

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL DE ESTABILIDAD DINÁMICA DEL SISTEMA DE UNA AERONAVE

INFORME DE SUFICIENCIA

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO ELECTRÓNICO**

PRESENTADO POR:

JIM WEST MONTOYA LEÓN

PROMOCIÓN

2010-I

LIMA-PERÚ

2014

**DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL DE ESTABILIDAD
DINÁMICA DEL SISTEMA DE UNA AERONAVE**

DEDICATORIA:

A mis padres, Carmela y Luis, que siempre persistieron y creyeron en hacer de mi un profesional y hombre correcto. A mis hermanos a quienes amo mucho. A mi amada esposa, Pamela, que siempre está a mi lado para apoyarme y sacar lo mejor de mí. A todos ellos, mi inspiración para seguir mejorando.

SUMARIO

El presente trabajo se basa en las tecnologías de control de trayectoria del vuelo de una aeronave, que han cambiado la forma en que se diseñan y que cada día se consigue que vuelen de manera más eficiente y estable para ello se puede aplicar la técnica de control óptimo.

Aplicando el control óptimo se consigue minimizar el índice de desempeño que se relaciona para controlar la estabilidad dinámica de la aeronave Beaver.

Se inicia convirtiendo el modelamiento del sistema no lineal de la aeronave “Beaver” elaborado en *simulink* por el conjunto de herramientas *FDC (Flight Dynamics and Control)* a un sistema lineal para determinar y convertir el modelo longitudinal y lateral en tiempo continuo a tiempo discreto. En este sistema se incluyen las ecuaciones de estado de los actuadores de los elevadores, alerones y el timón. Sobre este modelo linealizado se aplica el diseño del “control óptimo cuadrático en estado estacionario de seguimiento” que incluye un integrador que corrige el error de la respuesta del sistema.

Se describe también las ecuaciones de estado al agregar los actuadores para el sistema longitudinal y lateral/direccional linealizado.

Mediante *Matlab/Simulink*, se realizan pruebas de los algoritmos, mostrando el comportamiento de la aeronave como respuesta al diseño del control óptimo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	
CONTROL DE LA ESTABILIDAD DE LA AERONAVE DHC-2 BEAVER	2
1.1 La aeronave DHC-2 Beaver	2
1.1.1 Dimensiones	2
1.1.2 Motor	3
1.1.3 Especificaciones de la aeronave DHC-2 Beaver	4
1.1.4 Superficies de control de vuelo	4
1.2 Descripción del problema	7
1.3 Objetivos del trabajo	7
CAPÍTULO II	
DINÁMICA DE VUELO DE UNA AERONAVE	8
2.1 Conceptos básicos	8
2.1.1 Sistemas de referencia	8
2.1.2 Controles aerodinámicos	10
2.1.3 Coeficientes aerodinámicos de fuerza y momento	12
2.1.4 Propiedades del ala	15
2.2 Derivadas de estabilidad	15
2.3 Derivadas de control	18
2.3.1 Derivada de control debido al elevador	18
2.3.2 Derivada de control debido a los alerones	19
2.3.3 Derivada de control debido al timón	19
2.4 Fuerzas y momentos aerodinámicos	19
2.5 Ecuaciones de movimiento para vehículos aéreos	20
2.5.1 Ecuaciones dinámicas longitudinales	26
2.5.2 Ecuaciones dinámicas lateral/direccional	26
2.6 Ecuaciones linealizadas de movimiento	26

2.6.1	Formulación matricial de las ecuaciones de movimiento	29
2.7	Estabilidad dinámica	32
2.7.1	Comportamiento modal longitudinal	33
2.7.2	Comportamiento modal lateral	34
CAPÍTULO III		
CONTROL ÓPTIMO APLICADO A LA ESTABILIDAD DEL BEAVER		37
3.1	Vuelo en estado estacionario	37
3.2	Control de la aeronave DHC-2 Beaver	38
3.2.1	Diseño del controlador de realimentación de estados	38
3.2.2	Control óptimo cuadrático	39
3.2.3	Análisis en tiempo continuo	41
3.2.4	Elaboración de diseño y aplicación del control óptimo	42
CAPÍTULO IV		
ANÁLISIS Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS		56
4.1	Sistema longitudinal	56
4.2	Sistema lateral	57
CONCLUSIONES		87
BIBLIOGRAFÍA		88
ANEXO A		
PROGRAMACIÓN EN MATLAB		89

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Fotografía de una aeronave DHC-2 Beaver [9].	2
Figura 1.2	Dimensiones básicas del DHC-2 Beaver [1].	3
Figura 1.3	Motor Wasp Junior R-985 [12].	3
Figura 1.4	Elevadores [2].	
Figura 1.5	Timón [2].	5
Figura 1.6	Alerón [2].	6
Figura 1.7	Flaps1 [11].	6
Figura 2.1	Sistema de ejes de referencia tierra-fija [3].	8
Figura 2.2	Sistema de coordenadas de referencia llevado al vehículo [3].	9
Figura 2.3	Sistema de referencia de la aeronave [3].	9
Figura 2.4	Sistema de referencia de estabilidad de la aeronave [3].	10
Figura 2.5	Controles aerodinámicos y momentos [3].	11
Figura 2.6	Sustentación y arrastre [5].	13
Figura 2.7	Dibujo de la plataforma del ala [5].	15
Figura 2.8	Velocidad de la aeronave respecto al sistema de referencia de tierra-fija y de la aeronave [3].	21
Figura 2.9	Momento angular de un cuerpo rígido [3].	24
Figura 2.10	Sistemas dinámicamente estables [3].	32
Figura 2.11	Sistemas dinámicamente inestables [3].	33
Figura 2.12	Sistema dinámico neutral [3].	33
Figura 2.13	Representación fasorial de modo de periodo corto [5].	34
Figura 2.14	Representación fasorial de modo de periodo largo [5].	34
Figura 2.15	Movimiento de balanceo puro [5].	35
Figura 2.16	Representación fasorial del modo de balanceo [6].	35
Figura 2.17	Representación fasorial del modo espiral [6].	35
Figura 2.18	Representación fasorial del modo dutch roll [5].	36

Figura 3.1	Referencia de rotación del cabeceo [1].	38
Figura 3.2	Referencia de rotación del giro [1].	39
Figura 3.3	LQR con realimentación de estados elaborado en simulink [13].	40
Figura 3.4	Control óptimo con seguimiento elaborado en simulink [13].	41
Figura 3.5	Sistema no lineal del Beaver elaborado utilizando simulink [7].	44
Figura 3.6	Sistema A/C - longitudinal elaborado en simulink [13].	45
Figura 3.7	Sistema A/C - lateral elaborado en simulink [13].	50
Figura 4.1	Respuesta del sistema dinámico longitudinal del Beaver a lazo abierto elaborado en <i>Matlab</i> [13].	59
Figura 4.2	Comportamiento de la velocidad de la aeronave con respecto al viento elaborado en <i>Matlab</i> [13].	60
Figura 4.3	Comportamiento del ángulo de ataque elaborado en <i>Matlab</i> [13].	61
Figura 4.4	Comportamiento de la velocidad angular de cabeceo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	62
Figura 4.5	Comportamiento del ángulo de cabeceo al agregar el modelo del actuador del elevador elaborado en <i>Matlab</i> [13].	63
Figura 4.6	Comportamiento de la velocidad de la aeronave incluyendo actuador elaborado en <i>Matlab</i> [13].	64
Figura 4.7	Comportamiento del ángulo de ataque incluyendo actuador elaborado en <i>Matlab</i> [13].	65
Figura 4.8	Comportamiento de la velocidad angular de cabeceo incluyendo actuador elaborado en <i>Matlab</i> [13].	66
Figura 4.9	Comportamiento del elevador elaborado en <i>Matlab</i> [13].	67
Figura 4.10	Aplicación del control óptimo sobre el sistema longitudinal elaborado en <i>Matlab</i> [13].	68
Figura 4.11	Comportamiento de la velocidad V bajo el control óptimo del ángulo de cabeceo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	69
Figura 4.12	Comportamiento del ángulo de ataque bajo el control óptimo del ángulo de cabeceo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	70
Figura 4.13	Comportamiento de la velocidad angular q bajo el control óptimo del ángulo de cabeceo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	71
Figura 4.14	Comportamiento del elevador bajo el control óptimo del ángulo de cabeceo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	72

Figura 4.15	Comportamiento del elevador bajo el control óptimo del ángulo de cabeceo <0 - 3 seg> elaborado en <i>Matlab</i> [13].	73
Figura 4.16	Aeronave con ángulo de cabeceo positivo elaborado con <i>Aero.Animation</i> [13].	74
Figura 4.17	Aeronave con ángulo de cabeceo negativo elaborado con <i>Aero.Animation</i> [13].	74
Figura 4.18	Respuesta del sistema dinámico lateral del Beaver a lazo abierto elaborado en <i>Matlab</i> [13].	75
Figura 4.19	Comportamiento del deslizamiento lateral elaborado en <i>Matlab</i> [13].	76
Figura 4.20	Comportamiento de la velocidad angular de balanceo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	77
Figura 4.21	Comportamiento de la velocidad angular de viraje elaborado en <i>Matlab</i> [13].	78
Figura 4.22	Aplicación del control óptimo sobre el sistema lateral elaborado en <i>Matlab</i> [13].	79
Figura 4.23	Comportamiento del deslizamiento lateral bajo el control óptimo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	80
Figura 4.24	Comportamiento de la velocidad angular de balanceo bajo el control óptimo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	81
Figura 4.25	Comportamiento de la velocidad angular de viraje bajo el control óptimo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	82
Figura 4.26	Comportamiento del alerón bajo el control óptimo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	83
Figura 4.27	Comportamiento del timón bajo el control óptimo elaborado en <i>Matlab</i> [13].	84
Figura 4.28	Aeronave con ángulo de balanceo positivo elaborado con <i>Aero.Animation</i> [13].	85
Figura 4.29	Aeronave con ángulo de balanceo negativo elaborado con <i>Aero.Animation</i> [13].	85
Figura 4.30	Trayectoria de vuelo del DHC-2 Beaver elaborado en <i>Matlab</i> [13].	86

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Derivadas de estabilidad longitudinal [4].	21
Tabla 2.2 Derivadas de estabilidad lateral [4].	22

INTRODUCCIÓN

Las tecnologías de control de vuelo han conseguido cambiar de manera sustancial la forma en que se diseñan las aeronaves.

Con las aeronaves actuales se consigue que estas vuelen en condiciones climáticas no favorables, de una manera más eficiente.

En este sentido, se puede brindar ciertas cualidades de vuelo a una aeronave con la ayuda de un conjunto de leyes de control que se programan en un computador. Esto ha causado un gran cambio al sustituir conexiones mecánicas por la tecnología *fly-by-wire*, es decir una interfaz electrónica que interpreta el movimiento de los controles de los pilotos para enviar señales de control a los actuadores para manipular el movimiento de las superficies de control, la primera prueba de esta tecnología en una aeronave se hizo en 1972 en un F-8 modificado. Estos sistemas de control automático de vuelo se pueden diseñar haciendo uso de modelos matemáticos y uso de técnicas de diseños de control consiguiendo un mejor análisis para dicho objeto.

Se han utilizado programas para diseño asistido por computadora como *Matlab/Simulink*, entre otros, con los cuales se consiguen realizar pruebas de los algoritmos y comportamientos al diseño del control.

El presente trabajo abarca el desarrollo de un control de la estabilidad de una aeronave. Para este caso se estudia la aeronave DHC-2 Beaver, iniciando una visión de esta aeronave británica, luego se plantea un sistema control digital para condiciones de vuelo en estado estable. Se introducen conceptos aerodinámicos, el desarrollo de las ecuaciones dinámicas de movimiento, la estabilidad dinámica con sus respectivos comportamientos modales que ayudan a comprender y desarrollar un buen diseño en el control de la estabilidad de vuelo. Finalmente en la etapa de diseño se sintetizan las diferentes configuraciones de control y donde se consideran restricciones para el desarrollo de las mismas, luego se ve la respuesta al control de las variables estado y se analiza el comportamiento para coleccionar información que permita desarrollar el algoritmo de control óptimo en lazo realimentado.

CAPÍTULO I

CONTROL DE LA ESTABILIDAD DE LA AERONAVE DHC-2 BEAVER

1.1 La aeronave DHC-2 Beaver

La aeronave DHC-2 Beaver, que se muestra en la figura 1.1, es una creación de *THE DE HAVILLAND AIRCRAFT OF CANADA LIMITED*. Esta aeronave es del tipo monoplano de grandes alas y toda elaborada de metal, donde entra un piloto y siete pasajeros. Esta aeronave se usa para el transporte de carga, ambulancia, operaciones de rescate, entre otros. Su tren de aterrizaje puede ser reemplazado por flotadores.



Figura 1.1 Fotografía de una aeronave DHC-2 Beaver [9].

1.1.1 Dimensiones

Esta aeronave tiene un ancho de 14.3 m (cobertura de ala), una longitud de cuerda aerodinámica media del ala de 1.6m, un largo de fuselaje de 9.22 m, un ancho de cola de 4.826 m, una altura de 2.74 m, un diámetro de las hélices de 2.59m que se encuentra a un nivel de 30 cm de la superficie. La figura 1.2 muestra un mejor detalle de las dimensiones de la aeronave DHC-2 Beaver.

1.1.2 Motor

Esta aeronave cuenta con un motor “*Wasp Junior*” se muestra en la figura 1.3, cuyo modelo es el R-985SB3 construido por *Pratt and Whitney*.

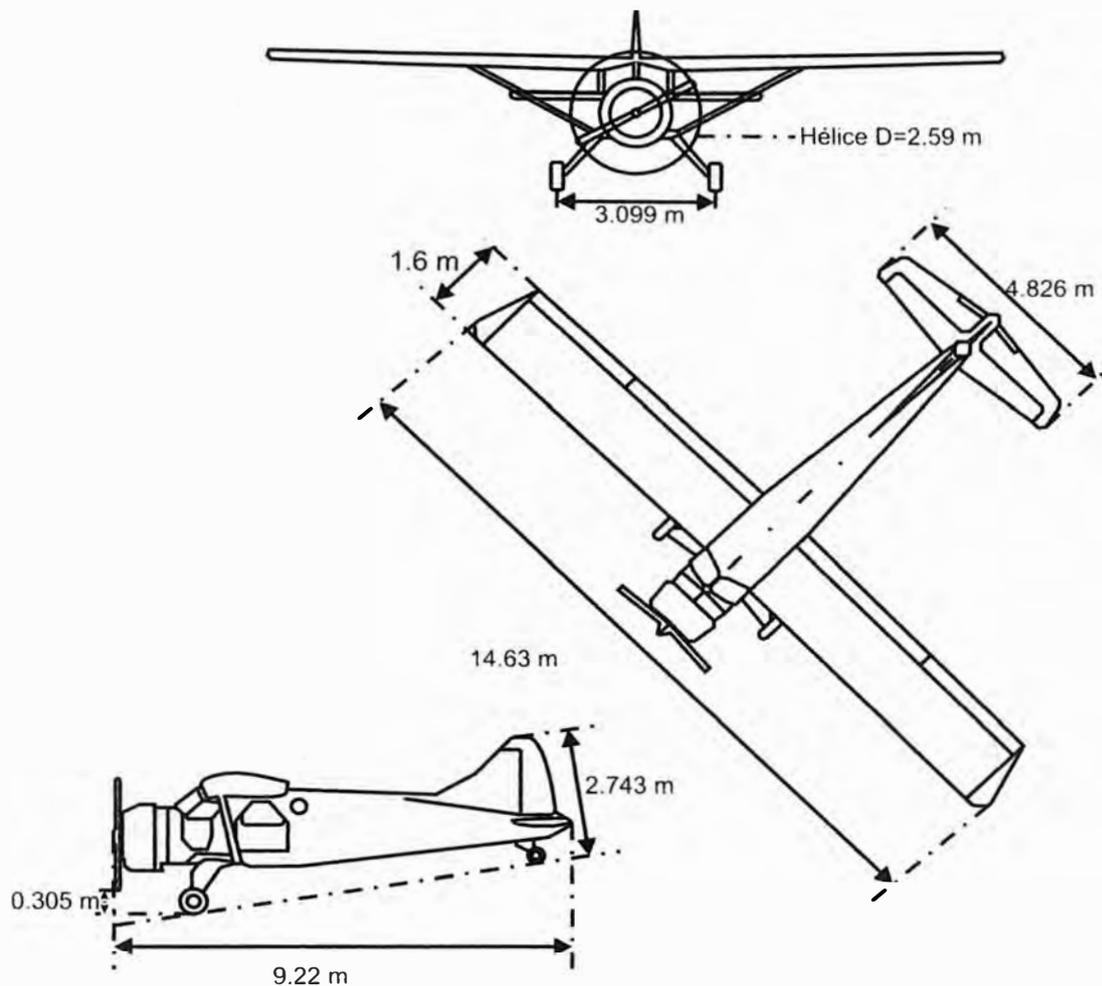


Figura 1.2 Dimensiones básicas del DHC-2 Beaver [1].

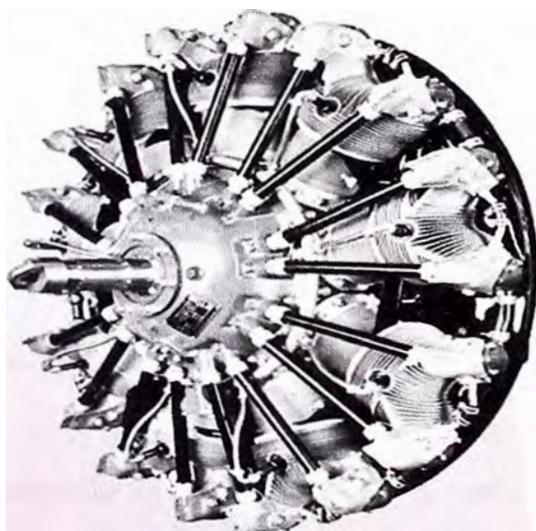


Figura 1.3 Motor *Wasp Junior* R-985 [12].

1.1.3 Especificaciones de la aeronave DHC-2 Beaver

La información sobre las especificaciones se obtiene de la referencia [10] y se detallan a continuación:

a) Características generales

- Tripulación: Un piloto.
- Capacidad: 7 pasajeros.
- Largo: 9.22 m (30 ft 3 in).
- Ancho: 14.63 m (48 ft 0 in).
- Alto: 2.74 m (9 ft 0 in).
- Área del ala: 23.2 m² (250 ft²).
- Peso: 1,360 kg (3,000 lb).
- Peso con carga: 2,310 kg (5,100 lb).
- Carga útil: 950 kg (2,100 lb).
- Motor: 1 *Pratt & Whitney R-985 Wasp Jr. radial engine*, 450 hp (335 kW).

b) Rendimiento

- Velocidad máxima: 255 km/h (158 mph).
- Rango: 732 km (455 miles).
- Altura máxima: 18,000 ft (5,500 m).
- Velocidad de ascenso: 5.2 m/s (1,020 ft/min).

1.1.4 Superficies de control de vuelo

Las superficies de control de vuelo, son las encargadas de las maniobras que realiza una aeronave, debido que a través de estas se logra controlar el viraje, balanceo y cabeceo de la aeronave. Su operación es de manera manual a través de una columna de control y mediante pedales.

a) Elevadores

Los elevadores, se encargan de controlar el cabeceo de la aeronave. Es decir, controla la inclinación de la nariz respecto a una superficie horizontal. Estos son controlados por la columna de mando, con movimientos hacia arriba y hacia abajo. La

figura 1.4 muestra los elevadores.

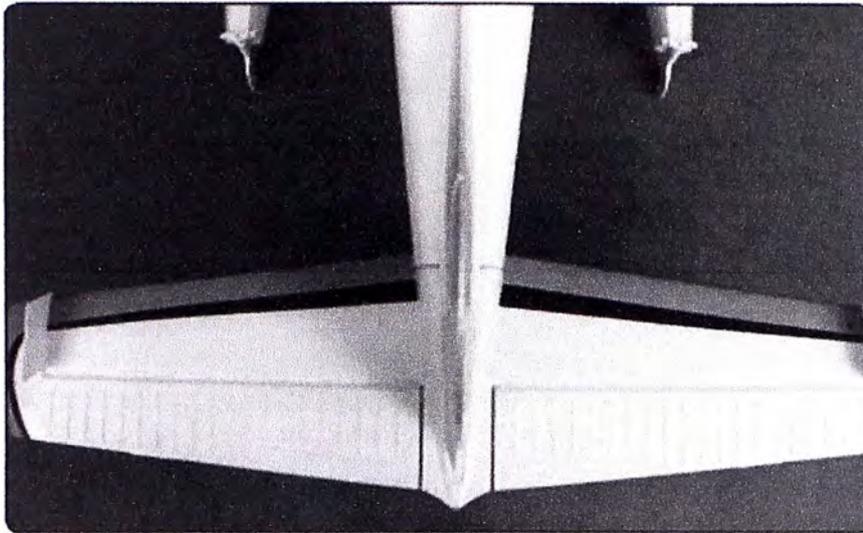


Figura 1.4 Elevadores [2].

b) Timón

El timón es el encargado principalmente del movimiento lateral de la aeronave, es decir del ángulo de viraje. La figura 1.5 nos muestra el timón. Este es controlado de manera diferencial por la presión de los pedales.

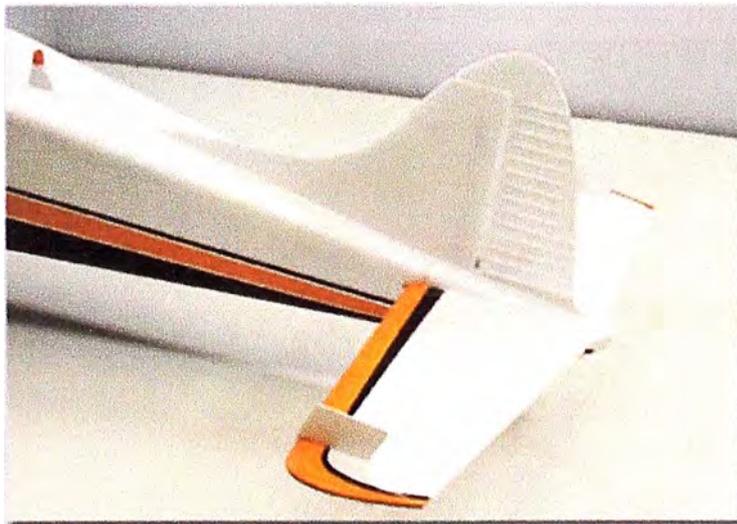


Figura 1.5 Timón [2].

c) Alerones

El ángulo de balanceo de la aeronave, medido entre el eje lateral Y_b de la aeronave y un plano horizontal, es controlado mediante éstas superficies de control. Uno de los alerones se muestra en la figura 1.6. Ambos alerones se controlan con la columna de mando con movimientos hacia la izquierda y hacia la derecha.

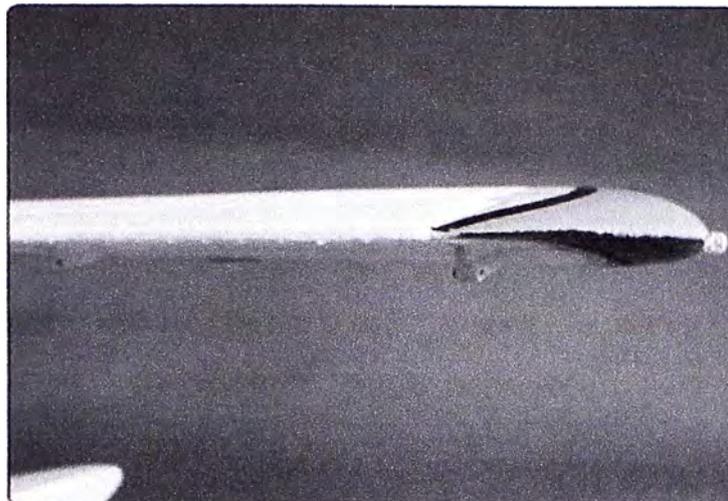


Figura 1.6 Alerón [2].

d) Flaps

Los *flaps*, se utilizan principalmente para aumentar la sustentación y la resistencia durante la aproximación final y el aterrizaje. Estas superficies de control inician en el extremo interno del alerón hasta el fuselaje como se muestra en la figura 1.7. Estos son operados por un cilindro de accionamiento mediante una bomba de mano, debajo del asiento del piloto.

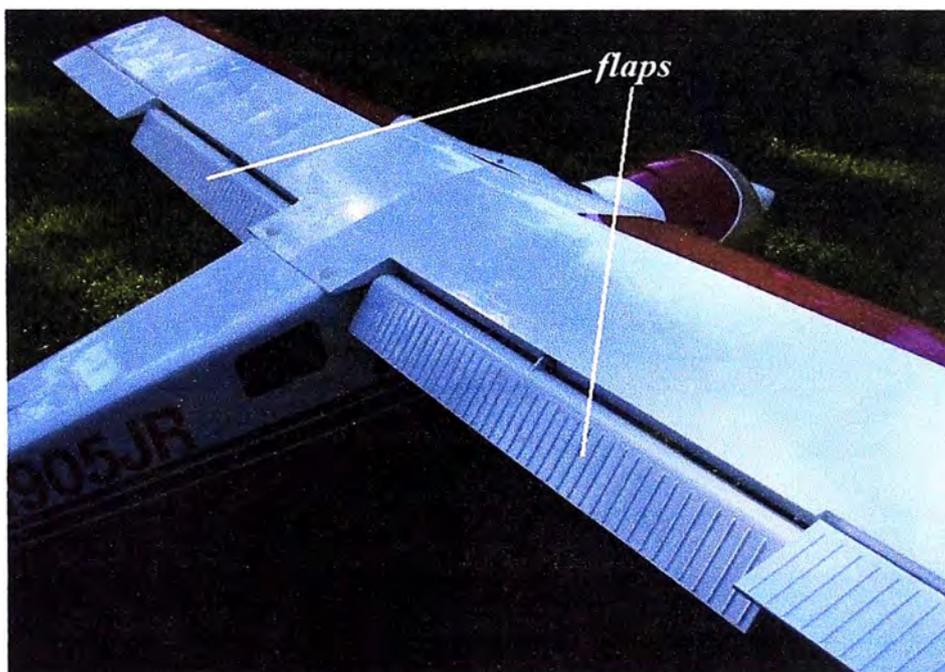


Figura 1.7 Flaps¹ [11].

¹En el presente informe sólo se considera las superficies de control primarias por lo que los flaps no son considerados en las señales de control.

1.2 Descripción del problema

La posibilidad que una aeronave, bajo ciertas condiciones de estabilidad, siga una ruta de vuelo establecida por los puntos de paso (*waypoints*) que marcan la ruta a seguir para completar el plan de vuelo, origina la necesidad de desarrollar un sistema que permita controlar la estabilidad del desplazamiento, vertical y horizontal, sobre todo para viajes largos, motiva la realización del sistema que mantenga un vuelo seguro sin perturbaciones que causen mucho efecto en su estabilidad.

1.3 Objetivos del trabajo

El objetivo es realizar un sistema de control de vuelo para controlar los ángulos de cabeceo, giro y rotación que consiguen manejar la trayectoria de la aeronave para alcanzar ciertas condiciones de estabilidad dinámica.

Este sistema debe ser capaz de controlar las superficies de control vuelo para un desplazamiento en estado estable.

Dicho control se basa en datos ingresados por el piloto, los equipos encargados de adquirir datos sobre la posición y orientación la aeronave.

CAPÍTULO II

DINÁMICA DE VUELO DE UNA AERONAVE

2.1 Conceptos básicos

2.1.1 Sistemas de referencia

Los sistemas de coordenadas son muy útiles en el análisis de movimiento de una aeronave. En esta sección se consideran tres sistemas de coordenadas, como son: el sistema de referencia de tierra-fija, el sistema de referencia llevado al vehículo, el sistema de referencia de la aeronave y el sistema de referencia de estabilidad.

a) Sistema de referencia de tierra-fija

El marco de referencia de tierra-fija, es un sistema ortogonal y se considera fijo en el espacio. Su origen puede ser colocado en una posición arbitraria "fija". En la figura 2.1 podemos apreciar este sistema de referencia.

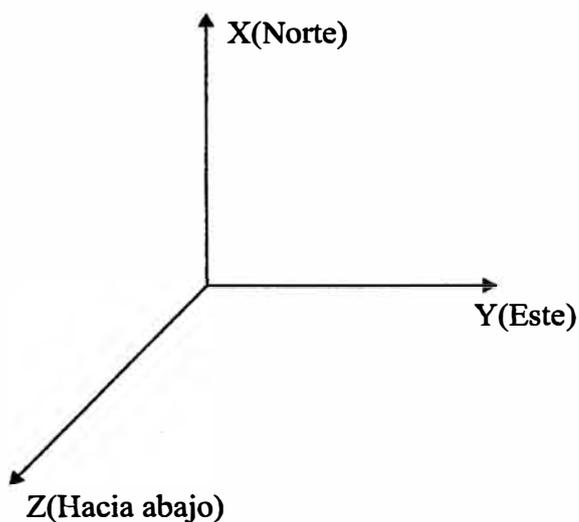


Figura 2.1 Sistema de ejes de referencia tierra-fija [3].

b) Sistema de referencia llevado al vehículo

Este sistema de referencia tiene su origen en el centro de gravedad de la aeronave y sus ejes son paralelos a los ejes del sistema de referencia de coordenadas de tierra-fija. Este

sistema de referencia se muestra en la figura 2.2.

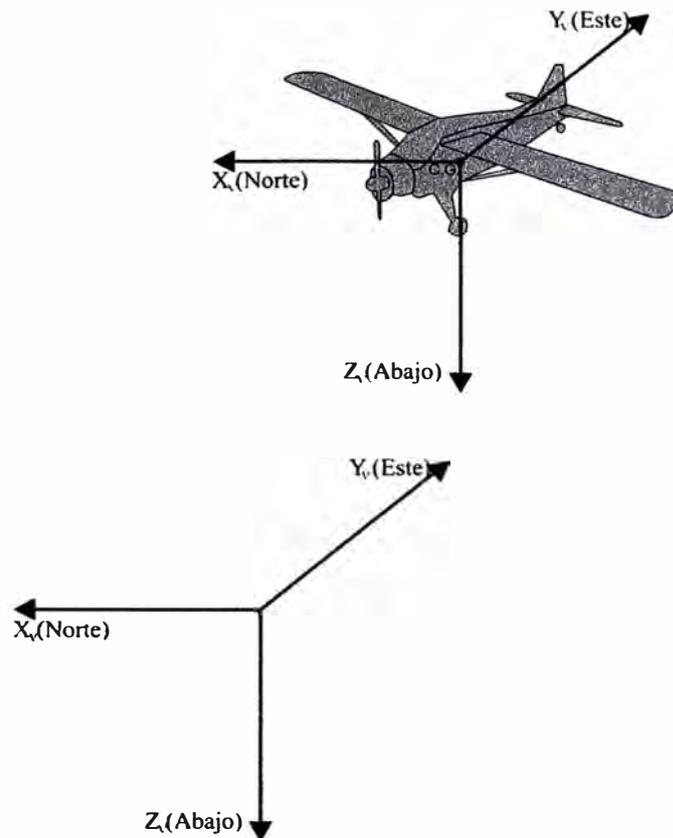


Figura 2.2 Sistema de coordenadas de referencia llevado al vehículo [3].

c) Sistema de referencia de la aeronave

Este sistema de referencia tiene su origen en el centro de gravedad de la aeronave, o cuerpo (del inglés *body*), con sus ejes coordenados se orientan hacia la nariz de la aeronave (Eje X_{b+}), hacia el ala derecha (Eje Y_{b+}) y hacia abajo (Eje Z_{b+}) y perpendicular al plano $X_b Y_b$ como se muestra en la figura 2.3.

