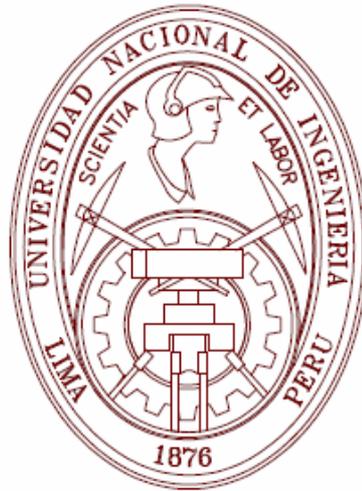


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA



**MODELAMIENTO Y CONTROL DE SISTEMAS
FÍSICOS USANDO EL ENFOQUE PORT-
HAMILTONIANO**

TESIS

PARA OPTAR POR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO MECATRÓNICO

PRESENTADO POR:

IVAN ARTURO CALLE FLORES

LIMA - PERU

2010

*A mis padres, por brindarme su apoyo incondicional
y alentarme a lograr mis sueños mas anhelados.*

*A la UNI, por darme la oportunidad
de formarme como profesional.*

TABLA DE CONTENIDOS

PRÓLOGO	1
LISTA DE FIGURAS	6
LISTA DE TABLAS	10
Capítulo 1.	
Introducción	11
1.1 Reseña histórica.....	11
1.2 Formulación del problema.....	14
1.3 Objetivos.....	19
Capítulo 2.	
El Enfoque Comportamental	21
2.1 Introducción.....	21
2.2 Universo y comportamiento.....	22
2.3 Ecuaciones de comportamiento.....	27
2.4 Variables manifiestas y variables latentes.....	28
2.5 Sistemas dinámicos.....	30
2.6 Entradas y salidas.....	40
Capítulo 3.	
Modelamiento Basado en Puertos – Diagrama de Lazos	44
3.1 Introducción.....	44
3.2 Variables conjugadas de potencia.....	45
3.3 Puertos de potencia.....	46
3.4 Diagrama de lazos.....	47
3.5 Elementos básicos del diagrama de lazos.....	49
3.5.1 Elementos resistivos.....	50
3.5.2 Elementos capacitivos.....	50
3.5.3 Elementos inductivos.....	52
3.5.4 Fuentes de esfuerzo y flujo.....	53
3.5.5 El transformador.....	54
3.5.6 El girador.....	55
3.6 Conexiones.....	56
3.6.1 Conexión tipo 1.....	57
3.6.2 Conexión tipo 0.....	58
3.7 Causalidad.....	60
3.8 Causalidad diferencial.....	68

Capítulo 4.

Sistemas Port-Hamiltonianos	71
4.1 Introducción.....	71
4.2 Análisis energético de un sistema simple.....	73
4.3 Formulación matemática de las variables conjugadas de potencia.....	79
4.4 Formulación matemática de los puertos de potencia.....	81
4.5 Sistemas port-Hamiltonianos implícitos.....	83
4.6 Sistemas port-Hamiltonianos implícitos con disipación.....	91
4.7 Descripción comportamental de los sistemas port-Hamiltonianos implícitos.....	93
4.8 Sistemas port-Hamiltonianos explícitos.....	95
4.9 Descripción comportamental de los sistemas port-Hamiltonianos explícitos.....	101

Capítulo 5.

Control de los Sistemas Port-Hamiltonianos	107
5.1 Introducción.....	107
5.2 Control basado en la pasividad.....	109
5.2.1 Conceptos básicos de la teoría de pasividad.....	109
5.2.2 Estabilización de sistemas pasivos por retroalimentación de salidas.....	116
5.2.3 Sistemas port-Hamiltonianos y la pasividad.....	119
5.2.4 Estabilización por inyección de amortiguación.....	123
5.2.5 Control por moldeamiento de energía basado en pasividad...	128
5.2.6 El obstáculo de disipación.....	132
5.3 Control por interconexión.....	139
5.3.1 Conceptos básicos.....	139
5.3.2 Interconexión de sistemas port-Hamiltonianos.....	142
5.3.3 Moldeamiento de energía mediante control por interconexión	147
5.3.4 El obstáculo de disipación.....	156
5.4 Control basado en la pasividad por interconexión y asignamiento de pasividad.....	157

Capítulo 6.

Aplicación del Enfoque Port-Hamiltoniano para el Modelamiento y Control de un Manipulador Robótico	172
6.1 Introducción.....	172
6.2 Modelamiento.....	173
6.3 Control de posición basado en la pasividad.....	177
6.4 Resultados obtenidos.....	180
6.4.1 Usando el enfoque port-Hamiltoniano.....	181
6.4.2 Usando el enfoque Lagrangiano.....	185

Conclusiones y Recomendaciones	190
---------------------------------------	-----

Apéndice A	195
Conceptos Básicos de la Geometría Diferencial	195
Apéndice B	
Programas en MATLAB para el Control del Robot de 2GDL	205
B.1 Programa – Parámetros del modelo port-Hamiltoniano del robot.....	205
B.2 Programa – Simulación usando el enfoque port-Hamiltoniano.....	206
B.3 Programa – Parámetros del modelo Lagrangiano del robot.....	207
B.4 Programa – Matriz de inercia del robot.....	208
B.5 Programa – Inversa de la matriz de inercia del robot.....	208
B.6 Programa – Vector de coriolis del robot.....	209
B.7 Programa – Vector de gravedad del robot.....	209
B.8 Programa – Simulación usando el enfoque Lagrangiano.....	209
Bibliografía.....	211

PRÓLOGO

La teoría de control clásico se basa en el paradigma de causalidad, de donde se desprende la idea de ver a un sistema en términos de entradas y salidas, y ver las interconexiones entre sistemas como relaciones unilaterales del tipo salida/entrada. Sin embargo, este enfoque no es adecuado para trabajar con los sistemas físicos, ya que un fenómeno físico es esencialmente no causal. La necesidad de un nuevo enfoque que respete la naturaleza física de un sistema, se acentúa con la aparición de los sistemas mecatrónicos, en los que hay una mezcla de componentes de diversos dominios físicos, y donde se necesita una teoría de modelamiento matemático que capture la naturaleza física del sistema de la manera más exacta posible, para fines de simulación y control. Para esto se requiere un cambio de paradigma.

El objeto fundamental que caracteriza a un sistema físico es la energía. Cuando dos sistemas físicos interactúan, existe un flujo de energía de un sistema a otro, lo que determina la dinámica de cada sistema. Para el control de tal interacción en una manera apropiada, es necesario controlar este intercambio de energía.

De otro lado, es más adecuado representar las interacciones entre sistemas desde un punto de vista desde una relación bilateral en vez de una relación unilateral. Es en este contexto donde se establece el paradigma de puerto, como la interfase mediante el cual un sistema interactúa con su entorno.

El formalismo port-Hamiltoniano que se presenta en esta Tesis, provee un marco para el modelamiento de sistemas físicos, teniendo como base los conceptos de energía y puerto de un sistema. Al estar basado en la energía, permite representar un sistema físico independiente del dominio al que pertenece y proporciona la generalidad para tratar con sistemas complejos; y al hacer uso del nuevo paradigma de puerto, permite capturar de manera adecuada la naturaleza física del fenómeno de interconexión entre sistemas físicos; así al analizar un sistema físico basándonos en el enfoque port-Hamiltoniano se obtiene de manera correcta la naturaleza física del sistema. Además, al usar este enfoque las propiedades energéticas del sistema se muestran de manera explícita y es posible utilizarlas para el diseño de controladores energéticos que regulen apropiadamente el comportamiento del sistema.

La presente tesis se ha organizado en seis capítulos, los que están expuestos en el orden siguiente:

En el capítulo 1, se hace una breve reseña histórica donde se muestran los orígenes del modelamiento basado en puertos y su posterior evolución hacia los sistemas port-Hamiltonianos. Luego se establece la formulación del problema, en donde se muestra los inconvenientes que presenta la teoría de sistemas clásico para el adecuado modelamiento de sistemas físicos y se propone la alternativa de solución que ofrece el enfoque port-Hamiltoniano. Finalmente se muestran los objetivos a los que se desean llegar en la presente Tesis.

En el capítulo 2, se presenta el enfoque comportamental como el marco adecuado para establecer los sistemas port-Hamiltonianos. El capítulo muestra como el enfoque comportamental provee un lenguaje que respeta la naturaleza física de un sistema y que además debido a su generalidad lo convierten en el marco adecuado para presentar los sistemas port-Hamiltonianos. Se presenta los conceptos de universo, comportamiento, ecuaciones de comportamiento para obtener el modelo de un sistema. Se establece desde un punto de vista comportamental los conceptos de estado, entradas y salidas. Finalmente se da la representación comportamental de los sistemas dinámicos continuos e invariantes en el tiempo, esto debido a que los sistemas físicos son un subconjunto de estos.

En el capítulo 3, se presenta los conceptos básicos del modelamiento basado en puertos y del diagrama de lazos. Se establece el nuevo paradigma de puerto, como la interfase mediante el cual un sistema físico interactúa con su entorno, y demostrando por que el modelamiento basado en puertos es superior al modelamiento tradicional. Se muestra que en cada dominio físico existen dos variables conjugadas de potencia que lo caracterizan. Se muestra el diagrama de lazos como la herramienta grafica para representar la interconexión entre los componentes de un sistema. Se lista los elementos básicos que componen el diagrama de lazos y el tipo de conexiones entre estos componentes. Finalmente se estudia el concepto de causalidad y causalidad diferencial.

En el capítulo 4, se presenta el enfoque port-Hamiltoniano para el modelamiento de sistemas físicos. El capítulo empieza estableciendo que el enfoque

port-Hamiltoniano contribuye a mejorar la rigurosidad del modelamiento basado en puertos al darle un fundamento matemático. Se formaliza matemáticamente la noción de puerto, y se presenta los conceptos de Hamiltoniano y estructura Dirac, que representan matemáticamente la energía y las interconexiones de un sistema respectivamente. Entonces se presentan los sistemas port-Hamiltonianos implícitos, es decir aquellos que son intrínsecos a cada sistema, demostrando que la energía, la estructura de interconexiones y los puertos a través del cual un sistema se comunica con el mundo externo, son los ingredientes esenciales para modelar el comportamiento de un sistema físico. Finalmente con el fin de tener una representación en base a ecuaciones diferenciales se presentan los sistemas port-Hamiltonianos explícitos.

En el capítulo 5, se presenta las estrategias de control de los sistemas port-Hamiltonianos. Se establece que la idea fundamental de cualquier técnica de control es moldear la energía del sistema controlado tal que el punto mínimo de la función de energía coincida con la configuración deseada. La primera estrategia de control se basa en la relación existente entre los sistemas port-Hamiltonianos y los sistemas pasivos, para entonces desarrollar técnicas de control basadas en la pasividad. La segunda estrategia de control usa el concepto control por interconexión, que considera al controlador como otro sistema port-Hamiltoniano, demostrando que la conexión de dos sistemas port-Hamiltonianos resulta en otro sistema port-Hamiltoniano. Se mostrara que el principal inconveniente de las técnicas anteriormente mencionadas es el llamado obstáculo de disipación que se presenta cuando un sistema es capaz de disipar una cantidad infinita de energía. Finalmente,

se demuestra que es posible combinar las técnicas anteriormente mencionadas dando lugar a la llamada técnica de control basada en pasividad por interconexión y asignamiento de amortiguación que supera el inconveniente de la disipación y que permite explotar todos los grados de libertad del formalismo port-Hamiltoniano.

En el capítulo 6, se muestra la aplicación del enfoque port-Hamiltoniano en el modelamiento y control de un manipulador robótico. Primero, se identificara el modelo port-Hamiltoniano de un manipulador robótico de cualquier grado de libertad. Luego, se implementara una técnica de control basada en la pasividad que moldee la energía total del manipulador tal que estabilice la configuración que se desea lograr. Finalmente se aplicaran los resultados obtenidos en el caso de un manipulador de dos grados de libertad, y se hará una comparación de los resultados obtenidos respecto a los que se obtienen usando las técnicas clásicas de control de posición de robots basadas en el Lagrangiano.

Finalmente, se presentan las Conclusiones, Recomendaciones para investigaciones posteriores, el apéndice A, donde se presentan los conceptos matemáticos usados en el presente trabajo, y el apéndice B, que contiene el listado de programas desarrollados en MATLAB.

Quisiera finalizar este prólogo expresando mi agradecimiento a mi asesor de tesis, el Ing. Ricardo Rodríguez Bustinza por sus valiosas sugerencias en el desarrollo de la presente Tesis y por su tiempo en la revisión de la misma.

LISTA DE FIGURAS

1.1 Gas ideal contenido en un recipiente.....	15
1.2 Modelo de dos tanques.....	16
1.3 Interconexión de dos tanques.....	16
1.4 Conexión en serie de dos impedancias.....	17
1.5 Conexión en serie de dos sistemas de impedancias.....	18
2.1 Fenómeno a modelar.....	22
2.2 Modelo de un fenómeno.....	23
2.3 Fenómeno de tipo continuo.....	24
2.4 Fenómeno de tipo dinámico.....	25
2.5 Fenómeno de tipo distribuido.....	26
2.6 Red resistiva.....	29
2.7 Eventos de un fenómeno dinámico como función del tiempo.....	31
2.8 Movimiento de un planeta alrededor del sol.....	32
2.9 Circuito L-C.....	35
2.10 Concatenación de trayectorias que tienen el mismo estado.....	38
3.1 Interacción entre sistemas físicos.....	44

3.2	Puertos de potencia en el caso de un motor DC.....	47
3.3	Lazo de conexión entre dos sistemas.....	48
3.4	Representación de un elemento resistivo.....	50
3.5	Representación de un elemento capacitivo.....	51
3.6	Representación de un elemento inductivo.....	52
3.7	Representación de las fuentes de esfuerzo y flujo.....	54
3.8	Representación de un transformador.....	54
3.9	Representación de un girador.....	55
3.10	Conexión tipo 1.....	57
3.11	Conexión tipo 0.....	59
3.12	Conexión entre dos subsistemas.....	61
3.13	Causalidad del sistema A como fuente de esfuerzo.....	61
3.14	Causalidad del sistema A como fuente de flujo.....	62
3.15	Causalidad de un elemento resistivo.....	63
3.16	Causalidad de un elemento capacitivo.....	63
3.17	Causalidad de un elemento inductivo.....	64
3.18	Causalidad de las fuentes.....	64
3.19	Causalidad del transformador.....	64
3.20	Causalidad del girador.....	65
3.21	Causalidad de la conexión tipo 1.....	65
3.22	Causalidad de la conexión tipo 0.....	66
3.23	Esquema de un motor DC con carga.....	66
3.24	Diagrama de lazos de un motor DC con carga.....	68
3.25	Ejemplo de causalidad diferencial en un inductor.....	69

3.26	Ejemplo de causalidad diferencial en un capacitor.....	69
3.27	Eliminación de causalidad diferencial.....	70
4.1	Oscilador Lineal.....	73
4.2	Modelo de la masa.....	74
4.3	Modelo del resorte.....	75
4.4	Esquema de la interconexión interna de un oscilador.....	76
4.5	Modelo energético de un sistema dinámico.....	84
4.6	Conexión de un elemento con la estructura de interconexión del sistema.	90
4.7	Motor DC con fricción.....	104
5.1	Estabilización por inyección de amortiguación de un oscilador.....	127
5.2	Disipación finita de un circuito RLC.....	134
5.3	Disipación infinita de un circuito RLC.....	138
5.4	Control como interconexión.....	142
5.5	Interconexión preservante entre dos sistemas port-Hamiltonianos.....	143
5.6	Levitador magnético.....	166
5.7	Dinámica de un levitador magnético.....	168
6.1	Manipulador de dos grados de libertad.....	180
6.2	Error de posición de las juntas - Enfoque port-Hamiltoniano.....	184
6.3	Torques de las juntas - Enfoque port-Hamiltoniano.....	185
6.4	Diagrama de bloques del controlador $PD + g(q)$	186
6.5	Diagrama en Simulink del Control $PD + g(q)$ del manipulador de 2GDL	187

6.6 Modelo en Simulink del manipulador de dos grados de libertad.....	188
6.7 Error de posición de las juntas - Enfoque Lagrangiano.....	188
6.8 Torques presentes en las juntas - Enfoque Lagrangiano.....	189
A.1 Mapas compatibles.....	196
A.2 Representación local de un mapeo.....	198
A.3 Curvas equivalentes.....	199

LISTA DE TABLAS

3.1 Variables conjugadas de potencia en los diferentes dominios físicos.....	46
6.1 Parámetros del manipulador a considerar.....	182

Capítulo 1.

Introducción

1.1 Reseña histórica

Recién acabada la Segunda Guerra Mundial, debido a la creciente demanda de energía eléctrica en los Estados Unidos, hubo una gran necesidad de implementar plantas de generación de energía eléctrica, en particular plantas hidráulicas, que debían ser capaces de tratar con grandes y a veces rápidas fluctuaciones en la red de energía eléctrica. El éxito de la teoría de control, desarrollado por el matemático estadounidense Norbert Wiener, inspiró a muchos a aplicar esta teoría a los problemas dinámicos involucrados, como es el caso de la producción de energía eléctrica.

Por tal época, un ingeniero civil de nombre Henry. M. Paynter (1923-2002) trató de usar las primeras computadoras analógicas para la simulación de la dinámica de las plantas de energía a ser construidas, sin embargo él se encontró con el problema de la formulación del modelo. En los comienzos de los cincuenta él se dio cuenta que el concepto de ‘puerto’, introducido en la teoría de circuitos eléctricos

pocos años antes por Harold Wheeler [14], podía ser ampliado a un concepto mas general de puerto; estableciendo el concepto de puerto en cada dominio físico, esto es, puertos de potencia mecánicos, hidráulicos, eléctricos, etc.

En la década siguiente, después de trasladarse al departamento de Ingeniería Mecánica del Instituto Tecnológico de Massachussets, el estableció la noción de ‘lazo’, que representa la conexión entre los puertos de potencia de dos sistemas, y a través del cual fluye la energía entre estos sistemas. A partir de este concepto, el diseño la representación grafica llamada ‘diagrama de lazos’, que representa gráficamente la interconexión entre los componentes de un sistema, o visto de otra manera representa la topología energética del sistema, ya que nos muestra como fluye la energía en el sistema. Todo este estudio lo resumió en su obra [15].

En los sesentas, el estudio del grafico de lazos fue continuado por sus estudiantes, Dean. C. Karnopp y Ronald. C. Rosenberg, quienes introdujeron la notación de una semiflecha para representar el flujo positivo de energía. Además, Ronald. C. Rosenberg diseño el primer software de computadora (ENPORT) que soportaba la simulación de modelos en grafico de lazos [11]. A comienzos de los setenta Jan. J. van Dixhoom, profesor de la Universidad de Twente, en los países bajos, y Jean U. Thoma profesor de la Universidad de Waterloo, fueron los primeros en introducir los gráficos de lazos en Europa, donde continuo su desarrollo.

Con el objeto de tener una formalización matemática del diagrama de lazos, para incrementar su rigurosidad, los sistemas port-Hamiltonianos fueron introducidos

pos primera vez por Bernhard. M. Maschke y Arjan van der Schaft en 1992 en su obra [9], usando estructuras Poisson para representar la interconexión de las partes del sistema. Sin embargo el uso de tales estructuras no permitía la descripción de sistemas Hamiltonianos implícitos. Por tal motivo se introdujeron las estructuras Dirac para representar las interconexiones del sistema [2].

Recientemente (marzo del 2002) la Unión Europea impulso el proyecto GeoPlex (Geometric Network Modeling and Control of Complex Physical Systems) cuyo objetivo era el estudio del modelamiento y control de sistemas complejos en diferentes dominios físicos usando el enfoque port-Hamiltoniano. Este proyecto consistió de ocho grupos de diferentes universidades y un socio industrial cada uno enfocado en una aplicación específica (electrónica de potencia, sistemas electromecánicos, procesos químicos, robótica, etc.).

Como resultado se desarrollaron nuevas técnicas de control basados en la energía aplicados a diversos tipos de sistemas, por ejemplo, el modelamiento de un reactor [13], modelamiento y control de maquinas eléctricas [1], y el modelamiento y control de robots bípedos [31]. Dando lugar a muchos trabajos de doctorado, ganando algunos de ellos el prestigioso premio EURON Georges Giralt PhD Award, dedicado a las mejor tesis de doctorado en Europa.

1.2 Formulación del problema

A pesar del gran éxito alcanzado por la teoría de control tradicional, los principios más fundamentales en los que se basa presentan ciertos inconvenientes, reportados en [32], que no le permiten ser considerada como la teoría adecuada para tratar con los sistemas físicos. Estos inconvenientes se refieren a concepciones erróneas acerca de la naturaleza de estos sistemas.

1. Primera concepción errónea: La causalidad es uno de los pilares de la física.

La teoría de control clásica se basa en el paradigma de causalidad, de donde se desprende la idea de ver a un sistema en términos de entradas (causas) y salidas (efectos), y ver las interconexiones entre sistemas como relaciones unilaterales del tipo salida/entrada. Las entradas sirven para capturar la influencia del entorno del sistema en el sistema, las salidas sirven para capturar la influencia del sistema en su entorno, mientras que las asignaciones salida/entrada, tales como las conexiones en serie y de retroalimentación, sirven para capturar las interconexiones entre sistemas. De esta manera un sistema se ve como una caja negra, que transmite y transforma las señales del canal de entrada al canal de salida, y las interconexiones entre sistemas se ven como asignaciones en los que las salidas de un sistema se imponen como entradas de otro sistema.

Entonces, nos podemos hacer las siguientes preguntas: ¿Esta enfoque realmente captura la naturaleza física de un sistema de manera correcta? ¿La forma de ver las interconexiones realmente respeta la naturaleza física de estas?

En realidad, cuando se produce un fenómeno físico, las leyes que lo gobiernan solo imponen relaciones entre las variables del sistema, no indican cuales son sus entradas o cuales son salidas. Por ejemplo, la ley de gases establece como se relacionan las variables de interés (presión, temperatura, volumen y masa) de un gas contenido en un recipiente (ver figura 1.1), sin embargo no indica que variables se pueden considerar como causas (entradas) y que variables son los efectos (salidas).

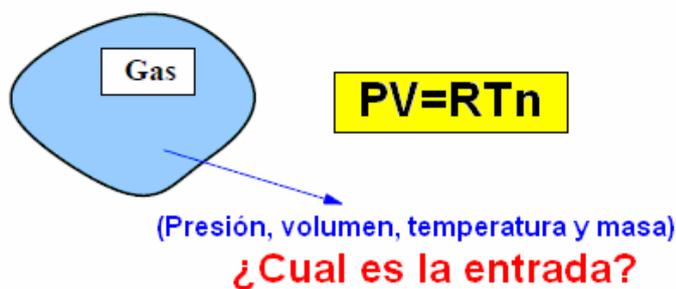


Figura 1.1. Gas ideal contenido en un recipiente

Por otro lado la interconexión de dos sistemas implica que ciertas variables asociadas al primer sistema comparten el mismo valor con ciertas variables asociadas al segundo sistema. Para ver como se presenta esto, analicemos la interconexión de dos tanques desde un punto de vista tradicional. Para esto, se empieza definiendo el modelo básico de cada tanque, donde de manera razonable se consideran las presiones como entradas y los flujos como salida (ver figura 1.2).



Figura. 1.2. Modelo de dos tanques

Según el razonamiento tradicional la interconexión se da como una asignación tipo salida/entrada, sin embargo tal como se muestra en la figura 1.3 la interconexión no se da como una asignación salida/entrada, sino que en el punto de conexión la presión y el flujo del tanque inicial se igualan a la presión y flujo en el punto de conexión del segundo tanque. Luego de la interconexión ambos sistemas comparten las variables de presión y flujo.

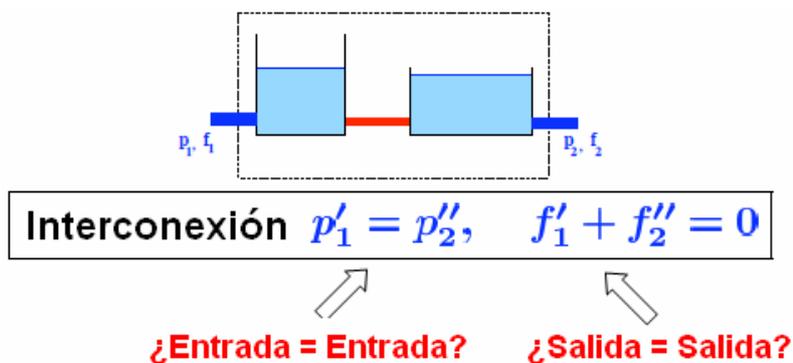


Figura 1.3. Interconexión de dos tanques

Entonces se llega a la conclusión que, ver las relaciones entre las variables de un sistema en términos de entradas y salidas NO representa la naturaleza física del sistema, y, ver las interconexiones entre sistemas como una asignación salida/entrada por el que se transmiten señales de un sistema a otro, involucra un mecanismo de transmisión que NO representa la naturaleza física de la interconexión.

2. Segunda concepción errónea: Las señales capturan la naturaleza física del fenómeno de interconexión

Este punto tiene que ver con la noción del modelamiento clásico de que las señales, que son relaciones de tipo unilateral, son capaces de representar el fenómeno de interconexión entre sistemas físicos (es decir, ver a un sistema como un procesador de señales). Para ilustrar este punto veamos el siguiente ejemplo:

Se tiene un sistema que consta de una conexión en serie de dos impedancias. Aplicando las técnicas de control clásico se puede obtener la función de transferencia del sistema que relaciona el voltaje de entrada y salida (ver figura 1.4).

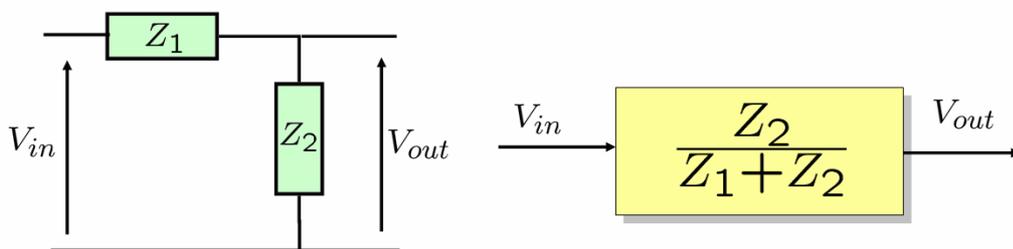


Figura 1.4. Conexión en serie de dos impedancias

Si ahora conectamos una replica de este sistema en serie para obtener una red doble, notamos que la función de transferencia resultante no es igual al producto de las funciones de transferencia individuales (ver figura 1.5), a menos que se incluya un amplificador de separación. Este problema se presenta debido a que ambos sistemas eléctricos se cargan mutuamente.

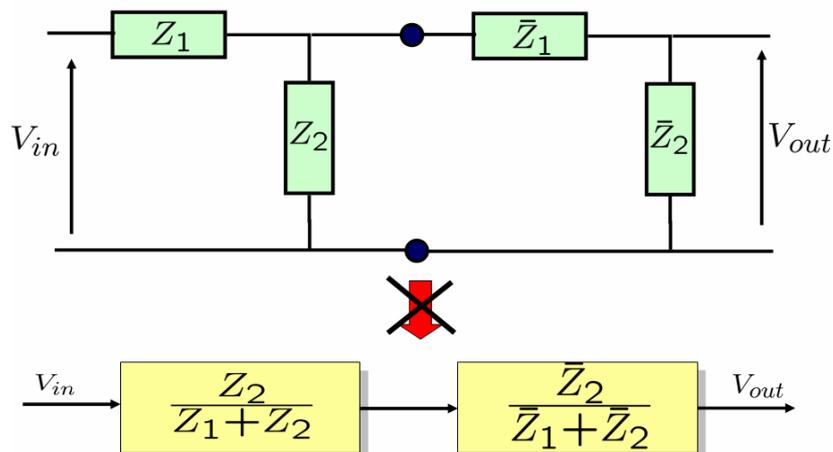


Figura 1.5. Conexión en serie de dos sistemas de impedancias

Por lo tanto, se llega a la conclusión de que en los sistemas físicos, las señales no representan adecuadamente la naturaleza del fenómeno de interconexión. Debido a que una interacción siempre involucra una relación del tipo bilateral.

Entonces, cualquier enfoque que apunte al modelamiento de sistemas físicos, debe suponer un **cambio de paradigmas**, es decir no debe fundamentarse en el concepto de causalidad y en el uso de señales.

El enfoque port-Hamiltoniano que se presenta en la presente tesis, al estar basado en la energía permite representar un sistema físico independiente del dominio al que pertenece y proporciona la generalidad para tratar con sistemas complejos; y al hacer uso del nuevo paradigma de puerto permite capturar de manera adecuada la naturaleza física del fenómeno de interconexión entre sistemas físicos.

1.3 Objetivos

1.3.1 General.- Presentar una nueva teoría de modelamiento de sistemas físicos que permita representar de manera adecuada la naturaleza de estos sistemas, para luego desarrollar nuevos algoritmos de control que regulen apropiadamente el comportamiento de cualquier sistema físico.

1.3.2 Específicos

- a) Demostrar que el paradigma de comportamiento es superior al paradigma de causalidad, y que el marco comportamental provee un lenguaje que respeta la naturaleza física de un sistema. Lo que lo convierte en el marco adecuado para formular los sistemas port-Hamiltonianos.
- b) Demostrar que el concepto de puerto es superior al concepto de entradas y salidas en el problema de interconexión de sistemas, para entonces estudiar los conceptos básicos del modelamiento basado en puertos y el diagrama de lazos para luego poder presentar los sistemas port-Hamiltonianos de manera natural.
- c) Formalizar matemáticamente los conceptos básicos del modelamiento basado en puertos para formular los sistemas port-Hamiltonianos y mostrar los componentes básicos que se necesitan para formular un sistema port-Hamiltoniano.

- d)** Encontrar la representación port-Hamiltoniana implícita de cualquier sistema físico usando las técnicas independientes de coordenadas que nos brinda la geometría diferencial, y darle una descripción comportamental.
- e)** Encontrar la representación explícita de los sistemas port-Hamiltonianos implícitos mediante el uso de ecuaciones diferenciales, para dar lugar a los sistemas port-Hamiltonianos explícitos.
- f)** Estudiar la relación entre los sistemas port-Hamiltonianos y los sistemas pasivos para el desarrollo de controladores basados en la pasividad.
- g)** Estudiar las técnicas de control basados en el concepto de control por interconexión en los que el controlador se considera otro sistema port-Hamiltoniano.
- h)** Presentar el obstáculo que presentan las técnicas de control por pasividad y por interconexión en el caso de sistemas con disipación infinita.
- i)** Demostrar que la técnica de control por interconexión y asignamiento de amortiguación basado en la pasividad supera el obstáculo de disipación, y que además permite explotar todos los grados de libertad dado por el formalismo port-Hamiltoniano.
- j)** Aplicar este nuevo enfoque al modelamiento y control de posición de un manipulador robotico de dos grados de libertad y comparar los resultados obtenidos respecto a los que se obtienen usando las técnicas de control tradicional que se basan en el Lagrangiano.

Capítulo 2.

El Enfoque Comportamental

2.1 Introducción

La motivación del enfoque comportamental se origina de la observación de que la teoría de sistemas clásicos es inapropiada para tratar en un nivel general con los principios básicos a los que apunta la teoría de sistemas, los que son, *sistemas abiertos e interconectados*. Por un sistema abierto, se entiende un sistema que interactúa con su entorno, por ejemplo, intercambiando energía, materia o información. Por un sistema interconectado, se entiende un sistema que consiste de subsistemas que interactúan entre sí.

El propósito del enfoque comportamental es desarrollar un lenguaje matemático para tratar con modelos de sistemas abiertos e interconectados. La aserción es que el enfoque comportamental provee un lenguaje que respeta la naturaleza física de un sistema. Por este motivo, se presentaran los conceptos fundamentales de este enfoque ya que nos proveerá el marco adecuado para establecer a los sistemas port-Hamiltonianos.

2.2 El universo y comportamiento

Supongamos que un fenómeno a modelar nos es dado. El fenómeno produce ciertos eventos u ocurrencias (ver figura 2.1), que el modelo tiene que representar. Un modelo de tal fenómeno, introducido en [18], [19], puede verse como una ley de exclusión, que nos expresa que ciertas cosas pueden ocurrir, que son posibles, mientras que otras no pueden ocurrir, son imposibles. Por ejemplo, la teoría de la relatividad establece que un cuerpo no puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. En otras palabras, un modelo selecciona cierto subconjunto del universo de posibilidades.

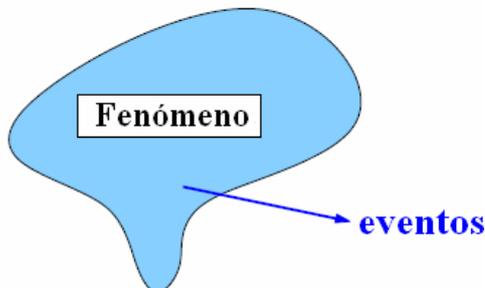


Figura 2.1. Fenómeno a modelar

Los eventos que pueden ocurrir en cierto fenómeno pueden describirse en el lenguaje matemático, en términos de conceptos matemáticos; para esto es necesario responder a la siguiente pregunta: ¿A que conjunto pertenecen los eventos?

- Si el fenómeno es del tipo discreto, los eventos pertenecen a un conjunto de tipo discreto.

- Si el fenómeno es del tipo continuo, los eventos pertenecen al conjunto de los números reales, o vectores de números reales.
- Si el fenómeno es del tipo dinámico, los eventos son funciones del tiempo.
- Si el fenómeno es del tipo distribuido, los eventos son funciones de espacio, o tiempo & estado.

