

Teniendo en cuenta lo anterior, las relaciones dadas por la Ec. (1.17) pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E z}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu \kappa_y) \\ \sigma_y &= \frac{E z}{1-\nu^2} (\nu \kappa_x + \kappa_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E z}{2(1+\nu)} \kappa_{xy}\end{aligned}\quad \text{Ec. (1.19)}$$

Por otro lado, en forma similar al caso de las deformaciones, es común en el análisis de losas utilizar como medidas de esfuerzo no propiamente los esfuerzos en un punto sino las fuerzas y momentos resultantes por unidad de longitud. Así, al integrar a través del espesor los esfuerzos que actúan en las secciones de la losa (Fig. 1.5a) se obtienen tales resultantes de esfuerzos (Fig. 1.5b).



**Figura 1.5** Esfuerzos y resultantes de esfuerzos en losas. a) Distribución de los esfuerzos que actúan en las secciones transversales a los ejes  $x$  e  $y$  de un elemento diferencial de losa cuyo material es homogéneo y elástico lineal. b) Fuerzas y momentos resultantes (vistos desde arriba) producto de la integración de tales esfuerzos. Fuerzas  $\otimes$  y  $\odot$  que actúan en el sentido positivo y negativo del eje  $z$  respectivamente.

Como se puede ver en la Figura 1.5 y en las expresiones (1.17) o (1.19), los esfuerzos normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  varían linealmente con respecto a  $z$  y están asociados con los momentos

flectores  $M_x$  y  $M_y$ . De igual modo, los esfuerzos de corte  $\tau_{xy}$  también varían linealmente con respecto a  $z$  y están asociados con el momento torsional  $M_{xy}$ . El esfuerzo normal  $\sigma_z$  como ya se comentó en las hipótesis de Kirchhoff, es considerado despreciable en comparación con  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . Por último, los esfuerzos de corte transversal  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  tienen una variación cuadrática con respecto a  $z$ .

En definitiva, los esfuerzos de la Figura 1.5a producen las siguientes resultantes de esfuerzo por unidad de longitud:

Momentos flectores:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad \text{Ec. (1.20)}$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad \text{Ec. (1.21)}$$

Momentos torsores:

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad \text{Ec. (1.22)}$$

Fuerzas de corte transversal:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad \text{Ec. (1.23)}$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad \text{Ec. (1.24)}$$

Reemplazando las ecuaciones obtenidas anteriormente, esfuerzo-desplazamiento (1.17) en las Ecs. (1.20), (1.21) y (1.22) y ejecutando la correspondiente integración, se obtiene para los momentos:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Ec. (1.25)}$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{Ec. (1.26)}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Ec. (1.27)}$$

donde, a la cantidad:

$$D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \text{Ec. (1.28)}$$

se le conoce como *rigidez flexionante de la losa*.

Por otra parte, la sustitución de los momentos de flexión y torsión de las Ecs. previas (1.25), (1.26) y (1.27) en las Ecs. (1.3) y (1.2), conduce a las expresiones de las fuerzas cortantes transversales, por ancho unitario:

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{Ec. (1.29)}$$

$$Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad \text{Ec. (1.30)}$$

Ahora, si se introducen las expresiones (1.18) en las Ecs. (1.25), (1.26) y (1.27), se obtienen las relaciones momento-curvatura:

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \quad \text{Ec. (1.31)}$$

$$M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \quad \text{Ec. (1.32)}$$

$$M_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \kappa_{xy} \quad \text{Ec. (1.33)}$$

las que al ser escritas en un lenguaje matricial dan:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (1.34)}$$

tales grupos de Ecs. (1.31), (1.32) y (1.33) o simplemente (1.34), representan en el análisis de flexión de losas delgadas, las relaciones constitutivas apropiadas en lugar de las relaciones esfuerzo-deformación mostradas anteriormente a través de las Ecs. (1.16).

Finalmente, la sustitución de las Ecs. (1.25), (1.26) y (1.27) en la Ec. (1.4), conduce para un material isótropo a la ecuación de equilibrio en términos de desplazamientos o ecuación de Lagrange:

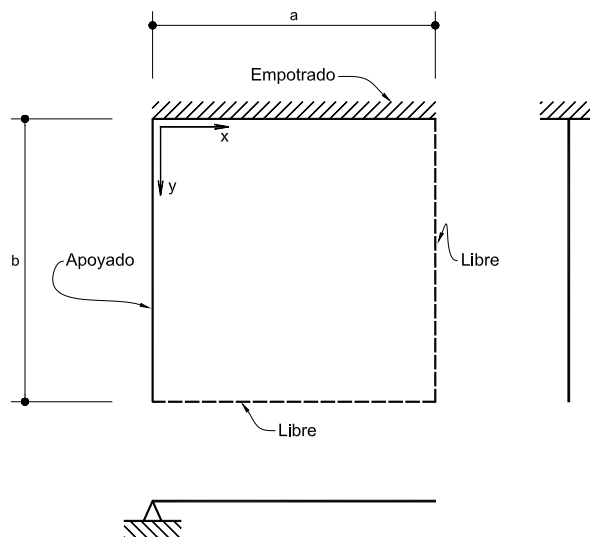
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} \quad \text{Ec. (1.35)}$$

en la cual:  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  es el operador de Laplace en dos dimensiones.

Se ve entonces que el problema se reduce a la integración de la Ec. (1.35) que es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden que relaciona la flecha con la carga repartida y las propiedades del material. Dicha ecuación con sus correspondientes condiciones de borde representan el punto de inicio para resolver analíticamente problemas de flexión de losas delgadas e isótropas bajo cargas transversales. En ese sentido, si para un caso particular se conoce una solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones de borde de la losa, los momentos flectores y torsores  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{xy}$  se pueden calcular por las Ecs. (1.25), (1.26) y (1.27) respectivamente; mientras que para determinar las fuerzas cortantes transversales  $Q_x$  y  $Q_y$  se emplearían las Ecs. (1.29) y (1.30).

## 1.8 CONDICIONES DE BORDE

Para el caso de una losa rectangular, suponiendo que los ejes  $x$  e  $y$  se toman paralelos a los lados de la losa (Figura 1.6), se presentan los siguientes tipos de borde más usuales en la práctica con sus correspondientes condiciones de borde aplicados a lo largo de los contornos mencionados y mostrados en la misma Figura 1.6.



**Figura 1.6** Representación de los bordes de la losa en dibujos y esquemas.

- **BORDE EMPOTRADO (O APOYO FIJO);** contorno  $y = 0$ :

En tal tipo de borde, la deflexión a lo largo del mismo debe ser nula y el plano tangente a la superficie elástica de la losa deformada a lo largo del borde coincide con la posición inicial del plano medio. Por tanto, en la hipótesis del borde empotrado las condiciones para el borde  $y = 0$  (Figura 1.6) son:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{Ec. (1.36)}$$

Una observación que se deduce de la segunda ecuación en (1.36) es que  $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ , lo cual conduce a través de la Ec. (1.27) a que  $(M_{xy})_{y=0} = (M_{yx})_{y=0} = 0$ ; es decir, en bordes empotrados no hay momentos torsores.

- **BORDE SIMPLEMENTE APOYADO (O APOYO DE NAVIER);** contorno  $x = 0$ :

Si el borde de la losa está simplemente apoyado, la deflexión  $w$  a lo largo del borde debe ser nula. Asimismo, este borde puede girar libremente sobre la línea de apoyo, por tanto, no hay momento flector perpendicular al borde. Para el contorno simplemente apoyado  $x = 0$  mostrado en la Figura 1.6, las condiciones de borde se pueden expresar como:

$$w = 0, \quad M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{Ec. (1.37a)}$$

Sin embargo, de la primera ecuación en (1.37a) se concluye que  $\partial w / \partial y = 0$  y  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ ; por consiguiente, luego de sustituir esta condición en la segunda ecuación de (1.37a), se obtienen las siguientes condiciones equivalentes a aquellas dadas precisamente por las relaciones (1.37a):

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{Ec. (1.37b)}$$

Por otro lado, como se mencionó inicialmente, el giro en el borde es distinto de cero y no es una constante, es decir  $(\partial w / \partial x)_{x=0} \neq 0$ , por consiguiente la variación de tal giro con respecto en este caso a  $y$  es también distinta de cero, o sea  $(\partial^2 w / \partial x \partial y)_{x=0} \neq 0$ , lo cual conlleva a través de (1.27) a que  $(M_{xy})_{x=0} \neq 0$ , es decir a la existencia de momentos de torsión a lo largo de un borde simplemente apoyado.

- **BORDE LIBRE;** contornos  $x = a$ ,  $y = b$ :

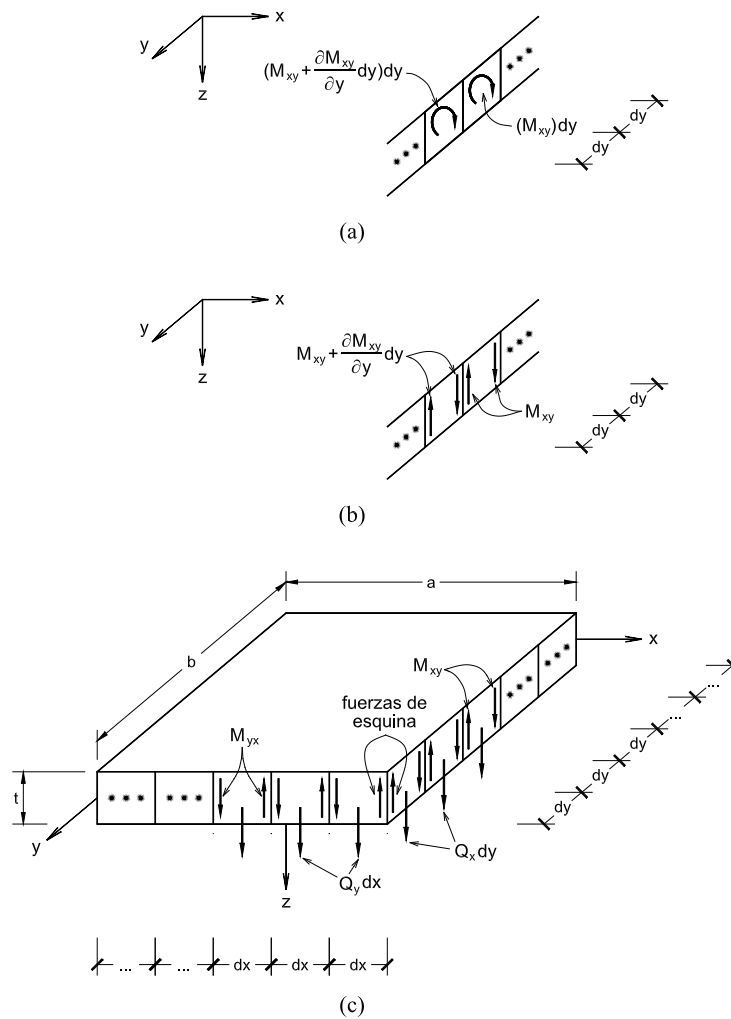
Si un borde de una losa (para el caso  $x = a$ ) está totalmente libre (sin apoyo), no podrán haber a lo largo de él momentos flectores ni torsosres ni fuerzas cortantes; por tanto, las condiciones de borde podrían expresarse del siguiente modo:

$$M_x = 0, \quad M_{xy} = 0, \quad Q_x = 0 \quad \text{Ec. (1.38a)}$$

Tales condiciones fueron planteadas de este modo por Poisson, más tarde Kirchhoff probó que tres condiciones son excesivas y son suficientes dos para la total determinación de las deflexiones  $w$  que satisfacen la Ec. (1.35). Él demostró que la segunda y tercera condición de (1.38a) deben sustituirse por una sola. El sentido de dicha disminución fue dado a entender por Kelvin y Tait, quienes indicaron que la flexión de la losa no se altera si las fuerzas horizontales que producen el momento torsor  $M_{xy} dy$  que actúa sobre un elemento de longitud  $dy$  del borde  $x = a$  (Figura 1.7a) se sustituyen por pares equivalentes de fuerzas verticales de valor  $M_{xy}$  con brazo  $dy$  como se muestra en la Figura 1.7b. Dicha sustitución no modifica el valor de los momentos torsosres y genera solo cambios en la distribución local de los esfuerzos en el borde de la losa, manteniendo invariable el estado de esfuerzos en el resto de la losa.

Entonces, para el caso de una losa rectangular como se observa en la Figura 1.7 y considerando dos elementos continuos de longitud  $dy$  en el extremo  $x = a$  (Figuras 1.7a y 1.7b), se aprecia en el primero de los gráficos un momento torsor  $M_{xy} dy$  actuando en el elemento de la derecha, mientras que en el de la izquierda actúa un momento torsor  $[M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial y) dy] dy$ . Como se puede distinguir, tales momentos son sustituidos por pares de fuerzas verticales estáticamente equivalentes  $M_{xy}$  y  $M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial y) dy$





**Figura 1.7** Sustitución de los momentos de torsión por pares equivalentes de fuerzas verticales. a) Momentos de torsión. b) Pares equivalentes de fuerzas verticales que simulan el efecto de torsión. c) Los mismos pares equivalentes junto con los cortantes; además, las fuerzas que actúan en la esquina de la losa.

respectivamente (Figura 1.7b), las cuales producen una fuerza resultante por unidad de longitud de intensidad:

$$Q'_x = \left[ \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) - M_{xy} \right] \frac{1}{dy} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

la cual al ser añadida a la fuerza cortante  $Q_x$  (Figura 1.7c) produce una fuerza cortante efectiva  $Q^*_x$  por unidad de longitud de:

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

Por consiguiente, luego de igualar a cero  $M_x$  y  $Q_x^*$  se obtiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{Ec. (1.38b)}$$

las cuales representan las dos condiciones de borde necesarias en toda la extensión del borde libre de la losa  $x = a$  en reemplazo de las condiciones (1.38a) dadas inicialmente.

Finalmente, un punto adicional asociado al de la sustitución de los momentos torsores visto previamente y como consecuencia del mismo, es el de la existencia de fuerzas concentradas en las esquinas de la losa. En realidad, y para el caso de una losa rectangular, hay dos fuerzas del tipo  $M_{xy}=M_{yx}$  que actúan precisamente en la esquina de la losa, pues cada uno de los lados que concurren a ella aportan con una, como se aprecia en la Figura 1.7c, generando por tanto una fuerza resultante en la esquina de:

$$R = 2M_{xy} = -2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Ec. (1.39)}$$

En el caso particular de una esquina donde se intersecan dos bordes empotrados, dicha resultante de fuerzas concentradas sería nula, pues como se dedujo anteriormente  $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$  para tal situación de borde.



## Capítulo 2

# ALGUNOS TÓPICOS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y TEMAS AFINES

### 2.1 INTRODUCCIÓN

No es el objetivo de este capítulo el abarcar muchos de los temas que se encuentran en un texto especializado sobre el *Método de los Elementos Finitos*, sino más bien el de presentar algunos puntos específicos sobre tal metodología de análisis que tienen relación con el trabajo desarrollado en la presente tesis, de ese modo el lector tendrá un mayor panorama sobre la materia tratada en los capítulos siguientes. En particular se presentan temas como el de las condiciones de consistencia y de continuidad así como el del tradicional elemento finito para losas de Melosh, los cuales servirán por ejemplo para entender mejor las dificultades que se tuvieron en el caso de losas.

### 2.2 LOS PROCESOS DE ELEMENTOS FINITOS Y COMO SE DESARROLLARON

Estas técnicas de Elementos Finitos están muy emparentadas con ciertos procesos de *Parámetros Indeterminados*, los cuales a su vez se basan en ideas que propuso Gauss hace 200 años más o menos. Los tales procesos tuvieron un desarrollo importante recién a fines

del siglo 19 y principios del siglo 20, con Lord Rayleigh, Ritz, Galerkin y otros más a quienes se hace referencia con frecuencia cuando se hablan de estos procesos.

Dichos procesos de parámetros indeterminados se diferencian de las técnicas de diferencias finitas que podrían utilizarse también para resolver ecuaciones diferenciales en un aspecto básico: mientras que las técnicas de diferencias finitas aproximan los operadores diferenciales (hacen aproximaciones para las derivadas), los procesos de parámetros indeterminados aproximan la función, las derivadas se realizan exactamente. Al hacer aproximaciones de las funciones sin embargo se encuentra una dificultad: para obtener una buena solución, esta aproximación tiene que ser más o menos similar a la solución real, entonces cuando se intenta aproximar la o las funciones incógnitas *en todo el dominio* como se hacía en los procesos clásicos de parámetros indeterminados, se encuentra que es *muy difícil* tener una aproximación a la vez buena y que satisfaga por ejemplo las condiciones de borde para tener algo que simplifique el panorama en alguna medida.

Ese era más o menos el estado de cosas hasta 50 años atrás, aunque antes que eso hubo algunos investigadores intentando modificar los procesos de parámetros indeterminados. En particular Courant hizo en el año 1943 una propuesta que correspondería a grosso modo a lo que hoy día se llaman Elementos Finitos, en buena cuenta utilizó un proceso de parámetros indeterminados pero en lugar de pretender una aproximación válida en todo el medio estudiado, dividió tal medio en sub-regiones (partes) y para cada una de ellas hizo aproximaciones de *carácter local*. Cuando Courant propuso eso, fue consciente que finalmente como resultado del proceso se requería plantear un sistema de ecuaciones con *muchas incógnitas* y ciertamente en el año 1943, al no contar con una herramienta como la computadora digital desarrollada años más tarde, tal propuesta resultaba en un procedimiento teórico pero nada práctico.

En los años 50 precisamente se encuentra que las computadoras empiezan a aparecer en una serie de institutos y particularmente en universidades. Esas computadoras permitían claro hacer cosas en términos relativos a lo actual más bien modestas, se hizo en ese entonces la codificación de los ya bien establecidos procedimientos de análisis de barras en un formato adecuado a la computadora, el formato matricial; ese es un desarrollo de todos los años 50. Ya para mediados de los años 50 había mucha gente pensando en hacer algo más. En 1956 el trabajo clásico de Turner, Clough, Martin y Topp “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures” tuvo un cierto mérito en darle un impulso al desarrollo del método de los

elementos finitos. Después de ello, hay algunos trabajos, de Argyris por ejemplo, que son muy valiosos porque se empezó a formalizar el proceso, a darle una base matemática más sólida.

Por otro lado, parece que fue Clough quien en 1960 utilizó por primera vez el término “elemento finito” en su trabajo “The Finite Element Method in Plane Stress Analysis”. En este trabajo, el método fue presentado como una extensión de las técnicas de análisis estructural a la solución de problemas en mecánica del continuo.

En general, en los años 60 empezó a haber una especie de fiebre, pues existía digamos el desafío del que había que desarrollar nuevos elementos finitos, y muchos ingenieros hicieron contribuciones que finalmente en algunos casos resultaron en grandes aportes, por ejemplo el desarrollo de los llamados *elementos isoparamétricos*, un aporte enteramente de ingenieros que constituía una idea en cierta forma bien simple pero nueva y exitosa.

Hacia fines de los 60 aparece el primer libro sobre el tema, el cual está dirigido básicamente al análisis estructural y es autorado por Zienkiewicz. Entonces, a raíz quizás de la publicación de tal libro y de una serie de artículos en revistas especializadas, el tema es ciertamente conocido en los medios universitarios y los matemáticos de esa época como que retoman interés en el tema, pues se hace evidente que están dadas una serie de condiciones que permiten finalmente desarrollar procedimientos de ese estilo, ya que entre otras cosas se veía que las computadoras iban a ser cada vez más poderosas y más accesibles también.

El desarrollo de los procedimientos se dio en gran medida entonces en los años 60 y en alguna medida en los años 70 también. A partir de los años 80 han habido aportes importantes por ejemplo en el tema de losas y cáscaras, pero en principio ya se puede considerar a los tales Métodos de Elementos Finitos como procedimientos más o menos bien establecidos. Hoy día hay muchos programas comerciales que permiten utilizar elementos finitos en prácticamente todas las ramas de la ciencia y de la ingeniería.

## 2.3 MÉTODOS DE PARÁMETROS INDETERMINADOS

Estas técnicas de Parámetros Indeterminados, como se mencionó al inicio de la sección anterior, son técnicas para resolver ecuaciones diferenciales. En la forma en que se van a

presentar tales métodos, pareciera que están destinados a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, pero no es este el caso nada más, pues se puede, utilizando más o menos las mismas ideas, resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Ante todo, la ecuación diferencial que se puede estar resolviendo podría simbólicamente escribirse así:

$$L(u) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{Ec. (2.1)}$$

tal ecuación diferencial está acompañada de ciertas condiciones de borde, las cuales similarmente podrían expresarse como:

$$B_i(u) = 0 \quad \text{en } S_i \quad \text{Ec. (2.2)}$$

Entonces, en los procesos de parámetros indeterminados, lo que se hace es una “aproximación” de la función incógnita:

$$u \approx \hat{u} = N_1(x)\alpha_1 + N_2(x)\alpha_2 + \dots \quad \text{Ec. (2.3)}$$

se dice de lo anterior que  $u$  es aproximadamente una cierta  $\hat{u}$  que está expresada como una combinación de funciones conocidas  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$ , etc. con parámetros o coeficientes desconocidos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , etc. que son precisamente los *parámetros indeterminados*.

Nótese que la aproximación anterior puede también expresarse en algunas de las siguientes formas alternativas:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^m N_j(x) \alpha_j = \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha} \quad \text{Ec. (2.4)}$$

donde  $m$  es el número de términos de la serie y por ende de los parámetros indeterminados  $\alpha_j$  considerados en la aproximación.

En general, no hay ninguna absoluta restricción en la selección de las funciones de aproximación  $N_j$ . La gran dificultad que se tiene con los procedimientos estos es en seleccionar unas  $N_1, N_2$ , etc. apropiadas para que efectivamente la aproximación se parezca lo suficiente a la solución correcta.

Suponiendo que se haya planteado una aproximación aceptable, el siguiente paso sería como determinar los parámetros  $\alpha_j$  óptimos. Para hacer las cosas simples, se va a suponer que dicha aproximación satisface perfectamente las condiciones de borde, es decir, se va a considerar que:

$$B_i(\hat{u}) = 0 \quad \text{en } S_i \quad \text{Ec. (2.5)}$$

Sin embargo, cuando se sustituye la tal aproximación  $\hat{u}$  en la ecuación diferencial (Ec. 2.1), no se encuentra cero como debería encontrarse si se tuviera la solución exacta, se encuentra un cierto *error o residuo*:

$$L(\hat{u}) = R(x) \quad \text{Ec. (2.6)}$$

El propósito es hallar los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2$ , etc. que en cierta medida hagan de ese residuo lo más pequeño posible. En la literatura se encuentran diversas propuestas, las cuales se verán a continuación.

### 2.3.1 MÉTODOS DE RESIDUOS PONDERADOS

Se han desarrollado diversos criterios o métodos con la finalidad de optimizar los parámetros  $\alpha_j$  para hacer mínimos los residuos (Ec. 2.6) en un cierto sentido. En tales métodos finalmente se llegan a plantear tantas ecuaciones como incógnitas (parámetros indeterminados) se tiene, para luego, a partir de estas condiciones determinar los tales coeficientes desconocidos que definen la aproximación (Ecs. 2.3 o 2.4). El más simple de estos criterios es el proceso llamado *de colocación*.



En el método de colocación lo que se hace es exigir que el residuo sea cero solo en determinados puntos del dominio; refiriéndose a un caso monodimensional se podría escribir lo anterior como:

$$R(x_i) = 0 \quad \text{Ec. (2.7)}$$

Eso podría dar una cierta cantidad de ecuaciones por lo menos en un número igual al de los parámetros indeterminados y eventualmente más, pues, al plantear tales ecuaciones no hay realmente nada que prohíba tener un sistema sobredeterminado.

Con respecto al anterior criterio de colocación, pareciera más lógico el plantear que la integral del residuo en toda la región estudiada sea cero:

$$\int_{\Omega} R(x) d\Omega = 0 \quad \text{Ec. (2.8)}$$

Sin embargo, al hacerlo de esa forma, se obtendría realmente *una sola ecuación*, la cual obviamente no sería suficiente si es que se tuviera digamos 4, 5, 10 parámetros; así es que, la extensión de esta idea podría ser el exigir más bien que la integral del residuo por ciertas *funciones de peso* arbitrarias y evaluadas en todo el dominio sea cero, desarrollándose en tal sentido *Métodos de Residuos Ponderados* que tienen la forma siguiente:

$$\int_{\Omega} w_i(x) R(x) d\Omega = 0 \quad \text{Ec. (2.9)}$$

donde  $w_i(x)$  representa precisamente una serie de funciones ponderadas o funciones de peso.

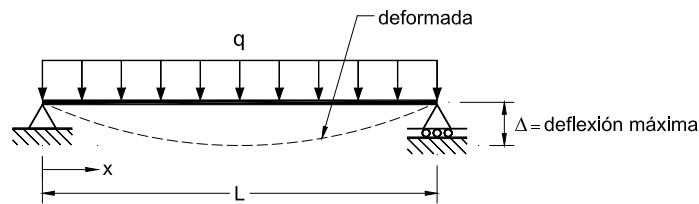
Diversos criterios propuestos pueden ser vistos como casos particulares de la expresión dada por la Ec. (2.9), incluso el propio proceso de colocación es un caso particular de la expresión anterior con una función de peso que vendría a ser un delta de Dirac.

Entre los procesos que pertenecen a este grupo, existe una cierta tendencia a utilizar más que ningún otro el criterio llamado de *Galerkin*, en donde se exige:

$$\int_{\Omega} N_i(x) R(x) d\Omega = 0 \quad \text{Ec. (2.10)}$$

Es decir, en el proceso de Galerkin las funciones de peso son las propias funciones con las cuales se aproxima la función incógnita (Ecs. 2.3 o 2.4). Este procedimiento es el más frecuentemente utilizado en Elementos Finitos porque tiene un vínculo inmediato con ciertos principios variacionales, concretamente, cuando se utiliza como criterio el método de Galerkin, se obtienen exactamente los mismos resultados que cuando se usa un principio variacional que es equivalente a la ecuación diferencial que se está resolviendo.

Para ilustrar los conceptos sobre los tales procesos de Residuos Ponderados y particularmente el ya comentado *Método de Galerkin*, se presenta a continuación un ejemplo sencillo [24] que corresponde al caso de una viga simplemente apoyada sujeta a una carga uniformemente distribuida  $q$  como se observa en la Figura 2.1



**Figura 2.1 Una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida.**

En dicha situación, la correspondiente ecuación diferencial que se pretendería resolver sería:

$$EIv^{IV} - q = 0 \quad \text{Ec. (2.11)}$$

con las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} v(0) &= v(L) = 0 \\ v''(0) &= v''(L) = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. (2.12)}$$

donde:

$v$  = función incógnita (desplazamiento transversal)

$q$  = carga uniformemente distribuida

$EI$  = rigidez a la flexión de la viga

Para empezar, se plantea una *aproximación* para la función incógnita  $v$  que cumpla con las condiciones de borde, por ejemplo:

$$v \approx \hat{v} = \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \Delta \quad \text{Ec. (2.13)}$$

De la comparación con la Ec. (2.3), puede notarse que:

$$N_1(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \alpha_1 = \Delta \quad \text{Ec. (2.14)}$$

donde el parámetro indeterminado  $\alpha_1$  puede o no tener significado físico, en este caso si lo tiene y corresponde al de la deflexión máxima, como se puede ver en la Figura 2.1.

Luego, al sustituir la aproximación considerada  $\hat{v}$  (Ec. 2.13) en la ecuación diferencial (Ec. 2.11), se encuentra que no se satisface, obteniéndose el siguiente residuo:

$$R(x) = EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \Delta - q \quad \text{Ec. (2.15)}$$

A continuación y con la finalidad de obtener el valor del único coeficiente indeterminado  $\Delta$ , se utiliza el criterio de Galerkin por el cual se exige:

$$\int_L \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left\{ EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \Delta - q \right\} dx = 0 \quad \text{Ec. (2.16)}$$

Luego de algunas operaciones, se obtiene:

$$K \Delta - f = 0 \quad \text{Ec. (2.17)}$$

donde:

$$K = EI \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \int_0^L \text{sen}^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx = \frac{EI \pi^4}{2L^3} \quad \text{Ec. (2.18)}$$

$$f = \int_0^L \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] q dx = \frac{2Lq}{\pi}$$

Por tanto  $\alpha_1 = \Delta$  quedaría como:

$$\Delta = \frac{f}{K} = \frac{4}{\pi^5} \left( \frac{qL^4}{EI} \right) \approx 0.01307 \left( \frac{qL^4}{EI} \right) \quad \text{Ec. (2.19)}$$

Nótese que la solución exacta para la deflexión máxima es:

$$\Delta_{\text{exacta}} = \frac{5}{384} \left( \frac{qL^4}{EI} \right) \approx 0.01302 \left( \frac{qL^4}{EI} \right) \quad \text{Ec. (2.20)}$$

Finalmente, luego de sustituir la Ec. (2.19) en la Ec. (2.13), queda definida la aproximación buscada:

$$\hat{v} = \frac{4}{\pi^5} \left( \frac{qL^4}{EI} \right) \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad \text{Ec. (2.21)}$$

Se puede concluir entonces, luego de una simple inspección de la aproximación utilizada (Ec. 2.13), así como de la comparación de las Ecs. (2.19) y (2.20), que la tal función sinusoidal considerada representa pues una *muy buena aproximación*. Sin embargo, debe de

reconocerse también que dicho ejemplo se refirió a un problema muy conocido. Si en cambio se hubiera propuesto un problema totalmente diferente, con geometrías muy elaboradas, no homogeneidad, etc., definitivamente no hubiese sido tan fácil plantear alguna *aproximación razonable válida en todo el medio estudiado* y ahí está justamente la dificultad esencial en los procesos clásicos de Parámetros Indeterminados.

### 2.3.2 EL MÉTODO DE RAYLEIGH - RITZ

En muchas ecuaciones diferenciales o incluso sistemas de ecuaciones diferenciales, se puede definir un *principio variacional* (concepto que es mejor tratado en el capítulo siguiente)  $\Pi(u)$  que es equivalente.

Si se tiene el principio variacional que es equivalente a la ecuación diferencial que se está resolviendo, se podría entonces utilizarlo directamente junto con la aproximación de parámetros indeterminados para obtener las ecuaciones correspondientes en una *forma más fácil*. Tal procedimiento es el llamado de *Rayleigh – Ritz* y que consiste simplemente, luego de partir de la habitual aproximación de parámetros indeterminados:  $u \approx \hat{u} = \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha}$ , en sustituir dicha aproximación en el principio variacional; con lo cual este último se reduce a una simple función de los parámetros  $\boldsymbol{\alpha}$ , escribiéndose por tanto tal expresión como  $\Pi(\boldsymbol{\alpha})$ .

Finalmente, el exigir que la función anterior  $\Pi(\boldsymbol{\alpha})$  sea estacionaria, equivale entonces a exigir que la derivada de dicha función con respecto a cada uno de los parámetros  $\boldsymbol{\alpha}$  sea cero, lo que en un lenguaje más compacto podría escribirse así:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (2.22)}$$

Con lo cual se obtendrían las ecuaciones necesarias para determinar los coeficientes desconocidos  $\boldsymbol{\alpha}$ .

A continuación, se desarrolla el ejemplo de la sección anterior pero ahora utilizando el proceso de Rayleigh – Ritz.

Ante todo, para tal sencilla aplicación, la función  $v$  que es solución del problema y que por tanto satisface la ecuación diferencial  $EIv^{IV} - q = 0$ , es la  $v$  que hace mínima el funcional o principio variacional siguiente:

$$\Pi_p(v) = \int_L \left[ \frac{1}{2} EI (v'')^2 - qv \right] dx = \text{MÍNIMA} \quad \text{Ec. (2.23)}$$

expresión que se denomina la energía potencial de la viga.

Considerando la misma aproximación de parámetros indeterminados para la función incógnita  $v$ :

$$v \approx \hat{v} = \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] \Delta \quad \text{Ec. (2.13)}$$

Al sustituir la aproximación anterior y sus consecuencias en la integral de arriba, es decir en el principio variacional (Ec. 2.23), se obtiene ahora una simple función del parámetro indeterminado  $\Delta$ :

$$\Pi_p(\Delta) = \int_L \left\{ \frac{1}{2} EI \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] \Delta^2 - q \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] \Delta \right\} dx = \text{MÍNIMA} \quad \text{Ec. (2.24)}$$

la que escrita con los mismos términos de  $K$  y  $f$  definidas por la Ec. (2.18) quedaría del siguiente modo:

$$\Pi_p(\Delta) = \frac{1}{2} K \Delta^2 - f \Delta = \text{MÍNIMA} \quad \text{Ec. (2.25)}$$

Lo que se tiene ahora a través de (2.24) o (2.25) ya no es propiamente un funcional sino una función del coeficiente indeterminado  $\Delta$ . Por consiguiente el exigir que tal expresión sea MÍNIMA equivale a exigir:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \Delta} = 0 \quad \text{Ec. (2.26)}$$

de donde se obtiene la misma expresión de la sección anterior:

$$\mathbf{K} \Delta - \mathbf{f} = 0 \quad \text{Ec. (2.17)}$$

Y por tanto se llegan a los mismos resultados que cuando se aplica el Método de Galerkin, de ahí precisamente la popularidad de dicho método.

En muchos problemas o aplicaciones se conoce su principio variacional y lo más fácil quizás podría ser el partir del tal principio variacional. En otras aplicaciones por distintos motivos no se conoce su principio variacional pero en definitiva siempre se tiene la posibilidad de iniciar el proceso con las propias ecuaciones diferenciales.

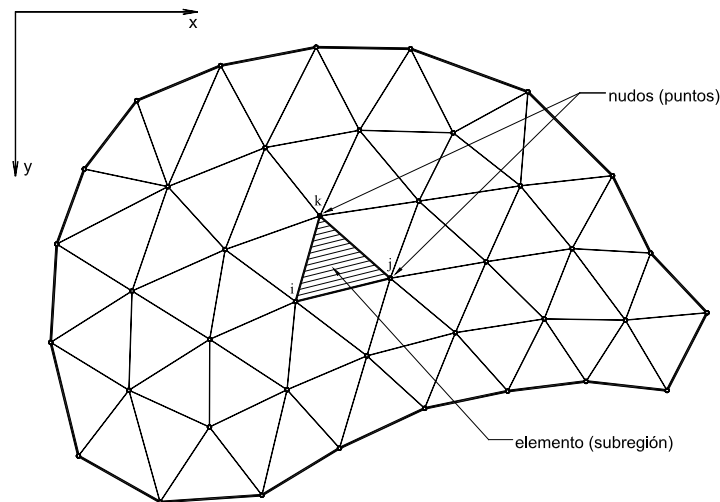
### 2.3.3 MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS

Se había comentado anteriormente que en las técnicas de parámetros indeterminados (Galerkin y sus similares) la dificultad está en escribir las funciones  $\mathbf{N}$  apropiadas que aproximen la función incógnita *en todo el medio estudiado*:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^m N_j \alpha_j = \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha} \quad \text{Ec. (2.4)}$$

Entonces, a diferencia de tales técnicas, en los procesos llamados de *Elementos Finitos* ese problema es resuelto olvidándose para empezar en pretender escribir una expresión única válida para toda la región estudiada, restricción innecesariamente impuesta y en su lugar se supone a la región estudiada dividida en subregiones (*elementos*, se diría en el contexto de los procesos de elementos finitos) como se muestra en la Figura 2.2, y para cada una de las subregiones por separado se hacen aproximaciones distintas, *de carácter local*, las cuales presentan la ventaja de que por complicadas que sean las expresiones, cuando se dice que se

va a aproximarlas localmente, se puede hacer aproximaciones relativamente simples y todavía se consiguen resultados aceptables.



**Figura 2.2 Medio estudiado descompuesto en una serie de subregiones o elementos triangulares.**

Esto entonces distingue a los procesos que hoy día se llaman de elementos finitos de los procedimientos de parámetros indeterminados de principios del siglo pasado; por consiguiente, los métodos de elementos finitos son un *caso particular* de los tales procesos clásicos de parámetros indeterminados.

No obstante, debería decirse asimismo, que si bien las aproximaciones de carácter local simplifican de alguna forma el poder escribir las expresiones, tienen sin embargo su lado malo en cuanto a que finalmente propician en que se caiga en un *gran* sistema de ecuaciones. Sin embargo como ahora se tienen herramientas que esa parte la hacen fácilmente, el enfoque es distinto de aquel que se tenía a principios del siglo pasado en donde simplemente no se podían plantear grandes sistemas de ecuaciones, mejor dicho, en teoría se podía pero en términos prácticos no.

Tal carácter local de las aproximaciones permite además obtener las correspondientes matrices de rigidez, fuerza y otras como un *ensamble* de las contribuciones de cada elemento o subregión con técnicas similares a las utilizadas para el análisis de estructuras de barras por



los métodos de rigideces que pueden considerarse tradicionales. Es por ello, que el método de los elementos finitos es considerado también como una *extensión* de los procedimientos tradicionales de análisis de estructuras de barras.

De otro lado, un segundo cambio importante que se encuentra entre los procesos clásicos y los que hoy día se hace en el contexto este de los elementos finitos, es el de que normalmente los parámetros indeterminados  $\alpha$  tienen un significado físico: *son los propios valores de la función incógnita en ciertos puntos del modelo denominados nudos* (ver Figura 2.2). Típicamente los parámetros  $\alpha$  tienen un significado físico; eso no es indispensable, pues hay por lo menos algunos elementos finitos que incluyen una serie de parámetros sin un significado físico directo, pero lo habitual, lo que normalmente se hace es que los parámetros  $\alpha$  sean los valores de la incógnita en los nudos, y entonces las funciones de aproximación son *funciones de interpolación*. Es decir, cuando se plantea para un elemento:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^m N_j u_j = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad \text{Ec. (2.27)}$$

donde  $u_j$  representa ahora a los valores de la incógnita en los  $m$  nudos del elemento, lo que se está ahí planteando es realmente una expresión para interpolar las  $u$  de los nudos y obtener la  $u$  en el interior del elemento.

Para terminar, vale la pena mencionar que el método de los elementos finitos es considerado actualmente, dada su extendida aplicabilidad en diversos campos (no solo ingenieriles) como *una técnica general para resolver ecuaciones en derivadas parciales*.

## 2.4 CONVERGENCIA EN UN MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Se conoce como *convergencia*, hablando de un proceso de elementos finitos y no necesariamente refiriéndose a un procedimiento iterativo, a la propiedad por la cual el modelo produce resultados mejores (cada vez más cercanos a lo exacto) a medida que los elementos (de la misma calidad) se van haciendo más pequeños.

En otros contextos, por ejemplo para un procedimiento iterativo, se hablaría de convergencia, cuando sucesivas iteraciones producen resultados mejores pero manteniendo esencialmente el mismo modelo matemático. En cambio, en el contexto de los elementos finitos, se habla de una situación un poco distinta en la cual se hace un análisis y se obtienen ciertos resultados, después se toma otra malla de elementos finitos con elementos más pequeños y se obtienen otros resultados, se toma elementos todavía más pequeños y se obtienen otros resultados; y la idea es que a medida en que los elementos sean más y más pequeños los resultados sean cada vez mejores, un poco compensando si se quiere el mayor esfuerzo de cómputo que se estaría haciendo.

La convergencia requiere que las aproximaciones satisfagan condiciones de consistencia y de continuidad.

### 2.4.1 CONSISTENCIA

Es la propiedad por la cual la aproximación numérica que se está haciendo reproduce formalmente las ecuaciones diferenciales que se están resolviendo al hacer los elementos de dimensión diferencial. Dicho así, no es tan fácil ver que condiciones deben cumplir las tales aproximaciones de elementos finitos para que haya efectivamente consistencia.

Alternativamente, se podría decir que hay consistencia si las aproximaciones que se hacen de las funciones incógnitas son tales que permiten reproducir exactamente lo que se daría en el elemento diferencial, que es el que sustenta todo el desarrollo de las ecuaciones diferenciales que se están resolviendo, desde ese enfoque se concluye que [24]:

Si en la formulación se tiene la(s) función(es) incógnita y sus derivadas hasta de orden  $m$ , las aproximaciones deben ser *suficientemente derivables* y deben poder reproducir *exactamente* situaciones en las que la(s) función(es) incógnita o cualquiera de sus derivadas hasta de orden  $m$  son constantes.

Esta condición es *indispensable*. Algunos elementos finitos de los años 60, particularmente para cáscaras, no cumplían esta condición de consistencia y por tanto no funcionaron y no hay esperanza de que funcionen ni siquiera aproximadamente. Esta condición tendría que ser completada por otra que es la condición llamada de continuidad.

## 2.4.2 CONTINUIDAD

Este segundo aspecto se relaciona con el poder expresar las integrales en todo el medio estudiado como una sumatoria de las integrales análogas sobre cada subregión o elemento por separado. Es cierto que las expresiones que se plantean para cada elemento son independientes de elemento a elemento pero hay un mínimo de continuidad entre un elemento y el siguiente elemento adyacente que se hace necesaria para que el proceso funcione.

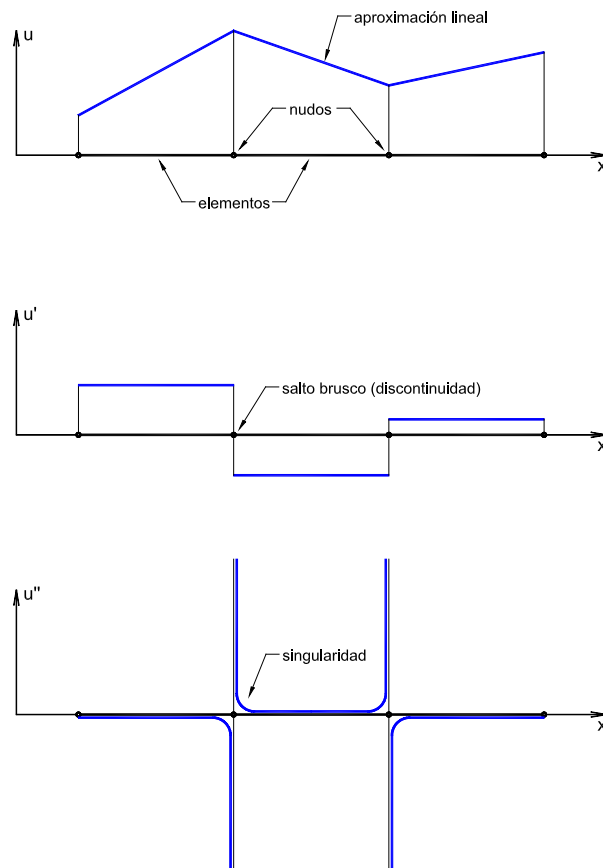
Para aclarar este concepto supóngase que se tiene una situación monodimensional, para la cual se podría estar planteando en cada elemento aproximaciones lineales para una cierta función incógnita  $u$  (ver Figura 2.3). Entonces, si en la formulación se tuvieran por ejemplo la función  $u$  y su derivada de orden uno, no se tendría ningún problema en expresar las integrales en toda la región estudiada por una sumatoria de integrales análogas sobre cada elemento:

$$\int_{\Omega} F(u, u') dx = \sum_e \int_{\Omega_e} F(u, u') dx \quad \text{Ec. (2.28)}$$

La descomposición anterior podría ser hecha en este caso, porque el integrando sería *finito* en los bordes entre elementos (porque  $u$  y  $u'$  son finitos en los bordes entre elementos). Pero, si en la tal formulación intervinieran adicionalmente derivadas segundas, entonces no podría hacerse la descomposición como en la Ec. 2.28 (si la aproximación es lineal, como en la Figura 2.3) porque el integrando contendría valores de la derivada segunda que serían infinitos en los bordes entre elementos y la descomposición en integrales parciales no sería correcta. Se requeriría en tal situación plantear una aproximación tal que garantice que las derivadas primeras incluso sean continuas y por tanto las derivadas segundas permanecerían finitas en los bordes entre elementos.

Se dice que cuando solamente la función es continua y su primera derivada ya tiene estos saltos bruscos (como en la Figura 2.3) la función tiene una continuidad  $C_0$ . Cuando se tiene continuidad en la función y su primera derivada, se dice que se tiene una continuidad  $C_1$ , y así sucesivamente. Con todo lo anterior, se puede escribir algo más concreto y práctico con relación a la condición de continuidad [24]:

Si en la formulación, se tiene la(s) función(es) incógnita y sus derivadas hasta de orden  $m$ , las aproximaciones deben ser tales que se tenga *continuidad* para la función y sus derivadas hasta de orden  $(m-1)$  en los bordes entre elementos.

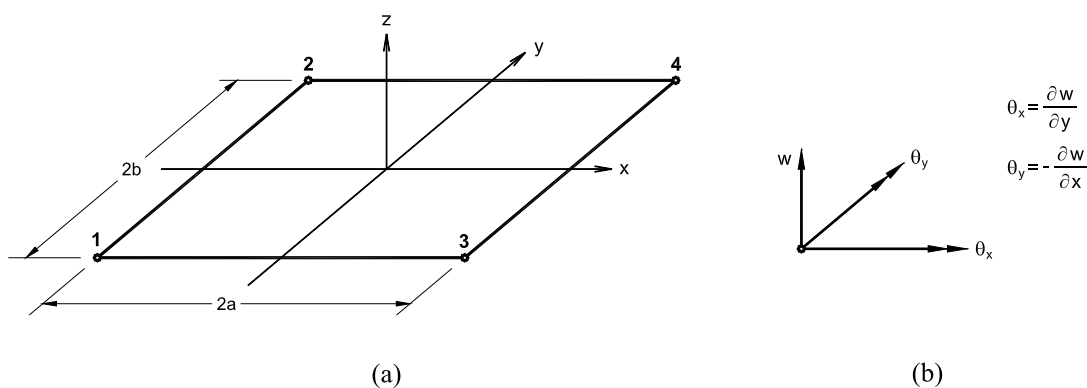


**Figura 2.3 Medio estudiado monodimensional y diferenciación de una función con la primera derivada discontinua (continuidad  $C_0$ ).**

Esta condición de continuidad ha sido materia de muchos conflictos en el desarrollo de los elementos finitos, porque hay elementos que definitivamente la han incumplido y a pesar de todo en ciertas condiciones funcionaban. El elemento de Melosh presentado a continuación es quizás el ejemplo más conocido, un elemento que tiene en su formulación derivadas segundas del desplazamiento transversal pero incumple la condición de continuidad en cuanto a las derivadas primeras en dirección perpendicular a cada borde.

## 2.5 ELEMENTO CLÁSICO DE LOSAS (MELOSH, 1962) [24, 31]

El elemento finito para losas de Melosh es un elemento rectangular de 4 nudos (ver Figura 2.4a), lo que lo hace para empezar muy restrictivo en cuanto a geometría.



**Figura 2.4** Elemento rectangular para losas de Melosh. a) Geometría del elemento. b) Grados de libertad en cada nudo.

En dicho elemento, se considera como incógnitas en cada nudo  $n$ : el desplazamiento transversal  $w_n$ , el giro alrededor del eje  $x$   $(\theta_x)_n$  y el giro alrededor del eje  $y$   $(\theta_y)_n$ . (ver Figura 2.4b).

Tal elemento es esencialmente un modelo de desplazamientos con interpolaciones para el desplazamiento transversal que incluyen todos los términos de hasta un polinomio completo de tercer grado y algunos términos del de cuarto grado, en la forma siguiente:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad \text{Ec. (2.29)}$$

El elemento de Melosh fue el elemento más conocido para el análisis de losas por algunos años, sin embargo es un elemento que no satisface en forma completa la condición de continuidad. Ello se debe a que en la formulación del elemento de Melosh, que está basado en energía potencial, ver Ecs. (3.30), aparecen *derivadas segundas del desplazamiento transversal*, por tanto, se tiene la necesidad de tener continuidad entre elementos del tipo  $C_1$ ,

es decir, continuidad para la función de aproximación de desplazamientos como para sus derivadas primeras en los bordes entre elementos, lo cual constituye una *complicación* para las derivadas primeras en dirección perpendicular a cada borde. Para entender mejor lo anterior, se puede observar que cuando la expresión propuesta (Ec. 2.29) se la particulariza a lo largo de cualquier recta  $x = \text{constante}$  o  $y = \text{constante}$ , el desplazamiento transversal  $w$  variará según una expresión de tercer grado; considerando por ejemplo  $w$  y  $\partial w/\partial y$  a lo largo de una recta para la que  $x$  sea constante, se obtendrán expresiones de la forma:

$$w = \beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 y^2 + \beta_4 y^3 \quad \text{Ec. (2.30)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \beta_2 + 2\beta_3 y + 3\beta_4 y^2 \quad \text{Ec. (2.31)}$$

Ahora bien, los bordes del elemento se componen de rectas como las mencionadas, y dado que un polinomio de tercer grado se define unívocamente a través de cuatro constantes, los dos valores de los giros y desplazamientos en los extremos de los bordes definirán, por tanto de manera única los desplazamientos a lo largo de dichos bordes. Como tales valores extremos son comunes para elementos adyacentes, quedará *impuesta la continuidad de  $w$*  a lo largo del límite de separación entre elementos, y asimismo en forma automática la de la derivada tangencial. Sin embargo, se podrá notar, que la derivada de  $w$  a lo largo de la normal a cualquiera de los bordes queda descrita también por un polinomio cúbico; considerando por ejemplo ahora la  $\partial w/\partial x$  a lo largo de la misma recta para la que  $x$  es constante, se obtendrá en este caso una expresión de la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_1 + \gamma_2 y + \gamma_3 y^2 + \gamma_4 y^3 \quad \text{Ec. (2.32)}$$

Pero, como en tales bordes solo están definidos dos valores de la derivada normal, dicho polinomio de tercer grado no estará definido de manera única, por tanto, en general, se tendrá una *discontinuidad* de la derivada normal.

Por consiguiente, el elemento de Melosh no cumple la condición de continuidad totalmente, sin embargo, tal condición no es absolutamente necesaria, pues, cuando se la

incumple, la convergencia puede darse, aún cuando no muestra ciertas características que serían *deseables*. Por ejemplo, cuando se usa el elemento de Melosh para analizar situaciones más o menos conocidas (puede verse la Sección 5.3.1.1, en particular las Tablas 5.11 al 5.12 y las Figuras 5.12 al 5.17), se encuentra que da resultados aceptables aunque para ello se requiera utilizar mallas relativamente finas. La precisión obtenida con tal elemento no es tan buena, por poner un caso que está mostrado en la Tabla 5.12 correspondiente al momento flector  $M_x$  en el centro de una losa cuadrada con apoyo simple en todos sus bordes y uniformemente cargada. En ella se observa que empleando un solo elemento HTR3 (desarrollado en este trabajo, ver Capítulo 4) para el cuarto de losa analizado, se obtiene un error del orden del 1%, mientras que se requiere una malla de 535 elementos del tipo de Melosh (ambos elementos son rectangulares de 4 nudos y 12 GDL) para obtener un error del orden del 1.3%.

El tal elemento de Melosh y otros fueron materia de conflicto entre ingenieros y matemáticos durante toda la década de los años 60. Sin embargo, el gran inconveniente del elemento de Melosh es que *no puede hacerse isoparamétrico*. El elemento, como planteado originalmente es decir el elemento rectangular, satisface las condiciones de consistencia, puesto que al tenerse en las expresiones que gobiernan el problema (energía potencial en este caso) derivadas segundas del desplazamiento transversal, la expresión de aproximación debe ser tal que se puedan representar exactamente situaciones en que dicho desplazamiento transversal o cualquiera de sus derivadas hasta de orden dos sean constantes, lo cual puede verificarse en la Ec. (2.29). Pero, cuando se intenta hacer ciertas transformaciones, para hacer del elemento de Melosh lo que se llamaría un elemento isoparamétrico, construir aproximaciones análogas pero ahora con un elemento de forma más general como un cuadrilátero, el elemento no funciona, porque al hacer ese tipo de transformación, se incumple la condición esencial de consistencia mencionada arriba, pues ya no puede representar exactamente situaciones en que las segundas derivadas que aparecen en las expresiones (las curvaturas) sean constantes. Por tanto, el elemento de Melosh no puede hacerse isoparamétrico, a lo más puede ser un paralelogramo pero nunca un elemento cuadrilátero en forma general.

Para terminar, y como consecuencia de todo lo anteriormente presentado, el elemento de Melosh de los años 60 es pues un elemento problemático, sin embargo, nos sirve básicamente como referencia para comprender las dificultades que se tuvieron en el caso de

losas delgadas, donde el funcional de energía potencial contiene derivadas segundas de la función incógnita. Tales dificultades y/o limitaciones son las que impulsaron a los investigadores a buscar nuevas formulaciones alternativas (algunas de ellas son presentadas en el capítulo siguiente) con la finalidad de encontrar mejores elementos que, por ejemplo, se adapten mejor a la geometría y produzcan al mismo tiempo resultados de un mayor grado de precisión, por tanto, disminuyendo en la práctica el esfuerzo del usuario.





## Capítulo 3

# ALTERNATIVAS PARA LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LOSAS

### 3.1 INTRODUCCIÓN

La formulación tradicional de elementos finitos para resolver problemas de elasticidad, llamada *Formulación de Desplazamientos o de Modelos Compatibles*, sigue siendo el procedimiento más extendido y fácilmente comprensible. Tal formulación no es la única forma para resolver las ecuaciones de elasticidad vía elementos finitos. En la literatura hay una variedad de distintas formulaciones. Por ejemplo, se podrían desarrollar ciertos modelos *Mixtos* en que se hacen aproximaciones no solamente para los desplazamientos sino también para ciertas medidas de esfuerzos; hay también en la literatura de elementos finitos una serie de modelos denominados *Híbridos*, como los llamados *Híbridos de Trefftz*, los cuales están basados en funciones que satisfacen a priori la ecuación diferencial gobernante.

Para poder hablar luego sobre esas alternativas y su aplicación al análisis de losas, se pretende revisar previamente ciertos conceptos básicos relacionados al cálculo variacional, así como algunos de los principios variacionales que tienen que ver con el análisis estructural, pues son ellos los que permiten dar las bases para el desarrollo de estos distintos modelos híbridos, mixtos y demás.

### 3.2 PRINCIPIOS VARIACIONALES Y SU RELACIÓN CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

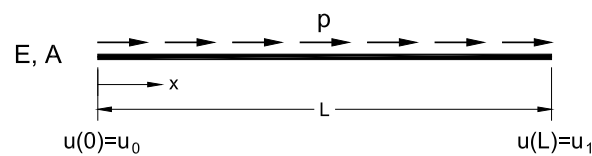
En lugar de enfocar el problema de determinar las funciones que satisfacen un grupo de ecuaciones diferenciales, puede plantearse la de hallar las funciones que hacen *estacionaria* una cierta expresión matemática conocida como *funcional* o *principio variacional* [12]. Por ejemplo, en lugar de proponer la ecuación diferencial:

$$EAu'' + p = 0; \quad u(0) = u_0, \quad u(L) = u_1 \quad \text{Ec. (3.1)}$$

la cual tiene que ver con el sencillo caso de una barra de sección transversal  $A$  y módulo de elasticidad  $E$ , sujeta a cierta acción distribuida axial  $p$ , como el de la Figura 3.1, se puede hallar la función  $u$  que hace estacionaria (mínima en este caso) la siguiente expresión:

$$\Pi_p(u) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} EA(u')^2 - pu \right] dx; \quad u(0) = u_0, \quad u(L) = u_1 \quad \text{Ec. (3.2)}$$

Ambos enfoques constituyen formas alternativas de plantear lo mismo.



**Figura 3.1 Barra sometida a una fuerza repartida axial.**

Ahora bien, con respecto al funcional anterior, él corresponde a una situación monodimensional y que en este caso es de la forma:

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \quad \text{Ec. (3.3)}$$

En esta expresión,  $F$  es una función conocida de  $x$ ,  $u$  (una función desconocida) y de eventualmente sus derivadas. En el funcional expresado por la Ec. (3.3) se ha escrito solo la primera derivada  $u'$ , pero se podría tener en un caso más elaborado una función  $F$  de  $u$ ,  $u'$ ,  $u''$ , etc., o se podría alternativamente tener la expresión (3.3) como una integral en una región digamos bidimensional y por tanto la  $F$  sería una función de  $x$ ,  $y$ ,  $u$ , y de las derivadas de  $u$  con relación a  $x$  e  $y$ , y las combinaciones, entre otras posibilidades.

En cuanto al criterio que se usa para decir que el funcional es estacionario, este se parece al caso de tener que hallar el mínimo, el máximo o el punto de inflexión de una función  $f(x)$ . Es decir, se halla ese mínimo o ese máximo argumentando que al hacer pequeños cambios en el valor de la abscisa, los cambios de primer orden en la función son cero, de donde sale la condición justamente de que:  $f'(x) = 0$ .

Aquí también, Ec. (3.3), se puede decir que el funcional evaluado en  $u + \eta$  (haciendo una pequeña variación a la función) puede escribirse como el funcional evaluado para la función  $u$  (que es la solución del problema) más los cambios de primer orden que en este contexto se llamaría *la primera variación del funcional*  $\delta\Pi$ , más los cambios de segundo orden que en forma similar se llamaría *la segunda variación del funcional*  $\delta^2\Pi$ , y así sucesivamente:

$$\Pi(u + \eta) = \Pi(u) + \delta\Pi + \delta^2\Pi + \dots \quad \text{Ec. (3.4)}$$

luego, se diría que el funcional es *estacionario* cuando:

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{Ec. (3.5)}$$

Es decir, cuando los cambios de primer orden son cero. Y se puede tener un mínimo si es que la segunda variación del funcional es positiva, y un máximo si la segunda variación del funcional es negativa y si es cero se tendría simplemente un punto estacionario.

Para el sencillo caso monodimensional que se está viendo, se tendría la siguiente expresión para la primera variación del funcional:

$$\delta\Pi = \int_a^b \left( \eta \frac{\partial F}{\partial u} + \eta' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx \quad \text{Ec. (3.6)}$$

Luego de igualar a cero y de hacer un poco de análisis se obtendría la siguiente relación conocida como *la ecuación de Euler Lagrange del funcional*:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad \text{Ec. (3.7)}$$

La expresión anterior es una ecuación diferencial que es equivalente a la condición de que el funcional expresado por la Ec. (3.3) sea estacionario. En general, es relativamente simple determinar las ecuaciones diferenciales a la que es equivalente un principio variacional; aunque lo inverso no siempre es posible.

El exigir que el funcional sea estacionario puede a su vez plantearse utilizando un procedimiento tipo Rayleigh-Ritz como se explicó en la Sección 2.3.2., de ese modo se puede sacar provecho de estos funcionales o principios variacionales para obtener ciertas ventajas en el desarrollo de elementos finitos como se verá más adelante.

De otro lado, y como se vio en el capítulo 1, en la solución de un problema de elasticidad se deben resolver tres grupos de ecuaciones:

- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuaciones de continuidad geométrica
- Relaciones constitutivas

La solución puede obtenerse planteando aproximaciones para las funciones incógnitas que satisfagan exactamente algunas de estas ecuaciones y utilizando un principio variacional equivalente a las restantes ecuaciones. Por ejemplo, el funcional de Energía Potencial, que es equivalente a las ecuaciones de equilibrio, puede utilizarse en un cierto desarrollo de elementos finitos en donde se planteen aproximaciones para los desplazamientos que cumplan exactamente las ecuaciones deformación-desplazamiento y esfuerzo-deformación.

El partir de un principio variacional conocido, utilizando las aproximaciones de elementos finitos, en lugar de partir de las propias ecuaciones diferenciales equivalentes, tiene

la ventaja inicial de una formulación notoriamente más simple. Sin embargo, la principal ventaja de utilizar un principio variacional como base, es la de poder salirse de una serie de restricciones que tienen las ecuaciones diferenciales, ya que al trabajar con los principios variacionales puede liberarse por ejemplo la condición de tener funciones únicas, es decir, aplicables para toda la región estudiada y se puede hacer una serie de planteamientos no muy tradicionales como son suponer por ejemplo en los distintos elementos finitos aproximaciones para los desplazamientos en el borde de los elementos y aproximaciones totalmente independientes en una primera instancia para los esfuerzos en el interior del elemento.

En lo que sigue se revisan los principios variacionales *más conocidos* en el análisis estructural y a que ecuaciones diferenciales equivalen, de esa forma se podrá luego hablar con más comodidad sobre algunos modelos de elementos finitos para losas que son el tema principal de este capítulo. Por ejemplo, hay algunos principios variacionales como el de Energía Potencial mencionado arriba que equivale directamente a las ecuaciones de equilibrio y no más que eso; hay otros como el de Energía Complementaria que es directamente equivalente a las condiciones de continuidad geométrica; existe el funcional de Reissner que equivale tanto a las ecuaciones de equilibrio como a las condiciones de continuidad geométrica y hay principios variacionales más elaborados como el de Hu-Washizu que equivale a los tres grupos de ecuaciones.

### 3.2.1 PRINCIPIO DE MÍNIMA ENERGÍA POTENCIAL

El Funcional de Energía Potencial ( $\Pi_p$ ) [20], es una reexpresión de las ecuaciones diferenciales de equilibrio. Es un funcional que está escrito en términos de desplazamientos y de sus derivadas y que puede expresarse como la suma de la Energía de Deformación ( $U$ ) y el Potencial de las Cargas Aplicadas ( $V$ ) [13]:

$$\Pi_p = U + V \quad \text{Ec. (3.8)}$$

La energía de deformación puede a su vez escribirse, en notación indicial, como:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad \text{Ec. (3.9)}$$

Pero en el caso del funcional de energía potencial, todos los términos se escriben en función de desplazamientos; por tanto, reemplazando en la Ec. (3.9) la siguiente relación [26]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{Ec. (3.10)}$$

y aprovechando la simetría del tensor  $C_{ijkl}$  con relación a los índices  $i,j$  y  $k,l$ , pueden reescribirse los siguientes productos:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} &= C_{ijkl} u_{i,j} \\ C_{ijkl} \varepsilon_{kl} &= C_{ijkl} u_{k,l} \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.11)}$$

con lo cual, la energía de deformación puede terminar escribiéndose en función de los desplazamientos como:

$$U = \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV \quad \text{Ec. (3.12)}$$

De otro lado, el potencial de las cargas aplicadas es simplemente la sumatoria de menos las distintas cargas por sus correspondientes desplazamientos:

$$V = - \int_V u_i \bar{b}_i dV - \int_{S_\sigma} u_i \bar{t}_i dS \quad \text{Ec. (3.13)}$$

donde:

$u_i$  = componente de desplazamiento

$\bar{b}_i$  = componente de las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen

$\bar{t}_i$  = componente de las tracciones de borde prescritas

$S_\sigma$  denota las partes del borde donde las tracciones están prescritas. Mientras que en el resto del borde, que en lo sucesivo se denotará como  $S_u$ , los desplazamientos son los conocidos.

Finalmente, escribiendo ahora  $\Pi_p(u_i)$  para enfatizar que la energía potencial es un funcional escrito en términos de ciertas funciones desconocidas  $u_i$  que son las componentes de desplazamiento, se tiene:

$$\Pi_p(u_i) = \int_V \left( \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} - u_i \bar{b}_i \right) dV + \int_{S_\sigma} (-u_i \bar{t}_i) dS \quad \text{Ec. (3.14)}$$

A continuación, lo que se pretende revisar rápidamente es que el afirmar que el funcional expresado por la Ec. (3.14) es *estacionario* (mínimo realmente en este caso) equivale a afirmar que se cumplen ciertas ecuaciones diferenciales y ciertas condiciones de borde.

Para empezar, la ecuación anterior es de la forma:

$$\Pi(u_i) = \int_V F(x_i; u_i; u_{i,j}) dV + \int_{S_\sigma} G(x_i; u_i) dS \quad \text{Ec. (3.15)}$$

en cuyo caso, las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional son:

1) EN EL INTERIOR DE LA REGIÓN ESTUDIADA:

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right) = 0 \quad \text{en} \quad V \quad \text{Ec. (3.16)}$$

es decir: 
$$\sigma_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \quad \text{en} \quad V \quad \text{Ec. (3.17)}$$

las cuales son las ecuaciones diferenciales de equilibrio en el interior de la región en estudio.



2) EN EL BORDE:

$$\frac{\partial G}{\partial u_i} + n_j \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} = 0 \quad \text{en} \quad S_\sigma \quad \text{Ec. (3.18)}$$

es decir: 
$$n_j \sigma_{ij} = \bar{t}_i \quad \text{en} \quad S_\sigma \quad \text{Ec. (3.19)}$$

que son las condiciones de equilibrio en el borde donde las tracciones están prescritas.

La conclusión es que el afirmar que la expresión dada por la Ec. (3.14) que se llama energía potencial es *estacionaria*, equivale a decir que se deben cumplir ciertas condiciones que son justamente las *Condiciones de Equilibrio* expresadas por las Ecs. (3.17) y (3.19).

El funcional de energía potencial no tiene pues una relación directa con las otras condiciones como son las condiciones de continuidad geométrica o las relaciones entre esfuerzos y deformaciones. Por consiguiente, si el desarrollo de elementos finitos se basa en el funcional de energía potencial para garantizar que las ecuaciones tengan los menores errores posibles, realmente lo que se está haciendo es minimizando los errores en las condiciones de equilibrio, pero no se está diciendo nada con relación a los otros grupos de ecuaciones. Se tendría pues que partir de un planteamiento que garantice que las otras ecuaciones son satisfechas y eso es lo que hace el modelo digamos tradicional de elementos finitos, donde se empieza escribiendo aproximaciones para los desplazamientos, como las típicas aproximaciones de parámetros indeterminados mostradas anteriormente a través de las Ecs. (2.3) o (2.4):

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.20)}$$

A partir de ahí, por derivación se escriben las deformaciones unitarias:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.21)}$$

donde  $\partial \mathbf{u}$  es simplemente un simbolismo para denotar ciertas derivadas apropiadas de las  $\mathbf{u}$ . Y luego se escriben los esfuerzos como ciertas constantes elásticas por las deformaciones:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.22)}$$

Enseguida se pretende emplear el procedimiento de Rayleigh-Ritz (ver Sección 2.3.2); pero antes de ello, se puede reescribir lo equivalente al funcional de energía potencial, expresado por la Ec. (3.14), en un lenguaje matricial.