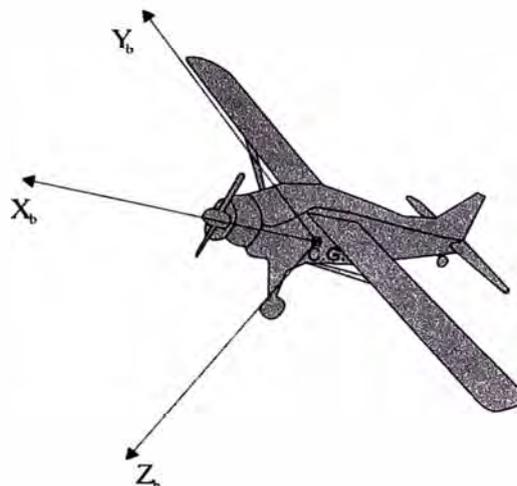


Figura 2.3 Sistema de referencia de la aeronave [3].

d) Sistema de referencia de estabilidad

El sistema de referencia de estabilidad también presenta su origen en el centro de gravedad de la aeronave y los ejes se orientan en la dirección de la velocidad relativa del viento (Eje X_s+), hacia el ala derecha (Eje Y_s+) y perpendicular al plano X_sY_s conservándose sobre el plano XY del sistema de referencia del cuerpo como se muestra en la figura 2.4.

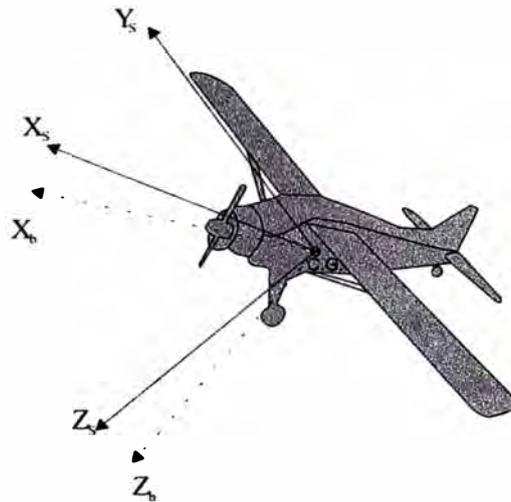


Figura 2.4 Sistema de referencia de estabilidad de la aeronave [3].

2.1.2 Controles aerodinámicos

Una aeronave tiene tres controles aerodinámicos que son el elevador, timón y alerones capaces de producir momentos sobre uno de sus ejes [4]. Estos momentos son definidos sobre el sistema de referencia de la aeronave cuyos ejes son X_b , Y_b y Z_b . Los momentos aerodinámicos L_{cg} , M_{cg} y N_{cg} son las componentes, sobre los ejes X_b , Y_b y Z_b respectivamente, del momento aerodinámico total sobre la aeronave como se muestra en la figura 2.5.

a) Elevador

El elevador está ubicado de manera horizontal en la cola de la aeronave cuya deflexión es caracterizada por el ángulo δ_e y define positivo cuando la superficie gira hacia abajo. El momento M_{cg} producido sobre el eje Y_b es sensible a los cambios en la deflexión del elevador que causan un cambio en el sistema longitudinal de la aeronave. La derivada de control se define conforme a la referencia [4], de la siguiente manera:

$$\Delta M = \frac{dM_{cg}}{d\delta_e} < 0 \quad (2.1)$$

b) Timón

El timón se ubica de manera vertical en la cola de la aeronave y su deflexión es el ángulo δ_r y se considera positivo cuando rota a la izquierda. El momento sobre el eje Z_b se debe al cambio en la deflexión de esta superficie de control que ayuda a controlar el sistema lateral de la aeronave. La derivada de control, según la referencia [4], para esta variación se define como:

$$\Delta N = \frac{dN_{cg}}{d\delta_r} < 0 \quad (2.2)$$

c) Alerones

Los alerones son superficies de control de vuelo, ubicados de manera horizontal en los extremos de las alas de la aeronave, y que están diseñados para una deflexión diferencial que se caracteriza por el ángulo δ_a que es positivo cuando el alerón derecho rota hacia arriba. Estos cambios debidos a los alerones producen un momento L_{cg} sobre el eje X_b por lo que se define su derivada de control, de acuerdo a la referencia [4], como:

$$\Delta L = \frac{dL_{cg}}{d\delta_a} > 0 \quad (2.3)$$

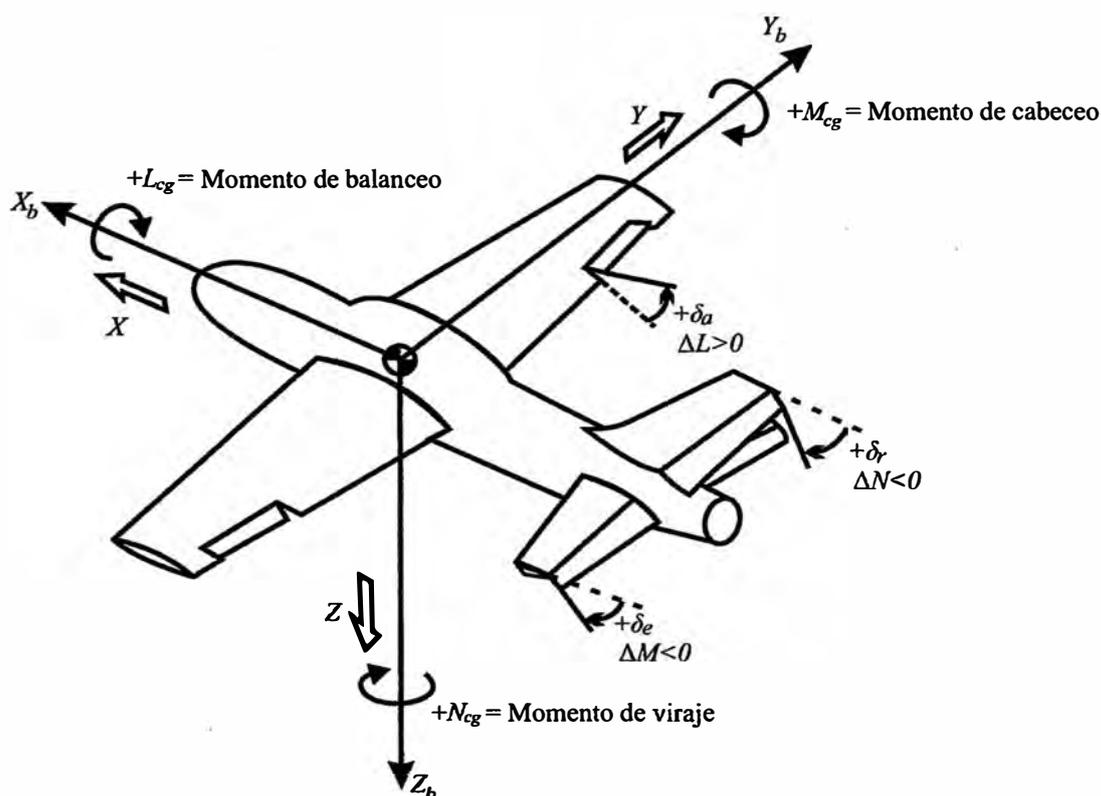


Figura 2.5 Controles aerodinámicos y momentos [5].

2.1.3 Coeficientes aerodinámicos de fuerza y momento

La aerodinámica es el estudio de las fuerzas y el movimiento resultante de los objetos a través del aire.

Los coeficientes aerodinámicos son magnitudes adimensionales utilizados en el estudio aerodinámico y que caracterizan la fuerza y momento aerodinámico que actúan sobre una aeronave al desplazarse a través del aire.

Las fuerzas y momentos aerodinámicos dependen de la forma y dimensiones de un cuerpo, la velocidad de su movimiento de traslación, su orientación a la dirección de la velocidad, las propiedades y el estado del medio en el que el movimiento tiene lugar, y en algunos casos en las velocidades de rotación angular y la aceleración del movimiento del cuerpo. La determinación de las fuerzas y momentos aerodinámicos para cuerpos de diferentes formas en todos los posibles modos de vuelo es uno de los principales problemas de la aerodinámica y de experimentos aerodinámicos y para ello se hacen uso de los coeficientes aerodinámicos.

a) Coeficientes aerodinámicos de fuerza

La fuerza aerodinámica que ejerce el aire sobre un cuerpo que viaja a través de este, es causada debido al movimiento relativo entre ambos. Esta fuerza aerodinámica surge debido a la presión y fricción actuando sobre las superficies de la aeronave.

La fuerza aerodinámica se resuelve en componentes en un sistema rectangular de coordenadas que se asocia con el vector de velocidad V_T del cuerpo (sistema de referencia de estabilidad) o con el propio cuerpo (sistema de referencia de la aeronave).

Al descomponer la fuerza aerodinámica que actúa sobre la aeronave, en sus componentes axiales sobre el sistema de referencia de la aeronave, como se muestra en la figura 2.5, se obtienen los siguientes coeficientes aerodinámicos de fuerza que se definen, conforme a la referencia [5], como:

- Coeficiente aerodinámico de fuerza en la dirección $+X_b$:

$$C_x = \frac{X}{Q\Delta} \quad (2.4)$$

- Coeficiente aerodinámico de fuerza en la dirección $+Y_b$:

$$C_Y = \frac{Y}{QS} \quad (2.5)$$

- Coeficiente aerodinámico de fuerza en la dirección $-Z_b$:

$$C_Z = \frac{Z}{QS} \quad (2.6)$$

Por otro lado al descomponer la fuerza aerodinámica que actúa sobre la aeronave, en sus componentes axiales sobre el sistema de referencia de la estabilidad, como se muestra en la figura 2.6 son la sustentación que es la fuerza actuante sobre un perfil aerodinámico, como las alas, que permite volar a la aeronave y el arrastre que es la resistencia del aire creada por el movimiento de la aeronave a través del aire.

Luego se obtienen los siguientes coeficientes aerodinámicos de fuerza que se definen, conforme a la referencia [5], en dos coeficientes aerodinámicos comúnmente usados que son fuerzas de sustentación y arrastre:

- Coeficiente aerodinámico de fuerza de sustentación en la dirección $-Z_s$:

$$C_L = \frac{L}{QS} = -C_Z \cos \alpha + C_X \sin \alpha \quad (2.7)$$

- Coeficiente aerodinámico de fuerza de arrastre en la dirección $-X_s$:

$$C_D = \frac{D}{QS} = -C_Z \sin \alpha - C_X \cos \alpha \quad (2.8)$$

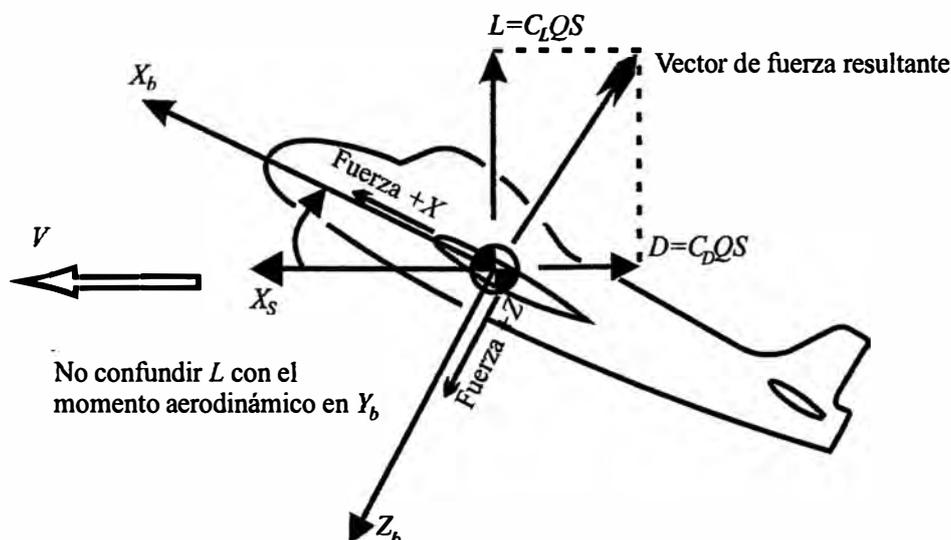


Figura 2.6 Sustentación y arrastre [5].

b) Coeficientes aerodinámicos de momento

El momento aerodinámico es muy importante en el diseño aerodinámico de aeronaves y en la determinación de su estabilidad y controlabilidad, y por lo general se da en la forma de tres componentes, en el sistema de referencia de la aeronave: el momento de balanceo L , el momento de viraje N y el momento de cabeceo M .

Al descomponer el momento aerodinámico sobre los ejes axiales del sistema de referencia de la aeronave, como se muestra en la figura 2.5, se obtienen los siguientes coeficientes aerodinámicos de momento que se definen, conforme con la referencia [5], como:

- Coeficiente aerodinámico de momento en el X_b :

$$C_l = \frac{L}{QSb} \quad (2.9)$$

- Coeficiente aerodinámico de momento en el Y_b :

$$C_m = \frac{M}{QSc} \quad (2.10)$$

- Coeficiente aerodinámico de momento en el Z_b :

$$C_n = \frac{N}{QSb} \quad (2.11)$$

donde:

X, Y, Z : Fuerzas en la dirección del eje longitudinal, lateral y vertical de la aeronave.

L, D : Fuerza de sustentación (*Lift*) y arrastre (*Drag*).

L, M, N : Momento de balanceo, cabeceo y viraje de la aeronave.

Q : Presión dinámica.

S : Área del ala.

b : Envergadura del ala (*Wing span*).

c : Cuerda aerodinámica media del ala.

La expresión de las fuerzas y momentos aerodinámicos en forma de coeficientes aerodinámicos son muy importante en los estudios aerodinámicos y cálculos,

simplificándolos considerablemente. Así, por ejemplo, es claro que la fuerza aerodinámica que actúa sobre un avión puede alcanzar valores muy grandes en comparación con un modelo a escala probado en un túnel de viento, pero los coeficientes aerodinámicos de la aeronave y el modelo serán iguales.

2.1.4 Propiedades del ala

Al considerar las superficies geométricas que se describen como sustentadoras se tienen a las alas. La proyección de la forma geométrica en el plano XY y se denomina área del ala S . El esquema del ala se aprecia en la figura 2.7.

El área se puede calcular de la siguiente manera:

$$S = \int_{-b/2}^{b/2} c(y) dy = 2 \int_0^{b/2} c(y) dy \quad (2.12)$$

$$c = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} (c(y))^2 dy \quad (2.13)$$

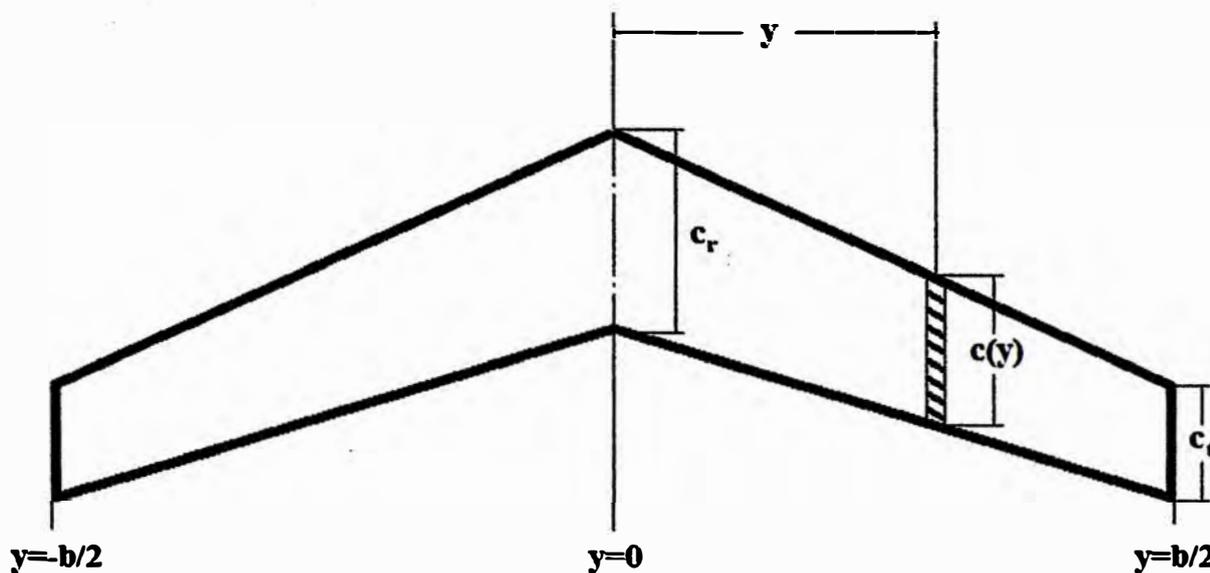


Figura 2.7 Dibujo de la plataforma del ala [5].

2.2 Derivadas de estabilidad

Las derivadas de estabilidad miden el cambio que ocurre en la fuerza o momento que actúa sobre la aeronave cuando hay un pequeño cambio en un parámetro de condición de vuelo, denominados estados, tales como el ángulo de ataque, velocidad, altitud, etc. Estas

derivadas se definen de acuerdo a la referencia [5] para la estabilidad longitudinal y lateral como veremos a continuación.

2.2.1 Derivadas de estabilidad longitudinal

Las derivadas de estabilidad longitudinales se deben a cambios por ejemplo en la velocidad, al ángulo de ataque y de la velocidad angular de cabeceo (*pitch-rate*).

Las derivadas de estabilidad debido a las perturbaciones en la velocidad longitudinal u , se definen como:

- Derivada de estabilidad de fuerza en X_s debido a una perturbación en u :

$$X_u = \frac{1}{m} \frac{dX}{du} = \frac{S}{mV} \frac{d(QC_X)}{d(u/V)} \quad (2.14)$$

- Derivada de estabilidad de fuerza en Z_s debido a una perturbación en u :

$$Z_u = \frac{1}{m} \frac{dZ}{du} = \frac{S}{mV} \frac{d(QC_Z)}{d(u/V)} \quad (2.15)$$

- Derivada de estabilidad de momento en Y_s debido a una perturbación en u :

$$M_u = \frac{1}{I_y} \frac{dM}{du} = \frac{Sc}{I_y V} \frac{d(QC_m)}{d(u/V)} \quad (2.16)$$

Similarmente las derivadas de estabilidad debido a perturbaciones en el ángulo de ataque α , se definen:

- Derivada de estabilidad de fuerza en X_s debido a una perturbación en α :

$$X_\alpha = \frac{QS}{m} \frac{dC_X}{d\alpha} \quad (2.17)$$

- Derivada de estabilidad de fuerza en Z_s debido a una perturbación en α :

$$Z_\alpha = \frac{QS}{m} \frac{dC_Z}{d\alpha} \quad (2.18)$$

- Derivada de estabilidad de momento en Y_s debido a una perturbación en α :

$$M_\alpha = \frac{Sc}{I_y} \frac{dC_m}{d\alpha} \quad (2.19)$$

La velocidad angular de cabeceo q produce fuerzas y momentos sobre la aeronave, siendo este último el más dominante. Las derivadas de estabilidad se definen como:

- Derivada de estabilidad de fuerza en X_s , debido a la velocidad angular q :

$$X_q = -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{D_q} = 0 \quad (2.20)$$

- Derivada de estabilidad de fuerza en Z_s , debido a a la velocidad angular q :

$$Z_q = -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{L_q} \quad (2.21)$$

- Derivada de estabilidad de momento en Y_s , debido a la velocidad angular q :

$$M_q = -\frac{QS}{I_y} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{m_q} \quad (2.22)$$

2.2.2 Derivadas de estabilidad lateral/direccional

En esta sección consideran, de manera similar, las derivadas de estabilidad lateral debido a cambios en el deslizamiento lateral (*sideslip*), la velocidad angular de viraje sobre el eje vertical (*yaw-rate*) y la velocidad angular de balanceo sobre el eje longitudinal (*roll-rate*).

Las perturbaciones de deslizamiento lateral β hace posible la definición de las derivadas de estabilidad:

- Derivada de estabilidad de fuerza en Y_s , debido a un cambio en β :

$$Y_\beta = \frac{QS}{m} \frac{dC_Y}{d\beta} \quad (2.23)$$

- Derivada de estabilidad de momento en X_s , debido a un cambio en β :

$$L_\beta = \frac{QSb}{I_x} \frac{dC_l}{d\beta} \quad (2.24)$$

- Derivada de estabilidad de momento en Z_s , debido a un cambio en β :

$$N_\beta = \frac{QSb}{I_z} \frac{dC_n}{d\beta} \quad (2.25)$$

Las derivadas de estabilidad a causa de la velocidad angular de viraje r se definen:

- Derivada de estabilidad de fuerza en Y_s debido a un cambio en r :

$$Y_r = \frac{QS}{m} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{Y_r} \quad (2.26)$$

- Derivada de estabilidad de momento en X_s debido a un cambio en r :

$$L_r = \frac{Q S b}{I_x} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{l_r} \quad (2.27)$$

- Derivada de estabilidad de momento en Z_s debido a un cambio en r :

$$N_r = \frac{Q S b}{I_z} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{n_r} \quad (2.28)$$

También se define, la derivada de estabilidad debido a la velocidad angular de balanceo, como:

- Derivada de estabilidad de fuerza en Y_s debido a un cambio en r :

$$Y_r = \frac{QS}{m} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{Y_r} \quad (2.29)$$

- Derivada de estabilidad de momento en X_s debido a un cambio en r :

$$L_p = \frac{Q S b}{I_x} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{l_p} \quad (2.30)$$

- Derivada de estabilidad de momento en Z_s debido a un cambio en r :

$$N_p = \frac{Q S b}{I_z} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{n_p} \quad (2.31)$$

2.3 Derivadas de control

Las derivadas de control que originan cambios en los momentos de la aeronave en los sus ejes se deben a las superficies de control como el elevador, alerón y timón.

2.3.1 Derivada de control debido al elevador

El elevador produce un momento de cabeceo (*pitch*), que es el giro de la aeronave sobre el eje lateral Y_s , y está dado por:

$$M_{\delta_e} \equiv \frac{1}{I_y} \frac{dM}{d\delta_e} \quad (2.32)$$

2.3.2 Derivada de control debido a los alerones

Los alerones producen un momento de balanceo (*rolling*), que es el giro de la aeronave sobre el eje longitudinal X_s , y está dado por:

$$L_{\delta_a} \equiv \frac{1}{I_x} \frac{dL}{d\delta_a} \quad (2.33)$$

2.3.3 Derivada de control debido al timón

El timón produce un momento de viraje, que es el giro de la aeronave sobre el eje vertical Z_s , y está dado por:

$$N_{\delta_r} \equiv \frac{1}{I_z} \frac{dN}{d\delta_r} \quad (2.34)$$

2.4 Fuerzas y momentos aerodinámicos

Las perturbaciones en las fuerzas y momentos aerodinámicos son funciones de las perturbaciones en las variables de estado y entradas de control. Las más importantes dependencias se representan en el sistema longitudinal y lateral.

Las perturbaciones de fuerzas y momentos longitudinales se deben a las variables de estado u , w , \dot{w} , q y δ_e como se muestra a continuación:

- Perturbaciones de fuerza en el eje X_b :

$$\Delta X = \frac{dX}{du} u + \frac{dX}{dw} w + \frac{dX}{d\delta_e} \delta_e \quad (2.35)$$

- Perturbaciones de fuerza en el eje Z_b :

$$\Delta Z = \frac{dZ}{du} u + \frac{dZ}{dw} w + \frac{dZ}{d\dot{w}} \dot{w} + \frac{dZ}{dq} q + \frac{dZ}{d\delta_e} \delta_e \quad (2.36)$$

- Perturbaciones de momento en el eje Y_b :

$$\Delta M = \frac{dM}{du} u + \frac{dM}{dw} w + \frac{dM}{d\dot{w}} \dot{w} + \frac{dM}{dq} q + \frac{dM}{d\delta_e} \delta_e \quad (2.37)$$

donde:

u : Componente de la velocidad de la aeronave en el eje X_b .

w : Componente de la velocidad de la aeronave en el eje Z_b .

\dot{w} : Variación de la velocidad w .

q : Velocidad angular de cabeceo.

δ_e : Deflexión del elevador.

Mientras tanto las perturbaciones de fuerzas y momentos laterales se deben a las variables de estado v , p , r , δ_r y δ_a como se muestra a continuación:

- Perturbaciones de fuerza en el eje Y_b :

$$\Delta Y = \frac{dY}{dv} v + \frac{dY}{dp} p + \frac{dY}{dr} r + \frac{dY}{d\delta_r} \delta_r \quad (2.38)$$

- Perturbaciones de momento en el eje X_b :

$$\Delta L = \frac{dL}{dv} v + \frac{dL}{dp} p + \frac{dL}{dr} r + \frac{dL}{d\delta_r} \delta_r + \frac{dL}{d\delta_a} \delta_a \quad (2.39)$$

- Perturbaciones de momento en el eje Z_b :

$$\Delta N = \frac{dN}{dv} v + \frac{dN}{dp} p + \frac{dN}{dr} r + \frac{dN}{d\delta_r} \delta_r + \frac{dN}{d\delta_a} \delta_a \quad (2.40)$$

donde:

v : Componente de la velocidad de la aeronave en el Y_b .

p : Velocidad angular de balanceo.

r : Velocidad angular de viraje.

δ_r : Deflexión del timón.

δ_a : Deflexión del alaerón.

De las ecuaciones (2.35), (2.36), (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40) se definen las derivadas de estabilidad [4] de fuerzas y momentos, según las tablas 2.1 y 2.2:

2.5 Ecuaciones de movimiento para vehículos aéreos

Una aeronave es capaz de moverse libremente bajo 6 grados de libertad. Se puede mover hacia adelante, hacia los lados y de manera vertical. Los otros 3 movimientos son de

giro alrededor de sus ejes con viraje, cabeceo y balanceo.

La figura 2.8 nos muestra la velocidad de la aeronave respecto de los dos sistemas de referencia de tierra-fija (inercial) y de la aeronave.

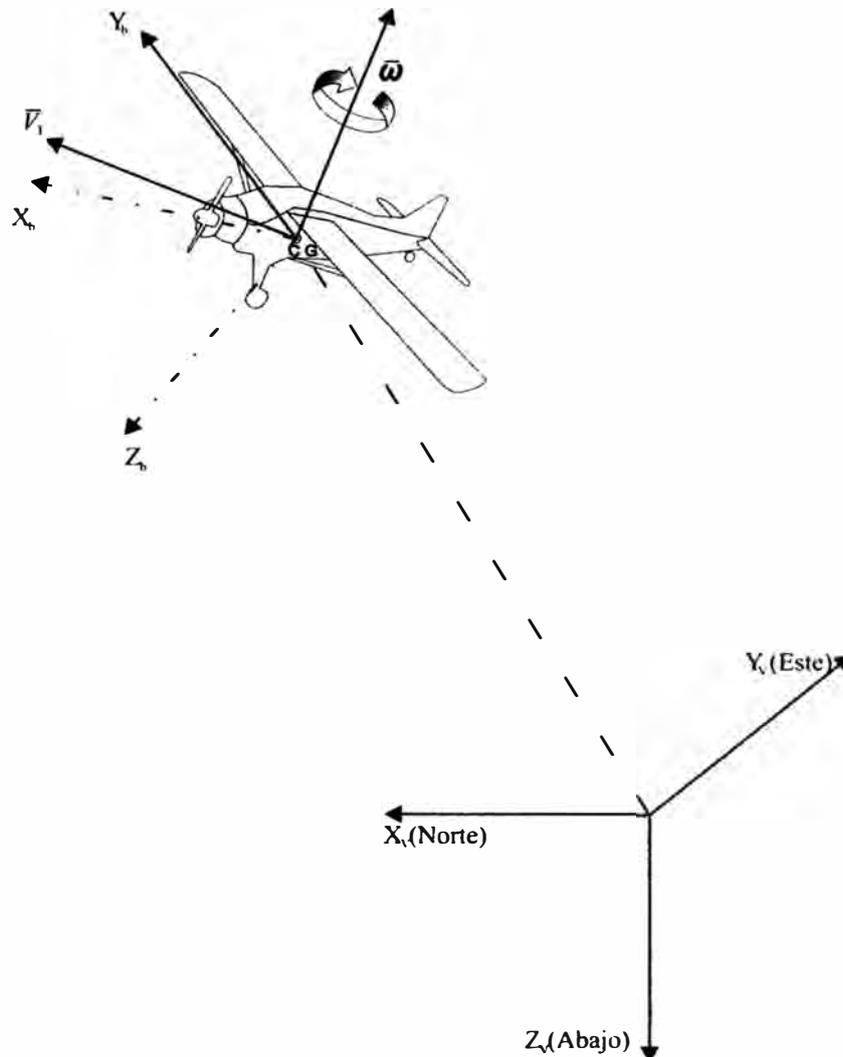


Figura 2.8 Velocidad de la aeronave respecto al sistema de referencia de tierra-fija y de la aeronave [3].

Tabla 2.1 Derivadas de estabilidad longitudinal [4].

i	u	w	\dot{w}	q	δ_e
X_i	$\frac{1}{m} \frac{dX}{du}$	$\frac{1}{m} \frac{dX}{dw}$	-	-	$\frac{1}{m} \frac{dX}{d\delta_e}$
Z_i	$\frac{1}{m} \frac{dZ}{du}$	$\frac{1}{m} \frac{dZ}{dw}$	$\frac{1}{m} \frac{dZ}{d\dot{w}}$	$\frac{1}{m} \frac{dZ}{dq}$	$\frac{1}{m} \frac{dZ}{d\delta_e}$
M_i	$\frac{1}{I_y} \frac{dM}{du}$	$\frac{1}{I_y} \frac{dM}{dw}$	$\frac{1}{I_y} \frac{dM}{d\dot{w}}$	$\frac{1}{I_y} \frac{dM}{dq}$	$\frac{1}{I_y} \frac{dM}{d\delta_e}$

Tabla 2.2 Derivadas de estabilidad lateral [4].

i	v	p	r	δ_r	δ_a
Y_i	$\frac{1}{m} \frac{dY}{dv}$	$\frac{1}{m} \frac{dY}{dp}$	$\frac{1}{m} \frac{dY}{dr}$	$\frac{1}{m} \frac{dY}{d\delta_r}$	-
L_i	$\frac{1}{I_x} \frac{dL}{dv}$	$\frac{1}{I_x} \frac{dL}{dp}$	$\frac{1}{I_x} \frac{dL}{dr}$	$\frac{1}{I_x} \frac{dL}{d\delta_r}$	$\frac{1}{I_x} \frac{dL}{d\delta_a}$
N_i	$\frac{1}{I_z} \frac{dN}{dv}$	$\frac{1}{I_z} \frac{dN}{dp}$	$\frac{1}{I_z} \frac{dN}{dr}$	$\frac{1}{I_z} \frac{dN}{d\delta_r}$	$\frac{1}{I_z} \frac{dN}{d\delta_a}$

La ecuación general que describe la traslación de un cuerpo rígido de acuerdo a la segunda ley de Newton es:

$$\bar{F} = \frac{d(m\bar{V}_T)}{dt} \Big|_{XYZ} \quad (2.41)$$

De la figura 2.7 se deduce la siguiente ecuación:

$$\frac{d\bar{V}_T}{dt} \Big|_{XYZ} = \frac{d\bar{V}_T}{dt} \Big|_{x_b y_b z_b} + \bar{\omega} \times \bar{V}_T \quad (2.42)$$

Se asume que la masa no varía en el tiempo por lo tanto la ecuación (2.41) se despeja la masa y se reemplaza la ecuación (2.42) para obtener:

$$\bar{F} = m \left[\frac{d\bar{V}_T}{dt} \Big|_{x_b y_b z_b} + \bar{\omega} \times \bar{V}_T \right] \quad (2.43)$$

donde:

$$\frac{d\bar{V}_T}{dt} \Big|_{x_b y_b z_b} = \frac{du}{dt} \hat{i} + \frac{dv}{dt} \hat{j} + \frac{dw}{dt} \hat{k} \quad (2.44)$$

$$\bar{\omega} \times \bar{V}_T = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (2.45)$$

Luego reemplazando las ecuaciones (2.44) y (2.45) en la ecuación (2.43) se obtiene:

$$\bar{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad (2.46)$$

donde:

$$F_x = m \left(\frac{du}{dt} + qw - rv \right)$$

$$F_y = m \left(\frac{dv}{dt} + ru - pw \right)$$

$$F_z = m \left(\frac{dw}{dt} + pv - qu \right)$$

De la segunda ley de Newton también deducimos la ecuación general para el cambio de momento angular \bar{H} de acuerdo a:

$$\bar{G} = \frac{d(\bar{H})}{dt} |_{XYZ} \quad (2.47)$$

De la figura 2.9 se deduce el momento angular para un elemento de masa m , como:

$$\bar{H}_m = m(\bar{r} \times \bar{V}_T) \quad (2.48)$$

Pero al analizar la velocidad respecto al sistema de referencia inercial tenemos que:

$$\bar{V}_T = \frac{d\bar{r}}{dt} |_{x_b y_b z_b} + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (2.49)$$

La aeronave es asumido un cuerpo rígido, entonces la ecuación (2.49) se reduce a:

$$\bar{V}_T = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (2.50)$$

Reemplazando la ecuación (2.50) en la ecuación (2.48) se obtiene:

$$\bar{H}_m = m[\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] \quad (2.51)$$

Luego el momento angular \bar{H} total de la aeronave queda definido como:

$$\bar{H} = \int_V \rho_A [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dV \quad (2.52)$$

donde:

ρ_A : Densidad de masa de la aeronave.