Al conjunto donde pertenecen los eventos se le llama el universo, y se denota por \mathcal{U} , y al subconjunto que contiene los eventos que son declarados posibles por el modelo se le conoce como el comportamiento, y se denota como \mathcal{B} (ver figura 2.2).

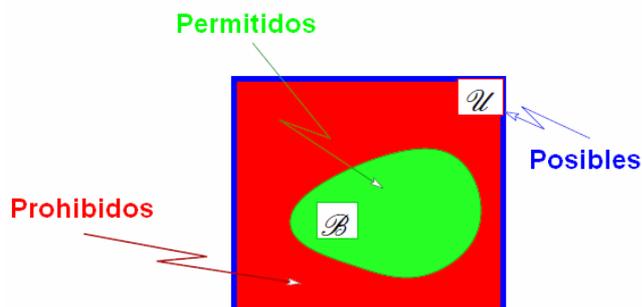


Figura 2.2. Modelo de un fenómeno

Definición 2.1 (Modelo matemático). Un modelo matemático es un par $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$. Donde, \mathcal{U} es un conjunto llamado el universo de eventos, y \mathcal{B} es un subconjunto de \mathcal{U} , llamado el comportamiento del modelo.

A continuación se verán algunos ejemplos que nos ayudaran a comprender los conceptos de universo y comportamiento.

Ejemplo (Fenómeno del tipo discreto). Se desea modelar las palabras del lenguaje natural. En este fenómeno un evento se considera la ocurrencia de una palabra. Entonces se tiene que:

\mathcal{U} = Todas las cadenas de letras basadas en el alfabeto ($\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$).

\mathcal{B} = Todas las palabras reconocidas por el inspector de ortografía.

Ejemplo (Fenómeno del tipo continuo). Se desea modelar las variables de presión, volumen, temperatura y masa de un gas ideal contenido en un recipiente cerrado (ver figura 2.3).

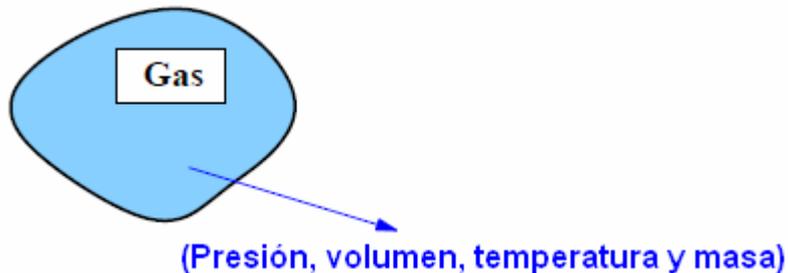


Figura 2.3. Fenómeno de tipo continuo.

En este fenómeno se producen los siguientes eventos:

$(\text{presion}, \text{volumen}, \text{temperatura}, \text{masa})$

Entonces, el universo del sistema esta dado por el producto cartesiano:

$$\mathcal{U} = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) = (0, \infty)^4$$

Por otro lado, el comportamiento del sistema esta dado por la ley de Gases que establece la relación entre las variables del sistema.

$$\mathcal{B} = \{(P, V, T, n) \in \mathcal{U} \mid PV = RTn\}$$

Ejemplo (Fenómenos del tipo dinámico). Se desea modelar el movimiento de una partícula en el espacio (ver figura 2.4).

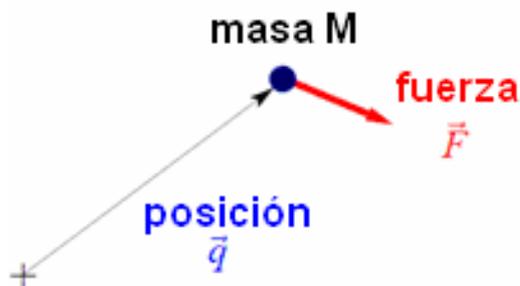


Figura 2.4. Fenómeno de tipo dinámico

En este fenómeno se producen los siguientes eventos:

(Fuerza, posición) como funciones del tiempo

Entonces, el universo del sistema esta dado por los mapeos:

$$\mathcal{U} = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

Por otro lado, se conoce muy bien de la física clásica que el comportamiento del sistema esta dado por la segunda ley de Newton.

$$\mathcal{B} = \{(\vec{F}, \vec{r}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \vec{F} = m \frac{d}{dt} \vec{r}\}$$

Ejemplo (Fenómeno del tipo distribuido). Se desea modelar el perfil de temperatura, y calor absorbido por una barra (ver figura 2.5).

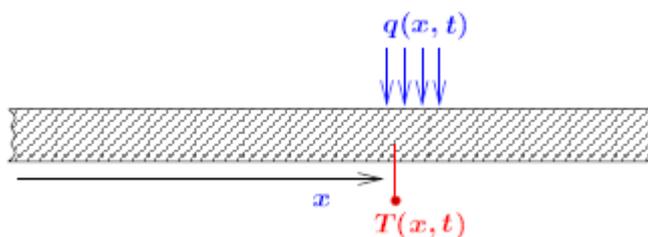


Figura 2.5. Fenómeno de tipo distribuido

En este fenómeno se producen los siguientes eventos:

(temperatura, calor), como funciones del tiempo y espacio

Entonces, el universo del sistema esta dado por los mapeos:

$$\mathcal{U} = \{(T, q) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}\}$$

Se sabe que el comportamiento del sistema esta dado por la ecuación de difusión:

$$\mathcal{B} = \{(T, q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R} \mid \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q\}$$

2.3 Ecuaciones de comportamiento

Tal como se ha visto en los ejemplos anteriores, una herramienta muy adecuada para seleccionar un cierto subconjunto del universo de posibilidades es mediante el uso de ecuaciones. Entonces se puede establecer que, el comportamiento de un modelo esta dado por aquellos eventos que satisfacen cierto conjunto de ecuaciones constitutivas, llamadas *ecuaciones de comportamiento*.

Definición 2.2 (Ecuaciones de comportamiento). Sea \mathcal{U} el universo, \mathcal{E} un conjunto y $f_1, f_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$, dos mapeos. El modelo matemático $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ con $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U} \mid f_1(u) = f_2(u)\}$ se dice que esta descrito por ecuaciones de comportamiento y se denota por $(\mathcal{U}, \mathcal{E}, f_1, f_2)$. El conjunto \mathcal{E} es llamado el espacio de ecuaciones. El cuádruplo $(\mathcal{U}, \mathcal{E}, f_1, f_2)$ es llamado la representación de la ecuación de comportamiento de $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$.

Ejemplo. Consideremos una resistencia lineal. Los eventos que ocurren son la corriente y el voltaje, por tal el universo esta dado por $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$. Además se sabe que la relación entre la corriente I que fluye a través del resistor y el voltaje V a lo largo de los terminales esta determinado por la ley de Ohm. $V = RI$.

Para hallar la ecuación de comportamiento del sistema se necesita encontrar dos mapeos. Tomando como punto de partida la ley de Ohm y considerando como espacio de ecuaciones $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, se consideran los mapeos:

$$f_1 : (V, I) \rightarrow V \quad f_2 : (V, I) \rightarrow RI$$

Se ve claramente que $f_1(u) = f_2(u)$. Entonces haciendo uso de la definición 2.2 se tiene que el comportamiento del resistor esta dado por:

$$\mathcal{B} = \{(V, I) \in \mathbb{R}^2 \mid V = RI\}$$

En general, el modelo matemático de cierto fenómeno a describir puede ser construido en dos pasos:

1. Identificar las variables a modelar y su dominio de existencia, el universo \mathcal{U} .
2. Identificar todos los posibles resultados, el comportamiento $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$.

2.4 Variables manifiestas y variables latentes

Por lo general un modelo tiene que representar ciertas variables de principal interés. De otro lado, muy frecuentemente un modelo matemático involucra el uso de variables auxiliares, que le permitan expresar en una forma conveniente las leyes que lo gobiernan. En el marco comportamental las primeras reciben el nombre de *variables manifiestas* y las ultimas el nombre de *variables latentes* [18], [19].

Ejemplo. Consideremos la red resistiva mostrada (ver figura 2.6) y asumamos que se desea modelar el comportamiento de la corriente I y el voltaje V del puerto externo.

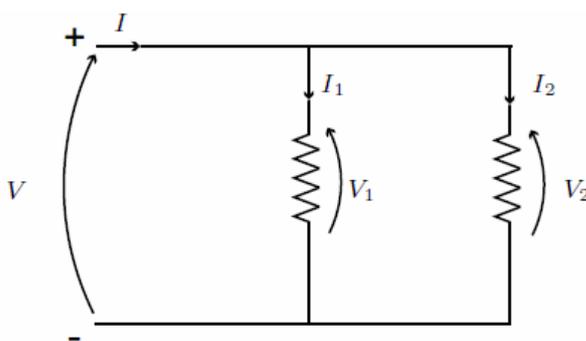


Figura 2.6. Red resistiva

De nuestra clase de circuitos eléctricos sabemos que es conveniente hacer uso de variables auxiliares para modelar las corrientes y voltajes de los elementos que constituyen la red. Entonces se tiene que V e I son nuestras variables manifiestas, mientras que I_1, I_2, V_1 y V_2 son las variables latentes (ver figura 2.6).

Las ecuaciones de comportamiento del puerto se obtienen usando las leyes de Kirchhoff (de voltaje y corriente) y la ley de Ohm:

$$\begin{array}{lcl} R_1 I_1 = V_1 & & V = V_1 = V_2 \\ & \Rightarrow & \\ R_2 I_2 = V_2 & & I = I_1 + I_2 \end{array}$$

Definición 2.3 (Modelo matemático con variables latentes). Un modelo matemático con variables latentes se define como una tripleta $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_l, \mathcal{B}_f)$ donde \mathcal{U} es

el universo de las variables manifiestas, \mathcal{U}_l es el universo de las variables latentes y $\mathcal{B}_f \subset \mathcal{U} \times \mathcal{U}_l$ es el comportamiento total. El modelo matemático manifiesto $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ se define como:

$$\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U} \mid \exists l \in \mathcal{U}_l \text{ tal que } (u, l) \in \mathcal{B}_f\} \quad (2.1)$$

Donde \mathcal{B} es llamado el comportamiento manifiesto o simplemente comportamiento y la triple $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_l, \mathcal{B}_f)$ se llama representación variable latente del modelo matemático manifiesto $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$.

2.5 Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos están caracterizados por su evolución en el tiempo y son de crucial importancia en la teoría de control. Los sistemas físicos que se estudian en la presente Tesis son por su propia naturaleza también sistemas dinámicos. Tal como se reporta en [18], [19], [20], es posible describir estos sistemas en el contexto del enfoque comportamental.

En el estudio de sistemas dinámicos, los eventos son mapeos, con el eje de tiempo como dominio y el espacio de señales (el conjunto donde los mapeos toman sus valores) como codominio. Es decir, los eventos son función del tiempo (ver figura 2.7).

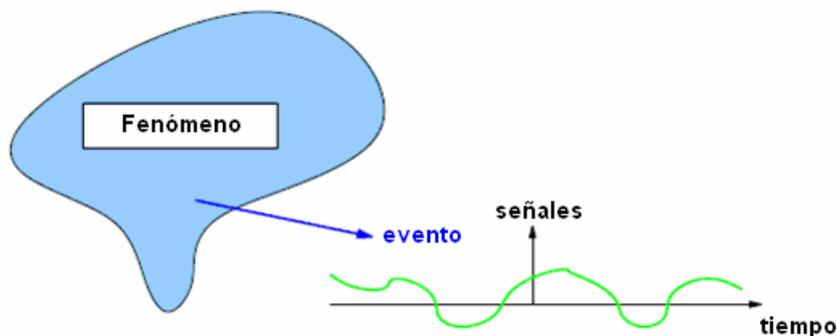


Figura 2.7. Eventos de un fenómeno dinámico como función del tiempo.

Definición 2.4 (Sistemas dinámicos). Un sistema dinámico está definido por la triple $\Sigma = (T, W, \mathcal{B})$ donde T es el eje de tiempo, W es el conjunto llamado espacio de señales y $\mathcal{B} \subset W^T$ es el comportamiento. Aquí, W^T indica el conjunto de todos los mapeos desde T a W .

El eje de tiempo T representa el conjunto de instantes de tiempo de interés, el espacio de señales W representa el conjunto donde los resultados del sistema evolucionan y W^T representa el universo, es decir el conjunto de todas las trayectorias que toma valores en el espacio de señales. Finalmente, el comportamiento \mathcal{B} es el subconjunto del universo que selecciona las trayectorias $w: T \rightarrow W$ que son declaradas posibles por el modelo.

Ejemplo. Se desea modelar la trayectoria de un planeta que gira alrededor del sol.

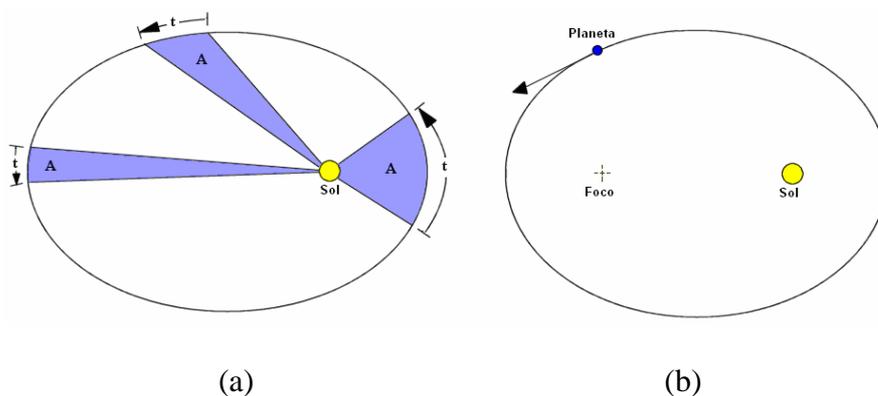


Figura 2.8. Movimiento de un planeta alrededor del sol

El espacio de señales W es el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , se considera como eje de tiempo $T = \mathbb{R}$, el universo esta dado por todas las trayectorias de la forma $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, y de la física clásica se sabe que el comportamiento del sistema esta dado por:

$$\mathcal{B} = \{w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \text{Se satisfacen las leyes de kepler}\}$$

Las leyes de Kepler limitan el comportamiento del sistema, es decir las trayectorias posibles. Estas leyes establecen:

- I. Las trayectorias de los planetas que giran alrededor del sol son elipses, con el sol ubicado en uno de los focos (ver figura 2.8b).
- II. El radio vector que une el sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (ver figura 2.8a).
- III. Para cualquier planeta, el cuadrado de su periodo orbital es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el sol.

Finalmente, el sistema se expresa como $\Sigma = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathcal{B})$.

Definición 2.5 (Invariancia en el tiempo). Un sistema dinámico $\Sigma = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ se dice que es invariante en el tiempo si $\sigma^t \mathcal{B} = \mathcal{B}$ para todo $t \in \mathbb{T}$, donde σ^t es el operador de desplazamiento definido como:

$$(\sigma^t f)(\tau) = f(\tau + t) \quad (2.2)$$

La propiedad de invariancia en el tiempo indica que el comportamiento del sistema dinámico no depende explícitamente del tiempo.

Observación 2.1. El objetivo del presente trabajo es el modelamiento y control de sistemas físicos desde un enfoque port-Hamiltoniano, entonces el marco comportamental que se usara para establecer este enfoque será el de los sistemas dinámicos continuos en el tiempo, es decir se tomara $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Esto debido a que los sistemas físicos son un subconjunto de estos. Además, se asumirá que el espacio de señales \mathbb{W} es un manifold diferenciable (en vez del tradicional espacio Euclidiano, ya que como se vera mas adelante es una hipótesis esencial para formular las definiciones de los sistemas port-Hamiltonianos). Finalmente se asumirá que los sistemas físicos bajo consideración son del tipo invariante en el tiempo.

Es posible describir el comportamiento de un sistema dinámico por medio de ecuaciones diferenciales. Para este fin, se hace uso del concepto de espacio Jet.

Definición 2.6 (Espacio Jet). El espacio jet de orden n del espacio $\mathbb{R} \times W$ se define como el espacio $\mathbb{R} \times W^{(n)}$ y se indica como $J^n(\mathbb{R} \times W)$.

Un elemento en el espacio W puede ser considerado como el valor que toma el mapeo $w \in W^{\mathbb{R}}$ en cierto punto $t \in \mathbb{R}$. Entonces, un elemento de $J^n(\mathbb{R} \times W)$ está dado por un elemento del espacio de señales $w(t) \in W$ junto con sus derivadas en t de hasta orden n .

Definición 2.7 (Ecuaciones de comportamiento dinámicas). Sea W un manifold diferenciable que representa el espacio de señales, \mathbb{R} el eje de tiempo, n un entero no negativo (el orden de la ecuación diferencial) y \mathcal{E} el espacio de ecuaciones. Consideremos dos mapeos:

$$f_1, f_2 : J^n(\mathbb{R} \times W) \rightarrow \mathcal{E} \quad (2.3)$$

El sistema dinámico $\Sigma = (\mathbb{R}, W, \mathcal{B})$ con comportamiento:

$$\mathcal{B} = \left\{ w : \mathbb{R} \rightarrow W \mid f_1\left(w(t), \frac{dw}{dt}, \dots, \frac{d^n w}{d^n t}\right) = f_2\left(w(t), \frac{dw}{dt}, \dots, \frac{d^n w}{d^n t}\right) \right\} \quad (2.4)$$

Se dice que esta descrito por ecuaciones diferenciales, y se denota $(\mathbb{R}, \mathbb{W}, \mathcal{E}, f_1, f_2)$.

Ejemplo. Consideremos el circuito L-C mostrado (ver figura 2.9). Donde se desea obtener el modelo de las variables del puerto de salida V e I .

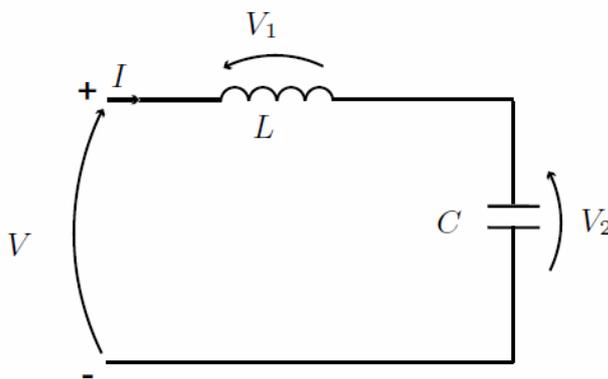


Figura 2.9. Circuito L-C

En este ejemplo el eje de tiempo es \mathbb{R} y el espacio de señales es \mathbb{R}^2 . Usando las ecuaciones constitutivas del inductor y del capacitor; y las leyes de Kirchoff obtenemos:

$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ L \frac{dI}{dt} = V_1 \\ C \frac{dV_2}{dt} = I \end{cases} \quad (2.5)$$

Tomando como referencia los resultados anteriores, se consideran los siguientes mapeos:

$$\begin{aligned}
f_1 : J(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & f_1 &= L \frac{d^2 I}{dt^2} \\
f_2 : J(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & f_2 &= \frac{dV}{dt} - \frac{1}{C} I
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Se observa claramente que $f_1(V, I) = f_2(V, I)$. Entonces haciendo uso de la definición 2.7, se llega a que el comportamiento del sistema esta dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathcal{B} = \left\{ V, I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W} \mid L \frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{dV}{dt} - \frac{1}{C} I \right\} \tag{2.7}$$

En el ejemplo anterior se hizo uso de variables latentes (auxiliares) por lo que es conveniente formalizar la noción de variables latentes dentro del enfoque comportamental para los sistemas dinámicos.

Definición 2.8 (Sistemas dinámicos con variables latentes). Un sistema dinámico con variables latentes se define como $\Sigma_L = (\mathbb{R}, \mathbb{W}, \mathbb{L}, \mathcal{B}_f)$ donde \mathbb{R} es el eje de tiempo, \mathbb{W} es el espacio de señales manifiestas, \mathbb{L} es el espacio de variables latentes y $\mathcal{B}_f \subset (\mathbb{W} \times \mathbb{L})^{\mathbb{R}}$ es el comportamiento completo.

A partir de este modelo se puede definir el sistema dinámico manifiesto $\Sigma = (\mathbb{R}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ con el siguiente comportamiento manifiesto:

$$\mathcal{B} = \{w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W} \mid \exists l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L} \text{ tal que } (w, l) \in \mathcal{B}_f\} \quad (2.8)$$

Las variables latentes pueden aparecer en el modelamiento de sistemas dinámicos por diversas razones:

- Se pueden usar simplemente por razones matemáticas en orden de obtener una forma particular de las ecuaciones de comportamiento.
- Se pueden usar para expresar las leyes internas que gobiernan el comportamiento del sistema. Por ejemplo, para modelar las corrientes y voltajes internos en una red eléctrica, o para modelar las variables de momento y configuración de un sistema mecánico.
- Para modelar un sistema que está compuesto por la interconexión de varios subsistemas; en este caso las variables latentes expresarán las restricciones en las interconexiones.

Una clase muy importante de variables latentes en la teoría de sistemas son las variables de estado cuya tarea es representar la memoria interna del sistema.

Definición 2.9 (Sistema dinámico espacio estado). Un sistema dinámico espacio estado es un sistema dinámico con variables latentes $\Sigma_L = (\mathbb{R}, \mathbb{W}, \mathcal{X}, \mathcal{B}_f)$ cuyo comportamiento completo satisface el axioma de estado. El axioma de estado establece lo siguiente:

Dado $(w_1, x_1), (w_2, x_2) \in \mathcal{B}_f$ y $t \in \mathbb{R}$, si $x_1(t) = x_2(t)$ entonces se cumple que $(w, x) \in \mathcal{B}_f$, donde:

$$(w(\tau), x(\tau)) = \begin{cases} (w_1(\tau), x_1(\tau)), & \text{para } \tau < t \\ (w_2(\tau), x_2(\tau)), & \text{para } \tau \geq t \end{cases} \quad (2.9)$$

El axioma de estado requiere que para cualquier posible trayectoria el comportamiento completo \mathcal{B}_f que termina en cierto estado pueda ser concatenado con cualquier otra trayectoria que empieza en este estado (ver figura 2.10).

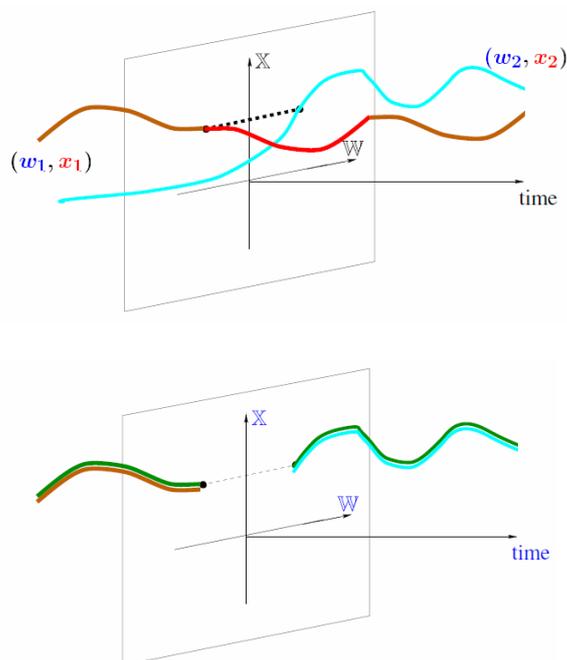


Figura 2.10. Concatenación de trayectorias que tienen el mismo estado

En otras palabras, asegura que si se conoce el estado inicial, esto es suficiente para determinar el comportamiento futuro y no hay necesidad de información

adicional de la trayectoria pasada. El axioma de estado formaliza un concepto muy conocido: el estado de un sistema dinámico contiene suficiente información acerca del pasado en orden de determinar su comportamiento futuro.

Teorema 2.1. Sea $\Sigma_L = (\mathbb{R}, \mathbb{W}, \mathcal{X}, \mathcal{B}_f)$ un sistema dinámico espacio estado con variables latentes, con \mathcal{X} el manifold diferenciable que representa al espacio de señales latentes y $T\mathcal{X}$ su bundle tangente (ver apéndice para mayor detalle). Consideremos dos mapeos $f_1, f_2 : T\mathcal{X} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{E}$, donde \mathcal{E} es el espacio de ecuaciones. La ecuación diferencial:

$$f_1((x, \dot{x}), w) = f_2((x, \dot{x}), w) \quad (2.10)$$

Define un sistema espacio estado $\Sigma_L = (\mathbb{R}, \mathbb{W}, \mathcal{X}, \mathcal{B}_f)$ con comportamiento:

$$\mathcal{B}_f = \{(w, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W} \times \mathcal{X} \mid x \text{ es continuo y } f_1(x(t), \dot{x}(t), w(t)) = f_2(x(t), \dot{x}(t), w(t), \forall t \in \mathbb{R})\} \quad (2.11)$$

El teorema anterior muestra que la condición fundamental para un sistema dinámico espacio estado es que las ecuaciones diferenciales de comportamiento sean de primer orden en x , y de orden cero en w . El teorema no establece que la ecuación diferencial de comportamiento (2.10) debe ser necesariamente explícita:

$$\dot{x} = f(x, w) \quad (2.12)$$

Por lo tanto, la representación comportamental dada para los sistemas dinámicos espacio estado es capaz de representar estos sistemas de manera explícita e implícita.

2.6 Entradas y salidas

Hasta este punto no se ha hecho ninguna distinción entre entradas y salidas. En este punto radica la fuerza del enfoque comportamental, ya que las entradas y salidas se deben deducir del modelo matemático de cierto fenómeno y no ser impuestas en el modelo. De hecho, como ya se había enfatizado en el capítulo anterior, en los sistemas físicos no es siempre claro que variables se debe escoger como salidas y cuales como entradas. Por ejemplo si consideramos una resistencia eléctrica, no es muy claro si se debe tomar el voltaje como entrada y la corriente como salida o viceversa. Por tal para obtener un modelo matemático general, es mejor usar el concepto de resultado en vez de especificar a priori entradas y salidas.

Sin embargo es importante incluir los conceptos de entrada y salida en el marco comportamental debido a varias razones, por ejemplo, puede ser necesario actuar en algunas entradas con tal de obtener una salida deseada.

Por lo tanto es necesario dividir las variables que uno desea modelar w , entre entradas u y salidas y . Esta partición debe deducirse desde una estructura concreta

del sistema, es decir tiene que basarse en un nivel de descripción mas elevado del sistema. El comportamiento nos ofrece este nivel de descripción.

En resumen, la descripción de entrada/salida requiere un modelo comportamental desde el cual se puede deducir su estructura. En esta sección mostraremos como es posible dar una representación entrada/salida de un sistema dinámico dentro del marco comportamental:

Definición 2.10 (Sistema dinámico entrada-salida - I/O). Consideremos un comportamiento \mathcal{B} en un espacio de señales $W = \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$. Un sistema dinámico I/O se define como el cuádruplo $\Sigma_{I/O} = (\mathbb{R}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{B})$, donde \mathbb{R} es el eje de tiempo, \mathcal{U} es el espacio de señales de entrada, \mathcal{Y} es el espacio de señales de salida y $\mathcal{B} \subset (\mathcal{U} \times \mathcal{Y})^{\mathbb{R}}$ es el comportamiento. Además el sistema tiene que satisfacer:

1. $u \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}}$ es libre; esto es, para todo $u \in \mathcal{U}$ existe un $y \in \mathcal{Y}^{\mathbb{R}}$ tal que $(u, y) \in \mathcal{B}$.
2. $u \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}}$ es máximamente libre; esto es, ninguno de los componentes de $y \in \mathcal{Y}^{\mathbb{R}}$ puede escogerse libremente.

La definición establece que una partición entrada/salida del espacio de señales es adecuada solo si la entrada se puede escoger libremente (1), y si esta entrada determina de manera unívoca una vez establecidas las condiciones iniciales, la salida (2).

Además, en la teoría de control una característica muy esencial y lógica que un sistema debe tener es la no anticipación. Esta propiedad establece que los valores de la salida en un instante de tiempo no dependen de los valores futuros de la entrada. Un sistema dinámico que tiene esta propiedad es llamado sistema dinámico I/O no anticipante.

Es posible combinar las nociones de entrada y salida con el concepto de estado y obtener una representación muy útil de los sistemas dinámicos:

Definición 2.11 (Sistema dinámico entrada-estado-salida - I/S/O). Un sistema dinámico I/S/O se define como el quintuplo $\Sigma_{I/S/O} = (\mathbb{R}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}, \mathcal{B}_f)$ donde \mathbb{R} es el eje de tiempo, \mathcal{U} es el espacio de señales de entrada, \mathcal{Y} es el espacio de señales de salida, \mathcal{X} es el espacio de estados y $\mathcal{B} \subset (\mathcal{U} \times \mathcal{Y}, \mathcal{X})^{\mathbb{R}}$ es el comportamiento.

Además el sistema tiene que satisfacer los siguientes axiomas:

1. $(\mathbb{R}, \mathcal{U} \times \mathcal{Y}, \mathcal{X}, \mathcal{B}_f)$ es un sistema dinámico espacio-estado.
2. $(\mathbb{R}, \mathcal{U}, \mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{B}_f)$ es un sistema dinámico I/O no anticipante.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{B}'_f)$ es un sistema dinámico I/O no anticipante. \mathcal{B}'_f representa el comportamiento entrada/estado:

$$\mathcal{B}'_f = \{(u, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{X} \mid \exists y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y} \text{ tal que } (u, y, x) \in \mathcal{B}_f\} \quad (2.13)$$

Un sistema dinámico I/S/O es nada mas que un sistema dinámico espacio estado (1) donde se ha hecho una partición entrada/salida en el espacio de señales. Además ni la salida ni el estado dependen de los valores futuros de la variable de entrada (2 y 3).

Es posible probar que las ecuaciones de comportamiento que representan un sistema dinámico I/S/O esta compuesto por una Ley de evolución de estado y por un mapeo de salida que pueden ser escritos de la forma:

$$\begin{cases} f_1(\dot{x}) = f(x, u) \\ h_1(y) = h(x, u) \end{cases} \quad (2.14)$$

Que incluye la forma bien conocida de un sistema dinámico no lineal [16]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (2.15)$$

Capítulo 3.

Modelamiento Basado en Puertos - Diagrama de Lazos

3.1 Introducción

Cualquier sistema físico está compuesto de elementos o componentes. Estos componentes interactúan unos con otros determinando la dinámica del sistema. En este punto es más adecuado considerar tales interacciones desde un punto de vista de una relación bilateral (ver figura 3.1), en vez de una relación de tipo unidireccional tipo entrada/salida, tal como se demostró en la sección 1.2 de la presente tesis.



Figura. 3.1. Interacción entre sistemas físicos

La interacción bilateral entre los elementos de un sistema requiere el concepto de puerto, que es la interfase mediante el cual un sistema interactúa con su entorno. Como una interacción bilateral puede ser vista como una combinación de dos señales unilaterales opuestas, se requieren dos variables para caracterizar un puerto.

Por otro lado se conoce que cuando dos sistemas interactúan se produce un flujo de energía (potencia) entre estos sistemas, y que además en cada dominio físico la potencia esta dada por el producto de dos factores. Por ejemplo en la translación mecánica, la potencia es el producto de la fuerza y velocidad, en los sistemas eléctricos la potencia es el producto de voltaje y el corriente.

El concepto de flujo de energía (potencia), y el concepto de relación bilateral, es la idea principal en la que se basa el enfoque del modelamiento basado en puertos.

Finalmente, así como el diagrama de señales nos muestra el flujo de señales y su dirección en las técnicas de modelamiento clásico, el Diagrama de Lazos es una técnica grafica, basado en la energía y en el uso de puertos, que nos muestra como fluye la energía entre los componentes de un sistema. Este diagrama nos permite describir el sistema como una red de interconexiones de elementos básicos que almacenan, disipan o transforman energía. En esta representación, el flujo de potencia entre los elementos se representa por un lazo.

3.2 Variables conjugadas de potencia

Una de las cosas más fascinantes acerca de la naturaleza es la similitud entre sus diferentes dominios. Por ejemplo la descripción de una masa sujeta a un resorte es idéntica a la descripción de la corriente que fluye a través de un capacitor y un inductor conectados en paralelo. Esta similitud se puede generalizar dándonos

cuenta que en cada dominio físico existen dos variables especiales, llamadas variables conjugadas de potencia cuyo producto es igual a la potencia. Una de las variables recibe el nombre de esfuerzo y la otra el nombre de flujo.

En la siguiente tabla, se listan las variables de flujo y esfuerzo en los diferentes dominios físicos.

Tabla 3.1. Variables conjugadas de potencia en los diferentes dominios físicos

DOMINIO	ESFUERZO	FLUJO
Mecánico (traslacional)	Fuerza F	Velocidad v
Mecánico (rotacional)	Torque τ	Velocidad Angular w
Eléctrico	Voltaje v	Corriente i
Hidráulico	Presión p	Flujo de volumen Q
Termodinámico	Temperatura T	Flujo de entropía E

Tal como se reporta en [25], la variable de flujo puede ser vista como la tasa de cambio de algún estado o propiedad física. Mientras que la variable de esfuerzo representa la variable que determina el equilibrio.

3.3 Puerto de potencia

El puerto es la interfase mediante el cual un sistema interactúa con su entorno. Debido a la naturaleza bilateral de la interconexión entre los sistemas, se requieren

dos cantidades relevantes para caracterizar un puerto. Lo que es mas, debido a que las interacciones se consideran intercambios de energía de un sistema a otro, estas variables deben representar el intercambio de energía entre los sistemas. De manera natural, las variables que caracterizan a un puerto son el flujo y el esfuerzo.

Algunos ejemplos de puertos de potencia en los diferentes dominios físicos son: puertos mecánicos, hidráulicos, eléctricos, etc. (ver figura 3.2).