Suponiendo que los esfuerzos están agrupados en una matriz columna  $\boldsymbol{\sigma}$ , y en forma similar para las otras cantidades, se puede reescribir entonces la Ec. (3.14) como:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} \right) dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad \text{Ec. (3.23)}$$

Sin embargo, para explicitar que energía potencial es una expresión que depende de los desplazamientos, se puede escribir en la expresión anterior  $\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$  en lugar de  $\boldsymbol{\sigma}$ , y en lugar de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  una cierta derivación apropiada de las  $\mathbf{u}$ , obteniendo:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \int_V \left[ \frac{1}{2} (\partial \mathbf{u})^T \mathbf{D} (\partial \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} \right] dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad \text{Ec. (3.24)}$$

Reemplazando el tipo de aproximaciones (3.20) y sus consecuencias (3.21) y (3.22) en el funcional de energía potencial (3.23) o (3.24), se obtiene la siguiente *función* de los parámetros indeterminados  $\mathbf{q}$ :

$$\Pi_p(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.25)}$$

donde:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad \text{Ec. (3.26)}$$

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad \text{Ec. (3.27)}$$

Finalmente, exigiendo que las derivadas de la función  $\Pi_p$  con relación a cada uno de los distintos  $\mathbf{q}$  sean cero:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.28)}$$

conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales, que en este caso es la tradicional expresión de rigidez por desplazamientos igual a fuerzas:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.29)}$$

En el caso de losas delgadas la Energía Potencial se escribe como:

$$\Pi_p(w) = \int_A \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{L} \nabla w)^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \nabla w) - w^T p \right] dA + \text{t. de borde} = \text{MÍNIMA} \quad \text{Ec. (3.30a)}$$

o alternativamente:

$$\Pi_p(w) = \int_A \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} - w^T p \right) dA + \text{t. de borde} = \text{MÍNIMA} \quad \text{Ec. (3.30b)}$$

donde:

$$\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{L} \nabla w = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} w = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} w \quad \text{Ec. (3.31)}$$

representa el vector de curvaturas, Ec. (1.18); mientras que  $\mathbf{D}$  está dada por la Ec. (A.5) y  $p$  indica la carga uniformemente distribuida.

Tales expresiones (3.30) representan simplemente una particularización del funcional de energía potencial, Ec. (3.23) o (3.24), para losas delgadas y pueden ser obtenidas de la Ec. (A.16) para losas gruesas con las correspondientes simplificaciones para losas delgadas.

Al hacer la aproximación por elementos finitos para el desplazamiento transversal en función de los desplazamientos de los nudos:

$$w = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.32)}$$

se obtienen por derivaciones apropiadas de la expresión anterior dos veces:

$$\boldsymbol{\kappa} = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -\frac{2\partial^2}{\partial x \partial y} \right]^T \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.33)}$$

Seguidamente, sustituyendo las Ecs. (3.32) y (3.33) en la expresión de la energía potencial, Ec. (3.30b), es decir haciendo un proceso de Rayleigh-Ritz, se obtendría simplemente una función de los parámetros nodales  $\mathbf{q}$ :

$$\Pi_p(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.34)}$$

donde:

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad \text{Ec. (3.35)}$$

$$\mathbf{f} = \int_A \mathbf{N}^T p dA + \text{t. de borde} \quad \text{Ec. (3.36)}$$

Por último, exigiendo que la expresión (3.34) sea mínima se obtienen las condiciones para determinar los  $\mathbf{q}$ , para lo cual se exige que las distintas derivadas de  $\Pi_p$  respecto a cada uno de los  $\mathbf{q}$  sean cero:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.37)}$$

Obteniendo así una expresión similar a la Ec. (3.29):

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.38)}$$

Aparentemente no hay mayor diferencia (salvo una ligera discrepancia en las expresiones que determinan los términos de la  $\mathbf{D}$  y de la  $\mathbf{B}$  por ejemplo) con respecto a lo que se tendría en el estado plano e incluso en el análisis tridimensional. Sin embargo, hay un detalle que si es muy importante, aunque está algo oculto en las Ecs. (3.38) o (3.34) y es un poco más evidente en las Ecs. (3.30); más concretamente, a raíz de las hipótesis de Kirchhoff, se tienen en las expresiones *derivadas segundas del desplazamiento transversal* [ver por ejemplo las Ecs. (3.30)], lo cual implica que se tiene que tener continuidad entre elementos no solamente para la función de aproximación del desplazamiento transversal sino también para las derivadas primeras, lo cual es una complicación para las derivadas en dirección normal a los bordes (ver Sección 2.5). Recién a fines de los años 60 así como en las décadas siguientes se desarrollaron algunos elementos finitos basados en energía potencial que satisfacen completamente las condiciones de continuidad entre elementos y que al mismo tiempo tienen un comportamiento aceptable, como puede verse por ejemplo en la Sección 3.3.

### 3.2.2 EL FUNCIONAL DE REISSNER

Es un funcional dependiente de dos grupos de funciones que son: las componentes de desplazamiento ( $u_i$ ) y las componentes de esfuerzo ( $\sigma_{ij}$ ). Por tanto, en el funcional de Reissner deben considerarse a tales cantidades como si fueran funciones totalmente independientes entre sí.

El funcional de Reissner ( $\Pi_R$ ) puede escribirse en varias formas; la siguiente es una alternativa [20]:

$$\begin{aligned} \Pi_R(u_i, \sigma_{ij}) = & \int_V \left[ -\frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - u_i \bar{b}_i \right] dV - \\ & - \int_{S_\sigma} u_i \bar{t}_i dS - \int_{S_u} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.39)}$$

En esta expresión,  $u_i$  representa las componentes de desplazamiento;  $u_{i,j}$  denota la derivada de la componente de desplazamiento  $u_i$  con relación a  $x_j$ ; los  $\sigma_{ij}$  son las componentes de esfuerzo. Las  $S_{ijkl}$  son ciertas cantidades que relacionan las componentes de deformación con las correspondientes componentes de esfuerzo, es decir, si se escriben las relaciones (3.10) al revés, despejando si se quiere las deformaciones unitarias en función de los esfuerzos, se tendría:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{Ec. (3.40)}$$

Además, se está llamando  $\bar{b}_i$  a las componentes de las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen;  $\bar{t}_i$  a las componentes de tracciones de borde prescritas en el borde  $S_\sigma$ ;  $t_i$  denota lo calculado a partir de los esfuerzos:  $t_i = n_j \sigma_{ij}$ ; mientras que  $\bar{u}_i$  indica los valores conocidos de los desplazamientos en el borde  $S_u$ .

Cuando se hace un análisis de este principio variacional se encuentra que tiene como ecuaciones de Euler-Lagrange dos grupos de ecuaciones: las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de continuidad geométrica o de compatibilidad:

1) EN EL INTERIOR DE LA REGIÓN ESTUDIADA:

a) Las ecuaciones diferenciales de equilibrio:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \quad \text{en} \quad V \quad \text{Ec. (3.41)}$$

b) Las relaciones de continuidad geométrica:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{en} \quad V \quad \text{Ec. (3.42)}$$

2) EN EL BORDE:

a) Las condiciones de equilibrio en el borde  $S_\sigma$  donde las tracciones están prescritas:

$$n_j \sigma_{ij} = \bar{t}_i \quad \text{en} \quad S_\sigma \quad \text{Ec. (3.43)}$$

b) Las condiciones de continuidad geométrica en el borde  $S_u$  donde los desplazamientos son conocidos:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en} \quad S_u \quad \text{Ec. (3.44)}$$

Por tanto, cuando este principio variacional es utilizado en un proceso como el de Rayleigh-Ritz, se encarga de dar a los parámetros (a los valores nodales) los valores óptimos para que tales ecuaciones, (3.41) al (3.44), sean satisfechas lo mejor posible, con las limitaciones que se han impuesto por las aproximaciones.

A continuación, se presenta el funcional de Reissner en un lenguaje matricial:

$$\Pi_R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \left[ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T (\partial \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} \right] dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS - \int_{S_u} \mathbf{t}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dS \quad \text{Ec. (3.45)}$$

donde como antes,  $\partial \mathbf{u}$  es un simbolismo para denotar ciertas derivadas de los desplazamientos  $\mathbf{u}$ . Asimismo,  $\mathbf{S}$  es la matriz que relaciona todas las medidas de deformación con las correspondientes medidas de esfuerzo, y para las demás cantidades un significado similar a aquellas dadas para la Ec. (3.39).

Supóngase que se utiliza el funcional de Reissner, Ec. (3.45), como base para hacer un desarrollo de elementos finitos. En ese caso, los esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  podrían escribirse como interpolaciones de ciertos valores nodales  $\boldsymbol{\beta}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} \quad \text{Ec. (3.46)}$$

donde estos  $\boldsymbol{\beta}$  podrían ser los esfuerzos en los nudos, los momentos de flexión por unidad de longitud en los nudos, o en general, ciertos parámetros asociados a los esfuerzos. Del mismo modo, partiendo de la expresión anterior para los esfuerzos, por proyecciones apropiadas en el borde se pueden obtener  $t_x, t_y, t_z$ , es decir, las componentes de tracciones de borde en el borde, pudiéndose escribir:

$$\mathbf{t} = \mathbf{L} \boldsymbol{\beta} \quad \text{Ec. (3.47)}$$

En forma similar que para los esfuerzos, para los desplazamientos se puede hacer otro tanto, es decir, se puede escribir  $\mathbf{u}$  como una interpolación de los desplazamientos nodales  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.48)}$$

y también, a partir de la expresión anterior, se puede derivar apropiadamente para obtener las deformaciones unitarias:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.49)}$$

La novedad aquí es que, además de plantear interpolaciones para los desplazamientos, se plantean interpolaciones separadas independientes para los esfuerzos o para ciertas medidas de esfuerzos. En el contexto de losas, las típicas medidas de esfuerzos no son propiamente los esfuerzos punto por punto sino las resultantes de esfuerzos en la sección expresadas por unidad de longitud de losa.

A continuación, para simplificar la expresión del funcional de Reissner, Ec. (3.45), supóngase que se toman aproximaciones tales que  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  en  $S_u$ , lo cual es similar a lo que se



haría en un modelo de desplazamientos, en donde, luego de armar las ecuaciones, se puede modificar el sistema de ecuaciones para imponer esa clase de condiciones de apoyo. Entonces, se puede cancelar el último término de la Ec. (3.45), quedando:

$$\Pi_R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \left[ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T (\partial \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} \right] dV - \int_{S_g} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad \text{Ec. (3.50)}$$

Al sustituir las Ecs. (3.46), (3.48) y (3.49), (nótese que ya no es necesaria la sustitución de la Ec. 3.47) en la expresión del funcional de Reissner, Ec. (3.50), se obtendría:

$$\Pi_R(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.51)}$$

donde:

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dV \quad \text{Ec. (3.52)}$$

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{B} dV \quad \text{Ec. (3.53)}$$

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_g} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad \text{Ec. (3.54)}$$

Llegado a este punto se puede decir que lo que se tiene ya no es un funcional sino una función de  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\mathbf{q}$ ; y para que la Ec. (3.51) sea estacionaria, se puede exigir que:

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad \xrightarrow{\text{de donde}} \quad -\mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{G} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.55)}$$

y asimismo, exigiendo que:

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \xrightarrow{\text{se obtiene}} \quad \mathbf{G}^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{0} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.56)}$$

lo cual produce finalmente el sistema de ecuaciones que se requiere para hallar los tales parámetros  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\mathbf{q}$ . Tal sistema de ecuaciones, puede también escribirse en la siguiente forma compacta:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (3.57)}$$

No se obtiene propiamente una formulación de rigidez, pues la matriz de coeficientes de la Ec. (3.57), llamada matriz *Hessiana*, interrelaciona no solamente medidas de desplazamientos con medidas de fuerzas, sino algo más que son los parámetros  $\boldsymbol{\beta}$  (que se asocian a los esfuerzos).

Esta clase de alternativa en que se tiene el sistema de ecuaciones mostrado en la Ec. (3.57), con incógnitas que son tanto parámetros asociados a esfuerzos como parámetros asociados a los desplazamientos, se llama una *formulación mixta*, o los modelos de elementos finitos así desarrollados se llaman *modelos mixtos*.

En el modelo mixto, la ventaja principal estaría en que se tendrían interpolaciones que pueden ser de la misma calidad para los esfuerzos y para los desplazamientos, y en consecuencia, se tendría esa convergencia mejor para los resultados de esfuerzos (momentos o directamente esfuerzos) que son típicamente las variables de mayor interés desde el punto de vista ingenieril.

Sin embargo, como contraparte, el modelo mixto presenta también algunas dificultades. Típicamente se tienen más incógnitas en cada nudo. Además, entre otros inconvenientes, se tiene una matriz de coeficientes, ver Ec. (3.57), que es simétrica pero *no es definida positiva*, lo cual origina ciertas preocupaciones en cuanto al proceso de solución, ya que en ese caso la literatura no llega a hacer afirmaciones muy útiles en relación al posible crecimiento de los errores.

### 3.2.3 EL FUNCIONAL DE ENERGÍA COMPLEMENTARIA

El principio variacional de energía complementaria ( $\Pi_C$ ) es una reexpresión de las condiciones de continuidad geométrica o de compatibilidad. Asimismo, representa una versión particularizada del funcional de Reissner, pues partiendo de este último funcional y suponiendo que se satisface perfectamente el equilibrio, tanto en el interior de la región estudiada como en el borde  $S_\sigma$ , se puede llegar a la expresión del funcional de energía complementaria. Éste está escrito en términos de esfuerzos y en notación indicial se puede expresar como [20]:

$$\Pi_C(\sigma_{ij}) = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} dV - \int_{S_u} t_i \bar{u}_i dS \quad \text{Ec. (3.58)}$$

donde,  $\sigma_{ij}$  denota las componentes de esfuerzo; las  $S_{ijkl}$  son cantidades que relacionan las medidas de deformación con las correspondientes medidas de esfuerzo;  $t_i$  las tracciones de borde calculadas a partir de los esfuerzos:  $t_i = n_j \sigma_{ij}$ ; y  $\bar{u}_i$  son los valores conocidos de los desplazamientos en el borde  $S_u$ .

Del mismo modo, el funcional de energía complementaria se puede expresar en términos matriciales como:

$$\Pi_C(\boldsymbol{\sigma}) = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_u} \mathbf{t}^T \bar{\mathbf{u}} dS \quad \text{Ec. (3.59)}$$

Cuando se hace estacionario este funcional (mínimo en este caso), se encuentra que tiene como ecuaciones de Euler-Lagrange a las condiciones de continuidad geométrica, es decir:

1) EN EL INTERIOR DE LA REGIÓN ESTUDIADA:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{en} \quad V \quad \text{Ec. (3.60)}$$

que son las ecuaciones deformación-desplazamiento en el interior de la región en estudio.

## 2) EN EL BORDE:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en} \quad S_u \quad \text{Ec. (3.61)}$$

las cuales son las condiciones de continuidad geométrica donde los desplazamientos están prescritos.

Por tanto, cuando se parte del funcional de energía complementaria se debe de tener en cuenta que este funcional equivale solamente a las condiciones de continuidad geométrica. El planteamiento para poder utilizar el funcional de energía complementaria como base para construir un modelo de elementos finitos sería escribir aproximaciones para los esfuerzos como por ejemplo:

$$\sigma = P\beta \quad \text{Ec. (3.62)}$$

que garanticen que el equilibrio es satisfecho perfectamente; asimismo, se debe de poner siempre que sea necesario las relaciones exactas entre esfuerzos y deformaciones. Luego, al sustituir tales aproximaciones en el funcional de energía complementaria, éste se encargaría de optimizar los parámetros de manera tal que las condiciones de continuidad geométrica sean satisfechas lo mejor posible.

Sin embargo, en lo anterior existe una dificultad seria para construir modelos de elementos finitos, ya que es difícil plantear para cada elemento expresiones separadas del tipo mostrado en la Ec. (3.62), que satisfagan completamente el equilibrio en los bordes entre elementos.

Una alternativa para poder satisfacer las condiciones de equilibrio es hacer el desarrollo sobre la base de una función de esfuerzos. Se pueden escribir los distintos esfuerzos como derivadas apropiadas de una cierta función de esfuerzos, que en la situación bidimensional por ejemplo podría ser la función de *Airy* ( $\phi$ ):

$$\sigma = \partial \phi \quad \text{Ec. (3.63)}$$

más explícitamente [26]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \text{Ec. (3.64)}$$

y suponiendo que no hayan fuerzas de cuerpo esas expresiones satisfecerían el equilibrio en forma automática.

Por tanto, se empezaría escribiendo  $\phi$  como una interpolación de valores nodales  $\Phi$ :

$$\phi = \mathbf{N} \Phi \quad \text{Ec. (3.65)}$$

Los esfuerzos, serían escritos como derivadas apropiadas de  $\phi$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial \phi = \mathbf{P} \Phi \quad \text{en} \quad V \quad \text{Ec. (3.66)}$$

Se entiende que las aproximaciones para  $\phi$  deberían ser suficientemente derivables como para poder obtener las segundas derivadas. Asimismo, se podría particularizar la expresión anterior para el borde:

$$\mathbf{t} = \mathbf{L} \Phi \quad \text{en} \quad S \quad \text{Ec. (3.67)}$$

Y al sustituir las expresiones dadas por las Ecs. (3.66) y (3.67) en el principio variacional de energía complementaria, Ec. (3.59), se tendría una simple función de los parámetros  $\Phi$ , en la forma:

$$\Pi_c(\Phi) = \frac{1}{2} \Phi^T \Omega \Phi - \Phi^T \Delta \quad \text{Ec. (3.68)}$$

donde:

$$\Omega = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dV \quad \text{Ec. (3.69)}$$

$$\Delta = \int_{S_u} \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{u}} dS \quad \text{Ec. (3.70)}$$

Finalmente, exigiendo que las derivadas de  $\Pi_C$  con relación a las  $\Phi$  sean cero:

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial \Phi} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.71)}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\Omega \Phi = \Delta \quad \text{Ec. (3.72)}$$

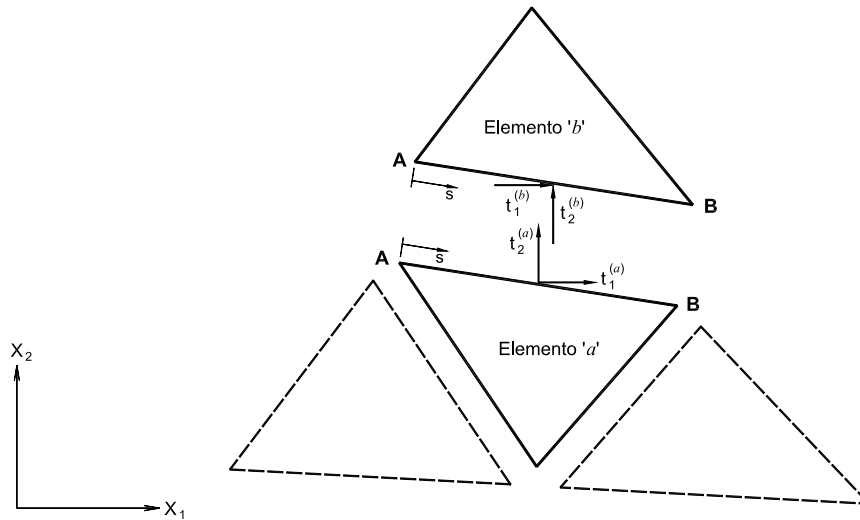
que permitiría determinar los valores nodales  $\Phi$ .

Esta formulación tiene algún interés académico más que práctico, pues el gran problema que tendría esta alternativa es de que en la expresión final figuran derivadas segundas de las funciones de interpolación, lo cual, y en forma similar a las dificultades que se presentan en una formulación tradicional de losas basada en energía potencial (ver Sección 2.5), implicaría que en los bordes entre elementos se deba de tener continuidad no solamente de la función  $\phi$  sino también de sus derivadas primeras. Ello representa un problema, pues es difícil lograr la continuidad de la derivada normal a los bordes.

### 3.2.4 EL FUNCIONAL DE ENERGÍA COMPLEMENTARIA MODIFICADA

Como se vio en la sección anterior, cuando se parte del funcional de energía complementaria en su forma clásica se encuentra un problema en cuanto al cumplimiento total de las condiciones de equilibrio; pues si bien es en general factible plantear para cada elemento aproximaciones para los esfuerzos que satisfagan perfectamente el equilibrio en el interior del elemento, no se cumplirán o sería muy difícil que se cumplan las correspondientes condiciones de equilibrio en los bordes entre elementos. Considérese la Figura 3.2, correspondiente a un estado plano de esfuerzos, en el que se muestran en líneas continuas a

los elementos vecinos 'a' y 'b' aislados así como a las componentes de tracción de borde  $t_i^{(a)}(s)$  y  $t_i^{(b)}(s)$  sobre los respectivos lados del borde común  $AB$ .



**Figura 3.2 Equilibrio de las tracciones de borde a lo largo de un borde interior.**

Por tanto, las condiciones de equilibrio en el borde interelemento  $AB$ , estarían dadas por:

$$t_i^{(a)}(s) + t_i^{(b)}(s) = 0 \quad i = 1, 2 \quad \text{Ec. (3.73)}$$

Para incluir estas condiciones, puede agregarse al funcional de energía complementaria clásica, Ec. (3.58), un extra que serían justamente las ecuaciones de equilibrio en los bordes entre elementos con multiplicadores de Lagrange ( $\lambda_i$ ) y que para el caso particular del borde interelemento  $AB$  de la Figura 3.2 puede ser escrito como:

$$\int_{AB} \lambda_i(s) [t_i^{(a)}(s) + t_i^{(b)}(s)] dS \quad \text{Ec. (3.74)}$$

o también:

$$\int_{AB} \lambda_i t_i dS \Big|_a + \int_{AB} \lambda_i t_i dS \Big|_b \quad \text{Ec. (3.75)}$$

Luego, para una situación general y cuando todos los bordes interelementos han sido considerados, se podría escribir el siguiente funcional sobre la base de aquel de energía complementaria:

$$\Pi_{mc}(\sigma_{ij}, \lambda_i) = \sum_e \left( \int_{V_e} \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} dV - \int_{S_{u_e}} t_i \bar{u}_i dS - \int_{S_e} \lambda_i t_i dS \right) \quad \text{Ec. (3.76)}$$

donde  $V_e$  es el volumen de un elemento,  $S_{u_e}$  es el borde de  $V_e$  donde los desplazamientos están prescritos y  $S_e$  es el borde interelemento de  $V_e$ .

Con dicho agregado, se modifica el funcional de energía complementaria original  $\Pi_c$ , convirtiéndolo en una expresión llamada *el funcional de energía complementaria modificada*  $\Pi_{mc}$  cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son dos grupos: las ecuaciones de continuidad en general, más las condiciones de equilibrio en los bordes entre elementos. Asimismo, al hallar las tales ecuaciones de Euler-Lagrange de este nuevo principio variacional se concluye que los apropiados multiplicadores de Lagrange tendrían que ser las funciones de desplazamiento  $u_i$ , quedando la ecuación anterior como:

$$\Pi_{mc}(\sigma_{ij}, u_i) = \sum_e \left( \int_{V_e} \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} dV - \int_{S_{u_e}} t_i \bar{u}_i dS - \int_{S_e} u_i t_i dS \right) \quad \text{Ec. (3.77)}$$

A continuación, se pretende reordenar un poco la última expresión con la finalidad de que sea trabajable, para lo cual, se puede notar, que los bordes entre elementos (o bordes interiores) de todos los elementos que están considerados en el agregado de la expresión dada por la Ec. (3.77), son la suma de los bordes de los distintos elementos excepto por el borde exterior de todo el modelo, el cual a su vez se puede descomponer en la suma del borde  $S_u$  y del borde  $S_\sigma$ . Luego de una sencilla simplificación, se obtiene:

$$\Pi_{mc}(\sigma_{ij}, u_i) = \sum_e \left( \int_{V_e} \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} dV - \int_{\partial V_e} t_i u_i dS + \int_{S_{\sigma_e}} \bar{t}_i u_i dS \right) \quad \text{Ec. (3.78)}$$



donde:

$$\delta V_e = S_e + S_{\sigma_e} + S_{u_e} \quad \text{Ec. (3.79)}$$

indica todo el borde de  $V_e$ , mientras que  $S_{\sigma_e}$  denota el borde de  $V_e$  donde las tracciones están prescritas. En términos matriciales, este funcional puede expresarse como:

$$\Pi_{\text{mc}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \sum_e \left( \int_{V_e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial V_e} \mathbf{t}^T \mathbf{u} dS + \int_{S_{\sigma_e}} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \right) \quad \text{Ec. (3.80)}$$

Por lo tanto, el funcional de energía complementaria modificada es un funcional que depende de dos grupos de funciones independientes: los esfuerzos en el interior de cada uno de los elementos y que en este caso son propios de cada elemento porque se ha liberalizado la condición de equilibrio entre elementos, y los desplazamientos solamente en los bordes entre elementos, en donde se requiere que sean continuos.

Este principio de energía complementaria modificada es la base para el desarrollo de los modelos llamados *Híbridos de Esfuerzos*, en los cuales, se escriben aproximaciones para los esfuerzos como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.81)}$$

tales expresiones deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio pero son independientes para cada elemento, lo cual es destacado en la Ec. (3.81) al utilizar parámetros  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  que son distintos para cada elemento. Luego, se tiene que plantear expresiones de interpolación para los desplazamientos  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.82)}$$

pero estas expresiones, Ec. (3.82), solamente tienen que ser interpolaciones sobre las líneas (o superficies en el caso tridimensional) que corresponden a los bordes, ya no se requiere plantear tales aproximaciones en los puntos interiores.

Asimismo, las expresiones escritas para los esfuerzos, Ec. (3.81), pueden ser particularizadas para los bordes para obtener las tracciones de borde en cada uno de los bordes del elemento:

$$\mathbf{t} = \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.83)}$$

Sustituyendo las aproximaciones anteriores dadas por las Ecs. (3.81) y (3.82), y sus consecuencias, Ec. (3.83), en el principio variacional, Ec. (3.80), este último se transforma en una simple función de los parámetros indeterminados  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  y  $\mathbf{q}$ :

$$\Pi_{\text{mc}}(\boldsymbol{\beta}^{(e)}, \mathbf{q}) = \sum_e \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^{(e)T} \mathbf{H}^{(e)} \boldsymbol{\beta}^{(e)} - \boldsymbol{\beta}^{(e)T} \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{f}^{(e)} \right) \quad \text{Ec. (3.84)}$$

es decir, se obtiene  $\Pi_{\text{mc}}$  como la sumatoria de integrales análogas efectuadas para cada elemento, donde  $\mathbf{H}^{(e)}$ ,  $\mathbf{G}^{(e)}$  y  $\mathbf{f}^{(e)}$  resultan:

$$\mathbf{H}^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dV \quad \text{Ec. (3.85)}$$

$$\mathbf{G}^{(e)} = \int_{\partial V_e} \mathbf{L}^T \mathbf{N} dS \quad \text{Ec. (3.86)}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{S_{\sigma_e}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad \text{Ec. (3.87)}$$

A continuación se puede argumentar que las derivadas de  $\Pi_{\text{mc}}$  con relación a los distintos parámetros  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  y  $\mathbf{q}$  deben ser cero, pero como los  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  son independientes de elemento a elemento, al hacer las derivadas de  $\Pi_{\text{mc}}$  respecto a los  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  de un determinado elemento e igualar a cero:

$$\frac{\partial \Pi_{\text{mc}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^{(e)}} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.88)}$$

se obtiene solamente la contribución de ese elemento:

$$\mathbf{H}^{(e)} \boldsymbol{\beta}^{(e)} - \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.89)}$$

lo que permite despejar los  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  del elemento en función de los  $\mathbf{q}$ :

$$\boldsymbol{\beta}^{(e)} = [\mathbf{H}^{(e)}]^{-1} \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.90)}$$

Luego, al sustituir la Ec. (3.90) en la Ec. (3.84), se tendría  $\Pi_{\text{mc}}$  como una simple función de los parámetros  $\mathbf{q}$ :

$$\Pi_{\text{mc}}(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.91)}$$

donde:

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^{(e)} = \sum_e \mathbf{G}^{(e)T} [\mathbf{H}^{(e)}]^{-1} \mathbf{G}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.92)}$$

$$\mathbf{f} = \sum_e \mathbf{f}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.93)}$$

en la Ec. (3.92)  $\mathbf{K}$  es realmente una matriz de rigidez, mientras que en la Ec. (3.93)  $\mathbf{f}$  es igual al vector de fuerzas que se obtiene en una formulación de desplazamientos.

Finalmente, exigiendo que las derivadas de  $\Pi_{\text{mc}}$  con relación a los distintos parámetros  $\mathbf{q}$  sean cero:

$$\frac{\partial \Pi_{\text{mc}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.94)}$$

se obtiene:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.95)}$$

Es decir, la tradicional expresión de rigideces por desplazamientos igual a fuerzas. Pero el tratamiento utilizado es radicalmente diferente al tratamiento basado en energía potencial, porque no se parte el desarrollo con energía potencial sino con una modificación del funcional llamado de energía complementaria. Además, no se hacen aproximaciones para los desplazamientos en todo el interior de los elementos sino solamente en los bordes, y se hacen aproximaciones para los esfuerzos en el interior de cada elemento, que deben estar en equilibrio.

De otro lado, existe un punto crucial en el desarrollo de un modelo híbrido de esfuerzos que se refiere al hecho de que para que el modelo funcione se tiene que tener un *mínimo* de parámetros  $\beta^{(e)}$  igual al número de parámetros  $\mathbf{q}$  que tiene el elemento (o el número de grados de libertad) menos el número de componentes de desplazamientos de cuerpo rígido.

Como se hizo notar en párrafos precedentes, en los modelos híbridos de esfuerzos finalmente se obtiene propiamente una matriz de rigidez, teniendo como incógnitas exactamente las que se tendría en un modelo de desplazamientos, por consiguiente, la ventaja de estos modelos con respecto a los modelos mixtos es que digamos pueden encontrarse perfectamente dentro del ambiente de un programa tradicional de análisis, o sea, desde el punto de vista de la operación de todo el programa no hay un desorden, el cual si lo hay en el modelo mixto, donde al tenerse como incógnitas momentos flectores por ejemplo, se desordena todo el esquema y no es fácil combinar estos elementos con elementos de otros tipos.

Por último, los modelos híbridos de esfuerzos tienen asimismo algunas ventajas con relación a los modelos de desplazamiento tradicional. En particular, se menciona que la calidad de las aproximaciones para los esfuerzos es en general mejor que la obtenida con modelos de desplazamientos, en los que los esfuerzos se obtienen por derivación de las aproximaciones planteadas para los desplazamientos. En cambio, en los modelos híbridos de esfuerzos el énfasis está en las aproximaciones planteadas directamente para los esfuerzos en lugar de las aproximaciones para los desplazamientos.

Luego de esta revisión de algunos de los principios variacionales más conocidos en el análisis estructural, se presenta a continuación algunas posibilidades de distintos tipos de elementos finitos usados en el análisis de losas.

### 3.3 MODELOS DE DESPLAZAMIENTO. INTEGRACIÓN REDUCIDA

En el caso de losas delgadas se presentan una serie de dificultades al utilizar un modelo de desplazamientos tradicional, como se puede ver por ejemplo en la Sección 2.5 referida al clásico elemento finito de losas de Melosh. Sin embargo, existe un desarrollo para resolver esas dificultades, desligando las variables de giro de los desplazamientos transversales, es decir, escribiendo los giros como las derivadas primeras del desplazamiento transversal más una deformación de corte. En el caso de losas gruesas esa clase de modelos da buenos resultados, pero en el caso de losas delgadas tiene algunos problemas que se resuelven parcialmente haciendo lo que se llama una *integración reducida*, la cual finalmente produce resultados aceptables.

Estos modelos compatibles para losas con integración reducida, se basan en la teoría de losas gruesas (ver Apéndice A) en donde los giros  $\boldsymbol{\theta}$  no son simplemente las derivadas (con un cierto signo) del desplazamiento transversal  $w$ , sino que hay una diferencia entre ambos que es justamente la deformación cortante. Por lo anterior y para mantener la continuidad, se repiten más abajo las ecuaciones básicas [véase Ecs. (A.15)] de la teoría de losas gruesas. Tales ecuaciones, que en realidad corresponden a la forma *irreducible*, son:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} + \beta G t (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.96a)}$$

$$-\nabla^T (\beta G t \boldsymbol{\theta}) + \nabla^T (\beta G t \nabla w) = -p \quad \text{Ec. (3.96b)}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales anteriores, equivale a la minimización de la energía potencial total expresada en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \Pi_p(w, \boldsymbol{\theta}) = & \int_A \frac{1}{2} (\mathbf{L} \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \boldsymbol{\theta}) dA + \int_A \frac{1}{2} (\nabla w - \boldsymbol{\theta})^T (\beta G t) (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) dA - \\ & - \int_A w^T p dA + \text{términos de borde} \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.97)}$$

donde, el primer término es la energía de deformación debida a los efectos de flexión, el segundo la energía debida a las deformaciones de corte y después se tienen los términos que corresponden al potencial de las cargas aplicadas.

En los modelos de compatibilidad para losas gruesas pero con integración reducida, los cuales se basan en las Ecs. (3.96) o en el principio variacional equivalente expresado por la Ec. (3.97), se tienen como incógnitas las habituales  $w$  y  $\theta$  pero ahora se presupone que tales incógnitas son variables *independientes*. Por tanto, para discretizar las Ecs. (3.96), se empieza haciendo aproximaciones mediante funciones de forma y parámetros apropiados para las variables de desplazamiento tradicionales:

$$w = \mathbf{N}_w \bar{w} \quad \text{Ec. (3.98)}$$

así como para los giros, los cuales podrían ser del mismo estilo de aquellas para los desplazamientos transversales, pero en general se tendría:

$$\theta = \mathbf{N}_\theta \bar{\theta} \quad \text{Ec. (3.99)}$$

Luego, las ecuaciones de aproximación se obtienen directamente usando el procedimiento de Galerkin e integrando por partes o, de forma equivalente, mediante el uso de la expresión del trabajo virtual o usando un principio variacional como la Ec. (3.97). Si se observa tal expresión (3.97) y al trabajar con  $w$  y con  $\theta$  como si fueran funciones independientes se puede notar que la  $\Pi_p$ , siendo un funcional de  $w$  y de  $\theta$ , es una expresión en que *no aparecen derivadas segundas*, pues la matriz  $\mathbf{L}$ , como se puede ver en la Ec. (A.2), es una matriz de derivadas primeras; en consecuencia, las condiciones de continuidad son más bien modestas.

De otro lado, mientras que el segundo término de la Ec. (3.97) sea significativo, como es en el caso de losas gruesas, el modelo produce resultados correctos. Pero, cuando tal término no es significativo, como es en el caso de losas delgadas, el modelo funciona mal, porque el modelo *sobrestima la rigidez cortante*. Para corregir tales problemas se desarrolló la idea de la *integración reducida*, que consiste básicamente en integrar ciertos términos molestos en una forma *defectuosa* para producir menos rigidez y finalmente obtener resultados más cercanos a los correctos.

Recapitulando, al sustituir las aproximaciones (3.98) y (3.99) en la expresión de la energía potencial (3.97), ésta queda expresada como una función de los parámetros  $\bar{w}$  y  $\bar{\theta}$  de la forma siguiente:

$$\Pi_p(\bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_\theta \end{Bmatrix} = \text{MINIMA} \quad \text{Ec. (3.100)}$$

o más sencillamente, si se llama:

$$\mathbf{q}^T = [\bar{\mathbf{w}} \quad \bar{\boldsymbol{\theta}}] \quad \text{Ec. (3.101)}$$

$$\mathbf{f}^T = [\mathbf{f}_w \quad \mathbf{f}_\theta] \quad \text{Ec. (3.102)}$$

se tendría:

$$\Pi_p(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} = \text{MINIMA} \quad \text{Ec. (3.103)}$$

Finalmente, exigir que las derivadas de  $\Pi_p$  con relación a las  $\mathbf{q}$  sean cero, conduce al sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.104)}$$

donde la matriz  $\mathbf{K}$  podría separarse en 4 submatrices:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.105)}$$

siendo las expresiones que resultan para cada submatriz:

$$\mathbf{K}_b = \int_A (\mathbf{L} \mathbf{N}_\theta)^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \mathbf{N}_\theta) dA + \int_A \mathbf{N}_\theta^T (\beta G t) \mathbf{N}_\theta dA \quad \text{Ec. (3.106a)}$$

$$\mathbf{K}_{bs} = - \int_A \mathbf{N}_\theta^T (\beta G t) \nabla \mathbf{N}_w dA \quad \text{Ec. (3.106b)}$$

$$\mathbf{K}_{sb} = - \int_A (\nabla \mathbf{N}_w)^T (\beta G t) \mathbf{N}_\theta dA = \mathbf{K}_{bs}^T \quad \text{Ec. (3.106c)}$$

$$\mathbf{K}_s = \int_A (\nabla \mathbf{N}_w)^T (\beta G t) (\nabla \mathbf{N}_w) dA \quad \text{Ec. (3.106d)}$$

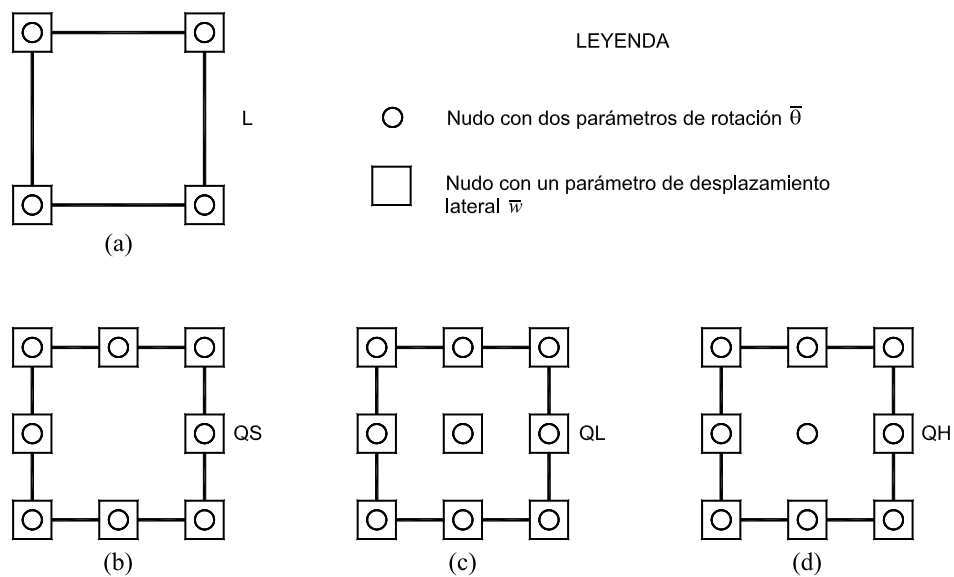
y las que corresponden a  $\mathbf{f}_w$  y  $\mathbf{f}_\theta$ :

$$\mathbf{f}_w = \int_A \mathbf{N}_w^T p dA + \int_{S_\sigma} \mathbf{N}_w^T \bar{Q}_n dS \quad \text{Ec. (3.107a)}$$

$$\mathbf{f}_\theta = \int_{S_\sigma} \mathbf{N}_\theta^T \bar{\mathbf{M}} dS \quad \text{Ec. (3.107b)}$$

donde  $\bar{\mathbf{M}}$  y  $\bar{Q}_n$  son los momentos y el cortante prescritos en el borde  $S_\sigma$ .

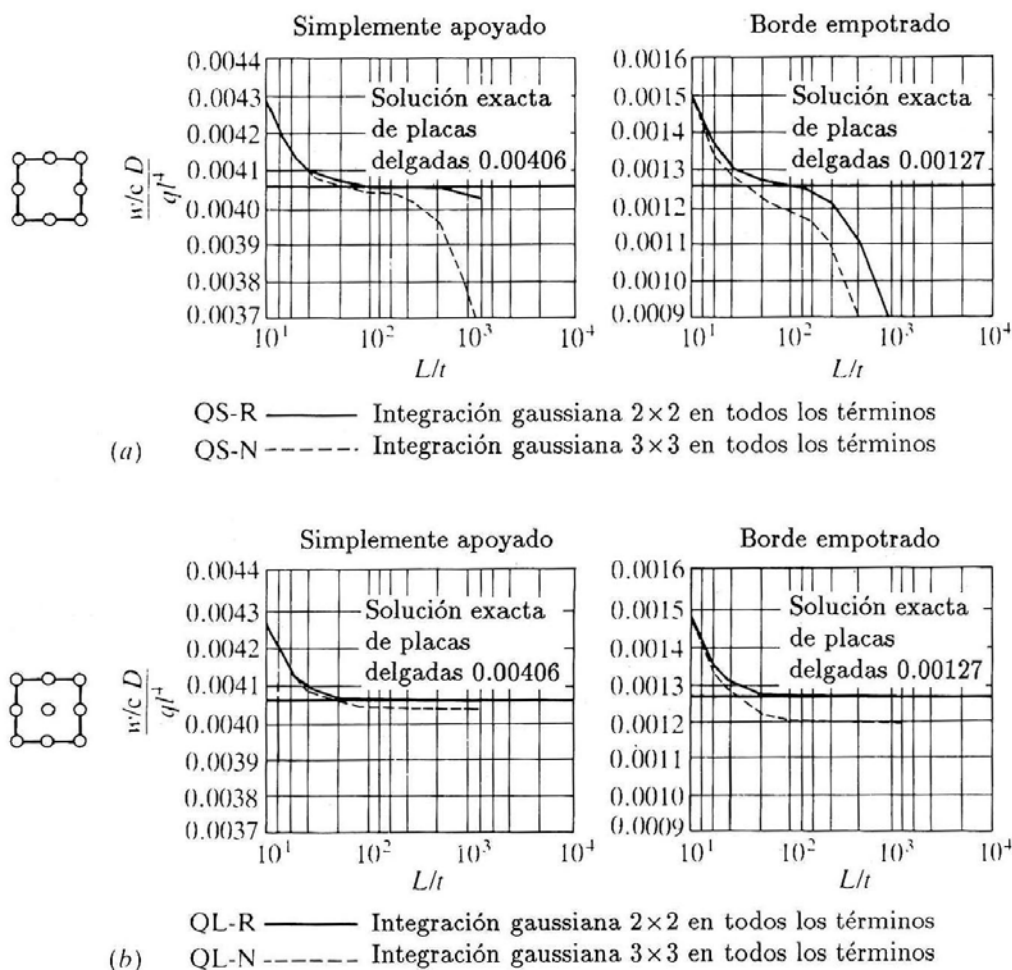
La Figura 3.3 presenta algunos elementos rectangulares (o cuadriláteros, con distorsión isoparamétrica) utilizados inicialmente:



**Figura 3.3** Algunos primeros elementos compatibles para losas gruesas. a) cuadrilátero bilineal (L). b) cuadrático Serendipito (QS). c) cuadrático Lagrangiano (QL). d) Heterosis (QH).



Tales elementos deberían ser convergentes ya que existe continuidad  $C_0$  y se dan los estados de deformación constante. Sin embargo, la Figura 3.4 [31] muestra lo que en realidad ocurre con una subdivisión de rectángulos cuadráticos Serendípitos y Lagrangianos a medida que la relación luz espesor,  $L/t$  varía.



**Figura 3.4** Comportamiento de elementos. a) cuadráticos Serendípitos (QS) y b) cuadráticos Lagrangianos (QL), al variar la relación  $L/t$ ; carga uniforme en una losa cuadrada con una subdivisión normal 434 en un cuarto. R es integración reducida 232 y N es integración normal 333. [31]

Como se puede notar en la Figura 3.4, los resultados son muy buenos para las relaciones menores de  $L/t$  (caso de losas gruesas); no obstante, los elementos cuadráticos Serendípitos sin integración reducida (QS-N) se separan rápidamente de la solución para losas delgadas y tienden a resultados nulos (bloqueo) cuando esta relación se hace mayor. En el

caso de los elementos cuadráticos Lagrangianos sin integración reducida (QL-N) los resultados son mejores, sin embargo, nuevamente dan resultados algo rígidos a medida que la losa tiende a ser delgada.

La razón para este comportamiento defectuoso es que la restricción de cortante que implica la Ec. (A.14b), y que se ha usado para eliminar las fuerzas cortantes, es demasiado fuerte si los términos en los que ésta aparece (todos los de las Ecs. 3.106 excepto el primer término de la Ec. 3.106a) se integran con integración completa. En otras palabras, hay una excesiva rigidez en los términos de corte cuando se utiliza integración completa. Entonces, se soluciona este problema (en la mayoría de los casos) haciendo una integración de menor calidad, utilizando *integración numérica reducida*, ya sea en todos los términos, a lo que se llama R en la Figura 3.4, o solo de forma selectiva en los términos de cortante. Por tanto y como se puede apreciar en dicha figura, la integración reducida produce una mejora sustancial en los resultados y por consiguiente extiende las posibilidades del modelo para losas delgadas.

Asimismo, existe una mejora en los resultados para cuadriláteros lineales en donde la integración completa (exacta) produce resultados que son totalmente incorrectos, pero en los que la integración reducida de los términos de cortante (con un solo punto) tiene un muy buen funcionamiento.

Finalmente, se han propuesto algunos *mejores elementos*, todos ellos sobre la base de los conceptos de integración reducida. Varios de ellos, por ejemplo, el llamado elemento *Heterosis* de Hughes y Cohen [14] que se muestra en la Figura 3.3 (en el que se usa la interpolación serendípita para  $w$  y lagrangiana para  $\theta$ ) se comporta bastante bien. Sin embargo, todos estos elementos fallan en algunas ocasiones. Por consiguiente, dichos elementos *no son robustos* y no deberían ser utilizados de forma general.

### 3.4 MODELOS DISCRETOS DE KIRCHHOFF

Una metodología alternativa para desarrollar elementos de losa delgada de Kirchhoff conformes consiste en introducir ciertas modificaciones en los elementos de losa gruesa de Reissner-Mindlin de clase  $C_0$ , de manera que se satisfagan de forma *discreta* sobre el elemento las condiciones de Kirchhoff (deformación transversal nula). Los elementos así obtenidos reciben el nombre de elementos *DK* (Discretos de Kirchhoff).

La idea de los elementos de losa DK es original de Wempner et al., quienes la usaron como un método para *evitar los requisitos de continuidad  $C_1$*  de los elementos de losa delgada tradicionales basados en energía potencial. En esta metodología, las condiciones de la losa delgada ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) se imponen en puntos discretos de elementos de clase  $C_0$  formulados en base a la teoría de losas de Reissner-Mindlin. El elemento de losa resultante tiene un comportamiento análogo al de un elemento de losa delgada de Kirchhoff, manteniendo sin embargo continuidad del tipo  $C_0$  para los movimientos nodales, lo que garantiza su compatibilidad.

Es conveniente aquí (aunque de ninguna manera esencial) utilizar un principio variacional. Este puede escribirse simplemente como la minimización de la energía potencial:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_A (\mathbf{L} \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \boldsymbol{\theta}) dA - \int_A w p dA + \text{términos de borde} \quad \text{Ec. (3.108a)}$$

sometida a la condición:

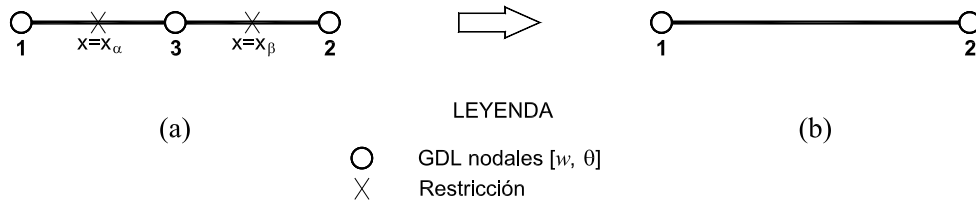
$$\boldsymbol{\theta} - \nabla w = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.108b)}$$

En los modelos discretos de Kirchhoff, en general, se plantean para los desplazamientos transversales  $w$  y los giros  $\boldsymbol{\theta}$  aproximaciones *independientes* y por tanto con continuidad  $C_0$  [ver Ec. (3.108a)] como:

$$w = \mathbf{N}_w \bar{w} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{N}_\theta \bar{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{Ec. (3.109a, b)}$$

lo cual es típico de una formulación basada según la teoría de losas gruesas de Reissner-Mindlin.

Asimismo, en la aplicación del denominado método de restricciones discretas de Kirchhoff, se aproxima la Ec. (3.108b) típicamente por colocación puntual y se utiliza eliminación directa para *disminuir el número de parámetros nodales*. Este proceso se puede ilustrar con el siguiente sencillo ejemplo unidimensional de una viga como la que se muestra en la Figura 3.5.



**Figura 3.5** Elemento de viga con una interpolación independiente para  $w$  y  $\theta$  con la condición  $\partial w / \partial x - \theta = 0$  aplicada en los puntos  $X$ . a) estado original del elemento de viga con 3 nudos. b) estado final con la eliminación del nudo central.

Para empezar, se interpola la flecha y el giro de la misma forma a través de polinomios cuadráticos, escribiendo en lugar de las Ecs. (3.109):

$$w = \sum_{i=1}^3 N_i w_i \quad \theta = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_i \quad \text{Ec. (3.110a, b)}$$

donde  $i$  son los tres nudos del elemento en la situación original.

De otro lado, en la teoría de vigas habitual la restricción estaría dada por:

$$\theta - \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{Ec. (3.111)}$$

En este caso se intenta tener un modelo en que las incógnitas sean  $w$  y  $\theta$  solamente en los extremos del elemento (Figura 3.5b). Para ello, temporalmente se escriben las funciones de interpolación involucrando un nudo más como en las Ecs. (3.110). La idea es utilizar condiciones del tipo (3.111) para eliminar aquello que está sobrando. Concretamente, las restricciones se aplicarían por colocación puntual en un par de puntos de la viga de coordenadas  $x_\alpha$  y  $x_\beta$  (Figura 3.5a), obteniendo las siguientes dos ecuaciones simultáneas:

$$\sum_{i=1}^3 N_i(x_\alpha) \theta_i - \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i}{dx} \Big|_{x=x_\alpha} w_i = 0 \quad \text{Ec. (3.112a)}$$

$$\sum_{i=1}^3 N_i(x_\beta) \theta_i - \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i}{dx} \Big|_{x=x_\beta} w_i = 0 \quad \text{Ec. (3.112b)}$$

Las Ecs. (3.112) se pueden utilizar para eliminar  $w_3$  y  $\theta_3$ , pues, de tales ecuaciones se puede despejar dichas variables en función de todo lo demás, para luego sustituirlo en las expresiones originales dadas por las Ecs. (3.110). Con ello se obtienen funciones de interpolación en las que *el nudo central se ha eliminado*, ya que las aproximaciones dependerían solamente de  $w_1, w_2, \theta_1$  y  $\theta_2$ ; es decir, se obtendría:

$$w = \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i w_i \quad \theta = \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i \theta_i \quad \text{Ec. (3.113a, b)}$$

Si se utilizan estas funciones para una viga, se obtiene un elemento que es convergente. Ciertamente, en problemas bidimensionales de losas la situación es un poco más compleja.

En los últimos años se han propuesto varios elementos de losa DK. En particular, se prestará atención al elemento cuadrilátero de 4 nudos llamado DKQ (cuadrilátero discreto de Kirchhoff), el cual parece ser un fiable elemento de flexión de losas delgadas. Con dicha presentación se mostrará de una mejor manera los principales aspectos de estos modelos llamados discretos de Kirchhoff.

### 3.4.1 DESCRIPCIÓN DEL ELEMENTO DKQ CUADRILÁTERO DE LOSA DELGADA

Este elemento de 4 nudos y 12 grados de libertad, propuesto por Batoz y Ben Tahar [4] en el año 1982, fue desarrollado utilizando la misma técnica que para el elemento de losa triangular llamado DKT formulado anteriormente, a partir de un elemento cuadrilátero con interpolaciones cúbicas incompletas para los giros y cúbicas para la flecha. Así, la formulación de los elementos DKT y DKQ está basada en la discretización de la energía de deformación donde la energía de deformación por corte transversal es ignorada, es decir:

$$U = \sum_e U_b^e \quad \text{con} \quad U_b^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} (\mathbf{L} \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \boldsymbol{\theta}) dA \quad \text{Ec. (3.114)}$$

donde  $U_b^e$  es la energía de deformación del elemento debida a flexión [ver por ejemplo el primer término de la Ec. (A.16) o de la Ec. (3.108a)].  $A^e$  es el área del elemento.  $\mathbf{L} \boldsymbol{\theta}$  y  $\mathbf{D}$  (para una losa isotrópica homogénea) están dadas respectivamente por (ver Apéndice A):

$$\mathbf{L} \boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.115a, b)}$$

$E$ ,  $\nu$  y  $t$  son el módulo de Young, la razón de Poisson y el espesor, respectivamente.  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son los giros de la normal a la superficie media no deformada en los planos  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$  respectivamente.  $U_b^e$  depende únicamente de  $\theta_x$  y  $\theta_y$  con una continuidad  $C_0$  requerida.

La formulación del elemento DKQ esta así basada en las siguientes consideraciones:

- 1)  $\theta_x$  y  $\theta_y$  están definidas por expresiones polinómicas cúbicas incompletas:

$$\theta_x = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{x_i} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{y_i} \quad \text{Ec. (3.116a, b)}$$

Las funciones de forma  $N_i(\xi, \eta)$ ,  $i=1,8$  donde  $\xi$  y  $\eta$  son coordenadas paramétricas [30], son aquellas del elemento Serendípito de 8 nudos.  $\theta_{x_i}$  y  $\theta_{y_i}$  son las variables nodales en los nudos de esquina y en los nudos intermedios del elemento cuadrilátero (con lados rectos) (Figura 3.6).

- 2) Las suposiciones de Kirchhoff (condiciones de deformación transversal nula) son introducidas:

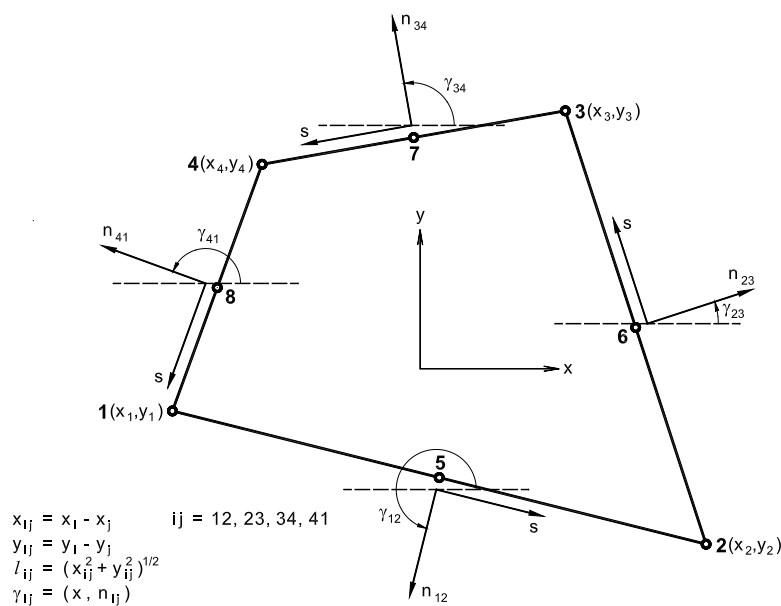
a) en los nudos de esquina:

$$\begin{cases} \theta_{x_i} - w_{,x_i} \\ \theta_{y_i} - w_{,y_i} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{Ec. (3.117)}$$

b) en los nudos intermedios:

$$\theta_{s_k} - w_{,s_k} = 0 \quad k = 5, 6, 7, 8 \quad \text{Ec. (3.118)}$$

donde  $s$  representa la coordenada a lo largo del borde del elemento.



**Figura 3.6 Geometría inicial del elemento DKQ.**

3)  $w_{,s_k}$  es la derivada del desplazamiento transversal  $w$  con respecto a  $s$  en el nudo intermedio  $k$ , donde  $w$  está definida por una expresión cúbica a lo largo de cada borde del elemento, de lo que resulta:

$$w_{,s_k} = -\frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}(w_{,s_i} + w_{,s_j}) \quad \text{Ec. (3.119)}$$

donde  $k = 5, 6, 7, 8$  son los nudos intermedios de los lados  $ij = 12, 23, 34, 41$  respectivamente.  $l_{ij}$  representa la longitud del lado  $ij$  (Figura 3.6).

- 4) Se impone una variación lineal del giro normal  $\theta_n$  a lo largo de los lados, es decir:

$$\theta_{n_k} = \frac{1}{2}(\theta_{n_i} + \theta_{n_j}) \quad \text{Ec. (3.120)}$$

donde nuevamente  $k = 5, 6, 7, 8$  corresponde al nudo intermedio de los lados  $ij = 12, 23, 34, 41$ .

De lo anterior se puede notar principalmente que:

- $w$  no está definido en el interior del elemento.  $w$  varía independientemente a lo largo de cada uno de los bordes del elemento. La variable nodal  $w$  en los cuatro nudos de esquina aparece a través de la Ec. (3.119).
- Las suposiciones de Kirchhoff son satisfechas a lo largo de *todo* el borde del elemento desde que  $w_s$  y  $\theta_s$  son ambas expresiones cuadráticas a lo largo de los lados del elemento.
- La convergencia hacia la teoría de losas delgadas es obtenida para cualquier razón longitud del elemento al espesor desde que la energía de corte transversal es ignorada (así el elemento DKQ no es apropiado para losas gruesas, aunque se han propuesto otros elementos simples para tales situaciones).

En principio se tiene un elemento con 8 nudos (ver Figura 3.6), en el cual las incógnitas originales son los giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$  en cada uno de esos 8 nudos (16 incógnitas en total), y lo que se pretende es tener un modelo con solamente 12 incógnitas que serían los desplazamientos transversales y las componentes de giro en los 4 nudos de esquina del elemento. Para ello, se escriben expresiones para plantear las componentes de giro en los 4 nudos intermedios en función justamente de los tales desplazamientos transversales y de las componentes de giro de los nudos de esquina:



$$\theta_{s_k} = w_{s_k} = -\frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}(\theta_{s_i} + \theta_{s_j}) \quad \text{Ec. (3.121)}$$

$$\theta_{n_k} = \frac{1}{2}(\theta_{n_i} + \theta_{n_j}) \quad \text{Ec. (3.120)}$$

luego, se haría una eliminación algo similar al hecho en el caso de la viga, obteniendo para los giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$  de un cuadrilátero general en términos de las 12 variables nodales finales del elemento DKQ:

$$\mathbf{U}_n = [w_1 \quad \theta_{x_1} \quad \theta_{y_1} \quad w_2 \quad \theta_{x_2} \quad \theta_{y_2} \quad w_3 \quad \theta_{x_3} \quad \theta_{y_3} \quad w_4 \quad \theta_{x_4} \quad \theta_{y_4}]^T \quad \text{Ec. (3.122)}$$

las siguientes expresiones:

$$\theta_x = \mathbf{H}^x(\xi, \eta) \mathbf{U}_n \quad \text{Ec. (3.123a)}$$

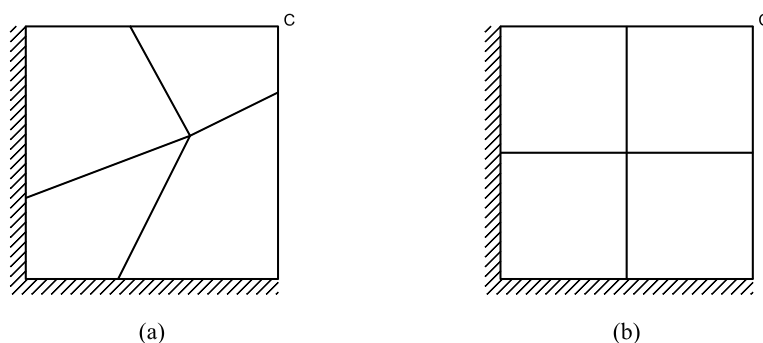
$$\theta_y = \mathbf{H}^y(\xi, \eta) \mathbf{U}_n \quad \text{Ec. (3.123b)}$$

mayores detalles de las expresiones para  $\mathbf{H}^x$  y  $\mathbf{H}^y$  pueden encontrarse en la referencia [4].

Con eso se termina obteniendo las expresiones de aproximación escritas en términos de las 3 componentes de desplazamiento tradicionales en las esquinas (por tanto el elemento termina siendo de 4 nudos), y de ahí el resto es una cuestión de álgebra para escribir las demás expresiones correspondientes (matriz de rigidez, momentos de flexión, etc.).

De otro lado, el modelo que se tiene en el programa de cómputo para análisis estructural SAP90 [28] con elementos de losas corresponde justamente al elemento cuadrilátero de 4 nudos y 12 grados de libertad DKQ descrito arriba de una manera sencilla, mientras que en las nuevas versiones de la serie de programas SAP como en el SAP2000 [29] se utiliza nuevamente un elemento DK para losas delgadas conocido como DKE (elemento discreto de Kirchhoff cuadrilateral de 4 nudos), el cual es usado en muchas de las secciones del Capítulo 5 para hacer algunos análisis comparativos principalmente con el elemento HTR3 desarrollado en este trabajo de tesis.

El elemento DKQ, que es mencionado en la literatura [4] como *un simple y confiable elemento de ingeniería para el análisis de losas delgadas de forma arbitraria*, presenta (y en general los modelos discretos de Kirchhoff) algunas desventajas con respecto básicamente a la precisión, pues, si se observan los resultados realmente no son los elementos mejores (en mallas regulares por lo menos, ver por ejemplo los gráficos de convergencia de la Sección 5.3.1). Sin embargo, una de las razones que ha favorecido la selección de estos elementos en programas de cómputo, es que son *poco sensibles a distorsiones en los elementos*, como se puede comprobar en la referencia [4]. Por ejemplo, al hacer una representación de un cuarto de losa con 4 elementos de la forma mostrada en la Figura 3.7a:



**Figura 3.7** Poca sensibilidad de los modelos discretos de Kirchhoff a las distorsiones de los elementos. a) malla irregular. b) malla regular.

los resultados son bastante similares a los que se tendría dividiendo el tal cuarto de losa en 4 elementos regulares (Figura 3.7b).

### 3.5 MODELOS MIXTOS

En los modelos mixtos, en general, se aproximan directamente *más de un conjunto de variables*, y normalmente deben relajarse los requisitos de continuidad para dichas aproximaciones. En particular, en los modelos mixtos basados en el funcional de Reissner, el cual fue presentado anteriormente (ver Sección 3.2.2), se hacen aproximaciones tanto para los desplazamientos como para ciertas medidas de esfuerzos, obteniendo finalmente como

incógnitas en tales modelos, parámetros asociados a los desplazamientos así como parámetros asociados a los esfuerzos.

Precisamente, dicho principio variacional de Reissner ha sido utilizado como base para desarrollar algunos elementos finitos mixtos que han tenido cierto éxito en el análisis de losas, donde las formulaciones tradicionales basadas en energía potencial presentan algunos problemas. Por ejemplo, cuando se hace un desarrollo en términos de energía potencial (que es la base del modelo tradicional de desplazamientos), resultan expresiones en que aparecen derivadas segundas del desplazamiento transversal, por consiguiente, se tiene forzosamente que tener continuidad entre elementos no solamente de la función sino también de las derivadas primeras, lo cual es una complicación para las derivadas en dirección *normal* a los bordes (ver Sección 2.5). En el caso del funcional de Reissner para losas, se puede reescribir el funcional en términos solamente de derivadas primeras de los momentos y de derivadas primeras de los desplazamientos transversales, lo cual tiene gran importancia, porque las condiciones de continuidad entre elementos se reducen a tener la continuidad de las propias funciones sin tener ninguna exigencia en cuanto a las derivadas. Entonces, se simplifica el problema de continuidad y además se podría mejorar la calidad en los resultados que más interesan como son la de los momentos flectores; en contraste con la formulación típica de energía potencial en la que las incógnitas en los nudos son los desplazamientos transversales y las derivadas primeras de esos desplazamientos transversales, obteniéndose los momentos y cortes (que son las cantidades de mayor interés) de derivadas segundas y terceras respectivamente de los desplazamientos transversales y en consecuencia se *pierde calidad en la aproximación de tales medidas de esfuerzos*; en cambio, en un modelo mixto se tiene la ventaja que directamente se puede tener como incógnitas en los nudos estas medidas de los momentos y eventualmente hasta de los cortes. Por tanto, la calidad de los resultados para dichas cantidades es tan buena como se desee dependiendo del *tipo de interpolación que se utilice*.

Para mostrar esta alternativa de los modelos mixtos para el análisis de losas, se hará una revisión del elemento isoparamétrico mixto de 8 nudos propuesto en la referencia [6], el cual constituye un buen elemento finito para el análisis de losas gruesas y delgadas, pero que sin embargo presenta algunas desventajas propias de una formulación mixta.

### 3.5.1 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO MIXTO PARA EL ANÁLISIS DE LOSAS ISOTRÓPICAS [6]

Es un modelo mixto basado en el funcional de Reissner, también llamado el funcional de Hellinger-Reissner. En la formulación de este elemento se consideran no solo las deformaciones por flexión, sino también las deformaciones por corte. Por lo tanto, tal elemento puede emplearse para analizar losas gruesas así como aquellas cuyo espesor es pequeño.