V : Volumen de la aeronave.

\bar{r} : Vector desde el origen del sistema inercial al sistema de la aeronave.

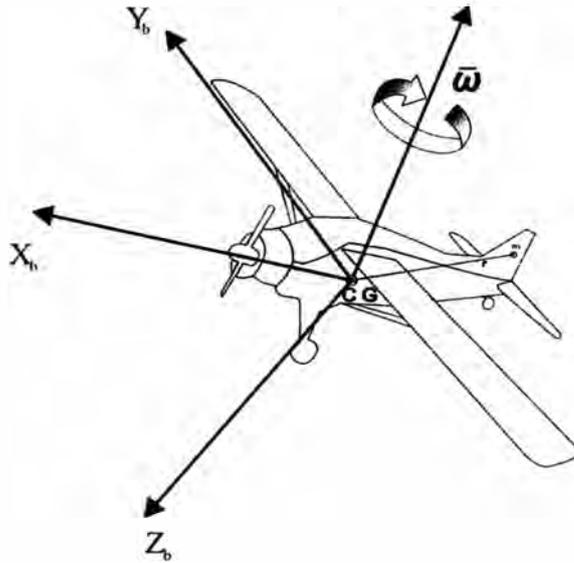


Figura 2.9 Momento angular de un cuerpo rígido [3].

Los términos de la ecuación (2.52), son:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (2.53)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (2.54)$$

Luego reemplazando las ecuaciones (2.53) y (2.54) en la ecuación (2.52) obtenemos:

$$\vec{H} = \int_V \rho_A \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ qz - ry & rx - pz & py - qx \end{vmatrix} dV \quad (2.55)$$

Desarrollando la ecuación (2.55) obtenemos sus componentes de \vec{H} :

$$H_x = p \underbrace{\int_V \rho_A (y^2 + z^2) dV}_{I_x} - q \underbrace{\int_V \rho_A xy dV}_{I_{xy}=0} - r \underbrace{\int_V \rho_A xz dV}_{I_{xz}} \quad (2.56)$$

$$H_y = q \underbrace{\int_V \rho_A (x^2 + z^2) dV}_{I_y} - r \underbrace{\int_V \rho_A yz dV}_{I_{yz}=0} - p \underbrace{\int_V \rho_A xy dV}_{I_{xy}=0} \quad (2.57)$$

$$H_z = r \underbrace{\int_V \rho_A (x^2 + y^2) dV}_{I_z} - p \underbrace{\int_V \rho_A xz dV}_{I_{zx}} - q \underbrace{\int_V \rho_A yz dV}_{I_{yz}=0} \quad (2.58)$$

En las ecuaciones (2.56), (2.57) y (2.58) los términos I_x , I_y , I_z , I_{xz} , I_{yz} y I_{xy} son los momentos de inercia. Debido a la simetría respecto al plano $X_b Z_b$, los términos I_{xy} y I_{yz} son iguales a cero.

De la ecuación (2.47) y la figura 2.8 obtenemos lo siguiente:

$$\bar{G} = \frac{d\bar{H}}{dt} |_{x_b y_b z_b} + \bar{\omega} \times \bar{H} \quad (2.59)$$

Luego de las reemplazando las ecuaciones (2.56), (2.57) y (2.58) en la ecuación (2.59), se obtiene:

$$\bar{G} = G_x \hat{i} + G_y \hat{j} + G_z \hat{k} \quad (2.60)$$

donde:

$$G_x = \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) - (\dot{r} + pq)I_{xz}$$

$$G_y = \dot{q}I_y - pr(I_z - I_x) + (p^2 - r^2)I_{xz}$$

$$G_z = \dot{r}I_z + pq(I_y - I_x) + (qr - \dot{p})I_{xz}$$

Por lo tanto las ecuaciones que describen el movimiento de una aeronave son dadas por la relación entre las fuerzas y momentos según se muestran a continuación:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - qu \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \dot{p} \\ I_y \dot{q} \\ I_z \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qr(I_z - I_y) \\ pr(I_x - I_z) \\ pq(I_y - I_x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\dot{r} + pq) \\ p^2 - r^2 \\ qr - \dot{p} \end{bmatrix} I_{xz} \quad (2.62)$$

Reescribiendo las ecuaciones para representar aquellas que definen las fuerzas y momentos aerodinámicos longitudinales y lateral/direccional respectivamente:

2.5.1 Ecuaciones dinámicas longitudinales

Puede existir un estado de equilibrio longitudinal sólo cuando el vector de gravedad está en el plano XZ , por lo que tales estados corresponden a un vuelo las alas niveladas (que puede estar subiendo, bajando o a nivel).

La condición para el estado de equilibrio longitudinal es que las variables lateral/direccional v, p, r son todos cero. Como resultado, la fuerza lateral Y y el momento de balanceo L y momento de viraje N también son cero.

2.5.2 Ecuaciones dinámicas lateral/direccional

Para el estado de equilibrio lateral tiene como condición que las variables longitudinales u, w, q son todos cero. Como resultado, las fuerzas X y Z , y el momento de cabeceo M también son cero.

2.6 Ecuaciones linealizadas de movimiento

Una aeronave puede cambiar su configuración de vuelo muy rápido, como en la transición de la fase ascenso a la fase crucero, desacelerar para entrar en fase aproximación, etc.

Para realizar la linealización de las ecuaciones de movimiento se considera una condición de vuelo fijo para nuestro proceso.

Entonces se toman importantes consideraciones para un análisis de perturbación que incluye lo siguiente:

Condición de vuelo en equilibrio estático. Es decir, movimiento dinámicos pequeños.

Uso de los ejes de referencia de estabilidad.

Las fuerzas que actúan sobre la aeronave se expresan según la referencia [5] como:

$$F_x = X_0 + \Delta X(t) - mg(\sin\theta) \quad (2.63)$$

$$F_y = Y_0 + \Delta Y(t) + mg(\cos\theta)(\sin\phi) \quad (2.64)$$

$$F_z = Z_0 + \Delta Z(t) + mg(\cos\theta)(\cos\phi) \quad (2.65)$$

Los momentos que actúan sobre la aeronave se definen con respecto a su centro de gravedad (c.g.) y sobre los ejes de estabilidad, de acuerdo a la referencia [5], de la siguiente manera:

$$G_x = L = L_0 + \Delta L(t) \quad (2.66)$$

$$G_y = M = M_0 + \Delta M(t) \quad (2.67)$$

$$G_z = N = N_0 + \Delta N(t) \quad (2.68)$$

Los términos como X_0 y L_0 representan los valores de equilibrio de su correspondiente componente de fuerza y momento respectivamente, mientras que los términos como ΔX y ΔL son los términos de fuerzas y momentos aerodinámicos.

Reemplazando las ecuaciones (2.63), (2.64), (2.65), (2.66), (2.67) y (2.68) en las ecuaciones (2.61) y (2.62) se obtienen las siguiente expresiones:

$$X_0 + \Delta X(t) - mg_0(\sin\Theta) = m(\ddot{u} + qw - rv) \quad (2.69)$$

$$Y_0 + \Delta Y(t) + mg_0(\cos\Theta)(\sin\Phi) = m(\ddot{v} + ru - pw) \quad (2.70)$$

$$Z_0 + \Delta Z(t) + mg_0(\cos\Theta)(\cos\Phi) = m(\ddot{w} + pv - qu) \quad (2.71)$$

$$L_0 + \Delta L(t) = I_x \dot{p} - I_{xz}(pq + \dot{r}) + qr(I_z - I_y) \quad (2.72)$$

$$M_0 + \Delta M(t) = I_y \dot{q} + I_{xz}(p^2 - r^2) + pr(I_x - I_z) \quad (2.73)$$

$$N_0 + \Delta N(t) = I_z \dot{r} + I_{xz}(qr - \dot{p}) + pq(I_y - I_x) \quad (2.74)$$

Para la linealización de las variables dependientes del tiempo consideremos que tienen un valor inicial de equilibrio además de una pequeña perturbación.

$$u = u_0 + u(t) \quad (2.75)$$

$$v = v_0 + v(t) = v(t) \quad (2.76)$$

$$w = w_0 + w(t) = w(t) \quad (2.77)$$

$$p = p_0 + p(t) = p(t) \quad (2.78)$$

$$q = q_0 + q(t) = q(t) \quad (2.79)$$

$$r = r_0 + r(t) = r(t) \quad (2.80)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \theta(t) \quad (2.81)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \phi(t) = \phi(t) \quad (2.82)$$

Se considera que el movimiento de la aeronave inicia con un nivel de alas niveladas con sus correspondientes ejes de estabilidad por lo que es posible eliminar los términos v_0 , w_0 , p_0 , q_0 , r_0 y Φ_0 . Además se asume que la velocidad $u_0 = V_0$.

Las relaciones de fuerza en las ecuaciones (2.69), (2.70) y (2.71) involucran funciones trigonométricas que pueden linealizadas debido a que se considera un estado de equilibrio que es afectado por pequeñas de perturbación generando con ello pequeñas variaciones de los ángulos, por lo tanto $\theta(t)$ y $\phi(t)$ se asumen mucho menores que 1° y al reemplazar ecuaciones (2.81) y (2.82) en sus respectivas funciones trigonométricas obtenemos:

$$\sin\Theta = \sin\Theta_0 + (\cos\Theta_0)\theta(t) \quad \text{para } \theta(t) \ll 1^\circ \quad (2.83)$$

$$\cos\Theta = \cos\Theta_0 - (\sin\Theta_0)\theta(t) \quad (2.84)$$

$$\sin\Phi = \phi(t) \quad \text{para } \Phi_0 = 0 \quad \text{y } \phi(t) \ll 1^\circ \quad (2.85)$$

$$\cos\Phi = 1 \quad (2.86)$$

Un instante antes que inicien las perturbaciones de fuerzas y momentos aerodinámicos y considerando las ecuaciones (2.83), (2.84), (2.85) y (2.86) obtenemos la condición de equilibrio como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$X_0 - mg_0(\sin\Theta_0) = 0 \quad (2.87)$$

$$Y_0 = 0 \quad (\sin\Phi_0 = 0) \quad (2.88)$$

$$Z_0 + mg_0(\cos\Theta_0) = 0 \quad (2.89)$$

Por otro lado antes de que la aeronave salga de su condición de equilibrio las velocidades angulares y aceleraciones resultan cero, por lo tanto no existen momentos aerodinámicos respecto al sistema de ejes de estabilidad de la aeronave y se obtiene lo

siguiente:

$$L_0 = 0 \quad (2.90)$$

$$M_0 = 0 \quad (2.91)$$

$$N_0 = 0 \quad (2.92)$$

Finalmente, las ecuaciones linealizadas de perturbaciones de fuerzas y momentos aerodinámicos se expresan como:

$$\Delta X(t) - mg_0(\cos\Theta_0)\theta(t) = m\dot{u} \quad (2.93)$$

$$\Delta Y(t) + mg_0(\cos\Theta_0)\phi(t) = m(\dot{v} + u_0 r) \quad (2.94)$$

$$\Delta Z(t) + mg_0(\sin\Theta_0)\theta(t) = m(\dot{w} - u_0 q) \quad (2.95)$$

$$\Delta L(t) = I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \quad (2.96)$$

$$\Delta M(t) = I_y \dot{q} \quad (2.97)$$

$$\Delta N(t) = I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \quad (2.98)$$

2.6.1 Formulación matricial de las ecuaciones de movimiento

Reemplazando las ecuaciones (2.35), (2.36), (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40) en las ecuaciones (2.93), (2.94), (2.95), (2.96), (2.97) y (2.98) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{d}{d} \frac{X}{u} + \frac{d}{d} \frac{X}{w} + \frac{d}{d\delta_e} \frac{X}{\delta_e} - mg_0(\cos\Theta_0)\theta(t) = m\dot{u} \quad (2.99)$$

$$\frac{d}{dv} \frac{Y}{v} + \frac{d}{dp} \frac{Y}{p} + \frac{d}{dr} \frac{Y}{r} + \frac{d}{d\delta_r} \frac{Y}{\delta_r} - mg_0(\cos\Theta_0)\phi(t) = m(\dot{v} + u_0 r) \quad (2.100)$$

$$\frac{d}{d} \frac{Z}{u} + \frac{d}{d} \frac{Z}{w} + \frac{d}{d\dot{w}} \frac{Z}{\dot{w}} + \frac{d}{dq} \frac{Z}{q} + \frac{d}{d\delta_e} \frac{Z}{\delta_e} - mg_0(\sin\Theta_0)\theta(t) = m(\dot{w} - u_0 q) \quad (2.101)$$

$$\frac{dL}{dv} v + \frac{dL}{dp} p + \frac{dL}{dr} r + \frac{dL}{d\delta_r} \delta_r + \frac{dL}{d\delta_a} \delta_a = I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \quad (2.102)$$

$$\frac{dM}{du}u + \frac{dM}{dw}w + \frac{dM}{d\dot{w}}\dot{w} + \frac{dM}{dq}q + \frac{dM}{d\delta_e}\delta_e = I_y\dot{q} \quad (2.103)$$

$$\frac{dN}{dv}v + \frac{dN}{dp}p + \frac{dN}{dr}r + \frac{dN}{d\delta_r}\delta_r + \frac{dL}{d\delta_a}\delta_a = I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} \quad (2.104)$$

a) Matrices de la dinámica longitudinal

Reemplazando las expresiones de la tabla 2.1 en las ecuaciones (2.99), (2.101) y (2.103) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\dot{u} = X_u u + X_w w - g_0(\cos\Theta_0)\theta + X_{\delta_e}\delta_e \quad (2.105)$$

$$(1 - Z_{\dot{w}})\dot{w} = Z_u u + Z_w w + (u_0 + Z_q)q - g_0(\sin\Theta_0)\theta + Z_{\delta_e}\delta_e \quad (2.106)$$

$$-M_{\dot{w}}\dot{w} + \dot{q} = M_u u + M_w w + M_q q + M_{\delta_e}\delta_e \quad (2.107)$$

Por otro lado se obtiene:

$$\dot{\theta} = q \quad (2.108)$$

El vector de variables de estado se define:

$$x = [u \quad w \quad q \quad \theta]^T \quad (2.109)$$

El vector de control se precisa como:

$$\delta = [\delta_e] \quad (2.110)$$

La ecuación matricial presenta la siguiente forma:

$$I_n \dot{x} = A_n x + B_n \delta \quad (2.111)$$

donde:

$$A_n = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g_0 \cos\Theta_0 \\ Z_u & Z_w & u_0 + Z_q & -g_0 \sin\Theta_0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - Z_{\dot{w}}) & 0 & 0 \\ 0 & -M_{\dot{w}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_n = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Despejando el vector \dot{x} de la ecuación (2.111) se obtiene:

$$\dot{x} = [I_n]^{-1} A_n x + [I_n]^{-1} B_n \delta \quad (2.112)$$

$$\dot{x} = Ax + B\delta \quad (2.113)$$

b) Matrices de la dinámica lateral/direccional

Correspondientemente se reemplazan las expresiones de la tabla 2.2 en las ecuaciones (2.100), (2.102) y (2.104) y se obtienen las siguientes expresiones:

$$\dot{v} = Y_v v + Y_p p + g_0(\cos\Theta_0)\theta + (Y_r - u_0)r + Y_{\delta_r} \delta_r \quad (2.114)$$

$$\dot{p} - \frac{I_{xz}}{I_x} \dot{r} = L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_r} \delta_r + L_{\delta_a} \delta_a \quad (2.115)$$

$$-\frac{I_{xz}}{Z} \dot{p} + \dot{r} = N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_r} \delta_r + N_{\delta_a} \delta_a \quad (2.116)$$

Vector de variables de estado:

$$x = [v \quad p \quad \phi \quad r]^T \quad (2.117)$$

Vector de control:

$$\delta = [\delta_r \quad \delta_a]^T \quad (2.118)$$

La ecuación matricial presenta la siguiente forma:

$$I_n \dot{x} = A_n x + B_n \delta \quad (2.119)$$

donde:

$$A_n = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & g_0(\cos\Theta_0) & Y_r - u_0 \\ L_v & L_p & 0 & L_r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ N_v & N_p & 0 & N_r \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{I_{xz}}{I_x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{I_{xz}}{I_z} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_n = \begin{bmatrix} Y_{\delta_r} & 0 \\ L_{\delta_r} & L_{\delta_a} \\ 0 & 0 \\ N_{\delta_r} & N_{\delta_a} \end{bmatrix}$$

Despejando el vector \dot{x} la ecuación (2.119) se obtiene:

$$\dot{x} = [I_n]^{-1} A_n x + [I_n]^{-1} B_n \delta \quad (2.120)$$

$$\dot{x} = Ax + B\delta \quad (2.121)$$

2.7 Estabilidad dinámica

El análisis de estabilidad dinámica de un sistema físico se refiere al movimiento resultante en el tiempo del sistema cuando es sacado de su condición de equilibrio. Es decir que los periodos y amortiguamientos de las oscilaciones varían con la configuración y condiciones de vuelo.

Es posible describir el tipo de respuesta que tendrá un sistema conociendo las raíces de su ecuación característica en el plano complejo. Una respuesta de primer orden será asociado con cada raíz real, y un par conjugado complejo tendrá una respuesta de segundo orden ya sea estable, neutralmente estable o inestable como se muestra en las figuras 2.10, 2.11 y 2.12.

Un sistema complejo tal como un avión podría tener una ecuación característica con varias raíces, y la respuesta total de un sistema de este tipo será la suma de las respuestas asociadas a cada raíz. Esta sección explica brevemente los comportamientos modales de un sistema dinámicamente estable ante pequeñas perturbaciones.

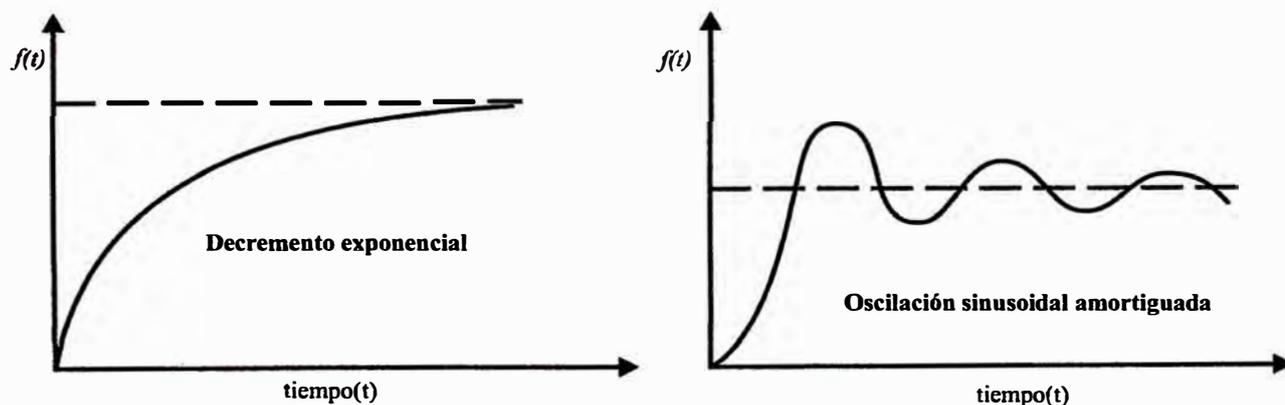


Figura 2.10 Sistemas dinámicamente estables [3].

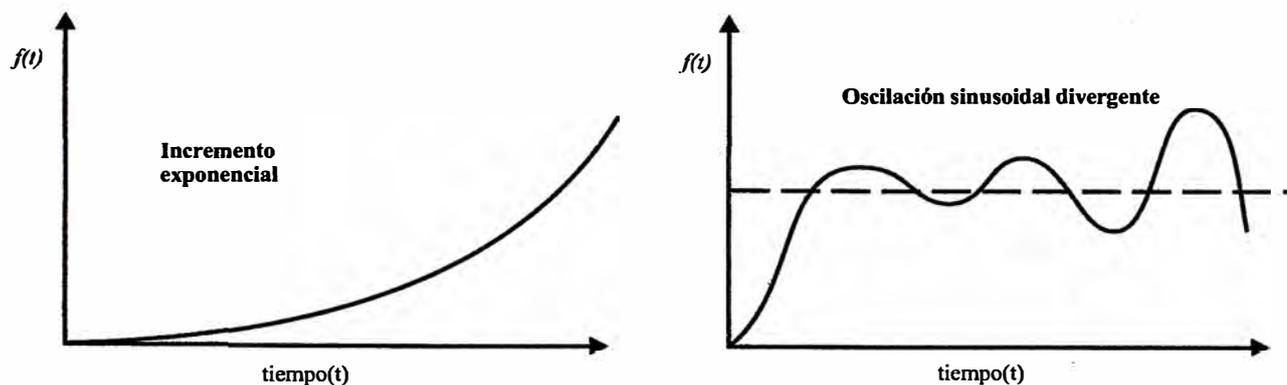


Figura 2.11 Sistemas dinámicamente inestables [3].

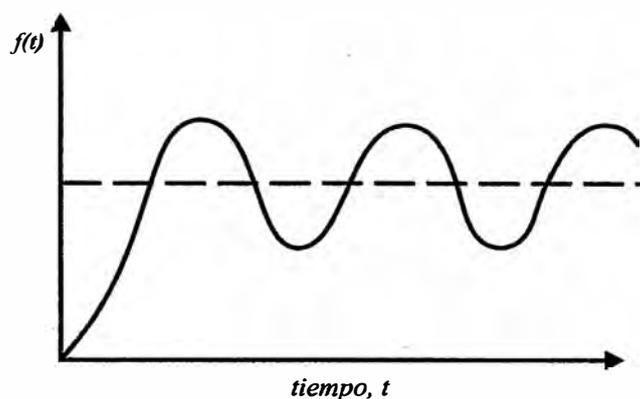


Figura 2.12 Sistema dinámico neutral [3].

2.7.1 Comportamiento modal longitudinal

La respuesta natural de la aeronave a perturbaciones longitudinales consiste principalmente de dos modos amortiguados: modo de periodo corto (*short period*) y modo de periodo largo (*Phugoid*).

a) Modo de periodo corto

Este modo es fuertemente amortiguado que implica que la velocidad no cambia sino que aquí se origina un movimiento de cabeceo rápido donde se presenta una variación en el ángulo de ataque.

El modo de periodo corto se puede apreciar mejor con su diagrama fasorial según la figura 2.13, aquí se observa que la magnitud de la velocidad angular de cabeceo es mucho mayor que el ángulo de ataque y el ángulo de cabeceo, que son muy cercanos en magnitud.

b) Modo de periodo largo

En este comportamiento modal se produce una gran variación en la velocidad, ángulo de cabeceo y altitud pero casi sin variar el ángulo de ataque. La aproximación se puede dar

ya que α es casi constante y entonces el movimiento provoca que q sea muy pequeño. Su diagrama fasorial se aprecia en la figura 2.14.

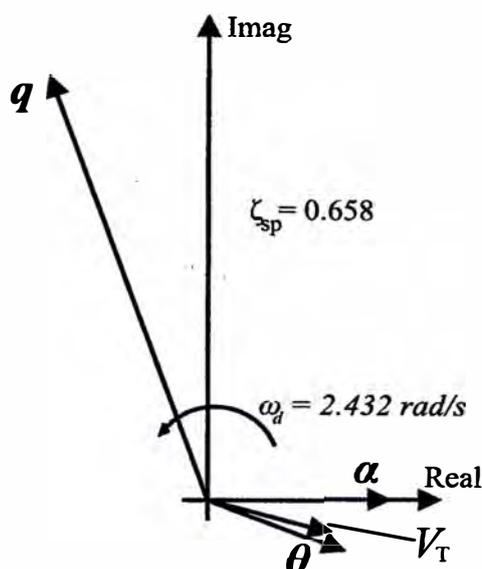


Figura 2.13 Representación fasorial de modo de periodo corto [5].

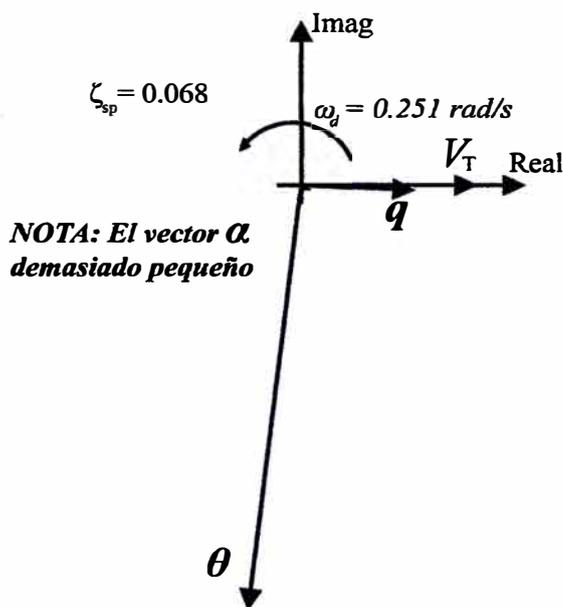


Figura 2.14 Representación fasorial de modo de periodo largo [5].

2.7.2 Comportamiento modal lateral

La respuesta natural de la aeronave a perturbaciones longitudinales consiste principalmente de dos modos amortiguados: modo de periodo corto (*short period*) y modo.

La respuesta natural de la aeronave a perturbaciones lateral/direccional presentan dos modos exponenciales (modo balanceo y espiral), donde el modo de balanceo (*rolling*) es muy amortiguado, y un modo oscilatorio amortiguado (*ducth-roll*).

a) Modo de balanceo

Este modo consiste de un movimiento de balanceo casi puro, según la figura 2.15, de no ser por un pequeño movimiento lateral (*sideslip*).

El modo de balanceo, típicamente, se ve como un balanceo puro por lo que se pueden aproximar sólo con las ecuaciones del momento de balanceo y la perturbación p . La representación fasorial se muestra en la figura 2.16.

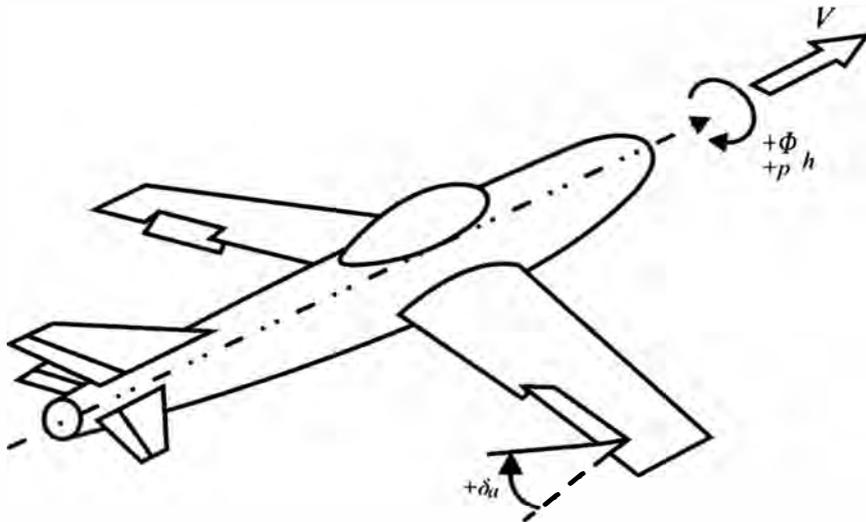


Figura 2.15 Movimiento de balanceo puro [5].

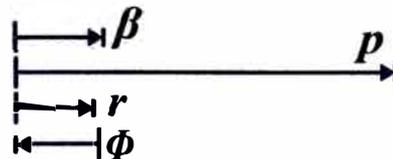


Figura 2.16 Representación fasorial del modo de balanceo [6].

b) Modo espiral

Aquí se puede apreciar un movimiento generalmente coordinado de balanceo y guiñada. Este movimiento es lento por lo que el movimiento lateral es relativamente pequeño. La representación fasorial se muestra en la figura 2.17.

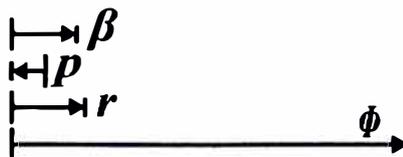


Figura 2.17 Representación fasorial del modo espiral [6].

c) Modo *dutch roll*

Este comportamiento modal es un movimiento coordinado de balanceo, movimiento

CAPÍTULO III

CONTROL ÓPTIMO APLICADO A LA ESTABILIDAD DEL BEAVER

3.1 Vuelo en estado estacionario

El vuelo de una aeronave en estado estacionario se puede definir como una condición en la cual todos componentes de fuerza y momento aerodinámicos en el sistema de referencia de la aeronave son constantes o cero. Con ello los ángulos y velocidades angular deben ser constantes y sus derivadas iguales a cero [8].