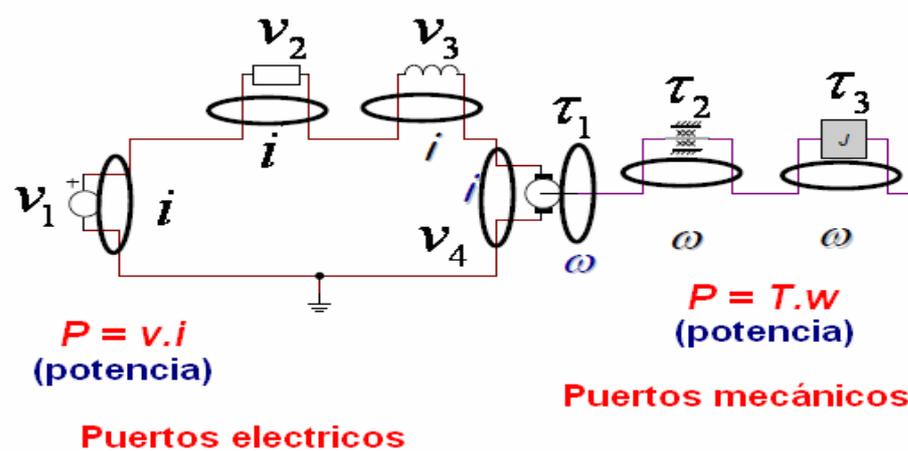


Figura 3.2. Puertos de potencia en el caso de un motor DC.

3.4 Diagrama de lazos

Es una representación gráfica que nos muestra como fluye la energía entre los componentes de un sistema. Este diagrama nos permite describir a un sistema como una red de interconexiones de elementos básicos que almacenan, disipan o transforman energía. Debido a que esta basado en la energía, es capaz de representar

todo tipo de sistemas dinámicos, tales como sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos, etc.

En el diagrama de lazos, el flujo de energía (potencia) entre dos sistemas se representa por un lazo (ver figura 3.3a). Por tanto se puede decir que un lazo representa la conexión entre los puertos de potencia de dos sistemas, y que a través de este fluye la energía de un sistema hacia el otro. Un lazo no disipa o genera potencia. Asociado a un lazo hay una variable de esfuerzo y una variable de flujo. Si dos sistemas comparten más de un lazo, estamos hablando de un multi-lazo (ver figura 3.3b) en cuyo caso el producto dual de flujo y esfuerzo está dado por $e^T f$.



(a) Un solo lazo de conexión

(b) Múltiples lazos de conexión

Figura 3.3. Lazo de conexión entre dos sistemas

La semiflecha se usa para indicar la dirección de flujo de energía positiva, es decir $P = e^T \cdot f > 0$. En la figura 3.3a se nota que la energía fluye de A hacia B.

El diagrama de lazos tiene las siguientes ventajas, reportado en [27], respecto su equivalente (diagrama de bloques) en el modelamiento clásico:

- Siendo un método que se basa en el principio de conservación de energía es muy improbable introducir energía adicional en el sistema, es decir respeta la física del sistema. Por ejemplo, no permite representar máquinas de movimiento perpetuo.
- Los lazos son símbolos que en si mismos tienen significado. Estos, junto con las relaciones constitutivas definen de manera precisa y sin ambigüedad, al sistema simbólicamente.
- Separa la estructura de un sistema de la causalidad, y puede por lo tanto usar el mismo modelo cada vez que se aplica una causalidad externa. Por ejemplo, un motor puede manejarse como un motor o como un generador (alimentado por corriente o voltaje). Esto requiere diferentes modelos en un diagrama de bloques, sin embargo este sistema puede representarse por un único Diagrama de Lazos.
- Cada lazo es del tipo bi-direccional. Esto facilita el modelamiento de sistemas que producen una señal de reacción cuando se aplica una entrada al sistema sin tener que introducir lazos de retroalimentación artificiales.

3.5 Elementos básicos del diagrama de lazos

Como se menciona en la introducción del presente capítulo cualquier sistema físico está compuesto de componentes o elementos, por lo tanto un sistema se puede subdividir de manera consecutiva hasta finalmente poder representarlo como una

interconexión de elementos básicos, como se reporta en [22], [25], [30]. En el diagrama de lazos se reconocen los siguientes elementos básicos:

3.5.1 Elementos resistivos.- Son aquellos que tienen una relación estática $e(t) = h(f(t))$ entre el esfuerzo y el flujo. Usualmente estos elementos disipan energía. Un resistor puede representar resistencias eléctricas, amortiguadores mecánicos, etc. Su representación en diagrama de lazos se muestra en la figura 3.4a.

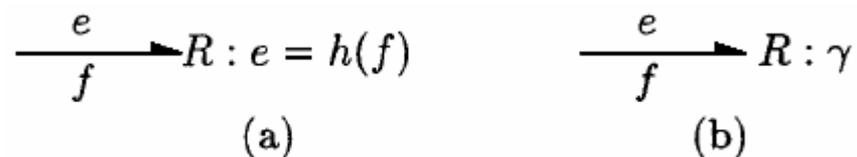


Figura 3.4. Representación de un elemento resistivo.

Si la relación entre el esfuerzo e y el flujo f es lineal:

$$e = \gamma \cdot f \quad (3.1)$$

Entonces el coeficiente se incluye en su representación (ver figura 3.4b).

3.5.2 Elementos capacitivos.- Son aquellos elementos que pueden ser modelados como elementos que almacenan flujo. Estos elementos almacenan y entregan energía sin pérdida. En la terminología del diagrama de lazos estos elementos se llaman capacitores. Un capacitor puede representar resortes, barras de

torsión, etc. en sistemas mecánicos, o capacitores eléctricos en los sistemas eléctricos, etc. La representación de estos elementos en el diagrama de lazos se muestra en la figura 3.5a.



Figura 3.5. Representación de un elemento capacitivo

Si la relación entre el esfuerzo e y el flujo f es lineal:

$$e(t) = \frac{1}{\beta} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

Entonces el coeficiente se incluye en su representación (ver figura 3.5b).

Veamos algunos ejemplos:

- En un resorte, la deformación x y el esfuerzo $e = F$ están dados por:

$$x = \int_0^t v \cdot dt \quad \Rightarrow \quad F = K \cdot \int_0^t v \cdot dt$$

Se puede decir que el flujo (la velocidad) es la causa y la deformación (por lo tanto el esfuerzo) es la consecuencia.

- En un capacitor eléctrico, la carga acumulada en las placas Q y el voltaje $e = V$ están dados por:

$$Q = \int_0^t i \cdot dt \quad \Rightarrow \quad V = C^{-1} \int_0^t i \cdot dt$$

La corriente (el flujo) es la causa y el voltaje es la consecuencia.

3.5.3 Elementos inductivos.- Son aquellos elementos que pueden ser modelados como elementos que almacenan esfuerzo. Estos elementos almacenan y entregan energía sin pérdida. En la terminología del diagrama de lazos estos elementos se llaman inerciales. Un elemento inercial representa inductores en sistemas eléctricos y masas en sistemas mecánicos. La representación de estos elementos en el diagrama de lazos se muestra en la figura 3.6a.



Figura 3.6. Representación de un elemento inductivo

Si la relación entre el esfuerzo e y el flujo f es lineal:

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

Entonces el coeficiente se incluye en su representación (ver figura 3.6b).

Veamos algunos ejemplos:

- En una partícula, el momento y la velocidad están dados por:

$$P = \int_0^t F \cdot dt \quad \Rightarrow \quad v = m^{-1} \cdot \int_0^t F \cdot dt$$

Se puede decir que, la fuerza (el esfuerzo) es la causa y la velocidad (el flujo) es la consecuencia.

- En un inductor, el flujo y la corriente están dados por:

$$\phi = \int_0^t V \cdot dt \quad \Rightarrow \quad i = L^{-1} \cdot \int_0^t V \cdot dt$$

Se puede decir que, el voltaje (esfuerzo) es la causa y la corriente (el flujo) la consecuencia.

Los tres elementos básicos presentados hasta este momento son del tipo pasivo (no producen energía) y tienen solo un puerto.

3.5.4 Fuentes de esfuerzo y flujo.- Frecuentemente, en el modelamiento de sistemas se encuentran señales de entrada, esto es, señales generadas externamente. En el lenguaje del diagrama de lazos, se les conoce como

fuentes. Estas pueden ser de dos tipos, dependiendo de si la señal que entregan al sistema al que están conectados es un esfuerzo o un flujo.



Figura 3.7. Representación de las fuentes de esfuerzo y flujo

En una fuente de esfuerzo, el esfuerzo e se considera como entrada del sistema que se conecta a la fuente (ver figura 3.7a), mientras que en una fuente de flujo, el flujo f se considera como entrada del sistema que se conecta a la fuente (ver figura 3.7b). Estos elementos son del tipo activo.

3.5.5 El transformador.- Es un elemento que transmite los variables de potencia con un escalamiento definido por su modulo, y que conserva la potencia. Este elemento representa transformadores eléctricos en sistemas eléctricos, palancas en sistemas mecánicos, etc. Su representación en diagrama de lazos se muestra en la figura 3.8.

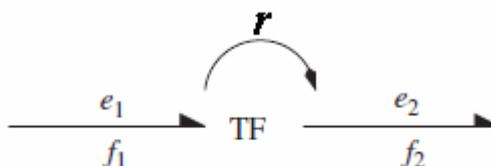


Figura 3.8. Representación de un transformador

El símbolo r indica el modulo de escalamiento, y la flecha muestra la dirección de transformación. En un transformador se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} f_2 = r \cdot f_1 \\ e_2 = r^{-1} \cdot e_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Vemos que las expresiones anteriores establecen la conservación de potencia (es decir la, la potencia de salida es igual a la potencia de entrada):

$$e_2 f_2 = e_1 f_1 \quad (3.5)$$

3.5.6 El girador.- Mientras que un transformador relaciona flujo-flujo y esfuerzo-esfuerzo, el girador establece la relación entre flujo-esfuerzo y esfuerzo-flujo, además de conservar la potencia. Por ejemplo, en el dominio eléctrico un motor DC se representa por un girador, donde el torque de salida es proporcional a la entrada de corriente y el voltaje contraelectromotriz es proporcional a la velocidad angular del motor. La representación de un girador en el diagrama de lazos se muestra en la figura 3.9.

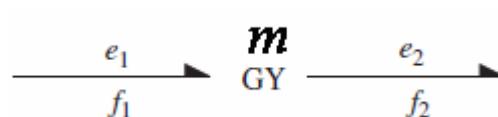


Figura 3.9. Representación de un girador

El símbolo m encima del girador denota el modulo del girador. Este modulo se define siempre desde el flujo al esfuerzo.

$$\begin{cases} e_2 = m \cdot f_1 \\ e_1 = m \cdot f_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Las expresiones anteriores establecen la conservación de potencia

En general, los giradores se usan en los casos donde la potencia se transforma desde un dominio de energía a otro (eléctrico a rotacional, eléctrico a magnético, hidráulico a rotacional, etc.)

3.6 Conexiones

Hasta este punto no se ha mencionado nada acerca de cómo se conectan los elementos básicos, este punto es absolutamente necesario debido a que el tipo de interconexión caracteriza como fluye la energía entre los elementos, lo que finalmente determinara la dinámica del sistema.

La estructura de red, representa como se conectan los elementos, expresa las relaciones y las restricciones entre los flujos y los esfuerzos de todos los elementos. La especificación de las interconexiones se puede ver como una generalización de las leyes de Kirchhoff.

3.6.1 Conexión tipo 1.-También llamada conexión en serie, esta conexión esta caracterizada por el hecho que todos los lazos que se conectan tienen el mismo flujo, y la suma de sus esfuerzos es cero. Tales conexiones representan sistemas mecánicos que comparten la misma velocidad, conexiones en serie en sistemas eléctricos, etc.

Por ejemplo, para el circuito eléctrico mostrado (ver figura 3.10a) el diagrama de lazos correspondiente (ver figura 3.10b) muestra como los componentes del sistema están unidos por una conexión tipo 1, esto debido a que todos los componentes comparten la misma corriente (flujo).

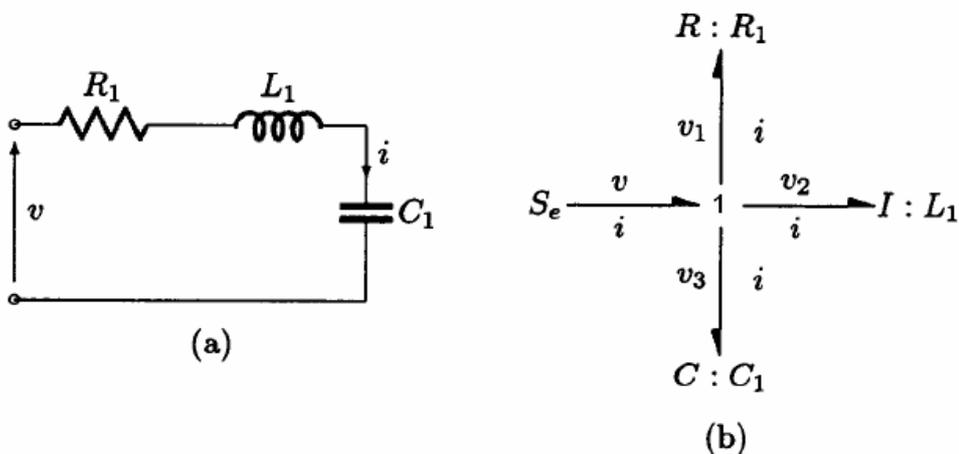


Figura 3.10. Conexión tipo 1

Usando la convención de signos que establece que la potencia que fluye hacia la conexión es positiva tenemos el siguiente balance de potencia:

$$v \cdot i - v_1 \cdot i - v_2 \cdot i - v_3 \cdot i = 0 \quad (3.7)$$

Lo que resulta en:

$$v - v_1 - v_2 - v_3 = 0 \quad (3.8)$$

Por lo tanto se establece como regla, que los signos que se asignan en la suma algebraica de voltajes están dados por la dirección de la semiflecha. Los lazos que entran a la conexión tienen signo positivo, mientras que los lazos que salen de la conexión tienen signo negativo.

3.6.2 Conexión tipo 0.- También llamada conexión en paralelo, esta conexión esta caracterizada por el hecho que todos los lazos que se conectan tienen el mismo esfuerzo, y la suma de sus flujos es cero. Tales conexiones representan sistemas mecánicos que comparten la misma fuerza, conexiones en paralelo en sistemas eléctricos, etc.

Por ejemplo, para el circuito eléctrico mostrado (ver figura 3.11a) el diagrama de lazos correspondiente (ver figura 3.12b) muestra como los componentes del sistema están unidos por una conexión tipo 0, esto debido a que todos los componentes tienen el mismo voltaje (esfuerzo).

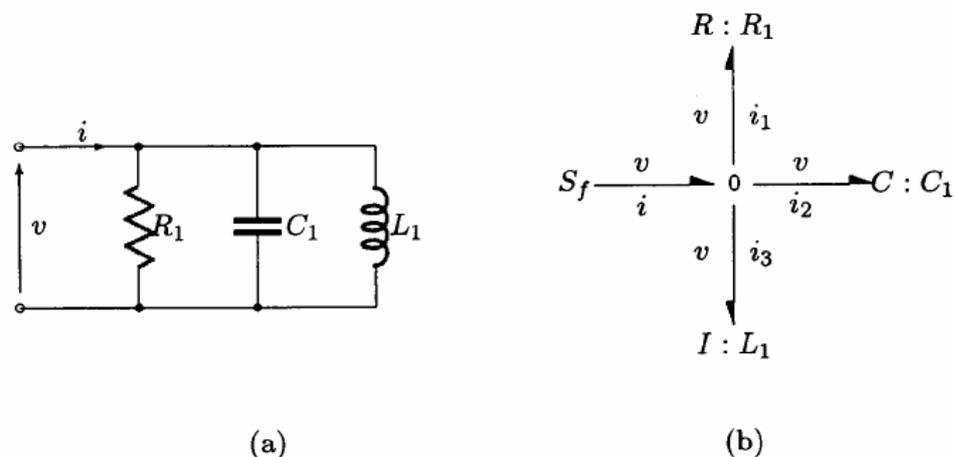


Figura 3.11. Conexión tipo 0

Usando la convención de signos que establece que la potencia que fluye hacia la conexión es positiva tenemos el siguiente balance de potencia:

$$v \cdot i - v \cdot i_1 - v \cdot i_2 - v \cdot i_3 = 0 \quad (3.9)$$

Lo que resulta en:

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (3.10)$$

Por lo tanto se establece como regla, que los signos que se asignan en la suma algebraica de flujos están dados por la dirección de la semiflecha. Los lazos que entran a la conexión tienen signo positivo, mientras que los lazos que salen de la conexión tienen signo negativo.

3.7 Causalidad

Otra característica fundamental del modelamiento basado en puertos, que lo distingue de las técnicas del modelamiento clásico, es el hecho que no se hacen decisiones acerca de la naturaleza entrada/salida de las señales que constituyen una relación, es decir las relaciones entre los puertos son del tipo no causal, como se reporta en [22], [25]. Es conocido que el concepto de causalidad es fundamental en el modelamiento clásico, sin embargo como se demostró en la sección 1.2 de la presente Tesis la causalidad no representa la naturaleza física del sistema.

Hasta este punto se ha visto que el lazo que une dos sistemas esta compuesto de dos señales: flujo y esfuerzo, los cuales forman una relación, para lo cual no ha sido necesario hacer alguna elección a priori de la dirección de estas señales. Sin embargo es importante entender como fluye la información de estas señales.

Se debe empezar de la observación fundamental que no existe elemento alguno que pueda determinar ambas variables de potencia, flujo y esfuerzo, en el lazo al que esta conectado. Esto es, si un elemento determina el valor de una de las variables, la magnitud de la otra variable debe ser determinada por el resto del sistema al que esta conectado.

Para entender este punto veamos un ejemplo: imaginemos una fuente de voltaje conectado a una resistencia. La fuente de voltaje determina la variable de esfuerzo (voltaje) pero no puede determinar la variable de flujo (corriente) esto es

debido a que la corriente que fluye en el circuito la determina el resistor. Por lo tanto se puede decir que: La fuente de voltaje da información de esfuerzo y recibe información de flujo, mientras que la resistencia recibe información de esfuerzo y entrega información de flujo. De la misma manera, si ahora conectamos una fuente de corriente al resistor, la fuente de corriente determinara el flujo mientras que el resistor determinara el esfuerzo.

Para ver este punto, consideremos la conexión de dos subsistemas (ver figura 3.12).

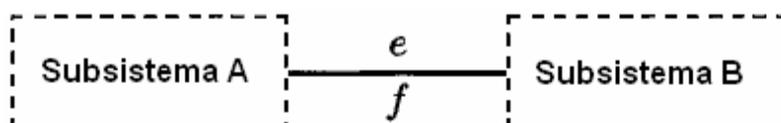


Figura 3.12. Conexión entre dos subsistemas

Ahora consideremos una situación donde es natural considerar el sistema A como un sistema que da información de esfuerzo, entonces podemos considerar al esfuerzo e como una señal que va de A hacia B y el flujo f como una señal de B hacia A (ver figura 3.13a). Su representación en el diagrama de lazos se muestra en la figura 3.13b, donde se ha puesto un trazo vertical adyacente al subsistema B, esto es para indicar que este sistema tiene un esfuerzo como entrada.

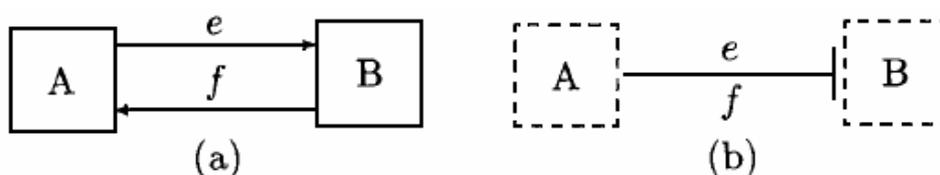


Figura 3.13. Causalidad del sistema A como fuente de esfuerzo

Si ahora consideramos la situación donde es natural considerar al sistema A como el sistema que da información de flujo. Entonces podemos considerar al esfuerzo e como una señal de B hacia A y al flujo f como una señal de A hacia B (ver figura 3.14a). Además notamos que la marca vertical cambia de posición y se ubica adyacente al sistema A, el sistema que recibe esfuerzo (ver figura 3.14b).

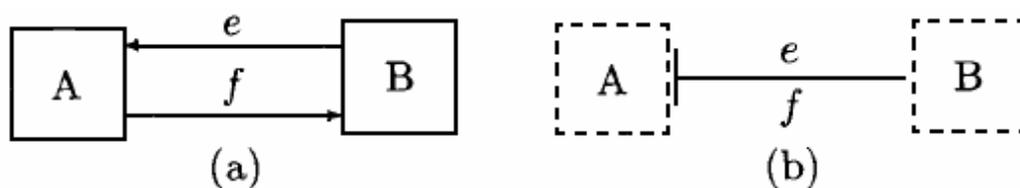


Figura 3.14 Causalidad del sistema A como fuente de flujo

En conclusión, si en un lazo la información del esfuerzo está determinada por un elemento conectado en uno de sus extremos, entonces la información de flujo debe estar determinada por el elemento conectado al otro extremo. Esta causalidad se representa por medio de una marca vertical que se coloca en el elemento que recibe esfuerzo.

Es importante mencionar que, la causalidad de un lazo, no solo indica la dirección de las variables de un puerto, sino que da soporte a los temas computacionales y analíticos, ya que al establecer una dirección de las señales hace posible la implementación y posterior simulación en medios digitales.

- a. Causalidad de los elementos resistivos.-** Tal como se vio en el ejemplo, un resistor se puede comportar como un elemento que recibe o que entrega

esfuerzo (flujo). Esto es debido a que el flujo y el esfuerzo están relacionados de manera algebraica.

De lo anterior, el resistor tiene dos representaciones posibles de causalidad (ver figura 3.15), su causalidad dependerá del contexto del problema.



Figura 3.15. Causalidad de un elemento resistivo

- b. Causalidad de los elementos capacitivos.** En estos elementos el esfuerzo es proporcional a la integral del flujo (dado en 3.2), es decir, la historia del flujo se integra para generar el esfuerzo. Por lo tanto, un elemento inductivo recibe flujo (causa) y genera esfuerzo (efecto). Su representación se muestra en la figura 3.16.

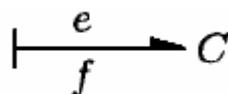


Figura 3.16. Causalidad de un elemento capacitivo

- c. Causalidad de los elementos inductivos.** En estos elementos el flujo es proporcional a la integral del esfuerzo (dado en 3.3), es decir, la historia del esfuerzo se integra para generar el flujo. Por lo tanto, un elemento inductivo

recibe esfuerzo (causa) y genera flujo (efecto). Su representación se muestra en la figura 3.17.

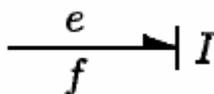


Figura 3.17. Causalidad de un elemento inductivo

- d. Causalidad de las fuentes.** En estos elementos la causalidad esta dada por definición, una fuente de esfuerzo genera esfuerzo y recibe flujo (ver figura 3.18a), y una fuente de flujo genera flujo y recibe esfuerzo (ver figura 3.18b).



Figura 3.18. Causalidad de las fuentes

- e. Causalidad de los transformadores.** En este elemento, si la información de flujo entra a través de un lazo entonces sale por el otro lazo. Esto implica dos posibles representaciones de causalidad (ver figura 3.19).



Figura 3.19. Causalidad del transformador

- f. Causalidad de los giradores.** En este elemento si un lazo trae la información de flujo, el otro lazo saca información de esfuerzo. Esto implica dos posibles representaciones de causalidad (ver figura 3.20).

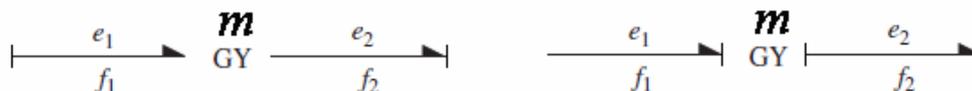


Figura 3.20. Causalidad del girador

- g. Causalidad de la conexión tipo 1.** En este tipo de conexión se tiene que el flujo es común y la suma de esfuerzos es cero. Se establece que todos los lazos excepto uno deben tener el trazo causal en la conexión, esto significa que solo un lazo debe traer la información de flujo y los otros lazos deben sacar esta información de flujo (ver figura 3.21).

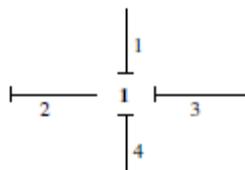


Figura 3.21. Causalidad de la conexión tipo 1

- h. Causalidad de la conexión tipo 0.** En este tipo de conexión se tiene que el esfuerzo es común y la suma de flujos es cero. Se establece que solo uno de los lazos debe tener el trazo causal en la conexión, esto significa que solo un lazo debe traer la información de esfuerzo y los otros lazos deben sacar esta información de esfuerzo (ver figura 3.22).

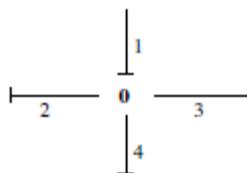


Figura 3.22. Causalidad de la conexión tipo 0

En este punto es conveniente ver como se aplican los conceptos presentados anteriormente para el modelamiento de un sistema físico en concreto.

Ejemplo. Modelamiento de un motor DC.- Este sistema consta de dos dominios físicos: el eléctrico y el mecánico tal como se muestra en la figura 3.23.

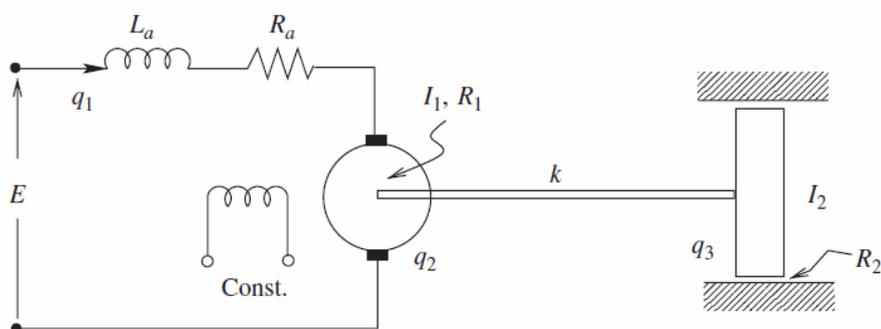


Figura 3.23. Esquema de un motor DC con carga

Donde la corriente de la armadura y el voltaje contraelectromotriz en el dominio eléctrico están relacionados a la velocidad y el torque en el dominio mecánico por:

$$\tau = K\phi i_a \quad \text{y} \quad e_b = K\phi w_r \quad (3.11)$$

Donde:

τ : Es el torque

ϕ : Es el flujo magnético

w_r : Es la velocidad angular del rotor

i_a : Es la corriente de armadura

e_b : Es el voltaje contraelectromotriz

K : es la constante del motor

En el subsistema eléctrico, el voltaje la resistencia de armadura y la inductancia comparten la misma corriente (flujo) con la fuerza contra electromotriz. Por lo tanto estos elementos están conectados a través de una conexión tipo 1.

La conversión del dominio eléctrico al dominio mecánico y viceversa se representa por un girador con modulo $K\phi$, con ecuaciones establecidas en (3.11).

En el subsistema mecánico, la inercia del motor y la fricción comparten la misma velocidad (flujo) junto con el girador, entonces estos están unidos por una conexión tipo 1. El eje (tipo capacitivo) que une al motor y la carga tiene el mismo esfuerzo en sus extremos por lo que se conecta una conexión tipo 0. Finalmente, la carga y su fricción tienen la misma velocidad junto con un extremo del eje. Por lo que están unidos por una conexión tipo 1. El diagrama completo del sistema se muestra en la figura 3.24.

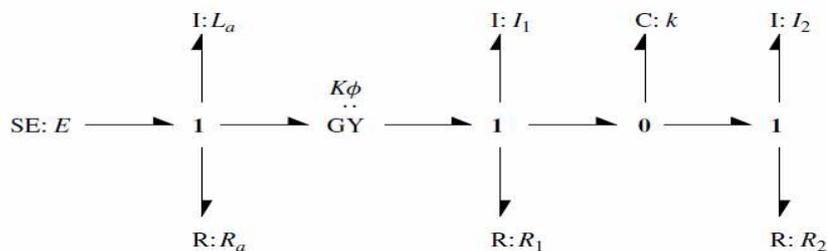


Figura 3.24. Diagrama de lazos de un motor DC con carga

3.8 Causalidad diferencial

Se ha visto que la causalidad para los elementos almacenadores (capacitores e inductores) se definió en base a una relación integral. Sin embargo, en algunas circunstancias esto no es posible y estamos forzados a poner el trazo causal en el lado opuesto al ya definido. Tal causalidad invertida se conoce como causalidad diferencial, reportada en [22], [25], [30].

La causalidad integral significa que la el pasado de la causa se integra para llegar al efecto en el presente, mientras que, la causalidad diferencial necesita diferenciar la causa al presente (que no se puede encontrar adecuadamente dado que no se conoce el futuro) para llegar al efecto. Por lo tanto la causalidad diferencial hace al sistema dependiente del futuro, como si se arrastrara el sistema a una configuración predestinada.

Veamos bajo que circunstancias se presenta la causalidad diferencial. Para esto consideremos una fuente de corriente en serie con un inductor (ver figura 3.25).

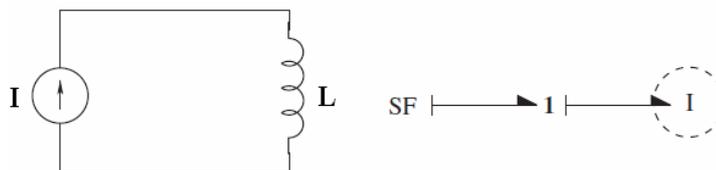


Figura 3.25. Ejemplo de causalidad diferencial en un inductor

La fuente de corriente entrega señal de flujo por lo que el trazo causal esta junto al elemento. Aplicando la propiedad de una conexión tipo 1, resulta que el trazo causal del elemento inductor esta junto a la conexión y no junto al elemento como se había definido anteriormente. La pregunta es ¿Por qué se presenta esto?

Sabemos que el voltaje a lo largo del inductor esta dado por $v = L \frac{di}{dt}$.

Entonces, si la corriente dictada por la fuente cambia instantáneamente, el voltaje inducido sería infinito. Esto nos dice que no debe conectar una fuente de corriente en serie con un inductor.

Similar es la situación de una fuente de voltaje conectado en paralelo a un capacitor (ver figura 3.26). Como se aprecia en su correspondiente diagrama de lazos, la causalidad del elemento capacitor es del tipo diferencial.

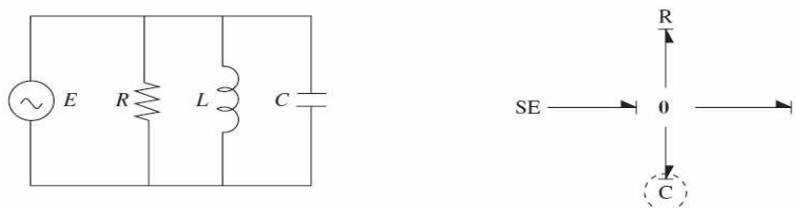


Figura 3.26. Ejemplo de causalidad diferencial en un capacitor

La razón por la que se asigna una causalidad sigue del hecho de que no se permite al voltaje de la fuente variar de manera independiente. Como se sabe la corriente del capacitor esta dado por $i = C \frac{dv}{dt}$. Entonces si el voltaje aplicado por la fuente es del tipo cuadrado, la corriente a través del capacitor seria infinita en las transiciones. La conclusión es que no debe conectarse un capacitor en paralelo a una fuente independiente de voltaje.

Las problemas anterior se corrige si en el caso del inductor se conecta una resistencia en paralelo (ver figura 3.27a) y en el caso del capacitor si se conecta una resistencia en serie (ver figura 3.27b). Tal como se aprecia en sus respectivos diagramas de lazos, desaparece la causalidad diferencial.

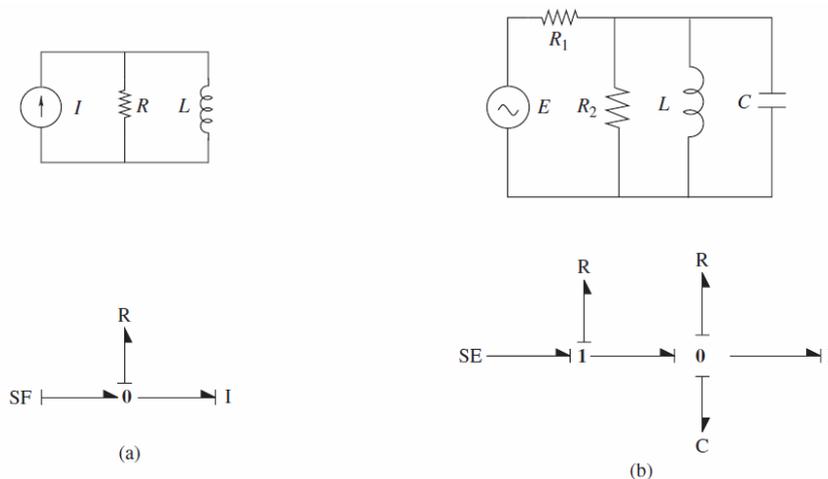


Figura 3.27. Eliminación de causalidad diferencial

La presencia de causalidad diferencial en un sistema puede indicar serias violaciones de los principios de conservación de energía.

Capítulo 4.