Para empezar, el funcional de Reissner [ver Ec. (3.39)] puede ser escrito en términos de componentes de desplazamientos y esfuerzos como:

$$\begin{aligned} \Pi_R(u_i, \sigma_{ij}) = & -U^* + \int_V \left[ \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\sigma_{ij} - u_i \bar{b}_i \right] dV - \\ & - \int_{S_u} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS - \int_{S_\sigma} \bar{t}_i u_i dS \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.124)}$$

donde se está llamando  $U^*$  a la energía complementaria, que es igual a:

$$U^* = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} dV \quad \text{Ec. (3.125)}$$

A continuación se consideran las siguientes notaciones (para las convenciones de signo y otras ver la referencia [6]):

- 1) La derivada del desplazamiento transversal  $w$  se relaciona con el giro de la sección y con una cierta corrección debida a la deformación de corte:

$$w_{,i} = -\theta_i + \gamma_i \quad , \quad i = 1,2 \quad \text{Ec. (3.126)}$$

- 2) Las curvaturas son las derivadas de los giros:

$$\kappa_{ij} = \theta_{i,j} \quad , \quad i, j = 1,2 \quad \text{Ec. (3.127)}$$

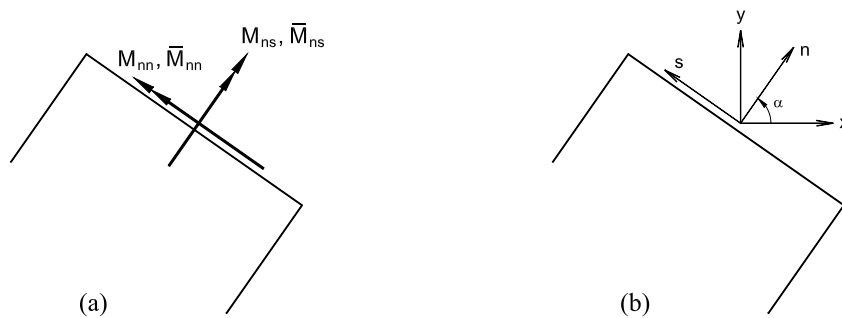
3) Parte de las ecuaciones de equilibrio significarían que el corte  $Q_i$  se pueda escribir como:

$$Q_i = M_{ij,j} \quad , \quad i, j = 1, 2 \quad \text{Ec. (3.128)}$$

4) La fuerza resultante por unidad de área en dirección vertical,  $p$ , se puede obtener en este caso al hacer:

$$p = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{b}_z dz \quad \text{Ec. (3.129)}$$

5) En el borde de un elemento cualquiera (ver Figura 3.8a), se tiene una componente de momento  $M_{ns}$  en la dirección tangencial al borde y otra componente  $M_{nn}$  en dirección normal al borde. En forma similar, se tendrían las componentes  $\theta_s$  y  $\theta_n$  que serían los giros en dirección tangencial al borde y normal al borde. Los valores que están prescritos en el borde  $S_u$ ,  $S_\sigma$  se distinguen de los valores que corresponden a la malla en general por una barra, por ejemplo  $\bar{\theta}_n$ ,  $\bar{M}_{nn}$  son valores conocidos en el borde  $S_u$ ,  $S_\sigma$  respectivamente. Asimismo, al corte en el borde se le ha llamado  $Q_n$ .



**Figura 3.8** Algunas consideraciones a lo largo del borde de un elemento. a) componentes del vector momento en dirección tangencial y normal al borde. b) vectores unitarios normal y tangencial a dicho borde.

6) Finalmente, se va a considerar que en un borde dado (ver Figura 3.8b) el vector unitario normal hacia fuera es  $\mathbf{n}$  y el vector unitario tangencial es  $\mathbf{s}$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede escribir una expresión de la forma de la Ec. (3.124) pero particularizada para losas:

$$\begin{aligned} \Pi_R(w, M_{ij}) = & -U^* + \int_A (M_{ij} \kappa_{ij} + Q_i \gamma_i - wp) dA - \\ & - \int_{S_u} [M_{mn} (\theta_n - \bar{\theta}_n) + M_{ns} (\theta_s - \bar{\theta}_s) + Q_n (w - \bar{w})] dS - \\ & - \int_{S_\sigma} [\bar{M}_{mn} \theta_n + \bar{M}_{ns} \theta_s + \bar{Q}_n w] dS \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.130)}$$

como se puede notar, en parte de la expresión (3.130) se tienen derivadas segundas del desplazamiento transversal  $w$ , pero siendo el funcional de Reissner una expresión que depende de dos campos independientes que son en este caso desplazamientos y momentos, eso permite hacer una cierta integración por partes para luego reescribir la Ec. (3.130) en forma tal que solamente se tengan las funciones incógnitas de desplazamiento transversal y de momentos y sus primeras derivadas. A continuación se trabaja solamente con los siguientes dos términos:

$$\int_A (M_{ij} \kappa_{ij} + Q_i \gamma_i) dA = \int_A [M_{ij} \theta_{i,j} + Q_i (w_{,i} + \theta_i)] dA \quad \text{Ec. (3.131)}$$

en los cuales se han reescrito las expresiones para las curvaturas y para las deformaciones de corte. Integrando por partes el primer término del lado derecho de la Ec. (3.131), se obtiene:

$$\int_A (M_{ij} \theta_i)_{,j} dA - \int_A M_{ij,j} \theta_i dA + \int_A Q_i (w_{,i} + \theta_i) dA \quad \text{Ec. (3.132)}$$

pero como  $M_{ij,j} = Q_i$ , se puede simplificar en la expresión anterior. Además, de la aplicación del teorema de Gauss o de la Divergencia al primer término de la Ec. (3.132), se obtiene:

$$\int_S n_j M_{ij} \theta_i dS + \int_A Q_i w_{,i} dA \quad \text{Ec. (3.133)}$$

Sustituyendo esta expresión en lo que se tenía en la Ec. (3.130) y teniendo en cuenta que el primer término de la Ec. (3.133) se va a reescribir en una forma alternativa conveniente, luego de simplificar y reordenar los términos se obtiene:

$$\Pi_R(w, M_{ij}) = -U^* + \int_A (Q_i w_{,i} - wp) dA + \int_{S_u} (M_{mn} \bar{\theta}_n + M_{ns} \bar{\theta}_s) dS - \int_{S_\sigma} w \bar{Q}_n dS \quad \text{Ec. (3.134)}$$

La cual es una especialización del funcional de Reissner para losas, que incluye deformaciones por corte. Nótese que en esta expresión solo se tienen hasta *derivadas primeras* de las funciones incógnitas  $w, M_{ij}$ . Dicha expresión, puede a su vez reescribirse en un lenguaje matricial del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Pi_R(w, \mathbf{M}) = & - \int_A \left( \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{S}_M \mathbf{M} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{S}_Q \mathbf{Q} \right) dA + \int_A (\mathbf{Q}^T \nabla w - w^T p) dA + \\ & + \int_{S_u} \mathbf{M}_b^T \bar{\boldsymbol{\theta}} dS - \int_{S_\sigma} w^T \bar{Q}_n dS \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.135)}$$

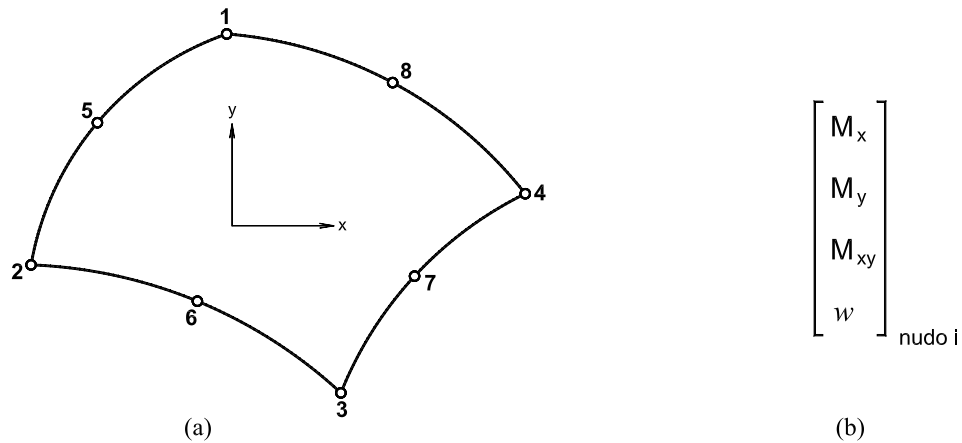
en la cual la primera integral, corresponde a la energía complementaria, incluye tanto la parte debida a flexión como la parte debida a las deformaciones de corte, siendo  $\mathbf{S}_M$  y  $\mathbf{S}_Q$  matrices que relacionan las curvaturas y los momentos en un caso y las deformaciones cortantes y los cortes en el otro:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{S}_M \mathbf{M} \quad \text{Ec. (3.136a)}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S}_Q \mathbf{Q} \quad \text{Ec. (3.136b)}$$

Sobre esta base se podría plantear un elemento finito mixto como es el de la referencia [6], el cual es un cuadrilátero de cuatro a ocho nudos (ver Figura 3.9a), donde los cuatro nudos de las esquinas son fijos y alternativamente se puede o no agregar un nudo intermedio en cada lado, lo cual permitiría tener en dicho borde aproximaciones parabólicas. En tal elemento, las incógnitas por nudo son (ver Figura 3.9b):

- El desplazamiento transversal  $w$
- Las tres componentes de momentos  $M_x, M_y$  y  $M_{xy}$ .



**Figura 3.9** Elemento finito mixto isoparamétrico [6]. a) geometría. b) incógnitas nodales.

Entonces, se empieza planteando aproximaciones para los desplazamientos transversales y para los momentos, los cuales, en general, pueden ser escritos con *facilidad*, pues en la expresión del funcional de Reissner dado por la Ec. (3.134) o (3.135) y que sirve de base para hacer todo el desarrollo solamente aparecen las funciones incógnitas y sus derivadas hasta de orden uno. Por tanto y a raíz de ello, ya no se tienen las dificultades de los elementos tradicionales basados en energía potencial en cuanto a desarrollar expresiones de interpolación convenientes.

Una alternativa, y es la que se utiliza en el modelo que se está describiendo, es la de interpolar el desplazamiento transversal  $w$  y los momentos  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{xy}$  con las mismas funciones de interpolación; es decir:

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) w_i \quad \text{Ec. (3.137a)}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) M_{x_i} \quad \text{Ec. (3.137b)}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) M_{y_i} \quad \text{Ec. (3.137c)}$$

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) M_{xy_i} \quad \text{Ec. (3.137d)}$$



donde en este caso las funciones de interpolación corresponden a las de un elemento cuadrilateral Serendípito de segundo orden. De otro lado, las expresiones de interpolación anteriores pueden a su vez escribirse en forma matricial como:

$$w = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_8] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_w \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.138)}$$

en el caso de la aproximación para  $w$  y donde  $\mathbf{q}$  denota los desplazamientos transversales de los nudos; mientras que para los momentos:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ M_{xy_1} \\ \vdots \\ M_{x_8} \\ M_{y_8} \\ M_{xy_8} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_M \mathbf{m} \quad \text{Ec. (3.139)}$$

en donde  $\mathbf{m}$  denotaría la colección de los  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{xy}$  en cada uno de los nudos del elemento.

Establecidas las interpolaciones para desplazamientos y para momentos, se pueden escribir los cortes como las apropiadas derivadas de los momentos:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{m} = \mathbf{R} \mathbf{m} \quad \text{Ec. (3.140)}$$

Asimismo, a partir de la Ec. (3.138), se pueden obtener las componentes de la gradiente de  $w$ :

$$\nabla w = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.141)}$$

Para el desplazamiento en el borde, es necesario particularizar las funciones de interpolación en dicho borde, es decir:

$$w|_{S_e} = \mathbf{N}_b \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.142)}$$

De otro lado, se pueden proyectar apropiadamente los momentos para obtener aquellos que corresponden a las componentes normal y tangencial a un determinado borde; para ello, si se considera la Figura 3.8b y como los momentos son tensores de segundo orden, se obtendría:

$$M_{mn} = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{Ec. (3.143a)}$$

$$M_{ns} = -M_x \sin \alpha \cos \alpha + M_y \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad \text{Ec. (3.143b)}$$

las ecuaciones anteriores pueden escribirse en un lenguaje matricial, y como a su vez los momentos  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{xy}$  se pueden escribir como  $\mathbf{N}_M \mathbf{m}$  particularizadas para el borde, se obtiene la siguiente expresión para las componentes de los momentos en el borde en dirección normal y tangencial a dicho borde:

$$\mathbf{M}_b = \begin{Bmatrix} M_{mn} \\ M_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{m} \quad \text{Ec. (3.144)}$$

Cuando se sustituye las aproximaciones hechas para los desplazamientos transversales y para los momentos y todas sus consecuencias (sus derivadas y particularizaciones para el borde) en la expresión del funcional de Reissner de la Ec. (3.135), ésta se transforma en una

simple función de los desplazamientos transversales en los nudos  $\mathbf{q}$  y de los valores nodales de los momentos  $\mathbf{m}$ :

$$\Pi_R(\mathbf{q}, \mathbf{m}) = -\frac{1}{2} \mathbf{m}^T \mathbf{H} \mathbf{m} + \mathbf{m}^T \mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} - \mathbf{m}^T \Delta \quad \text{Ec. (3.145)}$$

donde:

$$\mathbf{H} = \int_A (\mathbf{N}_M^T \mathbf{S}_M \mathbf{N}_M + \mathbf{R}^T \mathbf{S}_Q \mathbf{R}) dA \quad \text{Ec. (3.146a)}$$

$$\mathbf{G} = \int_A \mathbf{R}^T \mathbf{B} dA \quad \text{Ec. (3.146b)}$$

$$\mathbf{f} = \int_A \mathbf{N}_w^T p dA + \int_{S_\sigma} \mathbf{N}_b^T \bar{Q}_n dS \quad \text{Ec. (3.146c)}$$

$$\Delta = \int_{S_u} \mathbf{L}^T \bar{\theta} dS \quad \text{Ec. (3.146d)}$$

Finalmente, para que la función de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{m}$  expresada en la Ec. (3.145) sea estacionaria, se deberá exigir que:

$$1) \quad \frac{\partial \Pi_R}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{0} \quad \xrightarrow{\text{de donde}} \quad -\mathbf{H} \mathbf{m} + \mathbf{G} \mathbf{q} = \Delta \quad \text{Ec. (3.147a)}$$

$$2) \quad \frac{\partial \Pi_R}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \xrightarrow{\text{de donde}} \quad \mathbf{G}^T \mathbf{m} + \mathbf{0} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.147b)}$$

obteniendo el sistema de ecuaciones que permite hallar los parámetros  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{q}$ . Dicho sistema de ecuaciones puede también expresarse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (3.148)}$$

El sistema de ecuaciones anterior es simétrico. Del mismo modo, se debe tener en cuenta que la matriz de coeficientes, llamada en este caso Hessiana, no es una matriz definida positiva.

El modelo mixto tiene algunas ventajas importantes en comparación al modelo de desplazamientos tradicional. Para empezar, ya no se tiene el problema de las segundas derivadas en la formulación, dificultad seria en la formulación de desplazamientos más tradicional; por tanto, se tiene un elemento finito mixto que es perfectamente continuo y consistente. Además, en el modelo mixto, la calidad de los resultados de momentos es superior (dependiendo del tipo de interpolación que se utilice, ver por ejemplo los gráficos de convergencia de la Sección 5.3.1) a la que se tendría con un modelo de desplazamientos; ello se debe a que en el primer caso tales medidas de esfuerzos son incógnitas *primarias*, mientras que en la formulación basada en energía potencial se obtienen como derivadas segundas del desplazamiento transversal.

Por todo ello el modelo mixto representa una idea atractiva, pero tiene también algunos problemas que han originado que dichos modelos no hayan tenido mucho éxito. Uno de ellos, es que estos elementos mixtos hacen referencia a incógnitas de dos grupos: desplazamientos transversales y momentos por unidad de longitud, y no se pueden combinar directamente con otros elementos como por ejemplo un elemento de viga de la forma clásica, en el que las incógnitas son más bien desplazamientos transversales y componentes de giro. Un segundo problema, y quizás el más importante, se refiere a las condiciones de borde: para algunas situaciones prácticas es difícil definir las condiciones de borde apropiadas al utilizar un modelo mixto.

### 3.6 MODELOS HÍBRIDOS

Los modelos híbridos son básicamente modelos mixtos en donde se tienen aproximaciones que son válidas en distintos dominios. En forma práctica, en los elementos híbridos el campo en su interior se define por un conjunto de parámetros mientras que el campo en su contorno por otro conjunto, como se puede notar en la Figura 3.10. Este último campo se escoge generalmente de forma similar a los modelos de desplazamientos usuales y, por consiguiente, pueden incorporarse fácilmente en un programa general y ciertamente utilizarse con los

modelos de desplazamiento estándar. Asimismo, los parámetros internos pueden eliminarse fácilmente ya que están confinados a un elemento aislado. El concepto original es debido a T.H.H. Pian, quien fue pionero en utilizar con éxito este procedimiento. Actualmente existen muchas variantes del mismo en el contexto de la teoría de losas delgadas, de las cuales se presentarán a continuación solo dos: los llamados modelos híbridos de esfuerzos y los modelos propuestos en esta tesis conocidos como los modelos híbridos de Trefftz.

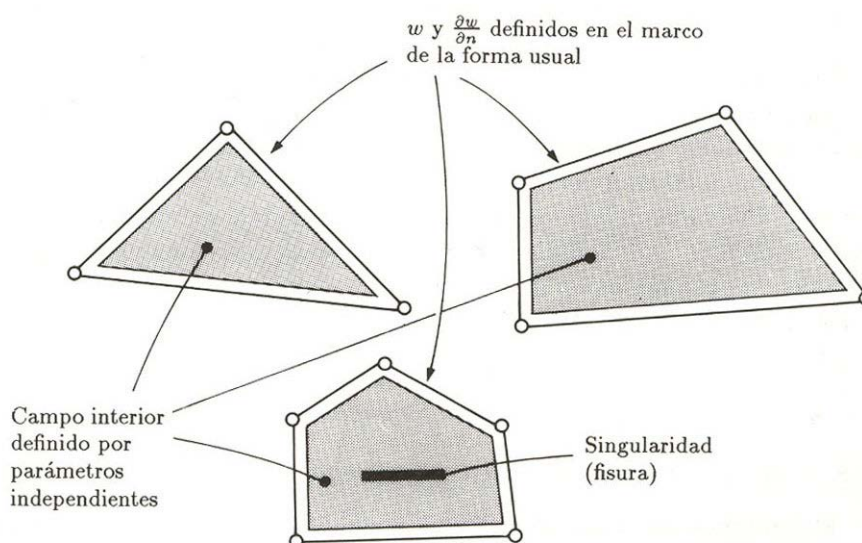


Figura 3.10 Elementos híbridos [31].

### 3.6.1 MODELOS HÍBRIDOS DE ESFUERZOS

El desarrollo de los modelos híbridos de esfuerzos se basa en el funcional de energía complementaria modificada:

$$\Pi_{mc}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \sum_e \left( \int_{V_e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial V_e} \mathbf{t}^T \mathbf{u} dS + \int_{S_{\sigma_e}} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \right) \quad \text{Ec. (3.80)}$$

Como se mencionó en la Sección 3.2.4, la filosofía de tal metodología consiste en suponer un *campo de esfuerzos*  $\boldsymbol{\sigma}$  en equilibrio dentro del elemento en términos de ciertos parámetros generalizados  $\boldsymbol{\beta}$  y asignar al borde, simultáneamente, un *campo de desplazamientos*  $\mathbf{u}$  interelemento-compatible expresado en términos de los desplazamientos de los nudos del

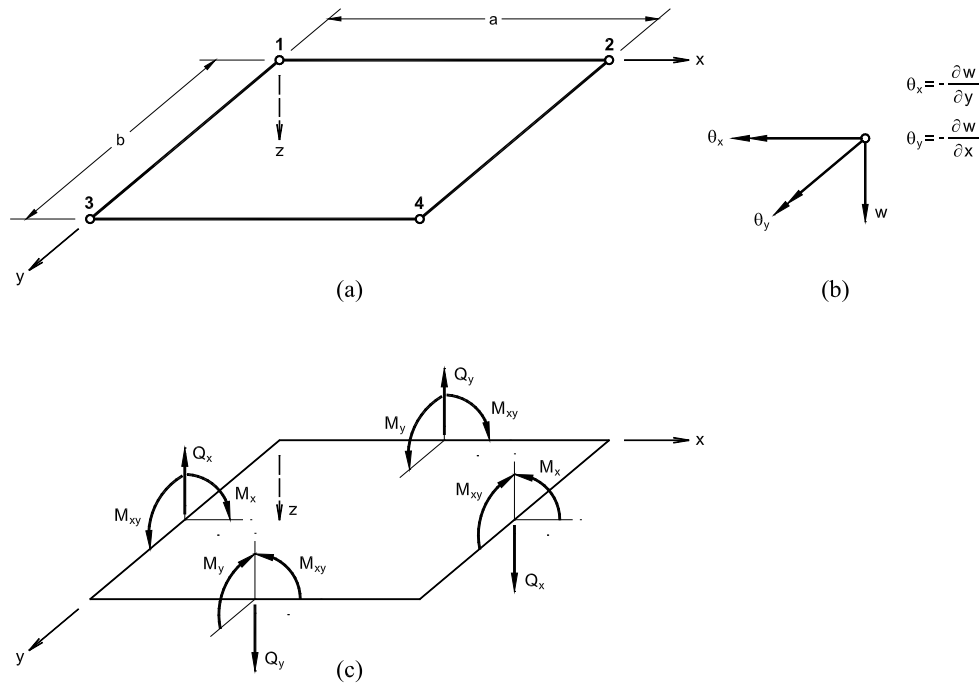
elemento  $\mathbf{q}$ . Las dos suposiciones son independientes. Las tracciones de borde  $\mathbf{t}$  son definidas consistentemente con  $\boldsymbol{\sigma}$ , de manera que dichas tracciones son también expresadas en términos de  $\boldsymbol{\beta}$ . Los grados de libertad nodales son cantidades en desplazamientos, por lo tanto, los elementos híbridos de esfuerzos pueden ser unidos a elementos de desplazamientos.

En la Sección 3.2.4 se hizo una breve referencia a los modelos híbridos de esfuerzos en general. A continuación, se describe en mayor detalle un modelo híbrido de esfuerzos para el análisis de losas propuesto por Severn y Taylor a mediados de los años 60.

### **3.6.1.1 ELEMENTO RECTANGULAR PARA FLEXIÓN DE LOSAS BASADO EN APROXIMACIONES PARA LOS ESFUERZOS**

En el trabajo de Severn y Taylor [25] del año 1966, se desarrollaron dos modelos para losas: un elemento rectangular y un elemento triangular de ángulo recto. A grosso modo, son un equivalente de lo que Pian había ya antes planteado al tratar con problemas de esfuerzo plano.

Así, para el caso del elemento rectangular de cuatro nudos (ver Figura 3.11a), son especificados: el desplazamiento transversal,  $w$ , y las dos componentes de rotación,  $\theta_x (= -\partial w / \partial y)$  y  $\theta_y (= -\partial w / \partial x)$  en cada uno de dichos nudos (ver Figura 3.11b). Del mismo modo, en la Figura 3.11c se muestran las convenciones de signos para momentos y cortes considerados en este elemento y que son análogas a aquellas de la Figura 1.4.



**Figura 3.11 Elemento híbrido de esfuerzos para losas de Severn y Taylor [25]. a) Geometría. b) Grados de libertad en cada nudo. c) Acciones sobre los lados del elemento.**  
Severn y Taylor empezaron escribiendo aproximaciones para los esfuerzos (no para los momentos, como es más frecuente en el tratamiento de losas):

$$\sigma_x = (\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2) 8z/t \quad \text{Ec. (3.149a)}$$

$$\sigma_y = (\beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y + \beta_{10} x^2 + \beta_{11} xy + \beta_{12} y^2) 8z/t \quad \text{Ec. (3.149b)}$$

$$\tau_{xy} = (\beta_{13} + \beta_{14} x + \beta_{15} y + \beta_{16} x^2 + \beta_{17} xy + \beta_{18} y^2) 8z/t \quad \text{Ec. (3.149c)}$$

$$\tau_{zx} = (\beta_{19} + \beta_{20} x + \beta_{21} y) (1 - 4z^2/t^2) \quad \text{Ec. (3.149d)}$$

$$\tau_{zy} = (\beta_{22} + \beta_{23} x + \beta_{24} y) (1 - 4z^2/t^2) \quad \text{Ec. (3.149e)}$$

donde  $z$  es la dirección de la coordenada transversal al plano del elemento, es decir en la dirección de  $w$ ; mientras que  $x$  e  $y$  fueron escritas, por brevedad, para representar  $x/a$  e  $y/b$  respectivamente. Se plantearon expresiones para las cinco componentes de esfuerzos, polinómicas en  $x, y$  y con las variaciones en dirección  $z$  consistentes con las distribuciones de esfuerzos que se tienen según la teoría clásica (ver Figura 1.5a).

Tales esfuerzos producen las siguientes resultantes de esfuerzo por unidad de longitud (ver ecuaciones 1.20 a 1.24):

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad \text{Ec. (3.150a, b)}$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad \text{Ec. (3.150c)}$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zx} dz, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zy} dz \quad \text{Ec. (3.150d, e)}$$

Habiendo supuesto las Ecs. (3.149), del todo arbitrariamente, es necesario satisfacer las tres condiciones de equilibrio:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad \text{Ec. (3.151a)}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad \text{Ec. (3.151b)}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad \text{Ec. (3.151c)}$$

Como se puede notar en la Ec. (3.151a), el término que tiene que ver con las fuerzas de cuerpo no aparece [comparar con la Ec. (1.1)]. Pian y Tong al desarrollar estos modelos híbridos de esfuerzos probaron que los resultados para las matrices de coeficientes son los mismos si se considera o no a tales fuerzas de cuerpo.

Haciendo uso de las ecuaciones (3.150) con (3.149), estas tres condiciones de equilibrio permiten que siete de los coeficientes  $\beta$ , esto es  $\beta_{17}$ ,  $\beta_{19}$ ,  $\beta_{20}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{22}$ ,  $\beta_{23}$  y  $\beta_{24}$ , sean escritos en términos de los restantes diecisiete. Con lo cual, la Ec. (3.149) es reescrita y reemplazada en forma matricial por:



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x / z \\ \sigma_y / z \\ \tau_{xy} / z \\ \tau_{zx} / z' \\ \tau_{zy} / z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & -xyb/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & x/a & y/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -yb/a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{16} \\ \beta_{18} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (3.152)}$$

donde  $x$  e  $y$  están, como antes, escritas para  $x/a$  e  $y/b$  respectivamente, mientras que  $z$  está escrita para  $8z/t$  y  $z'$  para  $t(1-4z^2/t^2)$ . En una forma más compacta la Ec. (3.152) puede ser escrita (despejando previamente los esfuerzos de  $z$  y  $z'$ ) como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}^{(e)} = \mathbf{P}(x, y, z) \boldsymbol{\beta}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.153)}$$

en donde los parámetros empleados  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  indican que son distintos para cada elemento. Sin embargo, para plantear las expresiones en una forma más acorde con el típico análisis de losas se podría escribir (luego de hacer integraciones):

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\beta}^{(e)} = \mathbf{P}_1(x, y) \boldsymbol{\beta}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.154a)}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\beta}^{(e)} = \mathbf{P}_2(x, y) \boldsymbol{\beta}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.154b)}$$

Asimismo, a lo largo de cada borde se plantean expresiones para los desplazamientos como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.155)}$$

donde las funciones de interpolación de desplazamientos  $\mathbf{N}$  que Severn y Taylor utilizaron para cada borde fueron aquellas propias de la teoría de vigas sin deformación cortante [13]; por ejemplo, para el borde 1-2 de la Figura 3.11a, se planteó para la componente  $w$  y para la componente  $\theta_y$  (giros en dirección tangencial al borde):

$$w = (1 - 3x^2 + 2x^3)w_1 + a(-x + 2x^2 - x^3)\theta_{y_1} + (3x^2 - 2x^3)w_2 + a(x^2 - x^3)\theta_{y_2} \quad \text{Ec. (3.156a)}$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{6}{a}(x - x^2)(w_1 - w_2) + (1 - 4x + 3x^2)\theta_{y_1} + (-2x + 3x^2)\theta_{y_2} \quad \text{Ec. (3.156b)}$$

mientras que para los giros perpendicularmente al borde, simplemente supusieron una interpolación lineal:

$$\theta_x = (1 - x)\theta_{x_1} + (x)\theta_{x_2} \quad \text{Ec. (3.156c)}$$

donde como antes, por brevedad, se ha escrito  $x$  en sustitución de  $x/a$ .

Un trabajo similar puede ser hecho para los otros tres bordes del elemento. Por consiguiente, para cada borde se pueden expresar las tres componentes de desplazamiento  $w$ ,  $\theta_x$  y  $\theta_y$  como una interpolación de los desplazamientos nodales  $\mathbf{q}$  de la manera mostrada por la Ec. (3.155).

Puede notarse que al plantear un modelo híbrido de esfuerzos, como el que se está describiendo, pueden escribirse para cada borde expresiones relativamente simples para las componentes de desplazamiento, que satisfacen perfectamente la continuidad.

Por otra parte, Severn y Taylor trabajaron con las siguientes relaciones deformación-esfuerzo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (3.157)}$$

donde  $\bar{\nu} = 2(1 + \nu)$ . Más sucintamente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{Ec. (3.158)}$$

Sin embargo, nuevamente, en el contexto de losas es más frecuente trabajar con curvaturas y deformaciones cortantes que con las propias componentes de deformación, así como con las resultantes de esfuerzos en lugar de los esfuerzos en un punto:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{S}_M \mathbf{M} \quad \text{Ec. (3.159a)}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S}_Q \mathbf{Q} \quad \text{Ec. (3.159b)}$$

De otro lado, a partir de las Ecs. (3.154) pueden obtenerse expresiones particularizadas para los bordes; de ese modo se pueden escribir las tracciones de borde en cada uno de los bordes del elemento como:

$$\mathbf{t} = \mathbf{L} \boldsymbol{\beta}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.160)}$$

tales expresiones escritas para cada borde del elemento deben ser correspondidas, componente por componente, con aquellas escritas anteriormente para los desplazamientos  $\mathbf{u}$  [Ec. (3.155)].

Reemplazando las aproximaciones anteriores y sus consecuencias en la siguiente versión del funcional de energía complementaria modificada escrita para losas:

$$\Pi_{\text{mc}}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}; \mathbf{u}) = \sum_e \left( \int_{A_e} \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{S}_M \mathbf{M} dA + \int_{A_e} \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{S}_Q \mathbf{Q} dA - \int_{\partial A_e} \mathbf{t}^T \mathbf{u} dS + \int_{S_{\sigma_e}} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \right) \quad \text{Ec. (3.161)}$$

se obtiene una simple función de los parámetros indeterminados  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  y  $\mathbf{q}$ :

$$\Pi_{\text{mc}}(\boldsymbol{\beta}^{(e)}, \mathbf{q}) = \sum_e \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^{(e)T} \mathbf{H}^{(e)} \boldsymbol{\beta}^{(e)} - \boldsymbol{\beta}^{(e)T} \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{f}^{(e)} \right) \quad \text{Ec. (3.162)}$$

donde:

$$\mathbf{H}^{(e)} = \int_{A_e} \mathbf{P}_1^T \mathbf{S}_M \mathbf{P}_1 dA + \int_{A_e} \mathbf{P}_2^T \mathbf{S}_Q \mathbf{P}_2 dA \quad \text{Ec. (3.163)}$$

$$\mathbf{G}^{(e)} = \int_{\partial A_e} \mathbf{L}^T \mathbf{N} dS \quad \text{Ec. (3.164)}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{S_{\sigma_e}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad \text{Ec. (3.165)}$$

A continuación y para que la Ec. (3.162) sea estacionaria, se puede exigir que las derivadas de  $\Pi_{mc}$  con relación a los  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  de un determinado elemento sean cero:

$$\frac{\partial \Pi_{mc}}{\partial \boldsymbol{\beta}^{(e)}} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.166)}$$

pero al ser los parámetros  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  independientes para cada elemento, se obtiene tan solo el aporte de dicho elemento:

$$\mathbf{H}^{(e)} \boldsymbol{\beta}^{(e)} - \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.167)}$$

de donde se puede despejar los  $\boldsymbol{\beta}^{(e)}$  del elemento:

$$\boldsymbol{\beta}^{(e)} = [\mathbf{H}^{(e)}]^{-1} \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{q} \quad \text{Ec. (3.168)}$$

que al sustituirse en la Ec. (3.162), permiten obtener la siguiente función de los parámetros  $\mathbf{q}$ :

$$\Pi_{mc}(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.169)}$$

donde  $\mathbf{K}$  (matriz de rigidez) y  $\mathbf{f}$  (vector de fuerzas) son expresiones similares a aquellas de las ecuaciones (3.92) y (3.93) respectivamente.

Por último, al exigir que las distintas derivadas de  $\Pi_{mc}$  con respecto a cada uno de los  $\mathbf{q}$  sean cero:

$$\frac{\partial \Pi_{mc}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.170)}$$

se obtiene la conocida expresión de rigideces por desplazamientos igual a fuerzas:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad \text{Ec. (3.171)}$$

Los modelos híbridos de esfuerzos tienen algunas ventajas con relación a los modelos mixtos, pues son más fáciles de usar que estos últimos, porque se obtiene una matriz de rigidez y entonces todas las expresiones encajan dentro del programa de análisis tradicional. Además, la prescripción de las condiciones de borde es también más simple. Sin embargo, la aproximación para los momentos es buena sin llegar en general a la calidad que puede tenerse en un modelo mixto (dependiendo del tipo de interpolación que se utilice para este último, ver por ejemplo las Figuras 5.17 y 5.18), porque al ser las aproximaciones de carácter local, son de inferior calidad que aquellas que de alguna forma tienen un carácter más global. No obstante, desde el punto de vista práctico, los modelos híbridos de esfuerzos son una mejor alternativa.

Finalmente, los modelos híbridos de esfuerzos para losas tienen también algunas posibilidades mejores que los modelos tradicionales de desplazamientos, pues permiten salvar algunas de las dificultades que se presentan en dichos modelos. En un problema de losas basado en una formulación de desplazamientos (ver Sección 2.5), se tienen dificultades para satisfacer la continuidad entre elementos. Al utilizar un modelo híbrido de esfuerzos, como el de Severn y Taylor presentado arriba, esos impases son más fácilmente resueltos. Asimismo, en los modelos híbridos de esfuerzos el énfasis está en las aproximaciones de los esfuerzos (o momentos) directamente y no tanto en las aproximaciones para los desplazamientos; el enfoque tradicional de elementos finitos para losas consiste en hacer una aproximación para los desplazamientos transversales y los momentos se obtienen como derivadas segundas de tal

aproximación por ciertas constantes; por tanto *se pierde calidad en la aproximación de los momentos*. En cambio, en el modelo híbrido de esfuerzos se puede ser muy refinado en cuanto a las aproximaciones que se planteen para dichas medidas de esfuerzos y la calidad de los resultados obtenidos con estas aproximaciones tiende a ser mejor, como puede notarse en la Figura 5.17 por ejemplo.

### 3.6.2 MODELOS HÍBRIDOS DE TREFFTZ

Trefftz originalmente propuso su método en 1926, pero este ha sido en las últimas décadas considerablemente mejorado, especialmente por Jirousek y sus colaboradores quienes dieron origen al *modelo de elementos finitos híbrido de Trefftz*, que es una herramienta computacional altamente eficiente para la solución de problemas de valor de borde difíciles, entre ellas el de flexión de losas.

A diferencia de los modelos más convencionales, la formulación híbrida de Trefftz está basada en campos de desplazamientos que satisfacen *a priori* las ecuaciones diferenciales gobernantes (método de Trefftz). Asimismo, la continuidad interelemento es impuesta usando un principio estacionario junto con un desplazamiento interelemento independiente. La formulación del elemento (durante el cual los parámetros internos son eliminados al nivel del elemento), conduce a la habitual relación fuerza-desplazamiento con incógnitas finales que son los *desplazamientos nodales*. De otro lado, la forma del elemento puede ser un poco arbitraria, desde que la integración requerida para construir las matrices del elemento está limitada a los bordes del mismo. Además, donde sea aplicable, pueden emplearse soluciones locales conocidas en la vecindad de una singularidad o de una concentración de esfuerzos para obtener, por ejemplo, particulares elementos de esquina singulares o elementos que presentan agujeros circulares. Así, puede lograrse un alto grado de exactitud sin un dificultoso refinamiento de la malla.

#### 3.6.2.1 FORMULACIÓN GENERAL DEL ELEMENTO FINITO HÍBRIDO DE TREFFTZ

Antes de presentar la aplicación del elemento híbrido de Trefftz al caso particular de flexión de losas, se resume a continuación la formulación teórica general del método [15].

### 3.6.2.1.1 Principio del método

La idea básica del método es establecer la formulación de elementos finitos sobre funciones de aproximación de desplazamientos que satisfacen *a priori* las ecuaciones que gobiernan el problema diferencial (Trefftz) en lugar de las condiciones de borde esenciales y la continuidad interelemento. Para ello, considérese que el equilibrio interno de un continuo elástico que ocupa la región  $\Omega$  limitada por  $S=\partial\Omega$  es expresado en términos de desplazamientos por un sistema de ecuaciones diferenciales gobernantes:

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{Ec. (3.172)}$$

en la expresión anterior,  $\mathbf{L}$  es un operador matricial diferencial lineal,  $\mathbf{u}$  es un vector de desplazamientos generalizados y  $\bar{\mathbf{f}}$  es un vector conjugado de fuerzas de cuerpo generalizadas conocidas. Las condiciones de borde están especificadas en términos de los desplazamientos de borde generalizados  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$  y/o las tracciones de borde generalizadas conjugadas  $\mathbf{T}$  como:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{en} \quad S_v \quad \text{y} \quad \mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{en} \quad S_T \quad \text{Ec. (3.173a, b)}$$

donde  $\bar{\mathbf{v}}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$  representan las cantidades prescritas y  $S_v + S_T = \partial\Omega$ .

Entonces, para resolver el problema de borde, la región  $\Omega$  es subdividida en subregiones (elementos finitos)  $\Omega_e$ . Sin embargo, a diferencia de la formulación convencional de elementos finitos, la solución sobre cada  $\Omega_e$  es ahora aproximada en términos de una solución particular  $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_e$  y un grupo de soluciones homogéneas apropiadas  $\phi_1, \dots, \phi_m$  a (3.172):

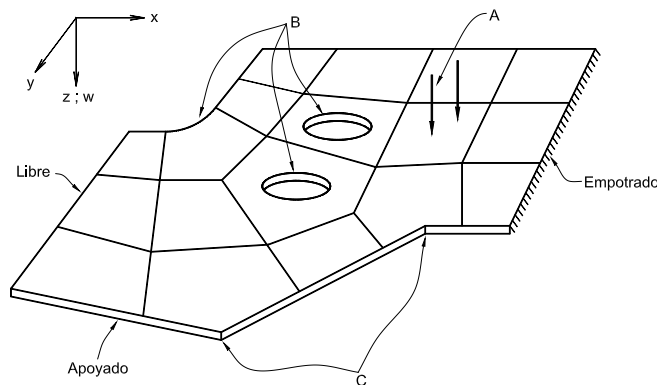
$$\mathbf{u}_e = \overset{\circ}{\mathbf{u}}_e + \sum_{i=1}^m \phi_i \mathbf{a}_i = \overset{\circ}{\mathbf{u}}_e + \phi_e \mathbf{a}_e \quad \text{Ec. (3.174)}$$

donde  $\mathbf{a}_e$  es un vector de coeficientes indeterminados, mientras que  $\mathbf{u}_e^\circ$  y  $\phi_i$  son funciones de aproximación conocidas, tales que:

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_e^\circ = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{y} \quad \mathbf{L}\phi_i = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Omega_e \quad \text{Ec. (3.175a, b)}$$

Nótese de lo anterior que, mientras que se han elegido las funciones  $\mathbf{u}_e^\circ$  y  $\phi_i$  a fin de satisfacer a priori las ecuaciones que gobiernan el problema diferencial, Ec. (3.172), las condiciones de borde, Ec. (3.173a, b), y la continuidad interelemento han sido ignoradas. Tales condiciones deberán ser por tanto satisfechas en alguna forma definida convenientemente.

Debe mencionarse además que, a diferencia de las funciones  $\phi_i$ , las cuales están confinadas a un simple elemento, la función de desplazamiento dependiente de la carga  $\mathbf{u}_e^\circ$  puede ser una función global, lo cual es de particular interés para tratar por ejemplo con cargas concentradas, ya que usando el término apropiado  $\mathbf{u}_e^\circ$  permite el uso de mallas de elementos finitos enteramente independientes de las ubicaciones de las cargas (Figura 3.12).



**Figura 3.12** Malla típica de elementos híbridos de Trefftz sofisticados [15]: A) Singularidades debido a cargas concentradas; B) Concentraciones de esfuerzos debido a agujeros circulares o a esquinas entrantes redondeadas; C) Singularidades de esquinas angulares.

Asimismo, en algunos casos se pueden usar *grupos de aproximación especiales*  $\mathbf{u}_e^\circ$  y  $\phi_i$  a fin de satisfacer *a priori* y además de las condiciones (3.175a, b) las condiciones de borde sobre una porción particular del borde del elemento. Esto permite la formulación de *elementos de propósito especial* muy exactos (ver Figuras 3.12, 3.13) que incluyen, por



ejemplo, agujeros circulares, cortes de forma de V agudos o esquinas angulares singulares. Así, muchos de estos problemas pueden ser resueltos con sorprendente eficiencia, usando unos pocos elementos grandes.

Por otro lado, una forma simple de hacer cumplir la continuidad interelemento y de paso expresar los coeficientes desconocidos  $\mathbf{a}_e$  en términos de parámetros nodales convenientemente elegidos, ver Ec. (3.189), es el procedimiento híbrido basado en usar una *función marco* que representa un desplazamiento interelemento independiente  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Así, si en el borde de un elemento particular se plantea la siguiente expresión:

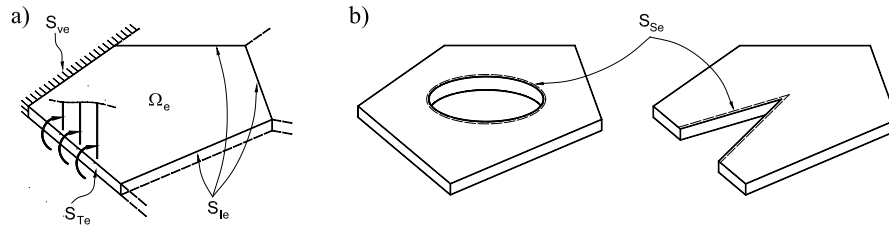
$$\tilde{\mathbf{v}}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{d}_e \quad \text{Ec. (3.176)}$$

donde  $\mathbf{d}_e$  representa el vector de parámetros nodales y donde las funciones de interpolación  $\mathbf{N}_e$  son tales que si los correspondientes parámetros nodales de dos elementos adyacentes son los mismos, la continuidad interelemento es asegurada a lo largo de la porción común de borde.

Finalmente, en el proceso de formulación del elemento, los coeficientes indeterminados  $\mathbf{a}_e$  son eliminados y los parámetros nodales  $\mathbf{d}_e$  son dejados como las incógnitas finales, resultando así en la típica relación fuerza-desplazamiento:

$$\mathbf{f}_e = \overset{\circ}{\mathbf{f}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \quad \text{Ec. (3.177)}$$

en la expresión anterior,  $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_e$  representa aquella parte del vector de fuerzas nodales equivalentes  $\mathbf{f}_e$  que constituye el efecto del término particular  $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_e$  en (3.174), y  $\mathbf{K}_e$  representa la matriz de rigidez del elemento.



**Figura 3.13 Elementos híbridos de Trefftz [15]: a) Regular. b) De propósito especial perforado y con corte de forma de V agudo.**

### 3.6.2.1.2 Formulación variacional

La formulación variacional empleada a continuación y que está basada en las funciones (3.174) y (3.176) supone que el borde de un elemento particular (Figura 3.13) está representado como una suma de cuatro porciones distintas:

$$\partial\Omega_e = S_{Ie} + S_{ve} + S_{Te} + S_{Se} = S_e + S_{Se} \quad \text{Ec. (3.178)}$$

con el siguiente significado:

$S_{Ie}$  = porción interelemento de  $\partial\Omega_e$

$S_{Se}$  = porción de  $\partial\Omega_e$  en la cual  $\mathbf{u}_e$  satisface *a priori* las condiciones de borde prescritas

$S_{Se} = S_{Sve} + S_{STe}$

$S_{ve}$  y  $S_{Te}$  = porciones de la parte restante del borde del elemento,  $\partial\Omega_e - S_{Ie} - S_{Se}$ , en la cual o los desplazamientos ( $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ ) o las tracciones de borde ( $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}$ ) están prescritas (pero no verificadas *a priori*).

Además, si  $\mathbf{u}_e$  es una aproximación de propósito especial, la función marco  $\bar{\mathbf{v}}_e$  en (3.176) estará restringida a la siguiente porción del borde del elemento:

$$S_e = \partial\Omega_e - S_{Se} \quad \text{Ec. (3.179)}$$

A continuación, considérese el siguiente funcional:

$$J(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \sum_e \left( - \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_e d\Omega + \int_{S_{Sve}} \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{v}} dS - \int_{S_{STe}} \mathbf{v}_e^T \bar{\mathbf{T}} dS + \right. \\ \left. + \int_{S_e} \mathbf{T}_e^T (2\tilde{\mathbf{v}}_e - \mathbf{v}_e) dS - 2 \int_{S_{Te}} \tilde{\mathbf{v}}_e^T \bar{\mathbf{T}} dS \right) = \text{estacionario.} \quad \text{Ec. (3.180)}$$

donde la suma se extiende sobre todos los elementos. Los campos independientes  $\mathbf{u}_e$  y  $\tilde{\mathbf{v}}_e$  de un elemento particular están sujetos a las siguientes condiciones auxiliares:

a) El campo  $\mathbf{u}_e$  verifica las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema:

$$\mathbf{L} \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{en} \quad \Omega_e \quad \text{Ec. (3.181a)}$$

y si es aplicable (Figura 3.13b), las condiciones de borde prescritas:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_e = \mathbf{v}(\mathbf{u}_e) = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{en} \quad S_{Sve} \\ \mathbf{T}_e = \mathbf{T}(\mathbf{u}_e) = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{en} \quad S_{STe} \end{array} \right\} \text{porciones de } S_{Se} \quad \text{Ec. (3.181b)}$$

b) La función marco  $\tilde{\mathbf{v}}_e$  satisface los requerimientos de continuidad interelemento y las condiciones de borde cinemáticas:

$$\tilde{\mathbf{v}}_e = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{en} \quad S_{ve} \quad \text{Ec. (3.181c)}$$

Luego de efectuada el álgebra, se tiene que las condiciones estacionarias asociadas con  $\delta J(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = 0$  son las condiciones de borde estáticas  $\mathbf{T}_e = \bar{\mathbf{T}}$  en  $S_{Te}$  y la continuidad de desplazamientos entre elementos  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v}_e = \tilde{\mathbf{v}}_e$  en  $S_e$ ). Consecuentemente, el principio estacionario (3.180) impone implícitamente todas las condiciones que faltan.

Para la obtención de las ecuaciones de aproximación, se halla la primera variación del funcional y se iguala a cero:

$$\delta J = 0 \quad \text{Ec. (3.182)}$$

trabajando con el operador de variaciones, se obtiene:

$$\delta J(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = \sum_e \left( - \int_{S_e} \delta \mathbf{T}_e^T \mathbf{v}_e dS + \int_{S_e} \delta \mathbf{T}_e^T \tilde{\mathbf{v}}_e dS + \int_{S_e} \delta \tilde{\mathbf{v}}_e^T \mathbf{T}_e dS - \int_{S_{Te}} \delta \tilde{\mathbf{v}}_e^T \bar{\mathbf{T}} dS \right) = 0 \quad \text{Ec. (3.183)}$$

Por otro lado, usando definiciones adecuadas de los desplazamientos de borde generalizados  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$  y las tracciones conjugadas  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{u})$ , y la sustitución para  $\mathbf{u}$  de (3.174), se puede expresar:

$$\mathbf{v}_e = \overset{\circ}{\mathbf{v}}_e + \mathbf{\Phi}_e \mathbf{a}_e \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_e = \overset{\circ}{\mathbf{T}}_e + \mathbf{\theta}_e \mathbf{a}_e \quad \text{Ec. (3.184a, b)}$$

donde  $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e, \overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$  corresponden a  $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_e$  (parte particular de  $\mathbf{u}_e$ ) y  $\mathbf{\Phi}_e, \mathbf{\theta}_e$  a  $\mathbf{\phi}_e$  (parte homogénea de  $\mathbf{u}_e$ ). Así, después de sustituir las aproximaciones y sus consecuencias en (3.183), y llamando:

$$\mathbf{H}_e = \int_{S_e} \mathbf{\theta}_e^T \mathbf{\Phi}_e dS, \quad \mathbf{G}_e = \int_{S_e} \mathbf{\theta}_e^T \mathbf{N}_e dS \quad \text{Ec. (3.185a, b)}$$

$$\mathbf{h}_e = \int_{S_e} \mathbf{\theta}_e^T \overset{\circ}{\mathbf{v}}_e dS, \quad \mathbf{g}_e = \int_{S_e} \mathbf{N}_e^T \overset{\circ}{\mathbf{T}}_e dS - \int_{S_{Te}} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad \text{Ec. (3.185c, d)}$$

se obtiene la expresión para  $\delta J = 0$ , pero ahora en función de los parámetros indeterminados  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{d}$ :

$$\delta J(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \sum_e \left( -\delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{a}_e - \delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{h}_e + \delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e + \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{g}_e + \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{G}_e^T \mathbf{a}_e \right) = 0 \quad \text{Ec. (3.186)}$$

Como las variaciones  $\delta \mathbf{a}_e$  y  $\delta \mathbf{d}_e$  son arbitrarias, se va a considerar en un primer momento, de las infinitas posibilidades,  $\delta \mathbf{a}_e = \mathbf{0}$  excepto  $\delta \mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$  (solo son distintos de cero los parámetros asociados al elemento  $i$ ), y  $\delta \mathbf{d}_e = \mathbf{0}$ , obteniendo:

$$\delta \mathbf{a}_i^T (-\mathbf{H}_i \mathbf{a}_i - \mathbf{h}_i + \mathbf{G}_i \mathbf{d}_i) = 0 \quad \text{Ec. (3.187)}$$

Puesto que la expresión anterior debe ser cero independientemente del valor de  $\delta \mathbf{a}_i$ , se requiere que:

$$-\mathbf{H}_i \mathbf{a}_i - \mathbf{h}_i + \mathbf{G}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.188)}$$

Despejando los coeficientes indeterminados  $\mathbf{a}_i$  en términos de los parámetros nodales de desplazamiento  $\mathbf{d}_i$ , y volviendo al subíndice  $e$ :

$$\mathbf{a}_e = -\mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{h}_e + \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e \quad \text{Ec. (3.189)}$$

Considerando ahora las variaciones  $\delta \mathbf{a}_e = \mathbf{0}$  y  $\delta \mathbf{d}_e \neq \mathbf{0}$ , se obtiene de (3.186):

$$\sum_e \delta \mathbf{d}_e^T (\mathbf{G}_e^T \mathbf{a}_e + \mathbf{g}_e) = 0 \quad \text{Ec. (3.190)}$$

Como la expresión anterior debe ser cero independientemente de los  $\delta \mathbf{d}_e$ , se requiere que:

$$\sum_e (\mathbf{G}_e^T \mathbf{a}_e + \mathbf{g}_e) = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.191)}$$

Sustituyendo (3.189) en (3.191):

$$\sum_e (-\mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{h}_e + \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{g}_e) = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.192)}$$

y llamando:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \quad \text{y} \quad \overset{\circ}{\mathbf{f}}_e = \mathbf{g}_e - \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{h}_e \quad \text{Ec. (3.193a, b)}$$

se obtiene:

$$\sum_e \left( \overset{\circ}{\mathbf{f}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \right) = \sum_e \left( \mathbf{f}_e \right) = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (3.194)}$$

La expresión anterior representa una ecuación de equilibrio, pues lo que está entre paréntesis se puede identificar como un vector de fuerzas nodales equivalentes para el elemento  $e$ , lo que conduce finalmente a la relación fuerza-desplazamiento ya mostrada en (3.177).

Finalmente, para una solución exitosa es muy importante elegir el número apropiado  $m$  de funciones de aproximación  $\phi_i$  para el elemento. La regla básica usada es análoga a aquella del modelo híbrido de esfuerzos. Es decir, se requiere que:

$$m \geq n - r \quad \text{Ec. (3.195)}$$

donde  $n$  y  $r$  son los números de grados de libertad (GDL) del elemento y de los términos de movimiento de cuerpo rígido. Sin embargo, el valor óptimo de  $m$  para un tipo particular de elemento debería ser encontrado por *experimentación numérica*.

### 3.6.2.2 APLICACIÓN A FLEXIÓN DE LOSAS [15]

En este acápite la formulación general del modelo de elementos finitos híbrido de Trefftz de la sección precedente se aplica al caso particular de flexión de losas.

#### 3.6.2.2.1 Desarrollo de las matrices de elementos finitos

En el caso de la aplicación a la teoría clásica de Kirchhoff, el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$  está limitado a la componente  $w$  (el desplazamiento transversal); por tanto, la siguiente aproximación (que incluye el conjunto apropiado de funciones  $\overset{\circ}{w}$  y  $\phi_i$ ):

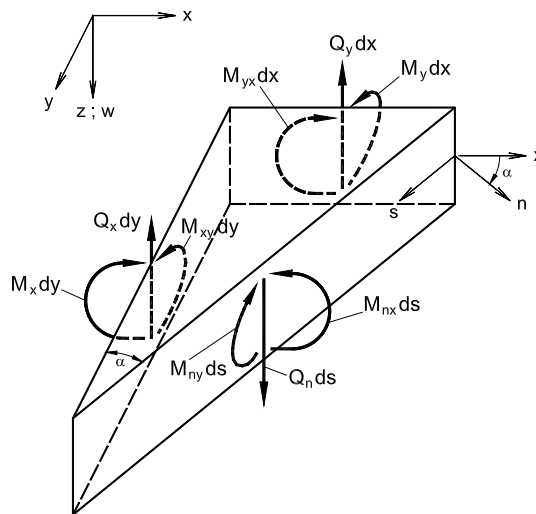
$$w = \overset{\circ}{w} + \sum_{i=1}^m \phi_i a_i \quad \text{Ec. (3.196)}$$

será elegida como para satisfacer la ecuación de Lagrange, ver Ec. (1.35):

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad \text{Ec. (3.197)}$$

en la cual, como antes,  $p$  representa la carga distribuida y  $D = Et^3/12(1-\nu^2)$  la rigidez flexional de la losa.

La aplicación de la formulación variacional general vista anteriormente comprende la elección de adecuadas funciones de aproximación  $\overset{\circ}{w}$  y  $\phi_i$  así como la apropiada definición de los desplazamientos y tracciones de borde generalizados conjugados  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{T}$ . Una posible alternativa de esto último es mostrada en la Figura 3.14.



**Figura 3.14 Método alternativo para la definición de las tracciones de borde generalizadas para los elementos de flexión de losa.**

la que conduce a las siguientes definiciones:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} w \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_{nx} \\ M_{ny} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (3.198)}$$

con:

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_x \cos \alpha + Q_y \operatorname{sen} \alpha, \\ M_{nx} &= M_x \cos \alpha + M_{yx} \operatorname{sen} \alpha, \\ M_{ny} &= M_y \operatorname{sen} \alpha + M_{xy} \cos \alpha, \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.199)}$$

y (ver Sección 1.7):

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, & Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \\ M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.200)}$$

El uso del par de vectores conjugados  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{T}$  con las ecuaciones (3.184), (3.185) y (3.193) conduce directamente a las matrices del elemento  $\mathbf{f}_e$  y  $\mathbf{K}_e$ .

### 3.6.2.2.2 Elementos estándar

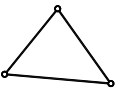
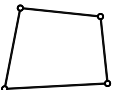
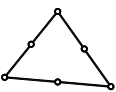
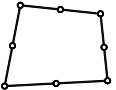
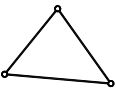
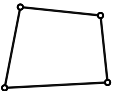
Como se puede notar de las Ecs. (3.175b) y (3.197) las funciones de aproximación  $\phi_i$  son funciones biarmónicas de las cuales existen muchos tipos. Una alternativa son los polinomios biarmónicos, los cuales tienen la ventaja de ser fácilmente integrables y que pueden ser generados en una forma sistemática en términos de potencias de la variable compleja  $z$ , como se muestra por ejemplo en la sección 4.3.1.1



De otro lado, el término de desplazamiento dependiente de la carga  $\overset{\circ}{w}$  puede ser encontrado para varios tipos de carga. En la sección 4.3.1.2 se presentan expresiones adecuadas para carga uniforme  $p$  y carga concentrada  $P$ .

Las funciones de aproximación que están siendo definidas, así como la naturaleza del método (no se requiere integrar sobre el área del elemento), hacen posible que puedan generarse una gran variedad de elementos. En la Tabla 3.1 se presentan ejemplos típicos de elementos triangulares y cuadriláteros que se encuentran en la literatura. Debe aclararse que el número de lados de los elementos no está limitado a cuatro, pues, por ejemplo, los elementos triangulares y cuadriláteros HTTI1 y HTQI1 han sido obtenidos como un caso especial de elementos hexagonales y octogonales como contrario a los elementos HTTI2 y HTQI2.

**Tabla 3.1 Elementos estándar de losa híbridos de Trefftz triangulares y cuadriláteros [15]**

Elemento	Forma	Número de f. de aprox. $\phi_i^*$ )	GDL Nodales	Funciones Marco
HTT3 9 GDL		7	$w, w_x, w_y$	$\tilde{w}$ ... cúbica $\tilde{w}_n$ ... lineal
HTQ3 12 GDL		11		
HTTI1 o HTTI2 18 GDL		15	$w, w_x, w_y$	$\tilde{w}$ ... 2 x cúbica $\tilde{w}_n$ ... 2 x lineal o $\tilde{w}$ ... quinta $\tilde{w}_n$ ... cuadrática
HTQI1 o HTQI2 24 GDL		21		
HTT6 18 GDL		15	$w, w_x, w_y,$ $w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$	$\tilde{w}$ ... quinta $\tilde{w}_n$ ... cúbica
HTQ6 24 GDL		21		

\*) polinomios biarmónicos

### 3.6.2.2.3 Elementos de propósito especial

Dichos elementos son obtenidos reemplazando el conjunto regular estándar de funciones de aproximación por un apropiado conjunto especial, el cual, además de satisfacer las ecuaciones gobernantes de la losa  $\nabla^4 w = p/D$ , satisface algunas condiciones de borde prescritas en una porción particular  $S_{se}$  del borde del elemento. Esto permite que varias singularidades o concentraciones de esfuerzos sean correctamente representadas y por consiguiente sean generados elementos que incluyen, por ejemplo, esquinas singulares u orificios circulares (ver Figuras 3.12, 3.13).

## *Capítulo 4*

# **FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO HÍBRIDO DE TREFFTZ PARA EL ANÁLISIS DE LOSAS**

## **4.1 INTRODUCCIÓN**

Tomando como base la formulación teórica mostrada en la última parte del capítulo anterior, referida a los modelos híbridos de Trefftz y a su aplicación a la flexión de losas, se pretende ahora, con la finalidad de estudiar mejor dicha formulación, desarrollar en mayor detalle un sencillo elemento finito híbrido de Trefftz para el análisis elástico lineal de losas delgadas. Tal desarrollo está orientado hacia la obtención de un programa de cómputo. Se presentan también algunas consideraciones de orden práctico tomadas en cuenta en el desarrollo del elemento finito en cuestión.

Por otra parte, al final del capítulo, con el propósito de verificar la consistencia del elemento de losa desarrollado, se estudia el comportamiento del mismo cuando es sometido a movimientos de cuerpo rígido. Asimismo, se obtienen los modos de vibración correspondientes a un elemento aislado.

Finalmente, al elemento desarrollado se le ha llamado HTR3, para denotar que se trata de un elemento finito híbrido de Trefftz de forma rectangular con tres grados de libertad por nudo.

## 4.2 ALGUNAS CONSIDERACIONES DE ORDEN PRÁCTICO

A continuación se indican ciertas consideraciones empleadas en el elemento desarrollado y que han de tenerse en cuenta previamente para un mejor entendimiento de la formulación presentada.

### 4.2.1 SISTEMA COORDENADO

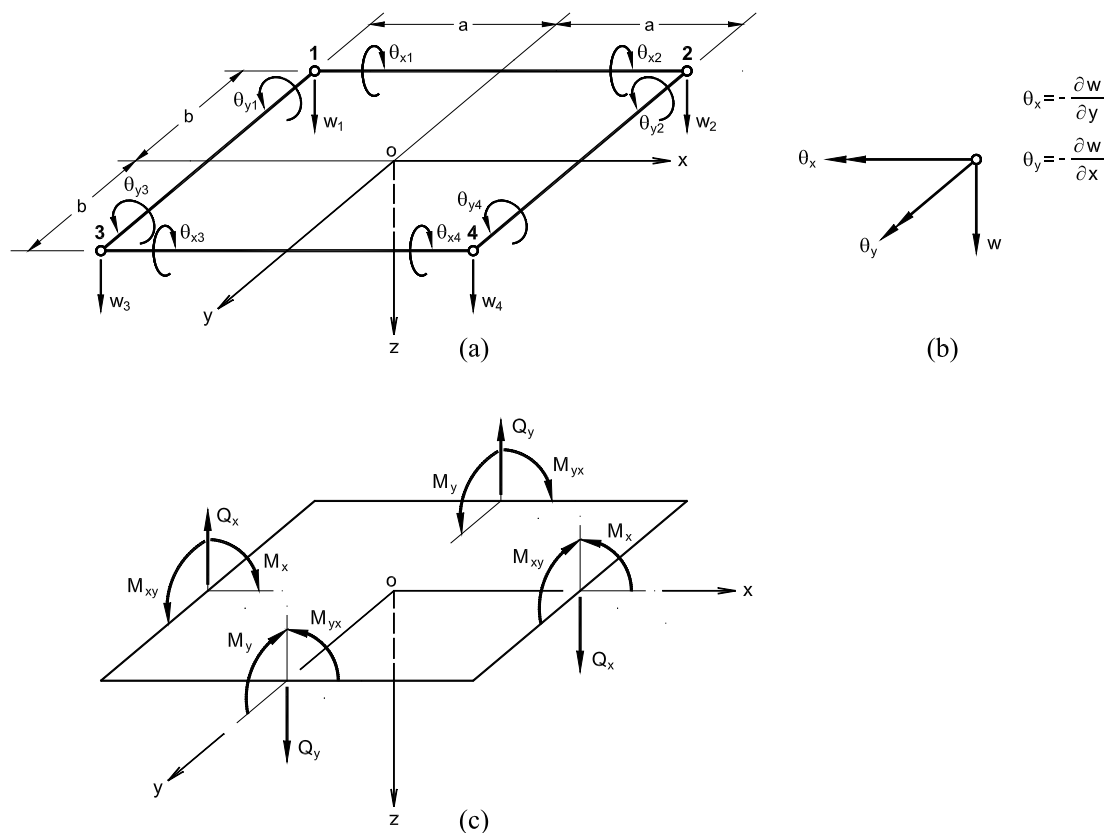
Como se mencionó en la Sección 1.2, en muchas partes de este trabajo de tesis y particularmente en este capítulo, se trabaja con un sistema de ejes ortogonales identificados por los símbolos  $x$ ,  $y$  y  $z$ , como fue indicado a través de la Figura 1.1, es decir, con el plano  $x$ - $y$  coincidiendo con el plano medio de una losa en su estado inicial libre de carga, y con el eje  $z$  orientado hacia abajo.

### 4.2.2 CONVENCIÓN DE SIGNOS PARA DESPLAZAMIENTOS, GRADOS DE LIBERTAD

El elemento de losa que se detalla es un rectángulo de cuatro nudos con la numeración y convención de signos para los desplazamientos como está mostrado en la Figura 4.1a. Por consiguiente y como se puede apreciar con mayor claridad en la Figura 4.1b, los grados de libertad típicos en cada nudo son: el desplazamiento transversal,  $w$ , y las dos componentes de giro o desplazamientos angulares,  $\theta_y (= -\partial w/\partial x)$  y  $\theta_x (= -\partial w/\partial y)$ .

### 4.2.3 CONVENCIÓN DE SIGNOS PARA MOMENTOS Y CORTES

En la Figura 4.1c se indican las convenciones de signos para momentos y cortes considerados en este elemento, pudiéndose notar que son similares a aquellas de la Figura 1.4. Se puede observar que se llama  $M_x$  al momento que origina esfuerzos normales en dirección  $x$  y  $M_y$  al momento que origina esfuerzos normales en dirección  $y$ .



**Figura 4.1** Elemento finito híbrido de Trefftz para losas desarrollado en esta tesis. a) Geometría y convención de signos para los desplazamientos. b) Grados de libertad en cada nudo. c) Acciones sobre los lados del elemento.

#### 4.2.4 DEFINICIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS Y TRACCIONES DE BORDE GENERALIZADOS

Se ha considerado el método alternativo para la definición de las tracciones de borde generalizadas de la Figura 3.14, obteniéndose como consecuencia las definiciones para los vectores de desplazamientos de borde y tracciones de borde generalizados conjugados  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{T}$  ya mostrados anteriormente en la Ec. (3.198). Introduciendo la nomenclatura para los desplazamientos de borde acorde con aquella dada para los grados de libertad (ver Figura 4.1b), se tendría:

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ \theta_y \\ \theta_x \end{array} \right\}, \quad \mathbf{T} = \left\{ \begin{array}{c} Q_n \\ M_{nx} \\ M_{ny} \end{array} \right\} \quad \text{Ec. (4.1a, b)}$$

donde el vector de tracciones de borde generalizadas  $\mathbf{T}$  de la Ec. (4.1b) particularizada para cada borde del elemento rectangular desarrollado, se obtiene evaluando las expresiones (3.199) para el valor correspondiente del ángulo  $\alpha$ , es decir, más explícitamente:

a) Borde 1-2: ( $\alpha = 3\pi/2$ )

$$\mathbf{T}_{1-2} = \left[ -Q_y \quad -M_{yx} \quad -M_y \right]^T \quad \text{Ec. (4.2a)}$$

b) Borde 3-4: ( $\alpha = \pi/2$ )

$$\mathbf{T}_{3-4} = \left[ Q_y \quad M_{yx} \quad M_y \right]^T \quad \text{Ec. (4.2b)}$$

c) Borde 1-3: ( $\alpha = \pi$ )

$$\mathbf{T}_{1-3} = \left[ -Q_x \quad -M_x \quad -M_{xy} \right]^T \quad \text{Ec. (4.2c)}$$

d) Borde 2-4: ( $\alpha = 0$ )

$$\mathbf{T}_{2-4} = \left[ Q_x \quad M_x \quad M_{xy} \right]^T \quad \text{Ec. (4.2d)}$$

donde  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  y  $M_{yx}$  se obtienen a su vez a partir de las expresiones (3.200).