De lo anterior nuestras condiciones de vuelo estacionario son $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ y $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ (o $\dot{V}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}$) son idénticamente cero con las siguientes restricciones adicionales para la condición de vuelo:

- Vuelo de alas niveladas estables: En un nivel de vuelo estacionario donde un avión se mueve con velocidad constante a una altitud constante. Aquí la velocidad es paralela al plano horizontal es decir el eje X_S del sistema de referencia de estabilidad.

$$\phi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} = 0 \therefore p, q, r = 0 \quad (3.1)$$

- Vuelo con viraje estable: Esta condición de vuelo se ve que la aeronave cambia su dirección con una velocidad constante de viraje, con un ángulo de cabeceo constante y con balanceo nulo.

$$\phi, \dot{\theta} = 0, \dot{\psi} = \text{velocidad de viraje} \quad (3.2)$$

- Ascenso estable: En un ascenso constante una aeronave sube a velocidad constante debido a la variación del ángulo de cabeceo sin virar y/o balancearse.

$$\phi, \dot{\phi}, \dot{\psi} = 0, \dot{\theta} = \text{velocidad de ascenso} \quad (3.3)$$

- Balanceo estable: Bajo esta condición de vuelo la aeronave realiza sus maniobras de vuelo con un ángulo de cabeceo y viraje constante.

$$\dot{\theta}, \dot{\psi} = 0, \dot{\phi} = \text{velocidad de rotación} \quad (3.4)$$

3.2 Control de la aeronave DHC-2 Beaver

Las funciones del control básicamente son: dirección y control. Entonces cuando se habla de dirección (*guidance*) se refiere a la determinación del curso y velocidad que toma la aeronave y se describe el control, al desarrollo y aplicación de fuerzas y momentos determinados al avión.

3.2.1 Diseño del controlador de realimentación de estados

Un sistema de control se puede diseñar utilizando la realimentación de estados con la finalidad de proporcionar una nueva estructura en los valores propios para el sistema en lazo cerrado.

Haciendo uso de esta técnica se realiza las configuraciones para el control de estabilidad del sistema longitudinal y lateral de una aeronave.

a) Control retroalimentado longitudinal

En esta sección se describe la realización del control de la orientación del ángulo de cabeceo, es decir se debe el ángulo θ . Esto permite controlar el ángulo de inclinación de la aeronave, sobre el eje lateral de la aeronave y el plano horizontal, según la figura 3.1, al aplicar una deflexión adecuada de los elevadores para conseguir un ángulo θ adecuado.

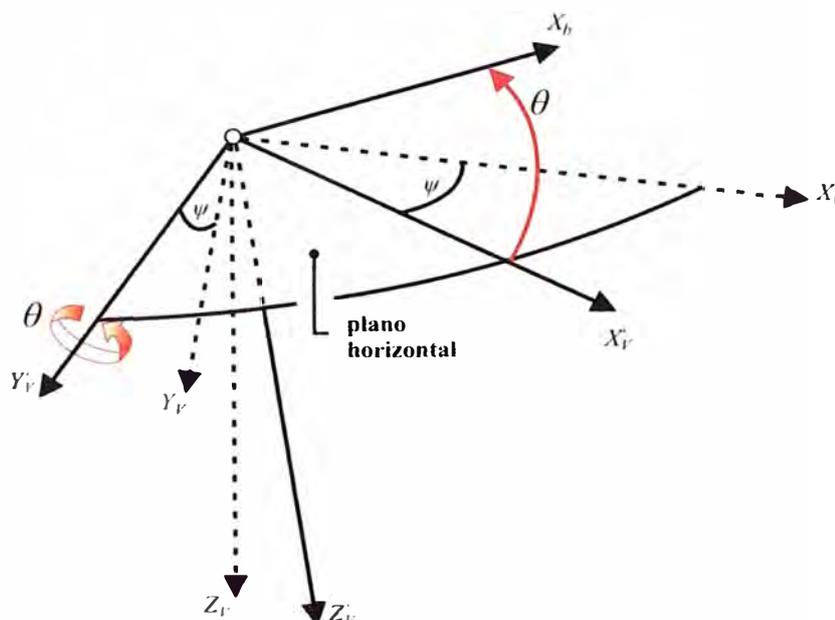


Figura 3.1 Referencia de rotación del cabeceo [1].

b) Control retroalimentado lateral/direccional

En esta parte se describe el control de la orientación del ángulo de balance, es decir se controla el ángulo ϕ que muestra en la figura 3.2. Esto permite controlar el ángulo de inclinación de la aeronave, con respecto al eje longitudinal, al aplicar una deflexión adecuada de los alerones y el timón.

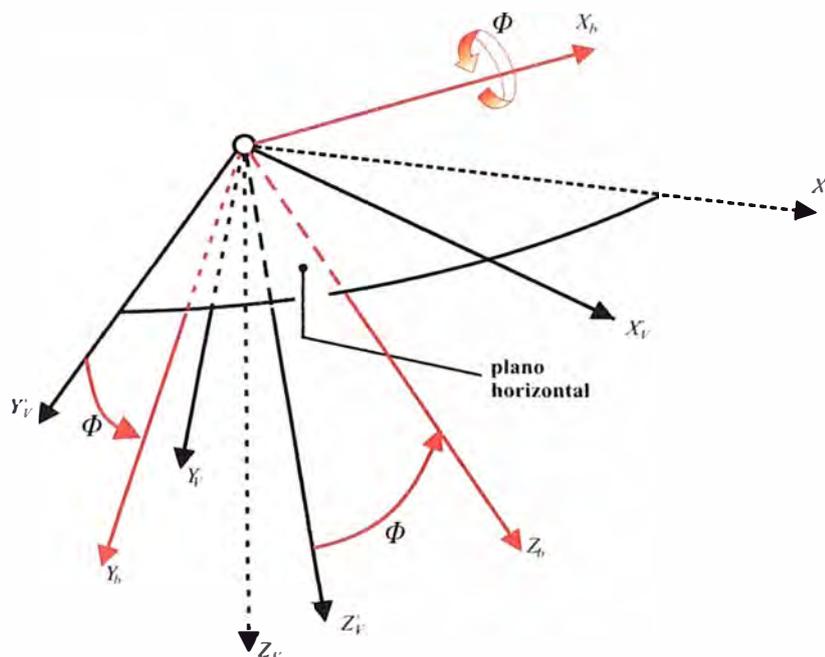


Figura 3.2 Referencia de rotación del giro [1].

3.2.2 Control óptimo cuadrático

Un índice de desempeño determina la configuración de un sistema y en control óptimo se busca minimizar (o maximizar) este índice.

Algo que se debe tener en cuenta es que un sistema no será óptimo siempre para diferentes índices de desempeño.

a) Regulador cuadrático lineal (LQR)

El caso en el que la dinámica del sistema se describe por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales y la función de costo se describe por una función cuadrática se denomina un problema LQ . Uno de los principales resultados de la teoría es que la solución la proporciona el regulador cuadrático lineal (LQR), un controlador de retroalimentación cuyas ecuaciones se dan a continuación de acuerdo al esquema de la figura 3.3,

Las ecuaciones de estado se escriben como:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.5)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.6)$$

además:

$$u(k) = -Kx(k) \quad (3.7)$$

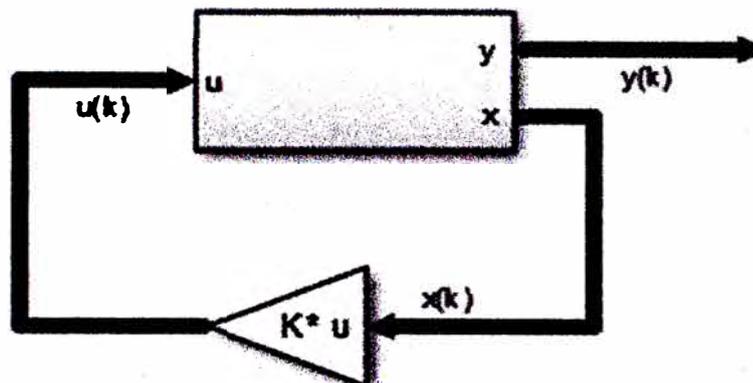


Figura 3.3 LQR con realimentación de estados elaborado en simulink [13].

El control óptimo de un sistema lineal, en el espacio de estado discreto y dado por la ecuación de estado (3.5), la ecuación (3.7) define el vector de control $u(k)$ que conduce los estados de una condición inicial a una final deseada, de manera que para un índice de rendimiento específico según la ecuación (3.8), es minimizado.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] \quad (3.8)$$

donde las matrices de ponderación Q y R son simétricas definidas positivas.

b) Control óptimo cuadrático en estado estacionario de seguimiento (proporcional-integral)

En la figura 3.4 se muestra el diagrama para un control óptimo cuadrático en estado estacionario de seguimiento cuyas ecuaciones del sistema presentan similitud con las ecuaciones (3.5) y (3.6).

De la figura 3.4 se deducen las siguientes ecuaciones:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (3.9)$$

$$u(k) = -Kx(k) + K_I v(k)$$

$$u(k) = [K \quad -K_I] \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De las ecuaciones (3.5), (3.6), (3.9) y (3.10) se obtiene:

$$v(k+1) = v(k) + r(k+1) - y(k+1)$$

$$v(k+1) = v(k) + r(k+1) - C[Gx(k) + Hu(k)]$$

$$v(k+1) = -CGx(k) + v(k) - CHu(k) + r(k+1) \quad (3.11)$$

Finalmente se obtienen las siguientes expresiones matriciales:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(k+1) \quad (3.12)$$

$$y(k) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

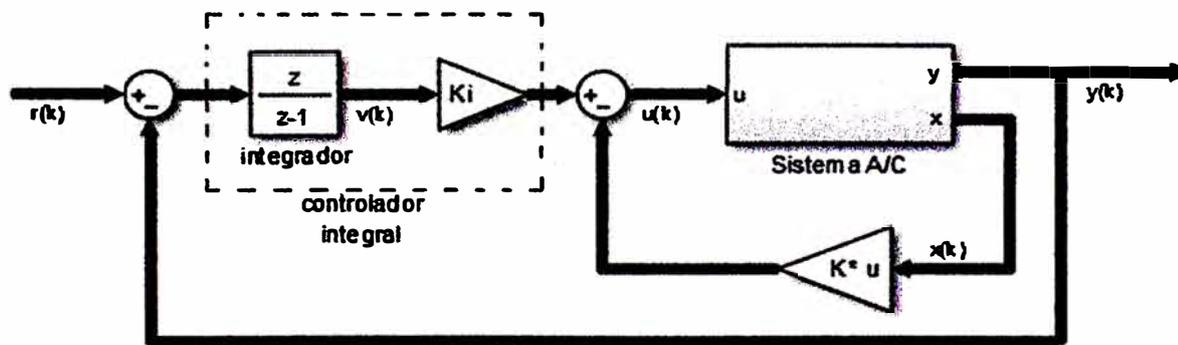


Figura 3.4 Control óptimo con seguimiento elaborado en simulink [13].

3.2.3 Análisis en tiempo continuo

Las matrices del sistema longitudinal y lateral/direccional se consiguen a partir del modelo no lineal del DHC-2 Beaver según [7]. Esto se aprecia en la figura 3.5.

Del modelo no lineal se puede extraer los sistemas asimétricos y simétricos, es decir los sistemas longitudinal y lateral, respectivamente.

Este modelo se ha elaborado utilizando *simulink* y haciendo uso del archivo *dmodlineal.m* es posible obtener el modelo lineal de los sistemas longitudinal y lateral.

a) Sistema longitudinal

El sistema está conformado de la siguiente manera:

- Matrices del sistema de estado longitudinal:

Along, Blong, Clong, Dlong.

- Vectores del sistema de estado:

$$u = \delta_e \quad (3.14)$$

$$y = \theta \quad (3.15)$$

$$x = [V \quad \alpha \quad q \quad \theta]' \quad (3.16)$$

Se puede deducir que el sistema es completamente controlable y observable, debido que las matrices de controlabilidad y observabilidad tienen un rango igual al orden de la matriz del sistema de estado.

b) Sistema lateral

El sistema se describe de la siguiente manera:

- Matrices del sistema de estado lateral:

Alat, Blat, Clat, Dlat

- Vectores del sistema de estado:

$$u = [\delta_a \quad \delta_r]' \quad (3.17)$$

$$y = \phi \quad (3.18)$$

$$x = [\beta \quad p \quad r \quad \phi]' \quad (3.19)$$

De manera similar a la sección anterior se deduce que el sistema es completamente controlable y observable, debido que las matrices de controlabilidad y observabilidad tienen un rango igual al orden de la matriz del sistema de estado.

3.2.4 Elaboración de diseño y aplicación del control óptimo

Las características longitudinales y laterales linealizadas están dadas para el punto de operación:

FDC Toolbox
 BEAVER, level 1
 M.O. Rauw, October 1997

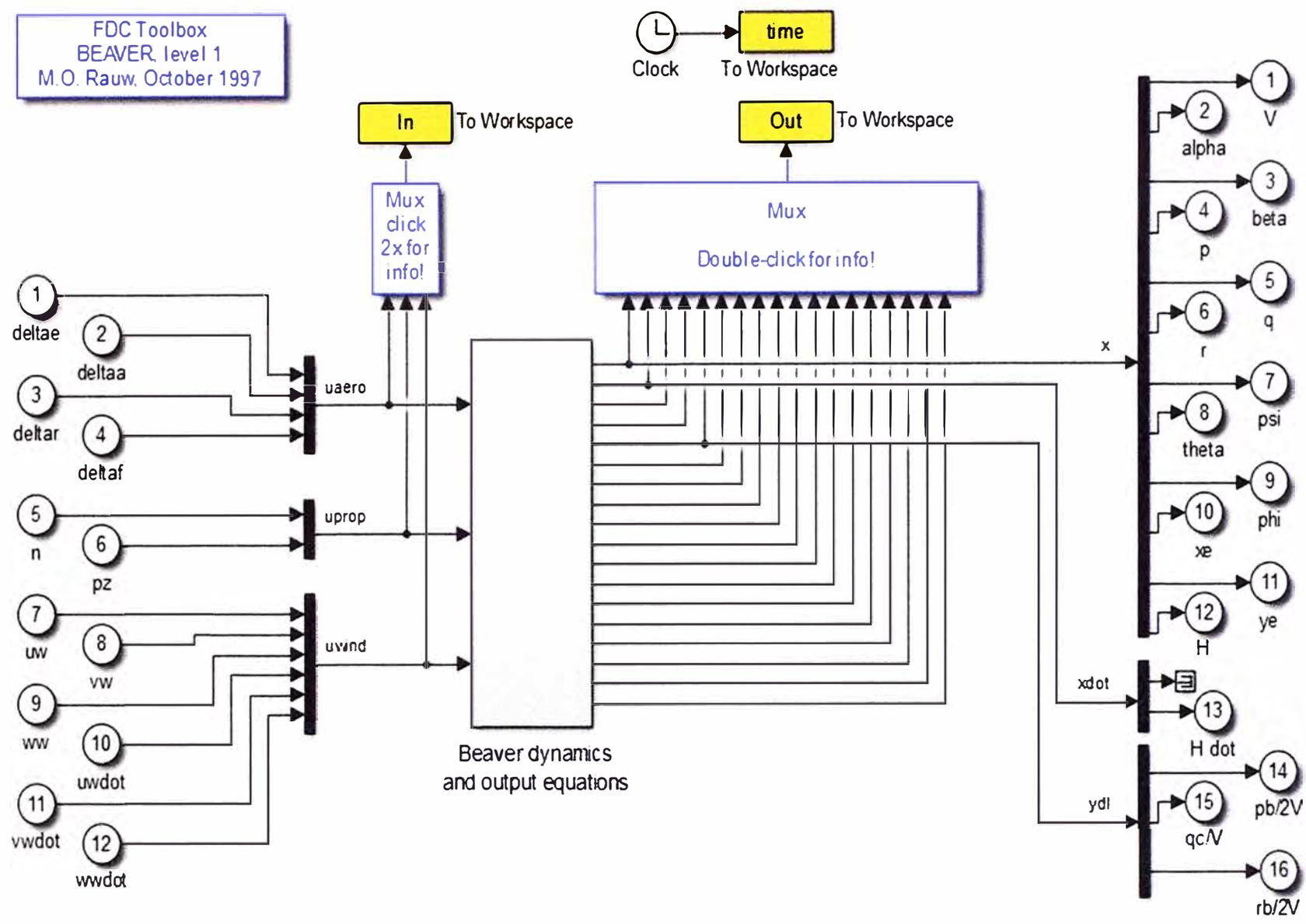


Figura 3.5 Sistema no lineal del Beaver elaborado utilizando *simulink* [7].

$$\omega_{np} = 0.302 \text{ rad/s}$$

En la figura 3.4 se muestra el bloque “Sistema A/C” el cual para el sistema longitudinal está estructurado como se muestra en la figura 3.6

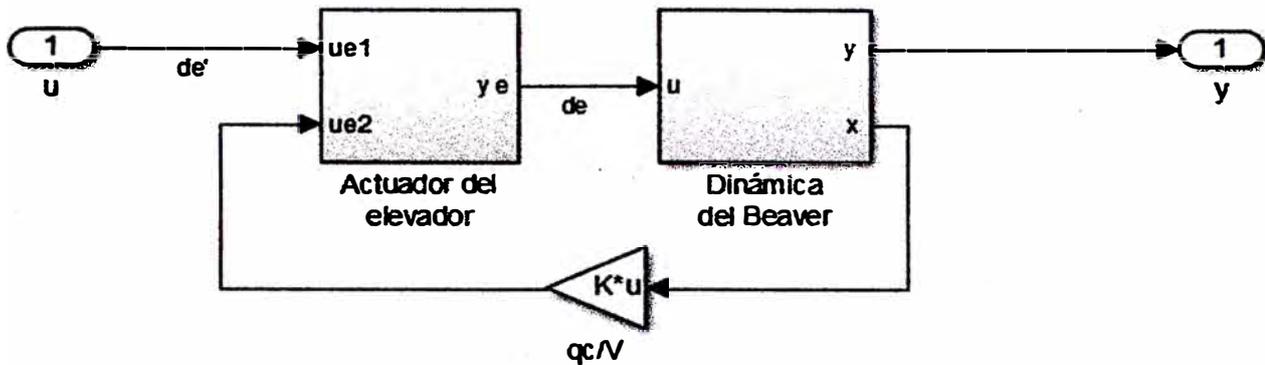


Figura 3.6 Sistema A/C - longitudinal elaborado en simulink [13].

Las ecuaciones del sistema de estado del actuador del elevador se expresan como:

$$x_e(k+1) = G_e x_e(k) + H_e u_e(k) \quad (3.20)$$

$$y_e(k) = C_e x_e(k) \quad (3.21)$$

De manera similar se obtiene las ecuaciones del sistema de estado de la dinámica longitudinal del Beaver:

$$x_{lon}(k+1) = G_{lon} x_{lon}(k) + H_{lon} u_{lon}(k) \quad (3.22)$$

$$y_{lon}(k) = C_{lon} x_{lon}(k) \quad (3.23)$$

En la figura 3.6 se observa que:

$$u_{lon}(k) = y_e(k) \quad (3.24)$$

Entonces reemplazando la ecuación (3.21) en la ecuación (3.24) se obtiene:

$$u_{lon}(k) = C_e x_e(k) \quad (3.25)$$

Reemplazando la ecuación (3.25) en la ecuación (3.22) se obtiene:

$$x_{lon}(k+1) = G_{lon} x_{lon}(k) + H_{lon} C_e x_e(k) \quad (3.26)$$

Se define:

$$H_e = [c1_{H_e} \quad c2_{H_e}] = [c1_{H_e} \quad 0] + [0 \quad c2_{H_e}] \quad (3.27)$$

$$u_e(k) = \begin{bmatrix} u_{e_1}(k) \\ u_{e_2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta'_e(k) \\ \frac{c}{V} q(k) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde:

$c1_{H_e}$: columna 1 de la matriz H_e

$c2_{H_e}$: columna 2 de la matriz H_e

Al reemplazar las ecuaciones (3.27) y (3.28) en la ecuación (3.20) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x_e(k+1) &= G_e x_e(k) + ([c1_{H_e} \quad 0] + [0 \quad c2_{H_e}]) \begin{bmatrix} u_{e_1}(k) \\ u_{e_2}(k) \end{bmatrix} \\ x_e(k+1) &= G_e x_e(k) + c1_{H_e} u_{e_1}(k) + c2_{H_e} u_{e_2}(k) \end{aligned} \quad (3.29)$$

pero de las ecuaciones (3.28) y (3.16) se aprecia que:

$$\begin{aligned} u_{e_2}(k) &= \frac{c}{V} q(k) \\ u_{e_2}(k) &= \frac{c}{V} [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} V(k) \\ \alpha(k) \\ q(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$u_{e_2}(k) = \left[0 \quad \frac{c}{V} \quad 0 \quad 0 \right] x_{lon}(k) \quad (3.30)$$

Luego de las ecuaciones (2.20), (2.23), (2.26) y (2.27) se obtiene la ecuación final del sistema de estado de la dinámica longitudinal del Beaver:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.31)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.32)$$

donde:

$$G = \begin{bmatrix} G_{lon} & H_{lon}C_e \\ c2_{He} \left[0 \quad \frac{c}{V} \quad 0 \quad 0 \right] & G_e \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ c1_{He} \end{bmatrix} \quad C = [C_{lon} \quad 0]$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_{lon}(k) \\ x_e(k) \end{bmatrix}$$

$$u(k) = u_{e_1}(k)$$

Luego se reemplazan los valores numéricos en las matrices de la ecuación (3.31) y se obtiene:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.061 & -0.004 & -0.098 & 0 & -0.366 & 0 & 0 \\ 0 & 0.987 & 0.01 & 0 & 0 & -0.099 & 0 & 0 \\ 0 & -0.066 & 0.97 & 0 & 0 & -7.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 1 & 0 & -0.038 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.904 & -0.833 & 0.214 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.962 & 0.009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.062 & -7.253 & 0.79 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 & -1 & 0 & 0.038 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.246 \quad 0 \quad 0.061 \quad 0]^T$$

Si se eligen las matrices de ponderación Q y R como:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

Si bien las matrices de ponderación pueden tomar diferentes valores, se considera el término de la matriz de ponderación $Q(4,4)$ sea igual a 100 debido a que corresponde a la variable de estado θ al que se le da mayor énfasis en el diseño.

Haciendo uso de la función *dlqr* de *MatLab* se obtienen los valores de las matrices K y K_i :

$$K = [0.034 \quad 1.406 \quad -2.659 \quad -24.450 \quad 0.808 \quad 67.456 \quad 5.9220]$$

$$K_i = [-0.817]$$

Realizando el análisis del sistema completo en lazo cerrado se obtiene:

$$G_o = \begin{bmatrix} 1 & 0.061 & -0.004 & -0.098 & 0 & -0.366 & 0 & 0 \\ 0 & 0.987 & 0.01 & 0 & 0 & -0.099 & 0 & 0 \\ 0 & -0.066 & 0.97 & 0 & 0 & -7.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 1 & 0 & -0.038 & 0 & 0 \\ -0.008 & -0.345 & 0.653 & 6.005 & 0.706 & -17.401 & -0.411 & -0.201 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0.007 & 0 & 0.942 & 0.008 & 0 \\ -0.002 & -0.086 & 0.162 & 1.489 & 0.013 & -11.36 & 0.635 & -0.05 \\ 0 & 0 & -0.01 & -1 & 0 & 0.038 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_o = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$C_o = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$D_o = [0]$$

b) Diseño de control lateral

Los valores numéricos de las matrices del sistema de estado longitudinal son:

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} -0.1846 & 0.0041 & -0.9824 & 0.1949 \\ -4.4216 & -5.3043 & 1.764 & 0 \\ 0.1849 & -0.8548 & -0.5419 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{lat} = \begin{bmatrix} -0.0068 & 0.0265 \\ -7.1064 & 0.4343 \\ -0.2083 & -2.8429 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{lat} = \begin{bmatrix} 0.9982 & 0.0012 & -0.0097 & 0.0019 \\ -0.0430 & 0.9482 & 0.0173 & 0 \\ 0.0021 & -0.0083 & 0.9945 & 0 \\ -0.0002 & 0.0097 & 0.0018 & 1 \end{bmatrix} \quad H_{lat} = \begin{bmatrix} -0.0001 & 0.0006 \\ -0.0763 & 0.004 \\ -0.0018 & -0.0284 \\ -0.0004 & 0 \end{bmatrix}$$

De la matriz del sistema se deduce la ecuación del polinomio característico:

$$s^4 + 6.0308s^3 + 5.625s^2 + 6.3388s + 0.4034 = 0$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$s_1 = -0.3927 + 1.0i$$

$$s_2 = -0.3927 - 1.0i$$

$$s_3 = -5.1780$$

$$s_4 = -0.0674$$

Por lo tanto:

$$\omega_{DR} = 1.080 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{roll} = 5.180 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{spiral} = 0.0674 \text{ rad/s}$$

En la figura 3.4 se muestra el bloque “Sistema A/C” el cual para el sistema longitudinal está estructurado como se muestra en la figura 3.7.

Las ecuaciones del sistema de estado de los actuadores se expresan como:

- Sistema de estado del actuador de los alerones:

$$x_a(k+1) = G_a x_a(k) + H_a u_a(k) \quad (3.33)$$

$$y_a(k) = C_a x_a(k) \quad (3.34)$$

- Sistema de estado del actuador del timón:

$$x_r(k+1) = G_r x_r(k) + H_r u_r(k) \quad (3.35)$$

$$y_r(k) = C_r x_r(k) \quad (3.36)$$

De manera similar se obtienen las ecuaciones del sistema de estado de la dinámica del Beaver:

$$x_{lat}(k+1) = G_{lat} x(k) + H_{lat} u_{lat}(k) \quad (3.37)$$

$$y_{lat}(k) = C_{lat}x_{lat}(k) \quad (3.38)$$

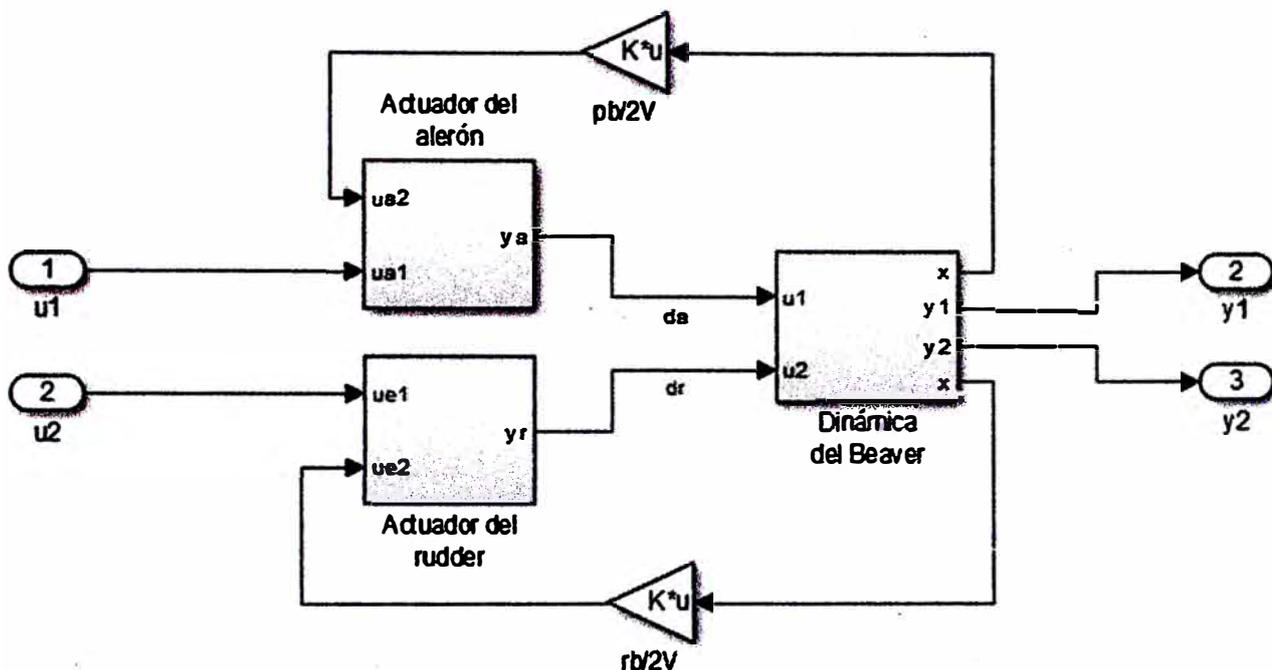


Figura 3.7 Sistema A/C - lateral elaborado en simulink [13].

pero de la figura 3.7 se deduce que:

$$u_{lat}(k) = \begin{bmatrix} y_a(k) \\ y_r(k) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Entonces de las ecuaciones (3.34) y (3.36) se obtiene:

$$u_{lat}(k) = \begin{bmatrix} C_a x_a(k) \\ C_r x_r(k) \end{bmatrix}$$

$$u_{lat}(k) = \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Reemplazando la ecuación (3.40) en la ecuación (3.37) se obtiene:

$$x_{lat}(k+1) = G_{lat}x_{lat}(k) + H_{lat} \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Se define:

$$H_{lat} = [c1_{H_{lat}} \quad c2_{H_{lat}}] = [c1_{H_{lat}} \quad 0] + [0 \quad c2_{H_{lat}}] \quad (3.42)$$

donde:

$c1_{H_{lat}}$: columna 1 de la matriz H_{lat}

$c2_{H_{lat}}$: columna 2 de la matriz H_{lat}

Entonces reemplazando la ecuación (3.42) en la ecuación (3.37) se obtiene:

$$x_{lat}(k+1) = G_{lat}x_{lat}(k) + H_{lat} \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix}$$

$$x_{lat}(k+1) = G_{lat}x_{lat}(k) + c1_{H_{lat}}C_a x_a(k) + c2_{H_{lat}}C_r x_r(k) \quad (3.43)$$

Se define:

$$H_a = [c1_{H_a} \quad c2_{H_a}] = [c1_{H_a} \quad 0] + [0 \quad c2_{H_a}] \quad (3.44)$$

$$H_r = [c1_{H_r} \quad c2_{H_r}] = [c1_{H_r} \quad 0] + [0 \quad c2_{H_r}] \quad (3.45)$$

$$u_a(k) = \begin{bmatrix} u_{a_1}(k) \\ u_{a_2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta'_a(k) \\ \frac{b}{2V} p(k) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$u_r(k) = \begin{bmatrix} u_{r_1}(k) \\ u_{r_2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta'_r(k) \\ \frac{b}{2V} r(k) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

donde:

$c1_{H_a}$: columna 1 de la matriz H_a

$c2_{H_a}$: columna 2 de la matriz H_a

$c1_{H_r}$: columna 1 de la matriz H_r

$c2_{H_r}$: columna 2 de la matriz H_r

Reemplazando las ecuaciones (3.44) y (3.46) en la ecuación (3.33) y las ecuaciones (3.44) y (3.46) en la ecuación (3.35) se obtiene:

$$x_a(k+1) = G_a x_a(k) + ([c1_{H_a} \quad 0] + [0 \quad c2_{H_a}]) \begin{bmatrix} u_{a_1}(k) \\ u_{a_2}(k) \end{bmatrix}$$

$$x_a(k+1) = G_a x_a(k) + c1_{H_a} u_{a_1}(k) + c2_{H_a} u_{a_2}(k) \quad (3.48)$$

$$x_r(k+1) = G_r x_r(k) + ([c1_{H_r} \quad 0] + [0 \quad c2_{H_r}]) \begin{bmatrix} u_{r_1}(k) \\ u_{r_2}(k) \end{bmatrix}$$

$$x_r(k+1) = G_r x_r(k) + C1_{H_r} u_{r_1}(k) + C2_{H_r} u_{r_2}(k) \quad (3.49)$$

pero de las ecuaciones (3.46), (3.46) y (3.19) se observa que:

$$\begin{aligned} u_{a_2}(k) &= \frac{b}{2V} p(k) \\ &= \frac{b}{2V} [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \beta(k) \\ p(k) \\ r(k) \\ \phi(k) \end{bmatrix} \\ u_{a_2}(k) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{2V} & 0 & 0 \end{bmatrix} x_B(k) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} u_{r_2}(k) &= \frac{b}{2V} r(k) \\ &= \frac{b}{2V} [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \beta(k) \\ p(k) \\ r(k) \\ \phi(k) \end{bmatrix} \\ u_{r_2}(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{2V} & 0 \end{bmatrix} x_B(k) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Luego de las ecuaciones (3.38), (3.43), (3.48), (3.49), (3.50) y (3.51) se tiene la ecuación final del sistema de estado de la dinámica lateral del Beaver:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.52)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.53)$$

donde:

$$G = \begin{bmatrix} G_{lat} & C1_{H_{lat}} C_a & C2_{H_{lat}} C_r \\ C2_{H_a} \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{2V} & 0 & 0 \end{bmatrix} & G_a & 0 \\ C2_{H_r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{2V} & 0 \end{bmatrix} & 0 & G_r \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C1_{H_a} & 0 \\ 0 & C1_{H_r} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{lat} \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x(k) = [x_{lat}(k) \quad x_a(k) \quad x_r(k)]^T \quad u(k) = [u_{a_1}(k) \quad u_{r_1}(k)]^T$$

Luego se reemplazan los valores numéricos en las matrices de la ecuación (3.52) y se aplica la técnica del control óptimo en el sistema dinámico lateral se obtiene:

$$G = \begin{bmatrix} 0.998 & 0.001 & -0.01 & 0.002 & 0 & -0.017 & 0 & 0 & 0.032 & 0 & 0 \\ -0.043 & 0.948 & 0.017 & 0 & 0 & -12.796 & 0 & 0 & 0.228 & 0 & 0 \\ 0.002 & -0.008 & 0.995 & 0 & 0 & -0.306 & 0 & 0 & -1.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.002 & 1 & 0 & -0.065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.604 & 0 & 0 & 0.899 & 0.255 & -0.079 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.076 & 0 & 0 & 0 & 0.968 & 0.009 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14.634 & 0 & 0 & 0.009 & -6.147 & 0.792 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.912 & -0.421 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.966 & 0.104 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 & -6.274 & 0.008 & 0 \\ 0 & -0.010 & -0.002 & -1 & 0 & 0.0650 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.576 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.259 & 0 & 0.028 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.239 & 0 & 0.059 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Se eligen las matrices de ponderación Q y R como:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si bien las matrices de ponderación pueden tomar diferentes valores, se considera el término de la matriz de ponderación $Q(4,4)$ sea igual a 100 debido a que corresponde a la variable de estado ϕ al que se le da mayor énfasis en el diseño.