Sistemas Port-Hamiltonianos

4.1 Introducción

El enfoque Port-Hamiltoniano puede verse como la formalización matemática del modelamiento basado en puertos. Es decir, se formaliza matemáticamente la noción de puertos de potencia, mediante la definición de las variables conjugadas de potencia en espacios vectoriales. Se formaliza la noción de potencia de un puerto, estableciendo el producto dual entre elementos que pertenecen a los espacios de variables conjugadas. La estructura de interconexiones, que anteriormente estaba dado por el diagrama de lazos, se representa matemáticamente por una estructura preservante de potencia, que representa el flujo de energía entre los componentes de un sistema.

La gran ventaja de la descripción port-Hamiltoniana de los sistemas físicos, es que pone en evidencia todas las propiedades energéticas del sistema: La cantidad de energía almacenada, a través de las variables de estado de energía y la función Hamiltoniana; la energía de disipación, que esta representada por la matriz de

disipación; la estructura de interconexión, que esta representada por la matriz de interconexión; y la interfase con el mundo externo, a través del puerto de potencia.

El enfoque port-Hamiltoniano, hace uso de las herramientas que proporciona la geometría diferencial para definir la estructura implícita (sistemas port-Hamiltonianos implícitos) de cualquier sistema físico, para luego finalmente dar lugar a lo que se conoce como sistemas port-Hamiltonianos explícitos que describen a un sistema mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, es posible dar una representación comportamental de los sistemas port-Hamiltonianos. El enfoque comportamental, descrito en el capítulo 2, debido a su generalidad provee un marco que permite modelar cualquier tipo de fenómeno. En el caso de los sistemas físicos, provee un lenguaje que respeta la naturaleza física de estos sistemas, por lo que es de manera natural el marco adecuado donde presentar los sistemas port-Hamiltonianos.

En resumen, en este capítulo se va a presentar el enfoque port-Hamiltoniano, para el modelamiento de sistemas físicos, definiéndolo dentro del marco comportamental. Este enfoque al estar basado en la energía, permite explotar las características comunes a todos los sistemas dinámicos y al hacer uso del nuevo paradigma de puerto permite capturar de manera adecuada la naturaleza física del fenómeno de interconexión entre sistemas físicos.

4.2 Análisis energético de un sistema simple

Antes de formalizar matemáticamente las nociones de puertos, potencia en los puertos e interconexiones preservantes de potencia, va a ser de mucha utilidad realizar el análisis energético de un sistema simple. Ya que nos permitirá apreciar como se relacionan los conceptos de puertos e interconexión de sistemas, con los conceptos de variables de energía y energía de un sistema.

Consideremos el oscilador lineal que se muestra en la figura 4.1. Este sistema esta compuesto de un resorte lineal y una masa, de rigidez k e inercia m respectivamente.

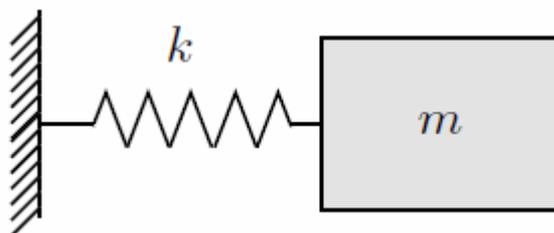


Figura 4.1. Oscilador lineal

Sea x el desplazamiento del resorte y $p = mv_1$ el momento de la masa. La función de energía que caracteriza al sistema esta dado por:

$$E = \frac{1}{2}k \cdot x^2 + \frac{p^2}{2m} \quad (4.1)$$

Donde la energía total es la suma de dos contribuciones:

$$E_p = \frac{1}{2}k \cdot x^2, \text{ que representa la energía potencial del resorte.}$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m}, \text{ que representa la energía cinética almacenada en la masa.}$$

Supongamos que el sistema esta oscilando, entonces nos podemos hacer las siguientes preguntas ¿de donde se origina el movimiento? ¿Cómo fluye la energía entre los componentes del sistema? ¿Cómo se da la interconexión entre los componentes del sistema?

El oscilador es la interconexión de dos subsistemas más simples: una masa, que tal como se vio en la sección 3.5.3 del capítulo anterior es de tipo inductivo, esto es, recibe esfuerzo y genera flujo (ver figura 4.2).

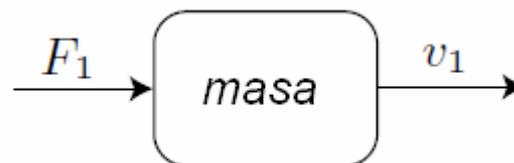


Figura 4.2. Modelo de la masa

Y un resorte, que tal como se vio en la sección 3.5.2 del capítulo anterior es de tipo capacitivo, esto es, recibe flujo y genera esfuerzo (ver figura 4.3).



Figura 4.3. Modelo del resorte

Las ecuaciones que gobiernan a cada subsistema están dados por:

$$masa = \begin{cases} \dot{p} = F_1 \\ v_1 = \frac{p}{m} \end{cases} \quad resorte = \begin{cases} \dot{x} = v_2 \\ F = Kx \end{cases} \quad (4.2)$$

Tal como se vio en el capítulo anterior, en cada dominio físico existen dos variables conjugadas de potencia, las que a su vez conforman un puerto; y es a través de un puerto que un sistema puede intercambiar energía con su entorno. En este ejemplo, el dominio físico es el mecánico, específicamente movimiento de translación. Entonces, las variables conjugadas de cada subsistema son la Fuerza y la velocidad, y su producto $P = F \cdot v$ representa la potencia mecánica. Por tal, la interconexión toma lugar a través de la fuerza y la velocidad (del puerto) de cada subsistema: la masa toma como entrada la fuerza que produce el resorte y produce una velocidad como salida, mientras que el resorte toma como entrada la velocidad que produce la masa y produce una fuerza (que debido a la tercera ley de newton es opuesto a la fuerza de reacción de la masa) como salida (ver figura 4.4).

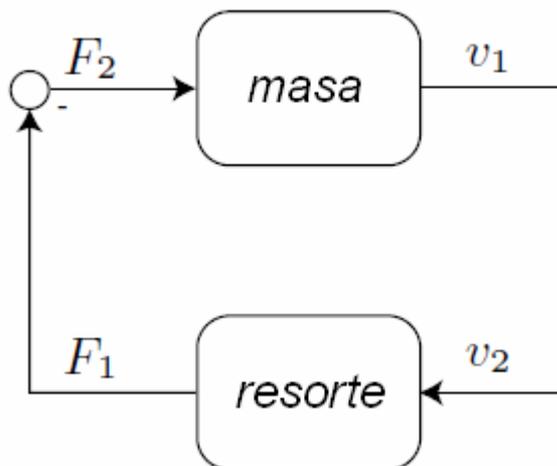


Figura 4.4. Esquema de la interconexión interna de un oscilador

Es importante recalcar que este diagrama guarda concordancia con su respectivo diagrama de lazos (en esta representación, los componentes están conectados por una conexión tipo 1, por tal comparten la misma velocidad y la suma de las fuerzas es cero, tal como se aprecia en la figura 4.4).

Una vez hecha la interconexión, esta determina la manera en que se intercambia la energía, en este caso entre la masa y el resorte. Además impone restricciones entre las variables de los puertos que están interconectados. En este ejemplo estas restricciones están dadas por:

$$\begin{cases} v_1 = v_2 \\ F_1 = -F_2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Ahora analicemos el flujo de energía (potencia) entre los subsistemas:

$$\begin{aligned}\frac{dE_K}{dt} &= \frac{\partial E_K}{\partial p} \dot{p} = \frac{p}{m} F_1 = -F_2 v_1 = -F_2 v_2 = -P_2 \\ \frac{dE_P}{dt} &= \frac{\partial E_P}{\partial x} \dot{x} = kx v_2 = F_2 v_2 = P_2\end{aligned}\tag{4.4}$$

Esto significa que la cantidad de energía que se inyecta en el resorte es exactamente igual a la cantidad de energía extraída de la masa (y viceversa). Esto significa que la energía es simplemente transferida a lo largo de la interconexión (en otras palabras, la interconexión conserva la potencia, no disipa o crea potencia). Por lo tanto, la energía total E se mantiene constante.

Es importante notar que, actuando en la fuerza y velocidad de cada subsistema se puede controlar la inyección de potencia introducida a (o extraída de) cada subsistema.

Entonces del ejemplo anterior, se tienen las siguientes conclusiones:

- Cada subsistema (masa y resorte) se caracteriza por una variable de estado o energía (desplazamiento y momento), que representa el fenómeno de almacenamiento de energía.
- La energía total del sistema esta en función de las variables de energía.
- Cada subsistema interactúa con el resto del mundo a través de dos variables de potencia (fuerza y velocidad) que conforman su respectivo puerto de potencia, tal como se vio en el capítulo anterior.

- Cuando se interconectan dos subsistemas (masa y resorte), se obtiene un nuevo sistema (el oscilador) cuya energía es la suma de la energía almacenada en los subsistemas y cuyo comportamiento dinámico está determinado por el intercambio de energía entre los subsistemas.
- Una vez determinada la interconexión entre dos subsistemas se originan restricciones entre las variables de potencia, esto a su vez determina la manera en que se intercambia la energía.
- La interacción entre dos sistemas está dada por un flujo de energía (potencia mecánica) entre estos. Lo que es más, este flujo de energía no sufre pérdidas cuando viaja a través de las interconexiones. Por lo que se dice que la interconexión es preservante de la potencia.

Al analizar el ejemplo anterior, ha sido de mucha utilidad utilizar algunos conceptos básicos vistos en el modelamiento basado en puertos (puertos, potencia de los puertos, elementos inductivos y capacitivos), ya que nos permitió entender cómo se da la interconexión entre estos dos subsistemas de manera natural. Sin embargo ha sido necesario introducir los conceptos de variables de energía, energía total del sistema e interconexiones preservantes de potencia, para poder hacer el análisis energético.

Ahora continuaremos con la formulación matemática de los conceptos básicos del modelamiento basado en puertos, los cuales nos permitirán más adelante presentar los sistemas port-Hamiltonianos.

4.3 Formulación matemática de las variables conjugadas de potencia.

Para formalizar los conceptos de variables conjugadas de potencia (esfuerzo y flujo), se va a considerar el uso de los espacios vectoriales. Para tal fin, se van a presentar los conceptos de espacios vectoriales, espacios vectoriales duales y producto dual, reportados en [12], [28].

Definición 4.1 (Espacio Vectorial). Un espacio vectorial sobre $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ es un conjunto \mathcal{V} cuyos elementos son llamados vectores, equipado con dos operaciones:

1. Suma de vectores, $v_1 + v_2 \in \mathcal{V}$ donde $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$. (4.5)

2. Multiplicación por un escalar, $av \in \mathcal{V}$ donde $a \in F$ y $v \in \mathcal{V}$. (4.6)

Un ejemplo de espacio vectorial es el conjunto \mathbb{R}^n llamado comúnmente Espacio Euclidiano de Dimensión n .

Definición 4.2 (Espacio Dual). Sea \mathcal{V} un espacio vectorial, su espacio dual \mathcal{V}^* es el conjunto de mapeos lineales $\mathcal{V}^* = \{f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Que satisface las siguientes ecuaciones:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2); \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

Lo que muestra que, \mathcal{V}^* también es un espacio vectorial. Si \mathcal{V} es dimensionalmente finito, entonces \mathcal{V}^* tiene la misma dimensión de \mathcal{V} . Los elementos de \mathcal{V} y \mathcal{V}^* se dicen que son duales uno con respecto al otro. Los elementos de \mathcal{V} son llamados vectores mientras que los elementos de \mathcal{V}^* son llamados covectores.

Usualmente los vectores representan como vectores columna y los covectores se representan como vectores fila.

Definición 4.3 (Producto Dual). Dado $v \in \mathcal{V}$ y $v^* \in \mathcal{V}^*$, el producto dual entre estos elementos se define como:

$$\langle , \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \langle v, v^* \rangle = v^*(v) \quad (4.8)$$

Se debe notar que el producto dual está definido de manera intrínseca para cualquier espacio vectorial, no es una estructura adicional que puede asociarse a este. Esto significa que, una vez que se han establecido las coordenadas, los vectores y covectores. El producto dual está dado simplemente por el producto usual entre vectores fila y vectores columna.

Una vez establecido los conceptos anteriores, nos es posible definir matemáticamente las variables conjugadas de potencia:

- Las variables de flujo se definen en un espacio vectorial, llamado espacio de flujos, denotado por \mathcal{F} .
- Las variables de esfuerzo se definen en un espacio vectorial, llamado espacio de esfuerzos que es el dual del espacio de flujos, denotado por $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$.

Las variables conjugadas se definen en espacios vectoriales duales debido a la propiedad de producto dual que existe entre estas. Ya que esta característica es fundamental para poder definir adecuadamente la potencia en un puerto.

Se recuerda que las variables conjugadas de potencia de cada dominio físico se reportaron anteriormente, en el capítulo 3 (ver tabla 3.1).

4.4 Formulación matemática de los puertos de potencia

Una vez establecido los espacios vectoriales donde se definen las variables conjugadas de potencia, es posible definir el concepto de puerto matemáticamente.

Definición 4.4 (Puerto de potencia). Dados $f \in \mathcal{F}$ y $e \in \mathcal{E}$, el puerto de potencia está dado por el par coordenado $p = (f, e)$. Esto significa que el espacio vectorial en donde está definido el puerto está dado por el producto $\mathcal{P} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$.

Tal como se menciono anteriormente, los puertos de potencia son el medio a través del cual un sistema puede intercambiar energía con el resto del mundo. A través del cual puede interconectarse con otros sistemas físicos. En el ejemplo del oscilador, los puertos de potencia de la masa y el resorte son los pares (F_1, v_1) y (F_2, v_2) respectivamente.

Definición 4.5 (Potencia en un puerto). Dados $f \in \mathcal{F}$ y $e \in \mathcal{E}$, la potencia en el puerto esta dado por el producto $\langle e, f \rangle$. Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto dual intrínscico definido anteriormente.

El hecho que las variables conjugadas de potencia son independientes de la configuración del sistema físico y que el producto dual esta definido intrínscicamente, es de crucial importancia. Ya que permite, definir el intercambio de energía sin el uso de alguna estructura adicional en el puerto, y usar los puertos de potencia para interconectar sistemas caracterizados por diferentes espacios de configuraciones e incluso por diferentes dominios físicos.

Entonces, se puede decir que, un puerto de potencia es una interfase a través del cual fluye energía y que este flujo se expresa en una manera intrínseca, independiente del dominio físico y de la configuración del sistema al que el puerto de potencia esta asociado.

4.5 Sistemas port-Hamiltonianos implícitos

Del ejemplo del oscilador, es evidente que tres conceptos son fundamentales para construir el modelo de un sistema:

- El espacio estado, donde se definen las variables de estado o variables de energía que modelan el fenómeno de almacenamiento de energía asociado a las partes constitutivas del sistema.
- El puerto de potencia, que es la interfase a través del cual cada subsistema puede intercambiar energía.
- La estructura de la interconexión, que especifica la manera en que se conectan todos los subsistemas a través de sus puertos de potencia, y que consecuentemente muestra como se da el flujo de energía entre los componentes de un sistema.

Tomando como referencia el diagrama de lazos, un sistema físico puede ser descrito por un conjunto de elementos que almacenan energía cinética y/o potencial (capacitores y/o inductores), un conjunto de elementos que disipan energía (resistores), un conjunto de interconexiones preservantes de potencia (lazos), y finalmente un conjunto de puertos de potencia externos, mediante el cual el sistema se comunica con el mundo exterior (ver figura 4.5).

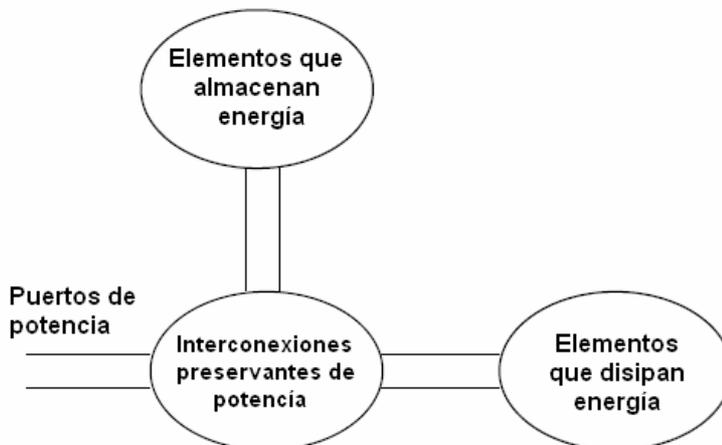


Figura 4.5. Modelo energético de un sistema dinámico

El hecho de que los elementos se conectan por medio de interconexiones preservantes de potencia significa que a lo largo de las interconexiones solo puede haber transferencia de energía. Esto permite la presencia de elementos preservantes de potencia como los transformadores y giradores en la interconexión.

Teniendo en mente el punto de vista del modelo energético de un sistema, es posible introducir lo que se llama como sistemas port-Hamiltonianos implícitos. En total se necesitan cuatro componentes para definir un sistema port-Hamiltoniano:

1. Un espacio de estado \mathcal{X} .
2. Un espacio de variables de flujo, que se asume es un espacio vectorial denotado por \mathcal{V} . Y un espacio de variables de esfuerzo, que se asume es el espacio dual del espacio de las variables de flujo, denotado por \mathcal{V}^* .

3. Una estructura de interconexión \mathcal{D} , llamada estructura Dirac, que representa la “topología energética” del sistema. Esto es, representa como fluye la energía entre los componentes del sistema y con el mundo externo.
4. Una función de energía suave \mathcal{H} , llamada la función Hamiltoniana, definida en el espacio estado y que expresa la energía total del sistema correspondiente a algún estado.

Veamos con mayor detalle cada componente:

- a) **Espacio de estado.**- El espacio de estados \mathcal{X} es un manifold suave de dimensión n , cuyos componentes x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de estado que representan a los elementos que almacenan energía.

Se debe señalar que un manifold es el objeto básico que se usa en la geometría diferencial. Localmente es similar a un conjunto abierto de un espacio Euclidiano, por lo que es posible construir estructuras que nos son familiares en el espacio Euclidiano (derivadas, integrales, etc.). Sin embargo la gran diferencia radica en que todo objeto definido en esta estructura es del tipo intrínscico, tal como se reporta en [12].

Debido a que la energía es un concepto intrínscico al sistema, entonces se deben definir conceptos que también sean intrínscicos, en otras palabras que sean independientes de las coordenadas. Por tanto se hará uso de las

herramientas que nos brinda la geometría diferencial para definir a los sistemas Port-Hamiltonianos implícitos.

- b) Espacio de variables de flujo y esfuerzo.-** Los espacios duales \mathcal{V} y \mathcal{V}^* se usan para definir las variables de flujo y esfuerzo de los puertos de potencia externos. Estos puertos representan la interfase por medio del cual un sistema puede interactuar o conectarse con otros sistemas. Se debe notar que estos espacios vectoriales son independientes de la configuración del sistema, en orden de permitir la interconexión entre sistemas con diferentes espacios de configuraciones.
- c) Estructura de interconexión.-** La estructura Dirac es el objeto matemático usado para describir los flujos de energía del sistema. Esto es, representa los flujos de energía entre los componentes del sistema (flujos internos) y los flujos de energía del sistema con su entorno (flujos externos). En otras palabras, representa las interconexiones internas entre los elementos que componen el sistema y las conexiones del sistema con el mundo externo.

Para poder definir matemáticamente la estructura de interconexiones, es necesario definir los espacios de puertos externos y puertos internos, ya que, son las conexiones de estos puertos los que definen tal estructura. Hasta este punto, ya se tiene definido el espacio de los puertos externos, por lo tanto, queda por definir el espacio de puertos internos.

Consideremos el manifold de estado \mathcal{X} , su bundle tangente denotado por $T\mathcal{X}$ y su bundle cotangente definido por $T^*\mathcal{X}$ (referirse al apéndice A para ver la definición de bundle). Entonces, dado un punto $x \in \mathcal{X}$, por definición su espacio tangente en x denotado $T_x\mathcal{X}$ y su espacio cotangente en x denotado por $T_x^*\mathcal{X}$ son espacios duales (referirse al apéndice A para ver la definición de espacio tangente y cotangente). Por lo tanto existe un producto dual intrínseco en \mathcal{X} , denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado por el mapeo bilineal $T\mathcal{X} \times T^*\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$\langle v^*, v \rangle = v^*(v), \quad v \in T_x\mathcal{X}, \quad v^* \in T_x^*\mathcal{X}, \quad x \in \mathcal{X} \quad (4.9)$$

Entonces, los bundles tangente $T\mathcal{X}$ y cotangente $T^*\mathcal{X}$ del manifold de estado \mathcal{X} , se pueden usar para definir el intercambio de energía interna. En otras palabras se usan para definir los puertos de potencia internos, que son dependientes del estado del sistema.

Una vez establecido los espacios de puertos externos y de puertos internos, se tiene que el espacio total de interconexiones del sistema esta dado por el siguiente vector bundle en \mathcal{X} :

$$Q = \underbrace{T\mathcal{X} \oplus T^*\mathcal{X}}_{\text{Interno}} \oplus \underbrace{V \oplus V^*}_{\text{Externo}} \quad (4.10)$$

El espacio de vectores, covectores, flujos y esfuerzos en cierto estado x esta dado por lo que se conoce la fibra del bundle Q dado por:

$$Q(x) = T_x \mathcal{X} \times T_x^* \mathcal{X} \times V \times V^* \quad (4.11)$$

En este espacio existe una forma bilineal simétrica no degenerada Q , llamada el emparejamiento $+$, definido por:

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_+ : Q(x) \times Q(x) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle (v, v^*, f, e), (w, w^*, \tilde{f}, \tilde{e}) \rangle_+ &= \langle v^*, w \rangle + \langle w^*, v \rangle + \langle e, \tilde{f} \rangle + \langle \tilde{e}, f \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

Donde $(v, v^*, f, e), (w, w^*, \tilde{f}, \tilde{e}) \in Q(x)$

Ahora es posible definir la interconexión preservante de potencia.

Definición. 4.6 (Estructura Dirac). Una estructura Dirac en el bundle Q es un vector sub-bundle suave $\mathcal{D} \subset Q$, tal que para cada $x \in \mathcal{X}$, la fibra $\mathcal{D}(x) \subset Q(x)$ satisface la condición $\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}^\perp(x)$ donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\perp(x) = \{ (w, w^*, \tilde{f}, \tilde{e}) \in Q(x) \mid \langle (v, v^*, f, e), (w, w^*, \tilde{f}, \tilde{e}) \rangle_+ = 0, \\ \forall (v, v^*, f, e) \in \mathcal{D}(x) \} \end{aligned} \quad (4.13)$$

De la definición y usando (4.12) se tiene que:

$$\langle v^*, v \rangle + \langle e, f \rangle = \frac{1}{2} \langle (v, v^*, f, e), (v, v^*, f, e) \rangle_+ = 0, \quad \forall (v, v^*, f, e) \in \mathcal{D}(x) \quad (4.14)$$

Este resultado es de suma importancia, ya que nos muestra que una estructura Dirac representa una relación que conserva la potencia entre las variables de potencia externa e interna y por lo tanto puede ser usado para describir la topología energética del sistema, como se reporta en [3], [5], [6], o en otras palabras, para representar el conjunto de interconexiones preservantes de potencia del sistema.

- d) Función de energía.-** La función de energía del sistema esta dada por el Hamiltoniano $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que expresa la energía total del sistema dada cierta configuración en el manifold de estado.

Una vez establecidos los conceptos anteriores, nos es posible introducir los sistemas port-Hamiltonianos implícitos. Donde se asumirá por el momento, que no hay disipación en el sistema.

Definición 4.7 (Sistemas port-Hamiltonianos implícitos). Consideremos un espacio estado \mathcal{X} , un espacio de variables de flujo \mathcal{V} y su espacio dual de variables

de esfuerzo \mathcal{V}^* , una estructura Dirac \mathcal{D} y una función Hamiltoniana \mathcal{H} . El sistema port-Hamiltoniano implícito correspondiente al cuádruplo $(\mathcal{X}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{H})$ se define estableciendo:

$$f_x = v = -\dot{x} \quad e_x = v^* = \frac{\partial H}{\partial x}(x) \quad (4.15)$$

Donde v representa el flujo correspondiente a cierto estado x y v^* el esfuerzo correspondiente a este estado. Claramente estas variables representan los puertos dependientes del estado $p_x = (e_x, f_x)$ de los elementos que almacenan energía. Además, se observa claramente que el producto $\langle e_x, f_x \rangle = \dot{\mathcal{H}}(x)$ representa el flujo de energía en cierto estado.

En la figura 4.6 se muestra gráficamente como se da esta relación. Claramente se observa como se da la conexión entre los elementos del sistema con la estructura de interconexión, además se puede apreciar los puertos de interconexión internos y los externos.

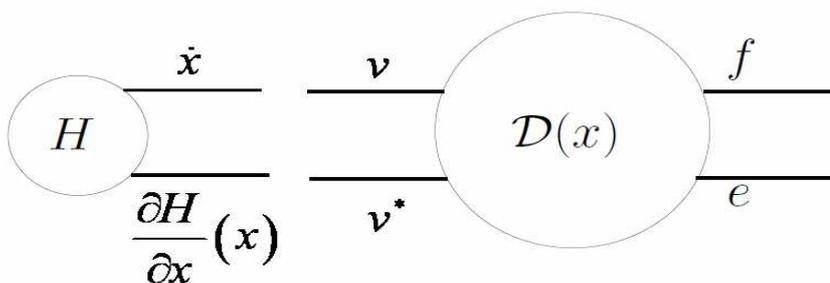


Figura 4.6. Conexión de un elemento con la estructura de interconexión del sistema

Entonces, una vez definido los puertos internos y los puertos externos, un sistema port-Hamiltoniano explícito está definido por la ecuación:

$$\left(-\dot{x}, \frac{\partial H(x)}{\partial x}, f, e\right) \in \mathcal{D}(x) \quad (4.16)$$

Aplicando este resultado en la propiedad reportada en (4.14), resulta el siguiente balance de potencia:

$$\dot{H}(x(t)) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \dot{x}(t) \right\rangle = \langle e(t), f(t) \rangle \quad (4.17)$$

Este resultado muestra claramente que en los sistemas port-Hamiltonianos implícitos, toda la energía que se suministra a través de los puertos de potencia ($\langle e(t), f(t) \rangle$) se almacena en el sistema. Es decir no se presentan pérdidas de energía en las interconexiones del sistema.

4.6 Sistemas port-Hamiltonianos implícitos con disipación

Como todos sabemos, los sistemas físicos siempre presentan algún tipo de disipación o pérdida de Energía, ya sea por rozamiento, disipación de calor, etc. Por lo tanto es importante definir este concepto en el enfoque port-Hamiltoniano.

Para incluir disipación en un sistema port-Hamiltoniano implícito, simplemente se conecta a la estructura de red los puertos de los elementos disipativos (ver figura 4.5). Es decir se conectan aquellos elementos que siempre extraen energía del sistema. Tal como se muestra en [5], estos elementos pueden ser descritos por la siguiente relación constitutiva:

$$e_r = \alpha(f_r) \quad \text{Donde } \alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \text{ tal que } \langle e_r, f_r \rangle \leq 0 \quad (4.18)$$

Estos elementos suministran siempre una potencia negativa al sistema a través del puerto de potencia al que ellos están conectados, en otras palabras, ellos siempre extraen energía del sistema.

Un sistema port-Hamiltoniano implícito donde algunos de los puertos de potencia corresponden a elementos que disipan energía recibe el nombre de sistema port-Hamiltoniano implícito con disipación y para estos sistemas el balance de potencia (ecuación 4.17) se convierte en:

$$\dot{H}(x(t)) = \underbrace{\langle e(t), f(t) \rangle}_{P. \text{ Almacena}} + \underbrace{\langle e_r(t), f_r(t) \rangle}_{P. \text{ Disipa}} \leq \langle e(t), f(t) \rangle \quad (4.19)$$

P. Total Suministrada

Esto significa que, un sistema port-Hamiltoniano implícito con disipación resulta ser un sistema pasivo. Es decir que una parte de la energía que se suministra a través de los puertos de potencia se almacena y otra parte se disipa.

4.7 Descripción comportamental de los sistemas port-Hamiltonianos implícitos

Tal como se menciona en la introducción del presente capítulo, el marco adecuado para presentar los sistemas port-Hamiltonianos es el marco comportamental. Como se menciona anteriormente, la energía juega un rol central en el modelamiento de sistemas físicos, y el intercambio de energía determina su evolución en el tiempo. Entonces, debido a su evolución en el tiempo, los sistemas port-Hamiltonianos pueden modelarse como sistemas dinámicos dentro del enfoque comportamental.

Por otro lado, los sistemas port-Hamiltonianos hacen uso de variables de estado para representar a los elementos que almacenan energía. Lo que es más, la relación que expresa el comportamiento del sistema (ecuación 4.16) está expresado en función de estas variables de estado. Entonces, la forma adecuada para presentar los sistemas port-Hamiltonianos dentro del enfoque comportamental es como sistemas dinámicos espacio estado (ver definición 2.9). Para tal fin se establece:

- El eje de tiempo está dado por \mathbb{R} .
- De manera natural escogemos como variables manifiestas a aquellas que caracterizan la interfase externa del sistema con el resto del mundo, es decir aquellas que componen los puertos de potencia externos. Por lo tanto, el espacio de señales manifiestas está dado como $\mathbb{W} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}^*$, donde \mathcal{V} y \mathcal{V}^* representan el espacio de flujos y el espacio de esfuerzos respectivamente.

- De manera natural escogemos como variables latentes aquellas que representan la evolución del almacenamiento de energía, y por tal la memoria del sistema. Por lo tanto, las variables de energía que viven en el manifold de estado \mathcal{X} son las variables latentes.
- El último punto y el más crucial es la definición del comportamiento. Definir el comportamiento significa definir una relación entre la evolución del estado, el estado en si mismo y las variables manifiestas (ver ecuación 2.10). En los sistemas port-Hamiltonianos el comportamiento debe representar el intercambio de energía que es declarado posible a través de sus interconexiones preservantes de energía. Es necesario entonces definir una función que representa la energía del sistema y una estructura Dirac que representa los flujos de energía (internos y externos) del sistema. La relación que representa el comportamiento del sistema es aquella reportada en (4.16).

Finalmente cabe recalcar que, en los modelos port-Hamiltonianos implícitos la física del sistema, es decir el flujo de energía y la estructura de interconexión, no esta escondido sino de que se muestra explícitamente. Lo que es mas, este formalismo permite describir las relaciones diferenciales, que surgen de la evolución del sistema, y las relaciones algebraicas, que surgen de la estructura de interconexión de cualquier sistema dinámico (ecuación 4.16). Y por ultimo, es importante notar que no se ha establecido ninguna causalidad. Como se indico en la introducción del capítulo 1, este concepto no refleja la física del sistema, ya que un sistema solo impone relaciones entre sus variables, NO impone una relación tipo entrada/salida.

4.8 Sistemas port-Hamiltonianos explícitos

En la sección anterior se ha presentado la representación port-Hamiltoniana implícita de los sistemas físicos, esto es, la representación port-Hamiltoniana inherente o intrínseca a cualquier sistema. Esto ha sido posible dado que los conceptos usados para su desarrollo se han basado en propiedades intrínsecas e independientes de coordenadas que son comunes para todos los sistemas físicos.

De otro lado, es muy útil representar el comportamiento dinámico de un sistema por medio de ecuaciones diferenciales, ya sea para fines de simulación, implementación, etc.

Hay varias maneras de representar una estructura Dirac y consecuentemente de escribir las ecuaciones para modelar un sistema port-Hamiltoniano implícito. Cada representación tiene sus propias ventajas y describe en una manera en particular la interconexión preservante de potencia de un sistema. En el presente trabajo se va a usar la llamada *representación Núcleo*, reportada en [5]. Para otras representaciones ver [3], [5], [7].

Antes de dar la representación núcleo de una estructura Dirac es importante establecer la siguiente proposición.

Proposición 4.1. Para cada punto $x \in \mathcal{X}$ de la estructura Dirac \mathcal{D} , se cumple la relación $\dim \mathcal{D}(x) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{V}$.

Prueba. Dado que \mathcal{X} es un manifold suave, entonces se tiene que $\forall x \in \mathcal{X}$
 $dimT_x\mathcal{X} = dimT_x^*\mathcal{X} = dim\mathcal{X}$. Por otro lado de la propiedad de espacios duales se
 tiene que $dim\mathcal{V} = dim\mathcal{V}^*$. Entonces para cada fibra $K(x)$ del bundle Q se cumple:

$$\begin{aligned} dimK(x) &= dim(T_x\mathcal{X} \times T_x^*\mathcal{X} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}^*) = dimT_x\mathcal{X} + dimT_x^*\mathcal{X} + dim\mathcal{V} + dim\mathcal{V}^* \\ dimK(x) &= 2dim\mathcal{X} + 2dim\mathcal{V} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dado que el emparejamiento+ dado en (4.12) es una forma lineal no degenerada en cualquier punto, para cualquier fibra $S(x) \subset T_x\mathcal{X} \times T_x^*\mathcal{X} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}^*$, se cumple $dimS + dimS^\perp = 2dim\mathcal{X} + 2dim\mathcal{V}$. Por otro lado en una estructura Dirac la fibra $\mathcal{D}(x) \subset T_x\mathcal{X} \times T_x^*\mathcal{X} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}^*$ satisface la condición $\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}^\perp(x)$. Entonces, se tiene que:

$$dim\mathcal{D}(x) + dim\mathcal{D}^\perp(x) = 2dim\mathcal{D}(x) = 2dim\mathcal{X} + 2dim\mathcal{V} \quad (4.21)$$

Lo que resulta en:

$$dim\mathcal{D}(x) = dim\mathcal{X} + dim\mathcal{V} = n + m, \forall x \in \mathcal{X} \quad (4.22)$$

Obs. La condición $dim\mathcal{D}(x) = n + m$ esta íntimamente relacionado a la sentencia que establece que la interconexión de un sistema no puede determinar al mismo tiempo el flujo y el esfuerzo (este resultado es similar a la propiedad que establece que un lazo

que uno de los sistemas no puede establecer al mismo tiempo el flujo y el esfuerzo, ver el concepto de causalidad del capítulo anterior para mayor detalle).