### 4.3 APROXIMACIONES PARA LOS CAMPOS DE DESPLAZAMIENTOS Y ALGUNAS OPERACIONES ASOCIADAS

Como se vio en la Sección 3.6.2, la formulación híbrida de Trefftz está basada en usar dos campos independientes de desplazamientos:  $\mathbf{u}$  (que en el caso de flexión de losas se reduce únicamente a la componente  $w$ ) y  $\mathbf{\bar{v}}$  (llamada función marco), para las que se requiere plantear las aproximaciones correspondientes para cada elemento como se detalla a continuación.

#### 4.3.1 APROXIMACIÓN PARA $w$

La aproximación para el desplazamiento transversal:

$$w = \overset{\circ}{w} + \sum_{i=1}^m \phi_i a_i \quad \text{Ec. (3.196)}$$

implica la elección de apropiadas funciones de aproximación  $\overset{\circ}{w}$  y  $\phi_i$  que satisfagan la ecuación diferencial gobernante, en este caso la ecuación de Lagrange,  $\nabla^4 w = p/D$  ( $p$  = intensidad de la carga distribuida y  $D = Et^3/12(1-\nu^2)$  = rigidez flexional de la losa). La selección de tales funciones para el elemento finito desarrollado así como algunos resultados de las manipulaciones algebraicas serán mostradas seguidamente.

##### 4.3.1.1 FUNCIONES DE APROXIMACIÓN $\phi_i$

En el desarrollo del elemento HTR3 se consideraron como funciones de aproximación  $\phi_i$  a los polinomios biarmónicos generados en términos de potencias de la variable compleja  $z$  a través de la siguiente secuencia de generación [15]:

$$\phi_1 = r^2 \operatorname{Re} z^k, \quad \phi_2 = r^2 \operatorname{Im} z^k, \quad \phi_3 = \operatorname{Re} z^{k+2}, \quad \phi_4 = \operatorname{Im} z^{k+2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{Ec. (4.3)}$$

con: 
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad z = x + iy. \quad \text{Ec. (4.4a, b)}$$

donde  $x, y$  representan las coordenadas cartesianas locales del elemento.

Las ecuaciones 4.3 pueden ser expresadas finalmente en la siguiente forma más manejable:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= r^{k+2} \cos(k\theta) \\ \phi_2 &= r^{k+2} \text{sen}(k\theta) \\ \phi_3 &= r^{k+2} \cos(k+2)\theta \\ \phi_4 &= r^{k+2} \text{sen}(k+2)\theta \end{aligned} \right\} (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{Ec. (4.5)}$$

con: 
$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad y \quad \theta = \arctan(y/x), \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{Ec. (4.6a, b)}$$

De otro lado y aprovechando las expresiones para las funciones  $\phi_i$ , se muestran a continuación los resultados correspondientes a sus derivadas primeras, las cuales serán empleadas más adelante al referirse a la matriz  $\Phi_e$ .

1) Derivadas primeras de las funciones  $\phi_i$  con respecto a  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \phi_{1,x} = (k+2)r^k x \cos(k\theta) + k r^k y \text{sen}(k\theta) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= \phi_{2,x} = (k+2)r^k x \text{sen}(k\theta) - k r^k y \cos(k\theta) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x} &= \phi_{3,x} = (k+2)r^k x \cos(k+2)\theta + (k+2)r^k y \text{sen}(k+2)\theta \\ \frac{\partial \phi_4}{\partial x} &= \phi_{4,x} = (k+2)r^k x \text{sen}(k+2)\theta - (k+2)r^k y \cos(k+2)\theta \end{aligned} \right\} (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{Ec. (4.7)}$$



2) Derivadas primeras de las funciones  $\phi_i$  con respecto a  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \phi_{1,y} &= (k+2)r^k y \cos(k\theta) - k r^k x \sin(k\theta) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \phi_{2,y} &= (k+2)r^k y \sin(k\theta) + k r^k x \cos(k\theta) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = \phi_{3,y} &= (k+2)r^k y \cos(k+2)\theta - (k+2)r^k x \sin(k+2)\theta \\ \frac{\partial \phi_4}{\partial y} = \phi_{4,y} &= (k+2)r^k y \sin(k+2)\theta + (k+2)r^k x \cos(k+2)\theta \end{aligned} \right\} (k=0,1,2,\dots) \text{ Ec. (4.8)}$$

Del mismo modo y haciendo un poco de álgebra adicional, se obtuvieron las correspondientes expresiones para las segundas y terceras derivadas de las funciones  $\phi_i$ , las cuales intervienen en la determinación de las matrices  $\theta_e$ .

#### 4.3.1.2 FUNCIONES DE APROXIMACIÓN $\overset{\circ}{w}$

Como fue mencionado en la Sección 3.6.2, pueden encontrarse expresiones adecuadas para la función de desplazamiento dependiente de la carga  $\overset{\circ}{w}$  (término particular de la aproximación para  $w$ ) para varios casos estándares, incluyendo cargas concentradas. A continuación se señalan las utilizadas en el elemento HTR3.

##### 4.3.1.2.1 Caso de una carga uniformemente distribuida $p$

Para el caso indicado arriba se ha empleado la siguiente expresión para definir el término particular  $\overset{\circ}{w}$ :

$$\overset{\circ}{w} = \frac{pr^4}{64D} \quad \text{Ec. (4.9)}$$

siendo como antes:  $r^2 = x^2 + y^2$  Ec. (4.4a)

donde  $x, y$  representan las coordenadas cartesianas locales del elemento.

Debe anotarse que se llega a comprobar fácilmente la satisfacción de la condición  $\nabla^4 \overset{\circ}{w} = p/D$  para la expresión anterior de  $\overset{\circ}{w}$  correspondiente a la Ec. (4.9). Además, tal ecuación, como se puede ver en la referencia [27], representa la solución máxima al caso de tener una losa circular de borde empotrado y de radio  $r$  que soporta una carga de intensidad  $p$  uniformemente repartida sobre toda su superficie.

Por último, la determinación de las derivadas de la función  $\overset{\circ}{w}$  definida arriba, las cuales son necesarias para formar los correspondientes vectores  $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e$  y  $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$  para este caso de la carga uniforme  $p$ , resultan en expresiones simples. Sin embargo, en otras situaciones, como el caso que se presenta a continuación de la carga concentrada  $P$ , se obtienen expresiones un poco más elaboradas.

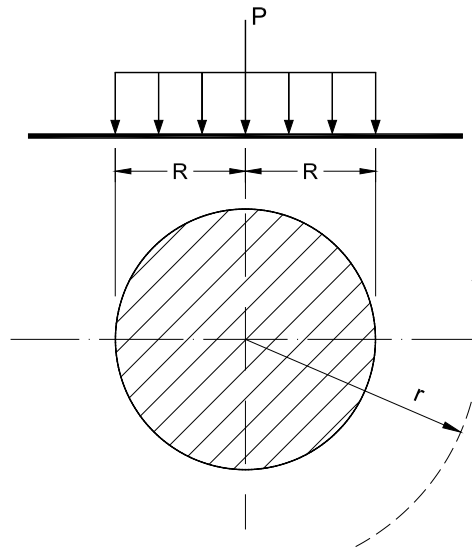
#### 4.3.1.2.2 Caso de una carga concentrada $P$

En el caso de tener una carga concentrada  $P$  (aplicada en  $x_p, y_p$ ), se encuentra en la literatura la siguiente expresión para la función  $\overset{\circ}{w}$ :

$$\overset{\circ}{w} = \frac{P}{16\pi D} r^2 \ln r^2 \quad \text{Ec. (4.10)}$$

donde: 
$$r^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \quad \text{Ec. (4.11)}$$

La expresión (4.10) que constituye la solución de elasticidad de una losa infinita presenta el inconveniente de que dicha solución es inaplicable en la vecindad de la carga  $P$ , pues, para  $x \rightarrow x_p$  e  $y \rightarrow y_p$  las deformaciones y por consiguiente los momentos en la losa tienden al infinito y consecuentemente violan la suposición de pequeñas deformaciones de la elasticidad lineal. Entonces, un método más realista, cuyas expresiones finales son las utilizadas en el elemento HTR3, consiste en suponer que  $P$  está distribuida uniformemente sobre un área circular *pequeña* de radio  $R$ , como se muestra en la Figura 4.2



**Figura 4.2 Distribución práctica de cargas concentradas.**

Luego de resolver nuevamente el problema de la losa infinita, se obtiene [15]:

a) Para  $r \leq R$ :

$$\overset{\circ}{w} = \left[ \frac{\beta^2}{64}(4\ln\beta - 3) + \frac{1}{16} + \frac{\rho^2}{32}(4\ln\beta - \beta^2) + \frac{\rho^4}{64\beta^2} \right] \frac{Pc^2}{\pi D} \quad \text{Ec. (4.12)}$$

b) Para  $r \geq R$ :

$$\overset{\circ}{w} = \left[ \frac{1}{32}(2 + \beta^2)(1 - \rho^2) + \frac{1}{16}(\beta^2 + 2\rho^2) \ln\rho \right] \frac{Pc^2}{\pi D} \quad \text{Ec. (4.13)}$$

donde:

$$c > 0 \quad \dots \quad \text{constante opcional} \quad \text{Ec. (4.14a)}$$

$$\rho = \frac{r}{c} \quad , \quad \beta = \frac{R}{c} \quad \text{Ec. (4.14b, c)}$$

Debe observarse que en la Ec. (4.11), así como en las expresiones (4.12) y (4.13),  $x, y$  corresponden a las coordenadas cartesianas globales. Por consiguiente, para que tales expresiones puedan ser utilizadas al nivel del elemento, se deberá hacer la correspondiente traslación.

### 4.3.2 APROXIMACIÓN PARA $\tilde{\mathbf{v}}$

En el caso de la aproximación para la función marco:

$$\tilde{\mathbf{v}}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{d}_e \quad \text{Ec. (3.176)}$$

las funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  que se emplearon para cada borde se escribieron sobre la base de las interpolaciones propias de la teoría de vigas sin deformación cortante [13]. Por ejemplo, para el borde 1-2 de la Figura 4.1a, se termina planteando para la componente  $w$  una aproximación cúbica de la forma:

$$w = \frac{1}{2}(1 - 3s + 4s^3)w_1 + \frac{a}{4}(-1 + 2s + 4s^2 - 8s^3)\theta_{y_1} + \frac{1}{2}(1 + 3s - 4s^3)w_2 + \frac{a}{4}(1 + 2s - 4s^2 - 8s^3)\theta_{y_2} \quad \text{Ec. (4.15a)}$$

mientras que para la componente  $\theta_y$  (giros tangenciales al borde):

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{3}{4a}(1 - 4s^2)(w_1 - w_2) + \left(-\frac{1}{4} - s + 3s^2\right)\theta_{y_1} + \left(-\frac{1}{4} + s + 3s^2\right)\theta_{y_2} \quad \text{Ec. (4.15b)}$$

donde  $s = x/2a$ ,  $x$  la distancia al punto medio del borde 1-2,  $2a$  la dimensión del elemento a lo largo de dicho borde.

De otro lado, para los giros perpendicularmente al borde sencillamente se consideró una interpolación lineal:

$$\theta_x = \left(\frac{1}{2}-s\right)\theta_{x_1} + \left(\frac{1}{2}+s\right)\theta_{x_2} \quad \text{Ec. (4.15c)}$$

Expresiones análogas fueron obtenidas para los restantes tres bordes del elemento. Por tanto, para cada borde se expresaron las tres componentes de desplazamiento  $w$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_x$  como una interpolación de los desplazamientos nodales  $\mathbf{d}_e$  en la forma mostrada por la Ec. (3.176). Por ejemplo, en el caso del borde 1-2 se obtuvo:

$$\mathbf{N}_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-3s+4s^3) & \frac{a}{4}(-1+2s+4s^2-8s^3) & 0 & \frac{1}{2}(1+3s-4s^3) \\ \frac{3}{4a}(1-4s^2) & \left(-\frac{1}{4}-s+3s^2\right) & 0 & -\frac{3}{4a}(1-4s^2) \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}-s\right) & 0 \\ \frac{a}{4}(1+2s-4s^2-8s^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{1}{4}+s+3s^2\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}+s\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (4.16)}$$

donde el vector de desplazamientos nodales fue definido como:

$$\mathbf{d}_e = [w_1 \quad \theta_{y_1} \quad \theta_{x_1} \quad w_2 \quad \theta_{y_2} \quad \theta_{x_2} \quad w_3 \quad \theta_{y_3} \quad \theta_{x_3} \quad w_4 \quad \theta_{y_4} \quad \theta_{x_4}]^T \quad \text{Ec. (4.17)}$$

Particular nota debería ser tomada de las interpolaciones expresadas a través de las Ecs. (4.15a) y (4.15b), las cuales permiten obtener un elemento de losa que es consistente con la teoría de vigas y que por tanto se puede usar con elementos de viga de la forma clásica, con los mismos desplazamientos transversales y los mismos giros a lo largo del borde.

De igual forma, debe tenerse en cuenta la Ec. (4.15c), porque es ésta la que asegura la continuidad de la derivada normal. Por ejemplo, para el caso del borde 1-2 de la Figura 4.1a,

los dos elementos adyacentes comparten el  $\theta_x$  en los dos nudos y siendo la variación de  $\theta_x$  lineal, es igual para los dos elementos. Dificultad sería en el elemento de Melosh, pues en dicho elemento la derivada normal a lo largo de cualquier borde tiene una variación cúbica, lo que hace que incumpla las condiciones de continuidad con el siguiente elemento.

#### 4.4 EVALUACIÓN DE LOS VECTORES DE BORDE GENERALIZADOS $\mathbf{v}$ Y $\mathbf{T}$ EN LA APROXIMACIÓN PARA EL CAMPO DE DESPLAZAMIENTO $w$ CONSIDERADO

En el proceso general de la formulación variacional del elemento finito híbrido de Trefftz (Sección 3.6.2.1.2) y antes de calcular propiamente la matriz de rigidez, se requiere determinar para el elemento HTR3 desarrollado algunas expresiones matriciales y vectoriales básicas como  $\Phi_e$ ,  $\theta_e$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e$  y  $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$  producto de hacer ciertas sustituciones en los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{T}$  definidos anteriormente, como se verá a continuación.

Además, se definirán algunas submatrices típicas de las expresiones matriciales ya mencionadas, las cuales representan expresiones prácticas que se utilizaron principalmente en el cálculo por ordenador.

##### 4.4.1 MATRIZ $\Phi_e$ Y SU CORRESPONDIENTE SUBMATRIZ TÍPICA $\Phi_{eT}$

La sustitución de la parte homogénea de la aproximación para  $w$ :

$$w_h = \sum_{i=1}^m \phi_i a_i = \Phi_e \mathbf{a}_e = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_m] \mathbf{a}_e \quad \text{Ec. (4.18)}$$

en el vector de desplazamientos de borde generalizado  $\mathbf{v}$  considerado, Ec. (4.1a), permite obtener la segunda parte del lado derecho de la Ec. (3.184a) y de ese modo la matriz  $\Phi_e$  buscada:

$$\mathbf{v}_e(w_h) = \mathbf{v}_{eh} = \Phi_e \mathbf{a}_e \quad \text{Ec. (4.19)}$$

Más explícitamente y para las funciones  $\phi_i$  utilizadas, Ec. (4.5), se obtiene:

$$\mathbf{v}_{eh} = \begin{Bmatrix} w_h \\ -\frac{\partial w_h}{\partial x} \\ -\frac{\partial w_h}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4}^{k=0} & \overbrace{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4}^{k=1} & \cdots \\ -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad -\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \quad -\frac{\partial \phi_4}{\partial x} & -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad -\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \quad -\frac{\partial \phi_4}{\partial x} & \cdots \\ -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad -\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad -\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \quad -\frac{\partial \phi_4}{\partial y} & -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad -\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad -\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \quad -\frac{\partial \phi_4}{\partial y} & \cdots \end{bmatrix} \mathbf{a}_e \quad \text{Ec. (4.20)}$$

Por tanto, se puede ahora definir la siguiente submatriz típica de  $\Phi_e$  (para un específico valor de  $k$ ) como:

$$\Phi_{eT} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} & -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} & -\frac{\partial \phi_3}{\partial x} & -\frac{\partial \phi_4}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} & -\frac{\partial \phi_2}{\partial y} & -\frac{\partial \phi_3}{\partial y} & -\frac{\partial \phi_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (4.21)}$$

(Para un  $k$  dado)

donde las expresiones para  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  y  $\phi_4$  para un cierto valor de  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) están dadas por la Ec. (4.5), mientras que las correspondientes a sus primeras derivadas por las Ecs. (4.7) y (4.8) obtenidas y mostradas anteriormente.

#### 4.4.2 MATRIZ $\theta_e$ Y SU CORRESPONDIENTE SUBMATRIZ TÍPICA $\theta_{eT}$ PARA CADA BORDE

Si se sustituye ahora la Ec. (4.18) en el vector de tracciones de borde generalizado conjugado  $\mathbf{T}$  particularizado para cada borde del elemento rectangular desarrollado, Ecs. (4.2), se obtienen para cada borde expresiones análogas a la del segundo término de la Ec. (3.184b):

$$\mathbf{T}_e(w_h) = \mathbf{T}_{eh} = \theta_e \mathbf{a}_e \quad \text{Ec. (4.22)}$$

y por consiguiente las correspondientes matrices  $\theta_e$  también para cada borde las cuales, teniendo en cuenta las funciones  $\phi_i$  consideradas, Ec. (4.5), son expresiones un poco más generales de aquellas que se muestran a continuación, las que a su vez representan a sus correspondientes submatrices típicas definidas para cada borde y para un cierto valor de  $k$ :

a) Borde 1 – 2: ( $y = -b$ )

$$\theta_{eT_{1-2}} = \begin{array}{c} \left( \text{Para un } k \text{ dado} \right) \\ \left[ \begin{array}{cccc} D(\phi_{1,xx} + \phi_{1,yyy}) & D(\phi_{2,xx} + \phi_{2,yyy}) & D(\phi_{3,xx} + \phi_{3,yyy}) & D(\phi_{4,xx} + \phi_{4,yyy}) \\ D(1-\nu)\phi_{1,xy} & D(1-\nu)\phi_{2,xy} & D(1-\nu)\phi_{3,xy} & D(1-\nu)\phi_{4,xy} \\ D(\phi_{1,yy} + \nu\phi_{1,xx}) & D(\phi_{2,yy} + \nu\phi_{2,xx}) & D(\phi_{3,yy} + \nu\phi_{3,xx}) & D(\phi_{4,yy} + \nu\phi_{4,xx}) \end{array} \right] \end{array} \quad \text{Ec. (4.23a)}$$

b) Borde 3 – 4: ( $y = b$ )

$$\theta_{eT_{3-4}} = - \theta_{eT_{1-2}} \quad \text{Ec. (4.23b)}$$

$\left( \text{Para un } k \text{ dado} \right) \quad \left( \text{Para un } k \text{ dado} \right)$

c) Borde 1 – 3: ( $x = -a$ )

$$\theta_{eT_{1-3}} = \begin{array}{c} \left( \text{Para un } k \text{ dado} \right) \\ \left[ \begin{array}{cccc} D(\phi_{1,xxx} + \phi_{1,yyx}) & D(\phi_{2,xxx} + \phi_{2,yyx}) & D(\phi_{3,xxx} + \phi_{3,yyx}) & D(\phi_{4,xxx} + \phi_{4,yyx}) \\ D(\phi_{1,xx} + \nu\phi_{1,yy}) & D(\phi_{2,xx} + \nu\phi_{2,yy}) & D(\phi_{3,xx} + \nu\phi_{3,yy}) & D(\phi_{4,xx} + \nu\phi_{4,yy}) \\ D(1-\nu)\phi_{1,xy} & D(1-\nu)\phi_{2,xy} & D(1-\nu)\phi_{3,xy} & D(1-\nu)\phi_{4,xy} \end{array} \right] \end{array} \quad \text{Ec. (4.23c)}$$

d) Borde 2 – 4: ( $x = a$ )

$$\theta_{eT_{2-4}} = - \theta_{eT_{1-3}} \quad \text{Ec. (4.23d)}$$

$\left( \text{Para un } k \text{ dado} \right) \quad \left( \text{Para un } k \text{ dado} \right)$



Como se puede observar, la evaluación de las submatrices de arriba implica previamente el cálculo de las segundas y terceras derivadas de las funciones  $\phi_i$  empleadas. Tales derivadas fueron obtenidas con un cierto cuidado, pues son expresiones relativamente largas.

#### 4.4.3 CONSTRUCCIÓN DE LOS VECTORES $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e$ Y $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$

La sustitución del término particular de la aproximación para  $w$ :

$$w_p = \overset{\circ}{w} \quad \text{Ec. (4.24)}$$

en los vectores de borde generalizados conjugados  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{T}$  considerados, Ecs. (4.1a) y (4.2), permite obtener los primeros términos del lado derecho de las Ecs. (3.184a) y (3.184b):

$$\mathbf{v}_e(w_p) = \mathbf{v}_{ep} = \overset{\circ}{\mathbf{v}}_e \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_e(w_p) = \mathbf{T}_{ep} = \overset{\circ}{\mathbf{T}}_e \quad \text{Ec. (4.25a, b)}$$

y de ese modo los vectores buscados para una específica función de desplazamiento dependiente de la carga  $\overset{\circ}{w}$ .

En el elemento HTR3 se consideraron los dos casos estándares de carga mostrados en la Sección 4.3.1.2, para los cuales se utilizaron expresiones adecuadas para la función  $\overset{\circ}{w}$ , determinándose en cada uno de ellos sus respectivos vectores  $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e$  y  $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$ . Por ejemplo, para el caso de la carga uniformemente distribuida  $p$  y luego de utilizar la expresión dada por la Ec. (4.9) para definir la función  $\overset{\circ}{w}$ , se obtiene:

$$\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e = \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{w} \\ -\frac{\partial \overset{\circ}{w}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \overset{\circ}{w}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{pr^4}{64D} \\ -\frac{pxr^2}{16D} \\ -\frac{pyr^2}{16D} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (4.26)}$$

y asimismo, las siguientes expresiones de  $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$  para los correspondientes bordes del elemento:

a) Borde 1-2: ( $y = -b$ )

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{e_{1-2}} = \begin{Bmatrix} D\left(\overset{\circ}{w}_{,xy} + \overset{\circ}{w}_{,yy}\right) \\ D(1-\nu)\overset{\circ}{w}_{,xy} \\ D\left(\overset{\circ}{w}_{,yy} + \nu\overset{\circ}{w}_{,xx}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{py}{2} \\ \frac{p(1-\nu)xy}{8} \\ \frac{p\left[(r^2 + 2y^2) + \nu(r^2 + 2x^2)\right]}{16} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (4.27a)}$$

b) Borde 3-4: ( $y = b$ )

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{e_{3-4}} = -\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{e_{1-2}} \quad \text{Ec. (4.27b)}$$

c) Borde 1-3: ( $x = -a$ )

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{e_{1-3}} = \begin{Bmatrix} D\left(\overset{\circ}{w}_{,xx} + \overset{\circ}{w}_{,yy}\right) \\ D\left(\overset{\circ}{w}_{,xx} + \nu\overset{\circ}{w}_{,yy}\right) \\ D(1-\nu)\overset{\circ}{w}_{,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{px}{2} \\ \frac{p\left[(r^2 + 2x^2) + \nu(r^2 + 2y^2)\right]}{16} \\ \frac{p(1-\nu)xy}{8} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (4.27c)}$$

d) Borde 2-4: ( $x = a$ )

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{e_{2-4}} = -\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{e_{1-3}} \quad \text{Ec. (4.27d)}$$

Finalmente, expresiones un tanto más extensas y con un trabajo de álgebra adicional fueron obtenidas para el caso de la carga concentrada  $P$ , pues en dicho caso, al emplearse las Ecs. (4.12) y (4.13) para definir la función  $\overset{\circ}{w}$ , se obtuvieron en lugar de uno dos grupos de vectores  $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_e$  y  $\overset{\circ}{\mathbf{T}}_e$ .

## 4.5 CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ $\mathbf{K}_e$ Y DEL TÉRMINO $\mathring{\mathbf{f}}_e$

La determinación de la matriz de rigidez para un elemento híbrido de Trefftz en general:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \quad \text{Ec. (3.193a)}$$

es similar a aquella establecida para un elemento híbrido de esfuerzos, Ec. (3.92). Sin embargo, la definición de las matrices  $\mathbf{H}_e$  y  $\mathbf{G}_e$  es distinta en ambos casos. Hablando de un elemento híbrido de Trefftz, tales matrices definidas anteriormente como:

$$\mathbf{H}_e = \int_{S_e} \boldsymbol{\theta}_e^T \boldsymbol{\Phi}_e dS, \quad \mathbf{G}_e = \int_{S_e} \boldsymbol{\theta}_e^T \mathbf{N}_e dS \quad \text{Ec. (3.185a, b)}$$

conjuntamente con los vectores  $\mathbf{h}_e$  y  $\mathbf{g}_e$ :

$$\mathbf{h}_e = \int_{S_e} \boldsymbol{\theta}_e^T \mathring{\mathbf{v}}_e dS, \quad \mathbf{g}_e = \int_{S_e} \mathbf{N}_e^T \mathring{\mathbf{T}}_e dS - \int_{S_{te}} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad \text{Ec. (3.185c, d)}$$

necesarios estos últimos para calcular el vector de fuerzas  $\mathring{\mathbf{f}}_e$  :

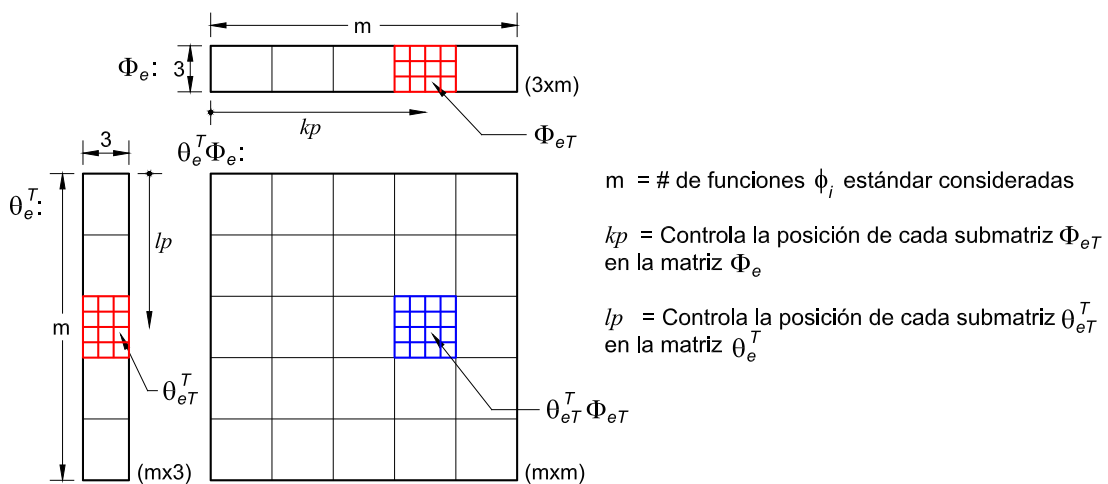
$$\mathring{\mathbf{f}}_e = \mathbf{g}_e - \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{h}_e \quad \text{Ec. (3.193b)}$$

fueron obtenidos numéricamente utilizando el método de la cuadratura de Gauss-Legendre [7] para el cálculo de la integración numérica correspondiente. Por ejemplo, la matriz  $\mathbf{H}_e$ , definida a través de la Ec. (3.185a), puede ser escrita para empezar como una suma de integrales análogas sobre cada uno de los segmentos que constituyen el borde  $S_e$  del elemento. En particular para el elemento HTR3, se tendría:

$$\mathbf{H}_e = \sum_{4 \text{ bordes}} \left( \int_{\text{borde}} \boldsymbol{\theta}_e^T \boldsymbol{\Phi}_e dS \right) = \int_{1-2} \boldsymbol{\theta}_e^T \boldsymbol{\Phi}_e dS + \int_{3-4} \boldsymbol{\theta}_e^T \boldsymbol{\Phi}_e dS + \int_{1-3} \boldsymbol{\theta}_e^T \boldsymbol{\Phi}_e dS + \int_{2-4} \boldsymbol{\theta}_e^T \boldsymbol{\Phi}_e dS \quad \text{Ec. (4.28)}$$

Entonces y a diferencia de la matriz  $\Phi_e$ , Sección 4.4.1, para cada uno de los cuatro segmentos de borde del elemento rectangular desarrollado se obtuvieron las correspondientes matrices  $\theta_e$ , ver Sección 4.4.2. Luego, para encontrar numéricamente el valor de cada integral de la Ec. (4.28), se siguió el procedimiento de la cuadratura de Gauss-Legendre, que requiere un número mínimo de las evaluaciones de la función a integrar.

Al evaluar el producto matricial de  $\theta_e^T \Phi_e$  (en un punto de integración numérica de un segmento de borde) se emplearon en realidad, por una cuestión de programación, las submatrices típicas  $\theta_{eT}$  y  $\Phi_{eT}$  (definidas también en las secciones 4.4.1 y 4.4.2) en lugar de las mismas matrices completas  $\theta_e$  y  $\Phi_e$ . La Figura 4.3 muestra en forma esquemática dicho producto matricial, resaltando en color rojo a las mencionadas submatrices típicas y en color azul al producto de ellas.



**Figura 4.3** Representación gráfica del producto matricial  $\theta_e^T \Phi_e$  utilizada en el cálculo de la matriz  $H_e$ .

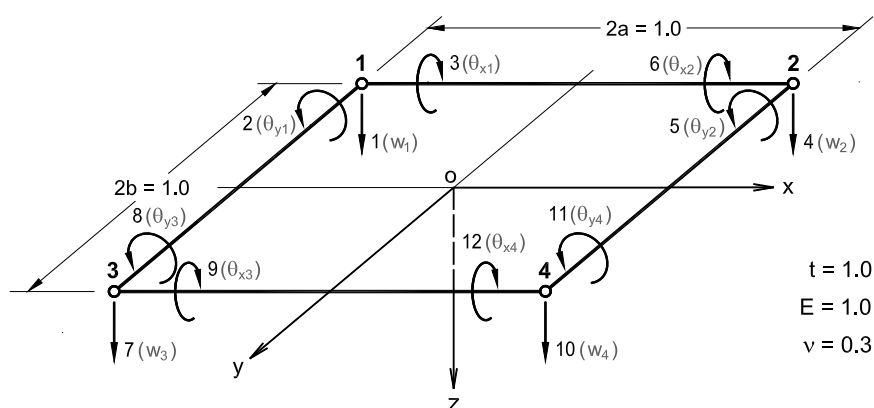
Un procedimiento de cálculo similar se empleó para la determinación de la matriz  $G_e$  de orden  $m \times 12$ , así como para los vectores  $h_e$  de orden  $m \times 1$  y  $g_e$  de orden  $12 \times 1$ . Nótese que  $m$  es el número de funciones de aproximación  $\phi_i$  consideradas en el elemento.

Así, una vez determinadas numéricamente las matrices  $H_e$ ,  $G_e$ ,  $h_e$  y  $g_e$ , el resto del trabajo consiste en calcular finalmente la matriz de rigidez  $K_e$  buscada, Ec. (3.193a), así como

el vector de fuerzas  $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_e$ , Ec. (3.193b). De ese modo se tienen los elementos necesarios para que a continuación y siguiendo un procedimiento típico de rigidez se obtengan los resultados de desplazamientos y de fuerzas en los nudos para el elemento de losas híbrido de Trefftz desarrollado en este trabajo de tesis.

## 4.6 COMPORTAMIENTO DEL ELEMENTO CUANDO ES SOMETIDO A MOVIMIENTOS DE CUERPO RÍGIDO

En la Sección 2.4 se mencionó que una condición indispensable para que el elemento finito utilizado funcione es que satisfaga la llamada condición de consistencia. Una forma práctica de cumplir tal condición es verificando que la matriz de rigidez de un elemento cualesquiera deba de ser tal que al multiplicarse por un movimiento de cuerpo rígido se obtenga para cada grado de libertad la correspondiente fuerza cero. Para el caso del elemento finito estudiado HTR3 se utilizó para tal fin un sencillo elemento unitario de forma cuadrada con la numeración de nudos y grados de libertad como se muestra en la Figura 4.4



**Figura 4.4** Elemento unitario empleado para verificar la consistencia del elemento HTR3 y para obtener los valores y vectores propios de un elemento aislado.

Para dicho elemento y con la ayuda del programa FLt (ver Apéndice B), se obtuvo la siguiente matriz de rigidez (en la que por brevedad solo se muestran algunas cifras significativas):



secciones siguientes a través de simples análisis, evaluaciones y comparaciones de resultados obtenidos con otros tipos de elementos finitos.

## 4.7 FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS DE VIBRACIÓN DE UN ELEMENTO AISLADO

Con la finalidad de garantizar que los desplazamientos  $w$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_x$  en el interior del elemento HTR3 representen todos los estados de deformación y los movimientos de cuerpo rígido, se obtuvieron los modos de vibración correspondientes al elemento desarrollado. Para ello, se utilizó el método de Jacobi para resolver el problema de valores y vectores propios:

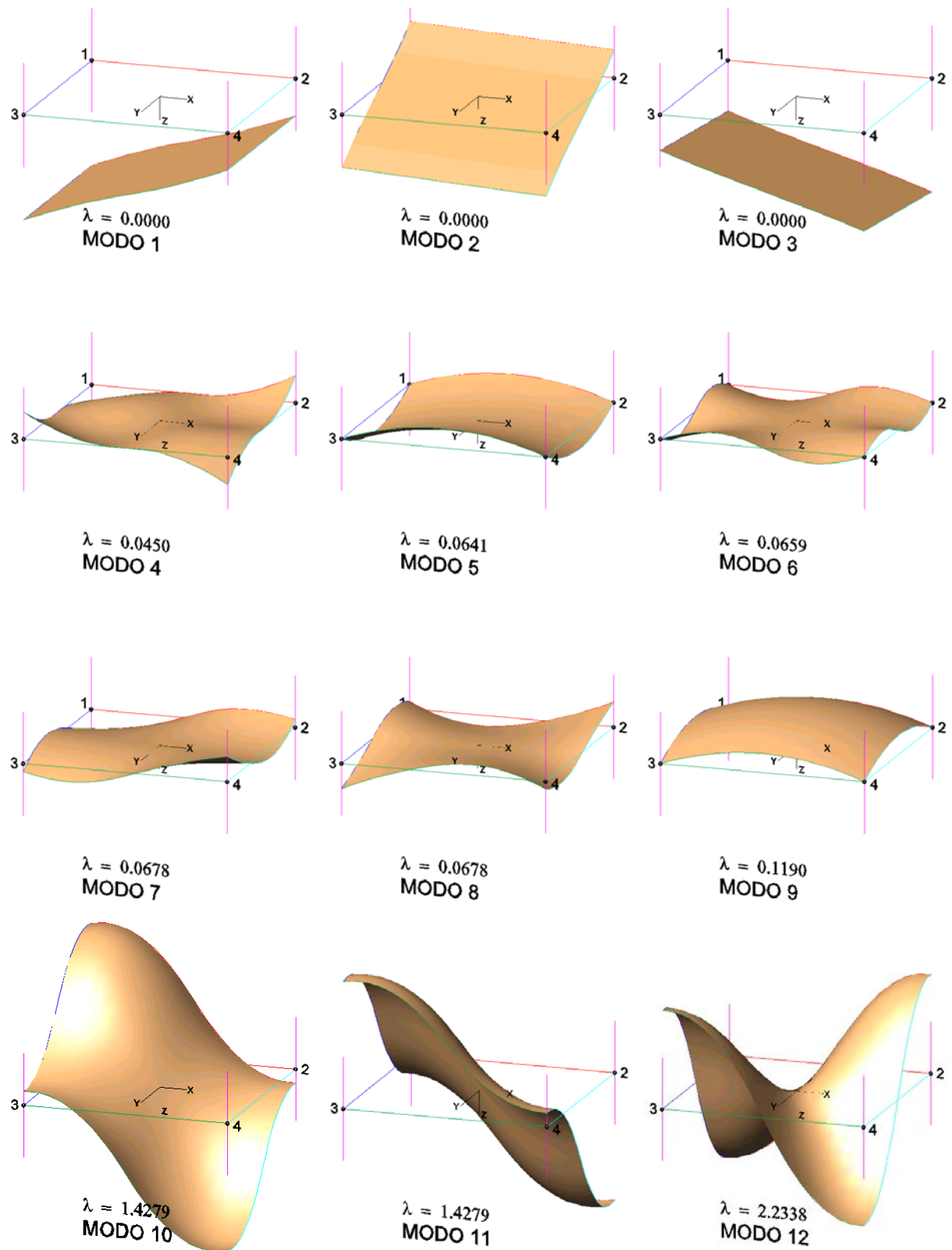
$$\mathbf{K} \phi = \lambda \phi \quad \text{Ec. (4.31)}$$

aplicado al elemento unitario de forma cuadrada de la Figura 4.4 y por consiguiente empleándose la matriz de rigidez de la Ec. (4.29). Debe anotarse que a partir de la Ec. (4.31) se llega a deducir la siguiente expresión [2]:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \quad \text{Ec. (4.32)}$$

donde en este caso  $\Phi$  es una matriz que almacena los vectores propios  $\phi_1, \dots, \phi_n$  ( $n =$  número de GDL del elemento) y  $\Lambda$  es una matriz diagonal que almacena los correspondientes valores propios,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ . Así,  $\Lambda$  representa la matriz de rigidez del elemento correspondiente a los modos de desplazamiento de sus vectores propios y por tanto los coeficientes de rigidez  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  directamente muestran que tan rígido el elemento es en el correspondiente modo de desplazamiento.

Para el caso del elemento cuadrado de la Figura 4.4, los doce vectores propios y sus correspondientes valores propios se muestran en la Figura 4.6. Notándose que “los movimientos de cuerpo rígido están presentes” (como era de esperarse ya que el elemento es consistente, como se vio en la sección anterior) y corresponden a los tres primeros modos, lo cual es coherente con la diferencia entre el número de grados de libertad y el número de modos de deformación individual del elemento que se pueden también apreciar en la misma Figura 4.6.



**Figura 4.6** Valores y vectores propios del elemento de losa rectangular de cuatro nudos HTR3.  
 $2a = 1.0, 2b = 1.0, t = 1.0, E = 1.0, \nu = 0.3$



## *Capítulo 5*

# **EVALUACIÓN DEL ELEMENTO DE FLEXIÓN DE LOSAS HTR3 Y APLICACIONES**

## **5.1 INTRODUCCIÓN**

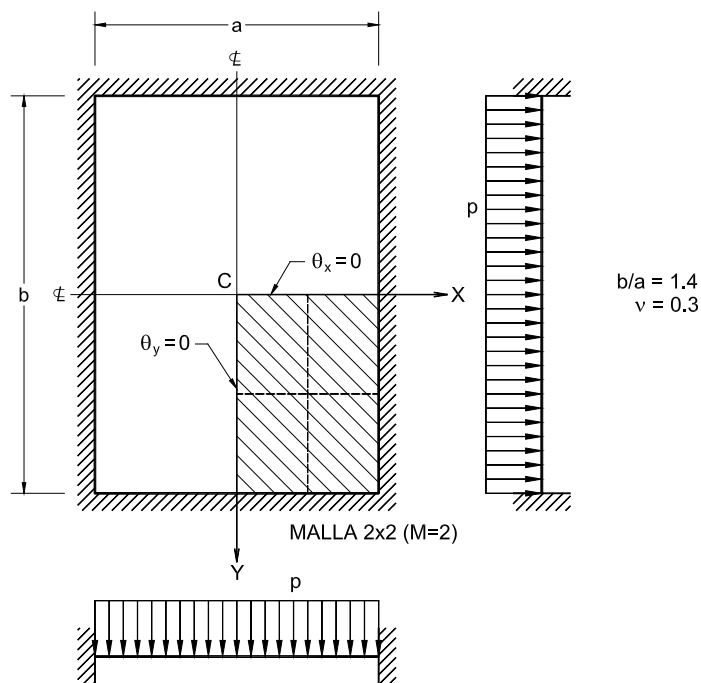
En este capítulo se resumen resultados de varios estudios numéricos utilizando el elemento HTR3 y el programa de cómputo FLt (ver Apéndice B) desarrollado en esta tesis. En los casos en que fue posible, éstos se comparan con resultados de otros elementos extraídos de la literatura, así como con resultados obtenidos empleando programas de cómputo conocidos que utilizan algunas de las más habituales formulaciones de elementos finitos. Se consideraron varios ejemplos sencillos de corte académico así como uno de un nivel más ingenieril, con los que de alguna forma se pretende demostrar la excelente capacidad del elemento HTR3 (y por consiguiente de la formulación híbrida de Trefftz) para resolver eficientemente problemas típicos de flexión de losas delgadas.

Asimismo, debe mencionarse el empleo del sencillo programa de cómputo FLt-PLOT (ver Apéndice B) también desarrollado en este trabajo de tesis, utilizado esencialmente como soporte gráfico de los datos y resultados obtenidos con el programa de análisis FLt.

## 5.2 NÚMERO DE FUNCIONES DE APROXIMACIÓN $\phi_i$ Y NÚMERO DE PUNTOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

En el capítulo anterior, el cual trata del desarrollo del elemento finito HTR3 y de la selección de las funciones de aproximación  $\phi_i$ , no se mencionó nada con respecto a la elección del número apropiado  $m$  de dichas funciones para el elemento. Asimismo, al tratar la parte correspondiente a la integración numérica empleada en cada uno de los cuatro segmentos de borde del elemento desarrollado, tampoco se dio cuenta del número adecuado de puntos de integración.

Con respecto al número apropiado  $m$  de funciones  $\phi_i$ , y a pesar de que existen ciertos criterios para encontrar dicho valor, ver por ejemplo la Ec. (3.195), se recomienda en la literatura [15] que: “el valor óptimo de  $m$  para un tipo particular de elemento debería ser encontrado por *experimentación numérica*”, motivo por el cual se muestran a continuación los resultados de estudios numéricos correspondientes al análisis de un cuarto de losa rectangular empotrada de relación de lados  $b/a=1.4$  y con carga uniformemente distribuida (ver Figura 5.1). Dichos estudios corresponden a distinto número de funciones  $\phi_i$  (en realidad distinto



**Figura 5.1** Cuarto de una losa rectangular (área sombreada) empotrada cargada uniformemente, utilizada para el estudio numérico del número de funciones de aproximación  $\phi_i$  y número de puntos de integración numérica para el elemento HTR3.

número de grupos de funciones  $\phi_i$ , donde cada grupo normalmente está constituido de cuatro funciones), así como a distintos números de puntos de integración numérica.

Todos los resultados presentados se refieren al centro de la losa. Se han tomado como valores teóricos *exactos* para el desplazamiento transversal  $w$  y para los momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$  los obtenidos usando series de Fourier con el programa de cómputo L-CONT-Q desarrollado en la referencia [10]. Dicho programa permite obtener resultados de mayor precisión que aquellos que se encuentran por ejemplo en Timoshenko [27].

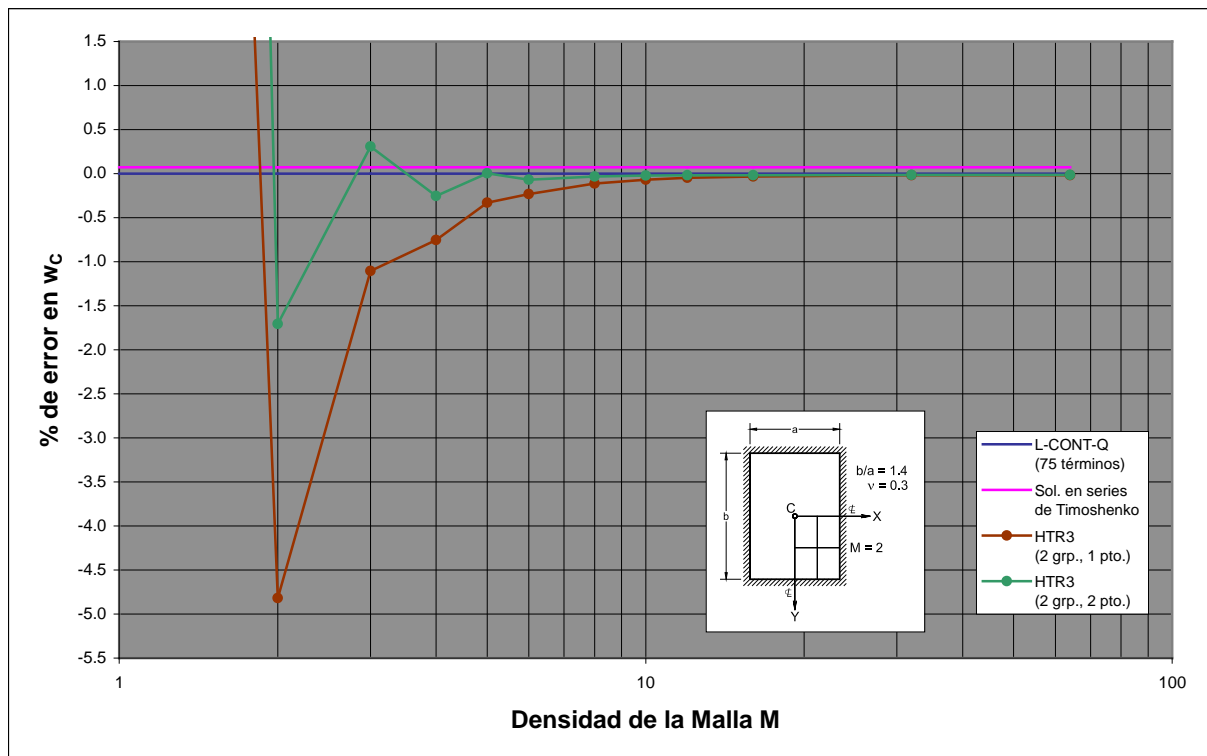
Se hizo el análisis del cuarto de losa rectangular descrito arriba utilizando el elemento HTR3 con el programa de cómputo FLt, empleando para tal efecto entre 1 y 10 grupos de funciones  $\phi_i$  y al mismo tiempo considerando un número variable de puntos de integración numérica (también entre 1 y 10), aplicados todos ellos a distintas densidades de mallas ( $M = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 32$  y  $64$ ) obteniéndose los siguientes resultados:

- A) Considerando 1 grupo (o 3 términos) de funciones de aproximación  $\phi_i$  y empleando distinto número de puntos de integración numérica se obtuvieron para cualquier densidad de malla valores muy pobres, tanto para el desplazamiento transversal  $w$  como para los momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$  en el centro de la losa. Por ejemplo, para el caso de  $M_x$  se encontró como porcentaje de error más favorable (trabajando con la malla más fina) el correspondiente al 68.5%, mientras que para  $M_y$  se obtuvo un 26.2%.
- B) Al considerar 2 grupos (o 7 términos) de funciones de aproximación  $\phi_i$ , se obtuvieron valores aceptables y convergentes para  $w$ ,  $M_x$  y  $M_y$  empleando cualquier número de puntos de integración, como se puede apreciar con mayor detalle en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 y en las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4 asociadas a tales tablas.

Del mismo modo, se puede notar en dichas tablas una característica típica que se presenta en cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  que se considere, cual es la de generar resultados que se empiezan a prácticamente repetir a partir de un determinado número de puntos de integración. Por ejemplo, para el presente caso de los 2 grupos de funciones  $\phi_i$  se puede ver en las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 que los resultados para  $w$ ,  $M_x$  y  $M_y$  obtenidos a partir de considerar 3 puntos de integración son similares (por lo menos para el número de cifras significativas mostradas) a los obtenidos considerando solo 2 puntos. Por consiguiente, para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$ , existirá un conjunto de

**Tabla 5.1** Comparación del desplazamiento transversal  $w$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 2 grupos de funciones  $\phi_i$  y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10].

Densidad de la Malla (M)	L-CONT-Q (75 términos)	Sol. en series de Timoshenko	% de Error	HTR3 (2 grp., 1 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 2 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 3 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 4 pto.)	% de Error
1	3.08933E-03	3.09162E-03	0.074	4.28994E-03	38.863	5.19142E-03	68.043	5.19142E-03	68.043	5.19142E-03	68.043
2				2.94041E-03	-4.821	3.03665E-03	-1.705	3.03665E-03	-1.705	3.03665E-03	-1.705
3				3.05516E-03	-1.106	3.09881E-03	0.307	3.09881E-03	0.307	3.09881E-03	0.307
4				3.06605E-03	-0.754	3.08151E-03	-0.253	3.08151E-03	-0.253	3.08151E-03	-0.253
5				3.07918E-03	-0.329	3.08944E-03	0.004	3.08944E-03	0.004	3.08944E-03	0.004
6				3.08214E-03	-0.233	3.08720E-03	-0.069	3.08720E-03	-0.069	3.08720E-03	-0.069
8				3.08589E-03	-0.111	3.08831E-03	-0.033	3.08831E-03	-0.033	3.08831E-03	-0.033
10				3.08723E-03	-0.068	3.08862E-03	-0.023	3.08862E-03	-0.023	3.08862E-03	-0.023
12				3.08783E-03	-0.049	3.08874E-03	-0.019	3.08874E-03	-0.019	3.08874E-03	-0.019
16				3.08835E-03	-0.032	3.08881E-03	-0.017	3.08881E-03	-0.017	3.08881E-03	-0.017
32				3.08875E-03	-0.019	3.08885E-03	-0.016	3.08885E-03	-0.016	3.08885E-03	-0.016
64				3.08882E-03	-0.017	3.08885E-03	-0.016	3.08885E-03	-0.016	3.08885E-03	-0.016

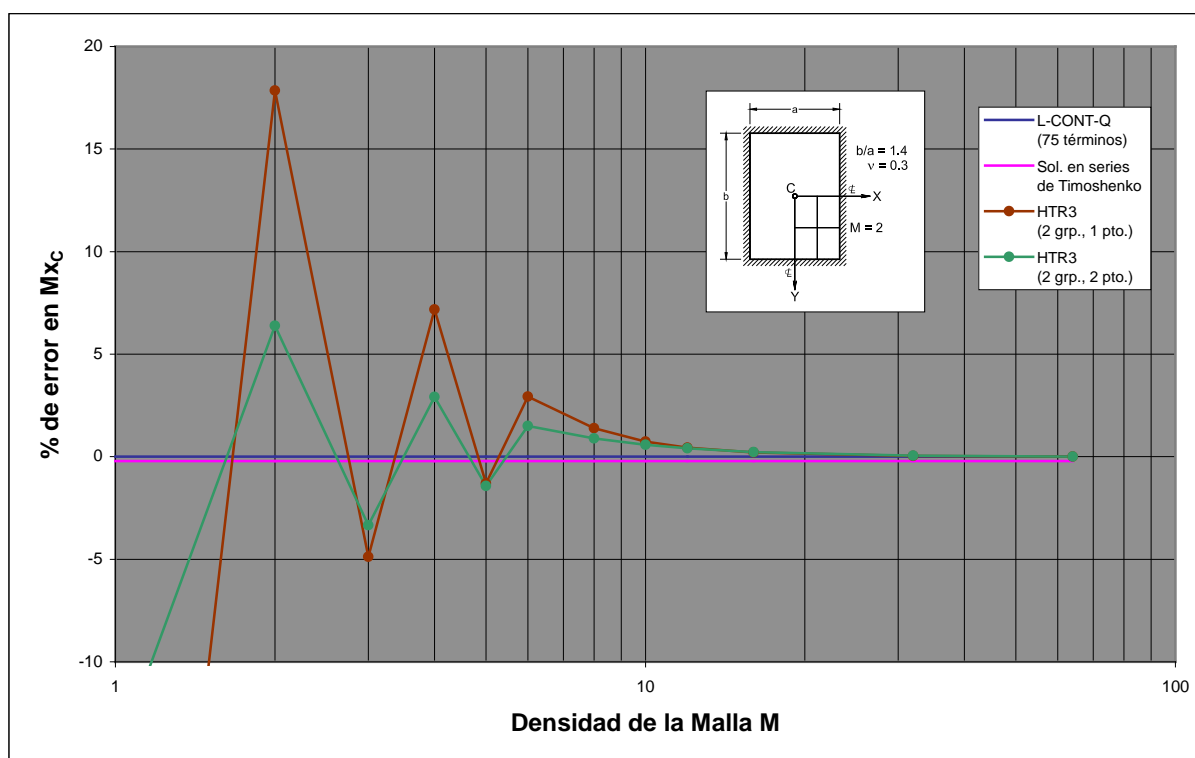


**Figura 5.2** Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.1, correspondientes a los porcentajes de error en el desplazamiento central de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 2 grupos de funciones  $\phi_i$  con 1 o 2 puntos de integración numérica.

números de puntos de integración mínimos y eficientes con los cuales se obtienen resultados aceptables y convergentes. Para el caso analizado de los 2 grupos de funciones  $\phi_i$ , tal conjunto está compuesto por 1 y 2 puntos de integración numérica tanto para  $w$ ,  $M_x$  y  $M_y$ .

**Tabla 5.2** Comparación del momento flector  $M_x$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 2 grupos de funciones  $\phi_i$  y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10].

Densidad de la Malla (M)	L-CONT-Q (75 términos)	Sol. en series de Timoshenko	% de Error	HTR3 (2 grp., 1 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 2 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 3 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 4 pto.)	% de Error
1	1.61174E+00	1.60819E+00	-0.220	8.14239E-01	-49.481	1.37336E+00	-14.790	1.37336E+00	-14.790	1.37336E+00	-14.790
2				1.89951E+00	17.854	1.71464E+00	6.384	1.71464E+00	6.384	1.71464E+00	6.384
3				1.53307E+00	-4.881	1.55792E+00	-3.339	1.55792E+00	-3.339	1.55792E+00	-3.339
4				1.72733E+00	7.172	1.65871E+00	2.914	1.65871E+00	2.914	1.65871E+00	2.914
5				1.59085E+00	-1.296	1.58869E+00	-1.430	1.58869E+00	-1.430	1.58869E+00	-1.430
6				1.65895E+00	2.929	1.63602E+00	1.506	1.63602E+00	1.506	1.63602E+00	1.506
8				1.63404E+00	1.383	1.62614E+00	0.893	1.62614E+00	0.893	1.62614E+00	0.893
10				1.62368E+00	0.741	1.62115E+00	0.584	1.62115E+00	0.584	1.62115E+00	0.584
12				1.61887E+00	0.442	1.61833E+00	0.409	1.61833E+00	0.409	1.61833E+00	0.409
16				1.61500E+00	0.202	1.61544E+00	0.229	1.61544E+00	0.229	1.61544E+00	0.229
32				1.61235E+00	0.038	1.61258E+00	0.052	1.61258E+00	0.052	1.61258E+00	0.052
64				1.61179E+00	0.003	1.61185E+00	0.007	1.61185E+00	0.007	1.61185E+00	0.007

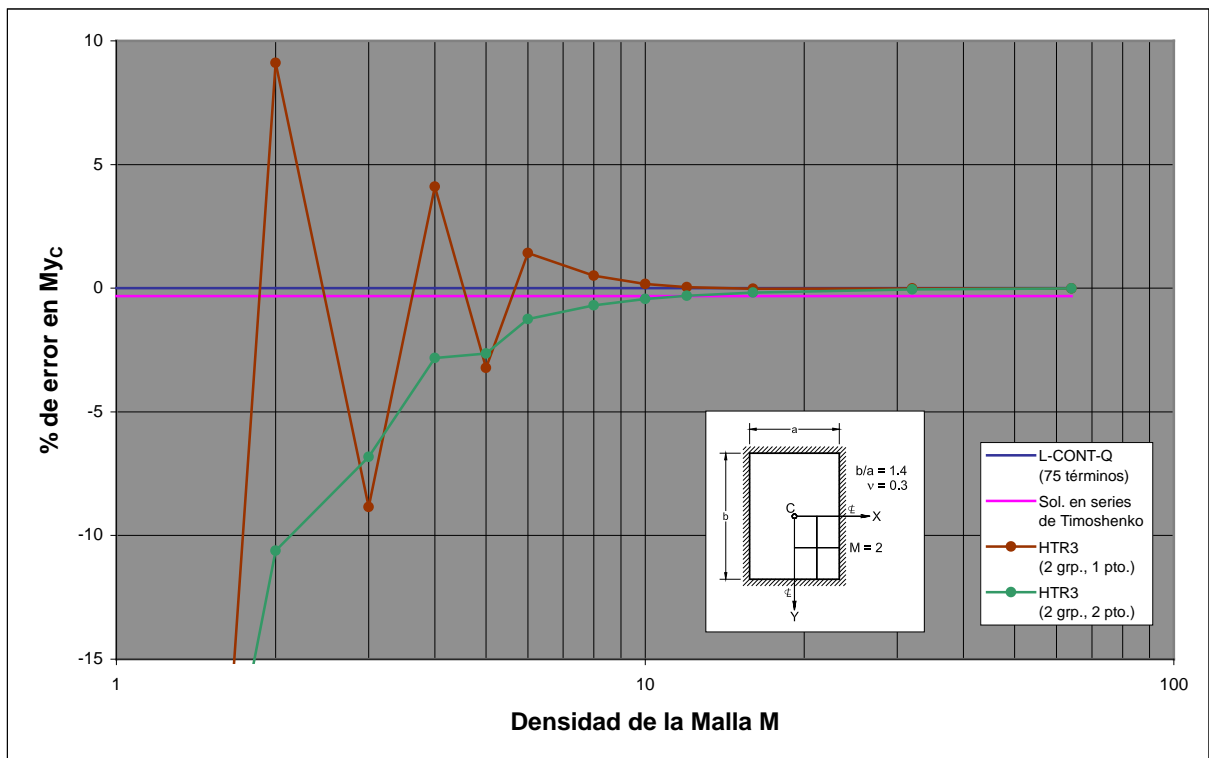


**Figura 5.3** Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.2, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector  $M_x$  en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 2 grupos de funciones  $\phi_i$  con 1 o 2 puntos de integración numérica.

De otro lado, el número óptimo de puntos de integración con el cual se obtienen los mejores resultados con el menor esfuerzo de cómputo posible para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  y para cada magnitud considerada, no corresponde necesariamente al valor más alto dentro del conjunto mencionado arriba, como puede comprobarse más

**Tabla 5.3** Comparación del momento flector  $M_y$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 2 grupos de funciones  $\phi_i$  y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10].

Densidad de la Malla (M)	L-CONT-Q (75 términos)	Sol. en series de Timoshenko	% de Error	HTR3 (2 grp., 1 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 2 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 3 pto.)	% de Error	HTR3 (2 grp., 4 pto.)	% de Error
1	9.79990E-01	9.76896E-01	-0.316	1.58763E-01	-83.800	5.53089E-01	-43.562	5.53089E-01	-43.562	5.53089E-01	-43.562
2				1.06928E+00	9.111	8.76034E-01	-10.608	8.76034E-01	-10.608	8.76034E-01	-10.608
3				8.93322E-01	-8.844	9.13129E-01	-6.823	9.13129E-01	-6.823	9.13129E-01	-6.823
4				1.02024E+00	4.107	9.52294E-01	-2.826	9.52294E-01	-2.826	9.52294E-01	-2.826
5				9.48445E-01	-3.219	9.54040E-01	-2.648	9.54040E-01	-2.648	9.54040E-01	-2.648
6				9.93924E-01	1.422	9.67801E-01	-1.244	9.67801E-01	-1.244	9.67801E-01	-1.244
8				9.84902E-01	0.501	9.73204E-01	-0.692	9.73204E-01	-0.692	9.73204E-01	-0.692
10				9.81634E-01	0.168	9.75664E-01	-0.441	9.75664E-01	-0.441	9.75664E-01	-0.441
12				9.80404E-01	0.042	9.76986E-01	-0.307	9.76986E-01	-0.307	9.76986E-01	-0.307
16				9.79773E-01	-0.022	9.78291E-01	-0.173	9.78291E-01	-0.173	9.78291E-01	-0.173
32				9.79838E-01	-0.015	9.79539E-01	-0.046	9.79539E-01	-0.046	9.79539E-01	-0.046
64				9.79923E-01	-0.007	9.79849E-01	-0.014	9.79849E-01	-0.014	9.79849E-01	-0.014

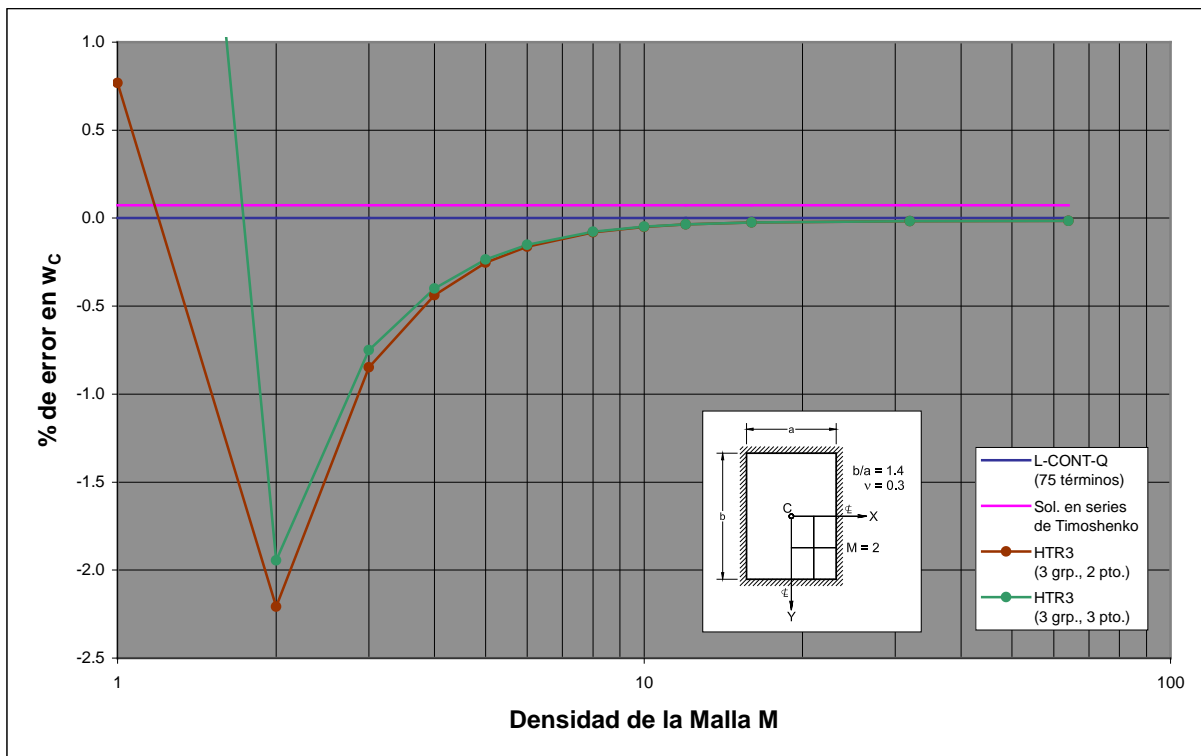


**Figura 5.4** Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.3, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector  $M_y$  en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 2 grupos de funciones  $\phi_i$  con 1 o 2 puntos de integración numérica.

adelante. Por ejemplo, trabajando con 2 grupos de funciones  $\phi_i$ , el número óptimo de puntos de integración es 2. Nótese que en el caso del momento flector  $M_y$  con 2 puntos de integración, se tiene convergencia monótonica.

**Tabla 5.4** Comparación del desplazamiento transversal  $w$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 3 grupos de funciones  $\phi_i$  y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10].