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0.998 & 0.001 & -0.01 & 0.002 & 0 & -0.017 & 0 & 0 & 0.032 & 0 & 0 \\ -0.043 & 0.948 & 0.017 & 0 & 0 & -12.796 & 0 & 0 & 0.228 & 0 & 0 \\ 0.002 & -0.008 & 0.995 & 0 & 0 & -0.306 & 0 & 0 & -1.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.002 & 1 & 0 & -0.065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6.016 & 192.704 & 2.544 & 1.251 & 0.830 & -1712.469 & -9.828 & -0.003 & 26.896 & 0.105 & -0.015 \\ -0.003 & 0.032 & 0.001 & 0.001 & 0 & 0.008 & 0.004 & 0 & 0.015 & 0 & 0 \\ -0.660 & 6.435 & 0.279 & 0.137 & 0.002 & -193.995 & -0.278 & 0 & 2.947 & 0.012 & -0.002 \\ 0.264 & -4.607 & 1.277 & 19.964 & -0.002 & 40.089 & 0.239 & 0.804 & -14.580 & -0.167 & -0.213 \\ 0 & -0.006 & 0.002 & 0.027 & 0 & 0.054 & 0 & 0 & 0.947 & 0.007 & 0 \\ 0.065 & -1.140 & 0.315 & 4.939 & -0.001 & 9.918 & 0.059 & -0.022 & -9.777 & 0.509 & -0.053 \\ 0 & -0.010 & -0.002 & -1 & 0 & 0.065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Sistema longitudinal

En la figura 4.1 se muestra el comportamiento del ángulo de cabeceo θ en el tiempo considerando sólo el sistema dinámico del Beaver sin incluir el modelo del actuador del elevador. En la parte superior se aprecia el comportamiento para una deflexión del elevador en forma escalón de 1° , mientras que en la parte inferior se puede apreciar para un pulso de la misma magnitud con una duración de 2 segundos.

En la figura 4.2, la figura 4.3 y la figura 4.4 se muestra, similarmente a la figura 4.1, se observa el comportamiento de la velocidad de la aeronave (*airspeed*), el ángulo de ataque y la velocidad angular de cabeceo para la misma señal de entrada escalón y pulso de 1° .

En la figura 4.2 se aprecia que la velocidad se estabiliza después de 4 minutos, pero queda claro que esto es debido sólo a la variación del ángulo de deflexión del elevador y que realmente implica un cambio en la velocidad es la potencia del motor por lo tanto esto sólo indica que hay una ligera variación en la velocidad producto de la superficie de control.

En la figura 4.3 se muestra que para una entrada escalón del elevador en 1° el ángulo de ataque se establece en -0.018 rad mientras que para un pulso llega a -0.02 rad aproximadamente para luego aproximarse en el tiempo a 0 rad.

La velocidad angular se aproxima a 0 rad a medida que el ángulo de cabeceo se mantiene estable y se aprecia en la figura 4.4.

Esta vez se agregó el modelo del actuador a la dinámica del Beaver, por lo que ahora no se ingresa una variación angular sino un voltaje y este en respuesta brinda una deflexión del elevador. Es así que en la figura 4.5 se muestra el comportamiento del sistema en lazo abierto con una señal de entrada de 1V.

También se aprecia el comportamiento de la velocidad de la aeronave (*airspeed*), el ángulo de ataque y la velocidad angular de cabeceo para la señal de entrada escalón y pulso de 1V, según la figura 4.6, figura 4.7, figura 4.8 y figura 4.9.

En la figura 4.9 se observa la variación angular del elevador llegando a estabilizarse en aproximadamente 0.0332 rad a los 0.75 segundos.

En la figura 4.10 se muestran los resultados de la aplicación del control óptimo sobre el sistema longitudinal, así mismo se observa la implicancia sobre las otras variables de estado que este control conlleva según la figura 4.10, figura 4.11, figura 4.12, figura 4.13, figura 4.14 y figura 4.15.

Se observa que el ángulo de cabeceo logra estabilizarse en 1 segundo aproximadamente con una amplitud máxima de 1.013 rad siendo este valor de 13% de máximo sobre pico, según la figura 4.10

En la figura 4.11 se muestra una disminución de la velocidad, esto indica que para conseguir un cabeceo de 1 rad es necesario disminuir la velocidad a -123 m/s. Aquí no se está considerando la fuerza de los motores que es precisamente lo que corregirá y mantendrá la velocidad deseada.

En la figura 4.12 muestra un ángulo de ataque de 0.631 rad. El ángulo de ataque se mide entre el eje longitudinal de la aeronave y su eje de estabilidad correspondiente mientras que el ángulo de cabeceo se mide entre el eje longitudinal de la aeronave y el plano horizontal de la tierra.

El comportamiento de la variación del ángulo del elevador se muestra en la figura 4.14 y se estabiliza en aproximadamente -0.6 rad a los 120.7 segundos. Es decir el elevador a girado hacia arriba 0.6rad (34.377°)

En la figura 4.16 se observa cómo actúa el control de estabilidad de la aeronave para un ángulo de cabeceo positivo y en la figura 4.17 para un ángulo negativo.

4.2 Sistema lateral

Si bien el balance de la aeronave ha cambiado debido a la variación angular de las superficies de control como son los alerones y el timón, es el alerón quien gobierna con mayor acción el control sobre el ángulo de balanceo ϕ . Entonces al aplicar una variación del ángulo del alerón en 1° y 0° de deflexión del timón se ve el comportamiento del ángulo de balanceo según la figura 4.18. Así mismo se observa el comportamiento de los demás estados en la figura 4.19, figura 4.20 y figura 4.21.

Para un señal de control de entrada escalón y un pulso de 1° para el alerón y 0°, el deslizamiento lateral mostrado en la figura 4.19 se estabiliza en aproximadamente $\beta = -2.91^\circ$ (-0.05077 rad) y $\beta = -0.01^\circ$ (-0.0001691 rad), así mismo la velocidad

angular de cabeceo mostrada en la figura 4.20 resulta aproximadamente $p = 0.006 \text{ rad/s}$ y $p = 0.0003 \text{ rad/s}$, mientras la velocidad angular de viraje se muestra en la figura 4.21 y nos muestra aproximadamente $p = 0.03 \text{ rad/s}$ y $p = 0.0002 \text{ rad/s}$.

Ahora se muestra cómo actúa el control óptimo para estabilizar el balance que tiene el Beaver sobre el eje longitudinal (X_{b+}), es decir conseguir sostener un ángulo de balanceo ϕ , el cuál en esta ocasión es de 1° , según la figura 4.22.

A partir de la figura 4.23, figura 4.24, figura 4.25, figura 4.26 y figura 4.27 se puede apreciar el comportamiento de las variables de estado así como el de las deflexiones del alerón y timón.

La aplicación del control óptimo para un ángulo de balanceo $\phi = 1^\circ$ genera un deslizamiento lateral de la aeronave de aproximadamente $\beta = 1.25^\circ$ (0.02184 rad) como se muestra en la figura 4.23. Para el mismo objetivo se llega a establecer una velocidad angular de balanceo $p \approx 0 \text{ rad/s}$ y una velocidad angular de viraje $r \approx 0 \text{ rad/s}$ como se observa en la figura 4.24 y figura 4.25, respectivamente.

El comportamiento de las superficies de control se muestran en la figura 4.26 para el alerón y figura 4.27 para el timón.

El alerón presenta una pequeña desviación de -0.012° para conseguir un ángulo de balanceo $\phi = 1^\circ$ como se muestra en la figura 4.26. Además el timón se establece en un ángulo aproximadamente igual a 0° que se puede observar en la figura 4.27.

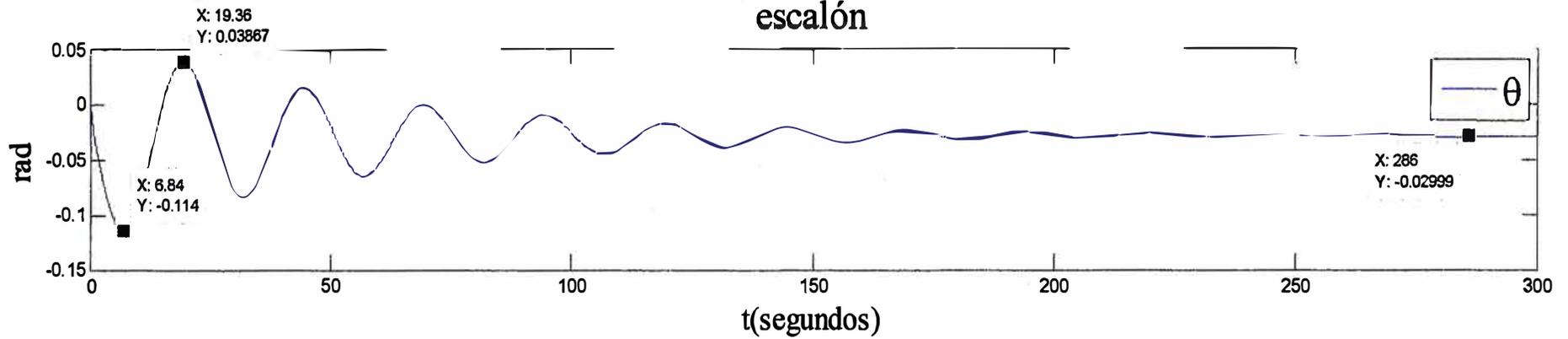
En la figura 4.28 y figura 4.29 se muestra cómo actúa el control de estabilidad de la aeronave para un ángulo de balanceo positivo y negativo, respectivamente.

En la figura 4.30 se observa una trayectoria de vuelo seguida por la aeronave DHC-2 Beaver.

Ángulo de cabeceo θ

$$\Delta\delta_e = 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$$

escalón



pulso

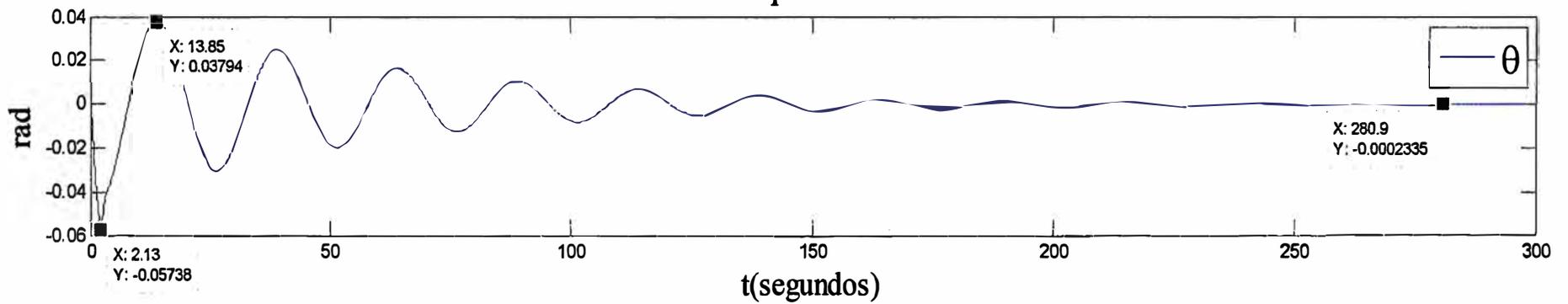
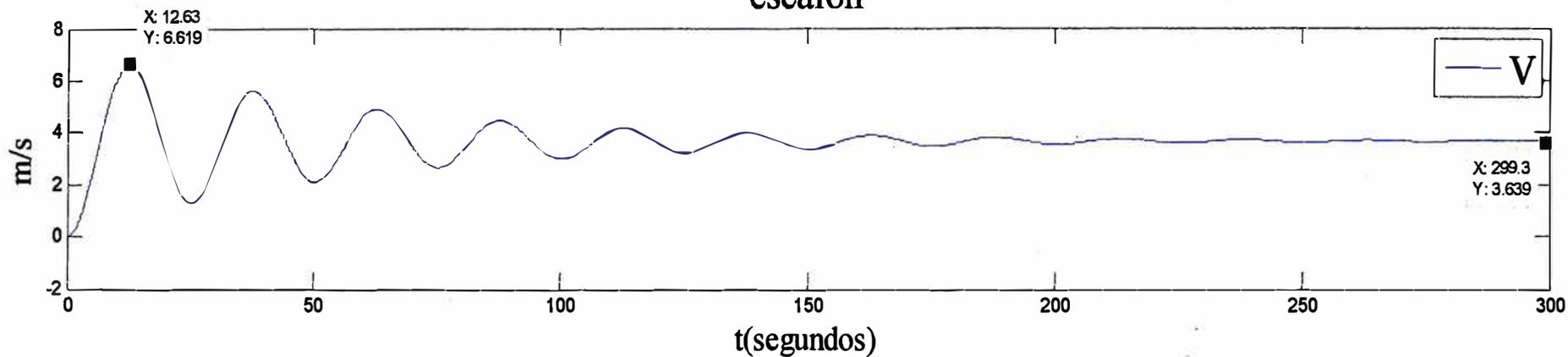


Figura 4.1 Respuesta del sistema dinámico longitudinal del Beaver a lazo abierto elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad V

$$\Delta\delta_e = 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$$

escalón



pulso

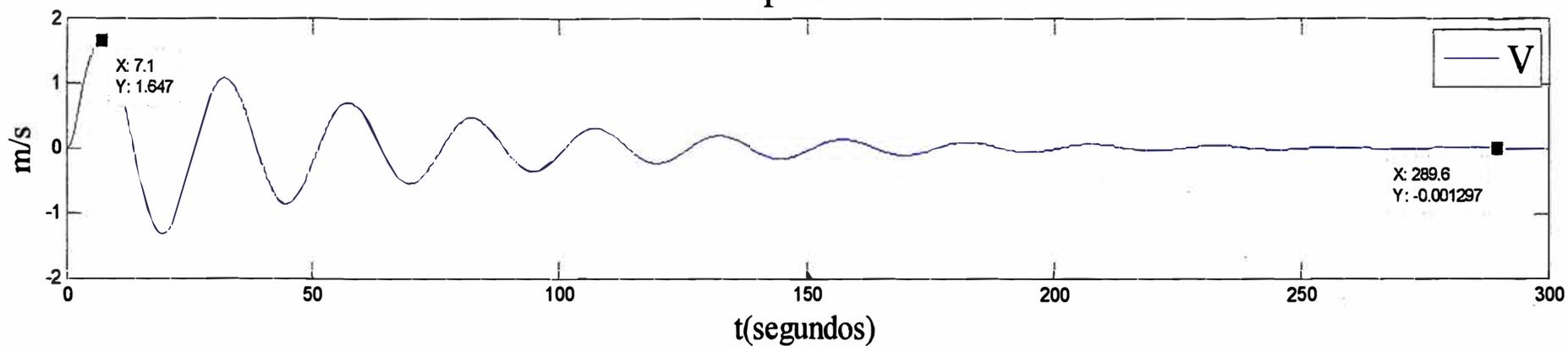


Figura 4.2 Comportamiento de la velocidad de la aeronave con respecto al viento elaborado en *Matlab* [13].

Ángulo de ataque α
 $\Delta\delta_e = 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$
escalón

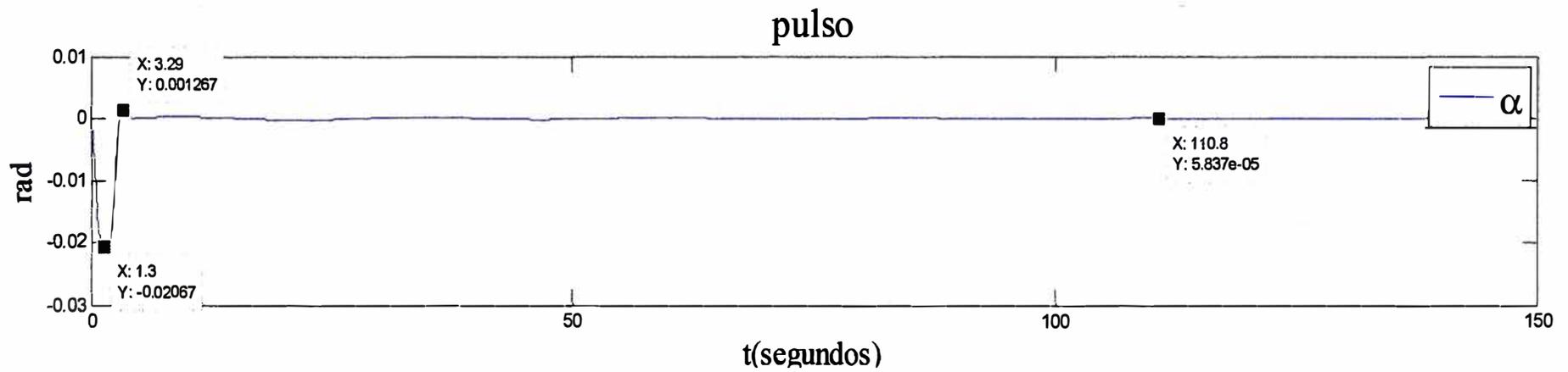
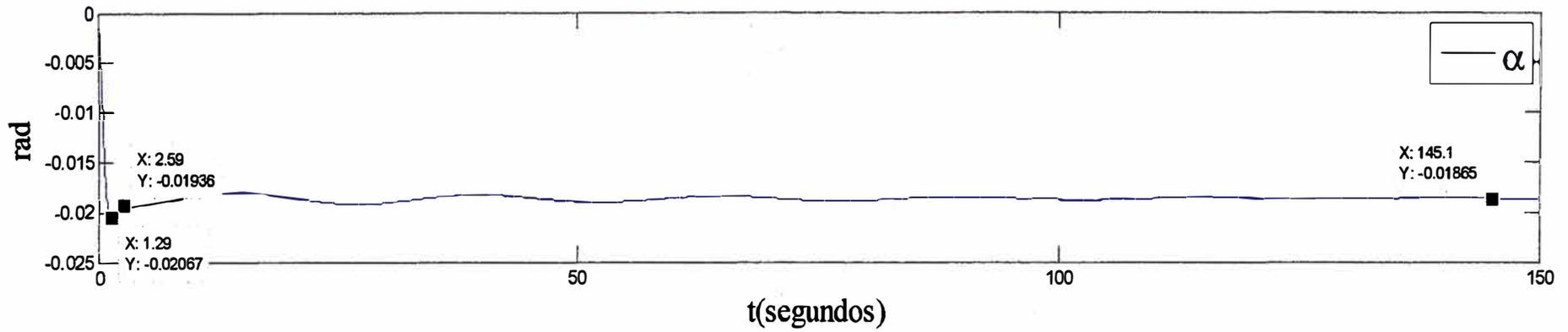
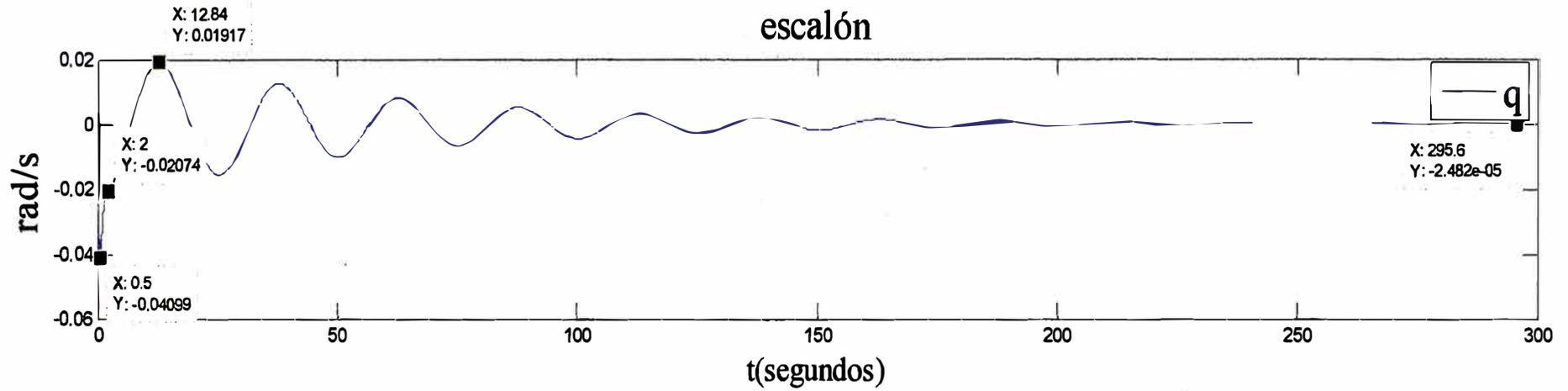


Figura 4.3 Comportamiento del ángulo de ataque elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad angular de cabeceo q

$$\Delta\delta_e = 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$$

escalón



pulso

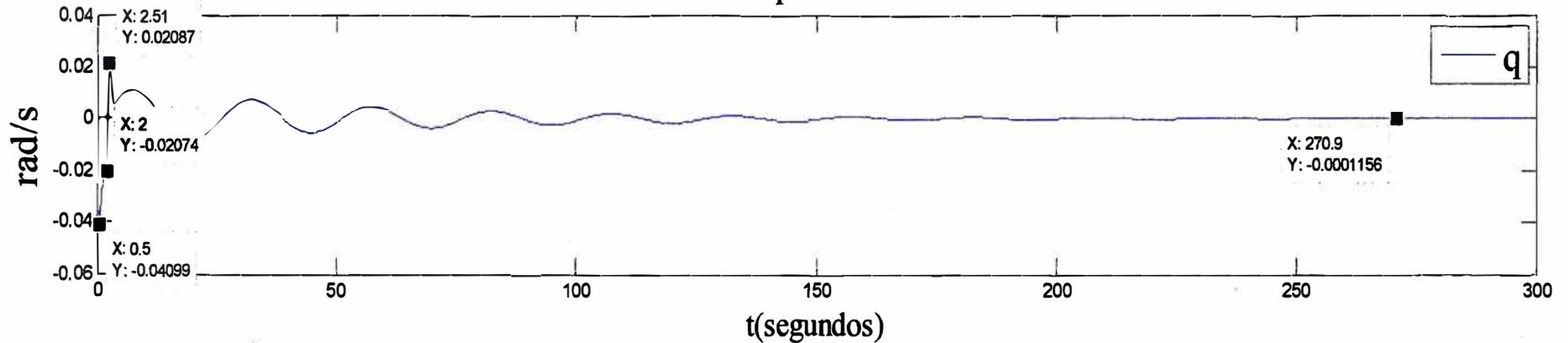


Figura 4.4 Comportamiento de la velocidad angular de cabeceo elaborado en *Matlab* [13].

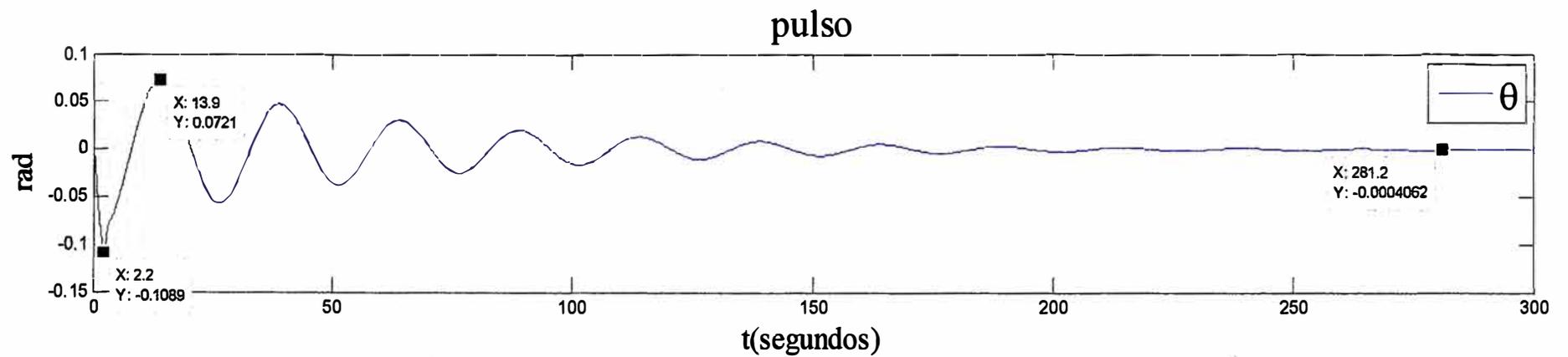
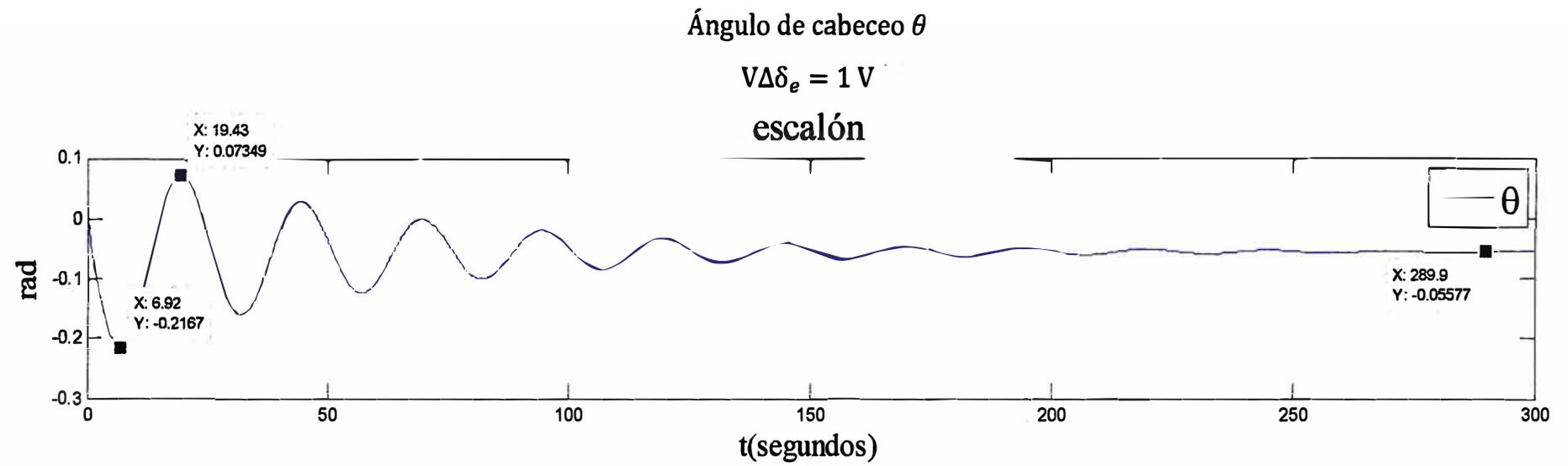
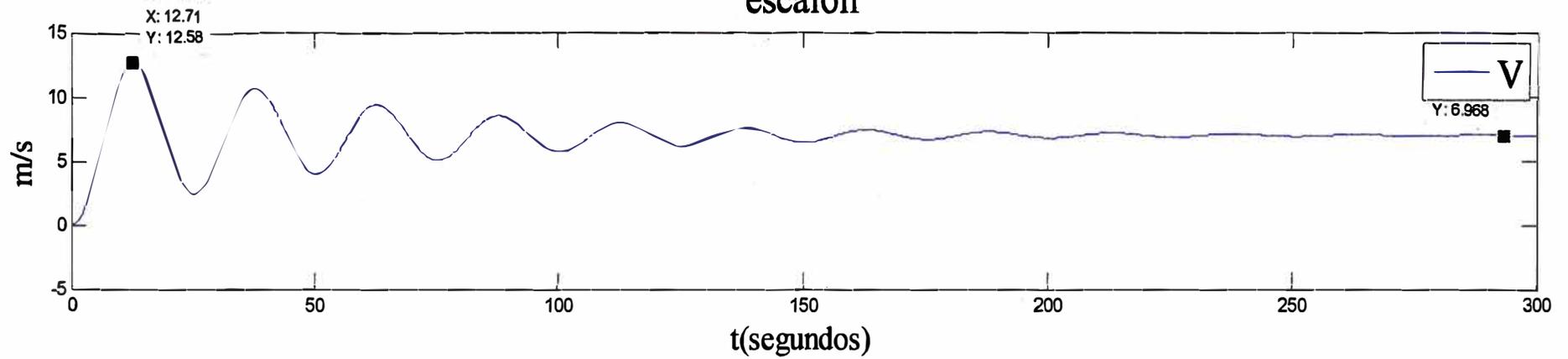


Figura 4.5 Comportamiento del ángulo de cabeceo al agregar el modelo del actuador del elevador elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad V

$$V\Delta\delta_e = 1 \text{ V}$$

escalón



pulso

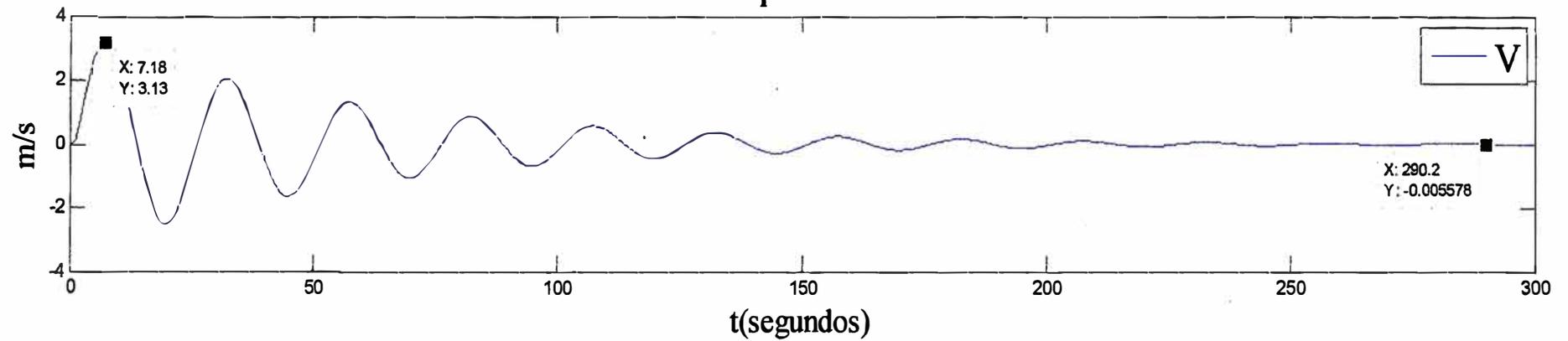
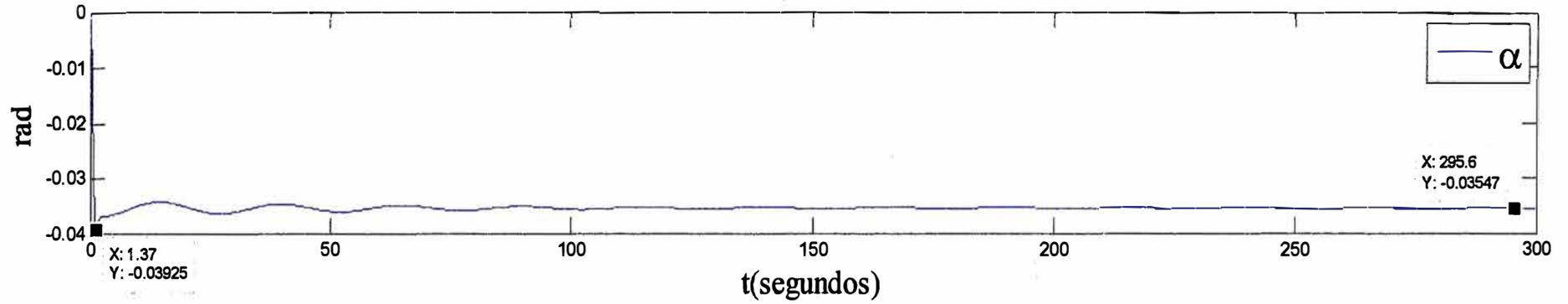


Figura 4.6 Comportamiento de la velocidad de la aeronave incluyendo actuador elaborado en *Matlab* [13].