La representación núcleo de una estructura Dirac \mathcal{D} establece que es posible encontrar localmente alrededor de cada punto $x \in \mathcal{X}$, dos matrices $F(x)$ y $E(x)$ ambas de dimensión $(n+m) \times (n+m)$ que depende suavemente en \mathcal{X} , tal que se cumpla:

$$\mathcal{D}(x) = \{(v, v^*, f, e) \in T_x \mathcal{X} \times T_x^* \mathcal{X} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \mid F(x) \begin{pmatrix} v \\ f \end{pmatrix} + E(x) \begin{pmatrix} v^* \\ e \end{pmatrix} = 0\} \quad (4.23)$$

$$\text{rango}[F(x) : E(x)] = n + m \quad (4.24)$$

Además, dado que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$, se establece la siguiente relación:

$$E(x)F^T(x) + F(x)E^T(x) = 0 \quad (4.25)$$

Las matrices $E(x)$ y $F(x)$ que satisfacen las ecuaciones anteriores son comúnmente llamadas la representación núcleo de una estructura Dirac. Considerando la definición de un sistema port-Hamiltoniano implícito (ecuación 4.16), la representación núcleo de un sistema port-Hamiltoniano implícito puede escribirse como:

$$F(x) \begin{pmatrix} -\dot{x} \\ f \end{pmatrix} + E(x) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ e \end{pmatrix} = 0 \quad (4.26)$$

Donde las matrices $F(x)$ y $E(x)$ satisfacen las ecuaciones (4.24) y (4.25) para la estructura Dirac correspondiente al sistema port-Hamiltoniano implícito.

En orden de incluir disipación, tal como se vio en los sistemas port-Hamiltonianos implícitos, se conectan a la estructura de Dirac los puertos de los elementos que disipan energía, por lo tanto las variables conjugadas de potencia que no dependen del estado del sistema consta de dos partes:

$$f = (f_P, f_R) \quad e = (e_P, e_R) \quad (4.27)$$

Donde el subíndice P denota la parte de variables de potencia asociadas a la potencia de los puertos para la interacción con el mundo externo, mientras que el subíndice R denota la parte de las variables de potencia asociada a los elementos disipativos.

Además, es posible dividir las matrices $F(x)$ y $E(x)$ en orden de hacer explícita la presencia de disipación y obtener una representación núcleo de un sistema port-Hamiltoniano implícito con disipación:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_S(x) & F_P(x) & F_R(x) \end{pmatrix}}_{F(x)} \begin{pmatrix} -\dot{x} \\ f_P \\ f_R \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} E_S(x) & E_P(x) & E_R(x) \end{pmatrix}}_{E(x)} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ e_P \\ e_R \end{pmatrix} = 0 \quad (4.28)$$

Donde las matrices $F(x)$ y $E(x)$ se han dividido en tres partes: una parte relativa al almacenamiento de energía, una parte relativa a los puertos de potencia para la interacción con el mundo externo y una parte relativa a la disipación de energía.

En caso que no haya restricciones algebraicas en las variables de estado, las matrices $F(x)$ y $E(x)$, como se muestra en [5], asumen la siguiente forma:

$$F_S(x) = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_P(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_R(x) = \begin{pmatrix} g_R(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$E_S(x) = \begin{pmatrix} J(x) \\ -g_R^T(x) \\ -g^T(x) \end{pmatrix} \quad E_P(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{|P|} \end{pmatrix} \quad E_R(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{|R|} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde $J(x)$ es una matriz anti-simétrica, $|R|$ es la dimensión del espacio de elementos disipativos, $|P|$ es la dimensión del puerto de potencia externo.

Por otro lado, las variables de flujo y esfuerzo de los elementos resistivos o disipativos, tal como se reporta en [5], tienen la siguiente relación:

$$f_R = -\tilde{R}(x)e_R \quad (4.30)$$

Donde $\tilde{R}(x)$ es una matriz simétrica positiva semidefinida. Entonces, sustituyendo las ecuaciones (4.29) y (4.30) en (4.28), se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$-\dot{x} + g(x)f_P + g_R(x)f_R + J(x)\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (4.31)$$

$$-g_R^T(x)\frac{\partial H}{\partial x} + e_R = 0 \quad (4.32)$$

$$-g^T(x)\frac{\partial H}{\partial x} + e_P = 0 \quad (4.33)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.32) y (4.33) en (4.31) obtenemos:

$$\dot{x} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x} - \underbrace{g_R^T \tilde{R}(x) g_R(x)}_{R(x)} \frac{\partial H}{\partial x} + g(x)f_P \quad (4.34)$$

Finalmente, despejando la variable e_P en (4.33) y acomodando la expresión (4.34) obtenemos el sistema de ecuaciones (4.35), que son la representación explícita de un sistema port-Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x} + g(x)f_P \\ e_P &= g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Donde $R(x) = g_R^T(x)\tilde{R}(x)g_R(x)$ es una matriz simétrica positiva semidefinida que representa la disipación del sistema.

4.9 Descripción comportamental de los sistemas port-Hamiltonianos explícitos

Finalmente, como en el caso de los sistemas port-Hamiltonianos implícitos, es posible dar una interpretación comportamental a los sistemas port-Hamiltonianos explícitos.

Debido a la naturaleza dinámica de un sistema port-Hamiltoniano y a la presencia de los puertos externos de potencia (que representa las entradas y salidas del sistema) y las variables de estado. La forma adecuada para presentar a los sistemas port-Hamiltonianos explícitos en el enfoque comportamental es como sistemas dinámicos entrada-estado-salida (ver definición 2.11).

Definición 4.8 (Sistema port-Hamiltoniano explícito). Un sistema port-Hamiltoniano explícito es un sistema dinámico I/S/O continuo en el tiempo definido por el quintuplo $(\mathbb{R}, \mathcal{U} \times \mathcal{Y}, \mathcal{X}, \mathcal{B}_f)$ donde:

- \mathbb{R} representa el eje de tiempo.
- \mathcal{X} es un manifold de dimensión n que representa el espacio estado, en donde se definen las variables de energía.
- \mathcal{U} es el espacio vectorial de la entrada, la entrada es una variable conjugada de potencia.
- $\mathcal{Y} = \mathcal{U}^*$ es el espacio vectorial de la salida, la salida es una variable conjugada dual de la entrada.

- \mathcal{B}_f es el comportamiento del sistema.

El comportamiento completo se obtiene de la relación (4.35) donde además se considera $u = f_p$ y $e_p = y$, como la entrada y salida respectivamente (como se recuerda $p = (e_p, f_p)$ es el puerto de potencia externo). Entonces el comportamiento esta dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \\ y = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \end{cases} \quad (4.36)$$

Donde:

- $x = (x_1, \dots, x_n)$ denota el vector de variables de energía, que son las coordenadas en el manifold de estado \mathcal{X} .
- $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas y salidas respectivamente.
- $H(x) = H(x_1, \dots, x_n)$ es la energía total almacenada del sistema.
- $\frac{\partial H}{\partial x}(x)$ denota el vector gradiente de H , es de tamaño $n \times 1$.
- $J(x) = -J^T(x)$ es una matriz anti-simétrica de tamaño $n \times n$, que representa las interconexiones internas preservantes de potencia.
- $R(x) = R^T(x)$ es una matriz simétrica positiva semidefinida de tamaño $n \times n$, que representa la disipación del sistema.

- $g(x)$ es una matriz de tamaño $n \times m$ que describe la manera en que la potencia que viene del mundo externo se distribuye en el sistema.

Observación. De ahora en adelante cuando se mencione el término sistemas port-Hamiltonianos nos estaremos refiriendo a los sistemas port-Hamiltonianos explícitos.

Ejemplo 4.1. Consideremos el oscilador que se estudio en la sección 4.2. Se desea determinar el modelo port-Hamiltoniano de tal sistema, definiendo como entrada u la fuerza que actúa en la masa y como salida y la velocidad de la masa. Las variables de energía están dado por x y p , la elongación del resorte y el momento de la masa. Entonces el vector de variables de energía esta dado por:

$$x = [x, p] \quad (4.37)$$

Además se menciona que la función Hamiltoniana tiene la forma:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \quad (4.38)$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema se van a usar las leyes de Newton de movimiento. Para el resorte se tiene:

$$\dot{x} = v_{masa} = \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (4.39)$$

Para la masa se tiene:

$$\dot{p} = u - kx = u - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.40)$$

Entonces de (4.39) y (4.40) se tiene el modelo port-Hamiltoniano del oscilador

:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ejemplo 4.2. Consideremos el motor DC (ver figura 4.7) con fricción. Donde se define el voltaje $u = V$ como entrada, y como salida la corriente $y = I$. Se nota que estas variables conforma el puerto externo del sistema.

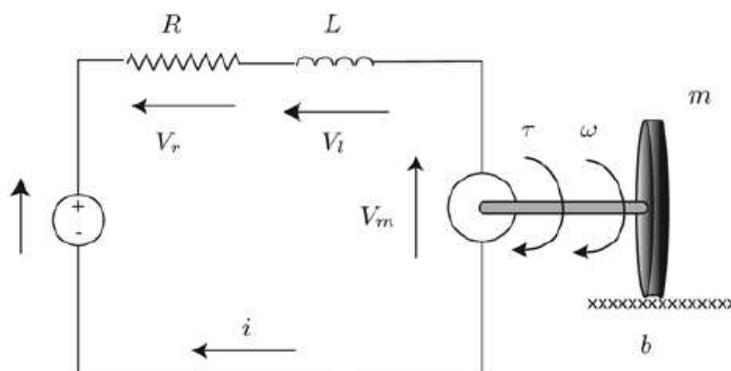


Figura 4.7. Motor DC con fricción

Las variables de energía son el flujo ϕ del inductor y el momento angular p de la carga. Entonces el vector de estado esta dado por.

$$x = [\phi, p] \quad (4.42)$$

La energía total del sistema esta dada por la suma de la energía magnética del inductor más la energía de la carga:

$$H = \frac{\phi^2}{2L} + \frac{p^2}{2I} \quad (4.43)$$

Donde L y I representan la inductancia del circuito y la inercia de la carga.

Para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema se van a usar las ecuaciones que rigen la dinámica del motor en el dominio eléctrico y mecánico. Se recuerda que la derivada del flujo de un inductor esta dado por: $\dot{\phi} = V$

$$\dot{\phi} = V - Ri - kw = -k \frac{\partial H}{\partial p} - R \frac{\partial H}{\partial \phi} + u \quad (4.44)$$

$$\dot{p} = ki - bw = k \frac{\partial H}{\partial \phi} - b \frac{\partial H}{\partial p} \quad (4.45)$$

Entonces de (4.44) y (4.45) se tiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \phi} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_p \quad (4.46)$$

$$f = [1 \ 0] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \phi} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad R(x) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

La matriz $J(x)$ es constante y representa la interconexión energética debido al acoplamiento entre la parte eléctrica y la parte mecánica. El esfuerzo del puerto esta dado por la entrada del voltaje y el flujo de salida es la corriente respectiva.

Capítulo 5.

Control de los Sistemas Port-Hamiltonianos

5.1 Introducción

Se ha visto que el marco port-Hamiltoniano es muy adecuado para el modelamiento de sistemas físicos. De hecho la gran ventaja traída por el formalismo port-Hamiltoniano es que todas las propiedades energéticas (la energía almacenada, la estructura de interconexión y la disipación inherente) del sistema son muy evidentes y se muestran de manera explícita. Por tal se puede explotar esta característica para propósitos de control, en especial para el desarrollo de nuevos algoritmos de control basados en la energía.

Por otro lado se sabe que la “forma” de la energía esta relacionada con las propiedades de estabilidad de un sistema. De hecho, se conoce muy bien de la física, que cada configuración (local) caracterizada por un mínimo de la energía exhibe un comportamiento estable (localmente). Desafortunadamente la configuración que naturalmente corresponde a un mínimo de energía es rara vez la configuración deseada que se desea lograr.

Las principales estrategias de control que se presentan en el formalismo port-Hamiltoniano se basan en el llamado moldeamiento de energía. El controlador se interpreta como un dispositivo que intercambia energía con la planta, diseñado de tal manera tal que el sistema controlado puede aun ser interpretado como un sistema dinámico con una función de energía cuyo mínimo corresponde a la configuración deseada de la planta.

En este capítulo se mostraran las principales técnicas de control basados en energía para los sistemas port-Hamiltonianos. Primeramente se mostrara la conexión entre los sistemas port-Hamiltonianos y los sistemas pasivos. Así, se reportaran los conceptos básicos de pasividad, para luego demostrar que los sistemas port-Hamiltonianos son también sistemas pasivos. Entonces se aprovecharan las propiedades y técnicas de control que se heredan de los sistemas pasivos para el diseño de los controladores port-Hamiltonianos. Lo que es mas, se podrá dar una interpretación energética clara al controlador y el sistema controlado.

Por otro lado se mostrara la técnica de control como interconexión, en la que el controlador se interpreta como un sistema dinámico. De hecho el controlador estará dado por otro sistema port-Hamiltoniano, y se demostrara que la interconexión entre dos sistemas port-Hamiltonianos resulta en otro sistema port-Hamiltoniano. Entonces se hará uso de unas funciones especiales, llamadas Casimir, que tienen la característica de que son determinados solo por la estructura del sistema para el diseño del controlador. Finalmente se analizaran las similitudes que se presentan entre la técnica de control por interconexión y la técnica basada en la pasividad.

En ambas técnicas de control presentadas anteriormente se mostrara que el principal inconveniente es el llamado obstáculo por disipación, que se presenta cuando un sistema es capaz de disipar una cantidad infinita de energía. Entonces, se demostrara que esta limitación se puede superar explotando la estructura port-Hamiltoniana, moldeando no solo la forma de la función energía de lazo cerrado sino que además asignando la estructura de interconexión y la estructura de disipación inherente dando lugar al llamado control por interconexión y asignamiento de amortiguación basado en la pasividad.

5.2 Control basado en la pasividad

5.2.1 Conceptos básicos de la teoría de pasividad

Consideremos un sistema dinámico I/S/O no lineal representado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$H : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.1)$$

Donde $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$ e $y \in \mathcal{Y}$ son las variables de estado, entrada y salida respectivamente, con \mathcal{X} , \mathcal{U} y \mathcal{Y} los espacios de estado, entrada y salida respectivamente. Además, f y g son vectores campo suave y h es un mapeo suave. Se asume que el sistema tiene al menos una configuración de equilibrio, sin pérdida

de generalidad se puede tomar el punto $x=0$ como punto de equilibrio. La función $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u)$ denotara el valor del estado en el tiempo $t \geq 0$ desde un estado inicial $x(0) = x_0$, tiempo inicial t_0 y bajo la acción de la entrada u .

Definición 5.1 (Tasa de suministro). Es un mapeo w definido en $\mathcal{U} \times \mathcal{Y}$ como:

$$w: \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.2)$$

Tal que para todo $u(t) \in \mathcal{U}$ y $y(t) \in \mathcal{Y}$, $w(t) = w(u(t), y(t))$ satisface:

$$\int_{t_0}^{t_1} |w(t)| dt < \infty, \quad \forall t_1 \geq t_0 \geq 0 \quad (5.3)$$

Definición 5.2 (Sistema disipativo). Un sistema de la forma (5.1) se dice que es disipativo con respecto a una tasa de suministro w si existe una función continua $S: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$, llamada función de almacenamiento, tal que para todo $u \in \mathcal{U}$, $x_0 \in \mathcal{X}$ y $t \geq 0$, la siguiente relación, llamada desigualdad de disipación toma lugar:

$$S(x(t)) - S(x_0) \leq \int_0^t w(t) dt \quad (5.4)$$

La condición (5.4) establece que un sistema es disipativo si el incremento en su energía (función de almacenamiento) en el intervalo (t_0, t_1) no es mayor que la

energía suministrada (vía la tasa de suministro) al sistema. Si la función de almacenamiento es diferenciable (tipo C^1), entonces (5.4) se puede escribir como:

$$\frac{dS(x(t))}{dt} \leq w(t) \quad (5.5)$$

Que indica que la tasa de incremento de energía no es mayor que el flujo de energía (potencia) de entrada.

Un concepto importante relacionado a los sistemas disipativos es la noción de almacenamiento disponible que puede ser definida como sigue:

Definición 5.3 (Almacenamiento disponible). El almacenamiento disponible de un sistema con tasa de suministro w es la función $S_a : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definido como:

$$S_a(x) = \sup_{x_0=x, u \in \mathcal{U}, t \geq 0} \left\{ -\int_0^t w(u(t), y(t)) dt \right\} \quad (5.6)$$

Es importante notar que el almacenamiento disponible no es negativo dado que es el supremo sobre un conjunto de números que contienen el elemento cero (cuando $t = 0$). El almacenamiento disponible tiene un rol importante en los sistemas disipativos tal como se ve a continuación.

Proposición 5.1. Si un sistema es disipativo con respecto a la tasa de suministro w , entonces el almacenamiento disponible $S_a(x)$ es finito para cada $x \in \mathcal{X}$; y además, cualquier posible función de almacenamiento $S(x)$ satisface:

$$0 \leq S_a(x) \leq S(x) \quad (5.7)$$

Si S_a es continuo, entonces S_a es a la vez una función de almacenamiento.

De la misma manera, si $S_a(x)$ es finito para cada $x \in \mathcal{X}$ y es continuo, entonces el sistema es disipativo.

Definición 5.4 (Sistema pasivo). Un sistema se dice que es pasivo si este es disipativo con respecto a la tasa de suministro $w(u(t), y(t)) = y^T(t)u(t)$, y la función de almacenamiento $S(x)$ satisface $S(0) = 0$.

Entonces, para cualquier sistema pasivo la desigualdad de disipación resulta:

$$S(x(t)) - S(x_0) \leq \int_0^t y^T(t)u(t)dt \quad (5.8)$$

Además, derivando la ecuación anterior y haciendo $u = 0$ se tiene:

$$\dot{S}(x(t)) \leq y^T(t)u(t) \leq 0 \quad (5.9)$$

Que expresa el hecho que la función de almacenamiento decrece a lo largo de las trayectorias del sistema. Además, como $S(x)$ es positiva definida se puede notar claramente que el punto $x = 0$ es estable según Lyapunov.

Es muy útil distinguir las siguientes clases de sistemas pasivos.

Definición 5.5 (Sistemas sin pérdidas). Un sistema pasivo con función de almacenamiento $S(x)$ no tiene pérdidas si para todo $u \in \mathcal{U}$ y para todo $x_0 \in \mathcal{X}$ y $t \geq 0$ se cumple:

$$S(x(t)) - S(x_0) = \int_0^t y^T(t)u(t)dt \quad (5.10)$$

Definición 5.6 (Sistemas estrictamente pasivos). Un sistema pasivo con función de almacenamiento S es estrictamente pasivo si existe una función definida positiva $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para todo $u \in \mathcal{U}$, $x_0 \in \mathcal{X}$ y $t \geq 0$:

$$S(x(t)) - S(x_0) = \int_0^t y^T(t)u(t)dt - \int_0^t V(x(t))dt \quad (5.11)$$

Observación 5.1. Un sistema sin pérdidas almacena toda la energía que se le provee, mientras que un sistema estrictamente pasivo disipa parte de esta energía (la cantidad de energía que es disipada es dado por $\int_0^t V(x(t))dt$).

Una de las más importantes propiedades de los sistemas pasivos esta relacionado a la siguiente definición, que nos será muy útil para relacionar el concepto de pasividad y los sistemas port-Hamiltonianos.

Definición 5.7 (Propiedad Kalman-Yacubovich-Popov KYP). Un sistema no lineal descrito por (5.1) se dice que disfruta la propiedad KYP si existe una función de tipo C^1 no negativa $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $S(0) = 0$ tal que:

$$L_f S(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x) \leq 0 \quad (5.12)$$

$$L_g S(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x) = h^T(x) \quad (5.13)$$

Para cada $x \in \mathcal{X}$.

Los términos $L_f S(x)$ y $L_g S(x)$ son llamados la derivada de Lie de $S(x)$ con respecto a los vectores campo f y g .

Proposición 5.2. Si un sistema presenta la propiedad KYP entonces este sistema es pasivo, con una función de almacenamiento dada por $S(x)$. De la misma manera, si un sistema es pasivo con una función de almacenamiento $S(x)$ de tipo C^1 , este presenta la propiedad KYP.

Prueba. Si el sistema presenta la propiedad KYP entonces:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x} f(x) + \frac{\partial S}{\partial x} g(x)u(t) \\ &= L_f S(x) + L_g S(x)u(t) \leq L_g S(x)u(t) = y^T(t)u(t)\end{aligned}\quad (5.14)$$

Así, el sistema es pasivo con una función de almacenamiento $S(x)$.

Por otro lado, si un sistema es pasivo con una función de almacenamiento tipo C^1 , la siguiente desigualdad toma lugar:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} f(x) + \frac{\partial S}{\partial x} g(x)u \leq y^T(t)u(t) \quad (5.15)$$

Que claramente implica (5.12) y (5.13).

Se debe notar que el término $L_f S(x(t))$ representa la disipación presente en el sistema y el término $L_g S(x(t))u(t) = y^T(t)u(t)$ representa la potencia que se suministra al sistema. Entonces se tiene que:

- En un sistema sin pérdidas se cumple que $L_f S(x(t)) = 0$, es decir no hay disipación y toda la energía suministrada es almacenada.
- En un sistema estrictamente pasivo se cumple que $L_f S(x(t)) = -V(x)$, que representa la energía que se disipa. Además, la función de almacenamiento es

positiva definida haciendo que el punto de equilibrio $x = 0$ sea asintóticamente estable según Lyapunov.

Es posible explotar la propiedad KYP para dar una definición diferencial alternativa de un sistema pasivo:

Definición 5.8. Un sistema es pasivo si la potencia suministrada es almacenada o disipada, esto es:

$$P = \frac{dS}{dt} + P_{disipada} \quad (5.16)$$

Donde $S(x)$ es la función de almacenamiento, $P = L_g S(x)u = y^T u$ es la potencia suministrada y $P_{disipada} = -L_f S(x(t)) > 0$ es la potencia disipada.

5.2.2 Estabilización de sistemas pasivos por retroalimentación de salidas

Los sistemas pasivos han sido y son estudiados constantemente debido a la atractiva conexión entre el concepto de pasividad y el concepto de estabilidad según Lyapunov, como se muestra en [16, 21]. El objetivo de esta sección es mostrar como es posible estabilizar asintóticamente un sistema pasivo en su punto de equilibrio (que de nuevo se supone existe y esta en $x = 0$).

Definición 5.9 (Detectabilidad y observabilidad estado cero). Un sistema descrito por (5.1) se dice que es localmente estado cero detectable si existe un vecindario $U \subset \mathcal{X}$ de 0 tal que, para todo $x \in U$:

$$\text{Si } y(t) = h(\Phi(t, x, 0)) = 0, \forall t \geq 0 \quad \text{implica} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x, 0) = 0 \quad (5.17)$$

Si $U = \mathcal{X}$ entonces el sistema se dice que es estado cero detectable (ZSD).

Un sistema es localmente estado cero observable si existe un vecindario $U \subset \mathcal{X}$ del punto 0 tal que para todo $x \in U$:

$$\text{Si } y(t) = h(\Phi(t, x, 0)) = 0, \forall t \geq 0 \quad \text{implica} \quad x = 0 \quad (5.18)$$

Si $U = \mathcal{X}$ entonces el sistema se dice que es estado cero observable (ZSO).

Definición 5.10 (Función apropiada). Una función no negativa $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es apropiada si para cada $a > 0$ el conjunto:

$$S^{-1}([0, a]) = \{x \in \mathcal{X} \mid 0 \leq S(x) \leq a\} \quad (5.19)$$

Es compacto.

Las funciones apropiadas son también llamadas funciones radialmente sin límites.

Teorema 5.1 (Estabilización asintótica por retroalimentación de salidas).

Consideremos un sistema descrito por (5.1) que sea pasivo con una función positiva definida de almacenamiento $S(x)$, que sea localmente estado cero detectable y que admita $x=0$ como una configuración de equilibrio. Sea $\phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$ una función suave tal que $\phi(0)=0$ y $y^T \phi(y) > 0$ para cada $y \neq 0$. La ley de control:

$$u = -\phi(y) \tag{5.20}$$

Estabiliza asintoticamente el punto de equilibrio. Si además, el sistema es estado cero detectable y S es apropiado, entonces la ley de control dado por (5.20) estabiliza asintoticamente y globalmente el sistema.

Hay muchos corolarios del Teorema 5.1, uno de los más importantes es el siguiente:

Colorario 5.1. Supongamos que un sistema, que admite $x=0$ como una configuración de equilibrio, no tiene pérdidas con al menos una función de almacenamiento C^1 definida positiva S . Si el sistema es estado cero observable entonces para cada $k > 0$ la ley de control $u = -ky$ globalmente estabiliza asintoticamente el punto de equilibrio $x=0$.

5.2.3 Sistemas port-Hamiltonianos y la pasividad

En esta sección se dará una prueba formal de las propiedades de pasividad de un sistema port-Hamiltoniano para luego explotar esta característica para propósitos de control. Para esto es importante dar una interpretación energética de los sistemas disipativos, ya que los conceptos utilizados en los sistemas port-hamiltonianos están basados en términos de energía.

La tasa de suministro w y la función de almacenamiento S pueden ser vistas como potencia generalizada y la energía generalizada respectivamente. De manera natural para los sistemas port-Hamiltonianos la potencia generalizada esta dada por la potencia, y la energía generalizada coincide con energía. Por otro lado el par (u, y) que representa (a través de la función de tasa de suministro) el medio a través del cual el sistema puede intercambiar energía generalizada, en el formalismo port-Hamiltoniano esta dado por el puerto de potencia que es el medio a través del cual el sistema intercambia energía. Así, la tasa de suministro esta dado por:

$$w(u(\tau), y(\tau)) = \langle u(\tau), y(\tau) \rangle, \quad u \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{Y} = \mathcal{U}^* \quad (5.21)$$

Usando la definición 4.3 establecida en el capítulo anterior. El producto dual intrínseco definido en \mathcal{U} e $\mathcal{Y} = \mathcal{U}^*$ se puede expresar como:

$$\langle u, y \rangle = y^T u \quad (5.22)$$

En resumen, en los sistemas port-Hamiltonianos la tasa de suministro esta dada por el flujo de potencia, y la función de almacenamiento S esta dada por la energía almacenada en el sistema.

Una vez establecido los conceptos anteriores, consideremos un sistema port-Hamiltoniano con disipación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \tag{5.23}$$

El enlace entre el concepto de pasividad y los sistemas port-Hamiltonianos se establece en la siguiente proposición:

Proposición 5.3. Un sistema port-Hamiltoniano con disipación es un sistema pasivo, donde la función de almacenamiento esta dado por la función Hamiltoniana.

Prueba. Un sistema port-Hamiltoniano con disipación puede ser interpretado como un sistema dado en (5.1) estableciendo:

- $f(x) = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x}$
- $g(x) = g(x)$

- $h(x) = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}$

La siguiente relación toma lugar:

$$L_{(J(x)-R(x))\frac{\partial H}{\partial x}} H(x) = \frac{\partial^T H}{\partial x} (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial^T H}{\partial x} R(x) \frac{\partial H}{\partial x} \leq 0 \quad (5.24)$$

Donde se ha explotado la propiedad de anti-simetría de $J(x)$ (que establece que $x^T Ax = 0, \forall x$ si la matriz A es anti-simétrica) y la desigualdad sigue del hecho que $R(x)$ es positiva semi-definida. Es más, se cumple que:

$$L_g H(x) = \frac{\partial^T H}{\partial x} g(x) = (g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x})^T = h^T(x) \quad (5.25)$$

Entonces se demuestra que un sistema port-Hamiltoniano con disipación disfruta la propiedad KYP y consecuentemente, aplicando la Proposición 5.2, un sistema port-Hamiltoniano con disipación es un sistema pasivo.

Si además $R(x) = 0$, es decir si no hay disipación en el sistema, se tiene:

$$L_{(J(x)-R(x))\frac{\partial H}{\partial x}} H(x) = 0 \quad (5.26)$$

Por lo tanto, un sistema port-Hamiltoniano sin disipación es un sistema sin pérdidas. Es más, si $R(x)$ es positiva definida, el sistema port-Hamiltoniano es estrictamente pasivo. Así, la no disipación, pasividad y estricta pasividad de un sistema port-Hamiltoniano puede ser determinado chequeando el signo de la matriz $R(x)$. De hecho, usando la definición 5.8, se puede obtener la siguiente relación:

$$P = y^T u = \frac{dH}{dt} + \underbrace{\frac{\partial^T H}{\partial x} R(x) \frac{\partial H}{\partial x}}_{P.\text{disipada}} \quad (5.27)$$

El signo de la potencia disipada depende de $R(x)$. Si $R(x)$ es positiva definida, $P_{dis} > 0$ que expresa que cierta potencia es siempre disipada por el sistema y que consecuentemente el sistema es estrictamente pasivo. Si $R(x) = 0$ entonces $P_{dis} = 0$ que significa que no hay disipación y que consecuentemente el sistema no tiene pérdidas. Si $R(x)$ fuese negativo definido, $P_{dis} < 0$ que significa que el sistema no es pasivo dado que hay cierta producción interna de energía.

Observación 5.2. En general, los sistemas port-Hamiltonianos están caracterizados por un límite inferior, no necesariamente no negativo de la función Hamiltoniana, es decir hay una constante finita positiva $\zeta \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$H(x) \geq -\zeta \quad (5.28)$$

En este caso es aun posible probar que un sistema port-Hamiltoniano es un sistema pasivo considerando $H^*(x) = H(x) + \zeta$ como función de almacenamiento.

5.2.4 Estabilización por inyección de amortiguación

Una vez establecido que los sistemas port-Hamiltonianos son sistemas pasivos, es posible aprovechar las propiedades que se heredan de estos últimos para propósitos de control. En especial, aplicando el Teorema 5.1, es posible estabilizar asintoticamente una configuración de equilibrio de un sistema port-Hamiltoniano correspondiente a un punto mínimo (local) de la función Hamiltoniana mediante la siguiente ley de control:

$$u = -ky \tag{5.29}$$

Esta clase de control se llama estabilización por inyección de amortiguamiento. El nombre sigue del hecho que la acción de control se puede interpretar físicamente como la adición de cierta amortiguación a la planta.

Entonces, considerando un sistema port-Hamiltoniano con disipación (5.23) y aplicando la ley de control $u = -ky, k > 0$, el sistema controlado esta dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x} - kg(x)g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x} \\
&= [J(x) - (R(x) + kg(x)g^T(x))] \frac{\partial H}{\partial x}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Tal como se puede observar, la inyección de amortiguamiento adiciona al sistema cierta disipación extra que es modelada por la matriz simétrica positiva semidefinida $kg(x)g^T(x)$.

Observación 5.3. En presencia de amortiguamiento, el estado del sistema evoluciona hacia una configuración correspondiente al mínimo de la función Hamiltoniana. La tasa de convergencia esta determinada por la cantidad de energía que es extraída desde el sistema. Entonces, introduciendo disipación adicional al sistema (por ejemplo, por inyección de amortiguación) permite incrementar la tasa por el que el sistema evoluciona hacia la mínima configuración de energía.

Ejemplo 5.1 (Oscilador lineal). Consideremos el oscilador lineal compuesto de una masa y un resorte descrito en el Ejemplo 4.1. El modelo port-Hamiltoniano del sistema esta dado por:

$$\begin{aligned}
x_s &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\
y &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

La entrada u es la fuerza que actúa en la masa y la salida y es la velocidad de la masa. Donde la función Hamiltoniana tiene la siguiente expresión:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \quad (5.32)$$

De (5.31) es fácil de ver que el punto $(0,0)$ es un punto de equilibrio, así, este es un punto mínimo global de la función hamiltoniana. Es posible hacer el análisis de estabilidad del punto de equilibrio. Tomando como función candidata de Lyapunov el Hamiltoniano del sistema, la siguiente relación toma lugar:

$$H(x, p) > 0 \quad \forall x \neq 0, \forall p \neq 0 \quad H(0,0) = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_s} \dot{x}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial^T H}{\partial x} & \frac{\partial^T H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.33)$$

Así, se tiene que el punto de equilibrio es estable según Lyapunov pero no es asintóticamente estable. Es posible estabilizar asintóticamente el punto de equilibrio por inyección de amortiguación considerando la siguiente ley de control:

$$u = -ky = -k(0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

El sistema controlado es aun un sistema port-Hamiltoniano y esta representado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Se observa que el estado $(0,0)$ es aun un punto de equilibrio. Entonces, haciendo nuevamente el análisis de estabilidad considerando como función candidata de Lyapunov para el sistema controlado la función Hamiltoniana, la siguiente relación toma lugar:

$$\begin{aligned} H(x, p) &> 0 \quad \forall x \neq 0, \forall p \neq 0 \quad H(0,0) = 0 \\ \frac{dH}{dt} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^T H}{\partial x} & \frac{\partial^T H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} \frac{\partial^T H}{\partial x} & \frac{\partial^T H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \\ \frac{dH}{dt} &= -k \begin{pmatrix} \frac{\partial^T H}{\partial x} & \frac{\partial^T H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Ya que la derivada no es negativa definida no se puede afirmar que el sistema es asintoticamente estable, sin embargo se puede usar el Teorema de LaSalle,

reportado en [16], para tal fin. Para esto, se debe notar que el conjunto donde la derivada del tiempo del Hamiltoniano es igual a cero esta dado por:

$$Z = \{(x, p) \mid \dot{H}(x) = 0\} \quad (5.37)$$

Se puede probar que no existe otra solución de (5.37) que pueda permanecer idénticamente en Z excepto la solución trivial $x_s(t) = \{x, p\} = 0$. Por lo tanto, por el principio de Invariancia de LaSalle, el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

El control por inyección de amortiguamiento tiene una clara interpretación física. Desde que el principal objetivo de la inyección de amortiguamiento es introducir alguna disipación al sistema, el controlador puede ser interpretado como un amortiguador virtual que es adicionado a la masa que esta compuesta al oscilador, como se representa en la siguiente figura:

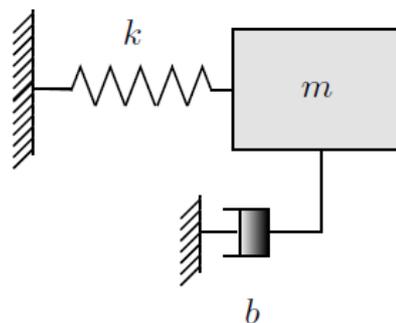


Figura 5.1. Estabilización por inyección de amortiguación de un oscilador

5.2.5 Control por moldeamiento de energía basado en pasividad

En la sección anterior se ha mostrado que el mínimo estricto de la función de energía corresponde a la configuración de equilibrio estable, y que además esta configuración puede ser estabilizada asintóticamente vía inyección de amortiguación.