Densidad de la Malla (M)	L-CONT-Q (75 términos)	Sol. en series de Timoshenko	% de Error	HTR3 (3 grp., 1 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 2 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 3 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 4 pto.)	% de Error
1	3.08933E-03	3.09162E-03	0.074	2.69658E-03	-12.713	3.11307E-03	0.768	3.32076E-03	7.491	3.32076E-03	7.491
2				2.06404E-03	-33.188	3.02114E-03	-2.207	3.02922E-03	-1.946	3.02922E-03	-1.946
3				1.95452E-03	-36.733	3.06313E-03	-0.848	3.06617E-03	-0.750	3.06617E-03	-0.750
4				1.89346E-03	-38.710	3.07577E-03	-0.439	3.07695E-03	-0.401	3.07695E-03	-0.401
5				1.85996E-03	-39.794	3.08151E-03	-0.253	3.08210E-03	-0.234	3.08210E-03	-0.234
6				1.83956E-03	-40.454	3.08434E-03	-0.162	3.08466E-03	-0.151	3.08466E-03	-0.151
8				1.81743E-03	-41.171	3.08681E-03	-0.082	3.08694E-03	-0.077	3.08694E-03	-0.077
10				1.80642E-03	-41.527	3.08776E-03	-0.051	3.08783E-03	-0.049	3.08783E-03	-0.049
12				1.80020E-03	-41.728	3.08821E-03	-0.036	3.08824E-03	-0.035	3.08824E-03	-0.035
16				1.79382E-03	-41.935	3.08857E-03	-0.025	3.08858E-03	-0.024	3.08858E-03	-0.024
32				1.78746E-03	-42.141	3.08881E-03	-0.017	3.08881E-03	-0.017	3.08881E-03	-0.017
64				1.78582E-03	-42.194	3.08884E-03	-0.016	3.08884E-03	-0.016	3.08884E-03	-0.016

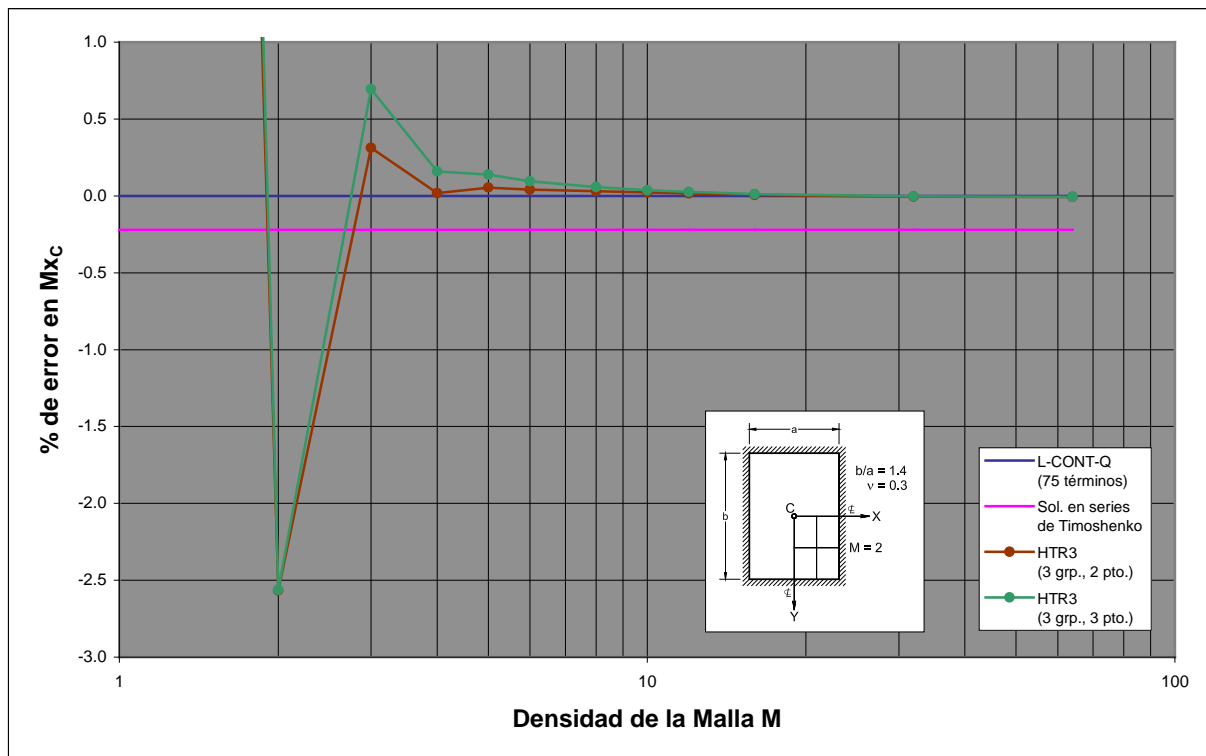


**Figura 5.5** Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.4, correspondientes a los porcentajes de error en el desplazamiento central de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 3 grupos de funciones  $\phi_i$  con 2 o 3 puntos de integración numérica.

C) Considerando 3 grupos (es decir 11 términos) de funciones  $\phi_i$ , se obtuvieron nuevamente resultados aceptables y convergentes para  $w$ ,  $M_x$  y  $M_y$ , pero en este caso empleando dos o más puntos de integración numérica, como se puede notar en las Tablas 5.4, 5.5 y 5.6 y en las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7. Lo anterior representa otra de las características típicas que

**Tabla 5.5 Comparación del momento flector  $M_x$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 3 grupos de funciones  $\phi_i$  y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10].**

Densidad de la Malla (M)	L-CONT-Q (75 términos)	Sol. en series de Timoshenko	% de Error	HTR3 (3 grp., 1 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 2 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 3 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 4 pto.)	% de Error
1	1.61174E+00	1.60819E+00	-0.220	-3.95387E+00	-345.316	2.13107E+00	32.221	2.18101E+00	35.320	2.18101E+00	35.320
2				-4.48779E-01	-127.844	1.57037E+00	-2.567	1.57044E+00	-2.563	1.57044E+00	-2.563
3				-5.63793E-01	-134.980	1.61678E+00	0.313	1.62293E+00	0.694	1.62293E+00	0.694
4				-3.24611E-01	-120.140	1.61202E+00	0.017	1.61432E+00	0.160	1.61432E+00	0.160
5				-2.94827E-01	-118.292	1.61260E+00	0.053	1.61397E+00	0.138	1.61397E+00	0.138
6				-2.44254E-01	-115.155	1.61242E+00	0.042	1.61327E+00	0.095	1.61327E+00	0.095
8				-2.09689E-01	-113.010	1.61224E+00	0.031	1.61267E+00	0.058	1.61267E+00	0.058
10				-1.92523E-01	-111.945	1.61209E+00	0.022	1.61235E+00	0.038	1.61235E+00	0.038
12				-1.82945E-01	-111.351	1.61199E+00	0.015	1.61216E+00	0.026	1.61216E+00	0.026
16				-1.73300E-01	-110.752	1.61185E+00	0.007	1.61194E+00	0.012	1.61194E+00	0.012
32				-1.63932E-01	-110.171	1.61168E+00	-0.004	1.61170E+00	-0.003	1.61170E+00	-0.003
64				-1.61582E-01	-110.025	1.61163E+00	-0.007	1.61163E+00	-0.007	1.61163E+00	-0.007



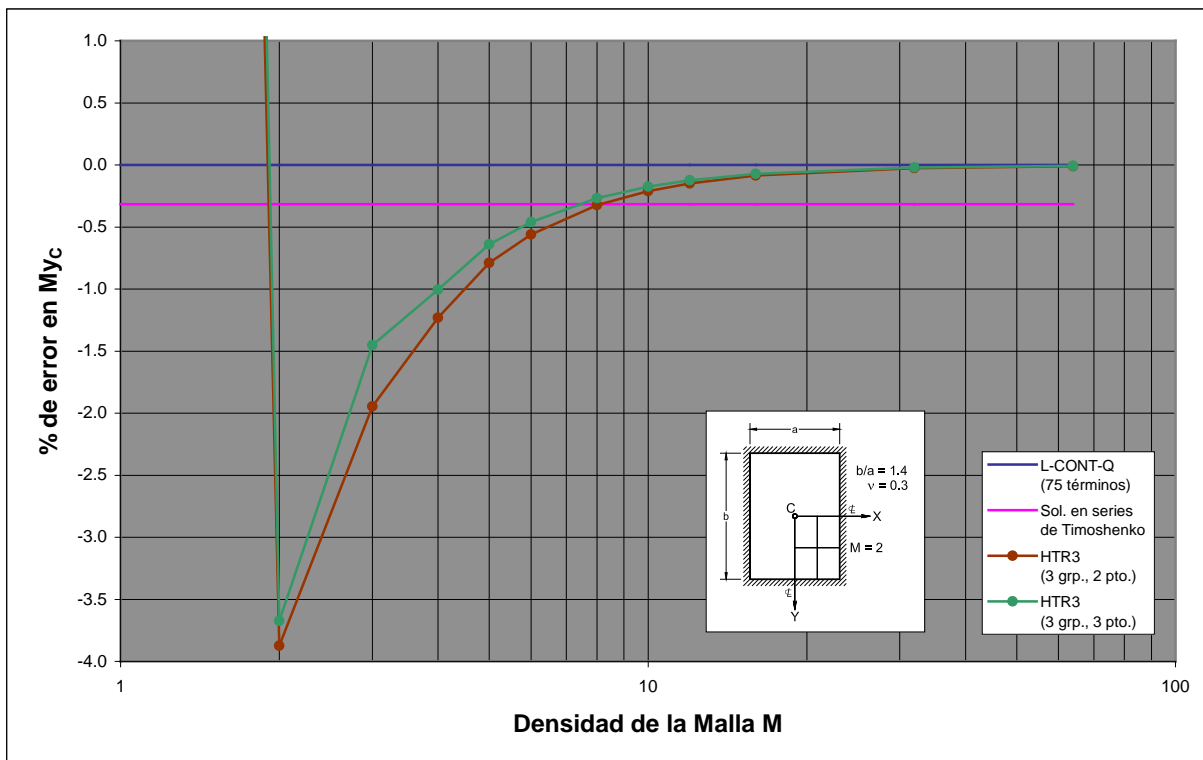
**Figura 5.6 Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.5, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector  $M_x$  en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 3 grupos de funciones  $\phi_i$  con 2 o 3 puntos de integración numérica.**

se presenta en cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  que se considere, cual es la existencia de un particular mínimo número de puntos de integración para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  con el cual se empiezan a obtener resultados aceptables y convergentes.



**Tabla 5.6** Comparación del momento flector  $M_y$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) y de su correspondiente porcentaje de error para el elemento HTR3 empleando 3 grupos de funciones  $\phi_i$  y número variable de puntos de integración para distintas densidades de malla con la solución en series de Timoshenko y el valor teórico exacto [10].

Densidad de la Malla (M)	L-CONT-Q (75 términos)	Sol. en series de Timoshenko	% de Error	HTR3 (3 grp., 1 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 2 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 3 pto.)	% de Error	HTR3 (3 grp., 4 pto.)	% de Error
1	9.79990E-01	9.76896E-01	-0.316	-2.77912E+00	-383.587	1.46345E+00	49.333	1.52717E+00	55.835	1.52717E+00	55.835
2				-1.88966E-01	-119.282	9.42030E-01	-3.873	9.43997E-01	-3.673	9.43997E-01	-3.673
3				-4.58415E-01	-146.778	9.60908E-01	-1.947	9.65744E-01	-1.454	9.65744E-01	-1.454
4				-2.72178E-01	-127.774	9.67928E-01	-1.231	9.70143E-01	-1.005	9.70143E-01	-1.005
5				-2.82380E-01	-128.815	9.72256E-01	-0.789	9.73726E-01	-0.639	9.73726E-01	-0.639
6				-2.46914E-01	-125.196	9.74495E-01	-0.561	9.75483E-01	-0.460	9.75483E-01	-0.460
8				-2.31690E-01	-123.642	9.76826E-01	-0.323	9.77372E-01	-0.267	9.77372E-01	-0.267
10				-2.23376E-01	-122.794	9.77927E-01	-0.210	9.78273E-01	-0.175	9.78273E-01	-0.175
12				-2.18590E-01	-122.305	9.78534E-01	-0.149	9.78772E-01	-0.124	9.78772E-01	-0.124
16				-2.13713E-01	-121.808	9.79146E-01	-0.086	9.79279E-01	-0.073	9.79279E-01	-0.073
32				-2.08960E-01	-121.323	9.79747E-01	-0.025	9.79780E-01	-0.021	9.79780E-01	-0.021
64				-2.07767E-01	-121.201	9.79901E-01	-0.009	9.79909E-01	-0.008	9.79909E-01	-0.008



**Figura 5.7** Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.6, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector  $M_y$  en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando 3 grupos de funciones  $\phi_i$  con 2 o 3 puntos de integración numérica.

Del mismo modo, se puede notar que ahora los resultados para  $w$ ,  $M_x$  y  $M_y$  obtenidos con 4 o más puntos de integración son los mismos (para el número de cifras significativas mostradas) que los obtenidos considerando solo 3 puntos. Además, el número óptimo de

puntos de integración para el caso particular del desplazamiento transversal  $w$  y del momento flector  $M_y$  es 3, mientras que para el momento flector  $M_x$  es 2.

- D) Un análisis similar se hizo teniendo en cuenta un mayor número de grupos de funciones  $\phi_i$  (hasta 10) llegándose a resultados particulares para cada número de grupos considerado.

A continuación se presentan algunas conclusiones finales, referidas al análisis del cuarto de losa rectangular de la Figura 5.1.

- 1) El mínimo número de grupos de funciones de aproximación  $\phi_i$  con los cuales se pueden obtener resultados aceptables y convergentes es de 2.
- 2) Para cada número de grupos de funciones de aproximación  $\phi_i$  existe un conjunto de números de puntos de integración numérica con los cuales se obtienen resultados aceptables y convergentes con el menor esfuerzo de cómputo. Por debajo del menor valor de dicho conjunto los resultados obtenidos son malos, mientras que por encima del mayor valor los resultados son buenos pero prácticamente repetidos o muy similares a los obtenidos con dicha cota superior y por tanto ineficientes. La Tabla 5.7 muestra tales cotas inferior y superior, así como el valor óptimo con el cual se obtienen los mejores resultados con el menor esfuerzo de cómputo posible, para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  y para cada magnitud en particular.

**Tabla 5.7 Particulares números de puntos de integración numérica para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  obtenidos por experimentación numérica utilizando el elemento HTR3 para la losa de la Figura 5.1.**

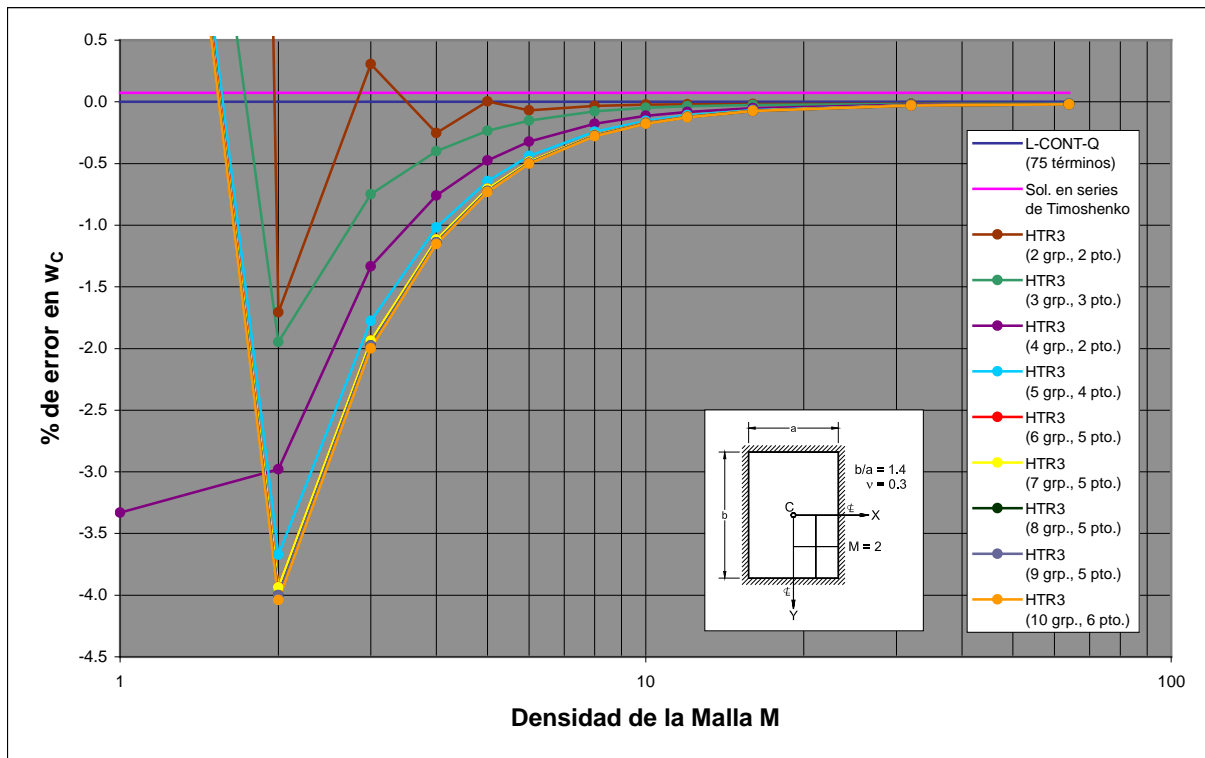
Número de grupos de funciones de aproximación $\phi_i$ estándar	Valores extremos del conjunto de números de puntos de integración numérica mínimos y eficientes		Número óptimo de puntos de integración numérica para cada magnitud		
	Cota inferior	Cota superior	w	Mx	My
1	-	-	-	-	-
2	1	2	2	2	2
3	2	3	3	2	3
4	2	3	2	2	2
5	3	4	4	3	3
6	3	5	5	4	3
7	4	5	5	4	4
8	4	6	5	5	6
9	5	7	5	7	6
10	5	7	6	5	5

Debe agregarse sin embargo, que con más de 4 grupos de funciones  $\phi_i$  los resultados desmejoran al emplear 10 puntos de integración numérica.

- 3) Los resultados obtenidos para cada magnitud estudiada ( $w$ ,  $M_x$  y  $M_y$ ), trabajando con los números de puntos de integración numérica que forman parte del conjunto de números de puntos mínimos y eficientes para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  (ver Tabla 5.7) y para una determinada densidad de malla, no son generalmente muy distintos entre sí (ver por ejemplo los resultados y porcentajes de error en las Tablas 5.4 al 5.6). Por consiguiente, al trabajar con el número óptimo de puntos de integración numérica (Tabla 5.7) se obtiene en general tan solo una ligera o poca mejoría en los resultados con respecto a aquellos obtenidos empleando los otros números de puntos de integración mínimos y eficientes para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$ .
- 4) Para cada magnitud específica ( $w$ ,  $M_x$  y  $M_y$ ) se consideraron los resultados obtenidos empleando el número óptimo de puntos de integración numérica correspondientes a cada uno de los 10 números de grupos de funciones  $\phi_i$  analizados, observando que en el caso del desplazamiento transversal  $w$  (ver Tabla 5.8 y Figura 5.8) se obtienen en general los mejores resultados trabajando con 2 grupos de funciones  $\phi_i$  y 2 puntos de integración numérica, mientras que para el momento flector  $M_x$  (ver Tabla 5.9 y Figura 5.9) se consiguieron los mejores resultados con 3 grupos y 2 puntos de integración y, finalmente, para el caso del momento flector  $M_y$  (ver Tabla 5.10 y Figura 5.10) con 3 grupos y 3 puntos de integración.
- 5) De lo anterior, queda claro, que el óptimo número de grupos de funciones  $\phi_i$  para el elemento HTR3 desarrollado en este trabajo es de 2 o 3, en particular, dada la mayor importancia del conocimiento de los momentos flectores frente al desplazamiento transversal, se recomienda utilizar como valor apropiado y práctico 3 grupos (u 11 términos) de funciones  $\phi_i$ . Dicho número satisface el criterio planteado en la literatura [15] y coincide con el correspondiente del elemento estándar HTQ3 de 12 GDL (ver Tabla 3.1) del cual se puede decir que el elemento HTR3 desarrollado en este trabajo representa un caso particular.

**Tabla 5.8** Comparación del porcentaje de error en el desplazamiento transversal  $w$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) para el elemento HTR3 empleando 2, 3, ... y hasta 10 grupos de funciones  $\phi_i$  con sus correspondientes números óptimos de puntos de integración para distintas densidades de malla.

Densidad de la Malla (M)	HTR3 (2 grp., 2 pto.)	HTR3 (3 grp., 3 pto.)	HTR3 (4 grp., 2 pto.)	HTR3 (5 grp., 4 pto.)	HTR3 (6 grp., 5 pto.)	HTR3 (7 grp., 5 pto.)	HTR3 (8 grp., 5 pto.)	HTR3 (9 grp., 5 pto.)	HTR3 (10 grp., 6 pto.)
1	68.043	7.491	-3.331	6.785	6.786	6.689	6.689	6.671	6.677
2	-1.705	-1.946	-2.979	-3.672	-3.934	-3.936	-4.000	-4.000	-4.040
3	0.307	-0.750	-1.334	-1.777	-1.937	-1.935	-1.975	-1.975	-1.998
4	-0.253	-0.401	-0.758	-1.019	-1.116	-1.115	-1.140	-1.140	-1.154
5	0.004	-0.234	-0.475	-0.643	-0.707	-0.707	-0.723	-0.723	-0.732
6	-0.069	-0.151	-0.323	-0.439	-0.484	-0.484	-0.496	-0.496	-0.502
8	-0.033	-0.077	-0.178	-0.242	-0.267	-0.268	-0.274	-0.274	-0.278
10	-0.023	-0.049	-0.114	-0.154	-0.171	-0.171	-0.175	-0.175	-0.178
12	-0.019	-0.035	-0.082	-0.109	-0.120	-0.121	-0.124	-0.124	-0.125
16	-0.017	-0.024	-0.051	-0.066	-0.072	-0.072	-0.074	-0.074	-0.075
32	-0.016	-0.017	-0.024	-0.027	-0.029	-0.029	-0.029	-0.029	-0.029
64	-0.016	-0.016	-0.018	-0.018	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019

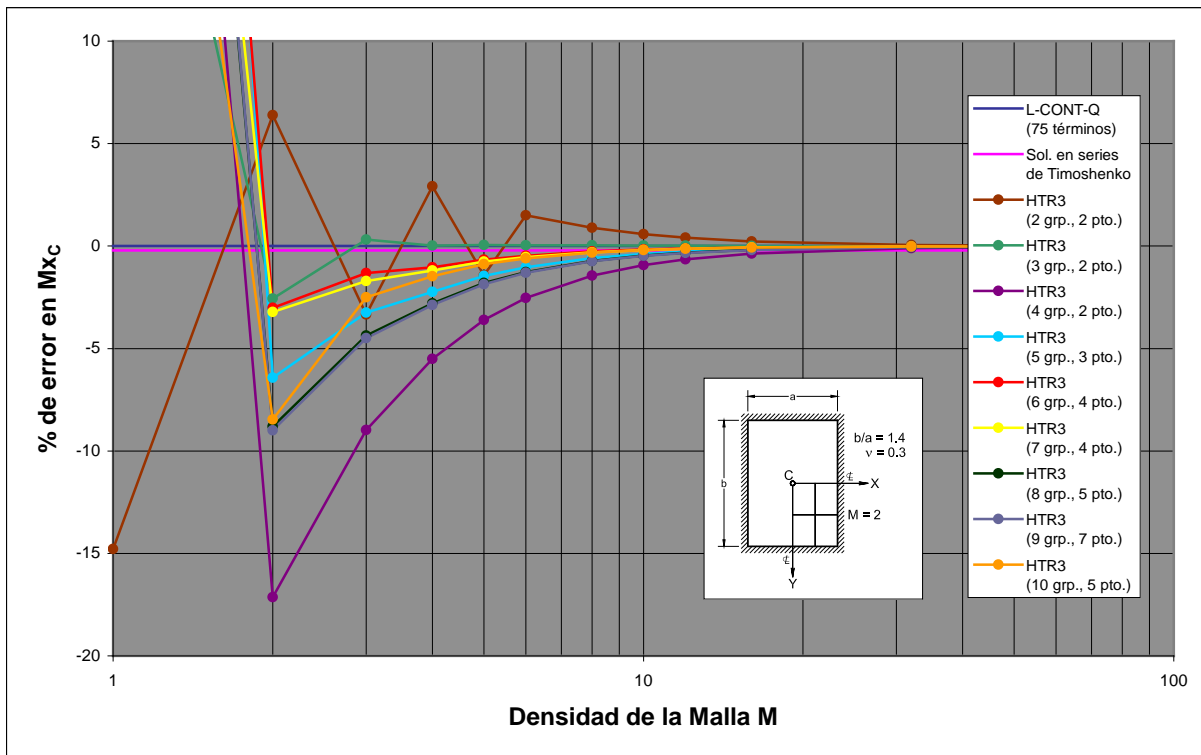


**Figura 5.8** Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.8, correspondientes a los porcentajes de error en el desplazamiento central de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando el número óptimo de puntos de integración numérica para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  analizadas.

6) Del mismo modo, queda también claro para el elemento HTR3 y trabajando con 3 grupos (u 11 términos) de funciones  $\phi_i$  que el número óptimo de puntos de integración numérica es de 2 o 3, las diferencias de los porcentajes de error considerando tales puntos de integración en los casos de los momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$  y para cada densidad de

**Tabla 5.9** Comparación del porcentaje de error en el momento flector  $M_x$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) para el elemento HTR3 empleando 2, 3, ... y hasta 10 grupos de funciones  $\phi_i$  con sus correspondientes números óptimos de puntos de integración para distintas densidades de malla.

Densidad de la Malla (M)	HTR3 (2 grp., 2 pto.)	HTR3 (3 grp., 2 pto.)	HTR3 (4 grp., 2 pto.)	HTR3 (5 grp., 3 pto.)	HTR3 (6 grp., 4 pto.)	HTR3 (7 grp., 4 pto.)	HTR3 (8 grp., 5 pto.)	HTR3 (9 grp., 7 pto.)	HTR3 (10 grp., 5 pto.)
1	-14.790	32.221	73.660	112.623	92.372	69.870	78.092	79.701	47.749
2	6.384	-2.567	-17.134	-6.421	-3.008	-3.214	-8.807	-8.995	-8.471
3	-3.339	0.313	-8.977	-3.243	-1.325	-1.713	-4.363	-4.496	-2.494
4	2.914	0.017	-5.510	-2.239	-1.038	-1.186	-2.793	-2.871	-1.479
5	-1.430	0.053	-3.601	-1.452	-0.663	-0.765	-1.808	-1.859	-0.879
6	1.506	0.042	-2.537	-1.030	-0.472	-0.540	-1.273	-1.309	-0.596
8	0.893	0.031	-1.443	-0.586	-0.267	-0.304	-0.721	-0.742	-0.322
10	0.584	0.022	-0.929	-0.377	-0.171	-0.196	-0.464	-0.477	-0.203
12	0.409	0.015	-0.648	-0.264	-0.120	-0.137	-0.323	-0.333	-0.140
16	0.229	0.007	-0.367	-0.151	-0.070	-0.079	-0.184	-0.189	-0.080
32	0.052	-0.004	-0.098	-0.044	-0.023	-0.026	-0.052	-0.053	-0.026
64	0.007	-0.007	-0.031	-0.017	-0.012	-0.013	-0.019	-0.019	-0.013

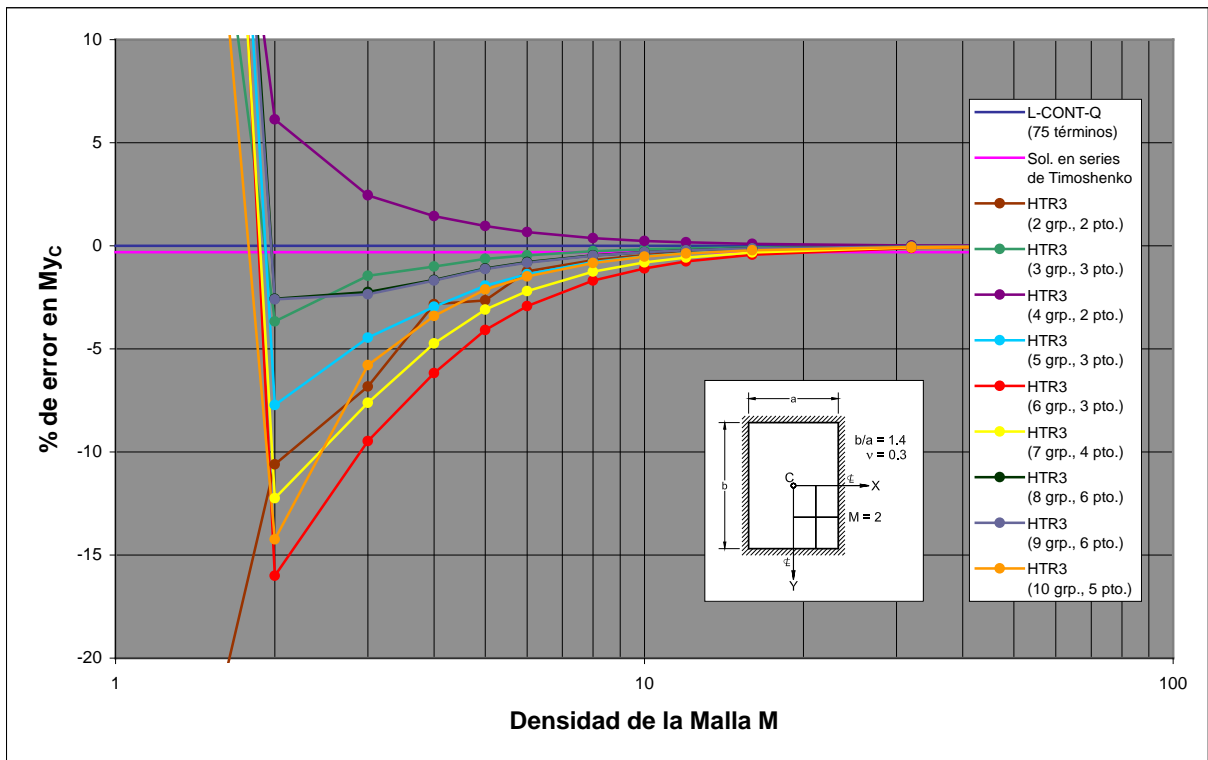


**Figura 5.9** Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.9, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector  $M_x$  en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando el número óptimo de puntos de integración numérica para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  analizadas.

malla analizada son relativamente pequeñas (ver Figuras 5.6 y 5.7); sin embargo, si se toma en cuenta que los resultados obtenidos para los desplazamientos transversales empleando 3 puntos de integración son algo mejores que los obtenidos con 2 puntos (ver Figura 5.5), se concluye finalmente que *los valores apropiados y prácticos para el*

**Tabla 5.10 Comparación del porcentaje de error en el momento flector  $M_y$  (en el centro de la losa de la Figura 5.1) para el elemento HTR3 empleando 2, 3, ... y hasta 10 grupos de funciones  $\phi_i$  con sus correspondientes números óptimos de puntos de integración para distintas densidades de malla.**

Densidad de la Malla (M)	HTR3 (2 grp., 2 pto.)	HTR3 (3 grp., 3 pto.)	HTR3 (4 grp., 2 pto.)	HTR3 (5 grp., 3 pto.)	HTR3 (6 grp., 3 pto.)	HTR3 (7 grp., 4 pto.)	HTR3 (8 grp., 6 pto.)	HTR3 (9 grp., 6 pto.)	HTR3 (10 grp., 5 pto.)
1	-43.562	55.835	65.492	122.331	140.367	119.644	117.632	108.135	72.074
2	-10.608	-3.673	6.132	-7.728	-16.007	-12.251	-2.562	-2.602	-14.245
3	-6.823	-1.454	2.448	-4.465	-9.469	-7.611	-2.250	-2.349	-5.793
4	-2.826	-1.005	1.444	-2.954	-6.172	-4.738	-1.650	-1.689	-3.409
5	-2.648	-0.639	0.960	-1.928	-4.088	-3.099	-1.098	-1.126	-2.127
6	-1.244	-0.460	0.670	-1.376	-2.919	-2.194	-0.796	-0.816	-1.479
8	-0.692	-0.267	0.377	-0.792	-1.684	-1.257	-0.466	-0.477	-0.830
10	-0.441	-0.175	0.240	-0.514	-1.092	-0.813	-0.305	-0.312	-0.533
12	-0.307	-0.124	0.165	-0.361	-0.764	-0.568	-0.215	-0.220	-0.372
16	-0.173	-0.073	0.091	-0.206	-0.435	-0.323	-0.124	-0.127	-0.211
32	-0.046	-0.021	0.019	-0.055	-0.112	-0.084	-0.034	-0.035	-0.056
64	-0.014	-0.008	0.002	-0.017	-0.031	-0.024	-0.012	-0.012	-0.017



**Figura 5.10 Curvas de convergencia asociadas a la Tabla 5.10, correspondientes a los porcentajes de error en el momento flector  $M_y$  en el centro de la losa de la Figura 5.1, obtenidas con el elemento HTR3 utilizando el número óptimo de puntos de integración numérica para cada número de grupos de funciones  $\phi_i$  analizadas.**

elemento HTR3 correspondientes al número de funciones de aproximación estándar  $\phi_i$  y número de puntos de integración numérica son 11 y 3 respectivamente. Por consiguiente, tales valores fueron utilizados a lo largo de la tesis en los distintos ejemplos y aplicaciones.

## 5.3 ALGUNOS ANÁLISIS SIMPLES PARA PROBAR LA EXACTITUD DEL ELEMENTO

Con el propósito de probar la exactitud del elemento HTR3, se presentan a continuación resultados obtenidos para algunos sencillos casos de análisis clásicos y prácticos con diversos elementos finitos desarrollados en el análisis de losas planas extraídos de la literatura y el elemento desarrollado en la presente tesis.

Debe anotarse que tales resultados corresponden a elementos de flexión de losas rectangulares o cuadriláteros con cuatro nudos (y típicamente de 12 GDL), a excepción del elemento EFM8 utilizado con cuatro nudos (y por lo tanto de 16 GDL) o con ocho nudos (32 GDL).

### 5.3.1 ANÁLISIS ESTÁNDAR DE LOSAS CUADRADAS

El funcionamiento del elemento HTR3 ha sido estudiado con referencia al problema clásico de la losa cuadrada ( $\nu = 0.3$ ), de lado  $a$  y rigidez flexional  $D$ , considerando las condiciones de apoyo:

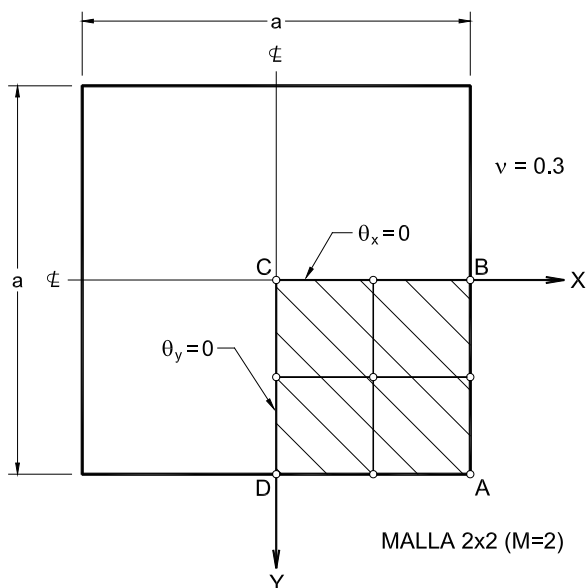
- Empotramiento perfecto en todos los bordes.
- Apoyo simple en todos los bordes.

y los estados de carga:

- Carga uniformemente distribuida,  $p$ , en toda el área.
- Carga concentrada,  $P$ , en el centro de la losa.

Al igual que en la Sección 5.2, se ha considerado como solución teórica *exacta* para las magnitudes estudiadas y para las cuatro combinaciones posibles de borde y de carga a la solución por series de Fourier obtenida con el programa de cómputo L-CONT-Q [10]. Tales resultados tienen mayor precisión que los que aparecen en el libro clásico de Timoshenko [27] los cuales y donde quiera que pudieron ser extraídos son también mostrados.

Debido a la simetría del problema se modeló solo un cuarto de la losa (ver Figura 5.11), empleando mallas regulares con  $M = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 32$  y  $64$  elementos por mitad del lado de la losa (densidades de mallas). Para el caso del análisis de la línea central de la losa se utilizó una malla regular de 535 elementos ( $M=5$ ).



**Figura 5.11** Cuarto de una losa cuadrada (área sombreada ABCD) con distintas condiciones de borde y carga, empleada para realizar algunos análisis comparativos y estudios de convergencia con distintos elementos finitos y particularmente con el elemento HTR3.

Los resultados (desplazamientos y esfuerzos en varias ubicaciones) obtenidos con el elemento desarrollado en la presente tesis (elemento híbrido de Trefftz rectangular de 4 nudos) son comparados con resultados dados por el elemento de Melosh (elemento compatible rectangular de 4 nudos [31, 23]), el elemento DKE (elemento discreto de Kirchhoff cuadrilateral de 4 nudos utilizado por el programa de cómputo SAP 2000 [29]), el elemento EFM8 empleado con 4 nudos (elemento isoparamétrico mixto de 8 nudos utilizado por el programa FLm [6], al cual se le hizo los cambios necesarios para que no incluya deformaciones por corte), el mismo elemento EFM8 empleado con sus 8 nudos y el elemento de Severn y Taylor (elemento híbrido de esfuerzos rectangular de 4 nudos [25]).

### 5.3.1.1 ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS EN EL CENTRO DE LA LOSA Y EN LA MITAD DEL LADO

Como puede observarse en la Tabla 5.11 y en las Figuras 5.12 al 5.15, las cuales tratan básicamente con el porcentaje de error en el desplazamiento central  $w_C$  versus el número de elementos por mitad del lado de la losa para distintas condiciones de borde y de carga, todos



los modelos muestran convergencia (aunque no necesariamente monotónica), pero, los resultados obtenidos para el elemento HTR3 contrastan favorablemente con los obtenidos con los otros elementos rectangulares o cuadriláteros de 4 nudos y 12 GDL, incluso con el elemento EFM8 empleado con 4 nudos y 16 GDL. Del mismo modo, puede notarse que las velocidades de convergencia obtenidas con el elemento rectangular HTR3 de 4 nudos y 12 GDL para el desplazamiento central son, en general, casi tan buenas, como aquellas obtenidas para el elemento isoparamétrico mixto EFM8 empleado con 8 nudos (32 GDL), especialmente en el caso de la losa cuadrada simplemente apoyada y cargada uniformemente (Figura 5.12) en donde para una sencilla densidad de malla  $M=3$  se puede obtener una deflexión en el centro de la losa con un porcentaje de error del orden de  $-0.054\%$  comparable y ligeramente mejor que el  $-0.058\%$  obtenido con la solución en series de Timoshenko [27]. Con el elemento EFM8 empleado con sus 8 nudos se obtiene para el mismo caso un porcentaje de error del orden de  $-0.028\%$ , sin embargo debe trabajarse con 40 nudos y 120 incógnitas en lugar de los 16 nudos y únicamente 27 incógnitas empleadas con el elemento HTR3. Dicho elemento mixto de 8 nudos es solo referencial y utilizado aquí solamente como nivel de comparación mayor, en todo caso, para que el presente estudio comparativo sea un poco más equilibrado, deberá a lo más considerarse los resultados obtenidos con dicho elemento empleado con sus 4 nudos de las esquinas.

Debe aclararse sin embargo que el elemento isoparamétrico mixto EFM8 empleado con sus 8 nudos constituye un muy buen elemento finito para el análisis de losas (véase la referencia [6]), no obstante, si se pretende hacer un análisis comparativo, los resultados obtenidos con dicho elemento deberían ser comparados con los obtenidos con otros elementos también de 8 nudos y con un número de GDL similar. Por ejemplo, con los elementos híbridos de Trefftz de 8 nudos y 24 GDL HTQI1 y HTQI2 (ver Tabla 3.1), se obtienen resultados un tanto mejores que con el elemento mixto mencionado arriba; por citar un caso, para el desplazamiento máximo de la losa cuadrada empotrada y uniformemente cargada y utilizando una malla gruesa de 232 elementos para un cuarto de losa se obtienen porcentajes de error de  $-0.1\%$  y  $-0.2\%$  respectivamente (Tabla VIII de la referencia [15]) comparadas a casi  $-0.4\%$  del elemento mixto.

De lo anterior puede concluirse, por lo menos en lo relativo al desplazamiento central de una losa cuadrada, que el elemento HTR3 propuesto en este trabajo representa una muy buena alternativa con respecto a los otros elementos rectangulares o cuadriláteros de 4 nudos

**Tabla 5.11 Deflexiones en el centro de una losa cuadrada con distintas condiciones de borde y de carga para algunos tipos de elementos finitos y valores teóricos,  $\nu = 0.3$**

Elemento Finito	Densidad de la malla (M)	SIMPLEMENTE APOYADA				EMPOTRADA						
		Número de incógnitas	CARGA UNIFORME		CARGA CONCENTRADA		Número de incógnitas	CARGA UNIFORME		CARGA CONCENTRADA		
				% de error		% de error			% de error		% de error	
Melosh (4 nudos)	1	3	0.3446000	-15.1723	0.1378400	18.821	1	0.1480000	16.960	0.5919000	5.474	
	2	12	0.3939000	-3.0365	0.1232700	6.261	8	0.1403000	10.875	0.6134000	9.305	
	4	48	0.4033000	-0.7226	0.1182900	1.968	40	0.1304000	3.051	0.5803000	3.407	
	6	108	0.4050000	-0.3041	0.1171500	0.985	96	0.1283000	1.391	0.5710000	1.750	
	8	192	0.4056000	-0.1564	0.1167100	0.606	176	0.1275000	0.759	0.5672000	1.073	
DKE (4 nudos)	1	3	0.3784722	-6.8342	0.1513889	30.500	1	0.1562500	23.479	0.6250000	11.372	
	2	12	0.4045999	-0.4124	0.1269329	9.418	8	0.1460644	15.430	0.6410427	14.231	
	3	27	0.4057429	-0.1212	0.1215151	4.748	21	0.1359317	7.423	0.6058457	7.959	
	4	48	0.4060007	-0.0577	0.1193720	2.901	40	0.1319482	4.275	0.5895261	5.051	
	5	75	0.4060971	-0.0340	0.1182944	1.972	65	0.1300352	2.763	0.5808305	3.501	
	6	108	0.4061437	-0.0225	0.1176719	1.435	96	0.1289784	1.928	0.5756570	2.580	
	8	192	0.4061862	-0.0121	0.1170118	0.866	176	0.1279157	1.088	0.5700458	1.580	
	10	300	0.4062046	-0.0076	0.1166842	0.584	280	0.1274198	0.696	0.5672096	1.074	
	12	432	0.4062142	-0.0052	0.1164968	0.422	408	0.1271493	0.482	0.5655693	0.782	
	16	768	0.4062236	-0.0029	0.1163001	0.253	736	0.1268797	0.269	0.5638309	0.472	
	32	3072	0.4062324	-0.0007	0.1160916	0.073	3008	0.1266190	0.063	0.5619624	0.139	
	64	12288	0.4062345	-0.0002	0.1160317	0.022	12160	0.1265537	0.011	0.5614180	0.042	
	EFM8 (4 nudos)	1	6	0.4612541	13.5436	0.1845019	59.044	10	0.1664447	31.536	0.6657794	18.639
2		20	0.4237383	4.3086	0.1347614	16.167	26	0.1528490	20.792	0.6926619	23.429	
3		42	0.4139980	1.9109	0.1252298	7.950	50	0.1392044	10.009	0.6338659	12.952	
4		72	0.4105862	1.0710	0.1215777	4.802	82	0.1339333	5.843	0.6071414	8.190	
5		110	0.4090144	0.6841	0.1197667	3.241	122	0.1313752	3.822	0.5929838	5.667	
6		156	0.4081632	0.4746	0.1187294	2.347	170	0.1299449	2.691	0.5845802	4.170	
8		272	0.4073188	0.2667	0.1176384	1.406	290	0.1284869	1.539	0.5754767	2.547	
10		420	0.4069283	0.1706	0.1171012	0.943	442	0.1277969	0.994	0.5708815	1.729	
12		600	0.4067162	0.1184	0.1167955	0.680	626	0.1274165	0.693	0.5682262	1.255	
16		1056	0.4065057	0.0666	0.1164762	0.405	1090	0.1270340	0.391	0.5654186	0.755	
32		4160	0.4063027	0.0166	0.1161405	0.115	4226	0.1266591	0.095	0.5624124	0.219	
64		16512	0.4062521	0.0041	0.1160452	0.033	16642	0.1265641	0.020	0.5615427	0.064	
EFM8 (8 nudos)		1	16	0.3905319	-3.8656	0.1141464	-1.604	22	0.1503424	18.811	0.6707891	19.532
	2	56	0.4056315	-0.1486	0.1167830	0.669	66	0.1260406	-0.394	0.5667434	0.991	
	3	120	0.4061219	-0.0279	0.1164176	0.354	134	0.1264942	-0.036	0.5656616	0.798	
	4	208	0.4061994	-0.0088	0.1162479	0.208	226	0.1265201	-0.029	0.5636099	0.433	
	5	320	0.4062207	-0.0036	0.1161642	0.136	342	0.1265201	-0.015	0.5627749	0.284	
	6	456	0.4062282	-0.0017	0.1161175	0.095	482	0.1265268	-0.010	0.5623025	0.200	
	8	800	0.4062333	-0.0005	0.1160703	0.055	834	0.1265306	-0.007	0.5618262	0.115	
	10	1240	0.4062345	-0.0002	0.1160481	0.036	1282	0.1265314	-0.006	0.5616205	0.075	
	12	1776	0.4062349	-0.0001	0.1160362	0.025	1826	0.1265319	-0.006	0.5614810	0.053	
	16	3136	0.4062349	-0.0001	0.1160240	0.015	3202	0.1265319	-0.006	0.5613595	0.032	
	32	12416	0.4062353	0.0000	0.1160122	0.005	12546	0.1265319	-0.006	0.5612419	0.011	
	Severn y Taylor (4 nudos)	1	3					1	0.1330000	5.106		
		2	12					8	0.1240000	-2.007		
3		27					21	0.1250000	-1.216			
4		48					40	0.1260000	-0.426			
HTR3 (4 nudos)	1	3	0.3906252	-3.8426	0.1045193	-9.902	1	0.1337120	5.668	0.5348472	-4.693	
	2	12	0.4051544	-0.2661	0.1138257	-1.880	8	0.1238917	-2.092	0.5350420	-4.658	
	3	27	0.4060169	-0.0538	0.1151077	-0.775	21	0.1254777	-0.839	0.5498302	-2.023	
	4	48	0.4061655	-0.0172	0.1155153	-0.424	40	0.1260104	-0.418	0.5550212	-1.098	
	5	75	0.4062065	-0.0071	0.1156970	-0.267	65	0.1262439	-0.233	0.5573814	-0.677	
	6	108	0.4062215	-0.0034	0.1157936	-0.184	96	0.1263574	-0.144	0.5586194	-0.456	
	8	192	0.4062307	-0.0011	0.1158884	-0.102	176	0.1264544	-0.067	0.5598053	-0.245	
	10	300	0.4062337	-0.0004	0.1159318	-0.065	280	0.1264913	-0.038	0.5603317	-0.151	
	12	432	0.4062345	-0.0002	0.1159554	-0.044	408	0.1265080	-0.025	0.5606094	-0.102	
	16	768	0.4062349	-0.0001	0.1159787	-0.024	736	0.1265214	-0.014	0.5608775	-0.054	
	32	3072	0.4062353	0.0000	0.1160009	-0.005	3008	0.1265306	-0.007	0.5611243	-0.010	
	64	12288	0.4062353	0.0000	0.1160065	0.000	12160	0.1265319	-0.006	0.5611841	0.001	
	Sol. en series de Timoshenko			0.406	-0.0579	0.1160	-0.006		0.126	-0.426	0.560	-0.210
L-CONT-Q (100 términos)			0.4062353		0.1160068			0.1265392		0.5611811		
FACTOR			$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$			$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		

y de 12 o 16 GDL estudiados. Se sugiere para obtener con dicho elemento desplazamientos aceptables, con porcentajes de error menores que 1%, emplear mallas regulares de 434 o 535 elementos en un cuarto de losa. Por ejemplo, con M=4 se obtendrían como porcentajes de error: -0.017%, -0.42%, -0.42% y -1.10% para los 4 casos de la losa cuadrada analizada y mostrada en la Tabla 5.11.

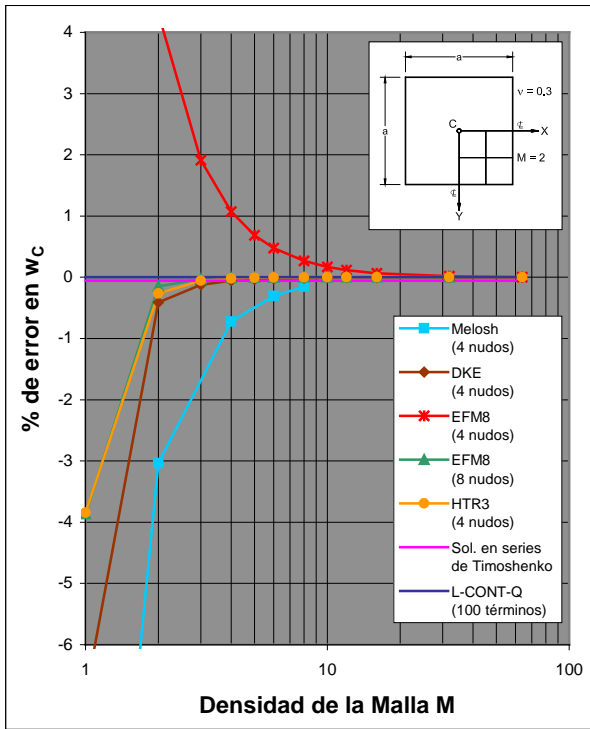


Figura 5.12 Losa cuadrada con apoyo simple cargada uniformemente: porcentaje de error en el desplazamiento central.

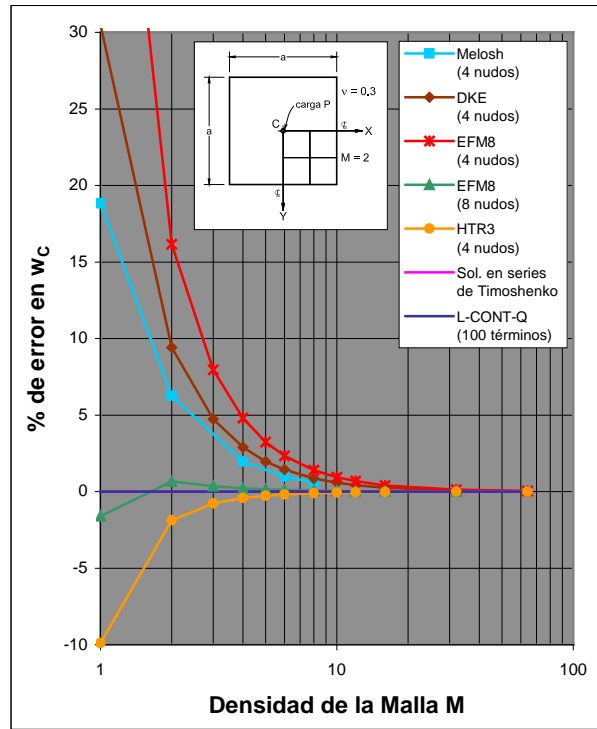


Figura 5.13 Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error en el desplazamiento central.

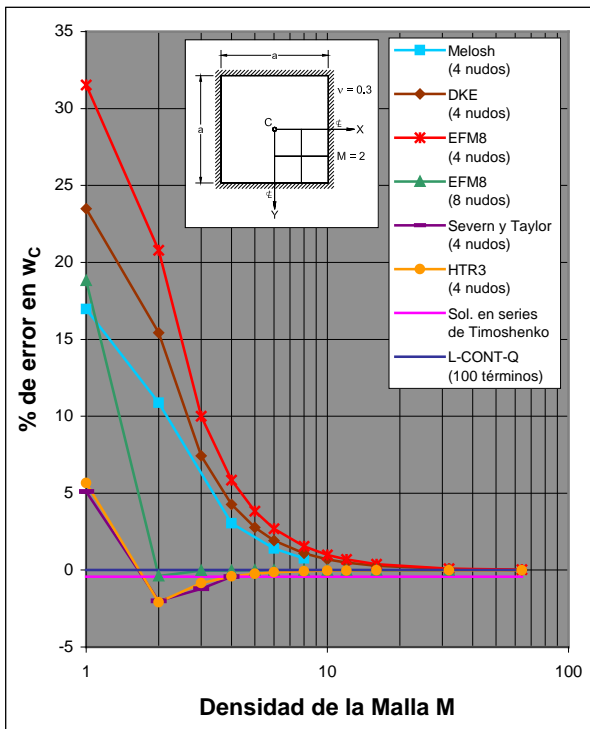


Figura 5.14 Losa cuadrada empotrada cargada uniformemente: porcentaje de error en el desplazamiento central.

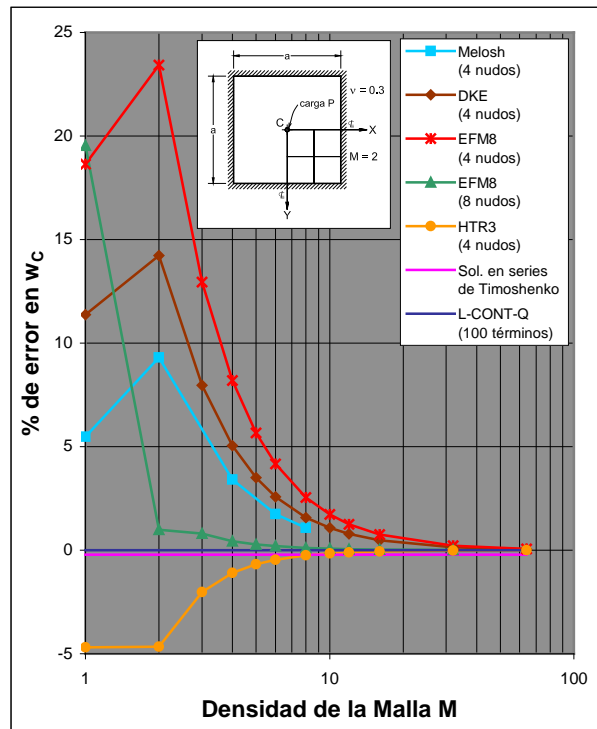
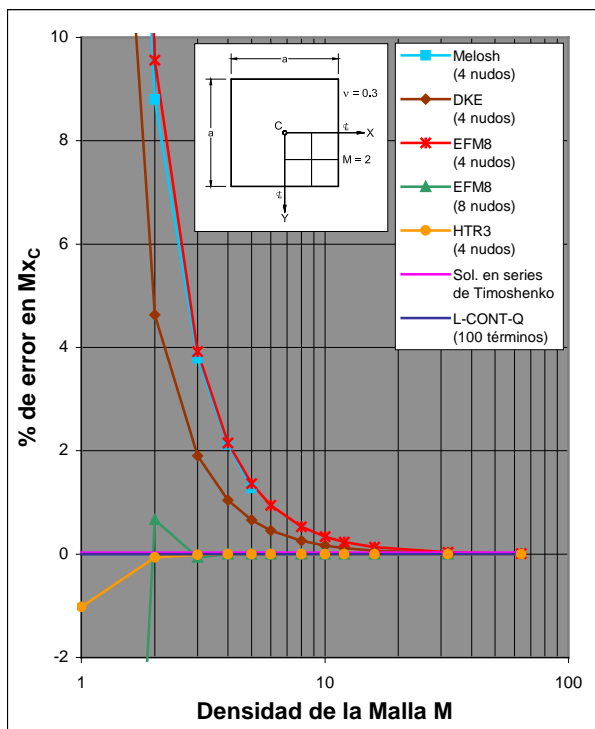


Figura 5.15 Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error en el desplazamiento central.

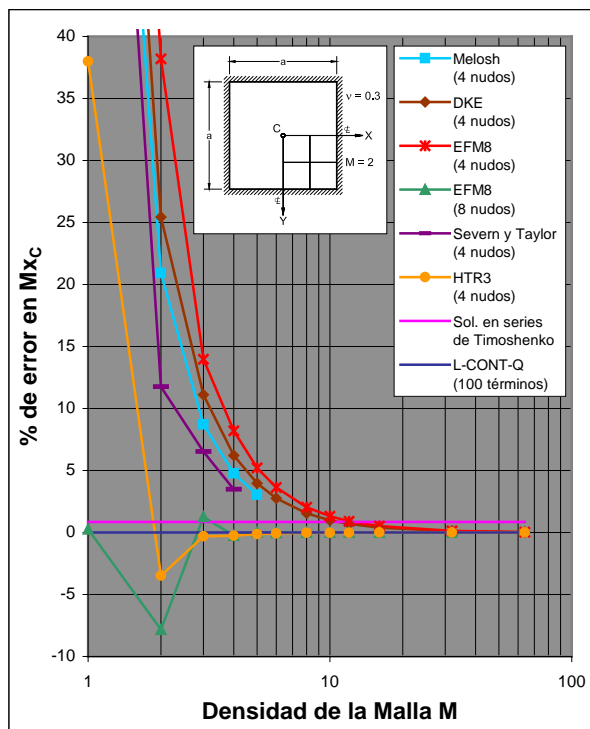
De otro lado, nuevamente puede comprobarse en las Tablas 5.12 y 5.13 y en las Figuras 5.16 al 5.19, que se refieren al porcentaje de error del momento flector  $M_x$  en el centro de la losa o en la mitad del lado versus el número de divisiones de la malla M en un cuarto de la losa, que todos los elementos comparados convergen a los resultados exactos (pero no forzosamente en forma monótonica). Sin embargo, otra vez puede verse que los resultados obtenidos con el elemento HTR3 son de mejor calidad que con los obtenidos con

**Tabla 5.12 Momentos flectores  $M_x$  en el centro de una losa cuadrada simplemente apoyada o empotrada en todos sus bordes pero uniformemente cargada para algunos tipos de elementos finitos y valores teóricos,  $\nu = 0.3$**

Elemento Finito	Densidad de la malla (M)	SIMPLEMENTE APOYADA			EMPOTRADA		
		Número de incógnitas	CARGA UNIFORME		Número de incógnitas	CARGA UNIFORME	
				% de error			% de error
Melosh (4 nudos)	1	3	0.660000	37.8262	1	0.461000	101.260
	2	12	0.521000	8.7992	8	0.277000	20.930
	3	27	0.497000	3.7873	21	0.249000	8.706
	4	48	0.489000	2.1167	40	0.240000	4.777
	5	75	0.485000	1.2814	65	0.236000	3.031
DKE (4 nudos)	1	3	0.6030556	25.9346	1	0.4875000	112.829
	2	12	0.5010471	4.6325	8	0.2873469	25.448
	3	27	0.4879638	1.9003	21	0.2544925	11.104
	4	48	0.4838625	1.0438	40	0.2433139	6.224
	5	75	0.4820307	0.6613	65	0.2381564	3.972
	6	108	0.4810513	0.4568	96	0.2353651	2.754
	8	192	0.4800878	0.2556	176	0.2325974	1.546
	10	300	0.4796453	0.1632	280	0.2313191	0.987
	12	432	0.4794058	0.1132	408	0.2306254	0.685
	16	768	0.4791683	0.0636	736	0.2299362	0.384
	32	3072	0.4789398	0.0158	3008	0.2292722	0.094
	64	12288	0.4788828	0.0039	12160	0.2291062	0.021
EFM8 (4 nudos)	1	6	0.7195584	50.2636	10	0.5193077	126.715
	2	20	0.5246436	9.5600	26	0.3165473	38.196
	3	42	0.4976405	3.9211	50	0.2610314	13.959
	4	72	0.4891710	2.1524	82	0.2478255	8.194
	5	110	0.4853923	1.3633	122	0.2409549	5.194
	6	156	0.4833729	0.9416	170	0.2373519	3.621
	8	272	0.4813867	0.5268	290	0.2337299	2.040
	10	420	0.4804742	0.3363	442	0.2320524	1.308
	12	600	0.4799810	0.2333	626	0.2311388	0.909
	16	1056	0.4794911	0.1310	1090	0.2302284	0.511
	32	4160	0.4790207	0.0327	4226	0.2293462	0.126
	64	16512	0.4789030	0.0082	16642	0.2291249	0.029
EFM8 (8 nudos)	1	16	0.3562527	-25.6046	22	0.2296289	0.250
	2	56	0.4820616	0.6678	66	0.2111171	-7.832
	3	120	0.4785487	-0.0658	134	0.2319732	1.273
	4	208	0.4788656	0.0003	226	0.2284766	-0.254
	5	320	0.4788460	-0.0037	342	0.2290885	0.014
	6	456	0.4788580	-0.0012	482	0.2290175	-0.017
	8	800	0.4788618	-0.0005	834	0.2290446	-0.006
	10	1240	0.4788628	-0.0002	1282	0.2290489	-0.004
	12	1776	0.4788634	-0.0001	1826	0.2290500	-0.003
	16	3136	0.4788634	-0.0001	3202	0.2290506	-0.003
	32	12416	0.4788639	0.0000	12546	0.2290511	-0.003
	Severn y Taylor (4 nudos)	1	3			1	0.4610000
2		12			8	0.2560000	11.762
3		27			21	0.2440000	6.524
4		48			40	0.2370000	3.468
HTR3 (4 nudos)	1	3	0.4739583	-1.0244	1	0.3160894	37.996
	2	12	0.4785693	-0.0615	8	0.2210796	-3.483
	3	27	0.4788086	-0.0116	21	0.2283469	-0.310
	4	48	0.4788460	-0.0037	40	0.2284435	-0.268
	5	75	0.4788569	-0.0015	65	0.2287641	-0.128
	6	108	0.4788601	-0.0008	96	0.2288753	-0.079
	8	192	0.4788628	-0.0002	176	0.2289746	-0.036
	10	300	0.4788634	-0.0001	280	0.2290115	-0.020
	12	432	0.4788634	-0.0001	408	0.2290278	-0.013
	16	768	0.4788639	0.0000	736	0.2290408	-0.007
	32	3072	0.4788639	0.0000	3008	0.2290495	-0.003
	64	12288	0.4788639	0.0000	12160	0.2290506	-0.003
Sol. en series de Timoshenko			0.479	0.0284		0.231	0.848
L-CONT-Q (100 términos)			0.4788639			0.2290573	
FACTOR			$p a^2 \times 10^{-1}$			$p a^2 \times 10^{-1}$	



**Figura 5.16** Losa cuadrada con apoyo simple cargada uniformemente: porcentaje de error del momento flector en el centro de la losa.



**Figura 5.17** Losa cuadrada empotrada cargada uniformemente: porcentaje de error del momento flector en el centro de la losa.

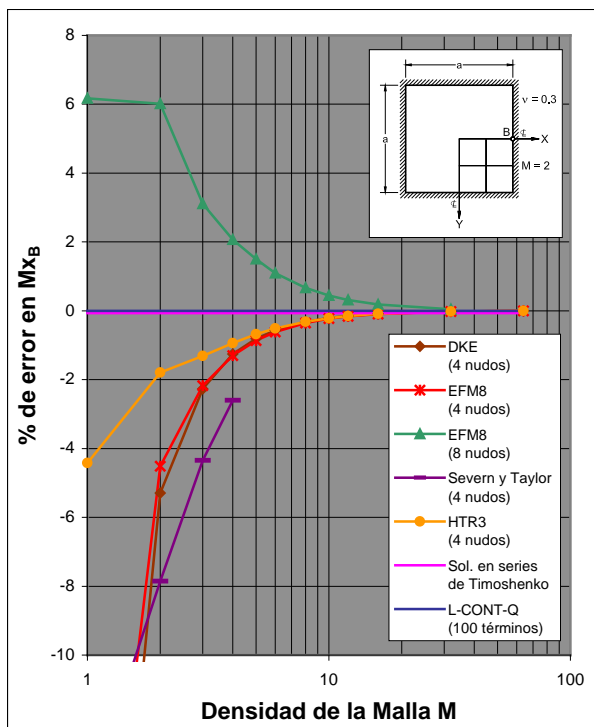
los otros elementos rectangulares o cuadriláteros de 4 nudos y 12 GDL (incluido el elemento EFM8 con 16 GDL). Incluso son de igual calidad y hasta mejores en algunos casos que con los obtenidos con el elemento isoparamétrico mixto EFM8 empleado con sus 8 nudos. En particular se destaca el caso del momento flector en el centro de la losa simplemente apoyada y uniformemente cargada (Tabla 5.12 y Figura 5.16) en donde con un solo elemento HTR3 ( $M=1$ ) se consigue  $-1.02\%$  como porcentaje de error comparado al  $-25.60\%$  que se obtiene con el mencionado elemento mixto.

Nótese que no se han incluido en el estudio del momento flector  $M_x$  en el centro de la losa los casos que involucran la carga concentrada en el centro de la misma, donde se tiene una singularidad. Una alternativa ingenieril para solucionar tal situación teórica de la carga concentrada en un punto es mostrada en la Sección 5.3.2, la cual constituye en realidad otra de las ventajas del elemento HTR3 y en general de la formulación híbrida de Trefftz. Del mismo modo, tampoco se ha considerado en el estudio del momento flector  $M_x$  en la mitad del lado los casos que contemplan como condición de borde el simplemente apoyado, ya que tales momentos representan valores triviales conocidos (aunque en la Sección 5.3.2 se analiza uno de estos casos).