Ángulo de ataque α

$$V\Delta\delta_e = 1 \text{ V}$$

escalón



pulso

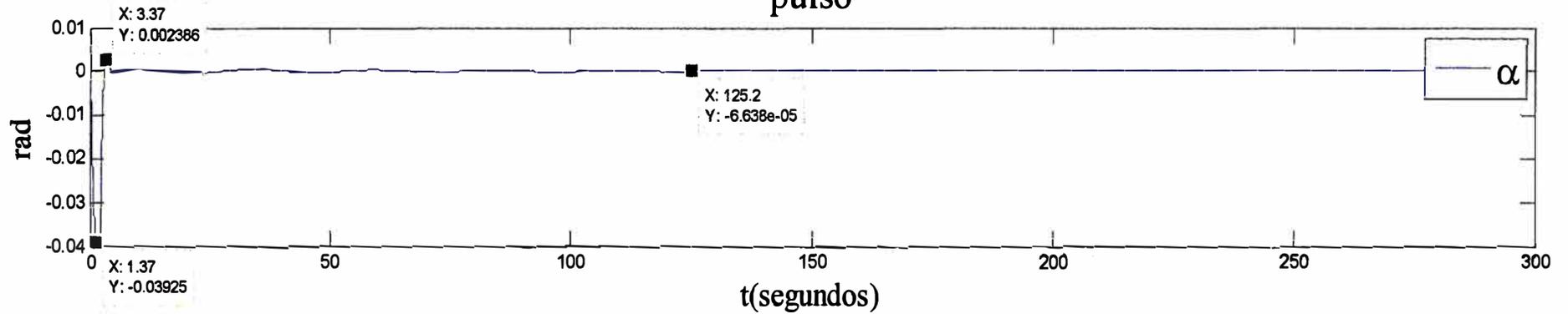
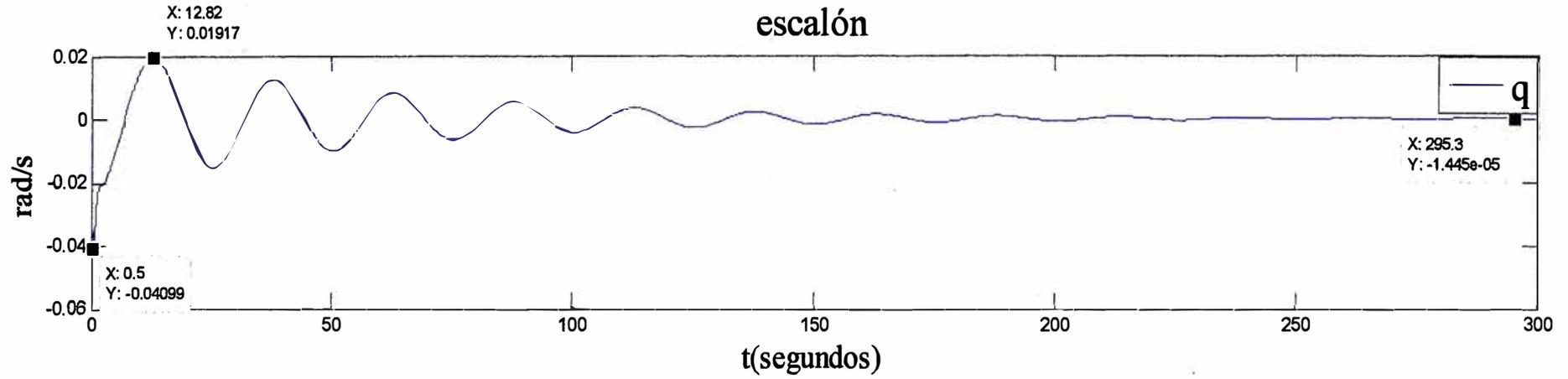


Figura 4.7 Comportamiento del ángulo de ataque incluyendo actuador elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad angular de cabeceo q

$$V\Delta\delta_e = 1 \text{ V}$$

escalón



pulso

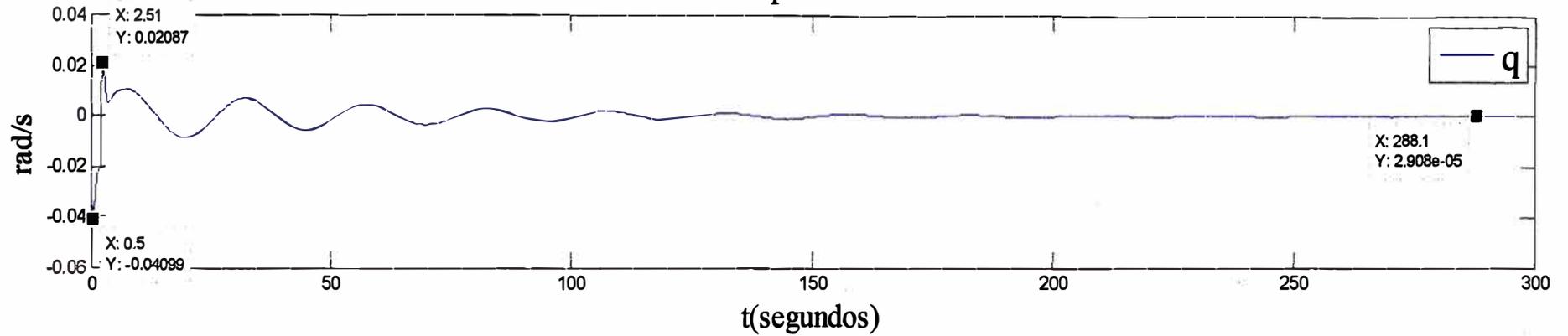
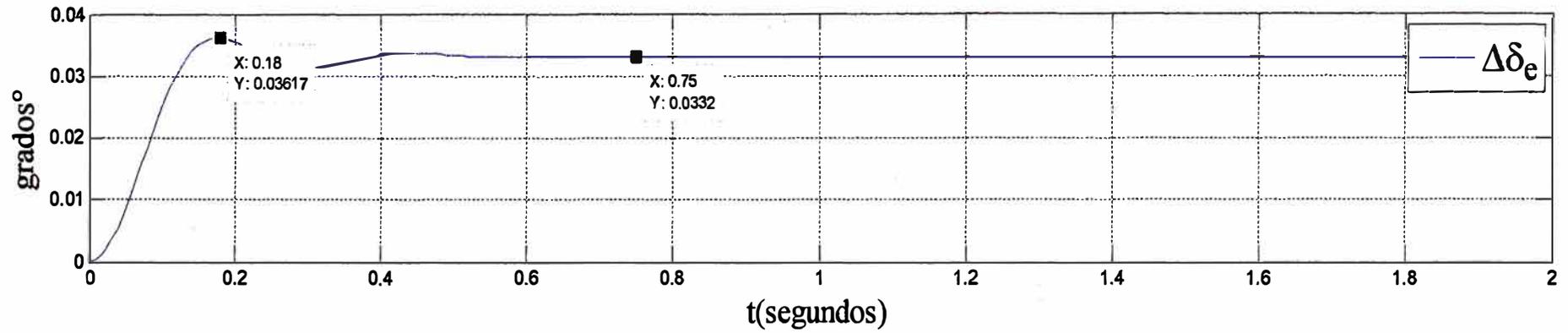


Figura 4.8 Comportamiento de la velocidad angular de cabeceo incluyendo actuador elaborado en *Matlab* [13].

$\Delta\delta_e$
 $V\Delta\delta_e = 1 V$
escalón



pulso

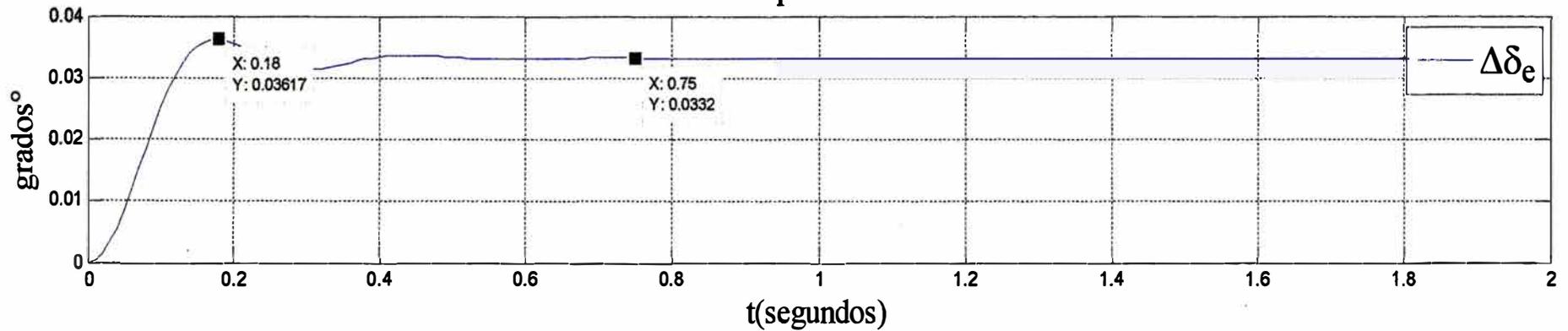


Figura 4.9 Comportamiento del elevador elaborado en *Matlab* [13].

Ángulo de cabeceo θ

$$\theta_{ref} = 1 \text{ rad}$$

escalón

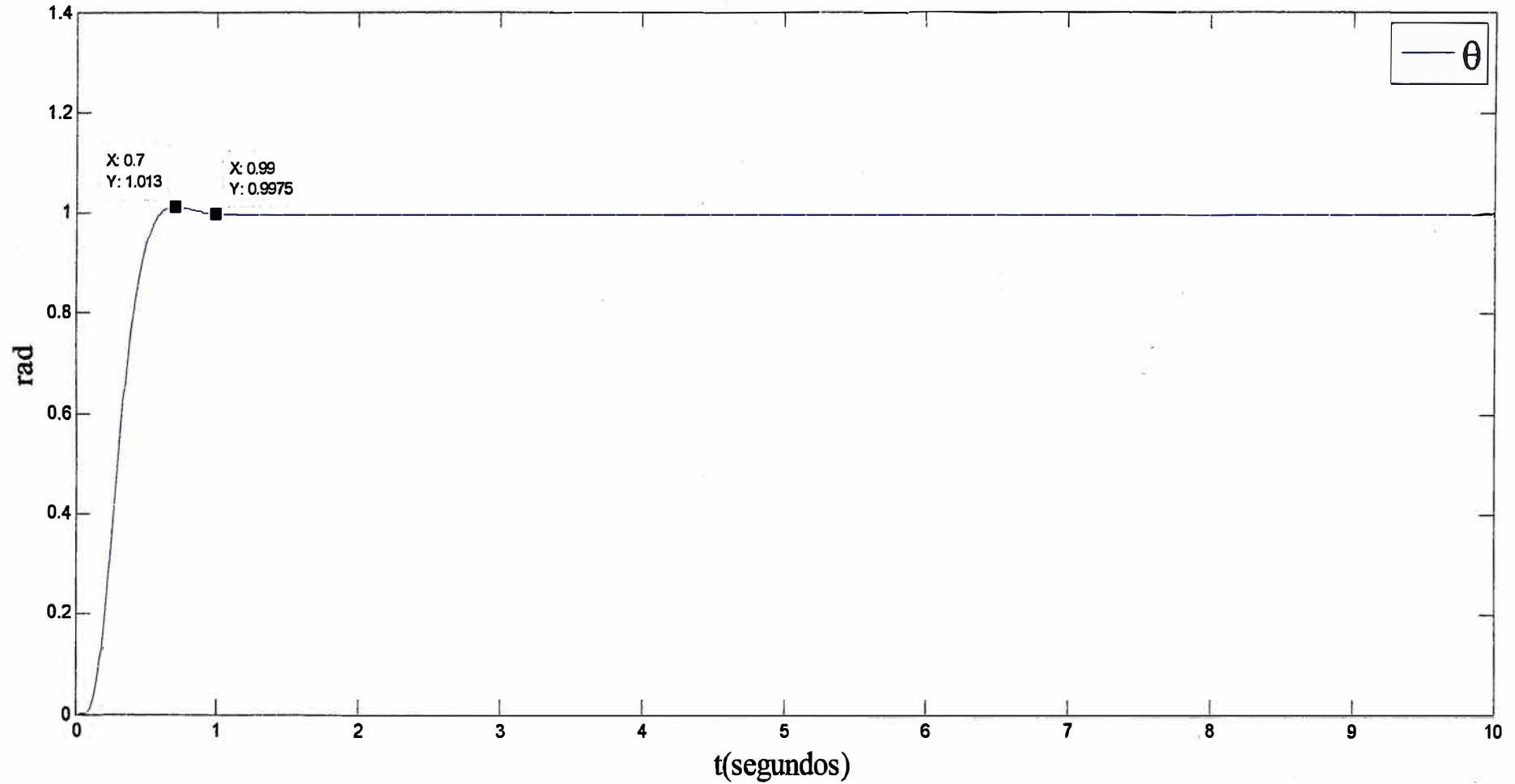


Figura 4.10 Aplicación del control óptimo sobre el sistema longitudinal elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad V

$\theta_{ref} = 1 \text{ rad}$

escalón

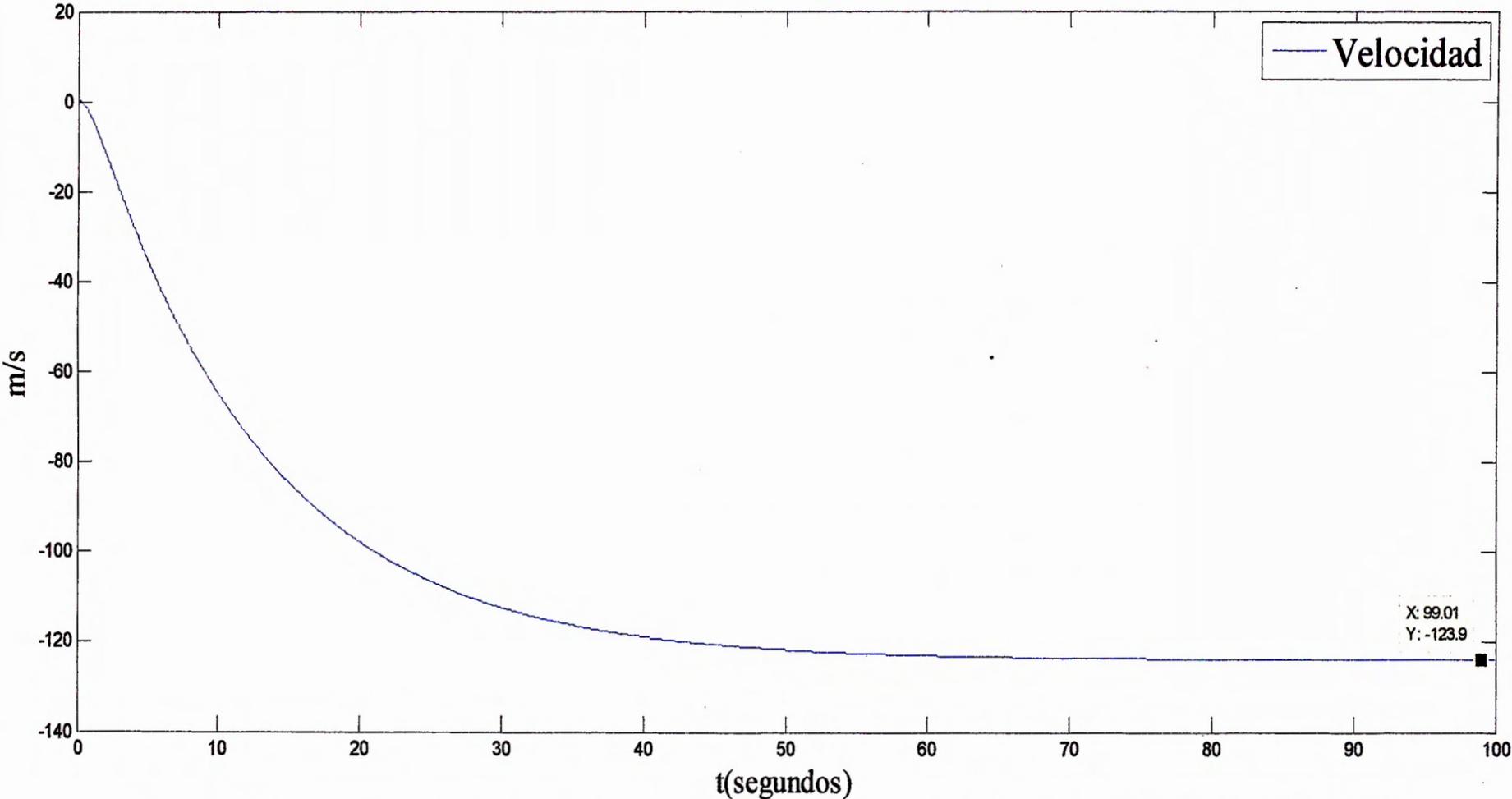


Figura 4.11 Comportamiento de la velocidad V bajo el control óptimo del ángulo de cabeceo elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad angular de cabeceo q

$$\theta_{ref} = 1 \text{ rad}$$

escalón

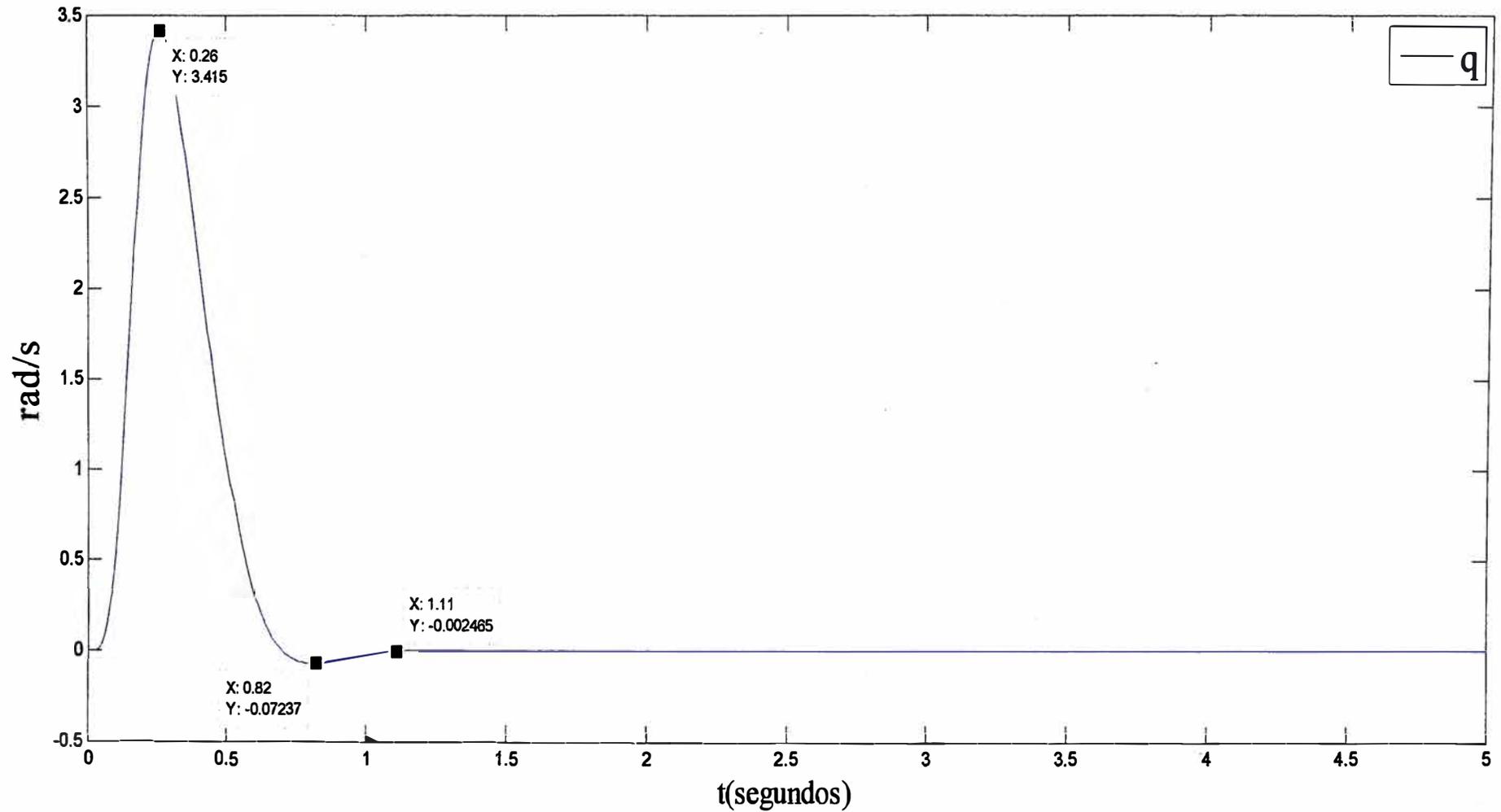


Figura 4.13 Comportamiento de la velocidad angular q bajo el control óptimo del ángulo de cabeceo elaborado en *Matlab* [13].

$\Delta\delta_e$
 $\theta_{ref} = 1 \text{ rad}$
escalón

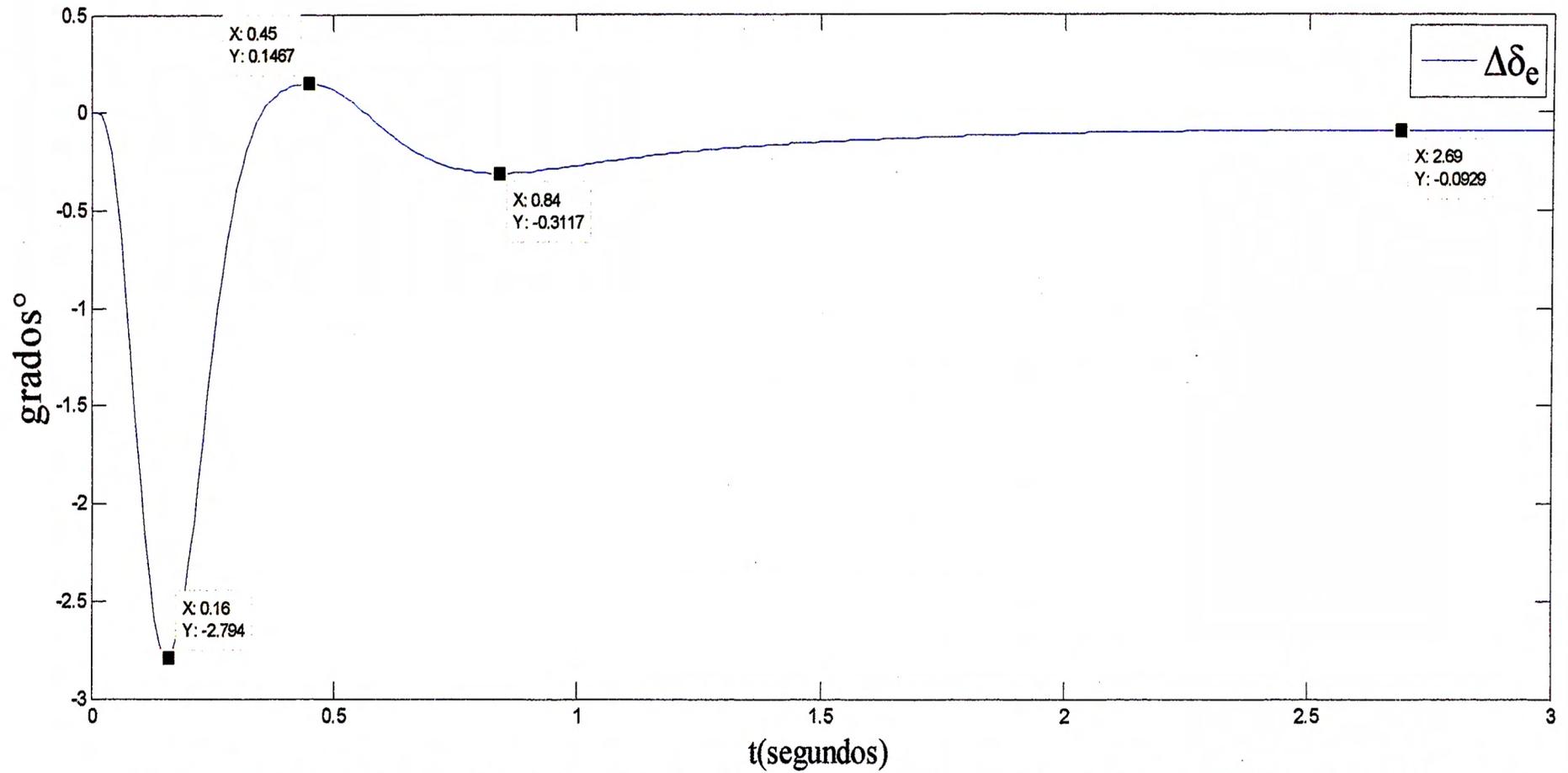


Figura 4.15 Comportamiento del elevador bajo el control óptimo del ángulo de cabeceo <0 - 3 seg> elaborado en *Matlab* [13].

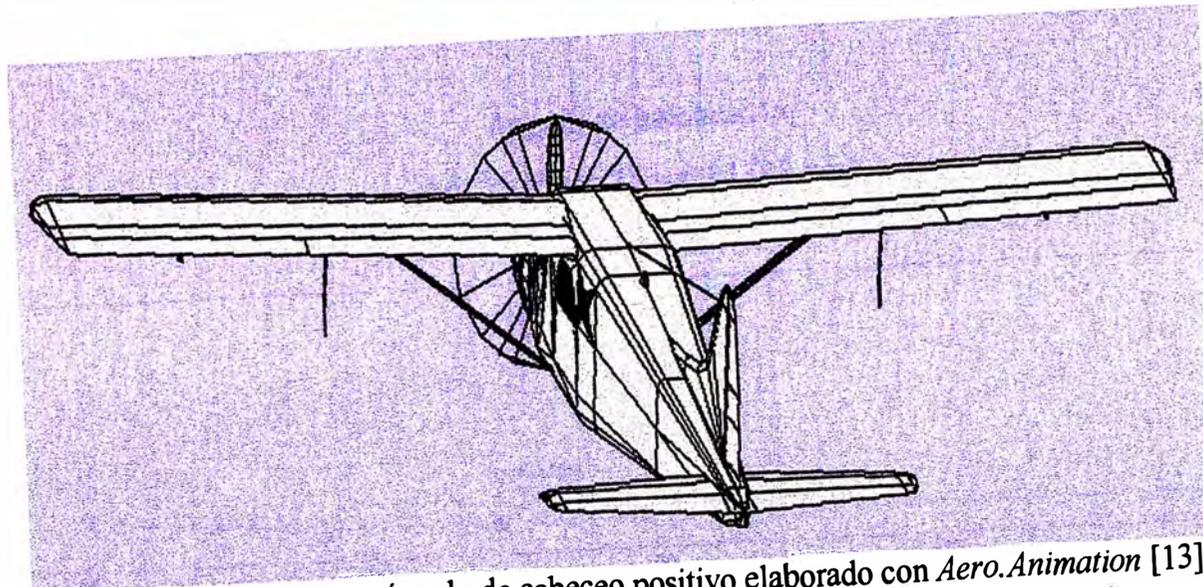


Figura 4.16 Aeronave con ángulo de cabeceo positivo elaborado con *Aero.Animation* [13].