El problema que se presenta, es que frecuentemente se requiere estabilizar un sistema port-Hamiltoniano en una configuración que no corresponde al mínimo estricto de la función de energía. Por lo tanto es necesario diseñar un controlador cuya tarea es cambiar la forma de la función de energía del sistema controlado en orden de tener un mínimo estricto en la configuración de interés. Para luego, poder estabilizar asintóticamente la nueva configuración mínima de energía por medio de inyección de amortiguamiento. Esta estrategia de control se llama *moldeamiento de energía + inyección de amortiguación*, reportado en [4], que tal como se acaba de ver consiste de dos pasos:

- a) **Moldeamiento de energía:** Moldear la energía de la planta por medio de una apropiada ley de control en orden de obtener un nuevo sistema con un mínimo estricto en la configuración deseada.

- b) **Inyección de amortiguación:** Adicionar disipación al sistema controlado vía inyección de amortiguación en orden de estabilizar asintóticamente la configuración deseada.

Considerando el sistema port-Hamiltoniano representado en (5.23). El siguiente balance de energía se obtiene integrando la ecuación (5.27):

$$\begin{aligned} H(x(t)) - H(x(0)) &= \int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau - \int_0^t \frac{\partial^T H}{\partial x} R(x) \frac{\partial H}{\partial x} d\tau \\ &= \int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau - d(t) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Donde x es el estado del sistema y $H(x)$ es la función de energía total. Las entradas y salidas son variables conjugadas de potencia y $d(t)$ es una función no negativa que representa la disipación natural que esta presente en el sistema.

El problema de control por moldeamiento de energía mas inyección de amortiguación puede ser formalizado en términos de retroalimentación de estado como:

Sea x^* una configuración deseada de equilibrio. La idea es seleccionar una acción de control $u = \beta(x) + v$ tal que la dinámica de lazo cerrado satisfice la nueva ecuación de balance de energía:

$$H_d(x(t)) - H_d(x(0)) = \int_0^t v^T(\tau)z(\tau)d\tau - d_d(t) \quad (5.39)$$

Donde H_d es la función deseada de energía con un mínimo estricto en x^* , con z (que puede ser igual a y) como la nueva salida conjugada de potencia. Es

mas, $d_d(t)$ es la disipación deseada del sistema de lazo cerrado que puede ser asignada por inyección de amortiguación.

Entonces el problema se reduce a encontrar una función $\beta(x)$ tal que se cumpla la expresión (5.39).

Proposición 5.4. Si es posible encontrar una función $\beta(x)$ tal que:

$$-\int_0^t \beta^T(x(\tau))y(\tau)d\tau = H_a(x(t)) + k \quad (5.40)$$

Donde k es una constante positiva, entonces la ley de control, y $u = \beta(x) + v$ es tal que el balance de energía:

$$H_d(x(t)) - H_d(x(0)) = \int_0^t v^T(\tau)y(\tau)d\tau - d(t) \quad (5.41)$$

Se satisface con $H_d(x) = H(x) + H_a(x)$

Prueba. Reemplazando la ley de control $u = \beta(x) + v$ en (5.38), tenemos:

$$H(x(t)) - H(x(0)) = \int_0^t \beta^T(x(\tau))y(\tau)d\tau + \int_0^t v^T(\tau)y(\tau)d\tau - d(t) \quad (5.42)$$

Sustituyendo (5.40) en (5.42), toma lugar la siguiente relación:

$$H(x(t)) - H(x(0)) = -H_a(x(t)) - k + \int_0^t v^T(\tau)y(\tau)d\tau - d(t) \quad (5.43)$$

Se cumple:

$$H(x(t)) + H_a(x(t)) - H(x(0)) + k = \int_0^t v^T(\tau)y(\tau)d\tau - d(t) \quad (5.44)$$

De (5.40) necesariamente se tiene que $H_a(x(0)) = k$, así la ecuación (5.44) puede reescribirse como:

$$H(x(t)) + H_a(x(t)) - H(x(0)) + H_a(x(0)) = \int_0^t v^T(\tau)y(\tau)d\tau - d(t) \quad (5.45)$$

Finalmente, estableciendo $H_d(x(t)) = H(x) + H_a(x(t))$ se obtiene el balance descrito en (5.41).

Observación 5.4. El término $\int_0^t \beta^T(x(\tau))y(\tau)d\tau$ puede ser interpretado como la energía suministrada por el controlador a la planta. Por lo tanto la condición (5.40) expresa el hecho que la energía suministrada por el controlador puede ser expresado como una función del estado.

La energía de lazo cerrado es la diferencia entre la energía almacenada por la planta y la energía suministrada por el controlador ($H(x) - \int_0^t \beta^T(x(\tau))y(\tau)d\tau$), por lo que esta estrategia de moldeamiento de energía es llamada control por balance de energía basado en pasividad (balance de energía PBC).

Si la energía del lazo cerrado $H_a(x)$ tiene un mínimo estricto en la configuración deseada x^* , entonces estableciendo $v=0$, se tiene que x^* es estable con la función de Lyapunov representada por la diferencia entre la energía almacenada por el sistema controlado y la energía suministrada por el controlador tal como se vio en el ejemplo del oscilador.

5.2.6 El obstáculo de disipación

El principal obstáculo del control por balance de energía recae en encontrar $\beta(x)$ y $H_a(x)$ tal que se satisfaga la expresión (5.40). En orden de poner en evidencia del principal inconveniente que presenta esta técnica de control, es más conveniente escribir la (5.40) en su forma equivalente diferencial, es decir:

$$\dot{H}_a(x(t)) = -\beta^T(x(t))y(t) \quad (5.46)$$

Considerando como planta el sistema port-Hamiltoniano representado por la ecuación (5.23), entonces (5.46) puede ser expandido como:

$$\frac{\partial^T H_a}{\partial x} [(J(x(t)) - R(x(t))) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x) \beta(x(t))] = -\beta^T(x(t)) y(t) \quad (5.47)$$

Entonces la condición necesaria para la solubilidad de (5.47) es que $\beta^T(x(t)) y(t)$ desaparezca en correspondencia a todos los ceros de:

$$(J(x(t)) - R(x(t))) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x) \beta(x(t)) \quad (5.48)$$

Que no son otra cosa que las configuraciones de equilibrio que son obviamente ceros, así cada punto de equilibrio \bar{x} debe satisfacer:

$$\beta^T(\bar{x}) y(t) = 0 \quad (5.49)$$

Recordando que $-\beta^T(x(t)) y(t)$ es la potencia extraída por el controlador, la condición (5.49) establece que no debe haber cualquier extracción de potencia en el equilibrio. Esto significa que el balance de energía PBC es aplicable solamente si la energía disipada por el sistema esta limitada y, consecuentemente si este sistema puede ser estabilizado mediante la extracción de una cantidad finita de energía. Esta dificultad, reportada en [4], se conoce como obstáculo por disipación.

Observación 5.5. La condición (5.49) es satisfecha por los sistemas mecánicos dado que estos sistemas tienen que ser regulados en una configuración caracterizada por

velocidad cero. En el caso de circuitos eléctricos y maquinas eléctricas este no es siempre el caso y así el balance de energía PBC puede fallar.

Ejemplo 5.2 (Disipación finita). Consideremos el circuito RLC mostrado en la figura 5.2. Las variables de energía son la carga q en el capacitor y el flujo ϕ en la inductancia; así el estado de el sistema puede escogido como $x = (q, \phi)^T = (x_1, x_2)$.

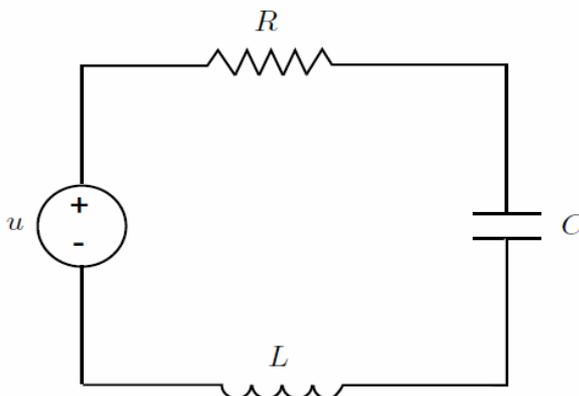


Figura 5.2. Disipación finita de un circuito RLC

La función total de energía del sistema es:

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2C} x_1^2 + \frac{1}{2L} x_2^2 \quad (5.50)$$

Es decir la suma almacenada por el capacitor más la energía almacenada por el inductor. Por otro lado, se puede demostrar que el modelo port-Hamiltoniano del sistema esta dado por:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$
(5.51)

El sistema satisface la ecuación (5.38) con $d(t) = R \int_0^t [(1/L)x_2]^2(\tau) d\tau$, que es la energía disipada por el resistor. De las relaciones constitutivas del sistema se observa que la configuración admisible de equilibrio del sistema tiene la forma $x^* = (x_1^*, 0)^T$. Para ver si es posible aplicar la técnica de balance de energía PBC, se debe chequear si el sistema presenta el obstáculo por disipación. Entonces se tiene comprobando la condición (5.49) se tiene:

$$\beta^T(\bar{x})y(t) = \beta^T(\bar{x}) \cdot \frac{x_2}{L} = 0$$
(5.52)

Lo que indica que en correspondencia con la configuración de equilibrio no hay disipación (es decir, no se presenta el obstáculo de disipación).

En orden de aplicar el balance de energía PBC, se tiene que resolver la ecuación (5.47). En este caso $\beta(x)$ es una función real y resolviendo la ecuación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_a}{\partial x_1} & \frac{\partial H_a}{\partial x_2} \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{C} \\ \frac{x_2}{L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta(x) \right] = -\beta(x) \frac{x_2}{L}$$

De donde se obtiene:

$$\frac{1}{L} x_2 \frac{\partial H_a}{\partial x_1}(x) - \left[\frac{1}{C} x_1 + \frac{R}{L} x_2 - \beta(x) \right] \frac{\partial H_a}{\partial x_2}(x) = -\frac{1}{L} x_2 \beta(x) \quad (5.53)$$

La función energía ya admite como estado mínimo $x_2 = 0$ y así es suficiente modelar la parte de la energía que depende de x_1 . Por lo tanto, se puede considerar una función $H_a = H_a(x_1)$. En este caso la ecuación (5.53) se convierte en:

$$\beta(x_1) = -\frac{\partial H_a}{\partial x_1}(x_1) \quad (5.54)$$

Que, para cualquier $H_a(x_1)$ define una ley de control $u = \beta(x_1)$. Para moldear la función de energía de lazo cerrado en orden de obtener un mínimo estricto en la configuración $(x_1^*, 0)^T$ es suficiente considerar:

$$H_a(x_1) = \frac{1}{2C_a} x_1^2 - \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_a} \right) x_1^* x_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_a} \right) (x_1^*)^2 \quad (5.55)$$

Entonces, la energía de lazo cerrado esta dado por:

$$H_d(x) = H(x) + H_a(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_a} \right) (x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2L} x_2^2 \quad (5.56)$$

Donde claramente se observa que $H_d(x)$ tiene un mínimo en la configuración $(x_1^*, 0)$ para todas las ganancias $C_a > -C$. Así la ley de control esta dado por:

$$u = -\frac{\partial H_a}{\partial x} = -\frac{x_1}{C_a} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_a} \right) x_1^* \quad (5.57)$$

Este controlador estabiliza la configuración de equilibrio x^* . Además, si se desea hacer el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov, es suficiente tomar como la función de Lyapunov aquella que esta dada por la diferencia entre la energía almacenada en el sistema y la energía suministrada por el controlador (5.56). De donde, es fácilmente comprobable que el sistema es asintóticamente estable en el punto de equilibrio.

El balance de energía PBC trabaja bien para el ejemplo anterior desde que la configuración de equilibrio es caracterizado por no disipación de energía y, por lo tanto, el sistema puede ser estabilizado mediante la extracción de una cantidad finita de potencia. De otro lado, es posible que algunos circuitos eléctricos no sean estabilizables con el balance de energía PBC, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3 (Disipación infinita). Consideremos el circuito paralelo RLC (ver figura 5.3). Las variables de energía son la carga q en el capacitor y el flujo ϕ en la inductancia; así el estado del sistema puede ser escogido como $x = (q, \phi)^T = (x_1, x_2)^T$.

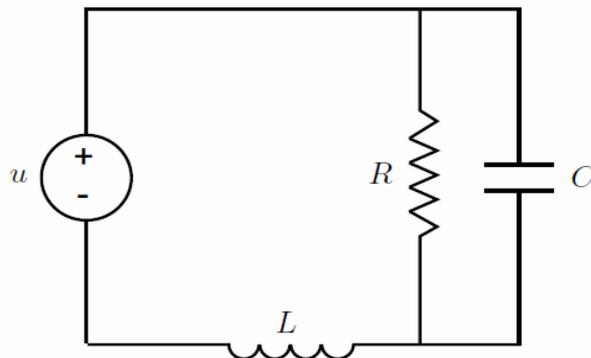


Figura 5.3. Disipación infinita de un circuito RLC

La función de energía total del sistema es:

$$H(x) = \frac{1}{2C} x_1^2 + \frac{1}{2L} x_2^2 \quad (5.58)$$

Y el modelo port-Hamiltoniano del sistema es:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (5.59)$$

$$y = (0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

El sistema satisface (5.38) con $d(t) = R \int_0^t [(1/L)x_2(\tau)]^2 d\tau$, que es la energía disipada por el resistor. De las relaciones constitutivas se tiene que la configuración admisible de equilibrio del sistema tiene la forma $x^* = (Cu^*, (L/R)u^*)^T$. Además, se nota que en correspondencia de la configuración de equilibrio hay disipación (es decir no se cumple la condición $\beta^T(\bar{x})y(t) \neq 0$). Lo que significa que se debe extraer una potencia infinita para estabilizar el sistema. Entonces no se puede usar el balance de energía PCB para este sistema.

El controlador PBC basado en energía moldea (a través de retroalimentación de estados) la energía de la planta dándole a esta la forma deseada. Es posible dar una interpretación física al control por balance de energía PBC y relacionar el obstáculo de disipación con las propiedades físicas de la planta. Para este objetivo, es necesario dar una interpretación geométrica de la estrategia de control y esto puede ser hecho usando control como interconexión que se presenta a continuación.

5.3 Control por interconexión

5.3.1 Conceptos básicos

En la teoría de control, los controladores se ven muy frecuentemente como procesadores de señales. El controlador recibe desde un conjunto de sensores un conjunto de información relativa a la planta, los procesa obedeciendo una cierta ley

de control y los transmite a un conjunto de actuadores que manejan la planta. El balance de energía PBC descrito en la sección anterior encaja bien en esta descripción ya que el controlador recibe el estado x y lo procesa para obtener una ley de control $u = \beta(x) + v$ para estabilizar en sistema a una configuración deseada admisible de equilibrio.

Una nueva manera de enfocar el problema de control es el así llamado control por interconexión, reportado en [18], [19], [20], que esta basado en el enfoque comportamental que se presento en el Capitulo 2 del presente trabajo. A continuación se va a presentar los conceptos básicos de este nuevo enfoque de control para los sistemas dinámicos, lo que nos servirá de marco para desarrollar algoritmos de control por interconexión para los sistemas port-Hamiltonianos.

Definición 5.11 (Interconexión de sistemas dinámicos). Consideremos dos sistemas dinámicos continuos en el tiempo $\Sigma_1 = (\mathbb{R}, \mathcal{W}, \mathcal{B}_1)$ y $\Sigma_2 = (\mathbb{R}, \mathcal{W}, \mathcal{B}_2)$ con el mismo espacio de señales \mathcal{W} . La interconexión de Σ_1 y Σ_2 se denota por $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ y es un sistema dinámico definido como $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 = (\mathbb{R}, \mathcal{W}, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$.

Así, dado dos sistemas dinámicos $\Sigma_1 = (\mathbb{R}, \mathcal{W}, \mathcal{B}_1)$ y $\Sigma_2 = (\mathbb{R}, \mathcal{W}, \mathcal{B}_2)$ con el mismo espacio de señales, el comportamiento de su interconexión consiste de aquellas trayectorias $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}$ que son permitidos para ambos, esto es $\Sigma_1(w \in \mathcal{B}_1)$ y $\Sigma_2(w \in \mathcal{B}_2)$.

Considerando un sistema dinámico $\Sigma_p = (\mathbb{R}, \mathbb{W}, \mathcal{B}_p)$ que representa la planta. Ahora consideremos el conjunto de todos los sistemas dinámicos con \mathbb{R} como el eje del tiempo y con \mathbb{W} como espacio de señal; este conjunto es llamado la familia de controladores admisibles y se denota por \mathcal{C} , por tal un elemento $\Sigma_c \in \mathcal{C}$ es llamado controlador admisible. El sistema interconectado $\Sigma_p \wedge \Sigma_c$ es llamado el sistema controlado.

Dado una planta Σ_p , el problema de control puede ser descrito en tres pasos:

- a) Describir el conjunto de controladores admisibles \mathcal{C} .
- b) Describir las propiedades que el sistema controlado debe tener.
- c) Encontrar un controlador admisible $\Sigma_c \in \mathcal{C}$ tal que el sistema $\Sigma_p \wedge \Sigma_c$ tenga las propiedades deseadas.

Dentro del enfoque de control como interconexión, los controladores no son más procesadores de señal sino más bien sistemas dinámicos que se interconectan a la planta (ver figura 5.4). De esta manera se pueden explotar las propiedades estructurales de los sistemas de manera fructífera para limitar el comportamiento de la planta a un subconjunto deseado. En lo concerniente al control por interconexión de sistemas port-Hamiltonianos, es posible dar una interpretación física clara al controlador y al obstáculo de disipación.

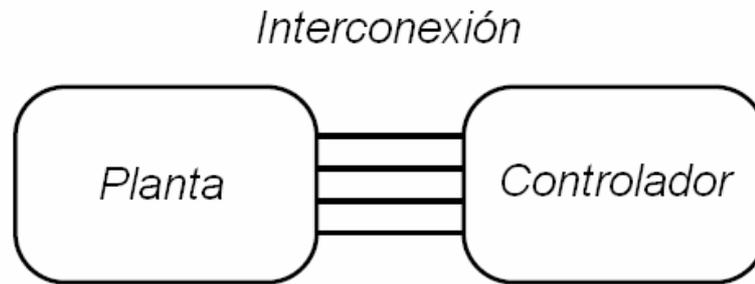


Figura 5.4. Control como interconexión

El comportamiento del sistema controlado (la interconexión entre la planta y el controlador) tiene que obedecer las leyes impuestas por ambos la planta y el controlador. El controlador tiene que ser diseñado de tal manera que el comportamiento de la planta cuando se interconecta al controlador sea exactamente el deseado.

5.3.2 Interconexión de sistemas port-Hamiltonianos

Los sistemas port-Hamiltonianos interactúan con el mundo externo a través de los puertos de potencia y por tal, la interconexión entre sistemas port-Hamiltonianos toma lugar a través de los respectivos puertos de potencia. Por otro lado, el intercambio de energía cuando se conectan dos sistemas depende de la estructura de interconexión que se imponga. En particular, es útil considerar aquellas interconexiones preservantes de potencia, ya que permiten establecer una transferencia de energía sin pérdidas entre los puertos de potencia de los sistemas interconectados (ver figura 5.5).



Figura 5.5. Interconexión preservante entre dos sistemas port-Hamiltonianos

La manera más general de representar este conjunto de interconexiones preservantes de potencia es mediante una estructura Dirac (tal como se mostró en la definición 4.6). Por otro lado, para propósitos de control, una interconexión preservante de potencia puede ser simplemente representada como una matriz anti-simétrica $J_{int}(x_1, x_2)$ donde x_1 y x_2 representan los estados del sistema 1 y del sistema 2 respectivamente. Entonces, la relación entre las entradas y las salidas de los sistemas interconectados está dado por:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = J_{int}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Se puede probar que J_{int} representa una interconexión preservante de potencia. Para esto, recordar que la potencia de un puerto está dado por $\langle u, y \rangle = u^T y$:

$$u_1^T y_1 + u_2^T y_2 = \left[J_{int}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^T & y_2^T \end{pmatrix} J_{int}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.61)$$

Que expresa el hecho que hay una transferencia de energía sin pérdidas a través de la interconexión, es decir, que la energía extraída de un sistema se suministra al otro sin cualquier pérdida o producción de energía. Un ejemplo de este tipo de interconexiones es la clásica interconexión de retroalimentación negativa:

$$u_1 = -y_2, \quad u_2 = y_1 \quad (5.62)$$

Que claramente es un ejemplo de interconexión preservante de potencia ya que su matriz de interconexión es anti-simétrica:

$$J_{int} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

Finalmente, una vez establecido la estructura de interconexión, analicemos la interconexión entre dos sistemas port-Hamiltonianos. Sean:

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = (J_1(x_1) - R_1(x_1)) \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + g_1(x_1) u_1 \\ y_1 = g_1^T(x_1) \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \end{cases} \quad (5.64)$$

$$\Sigma_2 = \begin{cases} \dot{x}_2 = (J_2(x_2) - R_2(x_2)) \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + g_2(x_2) u_2 \\ y_2 = g_2^T(x_2) \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{cases}$$

Dos sistemas port-Hamiltonianos. Donde $x_1 \in \mathcal{X}_1$ y $x_2 \in \mathcal{X}_2$ representan las variables de estado, $H_1(x_1)$ y $H_2(x_2)$ son las funciones energía, $J_1(x_1)$ y $J_2(x_2)$ son matrices anti-simétricas representando la interconexión preservante de potencia interno, $R_1(x_1)$ y $R_2(x_2)$ son matrices simétricas positivas semi-definidas que representan la disipación del sistema. Además, $(u_1, y_1) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{Y}_1$ y $(u_2, y_2) \in \mathcal{U}_2 \times \mathcal{Y}_2$ son las variables conjugadas de potencia que describen los puertos de potencia por medio del que cada sistema puede interactuar con el resto del mundo. Entonces, sea $J_{int}(x_1, x_2)$ una matriz anti-simétrica y considerando la siguiente interconexión preservante de potencia:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = J_{int}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Entre los puertos de potencia (u_1, y_1) y (u_2, y_2) . Con $[v_1 \ v_2]^T$ definido como la nueva entrada.

Proposición 5.5. La interconexión preservante de potencia entre dos sistemas port-Hamiltonianos Σ_1 y Σ_2 resulta en otro sistema port-Hamiltoniano con espacio estado dado por el producto $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ y con una función Hamiltoniana dada por $H_1(x_1) + H_2(x_2)$.

Prueba. La matriz J_{int} puede ser particionada en la siguiente manera:

$$J_{int}(x, x) = \begin{pmatrix} J_{11}(x_1, x_2) & J_{12}(x_1, x_2) \\ J_{21}(x_1, x_2) & J_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

Donde J_{11}, J_{12}, J_{21} y J_{22} son matrices de dimensiones adecuadas. De la propiedad anti-simetría de J_{int} se tiene que J_{11} y J_{22} son anti-simétricas y que $J_{12}^T = -J_{21}$. Entonces a partir de las ecuaciones (5.64), (5.65) y (5.66) se puede demostrar que el sistema interconectado toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} J_1(x_1) + g_1(x_1)J_{11}(x_1, x_2)g_1^T(x_1) & g_1(x_1)J_{12}(x_1, x_2)g_2^T(x_2) \\ g_2(x_2)J_{21}(x_1, x_2)g_1^T(x_1) & J_2(x_2) + g_2(x_2)J_{22}(x_1, x_2)g_2^T(x_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1(x_1) & 0 \\ 0 & R_2(x_2) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_1) & 0 \\ 0 & g_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^T(x_1) & 0 \\ 0 & g_2^T(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Dado que J_{11} y J_{22} son anti-simétricas los términos $g_1(x_1)J_{11}(x_1, x_2)g_1(x_1)$ y $g_2(x_2)J_{22}(x_1, x_2)g_2(x_2)$ son también anti-simétricas. Así se tiene que la expresión (5.67) representa un sistema port-Hamiltoniano con espacio estado $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ y con función de energía total $H(x_1, x_2) = H_1(x_1) + H_2(x_2)$.

5.3.3 Moldeamiento de energía mediante control por interconexión

Similar al controlador por balance de energía PBC, el objetivo principal del control por Interconexión es moldear la energía de una planta tal que el mínimo de energía corresponda a la configuración deseada. En este caso ambos la planta y el controlador son sistemas port-Hamiltonianos, que están interconectados a través de una estructura preservante de potencia.

Consideremos un sistema port-Hamiltoniano con disipación (la planta):

$$\Sigma_p = \begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u \\ y = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad x \in \mathcal{X}, \dim \mathcal{X} = n \quad (5.68)$$

Definición 5.12 (Función Casimir.) Una función Casimir para un sistema port-Hamiltoniano con disipación (5.68) es una función $C: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \mathcal{X} es el espacio estado del sistema port-Hamiltoniano, que satisface la siguiente relación:

$$\frac{\partial^T C}{\partial x} [J(x) - R(x)] = 0 \quad x \in \mathcal{X} \quad (5.69)$$

Las Funciones Casimir son constantes a lo largo de las trayectorias del sistema port-Hamiltonianos sin entrada. De hecho, haciendo $u = 0$ en (5.68), la siguiente relación toma lugar:

$$\dot{C}(x) = \frac{\partial^T C}{\partial x} [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (5.70)$$

Que muestra que las funciones Casimir son cantidades que se conservan en los sistemas port-Hamiltonianos. Sin embargo, estas funciones son una clase muy particular de cantidades que son constantes dado que su variación a lo largo de trayectorias del sistema sin entrada es 0 independientemente del Hamiltoniano del sistema. Así, las funciones Casimir, como se reporta en [4], [5], son cantidades constantes que son determinadas solo por la geometría del sistema, es decir por la estructura de interconexión $J(x)$ y por la estructura de disipación $R(x)$.

Ahora consideremos otro sistema port-Hamiltoniano con disipación (controlador):

$$\Sigma_C = \begin{cases} \dot{x}_C = (J_C(x_C) - R_C(x_C)) \frac{\partial H_C}{\partial x_C} + g_C(x_C) u_C \\ y_C = g_C^T(x_C) \frac{\partial H_C}{\partial x_C} \end{cases} \quad x_C \in \mathcal{X}_C, \dim \mathcal{X}_C = n_C \quad (5.71)$$

Que se va a interconectar con la planta (dada en 5.68) vía la interconexión de retroalimentación estándar:

$$\begin{pmatrix} u \\ u_C \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}}_{J_{\text{int}}} \begin{pmatrix} y \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ v_C \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

En la sección anterior se ha mostrado que la interconexión de retroalimentación estándar es una interconexión preservante de potencia y, además, se ha probado que cualquier interconexión preservante de potencia entre sistemas port-Hamiltonianos con disipación da lugar a otro sistema port-Hamiltoniano con disipación. Por lo tanto, usando el resultado obtenido en (5.67) se tiene que el sistema port-Hamiltoniano resultante de la interconexión está dado por:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} J(x) & -g(x)g_c^T(x_c) \\ g_c(x_c)g^T(x) & J_c(x_c) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R(x) & 0 \\ 0 & R_c(x_c) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H_c}{\partial x_c} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & g_c(x_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^T(x) & 0 \\ 0 & g_c^T(x_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H_c}{\partial x_c} \end{pmatrix}$$

Donde el espacio estado del sistema de lazo cerrado está dado por $\mathcal{X} \times \mathcal{X}_c$, con

$\dim(\mathcal{X} \times \mathcal{X}_c) = n + n_c$ y la energía total está dado por $H(x) + H_c(x_c)$.

El Hamiltoniano $H(x)$ de la planta es fijo mientras que el Hamiltoniano $H_c(x_c)$ del controlador puede ser asignado libremente para propósitos de control. La principal idea del moldeamiento de energía mediante control por interconexión es relacionar el estado del controlador y el estado de la planta a través de funciones

Casimir del sistema port-Hamiltoniano de lazo cerrado. En particular, se va a considerar las funciones Casimir de la siguiente forma:

$$C_i(x, x_c) = x_{ci} - F_i(x) \quad i = 1, \dots, n_c \quad (5.74)$$

Donde $F_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ y x_{ci} denota el componente i^{th} de x_c . Se observa que cada función Casimir relaciona un componente de x_c a x . Entonces usando la definición de función Casimir aplicado al sistema port-Hamiltoniano de lazo cerrado, se encuentra que para cada función $C_i(x, x_c)$ se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^T C_i}{\partial x} & \frac{\partial^T C_i}{\partial x_c} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} J(x) - R(x) & -g(x)g_c^T(x_c) \\ g_c(x_c)g^T(x) & J_c(x_c) - R_c(x_c) \end{array} \right] = 0 \quad i = 1, \dots, n_c \quad (5.75)$$

$$\left[\begin{array}{cc} -\frac{\partial^T F_i(x)}{\partial x} & \frac{\partial^T x_{ci}}{\partial x_c} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} J(x) - R(x) & -g(x)g_c^T(x_c) \\ g_c(x_c)g^T(x) & J_c(x_c) - R_c(x_c) \end{array} \right] = 0$$

Donde se debe notar que $\frac{\partial^T x_{ci}}{\partial x_c}$ no es otra cosa que el vector base i^{th} que se denota

por e_i^T . Entonces se obtiene las ecuaciones para cada componente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^T F_i(x)}{\partial x} [J(x) - R(x)] - g_c^i(x_c)g^T(x) &= 0 \\ \frac{\partial^T F_i}{\partial x} g(x)g_c^T(x_c) + J_c^i(x_c) - R_c^i(x_c) &= 0 \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n_c \quad (5.76)$$

Donde g_c^i, J_c^i y R_c^i denota la fila i^{th} de g_c, J_c y R_c respectivamente y $\frac{\partial^T F_i(x)}{\partial x}$

denota el vector gradiente $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \right)$.

La expresión (5.76) se puede escribir de forma mas compacta como:

$$\frac{\partial^T F}{\partial x}(x)[J(x) - R(x)] - g_c(x_c)g^T(x) = 0 \quad (5.77a)$$

$$\frac{\partial^T F}{\partial x}g(x)g_c^T(x_c) + J_c(x_c) - R_c(x_c) = 0 \quad (5.77b)$$

Donde $F = (F_1, \dots, F_{n_c})^T$

Si ahora multiplicamos la ecuación (5.77a) por $\frac{\partial F}{\partial x}$ y usando (5.77b) se tiene:

$$\frac{\partial^T F}{\partial x}[J(x) - R(x)]\frac{\partial F}{\partial x} = J_c(x_c) + R_c(x_c) \quad (5.78)$$

Recordando de la teoría de matrices que: dadas dos matrices anti-simétricas J_1 y J_2 , y dos matrices simétricas R_1 y R_2 , la relación $J_1 + R_1 = J_2 + R_2$ implica que $J_1 = J_2$ y $R_1 = R_2$.

Por la tanto la ecuación (5.78) puede ser reescrito como:

$$\frac{\partial^T F}{\partial x} J(x) \frac{\partial F}{\partial x} = J_c(x_c) \quad (5.79)$$

$$-\frac{\partial^T F}{\partial x} R(x) \frac{\partial F}{\partial x} = R_c(x_c) \quad (5.80)$$

Dado que $R_c(x_c)$ y $R(x)$ son simétricas positivas semi-definidas, la expresión (5.80) puede da lugar a las ecuaciones:

$$\frac{\partial^T F}{\partial x} R(x) \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (5.81)$$

$$R_c(x_c) = 0 \quad (5.82)$$

Además, dado que $R(x)$ es simétrica positiva semi-definida, (5.81) puede reescribirse como:

$$R(x) \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (5.83)$$

Finalmente, usando este resultado es posible reescribir la ecuación (5.77a) como:

$$\frac{\partial^T F}{\partial x}(x) J(x) = g_c(x_c) g^T(x) \quad (5.84)$$

Todos los resultados obtenidos se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 5.6. Las funciones $C_i(x, x_c) = x_{ci} - F_i(x)$, $i = 1, \dots, n_c$ son funciones Casimir para el sistema port-Hamiltoniano de lazo cerrado (5.73) si y solo si la función $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{n_c}(x))$ satisface las ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^T F}{\partial x} J(x) \frac{\partial F}{\partial x} &= J_c(x_c) \\ R(x) \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ R_c(x_c) &= 0 \\ \frac{\partial^T F}{\partial x}(x) J(x) &= g_c(x_c) g^T(x) \end{aligned} \quad (5.85)$$

Las funciones Casimir se constantes a lo largo de las trayectorias del sistema port-Hamiltoniano de lazo cerrado sin entrada, por lo tanto el sistema de lazo cerrado esta restringido a evolucionar en el conjunto:

$$L_c = \{(x, x_c) \mid x_{ci} = F_i(x) + c_i, i = 1, \dots, n_c\} \quad (5.86)$$

Donde c_i es la constante que cada función Casimir C_i asume.