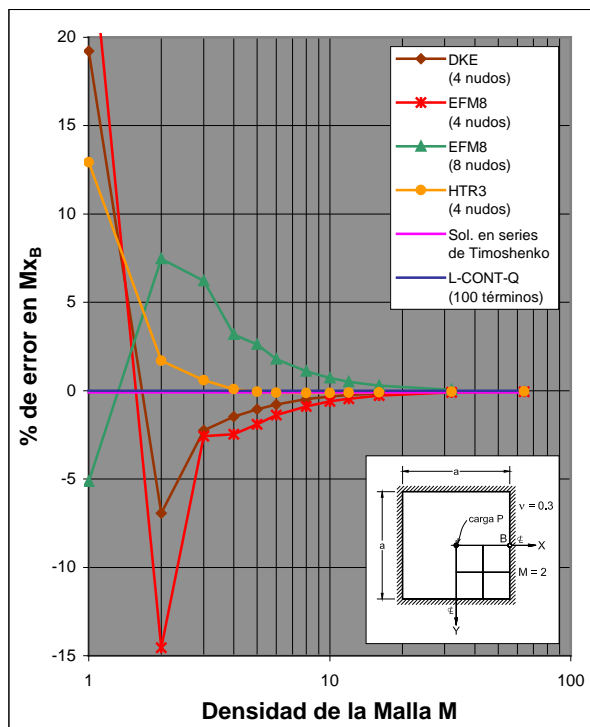
**Tabla 5.13 Momentos flectores  $M_x$  en la mitad del lado de una losa cuadrada y empotrada en todos sus bordes con carga uniforme o carga concentrada para algunos tipos de elementos finitos y valores teóricos,  $\nu = 0.3$**

Elemento Finito	Densidad de la malla (M)	Número de incógnitas	EMPOTRADA				
			CARGA UNIFORME		CARGA CONCENTRADA		
			% de error		% de error		
DKE (4 nudos)	1	1	0.3750000	-26.948	0.1500000	19.22	
	2	8	0.4861609	-5.294	0.1171045	-6.93	
	3	21	0.5017138	-2.264	0.1229841	-2.25	
	4	40	0.5068750	-1.259	0.1239655	-1.47	
	5	65	0.5091615	-0.813	0.1244967	-1.05	
	6	96	0.5104152	-0.569	0.1248411	-0.78	
	8	176	0.5116710	-0.324	0.1252142	-0.48	
	10	280	0.5122601	-0.209	0.1254018	-0.33	
	12	408	0.5125837	-0.146	0.1255087	-0.25	
	16	736	0.5129091	-0.083	0.1256193	-0.16	
	32	3008	0.5132286	-0.021	0.1257313	-0.07	
	64	12160	0.5133101	-0.005	0.1257606	-0.05	
	EFM8 (4 nudos)	1	10	0.3994672	-22.182	0.1597870	27.00
2		26	0.4901785	-4.511	0.1075200	-14.54	
3		50	0.5021935	-2.171	0.1225873	-2.57	
4		82	0.5066629	-1.300	0.1227083	-2.47	
5		122	0.5089149	-0.861	0.1234308	-1.90	
6		170	0.5101991	-0.611	0.1240723	-1.39	
8		290	0.5115245	-0.353	0.1247055	-0.88	
10		442	0.5121593	-0.229	0.1250495	-0.61	
12		626	0.5125109	-0.161	0.1252515	-0.45	
16		1090	0.5128662	-0.091	0.1254658	-0.28	
32		4226	0.5132172	-0.023	0.1256898	-0.10	
64		16642	0.5133073	-0.005	0.1257498	-0.05	
EFM8 (8 nudos)		1	22	0.5450033	6.169	0.1193373	-5.15
	2	66	0.5441949	6.012	0.1352053	7.46	
	3	134	0.5293099	3.112	0.1336320	6.21	
	4	226	0.5239610	2.070	0.1298268	3.19	
	5	342	0.5210281	1.499	0.1291218	2.63	
	6	482	0.5189562	1.095	0.1280688	1.79	
	8	834	0.5167356	0.662	0.1271965	1.10	
	10	1282	0.5155973	0.441	0.1267300	0.73	
	12	1826	0.5149447	0.313	0.1264580	0.51	
	16	3202	0.5142676	0.182	0.1261723	0.28	
	32	12546	0.5135796	0.048	0.1258768	0.05	
	Severn y Taylor (4 nudos)	1	1	0.4400000	-14.286		
		2	8	0.4730000	-7.858		
3		21	0.4910000	-4.351			
4		40	0.5000000	-2.598			
HTR3 (4 nudos)	1	1	0.4906505	-4.419	0.1420935	12.94	
	2	8	0.5041227	-1.795	0.1279583	1.70	
	3	21	0.5066037	-1.311	0.1265580	0.59	
	4	40	0.5085303	-0.936	0.1259258	0.09	
	5	65	0.5098410	-0.681	0.1257368	-0.06	
	6	96	0.5107053	-0.512	0.1256690	-0.12	
	8	176	0.5117084	-0.317	0.1256480	-0.13	
	10	280	0.5122363	-0.214	0.1256623	-0.12	
	12	408	0.5125450	-0.154	0.1256800	-0.11	
	16	736	0.5128722	-0.090	0.1257078	-0.09	
	32	3008	0.5132140	-0.024	0.1257498	-0.05	
	64	12160	0.5133057	-0.006	0.1257648	-0.04	
	Sol. en series de Timoshenko			0.513	-0.065	0.1257	-0.09
L-CONT-Q (100 términos)			0.5133355		0.1258177		
FACTOR			$-p a^2 \times 10^{-1}$		-P		

Se concluye entonces que los resultados de momentos flectores obtenidos con el elemento HTR3 para la mitad del lado de la losa y especialmente para el centro de la losa son bastante satisfactorios con respecto a los obtenidos por los otros elementos de 4 y 8 nudos estudiados. En el caso de los momentos flectores en el centro de la losa la calidad de los resultados obtenidos con el elemento HTR3 es incluso mejor que la obtenida con el mismo elemento para el desplazamiento central anteriormente comentado, pudiéndose emplear mallas de 333 o 434 elementos en un cuarto de losa para obtener momentos flectores con porcentajes de error inferiores al 1%.



**Figura 5.18** Losa cuadrada empotrada cargada uniformemente: porcentaje de error del momento flector  $M_x$  en la mitad del lado.

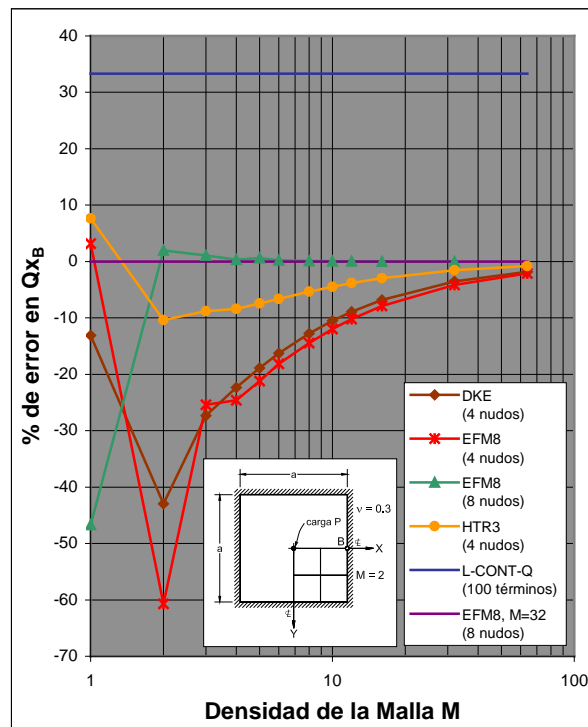


**Figura 5.19** Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error del momento flector en la mitad del lado.

En la Figura 5.20, la cual corresponde al porcentaje de error del corte  $Q_x$  en la mitad del lado de la losa contra la densidad de la malla  $M$ , para la condición de borde y de carga indicada, se puede notar que si bien todos los elementos estudiados muestran convergencia no monotónica, los resultados correspondientes a todos los elementos rectangulares o cuadriláteros de 4 nudos son de inferior calidad a los obtenidos con el elemento mixto de 8 nudos. Sin embargo, y esto sucede también en los otros 3 casos de borde y de carga no mostrados, la calidad de los resultados obtenidos con el elemento HTR3 es siempre mejor que la obtenida con los otros elementos de 4 nudos estudiados.

Debe mencionarse que los valores de corte obtenidos con el programa L-CONT-Q para los casos de la carga concentrada, no tienen la suficiente calidad como para ser tomados como una referencia *exacta*, en su lugar y a falta incluso en algunos casos de otra referencia analítica como la de Timoshenko [27], se tomó como referencia la obtenida con una malla de elementos finitos muy fina.

Se concluye entonces, como puede por ejemplo apreciarse en la Figura 5.20, que la calidad de los resultados para cortes en la mitad del lado obtenida con el elemento HTR3 es



**Figura 5.20** Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error del corte  $Q_x$  en la mitad del lado.

en general (a excepción del caso de la losa simplemente apoyada y con carga concentrada en el centro, Figura 5.32, en donde para una densidad de malla  $M=6$  ya se obtiene un porcentaje de error menor al 1%) no tan buena como la que se obtiene para los desplazamientos o para los momentos flectores anteriormente comentados, no obstante que tal calidad es siempre mejor (con errores en general menores a la mitad) de la obtenida con los otros elementos de 4 nudos.

Para terminar, debe mencionarse y como se concluyó al final de la Sección 5.2 que el elemento HTR3 utilizado a lo largo de prácticamente toda la tesis emplea 3 grupos de funciones  $\phi_i$  y 3 puntos de integración numérica; esta combinación fue ratificada en esta sección al hacer paralelamente el análisis del elemento HTR3 con 2 grupos y 2 puntos y asimismo con 3 grupos y 2 puntos de integración, cuyos resultados no fueron mostrados por no hacer demasiado extensa la presentación, llegándose nuevamente a la conclusión de que el elemento HTR3 produce en general los mejores resultados al utilizar 3 grupos (u 11 términos) de funciones  $\phi_i$  y 3 puntos de integración numérica.



### 5.3.1.2 ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS EN LA LÍNEA CENTRAL DE LA LOSA

La Tabla 5.14 y las Figuras 5.21 comparan resultados para las deflexiones a lo largo de la línea central ( $y=0$ , véase Figura 5.11) de losas cuadradas con las alternativas de carga y condiciones de apoyo que se indican, obtenidas con el elemento HTR3 empleando una malla regular de 535 elementos, con los obtenidos con otros elementos de flexión de losas de 4 nudos. Tales resultados son comparados a su vez con la solución obtenida por el programa de cómputo L-CONT-Q [10] considerada como la teórica *exacta*, mostrándose siempre que pudo ser posible los valores dados por Timoshenko [27].

De los resultados tabulados en 5.14 se puede comprobar nuevamente que aquellos obtenidos con el elemento HTR3 son en todo momento de calidad aceptable (porcentajes de error menores al 1%) y siempre mejores que los correspondientes valores obtenidos con los otros elementos rectangulares o cuadriláteros de 4 nudos estudiados. En especial se destaca el caso de la losa simplemente apoyada y con carga uniforme, en donde con un porcentaje de error promedio de  $-0.007\%$  se puede garantizar 4 cifras significativas exactas en el cálculo de  $w$  a lo largo de la línea central.

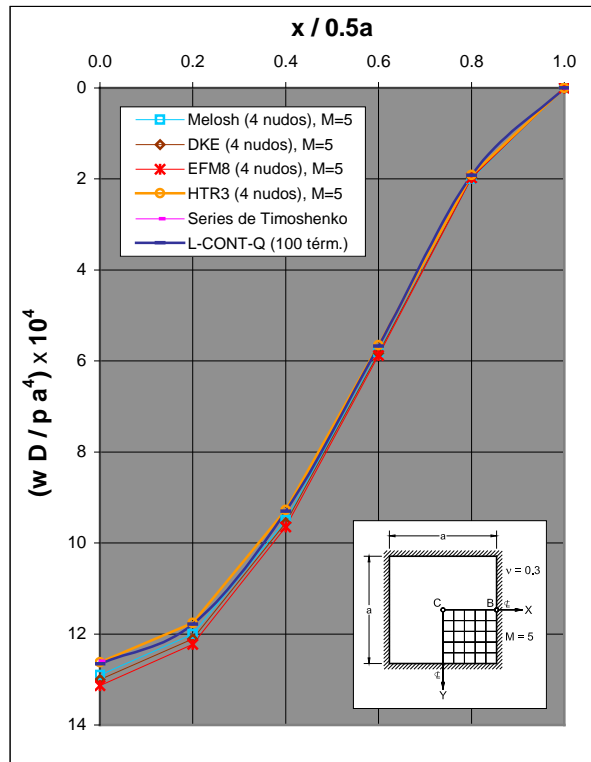
De otro lado, los correspondientes valores de giros obtenidos con el elemento HTR3 y tabulados en 5.15 muestran errores mayores que los obtenidos para las deflexiones, particularmente en el caso de la losa empotrada con carga concentrada en el centro. No obstante, tales valores tienen una calidad aceptable (con un porcentaje de error promedio para los cuatro casos de 1.1%) y en general son mejores que los obtenidos con los otros elementos finitos comparados. En las Figuras 5.22 se presentan tales resultados para el caso particular de la losa cuadrada empotrada en sus cuatro bordes y uniformemente cargada.

Debe mencionarse que, a falta de los correspondientes valores de giros no proporcionados por el programa L-CONT-Q [10] y dada la escasa y aparente poca fiabilidad de algunos de los valores dados por Timoshenko [27, 23], se consideró como solución teórica a la obtenida con el mismo elemento HTR3 empleando una malla muy fina de 60360 elementos.

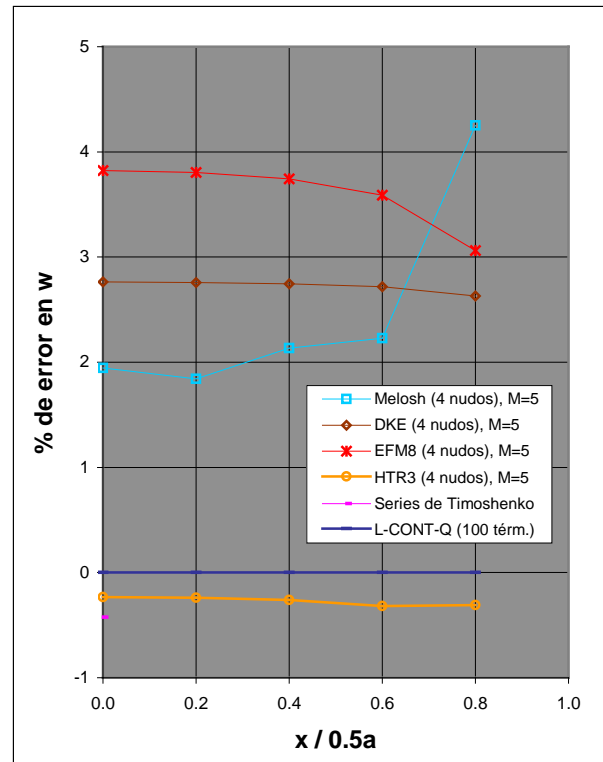
Por otra parte, la Tabla 5.16 muestra la variación del momento flector  $M_x$  a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) para losas cuadradas, con dos distintas condiciones de apoyo y bajo la acción de cargas uniformemente distribuidas,  $p$ , comparándose los resultados obtenidos con

**Tabla 5.14** Deflexiones a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) de una losa cuadrada con distintas condiciones de borde y de carga para algunos tipos de elementos finitos ( $M=5$ ) y valores teóricos,  $\nu = 0.3$

		SOLUCIÓN											
		x/0.5a	Melosh (4 nudos), M=5		DKE (4 nudos), M=5		EFM8 (4 nudos), M=5		HTR3 (4 nudos), M=5		Series de Timoshenko		L-CONT-Q(100t)
				% de error		% de error		% de error		% de error		% de error	
SIMPLEMENTE APOYADA EN LOS CUATRO BORDES	CARGA UNIFORME	0.0	0.409	0.681	0.406097	-0.034	0.409014	0.684	0.406206	-0.007	0.406	-0.058	0.406235
		0.2	0.391	0.804	0.387688	-0.050	0.390475	0.669	0.387854	-0.007	0.401	3.382	0.387882
		0.4	0.337	1.009	0.333296	-0.101	0.335696	0.618	0.333609	-0.007	0.341	2.208	0.333634
		0.6	0.248	0.703	0.245779	-0.199	0.247549	0.520	0.246250	-0.008	0.248	0.703	0.246269
		0.8	0.133	1.099	0.131080	-0.360	0.132022	0.356	0.131543	-0.008	0.133	1.099	0.131554
		1.0	0.000		0.000000		0.000000		0.000000		0.000		0.000000
	FACTOR		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$
	CARGA CONCENTRADA	0.0	0.1174	1.201	0.118294	1.972	0.119767	3.241	0.115697	-0.267	0.1160	-0.006	0.116007
		0.2	0.1064	1.037	0.106970	1.579	0.107704	2.276	0.105247	-0.058	0.1020	-3.141	0.105308
		0.4	0.0847	0.781	0.085096	1.251	0.085566	1.811	0.084066	0.026	0.0810	-3.622	0.084044
		0.6	0.0583	0.668	0.058595	1.177	0.058927	1.750	0.057923	0.016	0.0555	-4.167	0.057913
		0.8	0.0296	0.572	0.029767	1.141	0.029927	1.684	0.029435	0.012	0.0285	-3.166	0.029432
1.0		0.0000		0.000000		0.000000		0.000000		0.0000		0.000000	
FACTOR		$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$	
EMPOTRADA EN LOS CUATRO BORDES	CARGA UNIFORME	0.0	0.129	1.945	0.130035	2.763	0.131375	3.822	0.126244	-0.233	0.126	-0.426	0.126539
		0.2	0.120	1.841	0.121081	2.759	0.122314	3.805	0.117548	-0.240			0.117831
		0.4	0.095	2.134	0.095569	2.746	0.096498	3.745	0.092771	-0.262			0.093015
		0.6	0.058	2.229	0.058277	2.718	0.058771	3.589	0.056554	-0.319			0.056735
		0.8	0.020	4.252	0.019688	2.628	0.019772	3.062	0.019125	-0.311			0.019184
		1.0	0.000		0.000000		0.000000		0.000000		0.000		0.000000
	FACTOR		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$		$p a^4 / D \times 10^{-2}$
	CARGA CONCENTRADA	0.0	0.574	2.284	0.580831	3.501	0.592984	5.667	0.557381	-0.677	0.560	-0.210	0.561181
		0.2	0.484	1.915	0.488225	2.804	0.492997	3.809	0.473629	-0.269			0.474906
		0.4	0.330	1.482	0.332284	2.185	0.334477	2.859	0.324822	-0.110			0.325180
		0.6	0.175	1.485	0.176031	2.083	0.177077	2.690	0.172084	-0.206			0.172439
		0.8	0.052	0.762	0.052633	1.988	0.052597	1.919	0.051508	-0.192			0.051607
1.0		0.000		0.000000		0.000000		0.000000		0.000		0.000000	
FACTOR		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$	



(a)

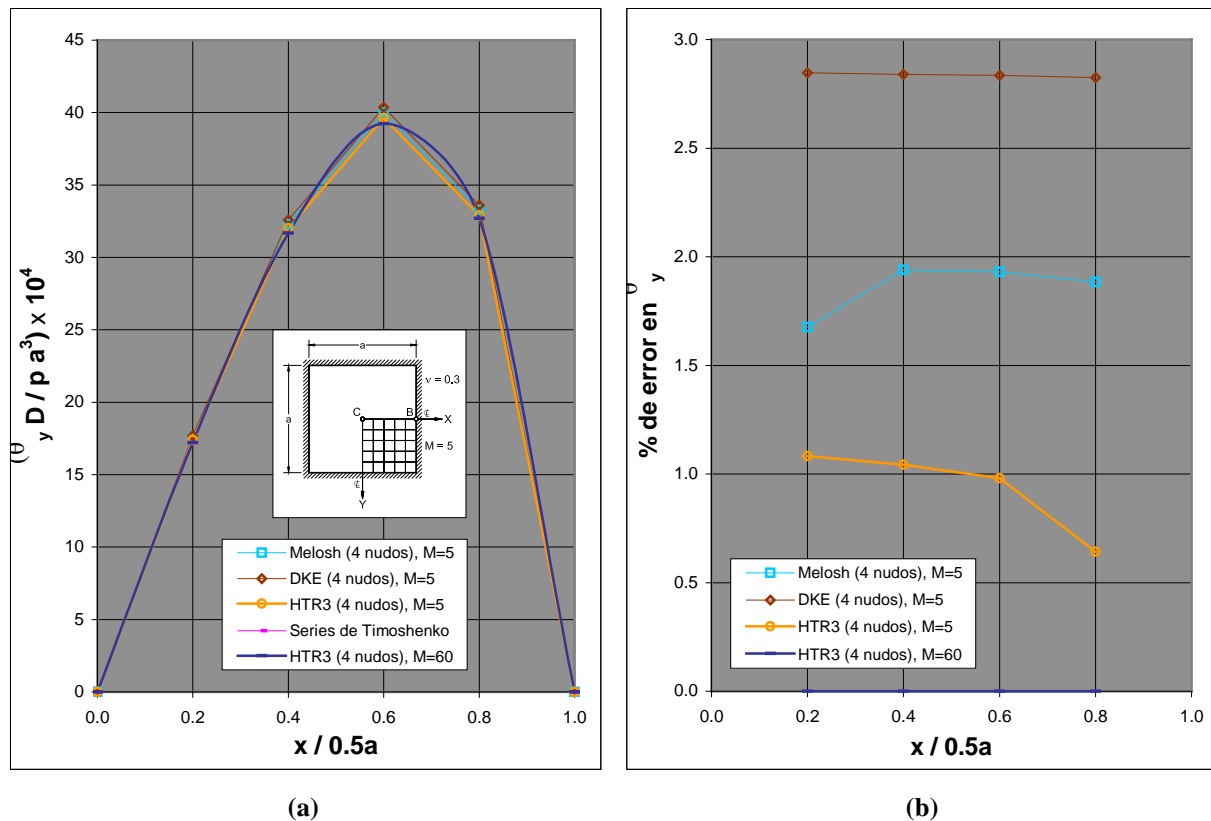


(b)

**Figura 5.21** Losa cuadrada empotrada y cargada uniformemente: a) Deflexiones a lo largo de la línea central b) Porcentajes de error en  $w$  a lo largo de la línea central.

**Tabla 5.15** Giros a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) de una losa cuadrada con distintas condiciones de borde y de carga para algunos tipos de elementos finitos ( $M=5$ ) y valores teóricos,  $\nu = 0.3$

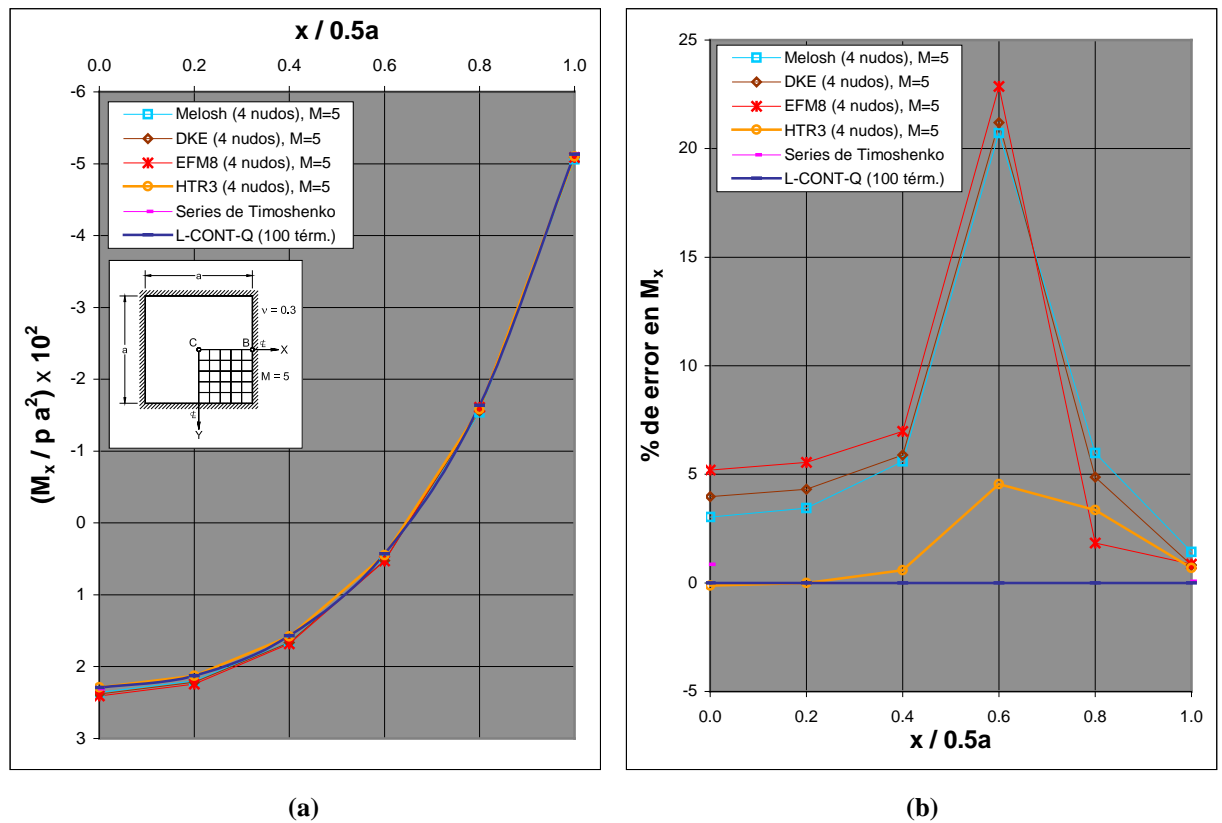
		SOLUCIÓN									
		x/0.5a	Melosh (4 nudos), M=5		DKE (4 nudos), M=5		HTR3 (4 nudos), M=5		Series de Timoshenko		HTR3, M=60
				% de error		% de error		% de error			
SIMPLEMENTE APOYADA EN LOS CUATRO BORDES	CARGA UNIFORME	0.0	0.0000		0.00000		0.00000		0.0000		0.00000
		0.2	0.0369	0.88	0.03669	0.30	0.03686	0.78	0.0409	11.81	0.03658
		0.4	0.0721	0.87	0.07165	0.24	0.07202	0.77	0.0779	8.99	0.07148
		0.6	0.1032	0.85	0.10244	0.11	0.10310	0.75	0.1072	4.76	0.10233
		0.8	0.1265	0.88	0.12522	-0.14	0.12632	0.73	0.1260	0.48	0.12540
		1.0	0.1361	0.95	0.13401	-0.61	0.13580	0.72	0.1325	-1.72	0.13482
		FACTOR	$pa^3/D \times 10^{-2}$		$pa^3/D \times 10^{-1}$		$pa^3/D \times 10^{-1}$		$pa^3/D \times 10^{-1}$		$pa^3/D \times 10^{-1}$
	CARGA CONCENTRADA	0.0	0.0000		0.00000		0.00000		0.0000		0.00000
		0.2	0.1822	4.35	0.18657	6.85	0.17659	1.14	0.1621	-7.16	0.17460
		0.4	0.2457	1.26	0.24656	1.62	0.24651	1.59	0.2428	0.07	0.24264
		0.6	0.2783	0.81	0.27964	1.30	0.27921	1.14	0.2625	-4.91	0.27605
		0.8	0.2934	0.69	0.29478	1.17	0.29423	0.98	0.2931	0.59	0.29138
1.0		0.2977	0.65	0.29913	1.13	0.29855	0.94			0.29578	
	FACTOR	$Pa/D \times 10^{-1}$		$Pa/D \times 10^{-1}$		$Pa/D \times 10^{-1}$		$Pa/D \times 10^{-1}$		$Pa/D \times 10^{-1}$	
EMPOTRADA EN LOS CUATRO BORDES	CARGA UNIFORME	0.0	0.000		0.00000		0.00000		0.0000		0.00000
		0.2	0.175	1.68	0.17702	2.85	0.17398	1.08			0.17212
		0.4	0.323	1.94	0.32585	2.84	0.32016	1.04			0.31685
		0.6	0.400	1.93	0.40354	2.83	0.39627	0.98			0.39242
		0.8	0.333	1.88	0.33607	2.82	0.32894	0.64			0.32684
		1.0	0.000		0.00000		0.00000		0.0000		0.00000
		FACTOR	$pa^3/D \times 10^{-2}$		$pa^3/D \times 10^{-2}$		$pa^3/D \times 10^{-2}$		$pa^3/D \times 10^{-2}$		$pa^3/D \times 10^{-2}$
	CARGA CONCENTRADA	0.0	0.0000		0.00000		0.00000		0.0000		0.00000
		0.2	0.1409	5.89	0.14517	9.10	0.13488	1.37			0.13306
		0.4	0.1611	2.07	0.16179	2.51	0.16131	2.21			0.15783
		0.6	0.1444	1.54	0.14537	2.22	0.14464	1.71			0.14221
		0.8	0.0950	1.51	0.09565	2.20	0.09474	1.23			0.09359
1.0		0.0000		0.00000		0.00000		0.0000		0.00000	
	FACTOR	$Pa/D \times 10^{-1}$		$Pa/D \times 10^{-1}$		$Pa/D \times 10^{-1}$		$Pa/D \times 10^{-1}$		$Pa/D \times 10^{-1}$	



**Figura 5.22** Losa cuadrada empotrada y cargada uniformemente: a) Giros a lo largo de la línea central b) Porcentajes de error en los giros a lo largo de la línea central.

**Tabla 5.16 Momentos flectores  $M_x$  a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) de una losa cuadrada simplemente apoyada o empotrada en sus cuatro bordes pero uniformemente cargada para algunos tipos de elementos finitos ( $M=5$ ) y valores teóricos,  $\nu = 0.3$**

		SOLUCIÓN											
		x/0.5a	Melosh (4 nudos), M=5		DKE (4 nudos), M=5		EFM8 (4 nudos), M=5		HTR3 (4 nudos), M=5		Series de Timoshenko		L-CONT-Q(100)
				% de error		% de error		% de error		% de error		% de error	
SIMPLEMENTE APOYADA	CARGA UNIFORME	0.0	0.485	1.281	0.482031	0.661	0.485392	1.363	0.478857	-0.001	0.479	0.028	0.478864
		0.2	0.472	1.329	0.468983	0.682	0.472287	1.391	0.465936	0.028	0.466	0.041	0.465808
		0.4	0.430	1.499	0.426740	0.730	0.429791	1.450	0.424181	0.126	0.424	0.083	0.423649
		0.6	0.350	1.965	0.345893	0.768	0.348334	1.479	0.344433	0.343	0.343	-0.075	0.343256
		0.8	0.217	3.757	0.210713	0.751	0.212095	1.412	0.211143	0.957	0.209	-0.068	0.209142
		1.0	0.000		-0.000186		0.000000		0.002600		0.000		0.000000
	FACTOR	$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$	
EMPOTRADA	CARGA UNIFORME	0.0	0.236	3.031	0.238156	3.972	0.240955	5.194	0.228764	-0.128	0.231	0.848	0.229057
		0.2	0.220	3.439	0.221844	4.306	0.224484	5.548	0.212677	-0.004			0.212685
		0.4	0.166	5.591	0.166478	5.895	0.168181	6.978	0.158133	0.587			0.157211
		0.6	0.052	20.716	0.052210	21.202	0.052928	22.870	0.045039	4.555			0.043076
		0.8	-0.154	5.984	-0.155829	4.867	-0.160789	1.839	-0.158310	3.353			-0.163802
		1.0	-0.506	1.429	-0.509161	0.813	-0.508915	0.861	-0.509841	0.681	-0.513	0.065	-0.513335
	FACTOR	$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$		$p a^2 \times 10^{-1}$	



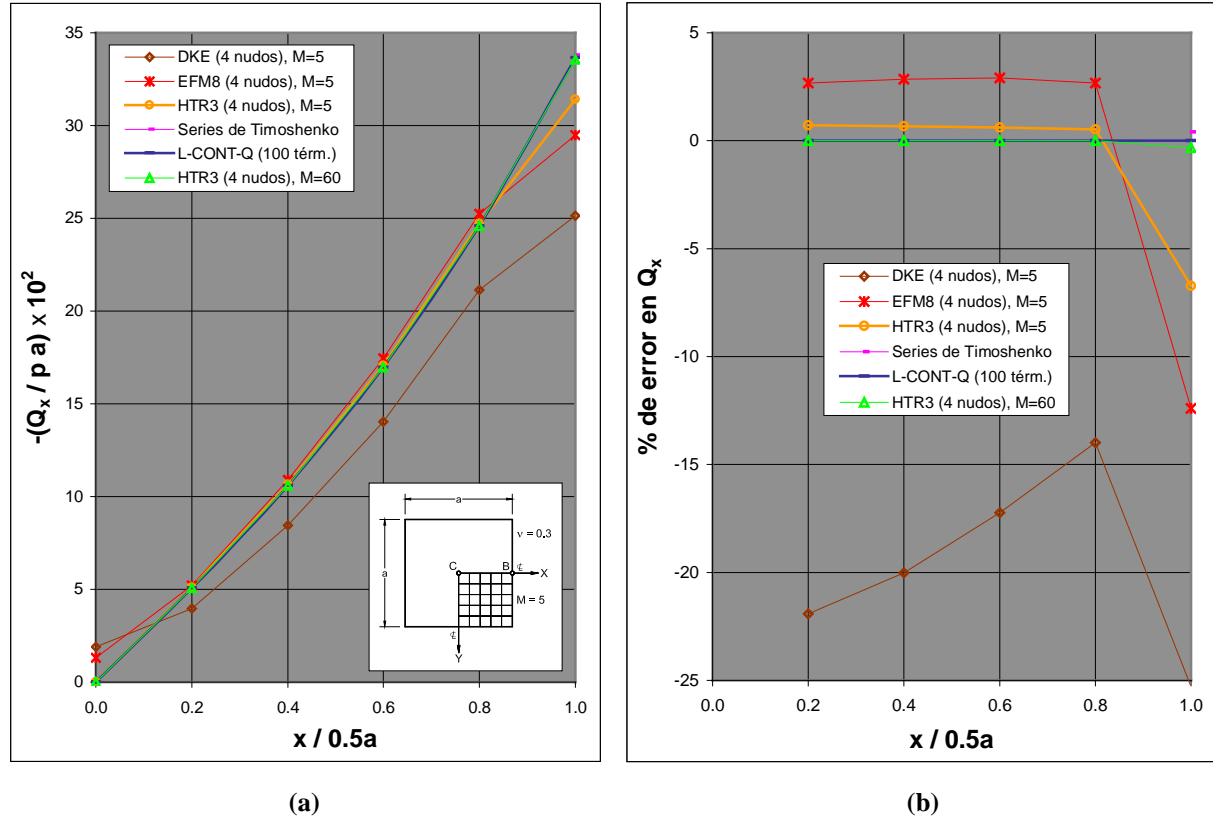
**Figura 5.23 Losa cuadrada empotrada y cargada uniformemente: a) Momentos flectores  $M_x$  a lo largo de la línea central b) Porcentajes de error en  $M_x$  a lo largo de la línea central.**

los elementos finitos de 4 nudos estudiados (malla 535) con la solución obtenida mediante el programa L-CONT-Q [10]. Nuevamente, no se han considerado en este estudio los casos que involucran la carga concentrada en el centro de la losa, ya que, de acuerdo a la teoría, la solución exacta debajo de la carga concentrada resulta en un valor infinito (ver la Sección 5.3.2 para una alternativa de solución).

Como se puede apreciar en dicha Tabla 5.16, los errores en los momentos  $M_x$  para el elemento HTR3 son en casi todos los casos menores que los obtenidos con los otros elementos finitos de 4 nudos comparados, aunque tales errores son a su vez mayores (a excepción del centro) que aquellos de los análogos valores de los desplazamientos incluidos en 5.14; nótese que dichos errores en general se incrementan a medida que el punto de análisis

**Tabla 5.17 Cortes  $Q_x$  a lo largo de la línea central ( $y=0$ ) de una losa cuadrada simplemente apoyada o empotrada en sus cuatro bordes pero uniformemente cargada para algunos tipos de elementos finitos ( $M=5$ ) y valores teóricos,  $\nu = 0.3$**

		SOLUCIÓN											
		$x/0.5a$	DKE (4 nudos), M=5		EFM8 (4 nudos), M=5		HTR3 (4 nudos), M=5		Series de Timoshenko		L-CONT-Q(100t)	HTR3 (4 nudos), M=60	
		$Q_x$	$Q_x$	% de error	$Q_x$	% de error	$Q_x$	% de error	$Q_x$	% de error	$Q_x$	$Q_x$	% de error
SIMPLEMENTE APOYADA	CARGA UNIFORME	0.0	0.01913		0.01311		0.00000				0.00000	0.00000	
		0.2	0.03962	-21.91	0.05209	2.67	0.05109	0.71			0.05073	0.05073	-0.0011
		0.4	0.08464	-20.03	0.10885	2.85	0.10655	0.68			0.10584	0.10583	-0.0010
		0.6	0.14036	-17.24	0.17453	2.91	0.17064	0.61			0.16960	0.16960	-0.0004
		0.8	0.21152	-13.99	0.25250	2.68	0.24720	0.52			0.24592	0.24592	0.0000
		1.0	0.25150	-25.30	0.29491	-12.40	0.31404	-6.72	0.338	0.40	0.33666	0.33558	-0.3188
		FACTOR	-p a		-p a		-p a		-p a	0.40	-p a		-p a
EMPOTRADA	CARGA UNIFORME	0.0	0.02088		0.01647		0.00003				0.00000	0.00000	
		0.2	0.04457	-13.55	0.05446	5.63	0.05232	1.50			0.05155	0.05155	0.0044
		0.4	0.10053	-10.56	0.11811	5.08	0.11417	1.58			0.11239	0.11240	0.0042
		0.6	0.17982	-6.24	0.20455	6.66	0.19324	0.76			0.19178	0.19179	0.0039
		0.8	0.29470	-1.36	0.30843	3.24	0.30705	2.78			0.29875	0.29876	0.0035
		1.0	0.36257	-17.67	0.36087	-18.05	0.40134	-8.86			0.44036	0.43771	-0.6026
		FACTOR	-p a		-p a		-p a		-p a		-p a		-p a



**Figura 5.24 Losa cuadrada simplemente apoyada y cargada uniformemente: a) Cortes  $Q_x$  a lo largo de la línea central b) Porcentajes de error en  $Q_x$  a lo largo de la línea central.**

se aleja del centro, sin embargo son siempre relativamente pequeños y aceptables (menores al 1%) con excepción de aquellos correspondientes a los momentos en las zonas próximas a los puntos de inflexión en donde sin embargo el elemento HTR3 muestra un mejor comportamiento que el de los otros elementos finitos. En las Figuras 5.23 se muestra gráficamente la variación de dichos momentos flectores  $M_x$  y sus correspondientes porcentajes de error a lo largo de la línea central ( $y=0$ ), para el caso específico de la losa cuadrada empotrada en sus bordes y uniformemente cargada.

Los correspondientes valores de cortes  $Q_x$  obtenidos con el elemento HTR3 y tabulados en 5.17 presentan errores algo mayores que los obtenidos para los análogos valores de los momentos  $M_x$  mostrados en 5.16. En general son errores aceptables (alrededor del 1%) y menores de los correspondientes errores obtenidos con los otros elementos de 4 nudos. En las Figuras 5.24 se presentan gráficamente los resultados para cortes y sus correspondientes porcentajes de error a lo largo de la línea central para el caso particular de la losa cuadrada simplemente apoyada en sus cuatro bordes y uniformemente cargada.

### 5.3.2 ANÁLISIS DE LOSAS CUADRADAS BAJO CARGAS CONCENTRADAS DISTRIBUIDAS SOBRE ÁREAS CIRCULARES PEQUEÑAS

El análisis de losas bajo cargas concentradas típicas (es decir aplicadas en un punto, normalmente coincidente con la ubicación de un nudo) presenta ciertas dificultades, algunas de ellas ya mencionadas y mostradas en la Sección anterior 5.3.1, como por ejemplo una menor exactitud de los resultados obtenidos para deflexiones, giros o momentos flectores (especialmente en puntos próximos a dichas cargas concentradas) en comparación a aquellas obtenidas para los correspondientes casos de análisis con cargas uniformemente distribuidas. A pesar de ello, los resultados obtenidos empleando una formulación híbrida de Trefftz con tal tipo de carga son de calidad aceptable y en general mejores que aquellos obtenidos con otras formulaciones de elementos finitos para losas. Asimismo, se tiene el problema del valor infinito de momento en el punto de aplicación de dichas cargas concentradas y, finalmente, aunque no de menor importancia que las anteriores, se tiene también la dependencia del diseño de la malla a la ubicación de tales cargas concentradas, es decir, la necesaria coincidencia de la ubicación de los nudos de la malla con respecto a la ubicación de las cargas

concentradas, conjuntamente con la necesidad en algunos casos de un refinamiento local de la malla en las zonas de tales cargas concentradas. Al emplear una formulación híbrida de Trefftz para losas y para el caso de las cargas concentradas, se tiene la posibilidad de utilizar algunas adecuadas funciones de aproximación  $\overset{\circ}{w}$  como las indicadas en la Sección 4.3.1.2.2, en particular las correspondientes a las ecuaciones (4.12) y (4.13) que representan las soluciones exactas para una losa infinita cuando una carga puntual es *distribuida uniformemente sobre un área circular pequeña*. Al utilizar ese tipo de expresiones, como en el elemento HTR3, permite desarrollar elementos finitos con los que se pueden aproximar bastante bien las condiciones que se dan bajo una carga concentrada típica, resolviendo muchas de las dificultades mencionadas arriba, como se verá a continuación.

### 5.3.2.1 ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS CUANDO EL PUNTO DE APLICACIÓN CORRESPONDE AL DE UN NUDO

El funcionamiento del elemento HTR3 ha sido otra vez estudiado con referencia al problema de la losa cuadrada ( $\nu = 0.3$ ), de lado  $a$  y rigidez flexional  $D$ , con sus cuatro bordes simplemente apoyados o empotrados, pero únicamente bajo la acción de una carga concentrada  $P$  aplicada en el centro de la losa y distribuida sobre un área circular *pequeña o relativamente pequeña* de radio  $r = a/1000, a/100, a/40$  y  $a/10$ .

Nuevamente se ha aprovechado la simetría del problema para reducir el trabajo operativo, empleando para tal efecto mallas regulares sobre un cuarto de losa con  $M=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 32$  y  $64$  elementos por mitad del lado (Figura 5.11). Nótese que en esta sección se supone que la carga  $P$ , a la que podría en realidad denominarse *seudo concentrada*, tiene una posición que coincide en todo momento con la ubicación de un cierto nudo de la malla que se está empleando, a diferencia de lo que sucede más adelante en donde tal carga  $P$  tiene una posición arbitraria con respecto a los nudos.

Los resultados de desplazamientos y esfuerzos en distintas ubicaciones, obtenidos con el elemento HTR3 empleando dicha carga seudo concentrada, son comparados con los correspondientemente obtenidos en la Sección 5.3.1 para el mismo elemento HTR3 empleando una carga concentrada típica o ideal (con el cual se llegaron a obtener buenos resultados). Asimismo, fue considerada como solución teórica *exacta* la obtenida con el

programa L-CONT-Q [10] utilizando 100 términos (caso del desplazamiento central y del momento flector  $M_x$  en la mitad del lado), la obtenida con la solución en series de Timoshenko [27] (caso del momento flector  $M_x$  en el centro de la losa) y la obtenida con el elemento mixto EFM8 [6] con sus 8 nudos y con  $M = 32$  (caso del corte  $Q_x$  en la mitad del lado).

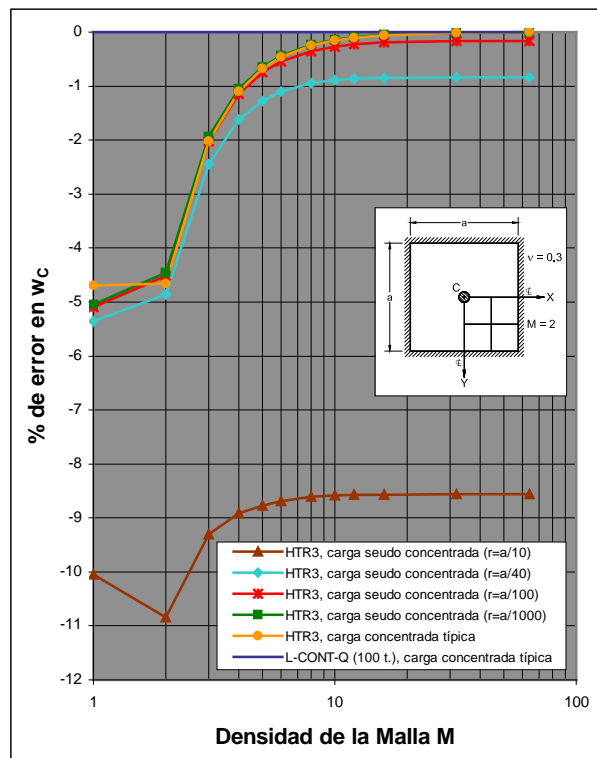
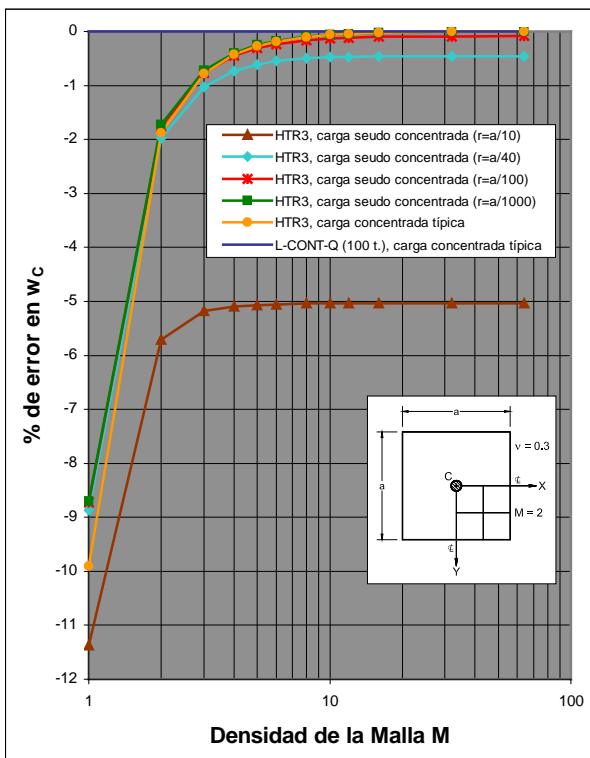
Debe aclararse que lo que se obtiene y se menciona como *porcentajes de error* para los casos de la carga seudo concentrada y para las cantidades analizadas (a excepción del momento flector  $M_x$  en el centro de la losa), son valores obtenidos considerando como solución exacta aquella de un particular análisis con una carga concentrada ideal, por tanto el término *porcentaje de error* quizás no sea el adecuado ya que se trata de situaciones de análisis distintas pero que sin embargo permiten mostrar entre otras cosas que tanto se puede aproximar a las condiciones que se dan bajo una carga concentrada típica (la que es muchas veces usada pero no real) si se emplea la alternativa de la carga seudo concentrada propuesta.

En los valores obtenidos con el elemento HTR3, tabulados en 5.18 y mostrados gráficamente en las Figuras 5.25 y 5.26, correspondientes al desplazamiento central  $w_C$  y sus respectivos porcentajes de error versus la densidad de la malla  $M$  en un cuarto de losa para las dos condiciones de borde analizadas, se observa que los menores errores se producen cuanto más pequeño sea el círculo sobre el cual se considera se distribuye la carga concentrada  $P$ , en este caso con  $r = a/1000$ , llegando incluso en tal situación de considerar un círculo muy pequeño a mejorar a los correspondientes errores obtenidos con el elemento HTR3 pero empleando una carga concentrada típica. No obstante, si el área del tal círculo se hace más grande pero sigue siendo al mismo tiempo pequeña en comparación al área de la losa, con un radio de hasta alrededor de  $r = a/40$ , se obtienen valores para el desplazamiento central de una calidad menor pero suficientemente aceptable (porcentajes de error menores al 1%) empleando mallas no tan finas, especialmente para el caso de la losa simplemente apoyada, en la que por ejemplo con  $M = 3$  y considerando un círculo de radio  $a/40$  se puede obtener una deflexión en el centro de la losa con un error de  $-1.02\%$ , comparable y ligeramente mayor que el  $-0.78\%$  obtenido con el mismo elemento HTR3 empleando una carga concentrada ideal, mientras que para el caso de la losa cuadrada con sus cuatro bordes empotrados y para el mismo círculo de radio  $a/40$  habría que afinar más la malla para obtener errores menores al 1%.



**Tabla 5.18** Deflexiones en el centro de una losa cuadrada, simplemente apoyada o empotrada, sujeta a una carga puntual  $P$  aplicada en el centro pero que es distribuida sobre un área circular pequeña (elemento HTR3).

Densidad de la malla (M)	CARGA CONCENTRADA, DISTRIBUIDA SOBRE UN CÍRCULO PEQUEÑO DE RADIO $r$								CARGA CONCENTRADA TÍPICA		L-CONT-Q(100t)	
	HTR3, $r=a/10$		HTR3, $r=a/40$		HTR3, $r=a/100$		HTR3, $r=a/1000$		HTR3			
	$\beta$	% de error	$\beta$	% de error	$\beta$	% de error	$\beta$	% de error	$\beta$	% de error		
1	0.102815	-11.371	0.105723	-8.864	0.105880	-8.729	0.105910	-8.704	0.104519	-9.902	0.116007	
2	0.109384	-5.709	0.113712	-1.978	0.113957	-1.767	0.114003	-1.728	0.113826	-1.880		
3	0.110000	-5.178	0.114820	-1.023	0.115112	-0.772	0.115166	-0.724	0.115108	-0.775		
4	0.110099	-5.092	0.115159	-0.731	0.115484	-0.451	0.115544	-0.399	0.115515	-0.424		
5	0.110124	-5.071	0.115300	-0.609	0.115649	-0.309	0.115714	-0.252	0.115697	-0.267		
6	0.110140	-5.057	0.115370	-0.549	0.115736	-0.233	0.115805	-0.174	0.115794	-0.184		
8	0.110161	-5.039	0.115431	-0.496	0.115819	-0.162	0.115894	-0.097	0.115888	-0.102		
10	0.110166	-5.035	0.115453	-0.477	0.115856	-0.130	0.115935	-0.062	0.115932	-0.065		
12	0.110168	-5.034	0.115462	-0.470	0.115874	-0.114	0.115957	-0.043	0.115955	-0.044		
16	0.110169	-5.033	0.115467	-0.465	0.115891	-0.100	0.115979	-0.024	0.115979	-0.024		
32	0.110169	-5.032	0.115471	-0.462	0.115903	-0.089	0.116000	-0.006	0.116001	-0.005		
64	0.110169	-5.032	0.115471	-0.462	0.115904	-0.089	0.116005	-0.001	0.116006	0.000		
FACTOR	$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$		$P a^2 / D \times 10^{-1}$			$P a^2 / D \times 10^{-1}$
1	0.504820	-10.043	0.531122	-5.356	0.532587	-5.095	0.532863	-5.046	0.534847	-4.693		0.561181
2	0.500354	-10.839	0.533900	-4.861	0.535825	-4.518	0.536187	-4.454	0.535042	-4.658		
3	0.508981	-9.302	0.547480	-2.442	0.549861	-2.017	0.550308	-1.937	0.549830	-2.023		
4	0.511181	-8.910	0.552063	-1.625	0.554774	-1.142	0.555280	-1.052	0.555021	-1.098		
5	0.511979	-8.768	0.554044	-1.272	0.556990	-0.747	0.557540	-0.649	0.557381	-0.677		
6	0.512417	-8.690	0.555023	-1.097	0.558139	-0.542	0.558727	-0.437	0.558619	-0.456		
8	0.512863	-8.610	0.555873	-0.946	0.559215	-0.350	0.559861	-0.235	0.559805	-0.245		
10	0.513007	-8.584	0.556190	-0.889	0.559672	-0.269	0.560365	-0.146	0.560332	-0.151		
12	0.513065	-8.574	0.556323	-0.866	0.559902	-0.228	0.560629	-0.098	0.560609	-0.102		
16	0.513109	-8.566	0.556410	-0.850	0.560106	-0.192	0.560885	-0.053	0.560877	-0.054		
32	0.513136	-8.561	0.556465	-0.840	0.560249	-0.166	0.561118	-0.011	0.561124	-0.010		
64	0.513140	-8.561	0.556473	-0.839	0.560260	-0.164	0.561174	-0.001	0.561184	0.001		
FACTOR	$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$		$P a^2 / D \times 10^{-2}$	



**Figura 5.25** Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga pseudo concentrada en el centro: porcentaje de error en el desplazamiento central.

**Figura 5.26** Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga pseudo concentrada en el centro: porcentaje de error en el desplazamiento central.

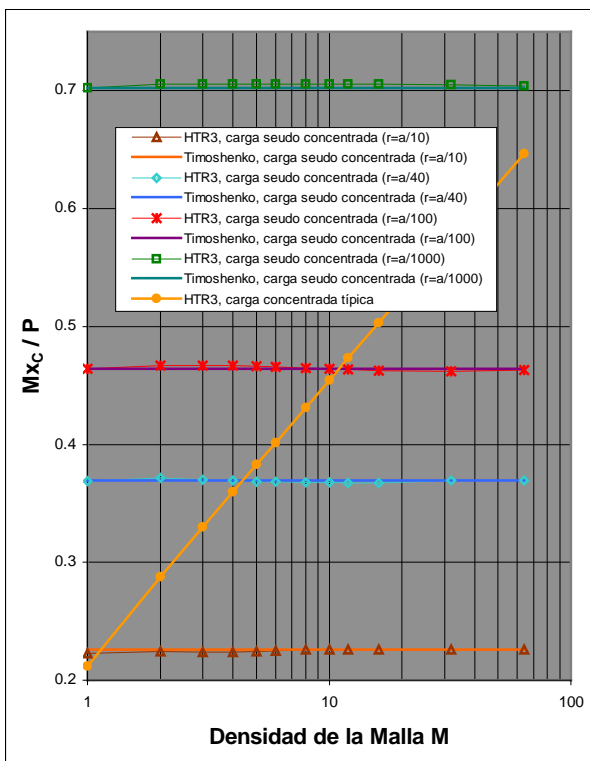
En la Tabla 5.19 y en las Figuras 5.27 se muestran los momentos flectores  $M_x$  para el centro de la losa y sus respectivos porcentajes de error, notándose en primer término que los valores obtenidos con el elemento HTR3 considerando la carga puntual pero distribuida sobre un área circular pequeña solucionan en forma práctica y más real el problema teórico del valor infinito de momento debajo de una carga concentrada ideal, que se manifiesta en un típico programa de elementos finitos como valores que no convergen a medida que se afina la malla, como puede observarse en las últimas dos columnas de la Tabla 5.19 y en la Figura 5.27a. En segundo lugar puede apreciarse que si bien tales valores de momentos obtenidos empleando una carga seudo concentrada no presentan una convergencia monótonica, si constituyen resultados de una calidad aceptable para cualquier área circular pequeña considerada y para prácticamente cualquier densidad de malla, pues sus respectivos porcentajes de error son en la mayor parte de los casos menores al 1%, inclusive para mallas muy groseras con  $M=2$  o 3 y para cualquiera de las condiciones de borde analizadas.

Del mismo modo, puede apreciarse en las Figuras 5.28 y 5.29 creadas con la ayuda del programa FLt-PLOT, la buena aproximación en cuanto a la forma del diagrama de líneas de contorno del momento flector  $M_x$  obtenida con la carga seudo concentrada (con  $r = a/100$ ) respecto a la concentrada típica. Lo cual demuestra que el elemento HTR3 trabajando con dicha carga seudo concentrada puede aproximar bastante bien las condiciones que se dan con una carga concentrada ideal, especialmente en el vecindario de dicha carga, en donde se advierte una concentración de esfuerzos propia de la naturaleza de la carga. Sin embargo, la solución para el momento  $M_x$  en tal vecindario y particularmente debajo de la carga seudo concentrada representa como se vio líneas arriba un valor más real y práctico para el trabajo de oficina respecto al incierto y no muy práctico obtenido con una carga concentrada ideal.

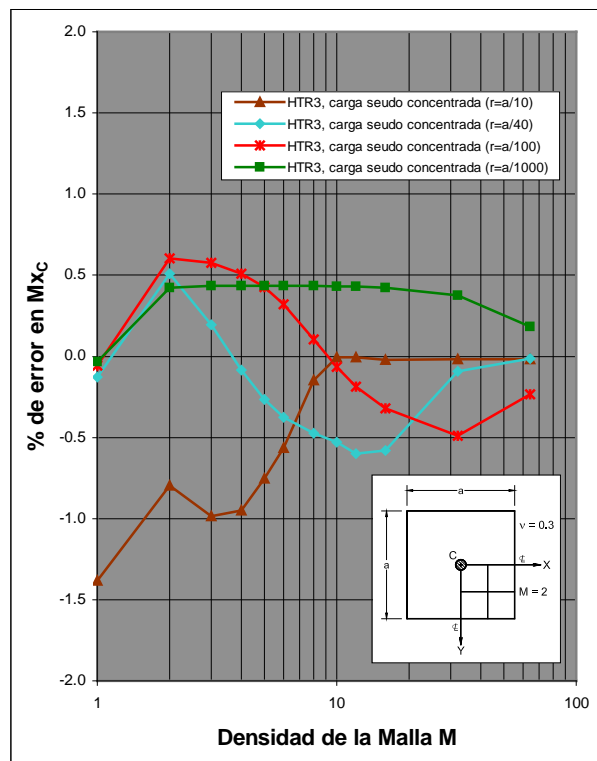
Por otra parte, los momentos flectores  $M_x$  en la mitad del lado de la losa (punto B de la Figura 5.11) y sus correspondientes errores son presentados en la Tabla 5.20 y en las Figuras 5.30 y 5.31, notándose en el caso de la losa simplemente apoyada una convergencia monótonica similar para todos los casos de la carga seudo concentrada analizada, la cual a su vez es también similar (por lo menos a partir de  $M=3$ ) y ligeramente mejor (a partir de  $M=4$ ) a aquella de la carga concentrada típica obtenida con el mismo elemento HTR3 y que a simple vista, dada la velocidad de convergencia mostrada, puede ser considerada como suficientemente buena. Para el caso de la losa empotrada en sus cuatro bordes puede observarse en cambio que la convergencia obtenida con la carga seudo concentrada para

**Tabla 5.19** Momentos flectores  $M_x$  en el centro de una losa cuadrada, simplemente apoyada o empotrada, sujeta a una carga puntual  $P$  aplicada en el centro pero que es distribuida sobre un área circular pequeña (elemento HTR3).

Densidad de la malla (M)	CARGA CONCENTRADA, DISTRIBUIDA SOBRE UN CÍRCULO PEQUEÑO DE RADIO $r$								C. CONCENTRADA T.		
	HTR3, $r=a/10$		HTR3, $r=a/40$		HTR3, $r=a/100$		HTR3, $r=a/1000$		HTR3		
	P	% de error	P	% de error	P	% de error	P	% de error	P	% de error	
SIMPLEMENTE APOYADA EN LOS CUATRO BORDES	1	0.2230	-1.38	0.3690	-0.13	0.4640	-0.06	0.7023	-0.03	0.2120	-67.21
	2	0.2243	-0.80	0.3714	0.51	0.4671	0.60	0.7055	0.42	0.2878	-55.49
	3	0.2239	-0.98	0.3702	0.19	0.4670	0.57	0.7056	0.44	0.3299	-48.97
	4	0.2240	-0.95	0.3692	-0.08	0.4667	0.51	0.7056	0.44	0.3597	-44.37
	5	0.2244	-0.75	0.3685	-0.27	0.4663	0.43	0.7056	0.44	0.3827	-40.80
	6	0.2248	-0.56	0.3681	-0.37	0.4658	0.32	0.7056	0.44	0.4016	-37.88
	8	0.2258	-0.15	0.3678	-0.47	0.4648	0.11	0.7056	0.43	0.4314	-33.28
	10	0.2261	-0.01	0.3676	-0.53	0.4640	-0.07	0.7055	0.43	0.4545	-29.70
	12	0.2261	-0.01	0.3673	-0.60	0.4634	-0.19	0.7055	0.43	0.4733	-26.79
	16	0.2261	-0.02	0.3674	-0.58	0.4628	-0.32	0.7055	0.42	0.5031	-22.18
	32	0.2261	-0.02	0.3692	-0.09	0.4620	-0.49	0.7051	0.37	0.5748	-11.09
	64	0.2261	-0.02	0.3695	-0.01	0.4632	-0.23	0.7038	0.18	0.6465	---
	Timoshenko	0.2261		0.3695		0.4643		0.7025		Sol. singular	
FACTOR	P		P		P		P		P		
EMPOTRADA EN LOS CUATRO BORDES	1	0.1908	10.62	0.3367	6.58	0.4317	5.11	0.6699	3.24	0.1806	-69.53
	2	0.1697	-1.61	0.3159	0.00	0.4116	0.21	0.6500	0.16	0.2323	-60.81
	3	0.1709	-0.95	0.3163	0.14	0.4130	0.57	0.6516	0.42	0.2759	-53.45
	4	0.1710	-0.88	0.3154	-0.17	0.4128	0.51	0.6517	0.43	0.3058	-48.42
	5	0.1715	-0.57	0.3148	-0.36	0.4125	0.43	0.6518	0.44	0.3289	-44.51
	6	0.1720	-0.30	0.3144	-0.47	0.4120	0.32	0.6518	0.44	0.3478	-41.32
	8	0.1730	0.26	0.3141	-0.58	0.4111	0.09	0.6518	0.45	0.3776	-36.29
	10	0.1733	0.45	0.3139	-0.64	0.4103	-0.11	0.6518	0.45	0.4007	-32.40
	12	0.1733	0.46	0.3136	-0.73	0.4097	-0.24	0.6518	0.44	0.4196	-29.22
	16	0.1733	0.44	0.3137	-0.70	0.4091	-0.39	0.6518	0.44	0.4493	-24.19
	32	0.1733	0.44	0.3155	-0.13	0.4083	-0.58	0.6514	0.39	0.5211	-12.10
	64	0.1733	0.44	0.3158	-0.04	0.4095	-0.29	0.6501	0.18	0.5928	---
	Timoshenko	0.1725		0.3159		0.4107		0.6489		Sol. singular	
FACTOR	P		P		P		P		P		

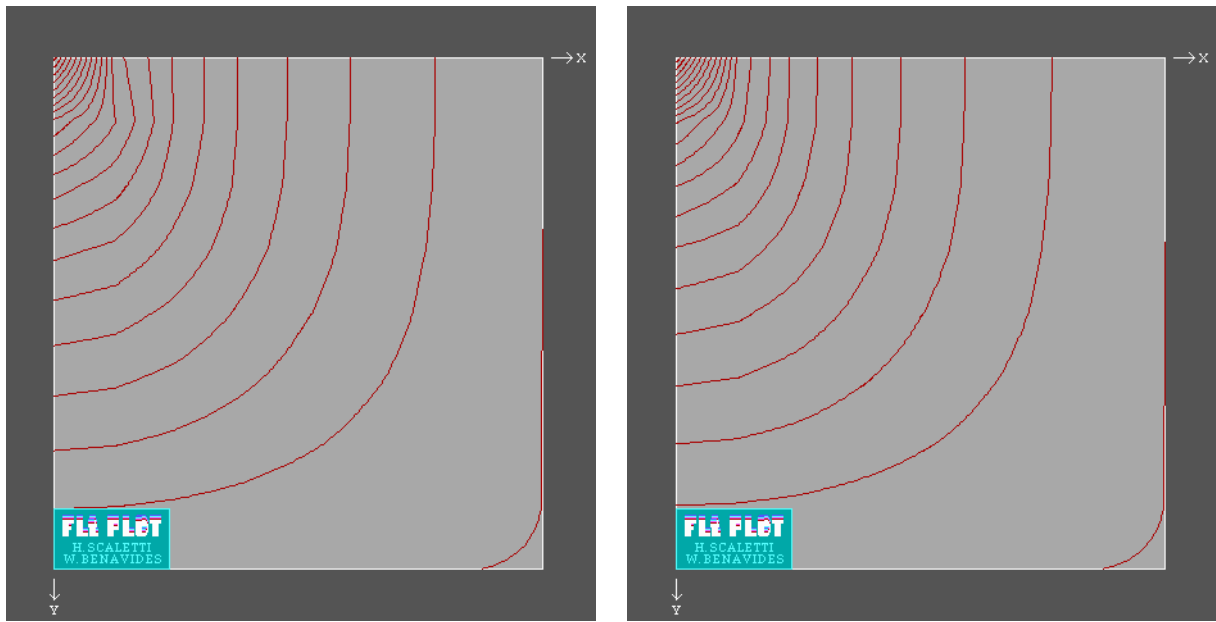


(a)



(b)

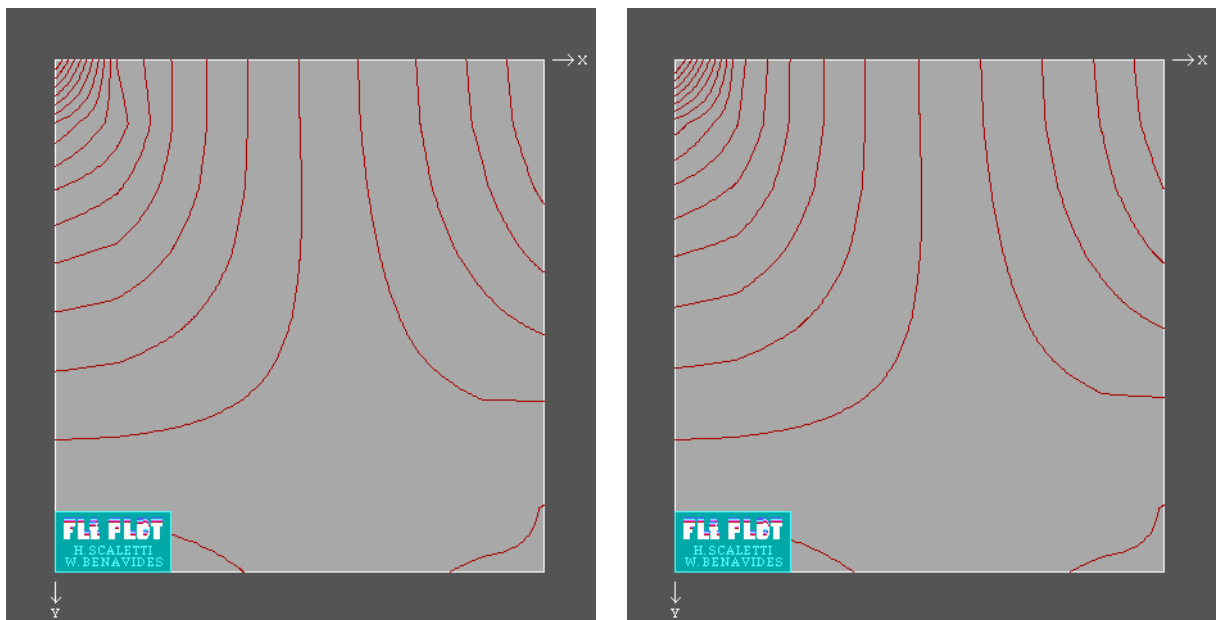
**Figura 5.27** Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga pseudo concentrada aplicada en el centro: a) Momento flector  $M_x$  en el centro de la losa. b) Porcentaje de error del momento flector.



(a)

(b)

**Figura 5.28** Líneas de contorno del momento flector  $M_x$  para el cuarto de losa analizada (Figura 5.11), simplemente apoyada y: a) Con carga concentrada  $P$  ideal. b) Con carga concentrada  $P$  uniformemente distribuida sobre un área circular pequeña de radio  $r = a/100$ ; en ambos casos aplicadas en el centro de la losa, empleando una malla regular de 838 elementos HTR3.