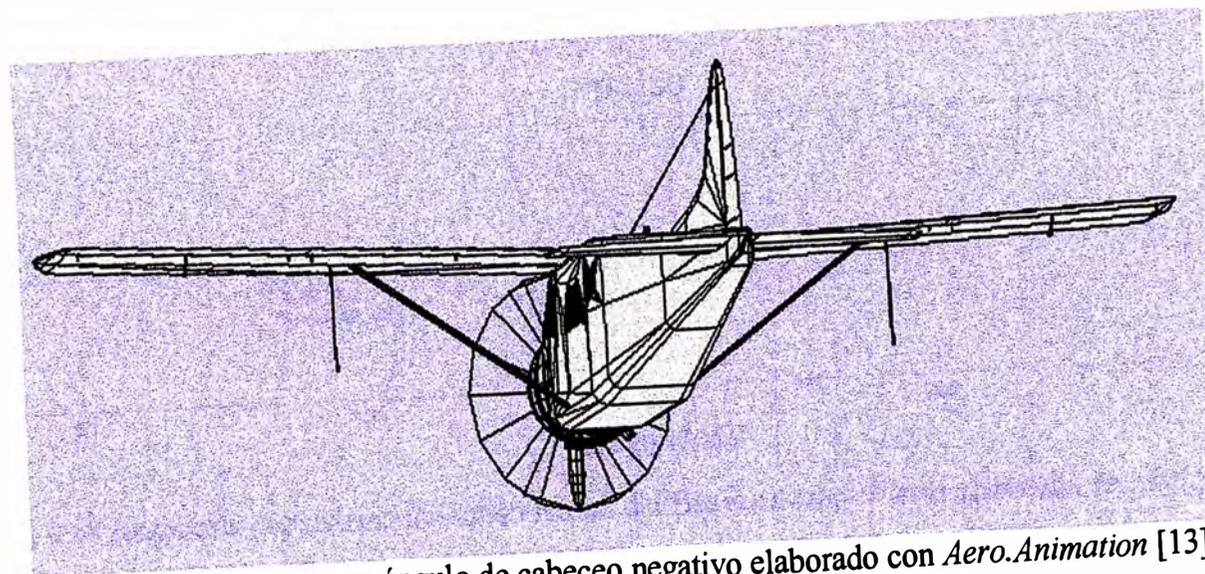
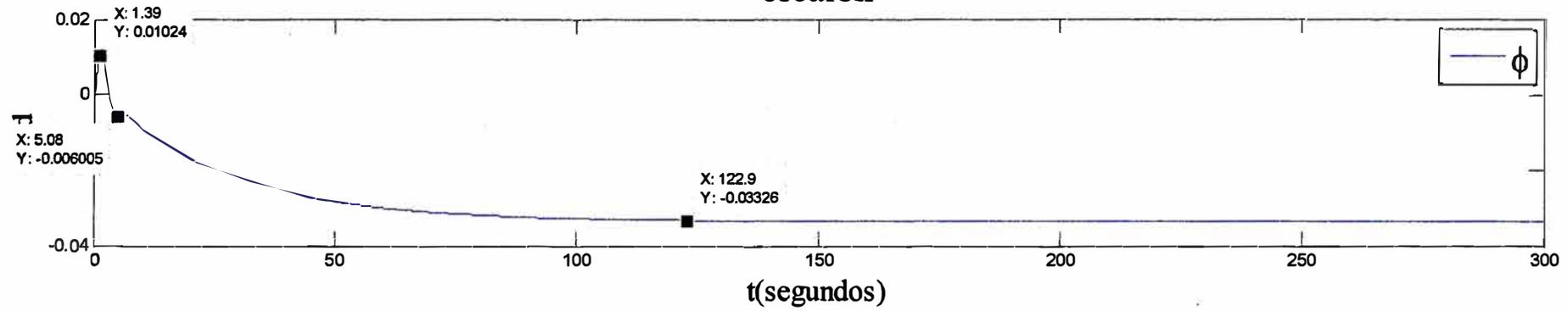


Figura 4.17 Aeronave con ángulo de cabeceo negativo elaborado con *Aero.Animation* [13].

Ángulo de balanceo ϕ
 $\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$
escalón



pulso

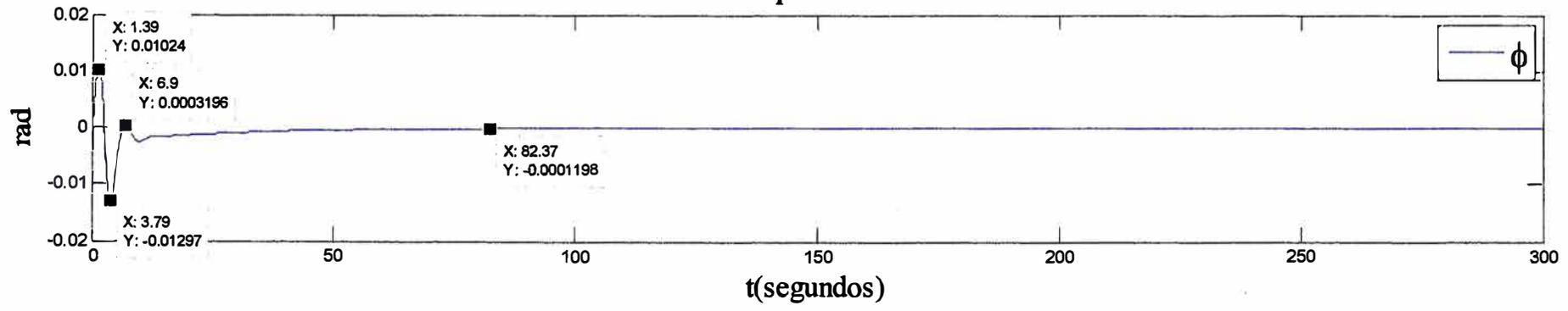


Figura 4.18 Respuesta del sistema dinámico lateral del Beaver a lazo abierto elaborado en *Matlab* [13].

Deslizamiento lateral β
 $\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$
escalón

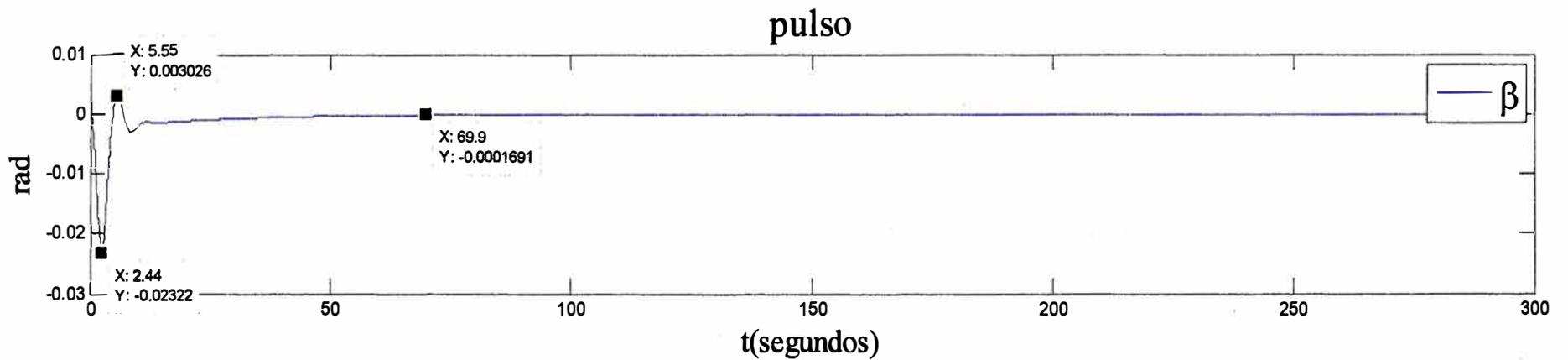
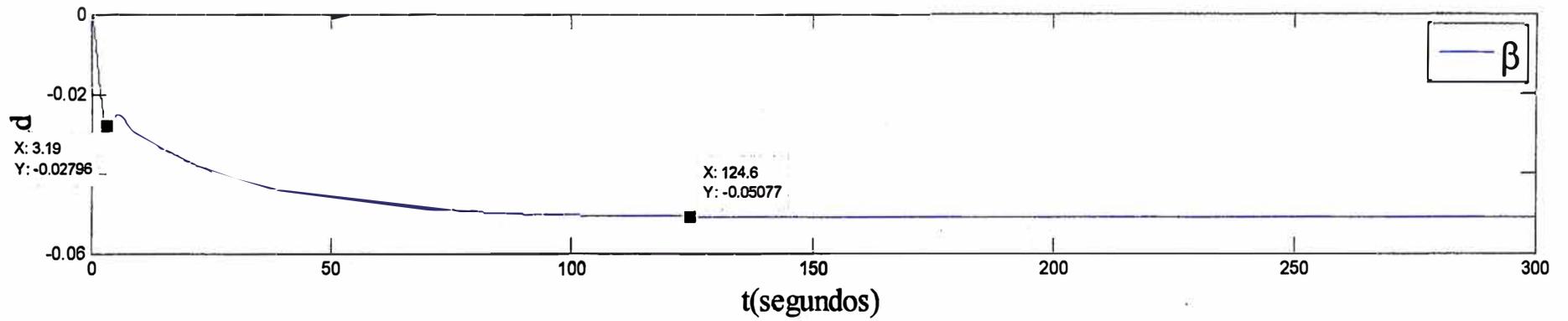
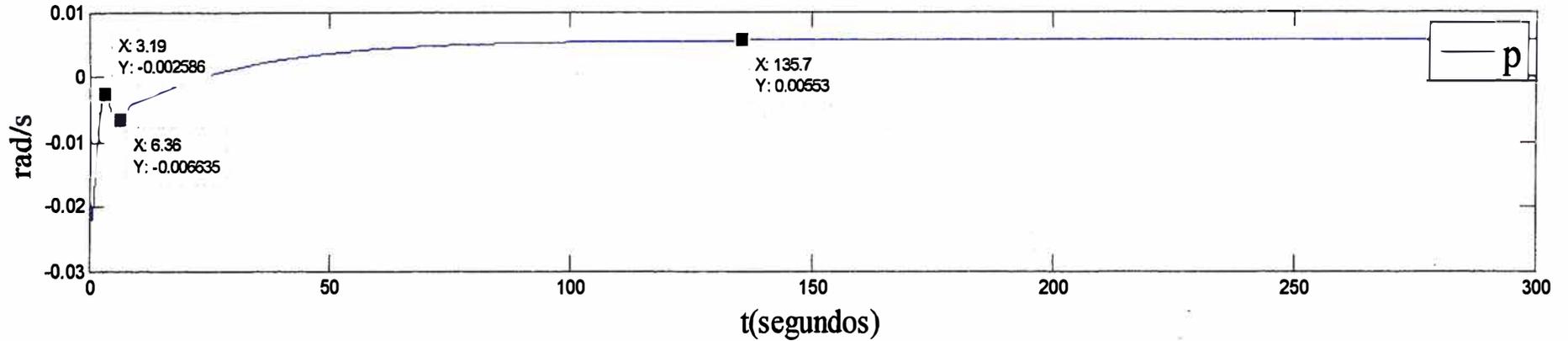


Figura 4.19 Comportamiento del deslizamiento lateral elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad angular de balanceo p

$$\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$$

escalón



pulso

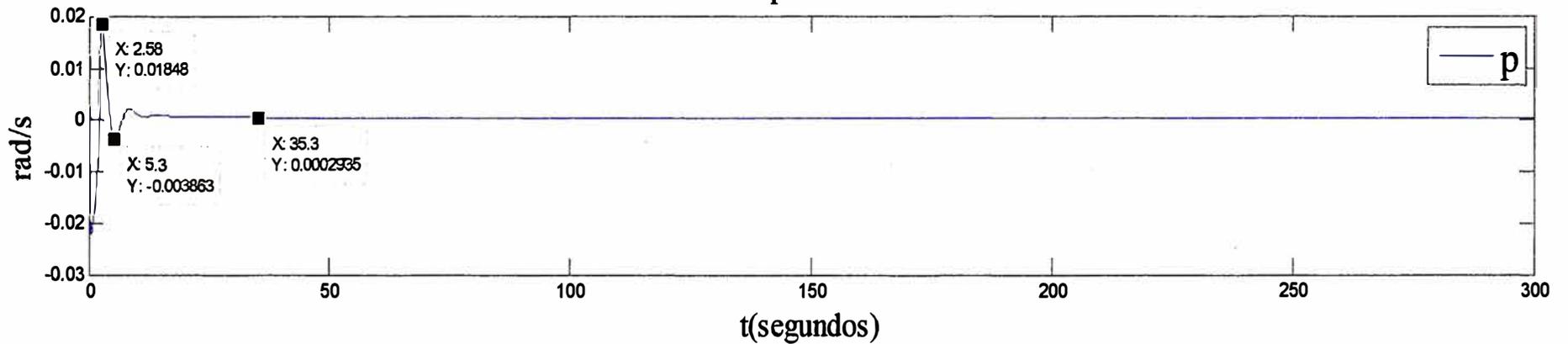
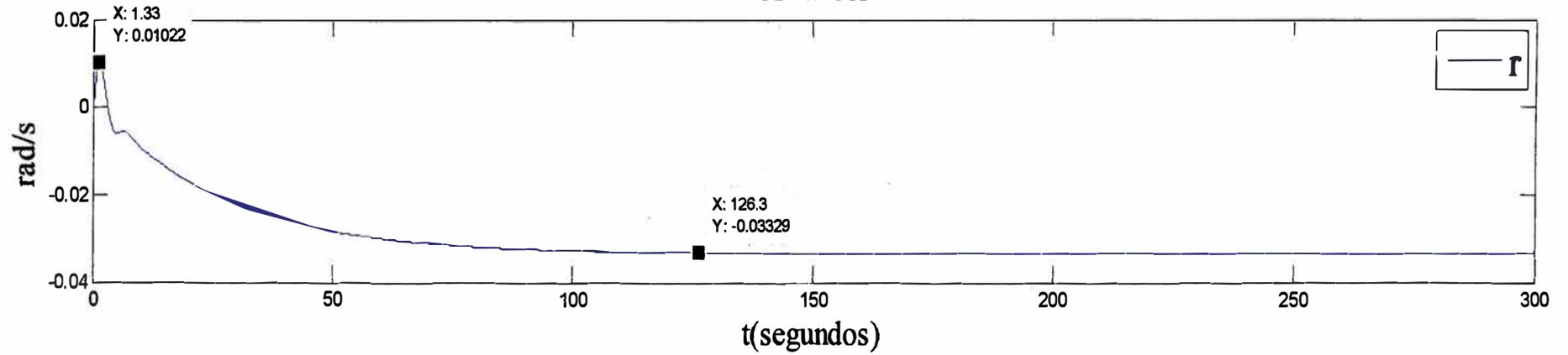


Figura 4.20 Comportamiento de la velocidad angular de balanceo elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad angular de viraje r

$$\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$$

escalón



pulso

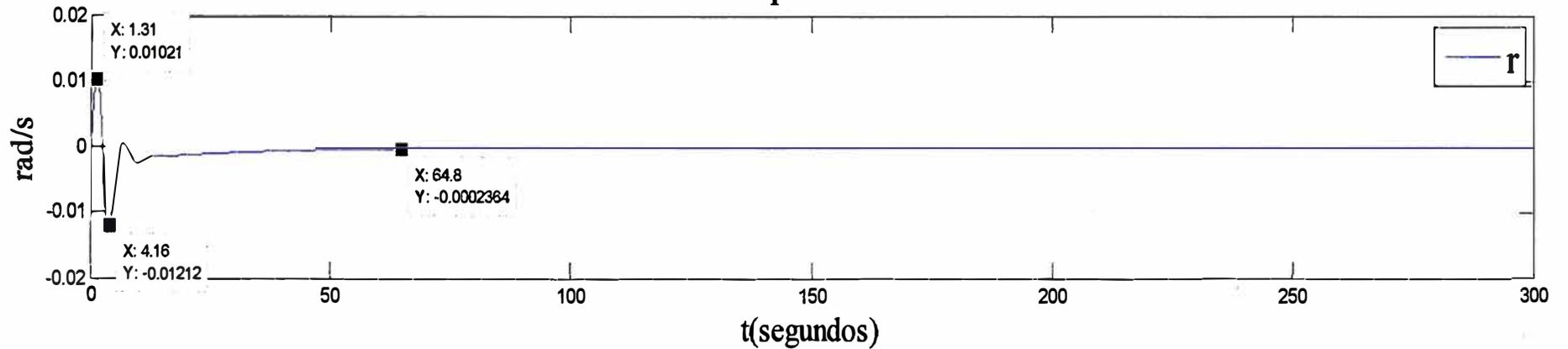


Figura 4.21 Comportamiento de la velocidad angular de viraje elaborado en *Matlab* [13].

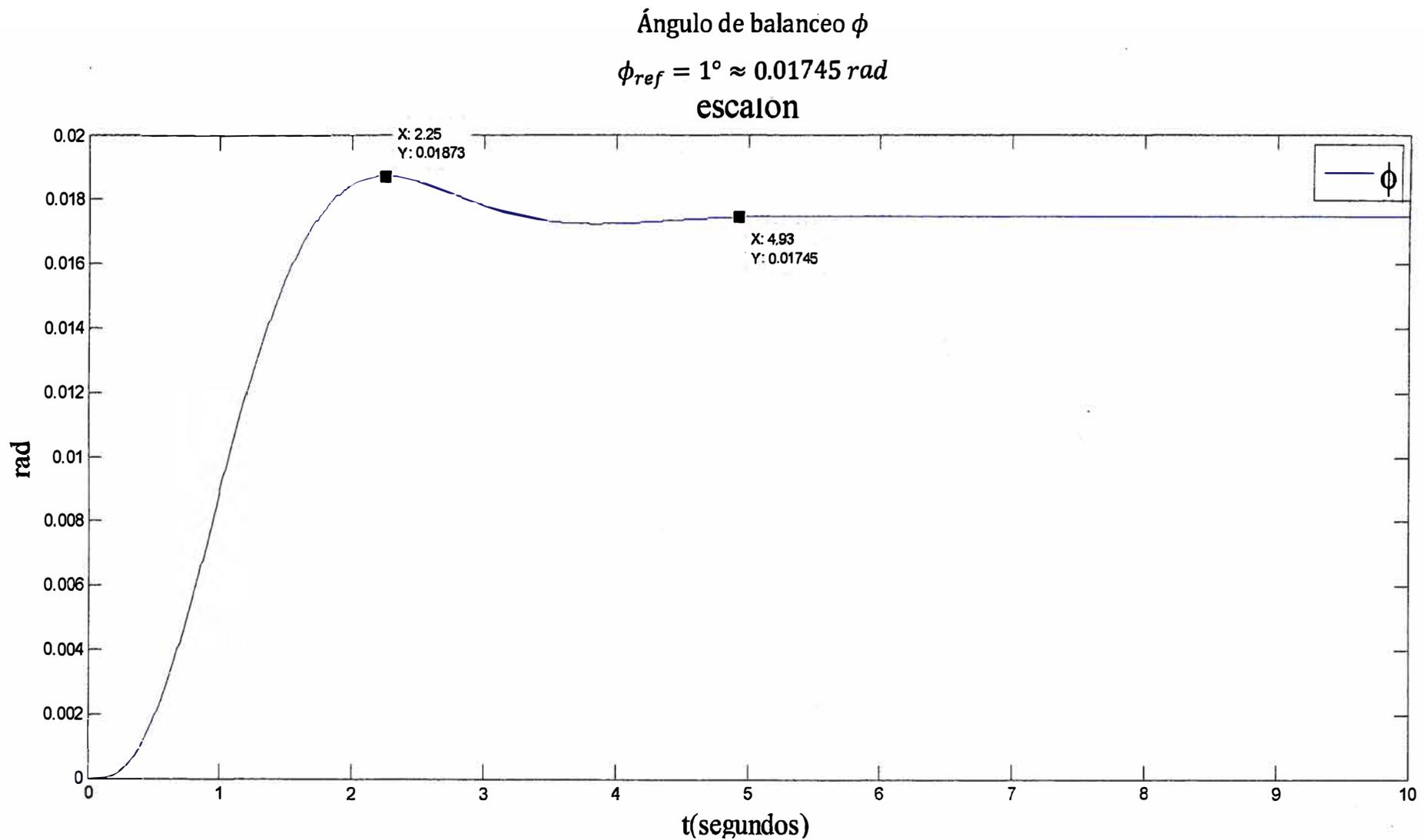


Figura 4.22 Aplicación del control óptimo sobre el sistema lateral elaborado en *Matlab* [13].

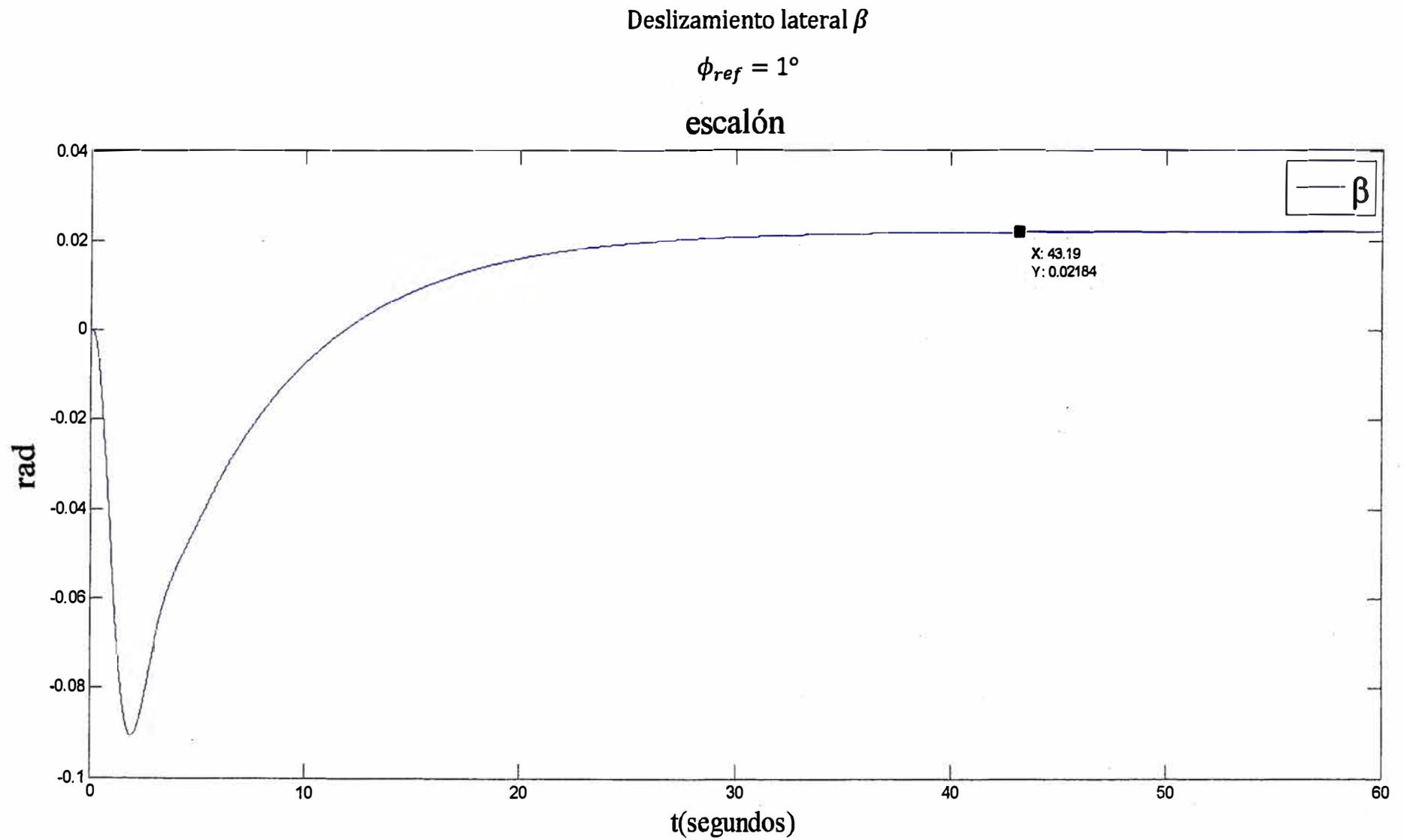


Figura 4.23 Comportamiento del deslizamiento lateral bajo el control óptimo elaborado en *Matlab* [13].

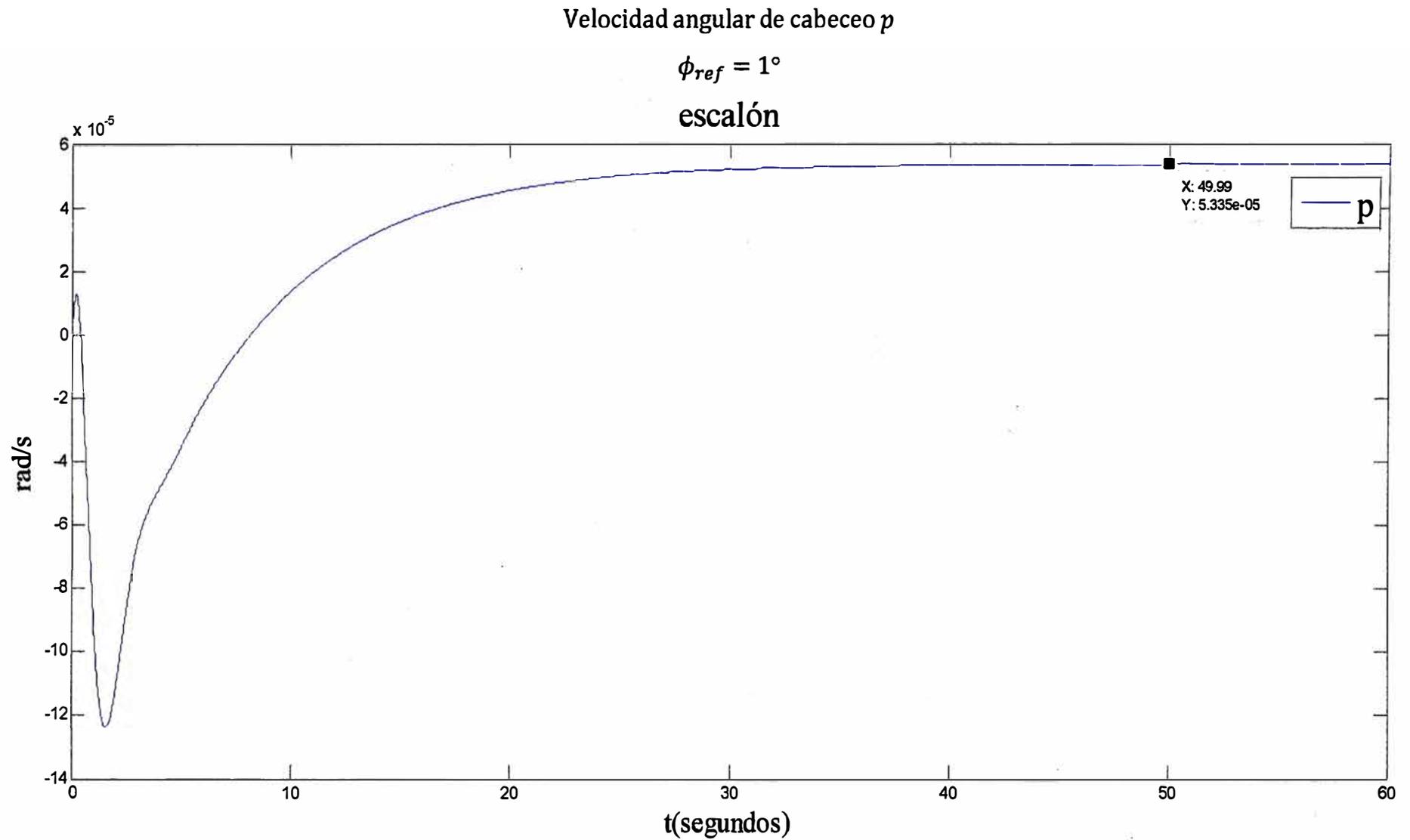


Figura 4.24 Comportamiento de la velocidad angular de balanceo bajo el control óptimo elaborado en *Matlab* [13].

Velocidad angular de viraje r

$\phi_{ref} = 1^\circ$
escalón

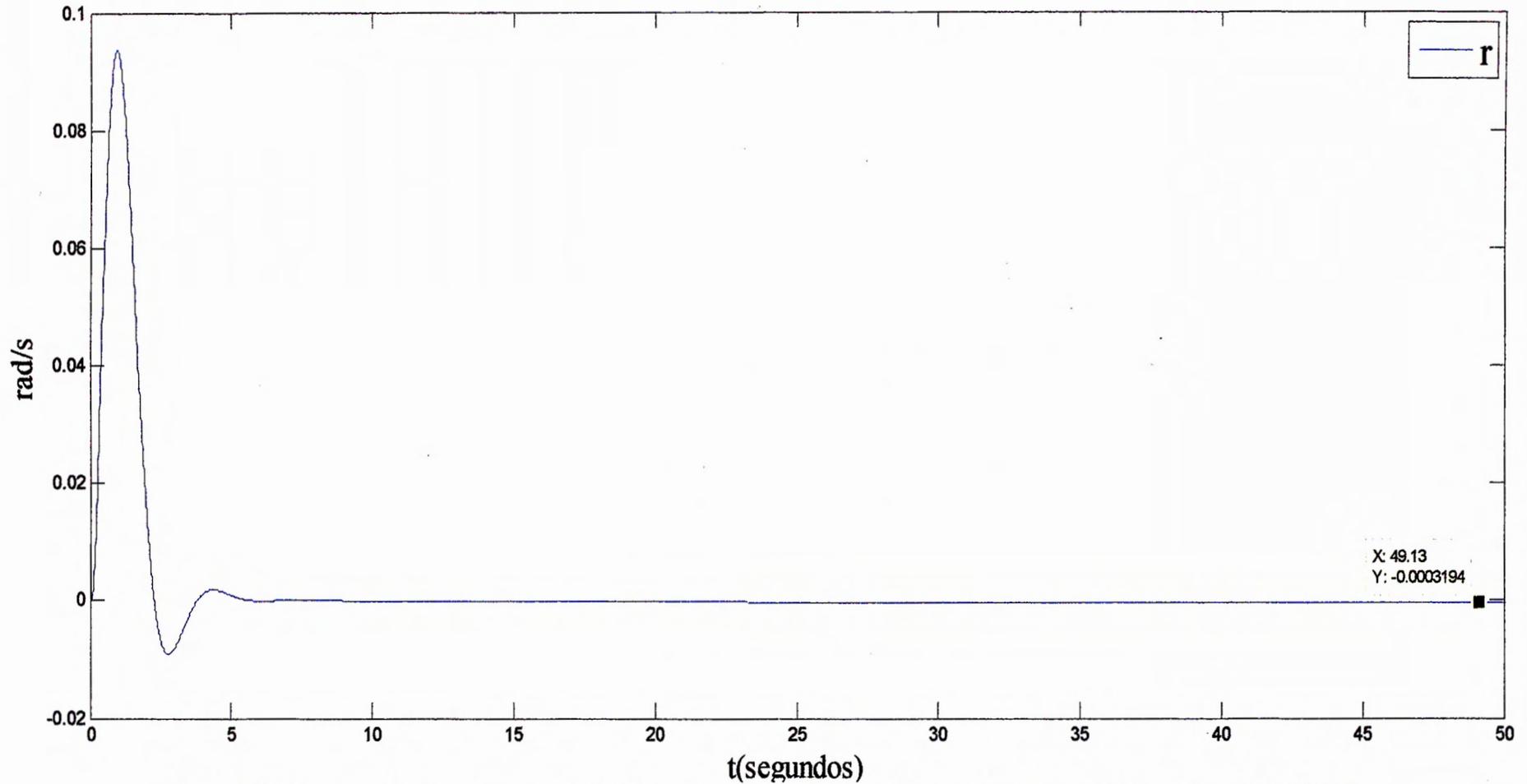


Figura 4.25 Comportamiento de la velocidad angular de viraje bajo el control óptimo elaborado en *Matlab* [13].