La dinámica de la planta en el sistema controlado de lazo cerrado sin entrada (5.73) esta dada por:

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) - g(x) g_c^T(x_c) \frac{\partial H_c}{\partial x_c}(x_c) \quad (5.87)$$

Usando la segunda y cuarta relación de (5.85), la expresión (5.87) puede reescribirse como:

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x) + \frac{\partial F}{\partial x}(x) \frac{\partial H_c}{\partial x_c}(x_c) \right) \quad (5.88)$$

Y además recordando que:

$$x_c = F(x) + c \quad (5.89)$$

Donde $c = (c_1, \dots, c_{n_c})^T$. Entonces, usando la regla de la cadena para la derivada:

$$\frac{\partial H_c(F(x) + c)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x) \frac{\partial H_c}{\partial x_c}(F(x) + c) \quad (5.90)$$

Finalmente, reemplazando (5.90) en (5.88) se obtiene que la planta controlada esta dada por:

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H_s}{\partial x}(x) \quad (5.91)$$

Donde:

$$H_s(x) = H(x) + H_c(F(x) + c) \quad (5.92)$$

Proposición 5.7. La interconexión de retroalimentación de la planta, descrito en (5.68), con el controlador, descrito en (5.71), tal que existan n_c funciones Casimir $C_i(x, x_c) = x_{c_i} - F_i(x)$, $i = 1, \dots, n_c$, resulta en un nuevo sistema port-Hamiltoniano con disipación con la misma estructura de interconexión y disipación de la planta (5.91), pero con una función Hamiltoniana moldeada, dada por (5.92).

De esta manera, la energía de la planta controlada puede ser moldeada mediante una apropiada selección de la función Hamiltoniana del controlador, de tal manera que la función $H_s(x)$ tenga un mínimo estricto en la configuración deseada.

Finalmente, es posible hacer un análisis energético del sistema controlado. Dado que $R_c(x_c)$ tiene que ser cero (5.85). El controlador no tiene pérdidas:

$$\frac{dH_c}{dt} = u_c^T y_c \quad (5.93)$$

Además, dado que $u = -y_c$, $y = u_c$ considerando $v = 0$, $v_c = 0$, se tiene:

$$\frac{dH_s}{dt} = \frac{dH}{dt} + \frac{dH_c}{dt} = \frac{dH}{dt} - u^T y \quad (5.94)$$

Que integrando resulta en:

$$H_s(x(t)) = H(x(t)) - \int_0^t u(\tau)y(\tau)d\tau \quad (5.95)$$

Es decir, la energía moldeada es la diferencia entre la energía almacenada en la planta y la energía suministrada por el controlador. Lo que es mas, este resultado es similar al obtenido usando las técnica de control basado en pasividad. Por tal, se puede decir que ya sea usando el control por interconexión o el control basado en la pasividad se llega a un resultado similar de balance de energía.

5.3.4 El obstáculo de disipación

Se acaba de ver que el moldeamiento de energía implementado por medio de las funciones Casimir es equivalente al algoritmo de control usando las técnicas basadas en la pasividad, por lo tanto el obstáculo de disipación es también el principal inconveniente la estrategia de control por interconexión. Sin embargo, la técnica de control por interconexión permite caracterizar la disipación admisible. Para ver esto, tomando como punto de partida la expresión (5.83), se establece la siguiente relación:

$$R(x) \frac{\partial H_c(F(x))}{\partial x} = 0 \quad (5.96)$$

Así, un sistema port-Hamiltoniano es estabilizado por medios del balance de energía PBC si y solo si la estructura de disipación de la planta y el Hamiltoniano del

controlador satisfacen (5.96). Es decir, el balance de energía PBC es posible solo cuando H_c no depende de las coordenadas donde hay disipación, en otras palabras, las coordenadas en donde hay disipación natural no necesitan ser moldeadas.

Se ha visto que usando la técnica de control por interconexión y el control basado en la pasividad se llega al mismo resultado (mismo balance de energía), sin embargo, enfrentar el problema de moldeamiento de energía como un problema de control por interconexión presenta las siguientes ventajas:

- Es posible dar una clara interpretación física al controlador. Este puede ser pensado como una extensión física de la planta, que se diseña de tal manera que el comportamiento de la planta se limite a aquel deseado.
- Las estructuras geométricas que caracterizan los sistemas port-Hamiltonianos pueden ser explotadas explícitamente para el diseño del controlador. Es decir, que todas las propiedades energéticas que caracterizan plantas físicas son usadas explícitamente para construir la ley de control, y de esta manera no se reduce a un mero problema matemático.

5.4 Control por interconexión y asignamiento de amortiguación basado en la pasividad (IDA-PBC)

En la sección 5.3.3 se ha mostrado que para moldear la energía de la planta es necesario que el sistema de lazo cerrado admita funciones Casimir. Mientras este no

es un problema para la regulación de sistemas mecánicos, este puede volverse una preocupación cuando tratamos con el control de maquinas eléctricas y, consecuentemente, cuando consideramos explícitamente el sistema de actuación eléctrica, por ejemplo de un robot. La existencia de funciones Casimir impone severas condiciones que fueron reportadas en (5.85). La limitación principal impuesta por esas condiciones es en la disipación admisible de la planta.

El obstáculo de disipación expresa el hecho que un sistema port-Hamiltoniano no puede ser estabilizado en una configuración admisible de equilibrio que este caracterizada por una cantidad infinita de disipación mediante el suministro de una cantidad finita de energía. Así, para estabilizar un sistema en puntos de equilibrio con disipación infinita, se tienen que considerar aquellos controladores capaces de suministrar una cantidad infinita de energía. El controlador puede ser descrito por un sistema port-Hamiltoniano caracterizado por una función de energía sin límite inferior como:

$$\Sigma_c = \begin{cases} \dot{x}_c = u_c \\ y_c = \frac{\partial H_c}{\partial x_c}(x_c) \end{cases} \quad (5.97)$$

Con función de energía:

$$H_c(x_c) = -x_c \quad (5.98)$$

Por otro lado, se ha mostrado en la sección 5.3.3 que la interconexión de retroalimentación estándar implica condiciones muy estrictas, relacionadas a la existencia de funciones Casimir. Es posible deshacerse de esas condiciones de restricción mediante la incrustación de la información del estado de la planta en la interconexión. Así la nueva interconexión preservante de potencia asume la forma:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\beta(x) \\ \beta^T(x) & 0 \end{pmatrix}}_{J_{\text{int}(x)}} \begin{pmatrix} y(t) \\ y_C(t) \end{pmatrix} \quad (5.99)$$

Entonces, haciendo uso de la proposición 5.5 se tiene que el sistema resultante del acoplamiento de la planta descrita en (5.68) y el controlador dado en (5.97) a través de la nueva interconexión preservante de potencia (5.99) es claramente un sistema port-Hamiltoniano con disipación que tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_C \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} J(x) & -g(x)\beta(x) \\ \beta^T(x)g^T(x) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial H_C}{\partial x_C}(x_C) \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

Es posible moldear la energía del sistema de lazo cerrado sin la generación de funciones Casimir y así, sin las restricciones impuestas por las condiciones necesarias reportadas en (5.85), en particular sin el obstáculo de disipación. De hecho, si es posible solucionar la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$[J(x) - R(x)] \frac{\partial H_a}{\partial x}(x) = g(x)\beta(x) \quad (5.101)$$

Para algún $\beta(x)$ la dinámica de la planta será:

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (5.102)$$

Donde $H_d(x) = H(x) + H_a(x)$. Si es posible escoger $H_a(x)$ tal que $H_d(x)$ tenga un mínimo en la configuración deseada, entonces el sistema controlado será estabilizado asintóticamente en la configuración deseada.

Se puede notar que no hay condiciones a cumplir y en particular no hay obstáculo de disipación. Así, este nuevo esquema de control es aplicable también para la estabilización de sistemas con disipación infinita.

Es importante notar que este enfoque de control es equivalente a la técnica de control por medio de la retroalimentación estática $u = \beta(x)$. De hecho, de la expresión (5.100) se tiene que:

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) - g(x)\beta(x) \frac{\partial H_c}{\partial x_c} \quad (5.103)$$

Entonces, dado que $\frac{\partial H_c}{\partial x_c} = -1$, es equivalente a:

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) - g(x)\beta(x) \quad (5.104)$$

Ejemplo 5.4. Considerando otra vez el circuito paralelo RLC visto en el ejemplo 5.3. El sistema puede ser modelado como un sistema port-Hamiltoniano con disipación (ver ecuación 5.59), con función de energía reportada en (5.58). Las configuraciones admisibles de equilibrio del sistema son de la forma $x^* = (Cu^*, (L/R)u^*)^T$ y el sistema es caracterizado por una infinita disipación. La ecuación diferencial parcial reportada en (5.101) aplicada a este sistema se vuelve:

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial H_a}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial H_a}{\partial x_2}(x) = 0 \quad (5.105a)$$

$$-\frac{\partial H_a}{\partial x_1}(x) = \beta(x) \quad (5.105b)$$

La solución de ecuación (5.105a) tiene la forma:

$$H_a(x) = \Phi(Rx_1 + x_2) \quad (5.106)$$

Donde $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable arbitraria.

El sistema tiene que ser estabilizado en una configuración admisible de equilibrio y así Φ tiene que ser escogido en tal manera que $H_d(x) = H(x) + H_a(x)$ tiene un mínimo en la configuración $x^* = (Cu^*, (L/R)u^*)^T$. Una posible solución es:

$$\Phi(Rx_1 + x_2) = \frac{K_p}{2} \left[(Rx_1 + x_2) - (Rx_1^* + x_2^*) \right]^2 - Ru^* (Rx_1 + x_2) \quad (5.107)$$

Que puede verificarse que asegura a x^* como un mínimo de $H_d(x)$ para cualquier:

$$K_p > -\frac{1}{(L + CR)^2} \quad (5.108)$$

Entonces, expresando la función energía $H_d(x)$ en su forma cuadrática:

$$H_d(x) = (x - x^*)^T \begin{pmatrix} \frac{1}{C} + R^2 K_p & RK_p \\ RK_p & \frac{1}{L} + K_p \end{pmatrix} (x - x^*) \quad (5.109)$$

Claramente se observa que tiene un mínimo global en la configuración deseada. Además, se debe notar que es una condición (5.108) asegura que x sea el único mínimo global de la función de energía de lazo cerrado.

Se ha mostrado que es posible moldear la energía del sistema port-hamiltoniano del lazo cerrado con disipación sin la generación de funciones Casimir y lo más importante, sin tener el obstáculo de disipación. De otro lado, la implementación de la estrategia de control depende de la solución de (5.101) que no siempre es fácil de resolver.

Es posible simplificar (5.101) usando los grados extras de libertad proporcionados por las estructuras port-hamiltonianos de la planta y el controlador. De hecho, para la estabilización de una configuración admisible de equilibrio, solamente es requerido moldear la energía de sistema port-hamiltoniano de lazo cerrado de tal manera que la configuración deseada es un mínimo estricto para la nueva función energía. Usando las técnicas de control ilustradas hasta este punto la dinámica de lazo cerrado de la planta resulta:

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (5.110)$$

Donde las matrices de interconexión y amortiguamiento son exactamente aquellos de la planta $H_d(x)$ es la función moldeada de energía adecuada. Desde un punto de vista de moldeamiento de energía nada cambia si se propone la siguiente dinámica de lazo cerrado:

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (5.111)$$

Donde $J_d(x)$ y $R_d(x)$ son las matrices deseadas de interconexión y amortiguación y $H_d(x)$ es la función de energía moldeada. Así, es posible asignar libremente una matriz de interconexión y una matriz de amortiguación para el sistema de lazo cerrado sin afectar las propiedades de estabilidad de la configuración deseada. Estos grados de libertad extras conducen a los así llamados Controladores Basados en

Pasividad por Interconexión y Asignamiento de Amortiguación (IDA-PBC), reportado en [4]. En este caso la expresión (5.101) se transforma en:

$$[J(x) + J_a(x) - R(x) - R_a(x)] \frac{\partial H_a}{\partial x}(x) = -[J_a(x) - R_a(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)\beta(x) \quad (5.112)$$

Donde:

$$J_a(x) = J_d(x) - J(x), \quad R_a(x) = R_d(x) - R(x)$$

Así es posible asignar una matriz de interconexión de lazo cerrado deseada y una matriz de amortiguación deseada en orden de simplificar la ecuación (5.112) y obtener una solución para el diseño del controlador.

Proposición 5.8. Consideremos un sistema port-Hamiltoniano con disipación caracterizado por las matrices $J(x)$, $R(x)$, $g(x)$ y por la función energía $H(x)$. Sea x^* una configuración a ser estabilizada y asumir que es posible encontrar funciones $\beta(x)$, $R_a(x)$ y $J_a(x)$ tal que:

$$J(x) + J_a(x) = -[J(x) + J_a(x)]^T$$

$$R(x) + R_a(x) = [R(x) + R_a(x)]^T \geq 0 \quad (\text{Positiva semidefinida})$$

Y una función vector $K(x)$ tal que:

$$[J(x) + J_a(x) - R(x) - R_a(x)] \frac{\partial K}{\partial x}(x) = -[J_a(x) - R_a(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)\beta(x) \quad (5.113)$$

Tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Integrabilidad.

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x) = \frac{\partial^T K}{\partial x}(x)$$

2. Asignamiento de Equilibrio

$$K(x^*) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*)$$

3. Estabilidad de Lyapunov

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x^*) > -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*)$$

Bajo estas condiciones, la retroalimentación estática $u = \beta(x)$ es un sistema port-Hamiltoniano con disipación y la dinámica de la planta es:

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x)$$

Con $H_d(x) = H(x) + H_a(x)$, donde $H_a(x)$ se obtiene de:

$$\frac{\partial H_a}{\partial x}(x) = K(x) \quad (5.114)$$

Lo que es mas, x^* es un equilibrio estable (localmente) del lazo cerrado.

La técnica de control IDA-PBC generaliza la estrategia de control por balance de energía y permite moldear la energía para un conjunto muy amplio de sistemas port-hamiltoniano con disipación explotando todos los grados de libertad dado por el formalismo port-Hamiltoniano. En general las matrices de interconexión y amortiguación deseadas pueden ser escogidas tomando consideraciones físicas del sistema a controlar. Esta estrategia es útil para la regulación del comportamiento de robots no actuados completamente y sistemas con disipación infinita.

Ejemplo 5.5. Considerando un sistema de levitación magnética (ver figura 5.6) que consiste de una esfera de hierro en un campo magnético vertical creado por una bobina electromagnética.

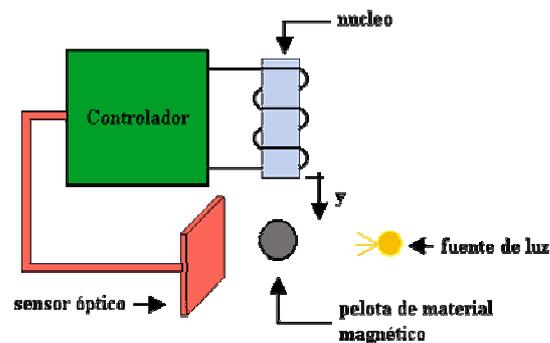


Figura 5.6. Levitador magnético

Las variables de estado del sistema esta dado por: el flujo de la bobina ϕ , la posición de la esfera respecto a su posición nominal y , y el momento de la esfera $p = m\dot{y}$. Entonces el vector de estado es:

$$x = [\phi, y, m\dot{y}] \quad (5.115)$$

La función Hamiltoniana del sistema esta dado por:

$$H(x) = E_L + E_{K \text{ esfera}} + E_{P \text{ esfera}} \quad (5.116)$$

Donde:

- E_L es la energía del inductor, que esta dado por:

$$E_L = \frac{1}{2L(y)} \phi^2 \quad (5.117)$$

Donde, la inductancia $L(y)$ depende de la posición de la esfera. Una aproximación adecuada para la inductancia es $L(y) = k/(1-y)$, en el dominio $-\infty < y < 1$, donde k es una constante que depende del número de vueltas del inductor, y donde se ha normalizado la diferencia nominal a uno.

- E_k es la energía cinética de la esfera:

$$E_{K_{esfera}} = \frac{1}{2m} x_3^2$$

- E_p es la energía potencial de la esfera:

$$E_{P_{esfera}} = mgx_2$$

Entonces de los resultados anteriores se tiene:

$$H(x) = \frac{1}{2k}(1-x_2)x_1^2 + \frac{1}{2m}x_3^2 + mgx_2 \quad (5.118)$$

La dinámica de la planta (ver figura 5.7) se obtiene en base a las leyes de Kirchoff y Newton que gobiernan al sistema:

$$u = \dot{\phi} + Ri$$

$$m\ddot{y} = F - mg$$

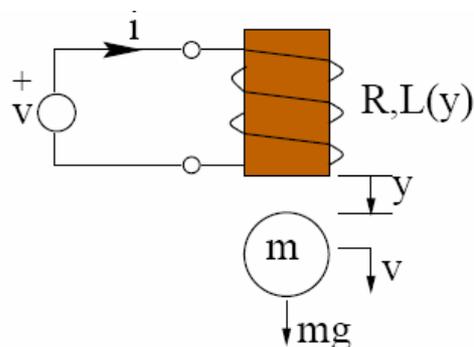


Figura 5.7. Dinámica de un levitador magnético

De donde se puede demostrar que el modelo port-Hamiltoniano del sistema es:

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5.119)$$

Dado una posición deseada de la esfera x_2^* , el punto de equilibrio esta dado por:

$$x^* = \left[\sqrt{2kmg}, x_2^*, 0 \right]^T \quad (5.120)$$

Si tratamos de diseñar un controlador usando la ecuación (5.101), es decir sin cambiar las matrices de interconexión y disipación, resulta:

$$(J - R)K(x) = g\beta(x) \Rightarrow \begin{cases} -RK_1(x) = \beta(x) \\ K_2(x) = 0 \\ K_3(x) = 0 \end{cases}$$

Donde $K(x) = \frac{\partial H_a}{\partial x}(x)$. Esto significa que la función $H_a(x)$ solo puede depender de x_1 . Por lo tanto, la función de energía moldeada seria de la forma:

$$H_d(x) = \frac{1}{2k}(1-x_2)x_1^2 + \frac{1}{2m}x_3^2 + mgx_2 + H_a(x_1) \quad (5.121)$$

Que tiene un signo indefinido para todo $H_a(x_1)$, y por lo tanto, no permite el adecuado moldeamiento de la energía del sistema.

La fuente del problema es la falta de un adecuado acoplamiento entre la parte eléctrica y la parte mecánica del sistema. De hecho, la matriz de interconexión J solo acopla la posición con la velocidad, como se muestra en la ecuación (5.119). Para superar este problema, se propone forzar un acoplamiento entre el flujo $x_1 = \phi$ y el momento $x_3 = m\dot{y}$. Así, se propone la siguiente matriz de interconexión.

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

Donde α es una constante a ser definida. Ahora, usando la ecuación (5.113) y considerando $R_a = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} -RK_1(x) &= \frac{\alpha}{m}x_3 + \beta(x) \\ K_3(x) &= 0 \\ \alpha K_1(x) - K_2(x) &= -\frac{\alpha}{k}(1-x_2)x_1 \end{aligned} \quad (5.123)$$

La primera ecuación define la señal de control. Resolviendo la última ecuación usando la ecuación (5.114) se tiene:

$$H_a(x) = \frac{1}{6k\alpha}x_1^3 + \frac{1}{2k}x_1^2(x_2-1) + \Phi(x_2 + \frac{1}{\alpha}x_1) \quad (5.124)$$

Donde $\Phi(\cdot)$ es una función arbitraria continua diferenciable. Esta función debe satisfacer las condiciones establecidas en la proposición 5.8, además debe asignar un mínimo estricto en x^* de la nueva función de energía que esta dado por:

$$H_d(x) = \frac{1}{6k\alpha} x_1^3 + \frac{1}{2m} x_3^2 + mgx_2 + \Phi\left(x_2 + \frac{1}{\alpha} x_1\right) \quad (5.125)$$

Tal como se reporta en [4] que una elección adecuada para Φ esta dada por:

$$\Phi\left(x_2 + \frac{1}{\alpha} x_1\right) = mg \left[-\left(\tilde{x}_2 + \frac{1}{\alpha} \tilde{x}_1\right) + \frac{b}{2} \left(\tilde{x}_2 + \frac{1}{\alpha} \tilde{x}_1\right)^2 \right] \quad (5.126)$$

Donde $\tilde{x}_i = x_i - x_i^*$, y $\alpha, b > 0$. Entonces la ley de control se deduce la primera ecuación de (5.123) se tiene:

$$u = \frac{R}{K} (1 - x_2) x_1 - K_p \left(\frac{1}{\alpha} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\right) - \frac{\alpha}{m} x_3 - \frac{R}{\alpha} \left(\frac{1}{2k} x_1^2 - mg\right) \quad (5.127)$$

Estabiliza el punto de equilibrio x^* para todo $K_p, \alpha > 0$. Donde K_p es una nueva constante.

Capítulo 6.

Aplicación del Enfoque Port-Hamiltoniano para el Modelamiento y Control de un Manipulador Robótico

6.1 Introducción

Hasta este punto se ha demostrado la gran ventaja que presenta el enfoque port-Hamiltoniano en el modelamiento y control de sistemas físicos. A parte de representar de forma más precisa la naturaleza física de un sistema y de basarse en una propiedad que es común a todos los sistemas físicos (la energía), este enfoque puede ser usado con gran éxito para el modelamiento y control de sistemas complejos, de hecho, actualmente existe una activa investigación en diversas aplicaciones pertenecientes a diferentes dominios físicos tales como la electrónica de potencia, procesos químicos, robótica, etc.

En este capítulo, mostraremos una aplicación del enfoque port-Hamiltoniano en el modelamiento y control de un manipulador robótico. Primero, se identificara el modelo port-Hamiltoniano de un manipulador robótico de cualquier grado de libertad.

Luego, se implementara una técnica de control basada en la pasividad que moldee la energía total del manipulador tal que establezca la configuración que se desea lograr. Finalmente se aplicaran los resultados obtenidos en el caso de un manipulador de dos grados de libertad, y se hará una comparación de los resultados obtenidos respecto a los que se obtienen usando las técnicas clásicas de control de posición de robots basadas en el Lagrangiano.

6.2 Modelamiento

El método para derivar las ecuaciones de movimiento de cualquier sistema mecánico estándar, es mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = \tau \quad (6.1)$$

Donde $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ son las coordenadas de configuración generalizadas del sistema de n grados de libertad, L es el Lagrangiano que es igual a la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, y $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)^T$ es el vector de fuerzas generalizadas que actúa en el sistema.

En los sistemas mecánicos estándar la energía cinética tiene la forma:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (6.2)$$

Donde la matriz $M(q) = M^T(q) > 0$, de orden $n \times n$ se llama matriz de Inercia o matriz de masa generalizada. Entonces el Lagrangiano asume la siguiente forma, con $P(q)$ la energía potencial del sistema:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + P(q) \quad (6.3)$$

Es posible expresar las ecuaciones de movimiento de Lagrange en una forma Hamiltoniana dando lugar a las llamadas ecuaciones Hamiltonianas, como se reporta en [29]. Para esto se define el vector de momento generalizado $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ como $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, de donde usando (6.3) asume la forma:

$$p = M(q) \dot{q} \quad (6.4)$$

Entonces, definiendo el vector de estado $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$ las n ecuaciones de segundo orden (6.1) se transforman en $2n$ ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) & (M^{-1}(q)p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) + \tau \end{aligned} \quad (6.5)$$

Que no son nada más que las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento. Donde la función Hamiltoniana esta dada por:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M^{-1}(q) \dot{q} + P(q) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + P(q) \quad (6.6)$$

Antes de continuar es útil mencionar que la gran ventaja que presenta la formulación Hamiltoniana recae en que esta provee el fundamento para extensiones teóricas dentro y fuera de la mecánica clásica (teoría del caos, mecánica cuántica).

El sistema (6.6) se puede expresar de manera más general [5] en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), & (q, p) &= (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) + B(q)u, & u &\in \mathbb{R}^m \\ y &= B^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = B^T(q) \dot{q}, & y &\in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (6.7)$$

Donde $B(q)$ es la matriz de entradas de fuerza, con $B(q)u$ denotando las fuerzas generalizadas que resultan de las entradas de control $u \in \mathbb{R}^m$. Si $m < k$ se dice que el sistema no es completamente actuado, si $m = k$ el sistema se llama completamente actuado.

Finalmente, considerando las ecuaciones Hamiltonianas obtenidas (6.7) y considerando la disipación que puede presentar un sistema mecánico, es fácil ver que estas ecuaciones dan lugar al siguiente modelo port-Hamiltoniano del sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D(q) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B(q) \end{bmatrix} u \quad (6.8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & B(q) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} = B^T(q) \dot{q}$$

Las salidas $y \in \mathbb{R}^m$ son las velocidades generalizadas correspondientes a las fuerzas generalizadas $u \in \mathbb{R}^m$. La matriz $D(q) = D^T(q) \geq 0$ es una matriz definida positiva que representa la fricción viscosa presente en el sistema y H es la energía total del sistema, dado en la ecuación (6.6).

Las ecuaciones port-Hamiltonianas derivadas anteriormente se aplican a cualquier sistema mecánico estándar. En el caso particular de los manipuladores robóticos, estos son sistemas mecánicos estándar y por tal es posible usar las ecuaciones obtenidas para obtener su modelo port-Hamiltoniano. Las ecuaciones se hallan simplemente encontrando el valor de la matriz de inercia, la matriz de entrada, la matriz que representa la fricción viscosa y estableciendo la energía potencial.

6.3 Control de posición basado en la pasividad

Tal como se menciona en la observación 5.5 del capítulo anterior, los sistemas mecánicos no presentan el obstáculo de disipación. Por tal es posible aplicar la técnica de control basado en la pasividad para el diseño de un controlador que regule el manipulador robótico en la posición deseada. Como se menciona en la sección 5.2.5 el control basado en la pasividad consta de dos pasos:

- a) **Moldeamiento de la energía:** Se debe moldear la energía total del manipulador robótico, tal que el punto mínimo de energía coincida con la posición deseada. Para este fin, se debe hacer uso de la proposición 5.4.

Suponiendo que $q_d \in Q$ es una configuración deseada en el espacio de junta. Una posible función $\beta(\cdot)$ que satisface (5.40) es:

$$\beta(q) = B^{-1}(q) \left[\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial H_a}{\partial q} \right] \quad (6.12)$$

Donde $H_a(q)$ es una función con un estricto mínimo en q_d . Entonces si consideramos la función:

$$H_a(q) = \frac{1}{2} (q - q_d)^T K_p (q - q_d) \quad (6.13)$$

Que tiene un mínimo en q_d . Entonces, sustituyendo la ecuación (6.13) en la ecuación (6.12) se obtiene la función de retroalimentación u :

$$u(q, p) = B^{-1}(q) \left[\frac{\partial P}{\partial q} - K_p (q - q_d) \right] \quad (6.14)$$

Donde $K_p = K_p^T$ es una matriz de ganancia positiva definida. Entonces, recordando que $y = B^T(q)\dot{q}$ y aplicando la ecuación (5.40) se obtiene:

$$\begin{aligned} -\int_0^t \beta^T(q(\tau))y(\tau)d\tau &= -\int_0^t \left[\frac{\partial^T P}{\partial q} - (q - q_d)^T K_p \right] B^{-T}(q) B^T(q) \dot{q} d\tau \\ &= -\int_0^t \frac{\partial^T P}{\partial q} \dot{q} d\tau + \int_0^t (q - q_d)^T K_p \dot{q} d\tau \\ &= \underbrace{-P(q(t)) + \frac{1}{2} (q - q_d)^T K_p (q - q_d)}_{H_a = H_a(q)} + k \end{aligned} \quad (6.14)$$

De donde, se tiene que la función de energía de lazo cerrado esta dado por:

$$H_d(q, p) = H(q, p) + H_a(q) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + \frac{1}{2} (q - q_d)^T K_p (q - q_d) \quad (6.15)$$

Claramente se observa que la energía del lazo cerrado tiene un mínimo en $(0, q_d)$, tal como se deseaba. Es decir el controlador moldeo exitosamente la energía del sistema tal que el punto mínimo de esta coincida con la posición deseada.

b) Inyección de amortiguación. Una vez moldeada la energía del manipulador, se va a adicionar disipación al sistema controlado mediante la inyección de amortiguación en orden de estabilizar asintóticamente la configuración deseada.

Tal como se menciona en la sección 5.2.4 la función $u = -ky$ se encarga de inyectar amortiguación al sistema. En el caso de los manipuladores robóticos $y = B^T(q)\dot{q}$, entonces la función de amortiguación tiene la forma:

$$u = -K_D B^T(q)\dot{q} \quad (6.16)$$

Con $K_D = k$. Esta función introduce disipación adicional al sistema, permitiendo incrementar la tasa de convergencia de la evolución del sistema hacia la configuración de energía mínima.

Finalmente, combinando los resultados anteriores se obtiene que la función de retroalimentación total u_T del sistema está dado por:

$$u_T(q, p) = B^{-1}(q) \left[\frac{\partial P}{\partial q} - K_P(q - q_d) \right] - K_D B^T(q)\dot{q} \quad (6.17)$$

Considerando $B(q) = I$ (los actuadores actúan directamente en las juntas), la ley de control resulta:

$$u_T(q, p) = \frac{\partial P}{\partial q} - K_p(q - q_d) - K_D \dot{q} \quad (6.18)$$

Que no es otra cosa que la ley, bastante conocida, de control proporcional derivativo con compensación de gravedad $PD + g(q)$, establecida en el formalismo Lagrangiano [8], [23]. Donde $K_p = K_p^T$ y $K_D = K_D^T$ son las matrices de ganancias, que permiten el ajuste del comportamiento del sistema.

6.4 Resultados obtenidos

En orden de probar el desempeño del algoritmo de control, para el posicionamiento del robot en una posición deseada, se va a considerar un manipulador planar de dos grados de libertad (ver figura 6.1).

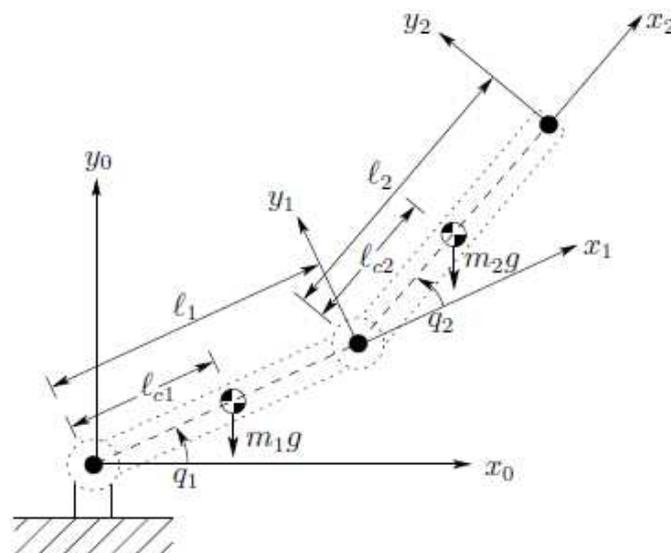


Figura 6.1. Manipulador de dos grados de libertad.

Como se menciona en la introducción se va a comparar los resultados que se obtienen usando el enfoque port-Hamiltoniano respecto a los que se obtienen usando las técnicas clásicas de control que se basan en el Lagrangiano.

Dado que la ley de control obtenida en la ecuación (6.18) es la versión port-Hamiltoniana de la ley de control $PD + g(q)$ establecida en el marco Lagrangiano, se va a comparar el desempeño de la ley de control (6.18) con su equivalente ya mencionado, en orden de analizar los resultados que se obtienen en cada una de ellas.

6.4.1 Usando el enfoque port-Hamiltoniano

En este caso, las coordenadas generalizadas del manipulador son (q_1, q_2, p_1, p_2) . Para hallar el modelo port-Hamiltoniano del sistema, se debe hallar la función de energía del sistema, para luego usar la expresión (6.8).

En este manipulador la matriz de inercia esta dado por:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2 \\
 M_{12} &= M_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 \\
 M_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

De donde la energía cinética tiene la forma:

$$E_k = \frac{1}{2} [p_1 \ p_2] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

La energía potencial es la suma de la energía potencial de cada brazo (la masa multiplicada por la aceleración de la gravedad y por la longitud del centro de masa).

$$\begin{aligned} P_1 &= m_1 g (l_{c1} \sin(q_1)) \\ P_2 &= m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \\ P &= P_1 + P_2 = m_1 g (l_{c1} \sin(q_1)) + m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \end{aligned} \quad (6.20)$$

De donde, la función energía del manipulador (su Hamiltoniano) es la suma de la energía potencial y energía cinética.