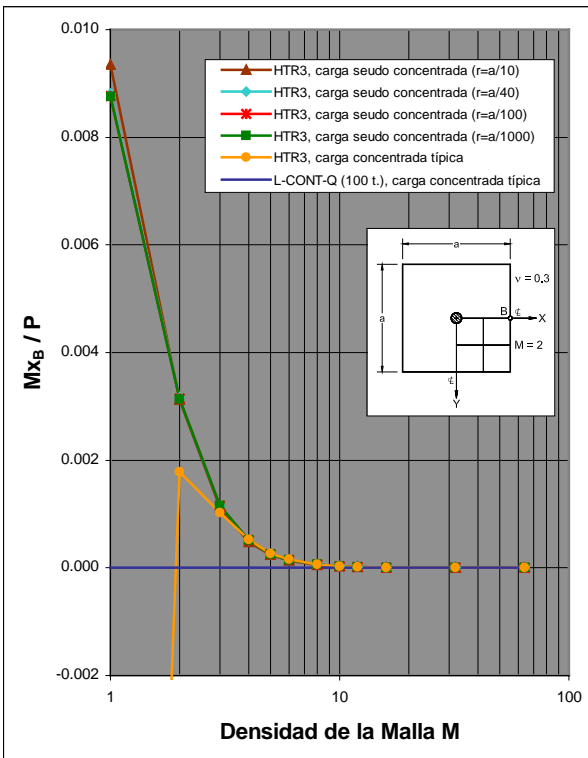
(a)

(b)

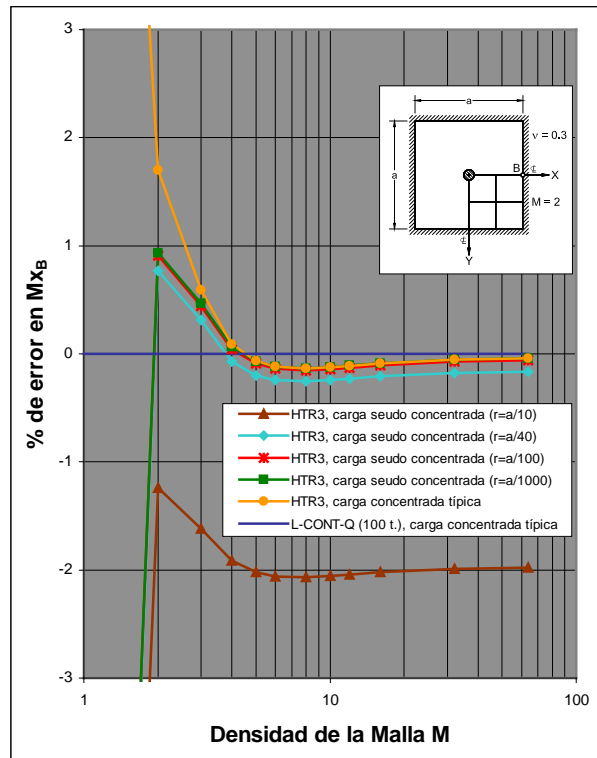
**Figura 5.29** Líneas de contorno del momento flector  $M_x$  para el cuarto de losa analizada (Figura 5.11), empotrada y: a) Con carga concentrada  $P$  ideal. b) Con carga concentrada  $P$  uniformemente distribuida sobre un área circular pequeña de radio  $r = a/100$ ; en ambos casos aplicadas en el centro de la losa, empleando una malla regular de 838 elementos HTR3.

**Tabla 5.20 Momentos flectores  $M_x$  en la mitad del lado de una losa cuadrada, con apoyo simple o empotrada, sujeta a una carga puntual  $P$  aplicada en el centro pero que es distribuida sobre un área circular pequeña (elemento HTR3).**

Densidad de la malla (M)	CARGA CONCENTRADA, DISTRIBUIDA SOBRE UN CÍRCULO PEQUEÑO DE RADIO $r$								CARGA CONCENTRADA TÍPICA		
	HTR3, $r=a/10$		HTR3, $r=a/40$		HTR3, $r=a/100$		HTR3, $r=a/1000$		HTR3		
	P	% de error	P	% de error	P	% de error	P	% de error	P	% de error	
SIMPLEMENTE APOYADA EN LOS CUATRO BORDES	1	0.0093527		0.0088093		0.0087621		0.0087532		-0.0311780	
	2	0.0031178		0.0031643		0.0031419		0.0031376		0.0017775	
	3	0.0011223		0.0011541		0.0011543		0.0011543		0.0010196	
	4	0.0004810		0.0005136		0.0005168		0.0005175		0.0005260	
	5	0.0002401		0.0002521		0.0002532		0.0002535		0.0002670	
	6	0.0001372		0.0001443		0.0001449		0.0001450		0.0001548	
	8	0.0000573		0.0000603		0.0000605		0.0000605		0.0000651	
	10	0.0000292		0.0000308		0.0000309		0.0000309		0.0000333	
	12	0.0000169		0.0000178		0.0000178		0.0000179		0.0000193	
	16	0.0000071		0.0000075		0.0000075		0.0000075		0.0000081	
	32	0.0000009		0.0000009		0.0000009		0.0000009		0.0000010	
	64	0.0000001		0.0000001		0.0000001		0.0000001		0.0000001	
	FACTOR	P		P		P		P		P	
	EMPOTRADA EN LOS CUATRO BORDES	1	0.10439	-17.03	0.10553	-16.12	0.10560	-16.07	0.10562	-16.06	0.14209
2		0.12426	-1.24	0.12678	0.77	0.12696	0.91	0.12699	0.94	0.12796	1.70
3		0.12379	-1.62	0.12621	0.31	0.12637	0.44	0.12640	0.47	0.12656	0.59
4		0.12341	-1.92	0.12573	-0.07	0.12587	0.04	0.12590	0.06	0.12593	0.09
5		0.12327	-2.02	0.12557	-0.20	0.12571	-0.09	0.12573	-0.07	0.12574	-0.06
6		0.12323	-2.06	0.12551	-0.24	0.12564	-0.14	0.12567	-0.12	0.12567	-0.12
8		0.12321	-2.07	0.12550	-0.26	0.12562	-0.15	0.12565	-0.13	0.12565	-0.13
10		0.12323	-2.06	0.12551	-0.24	0.12564	-0.14	0.12566	-0.12	0.12566	-0.12
12		0.12325	-2.04	0.12553	-0.23	0.12566	-0.13	0.12568	-0.11	0.12568	-0.11
16		0.12327	-2.02	0.12556	-0.21	0.12568	-0.11	0.12571	-0.09	0.12571	-0.09
32		0.12332	-1.99	0.12560	-0.17	0.12573	-0.07	0.12575	-0.05	0.12575	-0.05
64		0.12333	-1.98	0.12561	-0.16	0.12574	-0.06	0.12576	-0.04	0.12576	-0.04
FACTOR		-P		-P		-P		-P		-P	



**Figura 5.30 Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: momento flector  $M_x$  en la mitad del lado.**



**Figura 5.31 Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: porcentaje de error del momento flector  $M_x$  en la mitad del lado.**

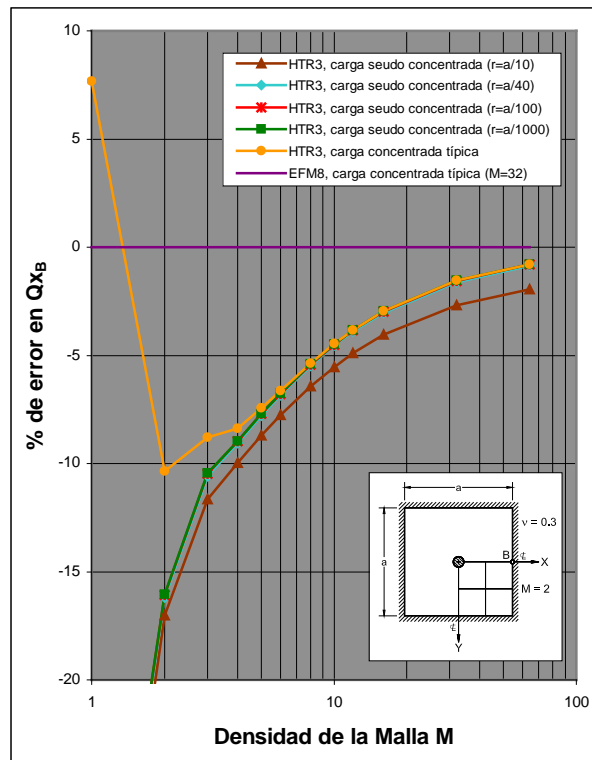
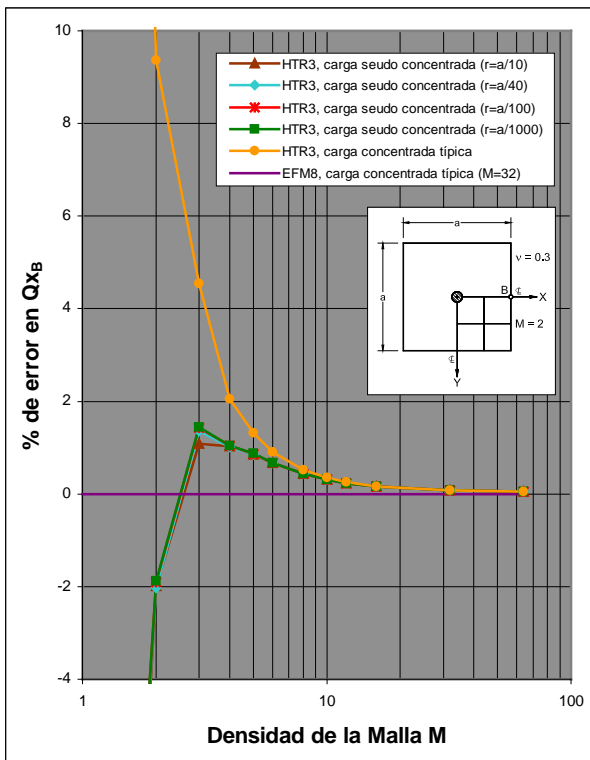
distintas pequeñas áreas circulares no es totalmente monotónica (Figura 5.31), sin embargo la calidad de los resultados es comparable (pero no tanto para el caso  $r = a/10$ , donde no obstante los errores son solo del orden del 2%) a la obtenida empleando la carga concentrada típica. Como se vio en la Sección 5.3.1.1 ésta es bastante buena, ya que incluso supera a aquella obtenida con el elemento isoparamétrico mixto de ocho nudos (ver Figura 5.19). Nótese que los menores errores en general se producen cuanto más pequeño sea el círculo sobre el cual se distribuye la carga.

Finalmente, de los valores tabulados en 5.21 y expresados gráficamente en las Figuras 5.32 y 5.33 relacionados con la fuerza cortante  $Q_x$  en la mitad del lado de la losa y sus respectivos porcentajes de error, se distingue para el caso del borde simplemente apoyado que los correspondientes valores de corte obtenidos con la carga seudo concentrada para cualquiera de los casos analizados tienen una calidad de un orden de magnitud similar y a la vez aceptable, incluso para mallas groseras. Además es mejor (en especial con mallas no tan finas) a la obtenida con la carga concentrada ideal, la cual de por sí es en general buena (Figura 5.32). Por ejemplo, con  $M = 4$  ya se tienen para los cuatro casos de la carga seudo concentrada porcentajes de error del orden de 1% frente al prácticamente 2% obtenido con la carga concentrada ideal. En el caso de la losa empotrada tal calidad es también similar para todos los casos estudiados con la carga seudo concentrada, con una mínima mejoría a medida que el círculo sobre el cual se distribuye la carga concentrada se hace más pequeño. Sin embargo, dicha calidad al igual de aquella obtenida con la carga concentrada típica no es muy buena (Figura 5.33).

Con todo lo anterior se puede concluir que empleando el elemento HTR3 con la alternativa de la carga seudo concentrada aplicada en un nudo se obtienen en general resultados aceptables (porcentajes de error del orden de 1% empleando mallas relativamente simples) para prácticamente todos los casos de la carga seudo concentrada analizada. La excepción lo constituye el círculo *no tan pequeño* de radio  $r = a/10$  en algunos de los casos analizados, cuyos resultados se mejoran notablemente al emplear círculos más pequeños, especialmente a partir de un radio del orden de  $r = a/40$ . Además, en la mayoría de los casos estudiados y normalmente cuanto más pequeño sea el área circular sobre el cual se distribuye la carga concentrada se obtienen mejoras con respecto a los valores obtenidos utilizando el mismo elemento HTR3 pero considerando una carga concentrada en un punto, los cuales a su vez constituyen valores también aceptables (ver Sección 5.3.1.1).

**Tabla 5.21 Fuerzas cortantes  $Q_x$  en la mitad del lado de una losa cuadrada, con apoyo simple o empotrada, sujeta a una carga puntual  $P$  aplicada en el centro pero que es distribuida sobre un área circular pequeña (elemento HTR3).**

Densidad de la malla (M)	CARGA CONCENTRADA, DISTRIBUIDA SOBRE UN CÍRCULO PEQUEÑO DE RADIO $r$								CARGA CONCENTRADA TÍPICA		EFM8, (M=32)		
	HTR3, $r=a/10$		HTR3, $r=a/40$		HTR3, $r=a/100$		HTR3, $r=a/1000$		HTR3				
	P	% de error	P	% de error	P	% de error	P	% de error	P	% de error			
SIMPLEMENTE APOYADA EN LOS CUATRO BORDES	1	0.2914	-30.13	0.3050	-26.87	0.3061	-26.61	0.3063	-26.56	0.6785	62.68	0.4171	
	2	0.4088	-1.99	0.4087	-2.02	0.4092	-1.90	0.4093	-1.88	0.4562	9.37		
	3	0.4216	1.08	0.4228	1.36	0.4231	1.43	0.4231	1.44	0.4360	4.54		
	4	0.4214	1.04	0.4214	1.02	0.4214	1.04	0.4215	1.04	0.4257	2.06		
	5	0.4206	0.85	0.4207	0.86	0.4207	0.87	0.4207	0.87	0.4226	1.32		
	6	0.4199	0.67	0.4199	0.67	0.4199	0.67	0.4199	0.67	0.4209	0.90		
	8	0.4189	0.43	0.4189	0.43	0.4189	0.44	0.4189	0.44	0.4193	0.52		
	10	0.4184	0.31	0.4184	0.31	0.4184	0.31	0.4184	0.31	0.4186	0.35		
	12	0.4181	0.24	0.4181	0.24	0.4181	0.24	0.4181	0.24	0.4182	0.26		
	16	0.4178	0.16	0.4178	0.16	0.4178	0.16	0.4178	0.16	0.4178	0.17		
	32	0.4174	0.08	0.4174	0.08	0.4174	0.08	0.4174	0.08	0.4174	0.08		
	64	0.4173	0.06	0.4173	0.06	0.4173	0.06	0.4173	0.06	0.4173	0.06		
	FACTOR	-P/a		-P/a		-P/a		-P/a		-P/a			-P/a
	EMPOTRADA EN LOS CUATRO BORDES	1	0.4721	-40.54	0.4866	-38.70	0.4877	-38.56	0.4879	-38.54	0.8547		7.66
2		0.6587	-17.03	0.6653	-16.19	0.6663	-16.07	0.6665	-16.05	0.7116	-10.36		
3		0.7013	-11.66	0.7099	-10.58	0.7108	-10.46	0.7110	-10.44	0.7242	-8.78		
4		0.7147	-9.96	0.7219	-9.06	0.7226	-8.98	0.7227	-8.96	0.7273	-8.38		
5		0.7248	-8.70	0.7321	-7.78	0.7326	-7.71	0.7328	-7.70	0.7348	-7.44		
6		0.7322	-7.76	0.7396	-6.83	0.7401	-6.77	0.7402	-6.76	0.7413	-6.63		
8		0.7428	-6.43	0.7504	-5.47	0.7509	-5.42	0.7510	-5.40	0.7513	-5.36		
10		0.7499	-5.54	0.7577	-4.56	0.7581	-4.50	0.7582	-4.49	0.7584	-4.47		
12		0.7550	-4.90	0.7629	-3.90	0.7633	-3.85	0.7634	-3.83	0.7635	-3.82		
16		0.7617	-4.05	0.7698	-3.03	0.7702	-2.97	0.7703	-2.96	0.7704	-2.96		
32		0.7726	-2.68	0.7810	-1.62	0.7815	-1.56	0.7816	-1.55	0.7816	-1.55		
64		0.7784	-1.94	0.7870	-0.86	0.7875	-0.80	0.7876	-0.79	0.7876	-0.79		
FACTOR		-P/a		-P/a		-P/a		-P/a		-P/a		-P/a	



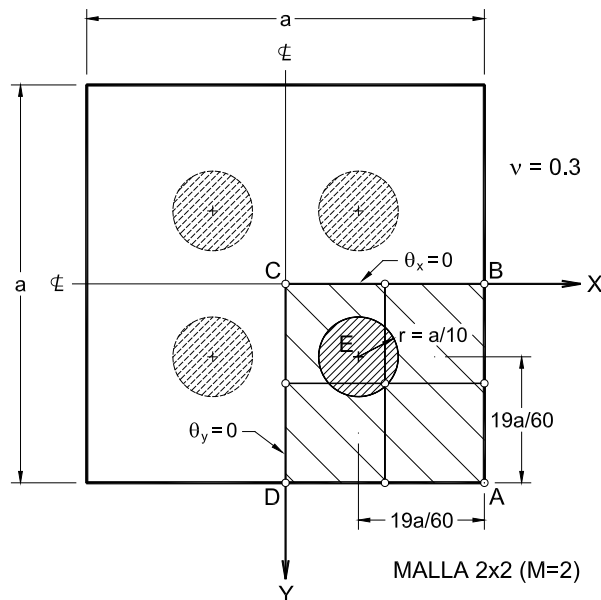
**Figura 5.32 Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: porcentaje de error del corte  $Q_x$  en la mitad del lado.**

**Figura 5.33 Losa cuadrada empotrada sujeta a una carga seudo concentrada en el centro: porcentaje de error del corte  $Q_x$  en la mitad del lado.**

Asimismo se destaca la particularidad de dicha solución ingenieril empleando el elemento HTR3, para resolver en una forma más real y eficiente el problema teórico y tradicional del valor infinito de momento debajo de una carga concentrada ideal, el cual se traduce en un típico programa de elementos finitos como valores con los que no se avizora nunca la convergencia.

### 5.3.2.2 ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS CUANDO EL PUNTO DE APLICACIÓN NO CORRESPONDE AL DE UN NUDO

En este caso, el desempeño del elemento HTR3 es estudiado considerando nuevamente el problema de la losa cuadrada ( $\nu=0.3$ ), de lado  $a$  y rigidez flexional  $D$ , con las condiciones de apoyo simple o de empotramiento perfecto en todos sus bordes, pero a diferencia de la sección anterior, sometida a 4 cargas seudo concentradas  $P$  simétricas y ubicadas arbitrariamente con respecto a los nudos de la malla (ver Figura 5.34).



**Figura 5.34** Cuarto de una losa cuadrada (área sombreada ABCD) con borde exterior simplemente apoyado o empotrado sometido a una carga concentrada excéntrica  $P$  de ubicación arbitraria con respecto a los nudos de la malla (punto E) pero uniformemente distribuida sobre una región circular pequeña de radio  $r$ .



Debido a la simetría del problema, sólo un cuarto de la losa es modelada, utilizando las mismas 12 mallas regulares empleadas en la Sección 5.3.2.1, las que en esta oportunidad no contienen en ningún momento algún nudo cuya ubicación *coincida* con aquella de la carga seudo concentrada  $P$ .

Los resultados (desplazamientos y esfuerzos en varias ubicaciones) obtenidos con el elemento HTR3 empleando tal carga seudo concentrada (con  $r = a/1000, a/100, a/40$  y  $a/10$ ) de ubicación arbitraria  $(X, Y) = (11a/60, 11a/60)$ , son comparados con los correspondientemente obtenidos empleando una carga concentrada típica (para ello, la malla debió ser tal que contuviera un nudo cuya posición coincida con la de la carga concentrada), ya sea utilizando el mismo elemento HTR3 con una malla relativamente fina de 60360 elementos, utilizando el programa L-CONT-Q [10] con 100 términos en su solución por series de Fourier (caso del desplazamiento y del momento flector  $M_x$  en el centro de la losa así como del momento torsor  $M_{xy}$  en la esquina de la losa) y utilizando el elemento mixto EFM8 [6] con 8 nudos y con  $M=30$  (caso del corte  $Q_x$  en la mitad del lado). Los resultados de estas dos últimas alternativas de análisis fueron considerados (para los respectivos casos mencionados) como las soluciones teóricamente exactas. Por tanto, los *porcentajes de error* indicados para la carga seudo concentrada nuevamente toman como solución *exacta* aquella de un particular análisis con una carga concentrada en un punto (pues la idea es la de ver cuanto se puede aproximar a los resultados obtenidos con dicho tipo de carga, que no representa una situación real pero es muy usada). Ello explica por ejemplo como para algunos valores de  $r$  *no tan pequeños*, como  $a/10$ , y solo para algunos de los casos estudiados los errores son algo mayores y a la vez convergen a ciertos valores visiblemente un poco distintos (pero tan solo del orden del 2% o 2.5%) del teóricamente valor nulo obtenido con la carga concentrada ideal.

Como se puede notar en las Figuras 5.35 y 5.36, las cuales tratan con el porcentaje de error en el desplazamiento central  $w_C$  versus el número de elementos por mitad del lado de la losa, para las dos condiciones de borde analizadas, los menores errores obtenidos con el elemento HTR3 empleando la carga seudo concentrada  $P$  excéntrica se producen nuevamente, como en los respectivos casos de la carga seudo concentrada central, cuanto más pequeño sea el círculo sobre el cual se distribuye la carga  $P$ ; sin embargo, tales errores son esta vez bastante menores, pues, por ejemplo, con  $M=2, r \leq a/40$  y para el caso de la losa simplemente apoyada ya se tienen errores menores al 0.6% en comparación al prácticamente 2% obtenido al considerar una carga seudo concentrada central (Figura 5.25). Una mejora algo mayor se

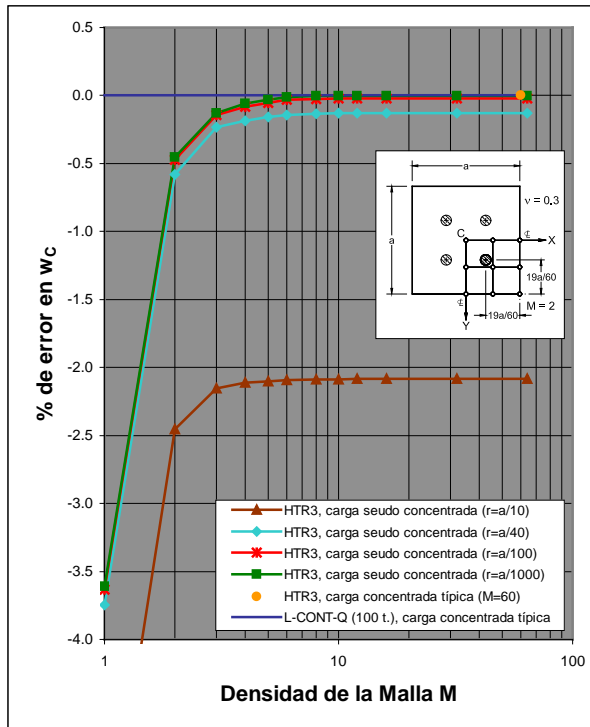


Figura 5.35 Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas  $P$  ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error en el desplazamiento central.

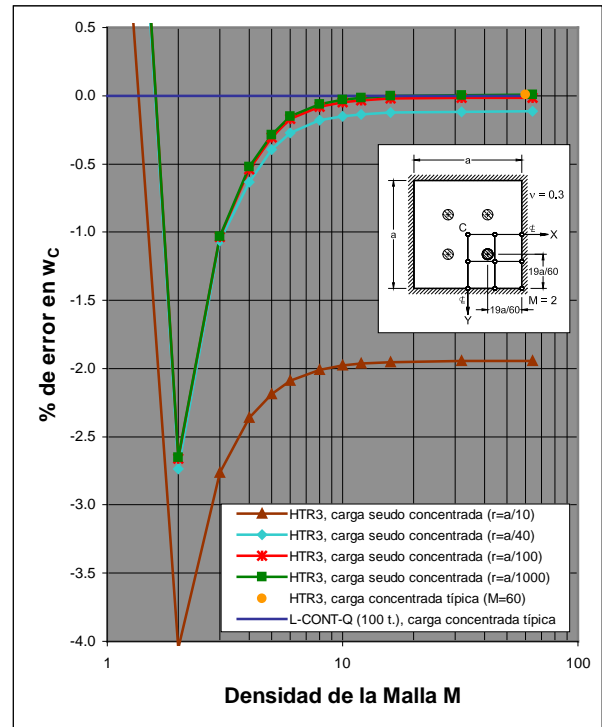


Figura 5.36 Losa cuadrada empotrada sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas  $P$  ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error en el desplazamiento central.

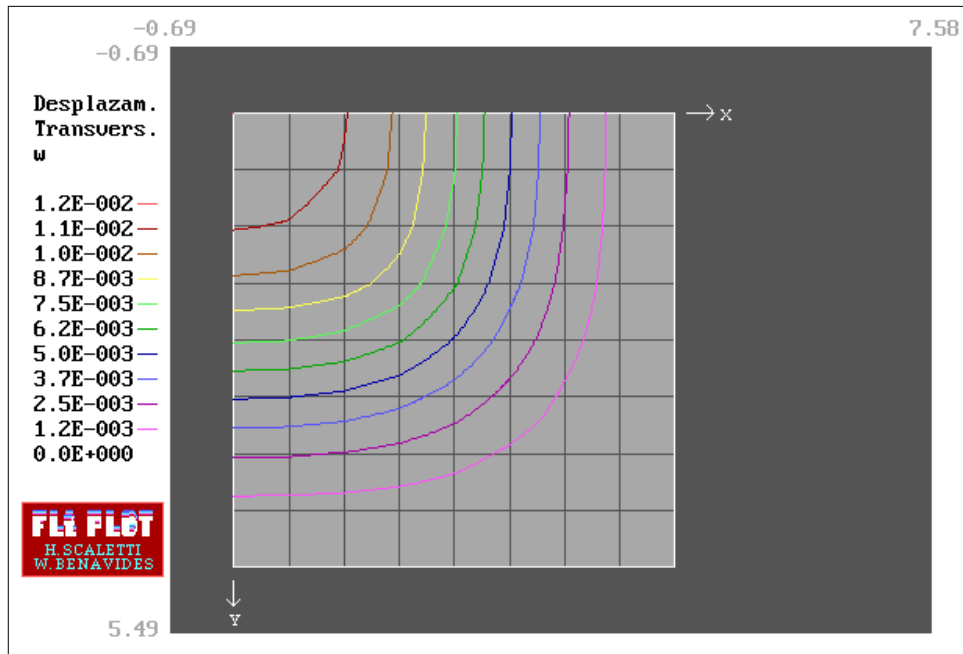


Figura 5.37 Líneas de contorno del desplazamiento transversal  $w$  para el cuarto de losa analizada (Figura 5.34), empotrada y con carga concentrada  $P$  aplicada en el punto de ubicación arbitraria  $(X,Y)=(11a/60,11a/60)$  pero distribuida sobre un área circular pequeña de radio  $r = a/1000$ ; empleando una malla regular de 838 elementos HTR3.

produce en el caso de la losa empotrada, no obstante que en esta condición de borde las velocidades de convergencia al inicio, es decir para mallas relativamente simples, siguen siendo menores que en el caso simplemente apoyado. En la Figura 5.37, a manera de ilustración y con la ayuda del programa FLt-PLOT, se muestra un gráfico de líneas de contorno del desplazamiento transversal  $w$  para el cuarto de losa analizado correspondiente al caso empotrado con  $r = a/1000$  y empleando una malla regular de 838 elementos HTR3. Se puede observar que la máxima deflexión se produce en el centro de la losa y no en el punto de aplicación de la carga.

Por otra parte, los correspondientes porcentajes de error en los momentos flectores  $M_x$  para el centro de la losa y para las mismas dos condiciones de borde son mostrados en las Figuras 5.38 y 5.39, notándose que en ambos casos la calidad de los resultados obtenidos con la carga seudo concentrada excéntrica es buena, en especial para los menores valores de  $r$  considerados y particularmente para el caso de la losa simplemente apoyada. Un gráfico de líneas de contorno del momento flector  $M_x$  para el cuarto de losa con apoyo simple analizado,  $r = a/100$  y  $M = 16$  se presenta en la Figura 5.40, en donde se puede apreciar que el máximo valor se produce en el punto de aplicación de la carga y, al ser esta distribuida sobre un área circular pequeña, representa como se vio en la sección anterior un valor más real y práctico que el incierto valor obtenido con una carga concentrada ideal.

De otro lado, en las Figuras 5.41 y 5.42, se muestran para la esquina de la losa (punto A de la Figura 5.34) los porcentajes de error en los momentos torsores  $M_{xy}$  para el caso de la losa con apoyo simple, así como el coeficiente adimensional  $M_{xy}/P$  para el caso de la losa empotrada, notándose en el primero de ellos que la calidad de los valores obtenidos con el elemento HTR3 utilizando la carga seudo concentrada excéntrica es aceptable, especialmente para los menores valores de  $r$  considerados. Por ejemplo, con  $M = 6$  y  $r \leq a/40$  ya se tienen errores menores al 1%; para el caso empotrado en cambio y al no contar con la ayuda del porcentaje de error, se puede por lo menos distinguir una convergencia casi monotónica, similar para todos los valores de  $r$  estudiados. En la Figura 5.43 se presenta un gráfico de líneas de contorno del momento torsor  $M_{xy}$  para el caso de la losa empotrada con  $r = a/100$  y  $M = 16$ , en el cual se puede apreciar, como era de esperarse, el valor nulo del momento estudiado en los ejes de simetría así como en los bordes empotrados de la losa (ver Sección 1.8).

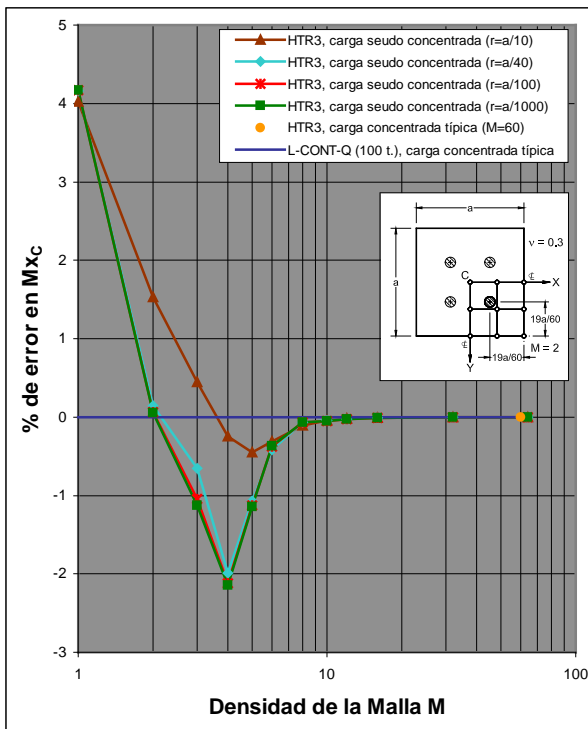


Figura 5.38 Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a 4 cargas pseudo concentradas simétricas  $P$  ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del momento flector  $M_x$  en el centro de la losa.

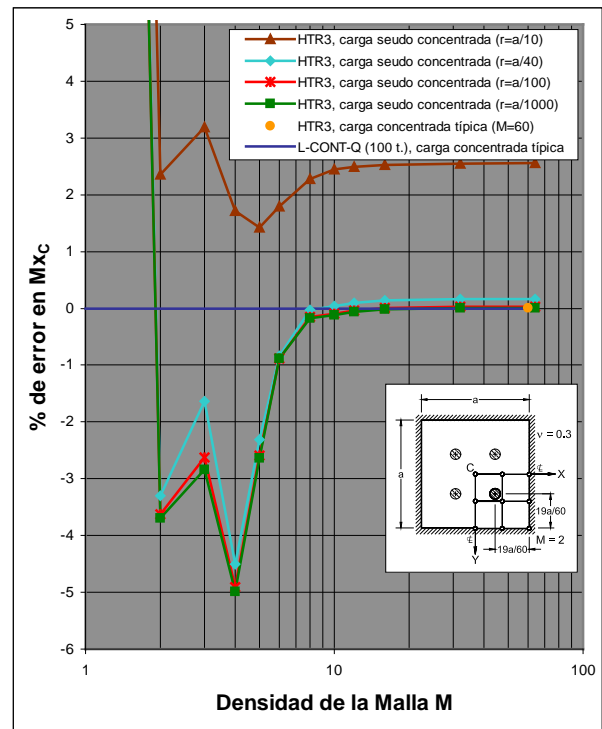


Figura 5.39 Losa cuadrada empotrada sujeta a 4 cargas pseudo concentradas simétricas  $P$  ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del momento flector  $M_x$  en el centro de la losa.

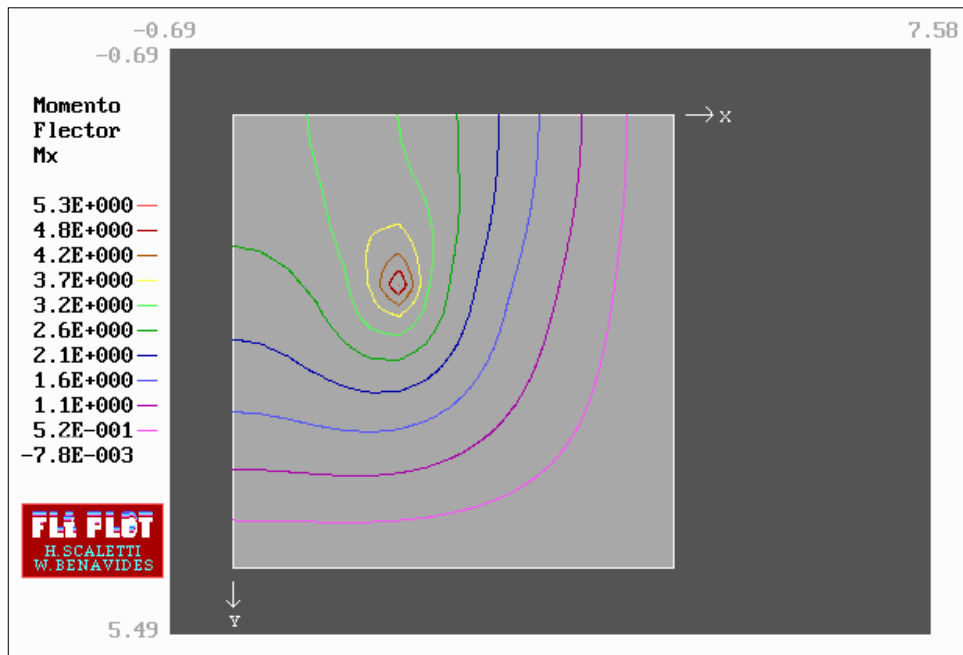


Figura 5.40 Líneas de contorno del momento flector  $M_x$  para el cuarto de losa analizada (Figura 5.34), simplemente apoyada y con carga concentrada  $P$  aplicada en el punto de ubicación arbitraria  $(X,Y)=(11a/60,11a/60)$  pero distribuida sobre un área circular pequeña de radio  $r = a/100$ ; empleando una malla regular de 16316 elementos HTR3.

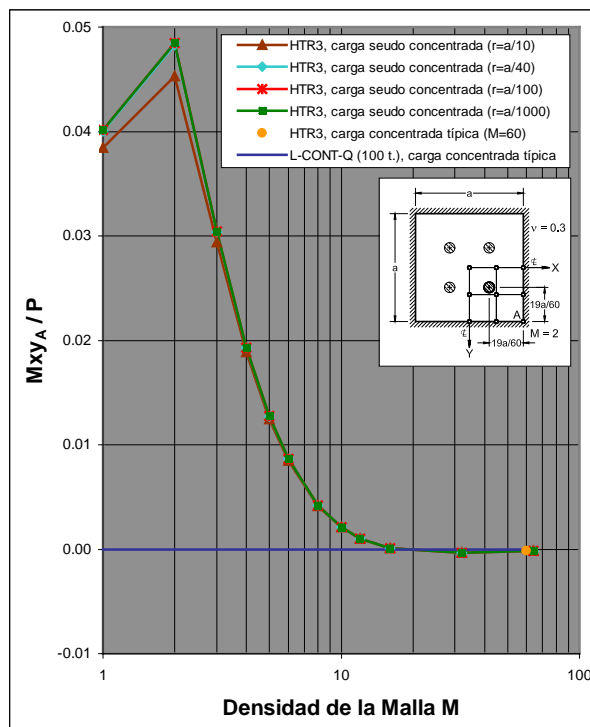
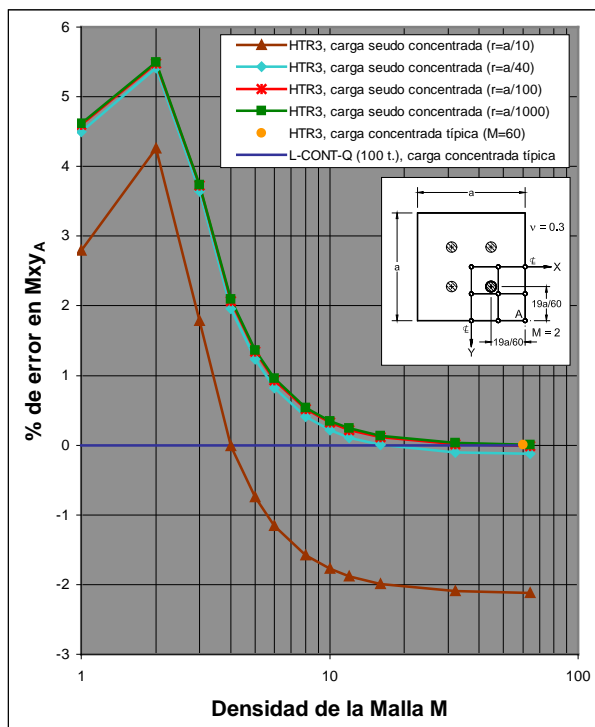


Figura 5.41 Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a 4 cargas pseudo concentradas simétricas  $P$  ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del momento torsor  $M_{xy}$  en la esquina de la losa.

Figura 5.42 Losa cuadrada empotrada sujeta a 4 cargas pseudo concentradas simétricas  $P$  ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del momento torsor  $M_{xy}$  en la esquina de la losa.

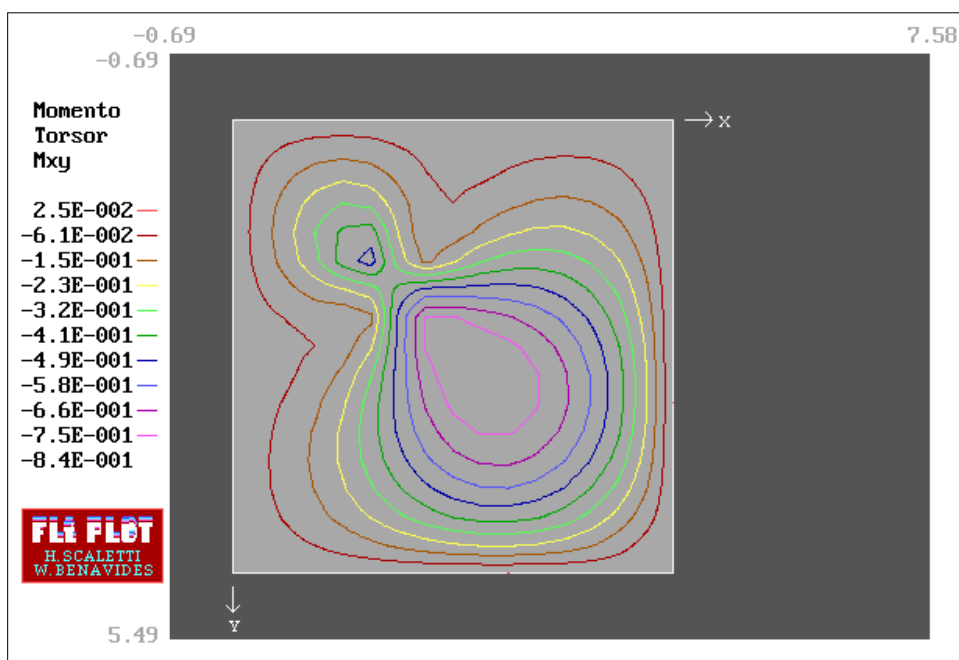


Figura 5.43 Líneas de contorno del momento torsor  $M_{xy}$  para el cuarto de losa analizada (Figura 5.34), empotrada y con carga concentrada  $P$  aplicada en el punto de ubicación arbitraria  $(X,Y)=(11a/60,11a/60)$  pero distribuida sobre un área circular pequeña de radio  $r = a/100$ ; empleando una malla regular de 16316 elementos HTR3.

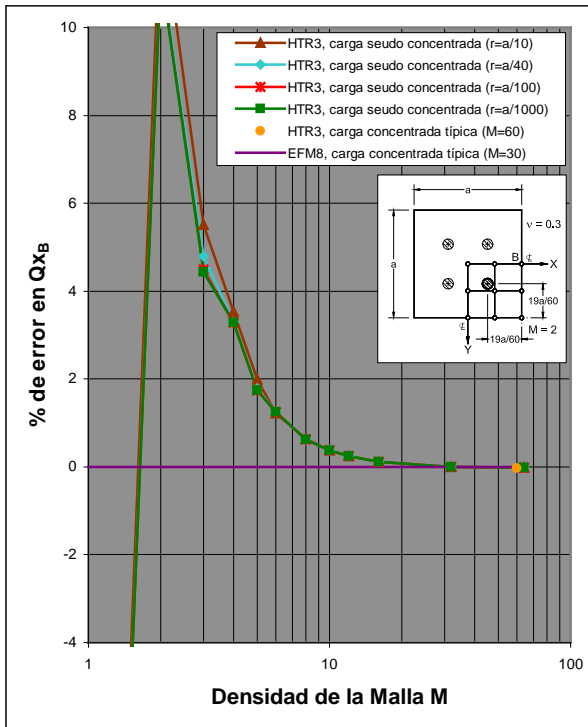


Figura 5.44 Losa cuadrada con apoyo simple sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas  $P$  ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del corte  $Q_x$  en la mitad del lado.

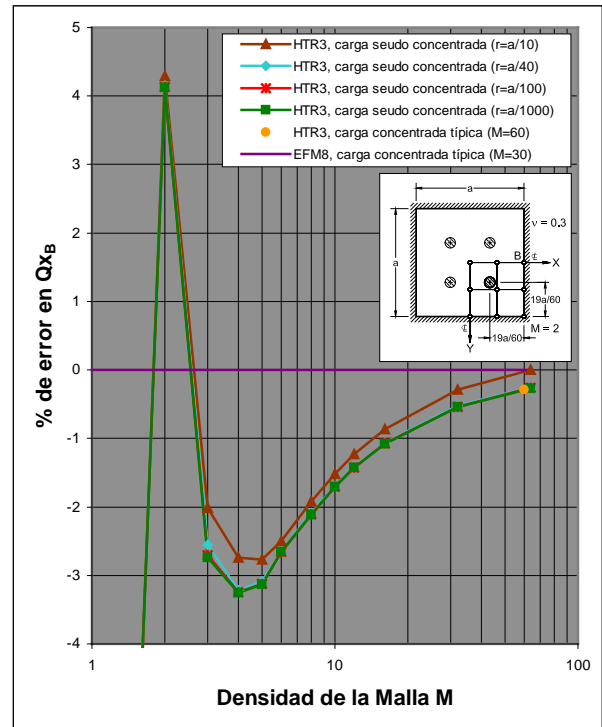


Figura 5.45 Losa cuadrada empotrada sujeta a 4 cargas seudo concentradas simétricas  $P$  ubicadas arbitrariamente: porcentaje de error del corte  $Q_x$  en la mitad del lado.

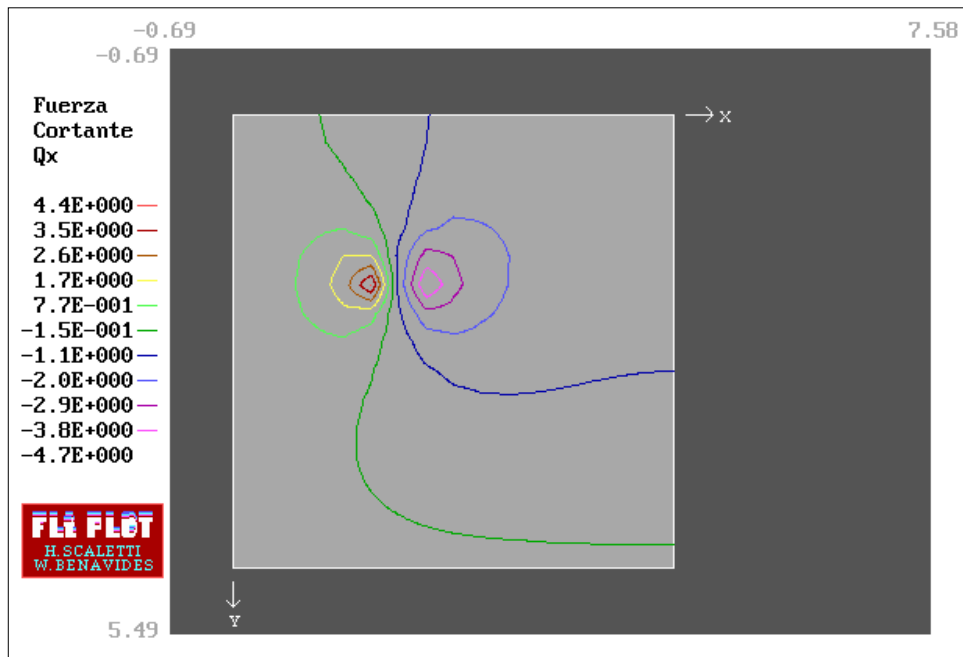


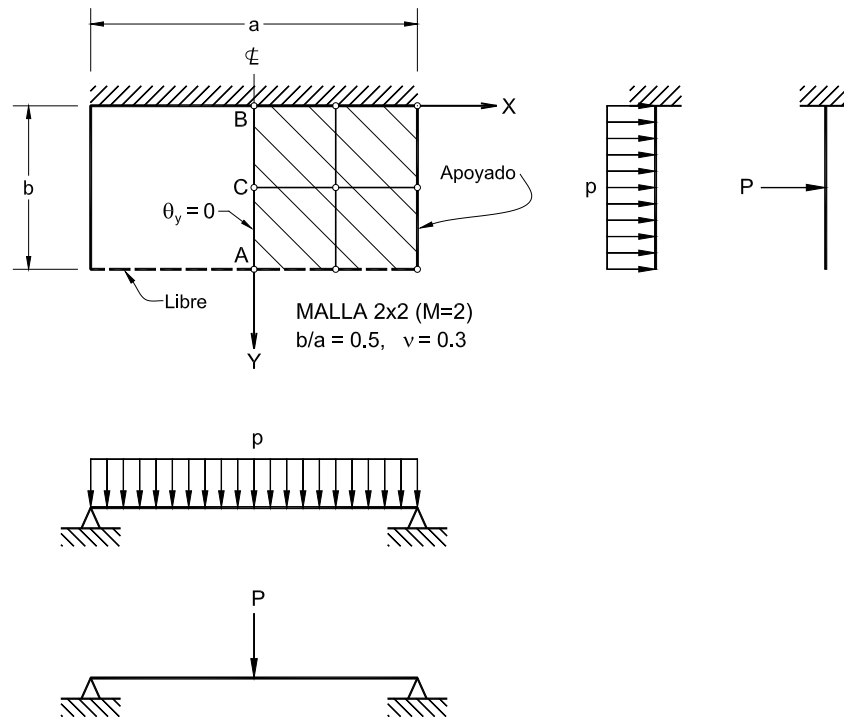
Figura 5.46 Líneas de contorno de la fuerza cortante  $Q_x$  para el cuarto de losa analizada (Figura 5.34), simplemente apoyada y con carga concentrada  $P$  aplicada en el punto de ubicación arbitraria  $(X,Y)=(11a/60,11a/60)$  pero distribuida sobre un área circular pequeña de radio  $r = a/40$ ; empleando una malla regular de 16316 elementos HTR3.

Finalmente, los porcentajes de error correspondientes a la fuerza cortante  $Q_x$  en la mitad del lado de la losa (punto B de la Figura 5.34) para las condiciones de borde analizadas se presentan en las Figuras 5.44 y 5.45, pudiéndose apreciar en el caso de la losa con apoyo simple que muchos de los errores obtenidos tienen un orden de magnitud similar a aquellos obtenidos empleando una carga seudo concentrada central. En el caso de la losa empotrada, si bien los errores han disminuido apreciablemente con respecto a aquellos obtenidos con la carga seudo concentrada central, aún no son lo suficientemente pequeños, pues recién con una densidad de malla  $M = 16$  se tiene un porcentaje de error del orden del 1% para todos los valores de  $r$  estudiados. En la Figura 5.46 se muestra un gráfico de líneas de contorno del corte  $Q_x$  para el caso analizado de la losa simplemente apoyada con  $r = a/40$  y  $M = 16$ , en el que se puede distinguir más que una concentración de esfuerzos en el vecindario de la carga seudo concentrada, un cambio brusco del corte  $Q_x$  a ambos lados del punto de aplicación de dicha carga.

De lo mostrado en esta sección utilizando el elemento HTR3 con la alternativa de la carga seudo concentrada pero ahora en una ubicación arbitraria con respecto a los nudos de la malla, se llega a conclusiones similares y en algunos casos hasta un poco mejores con respecto a los resultados obtenidos en la sección anterior para una carga seudo concentrada central cuyo punto de aplicación coincidía con la de un nudo de la malla.

### 5.3.3 ANÁLISIS DE UNA LOSA RECTANGULAR CON DOS BORDES OPUESTOS SIMPLEMENTE APOYADOS, UNO EMPOTRADO Y EL CUARTO LIBRE

A diferencia de los casos estudiados anteriormente en este capítulo, en los que las condiciones de apoyo que se tuvieron para los 4 bordes de las losas analizadas fueron todos empotrados o simplemente apoyados, en esta sección se estudia el comportamiento del elemento HTR3 al analizar el caso de una losa rectangular de relación de lados  $b/a=0.5$  y con varios tipos de condiciones de apoyo en su contorno, más explícitamente, con dos bordes opuestos simplemente apoyados, el tercero con apoyo fijo o empotrado y el último libre de vínculos (ver Figura 5.47). Dicha losa estará sometida a una carga uniformemente distribuida  $p$  en toda el área o bien sujeta a una carga concentrada  $P$  aplicada en el centro de la misma.



**Figura 5.47** Losa rectangular con relación de lados  $b/a=0.5$  y con dos bordes opuestos simplemente apoyados, uno empotrado y el cuarto libre, sujeta a dos distintos estados de carga.

Por otro lado, dada la simetría del problema, se modela solo la mitad de la losa, utilizando mallas regulares con las siguientes densidades  $M = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 32$  y  $64$ .

Los resultados de desplazamientos transversales  $w$  y de momentos flectores  $M_y$  en la mitad del borde libre y del borde empotrado respectivamente obtenidos con el elemento HTR3 (elemento híbrido de Trefftz rectangular de 4 nudos) son comparados con los correspondientes resultados obtenidos con el elemento DKE (elemento discreto de Kirchhoff cuadrilateral de 4 nudos utilizado por el programa SAP 2000 [29]) y con el elemento EFM8 empleado con 4 y con 8 nudos (elemento isoparamétrico mixto de 8 nudos utilizado por el programa FLm [6], sin incluir las deformaciones por corte). Debido a la falta de algunos valores referenciales exactos y dado el aparentemente mejor y buen comportamiento a primera vista del elemento HTR3 (ver Figuras 5.48, 5.49, 5.51 y 5.52) así como por su más rápida proximidad a los valores que aparecen en el libro clásico de Timoshenko [27] (en los casos donde pudieron ser extraídos), fue considerada como solución teórica exacta para todos



los casos estudiados a la obtenida con el mismo elemento HTR3 pero empleando una malla regular muy fina de 80380 elementos.

Del mismo modo debe mencionarse que en el estado de carga correspondiente al de la aplicación de una fuerza concentrada central y dado los buenos resultados, ventajas y conclusiones obtenidos con una carga pseudo concentrada empleando el elemento HTR3 (ver Sección 5.3.2), se optó por considerar para el caso de dicho elemento precisamente tal alternativa de la carga concentrada pero uniformemente distribuida sobre un área circular pequeña de radio  $r$  (en este caso igual al lado promedio de la losa rectangular dividido entre 1000).

Como se puede observar en las Figuras 5.48 y 5.49, las cuales tratan con el porcentaje de error para el desplazamiento transversal en la mitad del borde libre  $w_A$  versus la densidad de la malla  $M$  para los dos estados de carga analizados, todos los modelos de elementos finitos considerados convergen monótonicamente. Sin embargo la calidad de los resultados obtenidos con el elemento rectangular de 4 nudos (y 12 GDL) HTR3 es mejor (o en algún caso bastante mejor) que aquella obtenida con los otros elementos cuadriláteros de 4 nudos (de 12 o 16 GDL), e incluso mejor que la obtenida con el elemento isoparamétrico mixto EFM8 con 8 nudos (32 GDL). Para una malla muy gruesa de 232 elementos ya se tienen errores del orden del 1.2% y 1.0%, mientras que para una simple densidad de malla  $M=5$  los errores para los dos casos estudiados son del orden del 0.1%. En la Figura 5.50 y con la ayuda del programa FLt-PLOT se muestra un gráfico de bandas de contorno del desplazamiento transversal  $w$  para la mitad derecha de la losa rectangular estudiada, para el caso de la carga uniforme, con  $M = 8$ , en donde se puede distinguir que el máximo desplazamiento se produce justamente en la mitad del borde libre; de la misma manera se puede apreciar una más rápida variación del desplazamiento en las cercanías del borde apoyado en comparación con aquella que se da en las proximidades del borde empotrado.

Por otro lado, con respecto a los porcentajes de error correspondientes a los momentos flectores  $M_y$  para la mitad del borde empotrado versus la densidad de la malla  $M$  y para los dos casos analizados, estos son mostrados en las Figuras 5.51 y 5.52, notándose nuevamente que todos los modelos estudiados muestran convergencia (aunque no siempre en forma monótonica). De nuevo, los resultados obtenidos con el elemento HTR3 son en general de mejor calidad que los obtenidos con los otros elementos de 4 y 8 nudos considerados en este

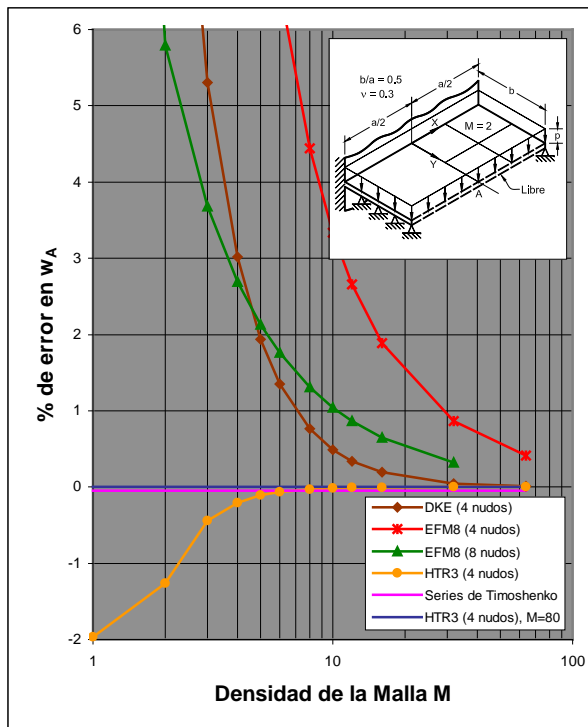


Figura 5.48 Losa rectangular con 3 tipos de apoyos en su contorno, cargada uniformemente en toda el área: porcentaje de error para el desplazamiento  $w$  en la mitad del borde libre.

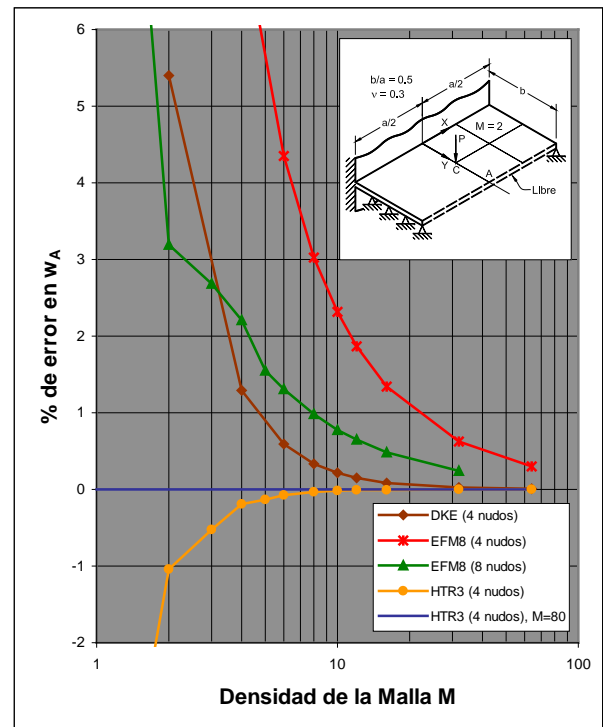


Figura 5.49 Losa rectangular con 3 tipos de apoyos en su contorno, sometida a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error para el desplazamiento  $w$  en la mitad del borde libre.

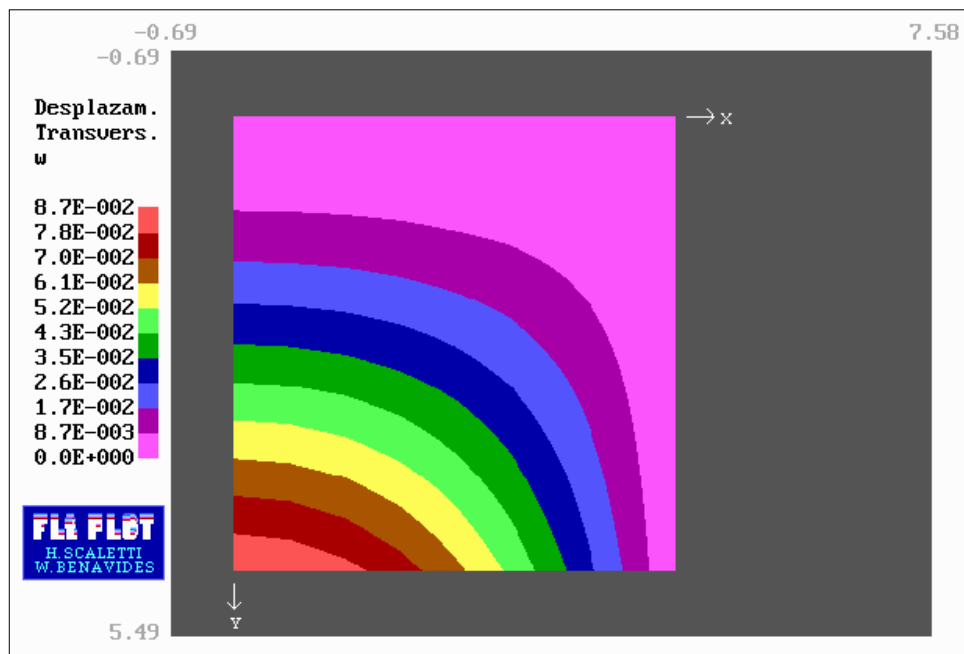


Figura 5.50 Bandas de contorno del desplazamiento transversal  $w$  para la mitad de la losa rectangular mostrada en la Figura 5.47 con las condiciones de borde indicadas pero sujeta a una carga uniformemente distribuida  $p$  en toda el área, empleando una malla regular de 838 elementos HTR3.

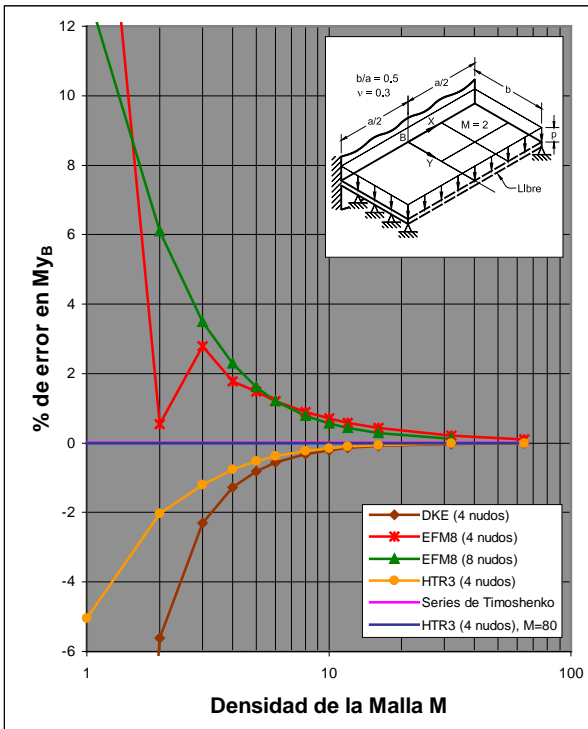


Figura 5.51 Losa rectangular con 3 tipos de apoyos en su contorno, cargada uniformemente en toda el área: porcentaje de error del momento flector  $M_y$  en la mitad del borde empotrado.

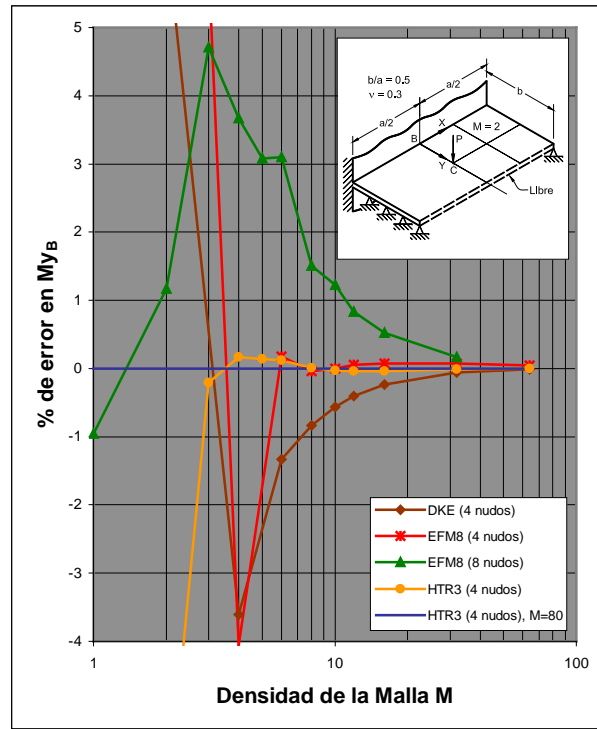


Figura 5.52 Losa rectangular con 3 tipos de apoyos en su contorno, sometida a una carga concentrada en el centro: porcentaje de error del momento flector  $M_y$  en la mitad del borde empotrado.

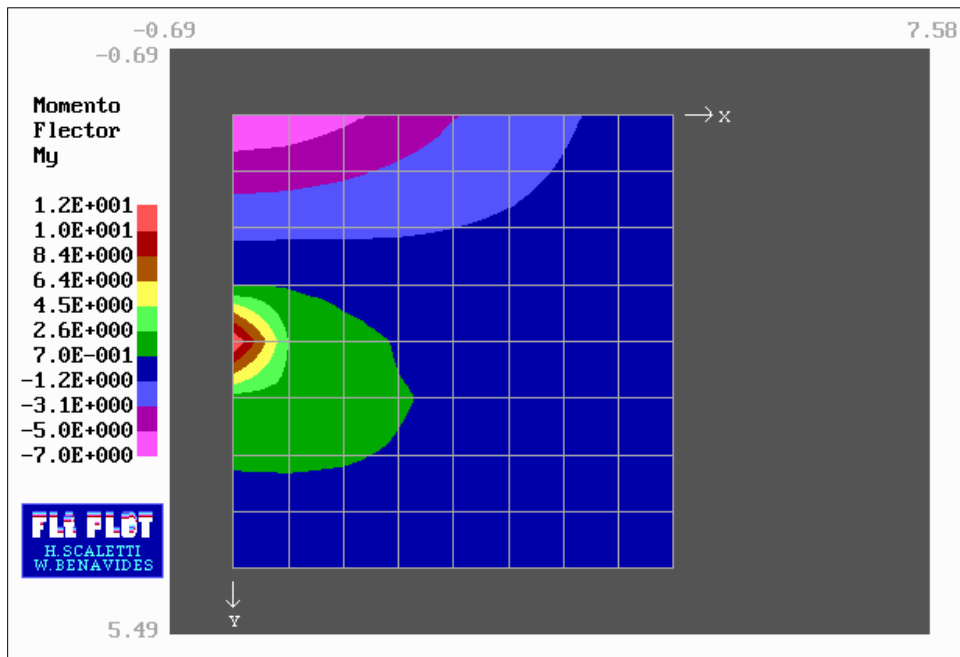


Figura 5.53 Bandas de contorno del momento flector  $M_y$  para la mitad de la losa rectangular mostrada en la Figura 5.47 con las condiciones de borde indicadas pero sujeta a una carga concentrada  $P$  (en realidad pseudo concentrada con  $r = \text{lado promedio}/1000$ ) aplicada en el centro de la losa, empleando una malla regular de 838 elementos HTR3.

estudio. Por ejemplo, con  $M = 3$  los errores son solo del orden del 1.1% y 0.2% para los estados de carga uniformemente distribuida y concentrada en el centro respectivamente. Un gráfico de bandas de contorno del momento flector  $M_y$  para la mitad derecha de la losa rectangular estudiada pero para el caso de la fuerza concentrada central y con  $M = 8$  se presenta en la Figura 5.53, en la que se puede apreciar que el máximo valor positivo de dicho momento se produce en el punto de aplicación de la carga, mientras que el máximo valor negativo se da en el punto medio del borde empotrado; del mismo modo puede comprobarse el valor nulo del momento estudiado a lo largo del borde libre.