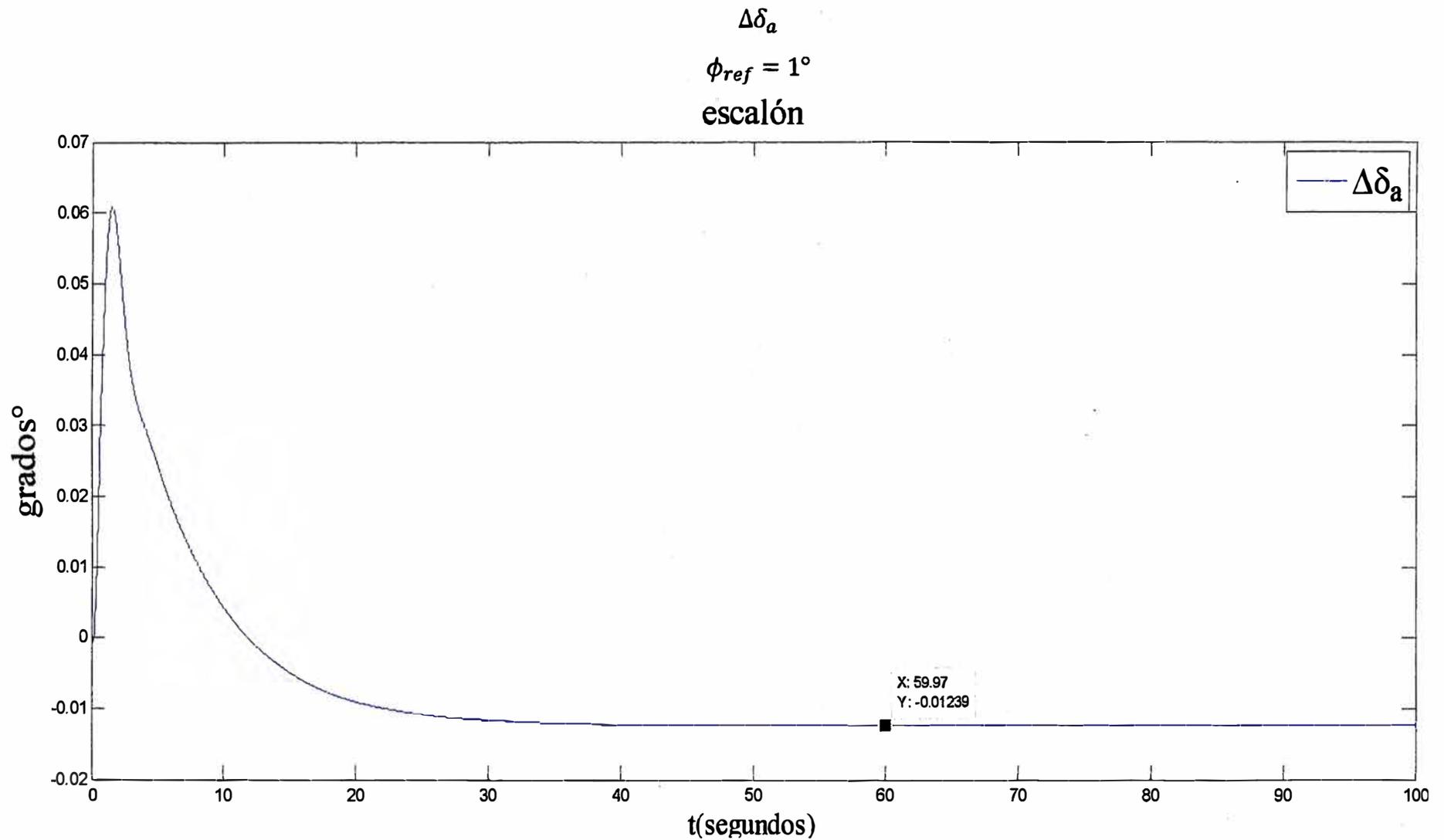


Figura 4.26 Comportamiento del alerón bajo el control óptimo elaborado en *Matlab* [13].

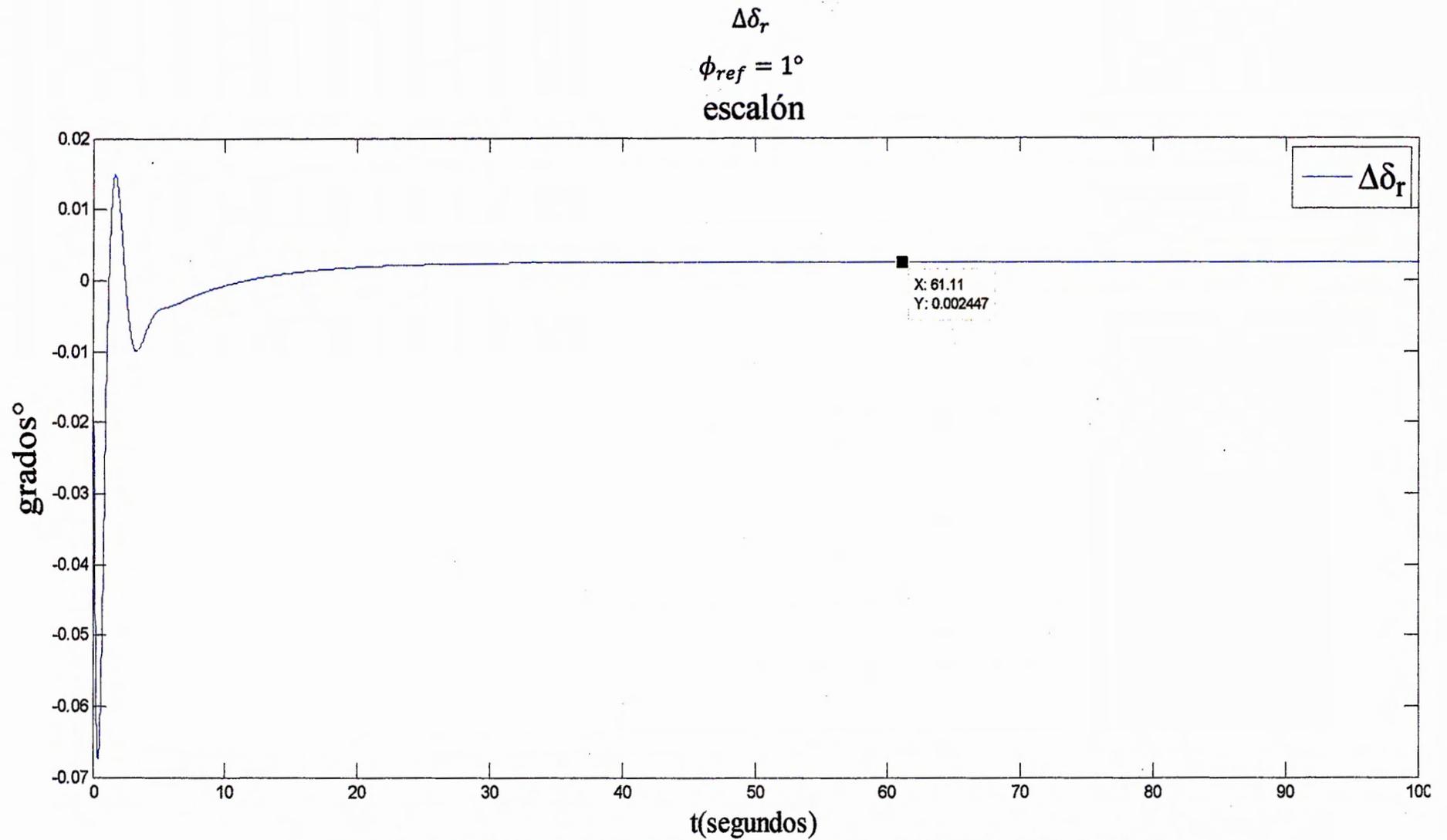


Figura 4.27 Comportamiento del timón bajo el control óptimo elaborado en *Matlab* [13].

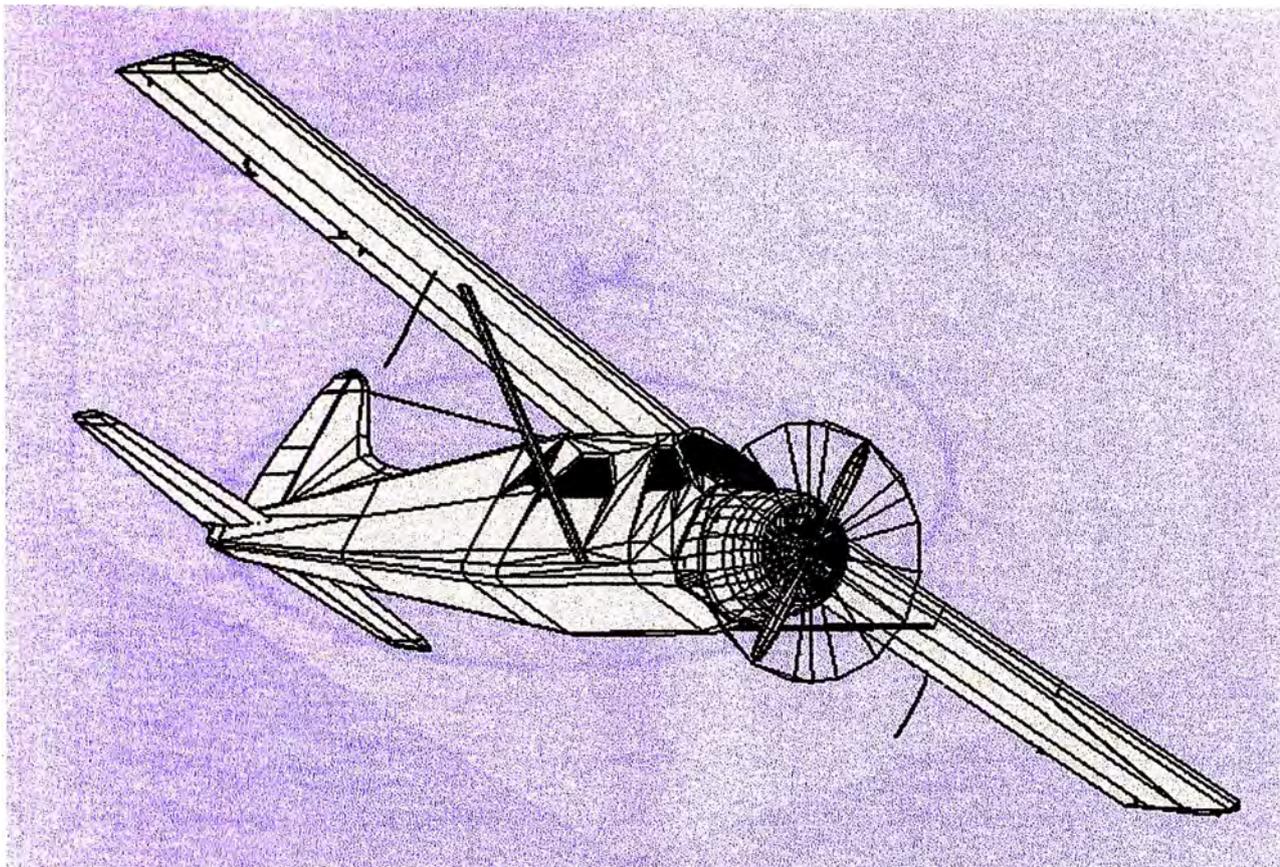


Figura 4.28 Aeronave con ángulo de balanceo positivo elaborado con *Aero.Animation* [13].

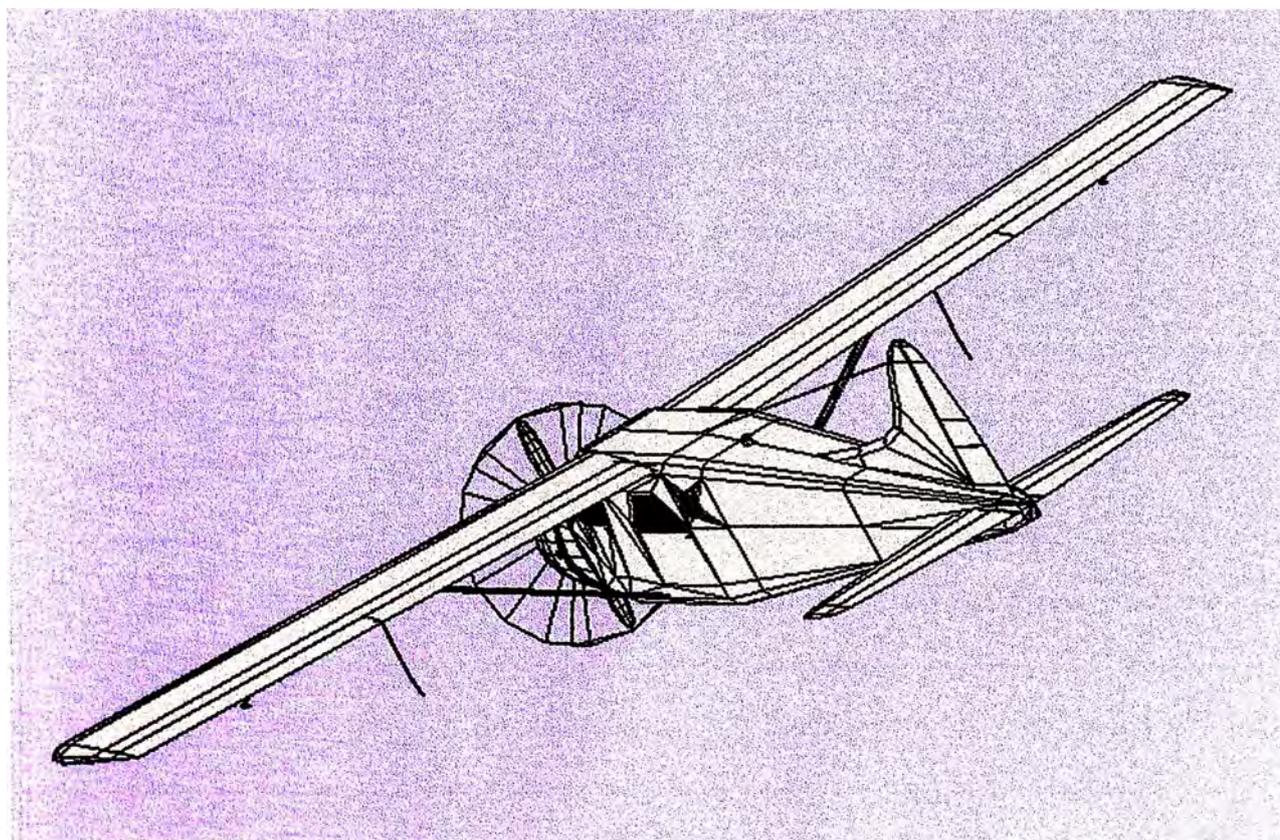


Figura 4.29 Aeronave con ángulo de balanceo negativo elaborado con *Aero.Animation* [13].

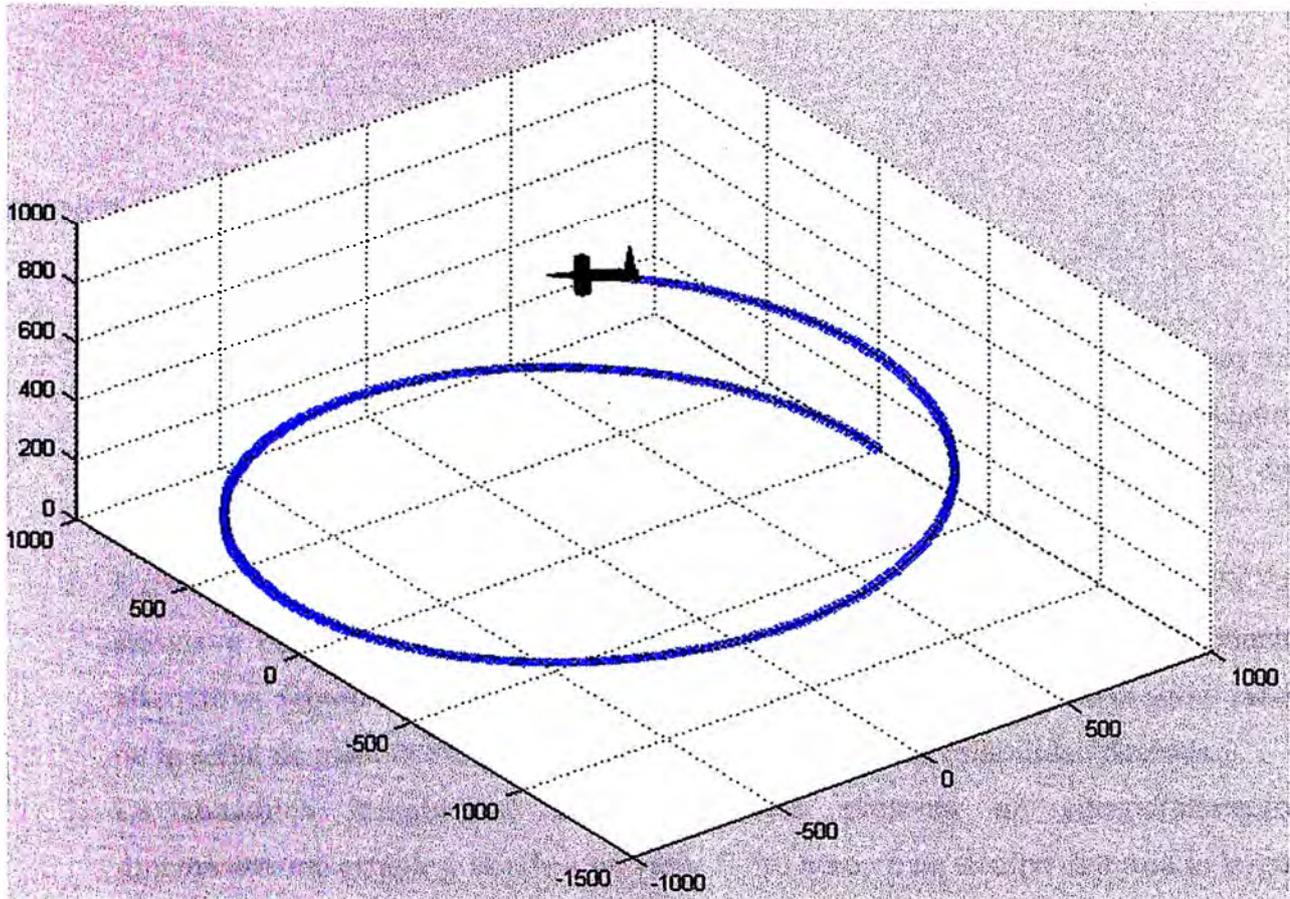


Figura 4.30 Trayectoria de vuelo del DHC-2 Beaver elaborado en *Matlab* [13].

CONCLUSIONES

1. Para el cambio de un sistema continuo a discreto es necesario obtener un periodo de muestro que permita conseguir una buena aproximación al sistema continuo. Según los resultados obtenidos en las simulaciones se concluye que un tiempo de muestreo de 0.01 segundos resulta óptimo para el análisis de este sistema.
2. Existen configuraciones que permiten mejorar la estabilidad dinámica de la aeronave pero al aplicar un control óptimo se concluye que brinda una buena alternativa debido a que reduce el tiempo de establecimiento así como el sobre pico de la señal de manera efectiva para conseguir el control de estabilidad deseada.
3. La dinámica longitudinal en lazo abierto presenta un comportamiento dinámicamente estable y tiende a un valor finito pero en un tiempo demasiado largo y que para condiciones de vuelo seguro no es ideal, al aplicar la técnica de control óptimo para corregir la estabilidad del ángulo de cabeceo se reduce ese tiempo notablemente es así que se concluye que ésta técnica de control es una muy buena alternativa y nos permite condiciones de vuelo dinámicamente estable.
4. Del mismo modo la dinámica lateral, entre otras cosas, controla el balanceo de la aeronave la cual sin un adecuado control podría girar bruscamente generando inestabilidad y daños en los tripulantes, es por ello que se encuentra en la técnica de control óptimo una buena opción para el control del balanceo, permitiendo establecerlo y concluyendo de esta manera que esta técnica permite en un tiempo aceptable una inclinación de balanceo establecida.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Rauw, Marc. *A Simulink environment for Flight Dynamics and Control analysis – Application to the DHC-2 'Beaver'* (2 parts). Graduate's thesis. Delft - The Netherlands : Delft University of Technology, Faculty of Aerospace Engineering, 1993.
- [2] Flyzone - DHC-2 Beaver - Instruction manual - USA, 2012.
- [3] Flying Qualities Phase, Volume II - USAF Test Pilot School Edwards AFB CA, 1988.
- [4] Caughey, David A. *Introduction to Aircraft Stability and Control Course Notes for M&AE 5070*. New York : Sibley School of Mechanical & Aerospace Engineering Cornell University Ithaca, 2011.
- [5] Schmitdt, Louis V. *Introduction to aircraft flight dynamics*. Virginia : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 1998.
- [6] Duane McRuer, Ashkenas Irving and Graham Dunstan. *Aircraft Dynamics and Automatic Control*. Hawthorne – California. : System Technology, Inc., 1986.
- [7] *FDC 1.2 – A Simulink Toolbox for Flight Dynamics and Control Analysis 2nd edition*. 2001.
- [8] Stevens Brian and Lewis Frank. *Aircraft Control and Simulation 2nd edition*. 2003.
- [9] [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:De_Havilland_Canada_DHC-2_Beaver_\(N130WA\).jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:De_Havilland_Canada_DHC-2_Beaver_(N130WA).jpg).
- [10] <http://www.pilotfriend.com/aircraft%20performance/dehavilland/6.htm>.
- [11] <http://www.draneer.com/OlympicFlying/DHC-2Beaver/index.htm>.
- [12] http://www.pw.utc.com/R985_Wasp_Jr_Engine
- [13] Elaboración propia.

ANEXO A

PROGRAMACIÓN EN MATLAB

ctrloptimo.m

```
dmodlineal;  
vectores_r;  
close all  
ControlOptimoLongitudinal;  
FigurasLon;  
ControlOptimoLateral;  
FigurasLat;
```

dmodlineal.m

```
clear all  
datload('aircraft'); triload('cr50100');  
load actmod45.dat -mat  
uinco = [uaero0' uprop0' zeros(1,6)];  
Ts = 0.01;  
[Gb,Hb,Cb,Db] = dlinmod('beaver',Ts,xinco,uinco);  
  
% MATRICES DE ESTADO DISCRETO DEL BEAVER  
% Dinámica longitudinal.  
Glon = [Gb(1,1) Gb(1,2) Gb(1,5) Gb(1,8);  
        Gb(2,1) Gb(2,2) Gb(2,5) Gb(2,8);  
        Gb(5,1) Gb(5,2) Gb(5,5) Gb(5,8);  
        Gb(8,1) Gb(8,2) Gb(8,5) Gb(8,8)];  
  
Hlon = [Hb(1,1); Hb(2,1); Hb(5,1); Hb(8,1)];  
  
% Dinámica lateral.  
Glat = [Gb(3,3) Gb(3,4) Gb(3,6) Gb(3,9);  
        Gb(4,3) Gb(4,4) Gb(4,6) Gb(4,9);  
        Gb(6,3) Gb(6,4) Gb(6,6) Gb(6,9);  
        Gb(9,3) Gb(9,4) Gb(9,6) Gb(9,9)];  
  
Hlat = [Hb(3,2) Hb(3,3); Hb(4,2) Hb(4,3);  
        Hb(6,2) Hb(6,3); Hb(9,2) Hb(9,3)];  
  
% MATRICES DE ESTADO DISCRETO DEL BEAVER  
% Espacio de estados del elevador  
[Ge,He,Ce,De] = c2dm(Aelv,Belv,Celv,Delv,Ts,'zoh');  
% Espacio de estados del alerón  
[Ga,Ha,Ca,Da] = c2dm(Aail,Bail,Cail,Dail,Ts,'zoh');  
% Espacio de estados del rudder  
[Gr,Hr,Cr,Dr] = c2dm(Arud,Brud,Crud,Drud,Ts,'zoh');
```

vectores_r.m

```
-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% vectores de referencia r %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
T = 300;
Tm = 0.01;
t = 0:Tm:T;

% escalón unitario
t1 = 0:Tm:1; t2 = 1:Tm:T;
% l1 = zeros(size(t1)); l2 = ones(size(t2));
l1 = ones(size(t1)); l2 = ones(size(t2));
escalon1 = [l1 l2];
te = [t1 t2];
figure(50)
subplot(2,2,1); plot(te,escalon1);xlim([0 2]);

% doblete
t1 = 0:Tm:1; t2 = 1:Tm:2; t3 = 2:Tm:3; t4 = 3:Tm:T;
l1 = zeros(size(t1)); l2 = ones(size(t2));
l3 = -ones(size(t3)); l4 = zeros(size(t4));
doblete = [l1 l2 l3 l4];
td = [t1 t2 t3 t4];
subplot(2,2,2); plot(td,doblete);xlim([0 5]);

% Variación sinusoidal
seno = sin(2*pi*t/(T/4));

% Variación angular
t1 = 0:Tm:T/4; t2 = T/4:Tm:3*T/4; t3 = 3*T/4:Tm:T;
l1 = (pi/T)*t1; l2 = -(pi/T)*(t2-T/4) + pi/4; l3 = pi*(t3-3*T/4)/T -
pi/4;
angular = [l1 l2 l3];
ta = [t1 t2 t3];
subplot(2,2,3); plot(ta,angular);

% pulso unitario
t1 = 0:Tm:1; t2 = 1:Tm:2; t3 = 2:Tm:T;
% l1 = zeros(size(t1)); l2 = ones(size(t2)); l3 = zeros(size(t3));
l1 = ones(size(t1)); l2 = zeros(size(t2)); l3 = zeros(size(t3));
pulsol = [l1 l2 l3];
tp = [t1 t2 t3];
subplot(2,2,4); plot(tp,pulsol); xlim([0 4]);
% ° a Volt
%Volt = 20/36*(theta_ref+8)-10;
```

ControlOptimoLongitudinal.m

```
-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%- Sistema longitudinal &-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Clon = [0 0 1 0; 0 0 0 1]; % q theta
[n1,r1] = size(Clon*Hlon); [m1,r1] = size(Clon*Hlon);
Dlon = zeros(m1,r1);
dlon = ss(Clon,Hlon,Clon,Dlon,Ts);
```

```

set(dlon,'inputname', {'de'},...
    'outputname',{'q' 'theta'},...
    'statename', {'V' 'alpha' 'q' 'theta'});
%- Pitch Attitude Hold System (dn=0; dpz=0) -----
%----- Sistema dinámico longitudinal en lazo
abierto
% escalón
de = 1; % grados°
de1 = (de*pi/180)*escalon1; % rad
% pulso
de2 = (de*pi/180)*pulsol; % rad
[yln1,xln1] = dlsim(Glon,Hlon,Clon,Dlon,de1);
[yln2,xln2] = dlsim(Glon,Hlon,Clon,Dlon,de2);
% ----- actuador del elevador
[ne,re] = size(Ge*He); [me,re] = size(Ce*He);
selv = ss(Ge,He,Ce,De,Ts);
set(selv,'inputname', {'Vde' 'qcV'},...
    'outputname',{'de'},...
    'statename', {'xe1' 'xe2' 'xe3'});
%----- Hallando el sistema longitudinal
resultante
M = iconnect;
Vde = icsignal(1);
ys1 = icsignal(2);
ys3 = icsignal(1);
Kxe2 = Ce(1,2); Kq = 0.0317;
M.Equation{1} = equate(ys1,dlon*ys3);
M.Equation{2} = equate(ys3,selv*[Vde;Kq*ys1(1)]);
M.Input = Vde;
M.Output = ys1(2);
slon = M.System;
Gln = slon.a; Hln = slon.b; Cln = slon.c; Dln = slon.d;
set(slon,'inputname', {'Vde'},...
    'outputname', {'theta'});
%----- Sistema longitudinal en lazo abierto
% escalón
Vde1 = escalon1; % Volt
% pulso
Vde2 = pulsol; % Volt
[yln3,xln3] = dlsim(Gln,Hln,Cln,Dln,Vde1);
[yln4,xln4] = dlsim(Gln,Hln,Cln,Dln,Vde2);
yde1 = Ce(1,2)*xln3(:,6);
yde2 = Ce(1,2)*xln4(:,6);
%----- Aplicando control óptimo
[n,r] = size(Gln*Hln); [m,r] = size(Cln*Hln);
G1 = [Gln zeros(n,m); -Cln*Gln eye(m)]; H1 = [Hln; -Cln*Hln];
Q = diag([ 1 1 1 100 1 1 1 1]); R = eye(r);
[Ko,P,Z] = dlqr(G1,H1,Q,R); disp(Ko);
Kiln = -Ko(:,n+1:n+m); Kln = Ko(:,1:n); disp(Ki); disp(K)
Go = [ Gln-Hln*Kln Hln*Kiln; -Cln*Gln+Cln*Hln*Kln eye(m)-Cln*Hln*Kiln];
Ho = [zeros(n,m); eye(m)]; Co = [Cln zeros(m)]; Do = zeros(m);
sopt = ss(Go,Ho,Co,Do,Ts);
set(sopt,'inputname',{'theta_ref'},...
    'outputname', {'theta'},...
    'statename', {'V' 'alpha' 'q' 'theta' 'xe1' 'xe2' 'xe3' 'xo'});

to = t(1,1:300); uo = escalon1(1,1:300);
theta_ref = 0; % -8° < theta ref < +18°
% escalón
% r = ((theta_ref+8)*5/9-10)*escalon1; % Volt

```



```

M.Equation{2} = equate(ys2,sale*[Vda;Kp*ys1(1)]);
M.Equation{3} = equate(ys3,srud*[Vdr;Kr*ys1(2)]);
M.Input = [Vda;Vdr];
M.Output = ys1(3);
slat = M.System;
Glt = slat.a; Hlt = slat.b; Clt = slat.c; Dlt = slat.d;
set(slat,'inputname', {'Vda' 'Vdr'},...
    'outputname', {'phi'});
%----- Sistema lateral en lazo abierto
% escalón
Vda1 = 1*escalon1; % Volt
Vdr1 = 0*escalon1; % Volt
% pulso
Vda2 = 1*pulsol; % Volt
Vdr2 = 0*pulsol; % Volt
[ylt3,xlt3] = dlsim(Glt,Hlt,Clt,Dlt,[Vda1;Vdr1]);
[ylt4,xlt4] = dlsim(Glt,Hlt,Clt,Dlt,[Vda2;Vdr2]);
yda1 = Ca(1,2)*xlt3(:,6); yda2 = Ca(1,2)*xlt4(:,6);
ydr1 = Cr(1,2)*xlt3(:,9); ydr2 = Cr(1,2)*xlt4(:,9);
%----- Aplicando control óptimo
[n,r] = size(Glt*Hlt); [m,r] = size(Clt*Hlt);
G1 = [Glt zeros(n,m); -Clt*Glt eye(m)]; H1 = [Hlt; -Clt*Hlt];
Q = diag([ 1 1 1 100 1 1 1 1 1]); R = eye(r);
[Ko,P,Z] = dlqr(G1,H1,Q,R); disp(Ko);
Kilt = -Ko(:,n+1:n+m); Klt = Ko(:,1:n);
Go = [ Glt-Hlt*Klt Hlt*Kilt; -Clt*Glt+Clt*Hlt*Klt eye(m)-Clt*Hlt*Kilt];
Ho = [zeros(n,m); eye(m)]; Co = [Clt zeros(m)]; Do = zeros(m);
sopt = ss(Go,Ho,Co,Do,Ts);
set(sopt,'inputname',{'phi_ref'},...
    'outputname', {'phi'},...
    'statename', {'beta' 'p' 'r' 'phi' 'xa1' 'xa2' 'xa3' 'xr1' 'xr2'
'xr3' 'xo'});

phi_ref = -30; % -30° < phi ref < +30°
% escalón
% r = ((phi_ref)-30)*escalon1; % Volt
% r = (phi_ref)*(pi/180)*escalon1; %rad
r = (phi_ref*pi/180)*escalon1;
[ylto,xlto] = dlsim(Go,Ho,Co,Do,r);
yda1 = Ca(1,2)*xlto(:,6); ydr1 = Cr(1,2)*xlto(:,9);

% r = u2;
% [ylto,xlto] = dlsim(Go,Ho,Co,Do,r);
% yda1 = Ca(1,2)*xlto(:,6); ydr1 = Cr(1,2)*xlto(:,9);

```