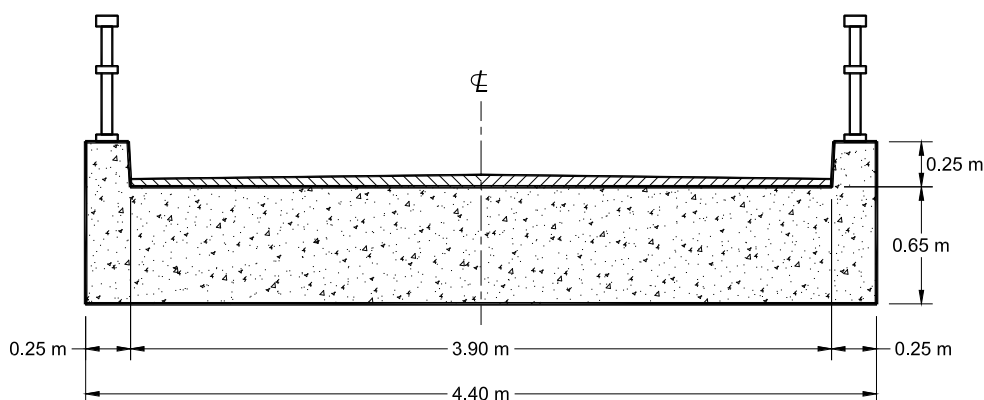
## 5.4 APLICACIONES

A diferencia de los sencillos casos de análisis mostrados en la sección previa, en los que la ubicación de las cargas concentradas era *fija*, se presenta ahora una situación un poco más ingenieril que se da en el análisis de losas de puentes, cual es la de la presencia de *cargas móviles* correspondientes a algún tren de cargas. En dicho análisis, una de las cantidades que se busca obtener es el máximo momento flector por carga viva que origina esfuerzos normales en la dirección de la luz del puente y asimismo donde se produce.

Haciendo algún tipo de idealización y para ciertos casos particulares (como el de analizar el puente como una viga simplemente apoyada), se puede conocer de una manera simple y aproximada tales cantidades. Sin embargo, en general, para cualquier situación de análisis de un puente dichos valores no son conocidos tan directamente y, típicamente, lo que se hace es *correr* el tren de cargas longitudinalmente y transversalmente, identificando las posiciones críticas o consideradas más desfavorables. Al aplicar tal metodología, con muchos de los modelos de elementos finitos para losas se presentarían algunos problemas e inconvenientes, que son solucionados o en todo caso mejor manejados empleando un modelo de elementos finitos híbrido de Trefftz como el desarrollado en el presente trabajo.

A continuación, se pretende hacer el análisis parcial (solo para la carga de camión) de un sencillo puente losa simplemente apoyado de 11.70 m de luz entre centros de apoyos (Figura 5.54) empleando la sobrecarga AASHTO HS20-44 [1]. Se tienen las siguientes características:

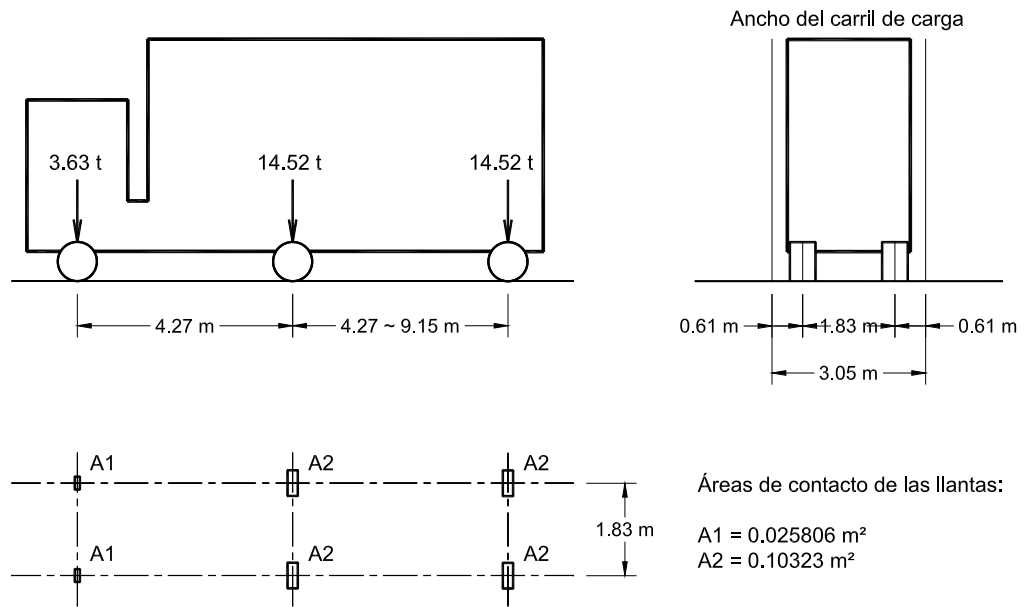
Ancho de la calzada	3.90 m
Espesor de la losa	0.65 m
Resistencia del concreto $f'_c$	280 kg/cm <sup>2</sup>
Módulo de elasticidad del concreto $E_c$	$2.513 \cdot 10^6$ t/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson $\nu$	0.20



**Figura 5.54** Sección transversal del puente losa analizado.

En la Figura 5.55 se muestra al citado camión HS20 de las especificaciones AASHTO estándar [1]. Asimismo, se muestran las áreas de contacto de las llantas, de forma rectangular, indicadas en las mismas especificaciones AASHTO. Para el uso con el elemento HTR3 (y a diferencia de los otros elementos empleados en esta sección) las 6 cargas concentradas se consideraron distribuidas uniformemente sobre tales áreas de contacto. Sin embargo, como dichas áreas no son de forma circular, no es aplicable, en sentido estricto, la alternativa implementada en el elemento HTR3 referida al reparto uniforme de las cargas concentradas sobre áreas circulares pequeñas; no obstante, de modo aproximado, ver la referencia [22], se determinó el radio de dichas áreas circulares como aquel que resulta en la misma presión de las ruedas.

De otro lado, se ha realizado dos tipos de análisis, el primero de ellos (ver Figura 5.54) considerando a cada una de las 2 vigas de borde como una sección reforzada integral de losa y bordillo y la segunda considerando a cada viga de borde simplemente como una sección de



**Figura 5.55 Camión estándar HS20.**

losa del mismo espesor, aunque reforzada adicionalmente. En ambos casos la carga estándar de camión HS20, que ocupa un ancho de 3.05 m, se ubicó transversalmente lo más cercana posible a la cara del bordillo dentro de su carril de tráfico de diseño, como se puede observar en la Figura 5.56.

Los resultados de desplazamientos y esfuerzos en dos distintas ubicaciones (que son comunes a todas las mallas utilizadas) obtenidas con el elemento HTR3 pero solo para la posición del tren de cargas donde se obtuvo el mayor momento flector  $M_x$  (en azul, Figura 5.56) son comparados una vez más con los correspondientemente obtenidos con el elemento cuadrilátero discreto de Kirchhoff de 4 nudos DKE utilizado por el programa de cómputo SAP 2000 [29] y con el elemento isoparamétrico mixto de 8 nudos EFM8 (pero empleado con 4 nudos) utilizado por el programa FLm [6], sin incluir las deformaciones de corte. Asimismo, fue considerada como solución exacta para los casos estudiados la obtenida con el elemento HTR3 pero utilizando una malla regular y muy fina de 3060 elementos.

Para empezar, se definió una malla relativamente sencilla, casi regular, salvo por los elementos del borde, de 144 elementos, ver Figura 5.56. A continuación, se hizo correr el tren de cargas HS20 longitudinalmente, cada décimo de luz, observando en cada posición el

máximo momento flector  $M_x$  producido (los máximos momentos obtenidos en cada caso se

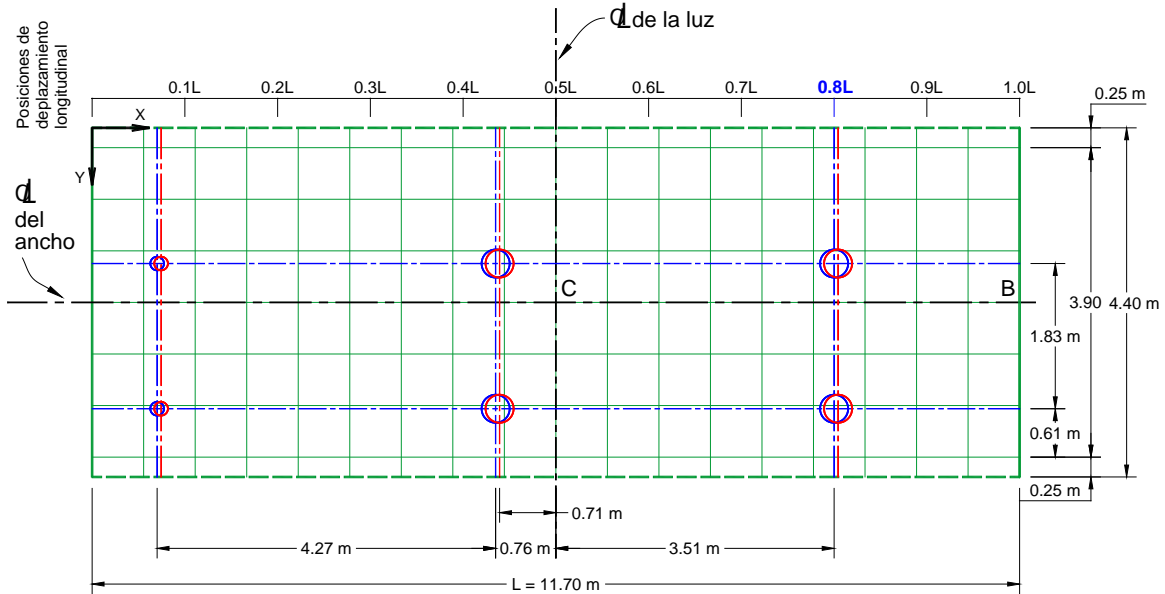


Figura 5.56 Malla de 144 elementos HTR3 y tren de cargas HS20 ubicado en la 8va. posición longitudinal (en color azul), así como en la teórica posición también longitudinal para el máximo momento flector  $M_x$  en una viga simplemente apoyada (en color rojo).

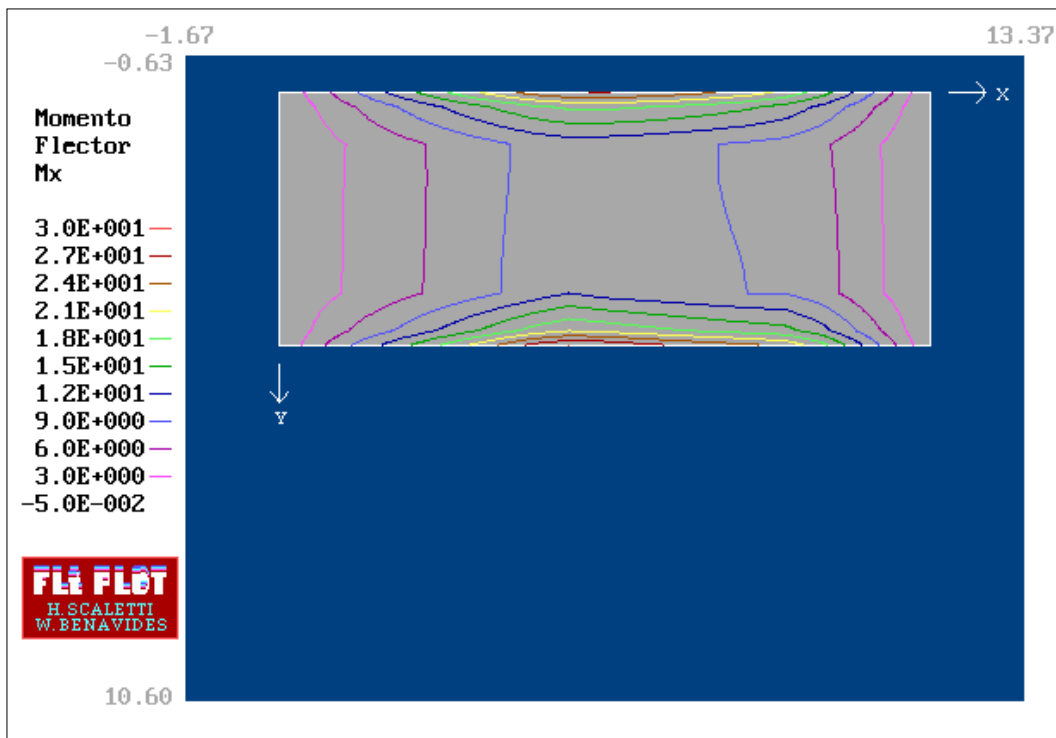


Figura 5.57 Diagrama de líneas de contorno del momento flector  $M_x$  correspondiente al primer análisis, empleando una malla de 144 elementos HTR3 para la posición del camión donde se obtuvo el respectivo máximo momento flector  $M_x$ .

listan en la Tabla 5.22). Como se puede apreciar en la Figura 5.57, correspondiente al primer análisis (viga de borde como una sección integral de losa y bordillo) y para la octava posición de desplazamiento longitudinal del tren de cargas, *el máximo momento flector*  $M_x$  es del orden de 30 t-m/m. Debe señalarse que para el caso particular de considerar la posición longitudinal en una viga simplemente apoyada donde se produce (aplicando por ejemplo el Teorema de Baret) el momento máximo para el tren de cargas HS20 (en rojo, Figura 5.56), se obtiene un máximo momento flector  $M_x$  también del orden de 30 t-m/m. Asimismo, al hacer el cálculo manualmente de acuerdo a las especificaciones AASHTO [1] y por tanto considerando parámetros como el ancho efectivo, se obtiene un momento flector  $M_x$  máximo para el diseño de la losa del orden de 15 t-m/m, el cual no es del orden de magnitud de los momentos máximos encontrados arriba, porque entre otras razones tales momentos (ver Figura 5.57) corresponden a los valores máximos pero para la viga de borde; en cambio, como se puede ver en la Tabla 5.22 y más adelante en la Figura 5.62, si lo es del máximo momento flector encontrado para el segundo análisis realizado, que es un caso más simplificado (viga de borde con el mismo espesor de la losa), cuyo valor es del orden de 14 t-m/m (correspondiendo en este caso si a la losa) y se produce también para la misma posición longitudinal del camión.

**Tabla 5.22 Momentos flectores  $M_x$  máximos (en azul los máximos absolutos) obtenidos para cada una de las 10 posiciones de desplazamiento longitudinal del tren de cargas HS20, empleando la malla de 8318 elementos HTR3 de la Figura 5.56.**

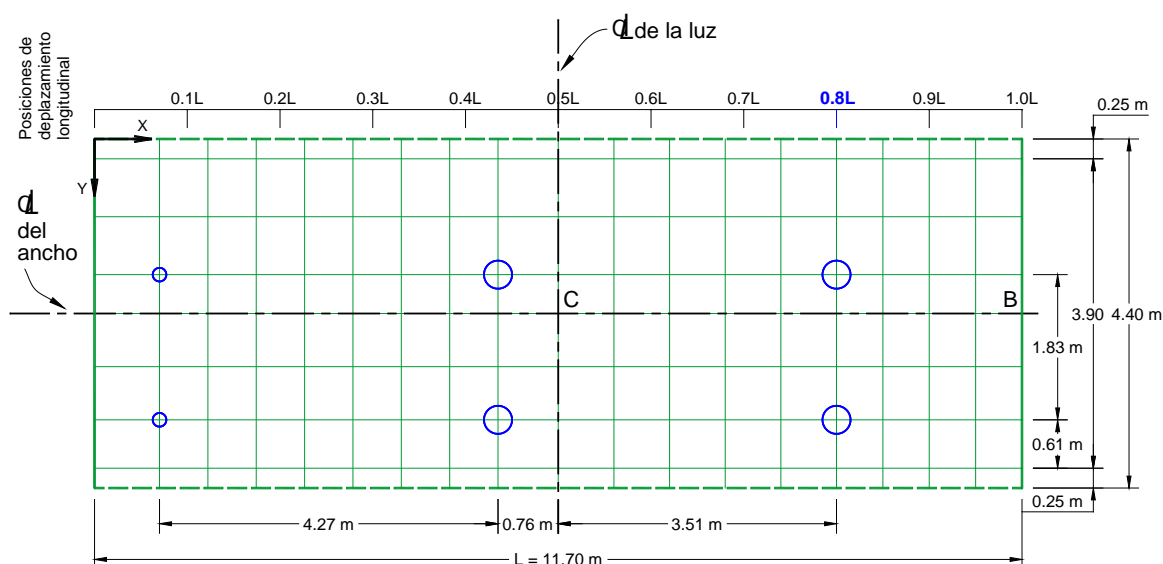
Posición longitudinal		CASO DE ANÁLISIS	
		PRIMERO	SEGUNDO
Nº	x	$M_x$ (t-m/m) máximo	$M_x$ (t-m/m) máximo
1	0.1L	8.0E+00	4.3E+00
2	0.2L	1.4E+01	6.6E+00
3	0.3L	1.8E+01	8.4E+00
4	0.4L	2.3E+01	1.1E+01
5	0.5L	2.8E+01	1.3E+01
6	0.6L	2.9E+01	1.3E+01
7	0.7L	2.9E+01	1.3E+01
8	0.8L	<b>3.0E+01</b>	<b>1.4E+01</b>
9	0.9L	2.8E+01	1.3E+01
10	1.0L	2.3E+01	1.0E+01
*)	0.8043L	3.0E+01	1.4E+01

\*) donde se obtiene el máximo momento flector en una viga simplemente apoyada.

Debe notarse hasta el momento una de las ventajas de utilizar una formulación híbrida de Trefftz para losas, cual es la prácticamente no dependencia del diseño de la malla a la ubicación de las cargas concentradas, pues bastó un *único* diseño de una sencilla malla casi



regular de 8318 elementos *independiente* de la ubicación de las cargas para cada una de las 10 posiciones del camión. Básicamente, lo que cambió en el archivo de datos para cada nueva posición del camión fueron las coordenadas  $x,y$  de las 6 cargas seudo concentradas; es más, especificando 10 sistemas de carga en dicho archivo sería suficiente para correr el programa de análisis FLt una sola vez. En el caso de utilizar alguna otra formulación de elementos finitos, por lo menos para las empleadas en esta sección, el diseño de la malla dependería de donde se coloquen las cargas y al ser éstas móviles habría que tener en la práctica una malla muy fina. También hay la posibilidad (la que no se emplea en este ejemplo) con las formulaciones más tradicionales de elementos finitos de tener elementos que correspondan a la huella de una carga o a un submúltiplo de ésta; de ese modo se trabajaría más bien con cargas uniformemente distribuidas. Sin embargo, nuevamente se requeriría una malla muy fina. En cambio, con la formulación híbrida de Trefftz los elementos siempre pueden ser de mayor dimensión. Para simplificar el análisis con tales formulaciones se optó en este ejemplo por considerar solo el caso correspondiente a la posición del tren de cargas donde se obtuvo el máximo momento flector  $M_x$  empleando el elemento HTR3, rediseñando apropiadamente una nueva malla de 144 elementos en función de la ubicación de las 6 cargas concentradas (ver Figura 5.58). Debido a las razones expuestas en la Sección 5.3.2 referidas principalmente a la incertidumbre de los valores obtenidos para momentos con tales formulaciones en la cercanía



**Figura 5.58** Malla de 144 elementos finitos empleada para el análisis con los elementos DKE y EFM8 utilizando el camión HS20 en la misma 8va. posición longitudinal de la Figura 5.56.

**Tabla 5.23 Resultados de desplazamientos y esfuerzos en los puntos C y B, obtenidos con los elementos EFM8, DKE y HTR3 correspondientes al primer análisis y para la posición longitudinal del camión HS20 donde se obtuvo el máximo momento flector  $M_x$ .**

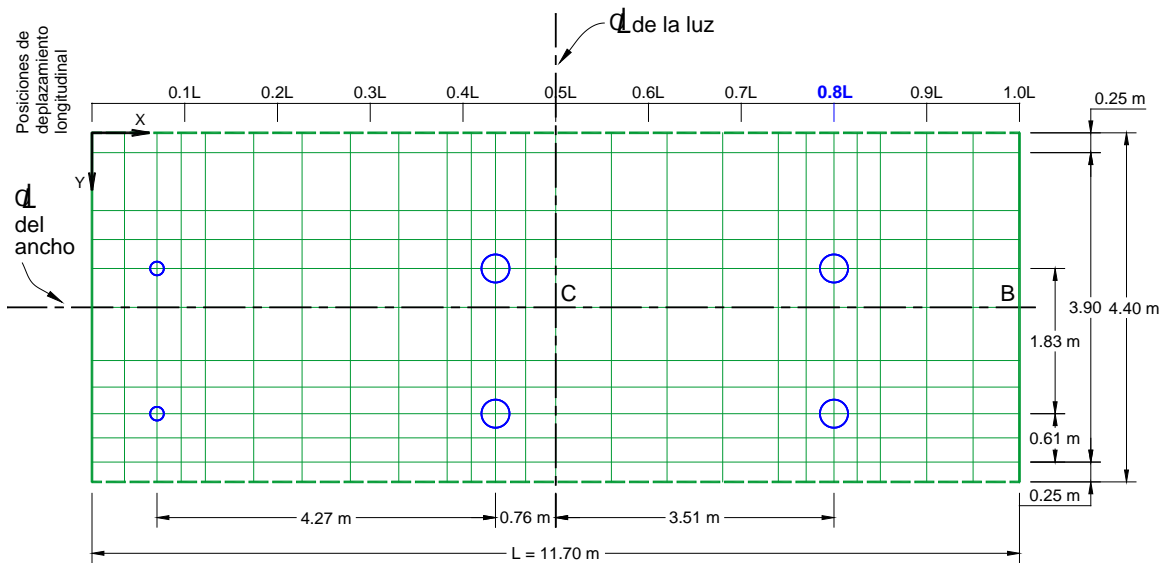
		SOLUCIÓN									
Elemento Finito	Nº de elem. de la malla	$w_C$ (m)	% de error	$M_{x_C}$ (t-m/m)	% de error	$M_{y_C}$ (t-m/m)	% de error	$M_{xy_B}$ (t-m/m)	% de error	$Q_{x_B}$ (t/m)	% de error
EFM8 (4 nudos)	144	2.58072E-03	2.344	1.09009E+01	2.620	1.14523E+00	-0.900	7.88374E-01	14.009	-3.25746E+00	-0.958
	264	2.57749E-03	2.216	1.08388E+01	2.035	1.09689E+00	-5.083	7.85155E-01	13.543	-3.32296E+00	1.034
DKE (4 nudos)	144	2.52122E-03	-0.016	1.06863E+01	0.600	1.20588E+00	4.348	6.99990E-01	1.228	-3.36628E+00	2.351
	264	2.52157E-03	-0.002	1.06149E+01	-0.073	1.18578E+00	2.609	6.97726E-01	0.900	-3.36741E+00	2.385
HTR3 (4 nudos)	144	2.52161E-03	0.000	1.06106E+01	-0.113	1.17800E+00	1.936	6.93472E-01	0.285	-3.29957E+00	0.323
	3060	2.52161E-03		1.06226E+01		1.15563E+00		6.91502E-01		-3.28896E+00	

**Tabla 5.24 Resultados de desplazamientos y esfuerzos en los puntos C y B, obtenidos con los elementos EFM8, DKE y HTR3 correspondientes al segundo análisis y para la posición longitudinal del camión HS20 donde se obtuvo el máximo momento flector  $M_x$ .**

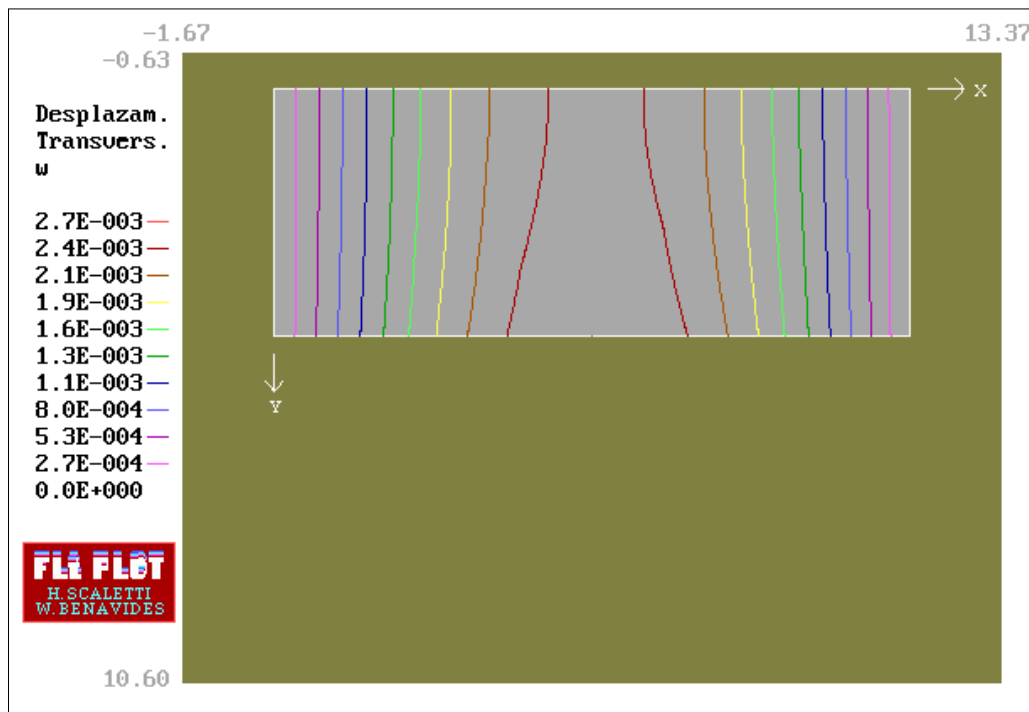
		SOLUCIÓN									
Elemento Finito	Nº de elem. de la malla	$w_C$ (m)	% de error	$M_{x_C}$ (t-m/m)	% de error	$M_{y_C}$ (t-m/m)	% de error	$M_{xy_B}$ (t-m/m)	% de error	$Q_{x_B}$ (t/m)	% de error
EFM8 (4 nudos)	144	3.00459E-03	0.013	1.26968E+01	1.068	9.73675E-01	8.141	8.68040E-01	6.254	-3.69238E+00	-1.409
	264	3.00507E-03	0.029	1.25624E+01	-0.002	9.18670E-01	2.032	8.70069E-01	6.503	-3.74856E+00	0.091
DKE (4 nudos)	144	3.00312E-03	-0.036	1.26291E+01	0.529	9.50271E-01	5.542	8.29888E-01	1.584	-3.91744E+00	4.600
	264	3.00382E-03	-0.012	1.25565E+01	-0.048	9.30890E-01	3.389	8.27976E-01	1.350	-3.91767E+00	4.607
HTR3 (4 nudos)	144	3.00419E-03	0.000	1.25535E+01	-0.072	9.19788E-01	2.156	8.18821E-01	0.229	-3.75359E+00	0.225
	3060	3.00419E-03		1.25626E+01		9.00374E-01		8.16947E-01		-3.74515E+00	

de las cargas concentradas y especialmente debajo de ellas, lo cual en realidad tiene que ver con otra de las ventajas de utilizar una formulación híbrida de Trefftz, se consideraron para la comparación los resultados en los puntos C y B de la losa del puente, para las magnitudes indicadas en las Tablas 5.23 y 5.24. Los valores mostrados en tales tablas pertenecientes a mallas de un mismo número de elementos (144) revelan la ventaja adicional respecto a la mayor precisión de los resultados obtenidos empleando una formulación híbrida de Trefftz frente a muchas de las formulaciones de elementos finitos para losas, lo cual en muchos casos obliga en tales formulaciones a un refinamiento adicional, principalmente en el vecindario de las cargas concentradas como la propuesta en la Figura 5.59.

Finalmente, y con la ayuda del programa FLt-PLOT, se muestran algunos gráficos de líneas y bandas de contorno (Figuras 5.60 al 5.64) para el desplazamiento transversal  $w$ , momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$ , momento torsor  $M_{xy}$  y Corte  $Q_x$ , para la posición del tren de cargas donde se obtuvo el máximo momento flector  $M_x$ , para los dos casos de análisis considerados.



**Figura 5.59** Malla de 264 elementos finitos (utilizada para el análisis con los elementos DKE y EFM8), proveniente de aquella de la Figura 5.58 a causa de un sencillo refinamiento local en el vecindario de las cargas concentradas.



**Figura 5.60** Líneas de contorno del desplazamiento transversal  $w$  correspondiente al primer análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20.

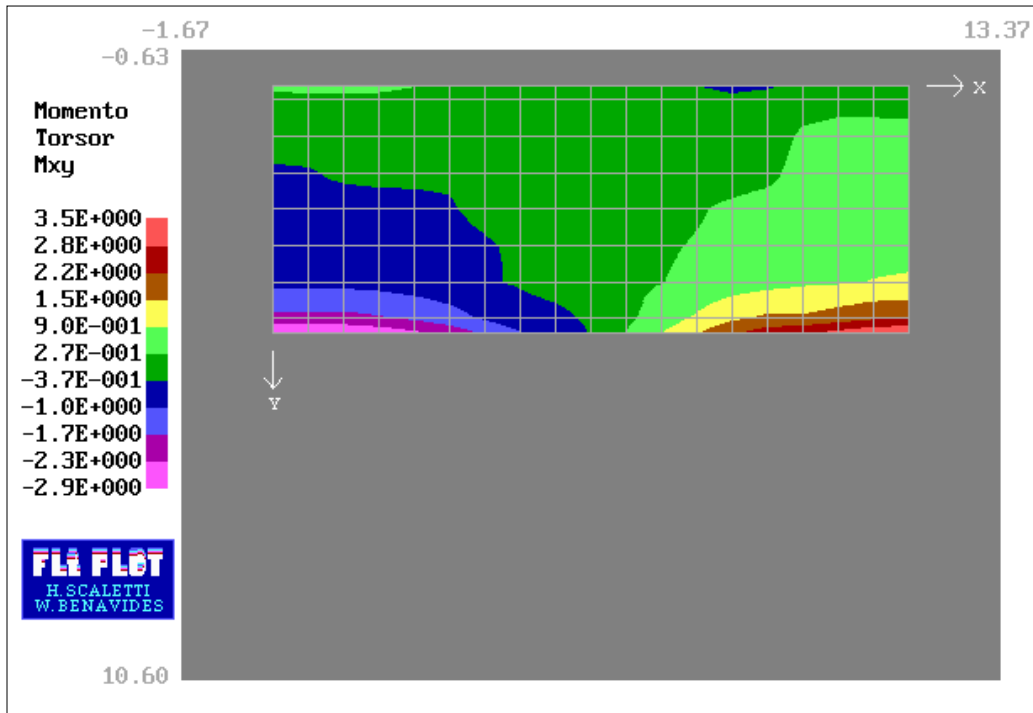


Figura 5.61 Bandas de contorno del momento torsor  $M_{xy}$  correspondiente al primer análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20.

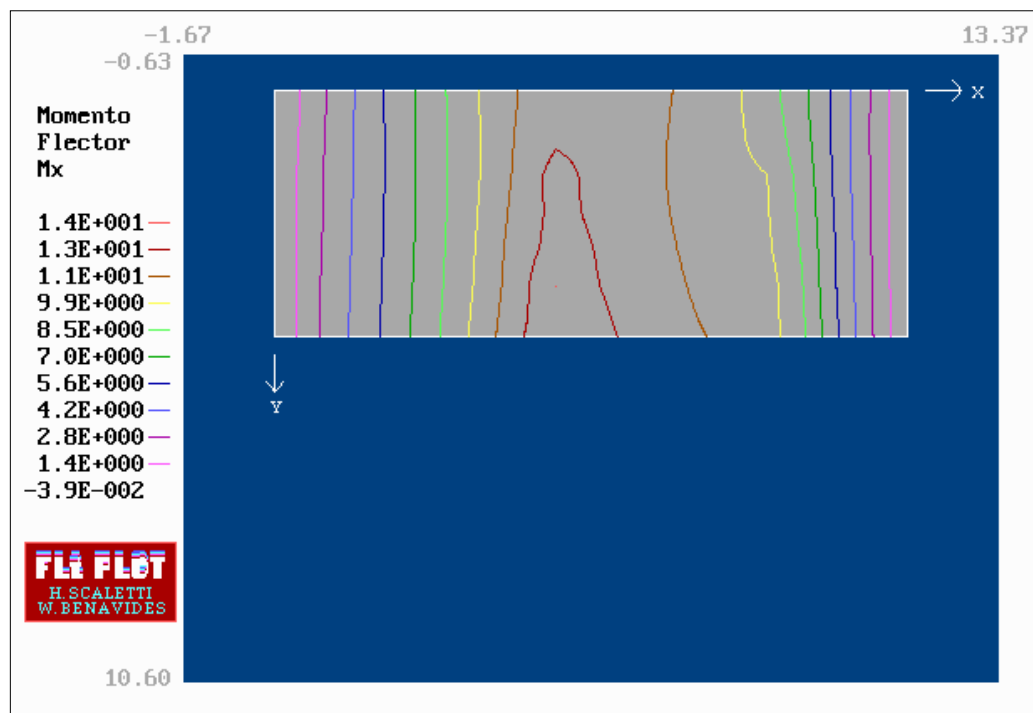


Figura 5.62 Líneas de contorno del momento flector  $M_x$  correspondiente al segundo análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20.

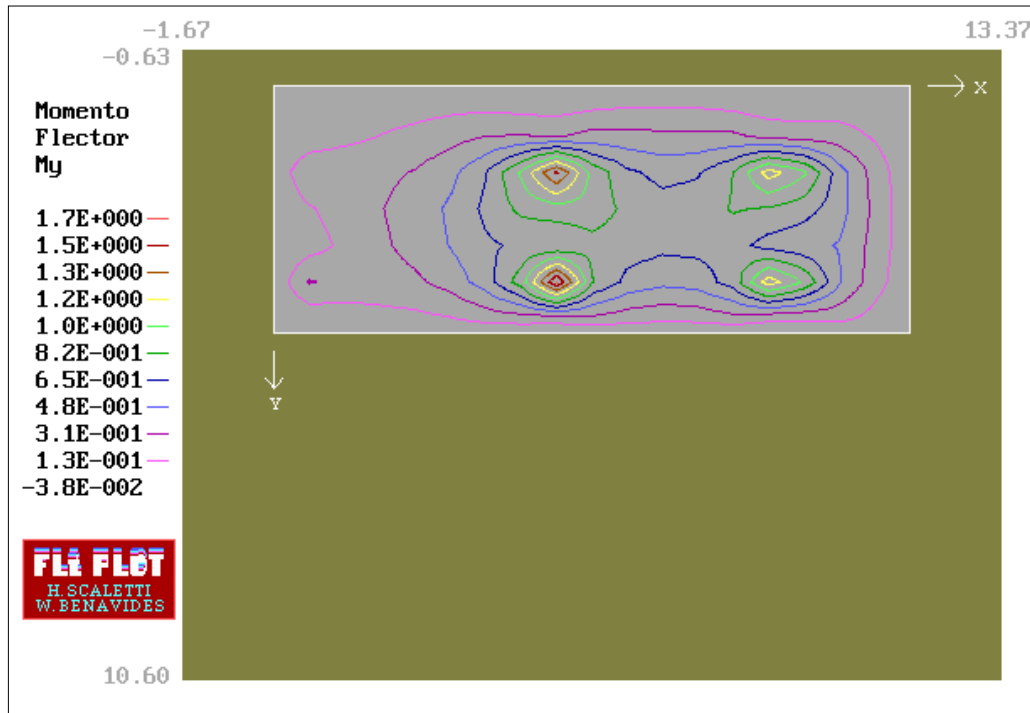


Figura 5.63 Líneas de contorno del momento flector  $M_y$ , correspondiente al segundo análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20.

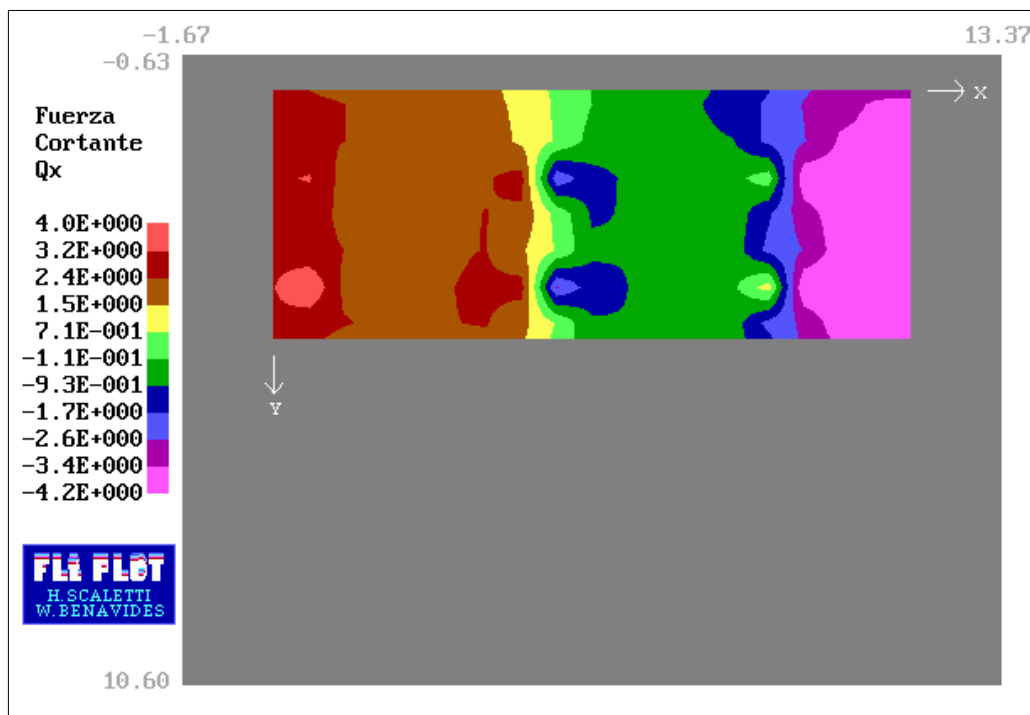


Figura 5.64 Bandas de contorno del corte  $Q_x$ , correspondiente al segundo análisis, empleando la malla de 144 elementos HTR3, para la 8va. posición de desplazamiento longitudinal del camión HS20.



## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- 1) Las expresiones resultantes de los elementos híbridos de Trefftz para losas quedan en función de las componentes de desplazamiento de los nudos, por lo que tales elementos son enteramente compatibles con los tradicionales elementos viga-columna, con los modelos de desplazamiento estándar para losas y con otros elementos finitos. Permitiendo al mismo tiempo que el modelo pueda encontrarse perfectamente dentro del ambiente de un programa tradicional de análisis.
- 2) Al plantear un modelo híbrido de Trefftz para losas, como el desarrollado en este trabajo, pueden escribirse para cada borde del elemento expresiones relativamente simples para las componentes de desplazamiento (que forman parte de la función marco), que cumplen perfectamente la continuidad. A diferencia de lo que sucede por ejemplo en la formulación de desplazamientos más tradicional para losas, en la cual es difícil satisfacer completamente la continuidad entre elementos.
- 3) Al tratar con cargas concentradas, el empleo de la solución particular apropiada (como el usado en el elemento HTR3 desarrollado) permite que las mallas de elementos finitos sean completamente independientes de las ubicaciones de tales cargas. Como consecuencia de ello, se simplifica grandemente el análisis (especialmente si las cargas concentradas son móviles como ocurre por ejemplo en el análisis de puentes), pues ya no es necesario trabajar con mallas muy finas, tampoco se requiere rediseñar la malla para

cada nueva posición de las cargas concentradas y porque no es necesario hacer refinamientos locales en las cercanías de tales cargas.

- 4) Como resultado de la experimentación numérica, se observó que para el elemento HTR3 el número apropiado  $m$  de funciones de aproximación estándar  $\phi_i$  es de 11 (equivalente a 3 grupos de funciones  $\phi_i$ ). Asimismo y en forma paralela, fue hallado que el número adecuado de puntos de integración numérica es de 3. Sin embargo, resultados aceptables y convergentes pueden también obtenerse (aunque en general de menor calidad y a veces con un mayor esfuerzo de cómputo) empleando otras combinaciones de números de grupos de funciones  $\phi_i$  (a partir de 2) y de números de puntos de integración numérica (a partir de 1).
- 5) Si el objetivo es sólo obtener las mejores aproximaciones para el desplazamiento transversal  $w$ , aunque ello implique disminuir la calidad en las correspondientes aproximaciones para los momentos, se recomienda emplear en el elemento finito HTR3 2 grupos (7 términos) de funciones de aproximación estándar  $\phi_i$  y 2 puntos de integración numérica.
- 6) Desde el punto de vista de la calidad de los resultados (ya sean de desplazamientos, momentos e incluso de cortes) con mallas relativamente simples, el elemento HTR3 constituye una muy buena alternativa con respecto a otros elementos rectangulares y cuadriláteros de 4 nudos (típicamente con 12 GDL) correspondientes a algunas de las formulaciones más conocidas de elementos finitos para losas. Tal calidad no solo se da al trabajar con cargas uniformemente distribuidas sino también con cargas concentradas (con las que habitualmente se presentarían algunas dificultades asociadas con la exactitud de los resultados). Por ejemplo, para el caso específico del análisis de un cuarto de una losa cuadrada con distintas alternativas de condiciones de apoyo y de carga (Sección 5.3.1), es suficiente utilizar mallas regulares sencillas de 434 o de 535 elementos HTR3 para asegurar resultados aceptables (con errores menores al 1%); a diferencia de la necesidad de utilizar mayores densidades de mallas al emplear otros elementos finitos de 4 nudos.



- 7) La alternativa que se tiene en un modelo híbrido de Trefftz para losas, de emplear cargas puntuales que son distribuidas uniformemente sobre áreas circulares pequeñas, representa una buena solución ingenieril para resolver en una forma sencilla y a la vez más real y eficiente el problema teórico y tradicional del valor infinito de momento bajo una carga concentrada ideal (que en un típico programa de elementos finitos produciría valores que no convergen a medida que se afina la malla). Además, se obtienen en general mejoras en los resultados (especialmente cuanto más pequeña sea el área circular sobre la cual se distribuye la carga concentrada) con respecto a los valores obtenidos empleando cargas concentradas aplicadas en un punto.
- 8) A pesar que muchas de las expresiones obtenidas y empleadas en el elemento desarrollado HTR3 son relativamente extensas y distintas, por ejemplo las que corresponden a las segundas y terceras derivadas de las funciones  $\phi_i$ , entre otras, el tiempo de cómputo que se requiere utilizando tal elemento en un cierto análisis es comparativamente corto. Por ejemplo, para el caso particular de la Sección 5.3.1 correspondiente al análisis estándar de una losa cuadrada con apoyo simple en todos los bordes y cargada uniformemente en toda el área, se obtuvieron al analizar un cuarto de losa con 1024 elementos (aproximadamente el mismo número de GDL) y trabajando con una computadora de 2 GHz de velocidad y 3 GB de memoria RAM, aproximadamente los siguientes tiempos de cómputo:
- 07 s : elemento DKE (4 nudos, 12 GDL), programa SAP2000 [29]
  - 01 s : elemento EFM8 (4 nudos, 16 GDL), programa FLm [6]
  - **01 s : elemento HTR3 (4 nudos, 12 GDL), programa FLt [esta tesis]**
- 9) Por último, como consecuencia de la buena precisión de los resultados con mallas relativamente simples, del empleo de cargas seudo concentradas en lugar de las habituales cargas concentradas en un punto y del relativo poco tiempo de ejecución del correspondiente programa de cómputo, se concluye que el elemento HTR3 es muy eficiente y por tanto se recomienda su uso en el contexto del análisis de losas delgadas.



## REFERENCIAS

- [1] AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS (AASHTO). (1996); *Standard Specifications for Highway Bridges*; 16a. edición; Washington.
- [2] BATHE, KLAUS-JÜRGEN Y WILSON, EDWARD L. (1976); *Numerical Methods in Finite Element Analysis*; Prentice-Hall, Inc.; New Jersey.
- [3] BATHE, KLAUS-JÜRGEN (1996); *Finite Element Procedures*; Prentice-Hall, Inc.; New Jersey.
- [4] BATOZ, JEAN-LOUIS Y BEN TAHAR, MABROUK (1982); *Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element*; International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 1655-1677.
- [5] BOSIO, JOSÉ L.; LÓPEZ, JACK; GALLO, EDUARDO; PASTOR, MANUEL Y LAINEZ-LOZADA, PEDRO (1993); *Puentes Análisis, Diseño y Construcción*; ACI Capítulo de Estudiantes UNI, Capítulo Peruano; Lima.
- [6] BOZZO, LUIS M. (1987); *Análisis de Losas Planas Empleando un Elemento Finito Isoparamétrico Mixto de 3 a 8 nudos*; Tesis de Grado; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil; Lima.
- [7] BURDEN, RICHARD L. Y FAIRES, J. DOUGLAS. (2002); *Análisis Numérico*; séptima edición, International Thomson Editores S.A.; México.
- [8] COOK, R.D.; MALKUS, D.S. Y PLESHA, M.E. (1989); *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*; tercera edición, John Wiley & Sons; New York.

- 
- [9] CHANDRUPATLA, T.R. Y BELEGUNDU, A.D. (1999); *Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería*; segunda edición, Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.; México.
- [10] CHAVEZ, ELMER H. (1998); *Análisis de Losas Continuas*; Tesis de Grado; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil; Lima.
- [11] CHURCHILL, RUEL V. Y BROWN, JAMES WARD (1992); *Variable Compleja y Aplicaciones*; quinta edición, McGraw-Hill; Madrid.
- [12] ELSGOLTZ, L. (1983); *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*; tercera edición, Editorial Mir; Moscú.
- [13] GALLAGHER, R.H. (1975); *Finite Element Analysis: Fundamentals*; Prentice-Hall, Inc.; New Jersey.
- [14] HUGHES, T.J.R. Y COHEN, M. (1978); *The "heterosis" finite element for plate bending*; *Comp. Struct.*, Vol. 9, pp. 445-450.
- [15] JIROUSEK, J. Y GUEX, L. (1986); *The Hybrid-Trefftz Finite Element Model and its Application to Plate Bending*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 651-693.
- [16] KALMANOK, A.S. (1961); *Manual para Cálculo de Placas*; Editora Inter Ciencia, Montevideo.
- [17] MENZEL, A. (1995); *Elementos Finitos*; apuntes de clases; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil, Sección de Graduados; Lima.
- [18] OÑATE, EUGENIO (1992); *Cálculo de estructuras por el método de Elementos Finitos, Análisis elástico lineal*; Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería; Barcelona.
- [19] PARK, R. Y GAMBLE, W.L. (1987); *Losas de Concreto Reforzado*; Editorial Limusa; México.
- [20] PIAN, THEODORE H. H. AND TONG, PIN (1969); *Basis of Finite Element Methods for Solid Continua*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 1, pp. 3-28.
- [21] ROJAS, VÍCTOR P. (1995); *Análisis de Losas Utilizando el Método de los Elementos Finitos*; Tesis de Grado; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil; Lima.

- 
- [22] SAMARTÍN, AVELINO F. (1983); *Cálculo de Estructuras de Puentes de Hormigón*; Editorial Rueda; Madrid.
- [23] SCALETTI, H. (1972); *Sobre el Método de Elementos Finitos en sus Aplicaciones a Problemas de Mecánica Estructural*; Tesis de Grado; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil; Lima.
- [24] SCALETTI, H. (1996); *Elementos Finitos*; apuntes de clases; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil, Sección de Graduados; Lima.
- [25] SEVERN, R.T. Y TAYLOR, P.R. (1966); *The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions are Assumed*; Proceedings of the Institution of Civil Engineers, pp. 153-170.
- [26] TIMOSHENKO, S. Y GOODIER, J.N. (1968); *Teoría de la Elasticidad*; Ediciones Urmo; Bilbao.
- [27] TIMOSHENKO, S. Y WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1970); *Teoría de Placas y Láminas*; Ediciones Urmo; Bilbao.
- [28] WILSON, EDWARD L. Y HABIBULLAH, ASHRAF (1992); *SAP90 Structural Analysis Users Manual*; Computers and Structures, Inc.; Berkeley.
- [29] WILSON, EDWARD L. (2002); *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*; Computers and Structures, Inc., tercera edición; Berkeley.
- [30] ZIENKIEWICZ, O.C. Y TAYLOR, R.L. (1994); *El Método de los Elementos Finitos*; cuarta edición, McGraw-Hill, Vol. 1; Barcelona.
- [31] ZIENKIEWICZ, O.C. Y TAYLOR, R.L. (1995); *El Método de los Elementos Finitos*; cuarta edición, McGraw-Hill, Vol. 2; Barcelona.



## *Apéndice A*

# **TEORÍA DE LOSAS GRUESAS DE REISSNER-MINDLIN**

## **A.1 INTRODUCCIÓN**

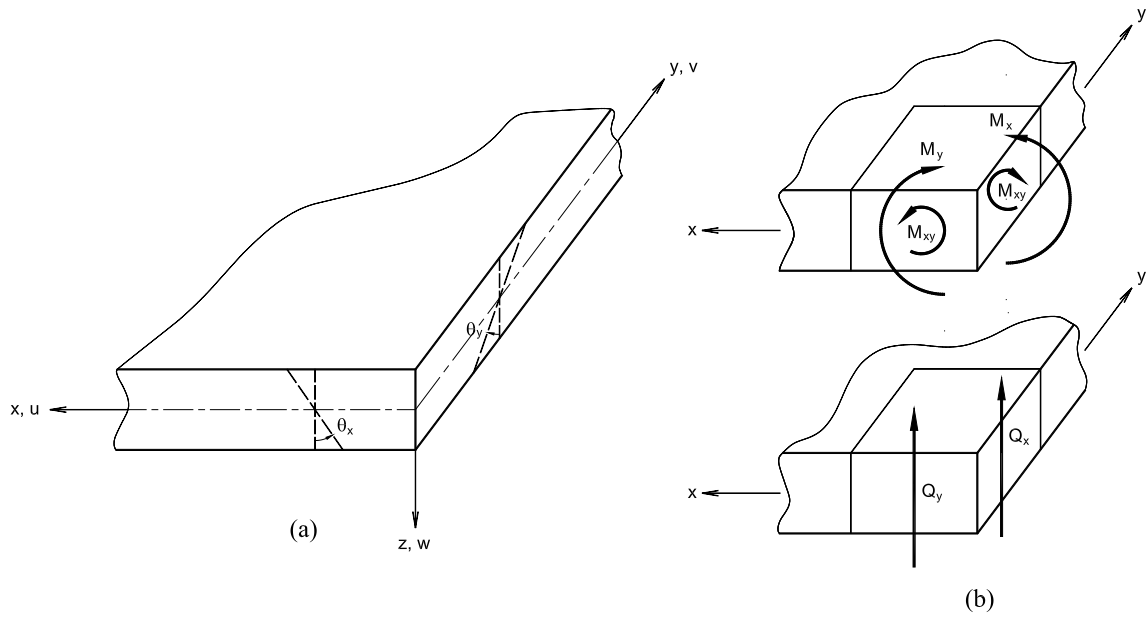
Si bien este trabajo se refiere al análisis de losas delgadas, existen algunas secciones en donde se hace referencia a la teoría de losas gruesas; por ello, se presenta a continuación un resumen de la misma en notación matricial [31].

## **A.2 ECUACIONES BÁSICAS**

En la Figura A.1 se muestran las extensiones necesarias con las cuales se pueden escribir los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  como:

$$u = -\theta_x z \quad ; \quad v = -\theta_y z \quad ; \quad w = w_0 \quad \text{Ec. (A.1)}$$

donde  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $w_0$  (desplazamiento transversal de la superficie media) son funciones de  $x$  e  $y$  solamente.



**Figura A.1** Definición de variables para la aproximación de losas gruesas. a) Desplazamientos y giros. b) Momentos y fuerzas cortantes.

De otro lado, pueden obtenerse las componentes de deformación en el plano (flexión) y de cortante vertical:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = -z \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} \quad \text{Ec. (A.2)}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = -\boldsymbol{\theta} + \nabla w \quad \text{Ec. (A.3)}$$

Escribiendo las ecuaciones constitutivas apropiadas pueden determinarse los esfuerzos, para luego obtener los momentos por unidad de longitud en función de las derivadas de los giros:



$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\mathbf{D}\mathbf{L}\boldsymbol{\theta} \quad \text{Ec. (A.4)}$$

donde, suponiendo un estado plano de esfuerzos en cada plano paralelo a la superficie neutra:

$$\mathbf{D} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (A.5)}$$

Asimismo, se obtiene la siguiente expresión para las fuerzas cortantes transversales por ancho unitario:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \beta G t (-\boldsymbol{\theta} + \nabla w) \quad \text{Ec. (A.6)}$$

donde se introduce una constante  $\beta$  para tener en cuenta que los esfuerzos cortantes no son constantes en el espesor. Un valor de  $\beta = 5/6$  es exacto para una sección rectangular homogénea y corresponde a una distribución del esfuerzo cortante parabólica.

Las ecuaciones de comportamiento de losas gruesas se completan mediante las siguientes ecuaciones de equilibrio. En primer lugar, del equilibrio de los momentos con respecto a los ejes  $x$  e  $y$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{M} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (A.7)}$$

mientras que del equilibrio de las fuerzas verticales se tiene:

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} + p = \nabla^T \mathbf{Q} + p = 0 \quad \text{Ec. (A.8)}$$

Las Ecs. (A.4), (A.6), (A.7) y (A.8) son la base a partir de la cual pueden obtenerse las soluciones de losas gruesas. Para losas delgadas en las que se *suprime la deformación por cortante*, la Ec. (A.6) se reescribe como:

$$-\boldsymbol{\theta} + \nabla w = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (A.9)}$$

Es decir que los giros se pueden interpretar como derivadas del desplazamiento transversal. Asimismo, la Ec. (A.9) permite eliminar  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\boldsymbol{\theta}$  y dejar solamente  $w$  como variable. Para ello, se puede aplicar el operador  $\nabla^T$  a la Ec. (A.7) e insertar las Ecs. (A.4) y (A.8), para finalmente reemplazar  $\boldsymbol{\theta}$  de (A.9), con lo cual se obtiene la ecuación escalar (ecuación de Navier):

$$(\mathbf{L}\nabla)^T \mathbf{D} (\mathbf{L}\nabla) w - p = 0 \quad \text{Ec. (A.10)}$$

donde:

$$(\mathbf{L}\nabla)^T = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{array} \right] \quad \text{Ec. (A.11)}$$

Para el caso isotrópico resulta la conocida ecuación biarmónica de la teoría de losas delgadas (ver Ec. 1.35):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} \quad \text{Ec. (A.12)}$$

donde:

$$D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \text{Ec. (A.13)}$$

Volviendo a la teoría de losas gruesas, es conveniente eliminar  $\mathbf{M}$  de las Ecs. (A.4), (A.6), (A.7) y (A.8) para escribir el siguiente sistema de tres ecuaciones en la forma:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (A.14a)}$$

$$\left( \frac{1}{\beta G t} \right) \mathbf{Q} + \boldsymbol{\theta} - \nabla w = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (A.14b)}$$

$$\nabla^T \mathbf{Q} = -p \quad \text{Ec. (A.14c)}$$

El sistema de ecuaciones anterior puede servir de base para construir una discretización mixta, o alternativamente, puede simplificarse aún más para dar una forma irreducible. Para esto último, por ejemplo, las fuerzas cortantes se pueden eliminar de forma que queden dos ecuaciones:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} + \beta G t (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad \text{Ec. (A.15a)}$$

$$-\nabla^T (\beta G t \boldsymbol{\theta}) + \nabla^T (\beta G t \nabla w) = -p \quad \text{Ec. (A.15b)}$$

el cual es un sistema *irreducible* correspondiente a la minimización de la energía potencial total:

$$\begin{aligned} \Pi_p(w, \boldsymbol{\theta}) = & \int_A \frac{1}{2} (\mathbf{L} \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \boldsymbol{\theta}) dA + \int_A \frac{1}{2} (\nabla w - \boldsymbol{\theta})^T (\beta G t) (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) dA - \\ & - \int_A w^T p dA + \text{términos de borde} \end{aligned} \quad \text{Ec. (A.16)}$$

En esta expresión, el primer término es la energía de deformación debida a los efectos de flexión, el segundo la energía debida a las deformaciones de corte y luego se tienen los términos que corresponden al potencial de las cargas aplicadas.



## *Apéndice B*

# **IMPLEMENTACIÓN DE LA FORMULACIÓN. LOS PROGRAMAS DE CÓMPUTO FLt Y FLt-PLOT**

## **B.1 INTRODUCCIÓN**

En este apéndice se describen brevemente algunos de los aspectos relativos al programa de análisis FLt desarrollado en este trabajo de tesis y que utiliza modelos híbridos de Trefftz aplicados al análisis de la flexión de losas. Asimismo, se dan algunos alcances del segundo programa de cómputo llamado FLt-PLOT, el cual fue desarrollado y utilizado como complemento gráfico de los datos y resultados de análisis obtenidos con el programa FLt. Ambos programas están disponibles en el CD anexo a la tesis para su uso con fines exclusivamente académicos.

## **B.2 EL PROGRAMA FLt**

FLt representa un sencillo programa de cómputo para el análisis estático, lineal y elástico de losas delgadas a flexión, sometidas a algunos tipos de cargas transversales más comunes y para diversas condiciones de borde.

Para efectuar el análisis mencionado arriba, FLt utiliza elementos finitos rectangulares híbridos de Trefftz del tipo **HTR3** desarrollado en esta tesis, es decir, de cuatro nudos y tres

grados de libertad por nudo, estos últimos asociados al desplazamiento transversal  $w$  y a las componentes de desplazamiento rotacional  $\theta_y$  (giro alrededor del eje  $y$  y se considera positivo) y  $\theta_x$  (giro alrededor del eje  $x$  se considera positivo). El modelo para el análisis se ubica en el plano  $xy$  con el eje  $z$  orientado hacia abajo. Se supone que las fuerzas siguen la dirección y tienen el sentido positivo del eje  $z$ .

Los datos necesarios para el análisis se suministran desde un archivo de datos preparado antes de la ejecución del programa (como se describe con un poco más de detalle en el archivo de ayuda FLt.doc contenido también en el CD adjunto) y cuya estructura contiene los siguientes bloques:

- 1) Control.
- 2) Coordenadas y códigos de nudos.
- 3) Conectividad y otros de los elementos.
- 4) Propiedades de los materiales.
- 5) Datos para cada sistema de cargas.
- 6) Factores de carga para cada combinación.

En el bloque control se debe ingresar información básica referida por ejemplo al número de nudos, elementos, materiales, sistemas de carga, combinaciones entre otras que el programa requiere conocer anticipadamente para de ese modo asignar el espacio de memoria correspondiente a los arreglos creados dinámicamente.

Luego, en el bloque de datos relativo a los nudos, se proporciona la información de las posiciones de los nudos indicando las coordenadas  $x,y$  de cada uno de ellos (refiriéndose éstas a un punto cualquiera escogido arbitrariamente por el usuario, quedando así definido un origen global de un sistema de coordenadas) así como ciertos códigos de desplazamiento (traslacional o rotacional) restringido o no restringido asociadas a las componentes de desplazamiento  $w$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_x$  de cada nudo.

A continuación, en el tercer bloque, se debe suministrar la información relativa al material del que se compone cada elemento así como la conectividad (es decir una lista de los nudos del elemento) y finalmente su espesor. Debe anotarse que la lista de nudos debe incluir

cuatro campos, los que deben tener valores significativos y que corresponden a los vértices superior izquierdo, superior derecho, inferior izquierdo e inferior derecho del elemento rectangular.

En el bloque de datos relativo a los materiales, como se supone isotropía, se debe especificar el módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  para cada material considerado en el modelo.

En el siguiente bloque se suministra la información correspondiente para cada sistema de cargas transversales considerado, la cual puede contemplar información relativa a cargas uniformemente distribuidas o a fuerzas concentradas. Estas últimas pueden a su vez ser cargas nodales (como habitualmente se hace en la mayoría de formulaciones de elementos finitos) o cargas concentradas en puntos de ubicación arbitraria de la losa y distribuidas uniformemente sobre un área circular pequeña (ver Sección 4.3.1.2.2).

Por último, en el sexto bloque del archivo de datos, y solo si se han indicado combinaciones, se deben especificar los factores de carga con los que interviene cada sistema.

De otro lado, luego de correr el programa, se obtiene en un archivo de salida (cuyo nombre fue suministrado por el usuario) un eco de los datos proporcionados a través del archivo de datos y a continuación los resultados numéricos del análisis correspondientes a los desplazamientos transversales  $w$ , giros  $\theta_y$ ,  $\theta_x$ , momentos flectores  $M_x$ ,  $M_y$ , momentos torsores  $M_{xy} = M_{yx}$  y los cortes  $Q_x$ ,  $Q_y$  para cada nudo del modelo analizado.

Finalmente, el programa FLt proporciona un archivo adicional para ser utilizado por el programa FLt-PLOT, este último presentado muy brevemente a continuación.

### **B.3 EL PROGRAMA FLt-PLOT**

FLt-PLOT constituye un programa de cómputo muy simple del tipo post procesador gráfico, que permite que parte de los datos del modelo así como los resultados numéricos de desplazamientos y de fuerzas en los nudos determinados por el programa de análisis FLt sean mostrados gráficamente en pantalla. En el caso específico de los resultados numéricos los presenta en forma de líneas de contorno de igual valor o en forma de bandas de contorno de igual ancho de valores.

Para realizar tal función, FLt-PLOT requiere de la existencia de un archivo binario generado por el programa FLt; sin embargo, dicho archivo solo será creado si se le fue especificado un nombre al momento de correr el programa de análisis FLt.

En general, para utilizar FLt-PLOT no se necesita un manual, simplemente se debe seguir algunas pocas instrucciones que se presentan y ejecutar cualquiera de las opciones de los menús.

Para terminar, se muestra a continuación una salida gráfica correspondiente al caso analizado en la Sección 5.2 de esta tesis (cuarto de losa rectangular empotrada, cargada uniformemente), en ella se puede apreciar uno de los tres tipos de gráficos utilizados por el programa FLt-PLOT para mostrar los resultados numéricos.

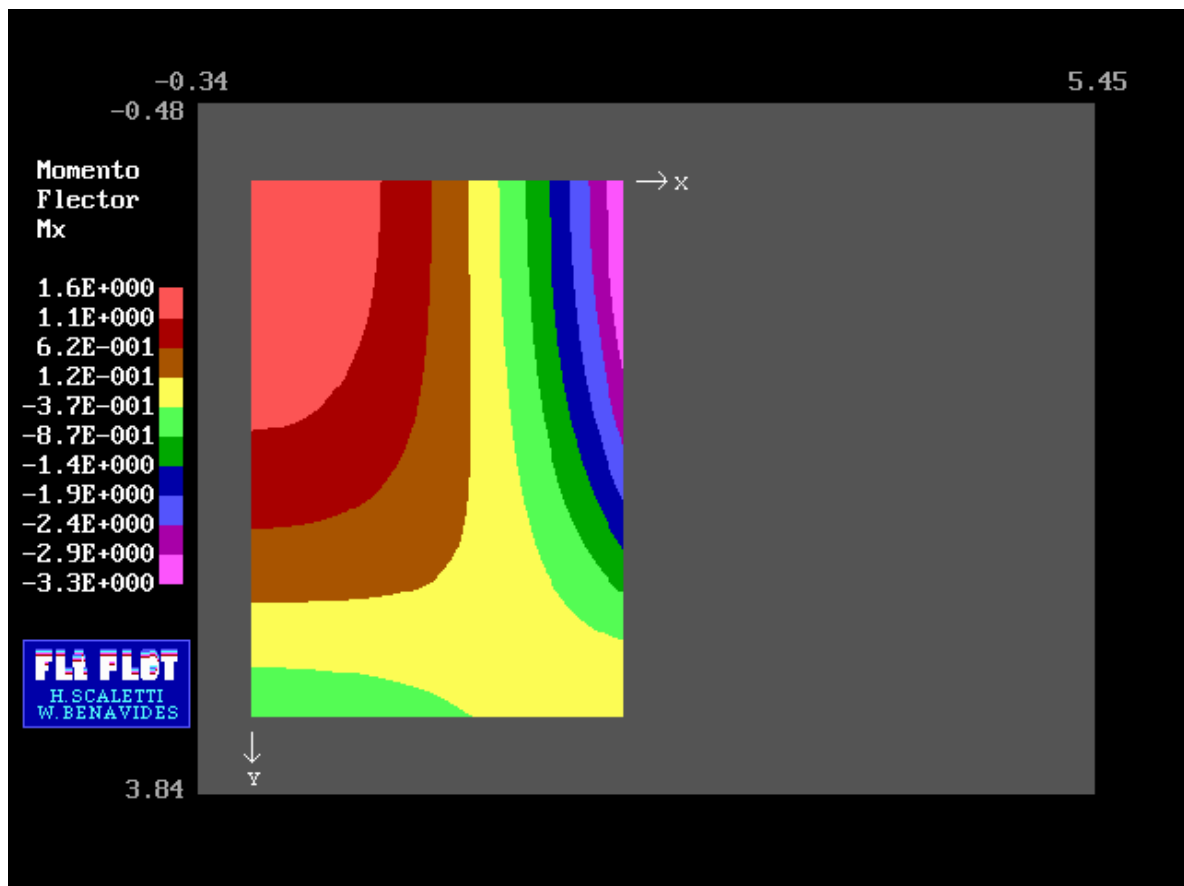


Figura B.1 Gráfico del tipo *Número fijo de Bandas de Contorno*, utilizado en este caso para mostrar los momentos flectores  $M_x$  en forma de bandas de contorno de igual ancho de valores.