Tabla 6.1. Parámetros del manipulador a considerar

Longitud de los brazos	$L_1 = L_2 = 1m$
Centros de masa	$L_{c1} = L_{c2} = 0.5m$
Masa de los brazos	$m_1 = m_2 = 20Kg$
Inercia de los brazos	$I_1 = I_2 = 5Kg \cdot m^2$
Fricción viscosa	$D_1 = D_2 = 0N \cdot m \cdot s$
Aceleración de la gravedad	$g = 9.81m / s^2$

Si consideramos los parámetros del robot reportados en la tabla 6.1, y usando la herramienta de matemática simbólica que nos provee el software Matlab, para el

calculo de los parámetros del modelo (apéndice B.1). Se encuentra que la energía del sistema esta dado por:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{-p_1^2 + 2p_1p_2 + 2p_1p_2 \cos(q_2) - 5p_2^2 - 2p_2^2 \cos(q_2)}{-70 + 10 \cos(2q_2)} \\
 E_p &= 294.3 \sin(q_1) + 98.1 \sin(q_1 + q_2) \\
 H &= E_k + E_p
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

De donde el modelo port-Hamiltoniano del manipulador, sin considerar la fricción viscosa ($D_1 = D_2 = 0 N \cdot m \cdot s$), resulta:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Donde $\frac{\partial H}{\partial q} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} \right)^T$ y $\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} \right)^T$, son las derivadas parciales de la energía del sistema respecto de cada una de las coordenadas generalizadas. En el apéndice B.1 se encuentra el código fuente para identificar cada uno de estos valores.

Entonces, una vez encontrado el modelo del manipulador, aplicando la técnica la ley de control reportada en (6.18) con parámetros de control $K_p = \text{diag}(6000, 6000)$ $K_D = \text{diag}(1100, 1100)$, y considerando la posición $q_1 = -25.57$ y $q_2 = 57.57$, correspondiente a la posición $(x_d, y_d) = (1.75, 0.1)$, como la posición deseada, se obtiene los siguientes resultados (referirse al apéndice B.2 para ver el código fuente).

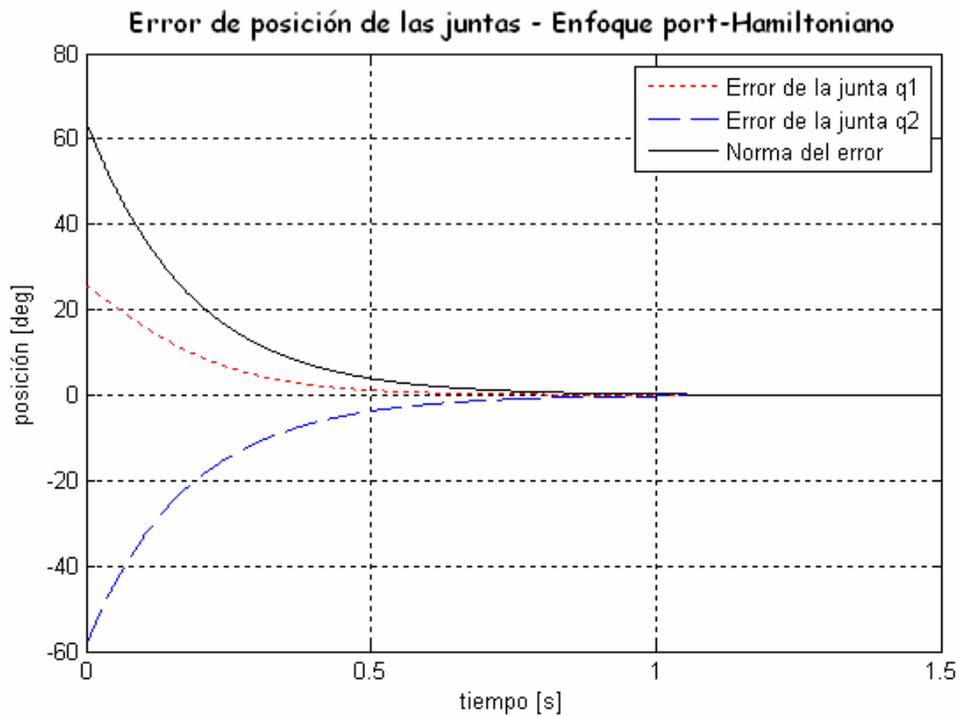


Figura 6.2. Error de posición de las juntas – Enfoque port-Hamiltoniano

Tal como se aprecia en la figura 6.2, los errores tienden a asintóticamente hacia cero. Además, se puede concluir que pasado un segundo el controlador hace que el sistema se establezca en la posición deseada.

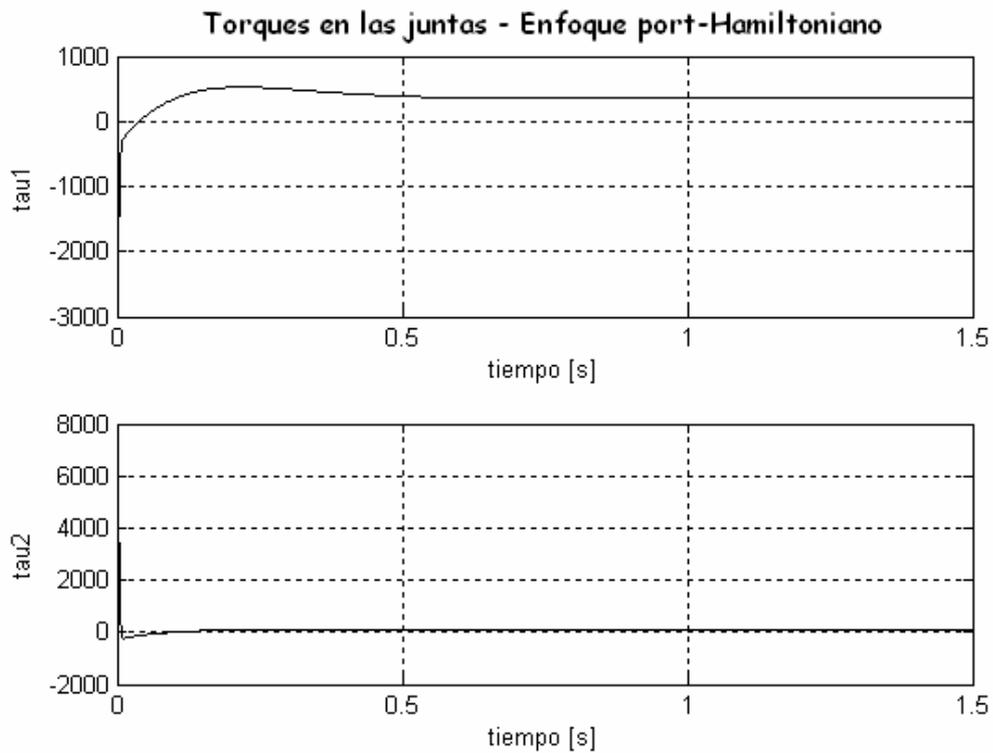


Figura 6.3. Torques de las juntas – Enfoque port-Hamiltoniano

En la figura 6.3 se puede ver los torques que se ejercen en las juntas para llegar a la posición de equilibrio. Esta información nos es muy útil ya que nos indica las capacidades que deben tener los motores a usar.

6.4.2 Usando el enfoque Lagrangiano

Las ecuaciones dinámicas de movimiento de un manipulador dentro del marco Lagrangiano tienen la forma:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u \quad (6.23)$$

Donde:

q : Es el vector, de tamaño $n \times 1$, de coordenadas generalizadas.

$H(q)$: Es la matriz, de tamaño $n \times n$, de inercia.

$C(q, \dot{q})\dot{q}$: Es el vector, de tamaño $n \times 1$, de Coriolis y fuerzas centrífugas.

$g(q)$: Es el vector, de tamaño $n \times 1$, de fuerzas de gravedad.

u : Es el vector, de tamaño $n \times 1$, de torques de entrada.

La técnica de control proporcional derivativa con compensación de gravedad ($PD + g(q)$) establecida en el marco Lagrangiano, establece que la ley de control tiene la forma:

$$u = K_p(q_d - q) - K_D\dot{q} + g(q) \quad (6.24)$$

En la figura 6.4 se muestra el diagrama de bloques de un manipulador robotico bajo la ley de control $PD + g(q)$.

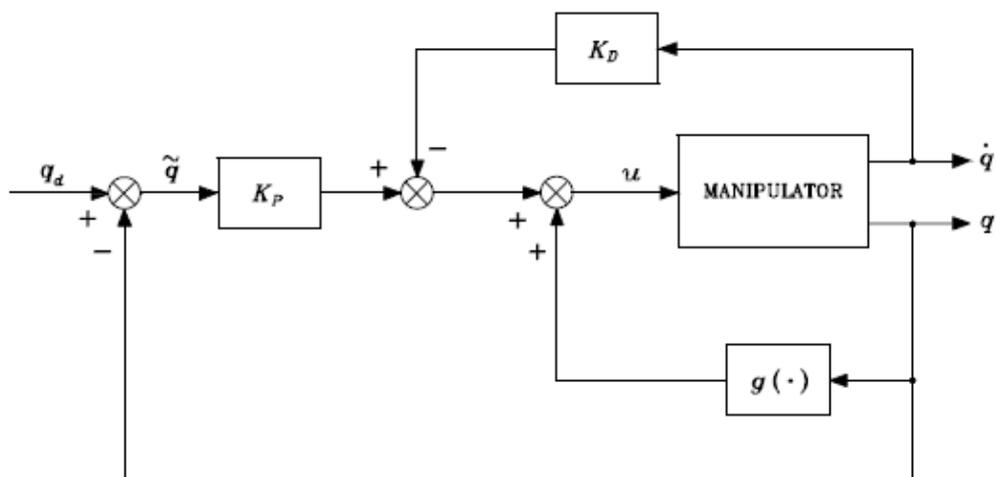


Figura 6.4. Diagrama de bloques del controlador $PD + g(q)$

En el caso específico de nuestro manipulador de 2 grados de libertad (GDL) se obtiene el diagrama de bloques en simulink que se muestra en la figura 6.5, donde se observa claramente que las ganancias del controlador se establecen con el mismo valor que las ganancias usadas en el caso del controlador establecido en el marco port-Hamiltoniano.

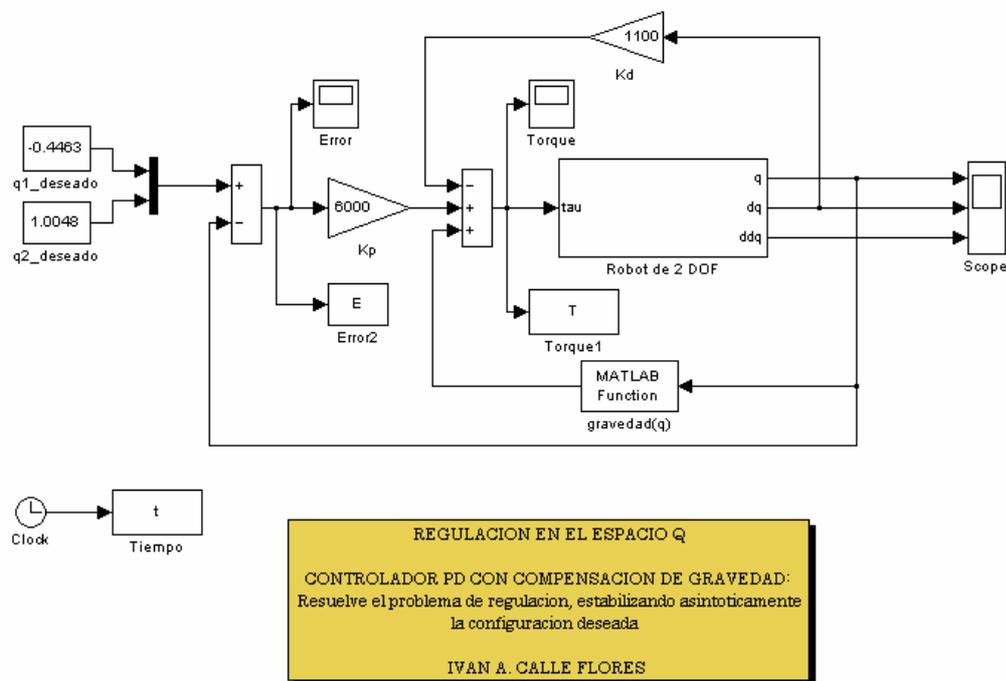


Figura 6.5. Diagrama en Simulink del Control $PD + g(q)$ del manipulador de 2GDL

Donde el bloque “Robot de 2DOF”, cuyo contenido se muestra en la figura 6.6, representa la dinámica del robot, establecida en la ecuación (6.23). Todos los parámetros del robot se calculan usando el programa que se muestra en apéndice B.3, y las funciones que se usan para implementar en diagrama de bloques del robot (ver figura 6.6) se encuentran en el apéndice B.4, B.5, B.6 y B.7.

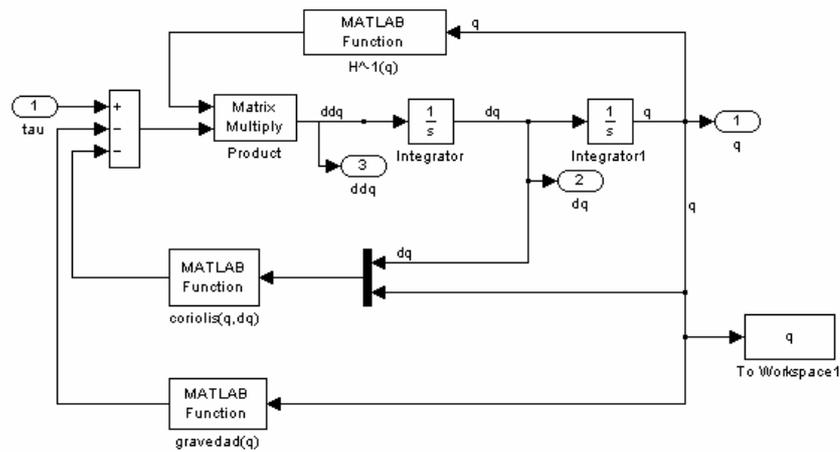


Figura 6.6 Modelo en Simulink del manipulador de dos grados de libertad

Entonces, ejecutando el programa que se encarga de simulación, (referirse al apéndice B.8 para ver el código fuente), se obtiene los siguientes resultados:

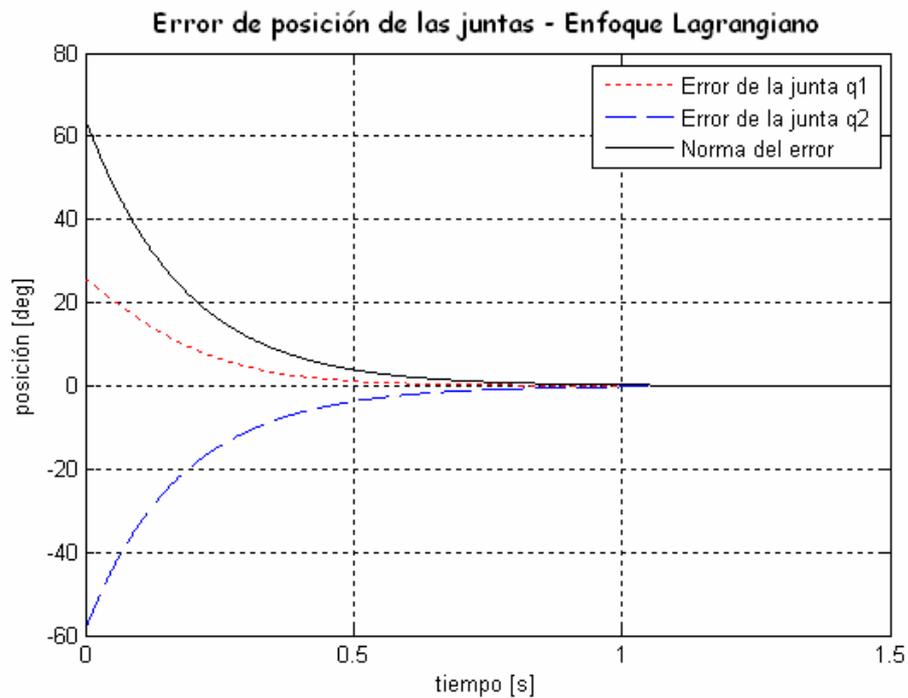


Figura 6.7. Error de posición de las juntas – Enfoque Lagrangiano

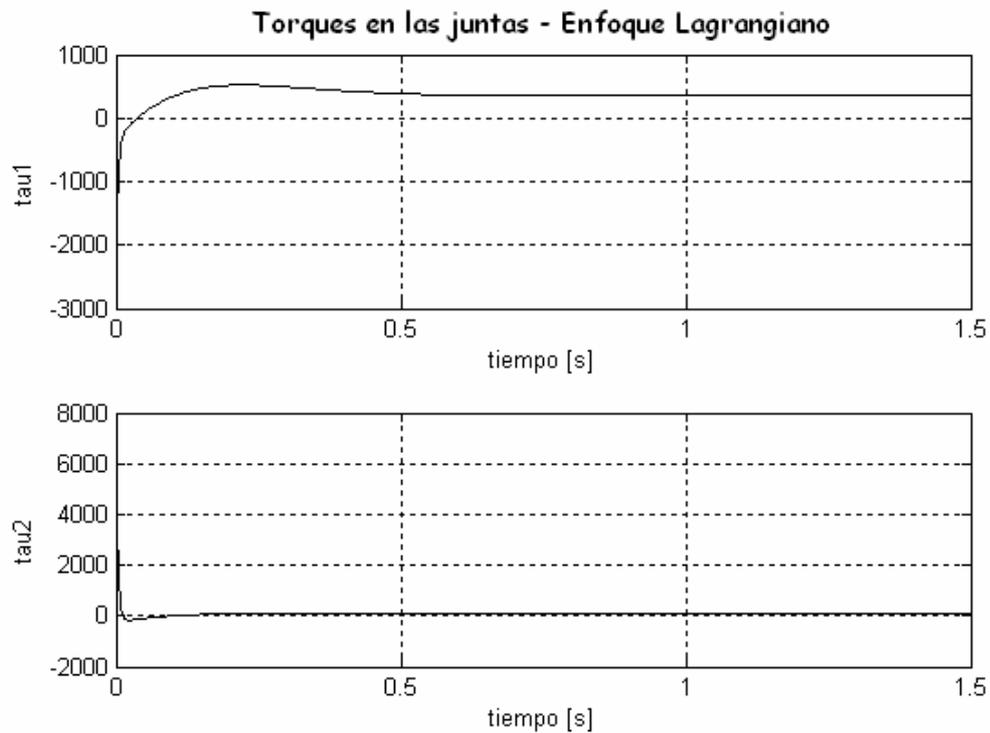


Figura 6.8. Torques presentes en las juntas - Enfoque Lagrangiano

Claramente se observa que los resultados obtenidos son prácticamente los mismos que los encontrados usando un controlador port-Hamiltoniano. En ambos enfoques, el port-Hamiltoniano y el Lagrangiano, se logra estabilizar asintóticamente el error en la configuración cero (ver figuras 6.2 y 6.7), lo que significa que el manipulador alcanza la posición deseada. Además, se observa que la señal de control (torque de entrada), tiene la misma forma en ambos enfoques. La ventaja del enfoque port-Hamiltoniano es que la naturaleza física del manipulador (la energía, la disipación y la estructura de interconexión) se muestra de manera explícita.

Conclusiones y Recomendaciones

1. El comportamiento, las ecuaciones de comportamiento, y las variables manifiestas y latentes son los tres ingredientes principales del lenguaje de modelamiento llamado Enfoque Comportamental. Este enfoque permite describir un fenómeno de una manera muy general sin una necesaria distinción a priori entre entradas y salidas, lo que es muy común cuando se usa las técnicas de modelamiento clásico. En el caso de los sistemas físicos, permite capturar de manera adecuada la naturaleza física de estos sistemas.
2. El concepto de relaciones bilaterales y puertos es superior al concepto de relaciones unilaterales y asignaciones entradas/salidas de un sistema, ya que capturan de manera mas adecuada la naturaleza de las interconexiones que se producen entre los componentes de un sistema. Por tal, el modelamiento basado en puertos es superior al modelamiento clásico. Cabe mencionar que, en cada dominio físico existen un par de variables conjugadas que determinan el puerto a través del cual un sistema puede interactuar con su entorno.
3. El diagrama de lazos es una herramienta grafica que no solo permite representar las interconexiones entre los componentes de un sistema, sino que

nos muestra como fluye la energía entre estos. Además al estar basado en el concepto de puertos y la conservación de energía, permite capturar adecuadamente la naturaleza de las interconexiones de un sistema.

4. El concepto de causalidad de un lazo, no solo indica la dirección de las variables de un puerto, sino que da soporte a los temas computacionales y analíticos, ya que al establecer una dirección de las señales hace posible la implementación y posterior simulación en medios digitales.
5. La naturaleza impone una causalidad del tipo integral a los componentes de un sistema, el pasado de la causa se integra para llegar al efecto en el presente. La presencia de causalidad diferencial en un sistema puede indicar serias violaciones de los principios de conservación de energía.
6. La descripción port-Hamiltoniana de los sistemas físicos, pone en evidencia todas las propiedades energéticas del sistema: La cantidad de energía almacenada, a través de las variables de estado de energía y la función Hamiltoniana, la energía de disipación, que esta representada por la matriz de disipación, la estructura de interconexión, que esta representada por la matriz de interconexión y la interfase con el mundo externo, a través del puerto de potencia. Este enfoque puede verse como la formulación matemática del modelamiento basado en puertos y del diagrama de lazos.

7. La representación port-Hamiltoniana implícita de un sistema representa la dinámica intrínseca o inherente del sistema. La representación port-Hamiltoniana explícita permite expresar la representación implícita mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales. Por tal, permite la simulación, implementación y el posterior diseño de controladores.
8. La idea principal detrás de las diferentes estrategias de control de sistemas port-Hamiltonianos es el moldeamiento de energía del sistema. Se busca que el mínimo de la energía coincida con la configuración que se desea lograr.
9. Los sistemas port-Hamiltonianos son sistemas pasivos. Por tal es posible aprovechar las propiedades y técnicas de control que se heredan de los sistemas pasivos para el diseño de los controladores port-Hamiltonianos. En particular se aprovecha la técnica de estabilización por retroalimentación de salidas para el diseño de un controlador port-Hamiltoniano tal que la energía del sistema controlado tenga un mínimo en la configuración deseada. De hecho, la energía del sistema controlado es igual a la energía de la planta menos la energía suministrada por el controlador.
10. En la técnica de control por interconexión el controlador estará dado por otro sistema port-Hamiltoniano, y la interconexión entre estos sistemas port-Hamiltonianos resulta en otro sistema port-Hamiltoniano. Las funciones Casimir que son determinados solo por la estructura del sistema controlado permiten el diseño del controlador que al igual que en el caso de los

controladores pasivos permite moldear la energía del sistema. Es decir, la energía moldeada es la diferencia entre la energía almacenada en la planta y la energía suministrada por el controlador.

11. El principal inconveniente que presentan las técnicas basadas en la pasividad y las técnicas por interconexión es el obstáculo por disipación. Esto se produce cuando en correspondencia con la configuración de equilibrio existe disipación y por lo tanto se necesita que el controlador extraiga energía infinita de la planta para estabilizar el sistema.
12. Los sistemas mecánicos no presentan el obstáculo de disipación ya que tienen que ser regulados en una configuración que se caracteriza por una velocidad cero. En el caso de las máquinas eléctricas y circuitos eléctricos este no siempre es el caso.
13. La técnica de control basada en la pasividad por interconexión y asignamiento de pasividad (IDA-PBC) permite superar el obstáculo de disipación tomando en cuenta el estado de la planta en la estructura de interconexión. Además provee la libertad de asignar libremente una matriz de interconexión y una matriz de amortiguación para el sistema de lazo cerrado sin afectar las propiedades de estabilidad de la configuración deseada. En general las matrices de interconexión y amortiguación deseadas pueden ser escogidas tomando consideraciones físicas del sistema a controlar.

14. Las técnicas port-Hamiltonianas pueden utilizarse con mucho éxito para el modelamiento y diseño de controladores de los manipuladores roboticos. En el presente trabajo se desarrollo una técnica de control basada en la pasividad capaz de moldear la energía de un manipulador tal que el punto mínimo de esta coincida con la posición deseada, lo que garantiza que el manipulador se estabilice en la posición deseada, es decir, resuelve el problema de regulación. Este algoritmo de control se probó exitosamente en el caso de un manipulador de dos grados de libertad, donde se comprobó la estabilidad asintótica de la posición deseada.

15. Se propone como trabajo futuro el diseño de controladores port-Hamiltonianos de estructura variable, debido al inconveniente de que las técnicas de control anteriores requieren un conocimiento exacto de los parámetros físicos de un sistema, lo cual no siempre se consigue en aplicaciones en la vida real.

Apéndice A

Conceptos Básicos de la Geometría Diferencial

La geometría diferencial es una disciplina matemática que usa los métodos de cálculo integral y diferencial para estudiar problemas en geometría. El objeto básico de la geometría diferencial es el manifold. La principal característica de la geometría diferencial es que una trata con conceptos que son “invariante a coordenadas” o “intrínsecos”. Este apéndice presenta la información básica suficiente para entender los conceptos matemáticos usados en la presente tesis.

A.1 Manifold.- Es un conjunto que localmente “se parece” a un conjunto abierto del espacio Euclidiano de cierta dimensión, llamada la dimensión del manifold. Cada punto en un manifold de dimensión n tiene un vecindario que es homeomorfo al espacio Euclidiano \mathbb{R}^n .

A.2 Mapa.- Dado un conjunto S , un mapa es el par (U, ϕ) , donde U es un subconjunto de S y $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una biyección.

A.3 Mapas compatibles.- Dados dos mapas (U_a, ϕ_a) y (U_b, ϕ_b) tal que $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, son compatibles si:

- $\phi_a(U_a \cap U_b)$ y $\phi_b(U_a \cap U_b)$ son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n .
- El mapeo de superposición $\phi_{ab} = \phi_b \circ \phi_a^{-1} | \phi_a(U_a \cap U_b)$ es un difeomorfismo tipo C^r desde $\phi_a(U_a \cap U_b)$ a $\phi_b(U_a \cap U_b)$.

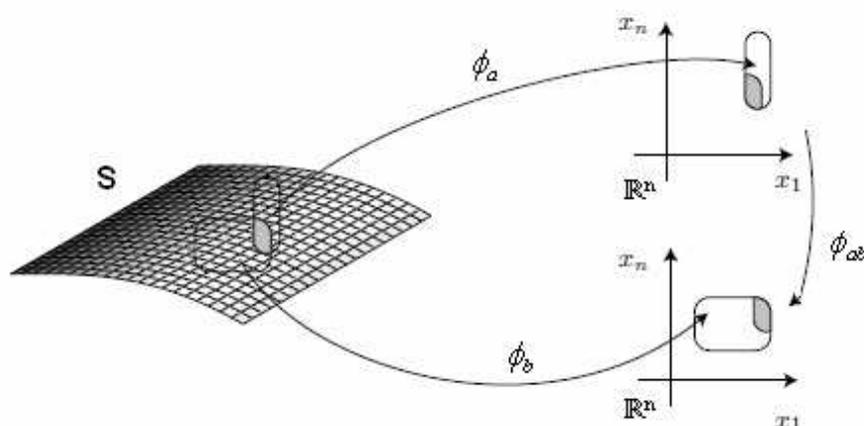


Figura A.1. Mapas compatibles

A.4 Atlas.- Un Atlas en un conjunto S , es una familia de mapas $A = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$,

donde I es un conjunto índice, tal que:

- $S = \bigcup_{i \in I} U_i$, colección de mapas que cubren todo el manifold.
- Para cualquier $i, j \in I$, los mapas (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) son compatibles.

A.5 Atlas Compatibles.- Dos atlas A_1 y A_2 son equivalentes si $A_1 \cup A_2$ es un atlas.

A.6 Estructura diferenciable.- Una estructura diferenciable D en S es una clase equivalente de atlas bajo la relación de equivalencia.

A.7 Manifold diferenciable.- Un manifold diferenciable M es un par (S, D) , donde S es un conjunto y D es una estructura diferenciable.

El conjunto S define el conjunto de puntos en el manifold, mientras que el Atlas (que representa la manera usada para mapear los puntos del manifold al espacio euclidiano) define la estructura diferencial y permite el Cálculo Diferencial en el manifold. Se debe notar que los atlas que pertenecen a diferentes clases equivalentes definen diferentes estructuras que resultan en manifolds completamente diferentes.

A.8 Dimensión de un manifold diferenciable.- La dimensión de un manifold M alrededor de un punto $p \in U_i \subset M$ es la dimensión del espacio lineal que es el codominio del mapeo ϕ_i del mapa (U_i, ϕ_i) .

Si la dimensión alrededor de cada punto del manifold es la misma, por ejemplo sea esta dimensión n , entonces se dice que n es la dimensión del manifold.

A.9 Representación local de un mapeo.- Sea un mapeo $f : M \rightarrow N$, donde M y N son manifolds diferenciables, sea (U, ϕ) un mapa de M y (V, ψ) un mapa de N , **la representación local de f** con respecto a los dos mapas $f_{\psi\phi} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ esta dado por $f_{\psi\phi}(x) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x)$.

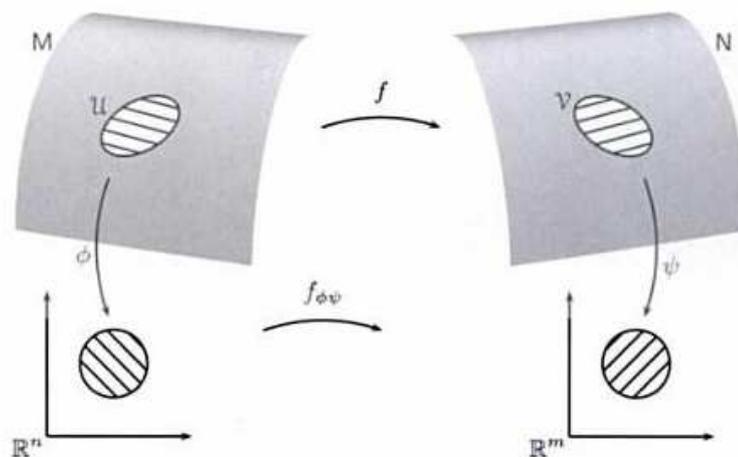


Figura A.2 Representación local de un mapeo.

Tal como se nota en la figura A.2 la representación local es un mapeo entre conjuntos abiertos en el Espacio Euclidiano.

A.10 Mapeos tipo C^r entre manifolds.- Sea un mapeo $f: M \rightarrow N$, donde M y N son manifolds diferenciables:

- f es de clase C^r , donde $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$, si para cada punto $x \in M$, existe mapas (U, ϕ) de M y (V, ψ) de N , tal que la representación local sea de clase C^r .
- Si f es continuo, f es de clase C^0 .
- Si f es de clase C^∞ , se dice que f es **suave**.
- El conjunto de la clase de Mapeos C^r desde M a N se denota por $C^r(M; N)$.
- Si f es una biyección de clase C^r , y si f^{-1} es también de clase C^r , entonces f es un **Difeomorfismo** tipo C^r .

A.11 Curvas y curvas equivalentes.- Dado un manifold M y $x \in M$, una **curva en x** es una curva $\gamma: I \rightarrow M$, donde I es un intervalo que contiene al 0 en su interior, y que además $\gamma(0) = x$.

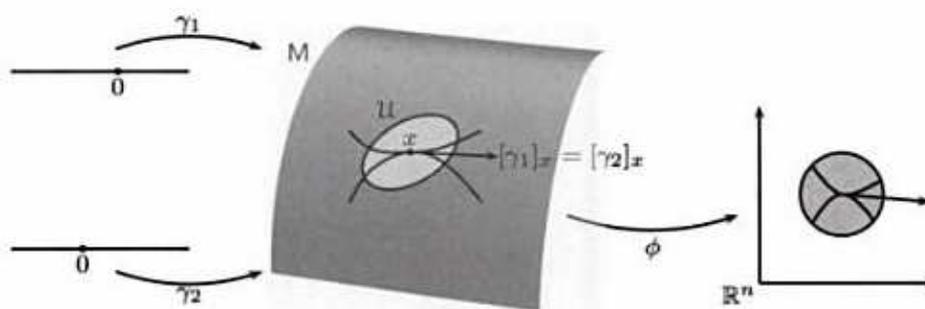


Figura A.3. Curvas equivalentes

Dos curvas γ_1 y γ_2 en x **son equivalentes** en x si, en un mapa (U, ϕ) , donde $x \in U$, las representaciones locales de γ_1 y γ_2 tiene la misma derivada en 0 (ver figura A.3). Se puede probar que esta relación de equivalencia es independiente del mapa usado.

Denotamos $\gamma_1 \sim_x \gamma_2$ si γ_1 y γ_2 son equivalentes en x . La **clase equivalente** de γ se denota por $[\gamma]_x$.

A.12 Vector tangente.- Un vector tangente en x es una clase equivalente de curvas bajo la relación equivalente \sim_x .

A.13 Espacio tangente.- Es el espacio esta formado por todos los vectores tangentes en $x \in M$ y esta denotado por $T_x M$.

A.14 Bundle tangente.- El bundle tangente de M , denotado por TM , es el conjunto dado por la unión de todos los espacios tangentes a M , esto es:

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

Así, un punto de TM es un vector que es tangente a M en algún punto $x \in M$.

A.15 Espacio cotangente.- Es el vector espacio formado por el conjunto de operadores lineales desde $T_x M$ a \mathbb{R} , donde $x \in M$, esta denotado por $T_x^* M$.

Un elemento $v^* \in T_x^* M$ se llama vector cotangente o simplemente covector.

A.16 Bundle cotangente.- El Bundle Cotangente de M , denotado por $T^* M$, es el conjunto dado por la unión de todos los espacios cotangentes a M , esto es:

$$T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M$$

Así, un punto de $T^* M$ es un operador lineal en un espacio tangente de M en algún punto $x \in M$.

Se debe notar que los conceptos de espacio cotangente y bundle cotangente son los conceptos duales de espacio tangente y bundle tangente.

A.17 Vector campo.- Un vector campo X en un manifold M es un mapeo dado por $X : M \rightarrow TM$ que asigna un vector tangente $X(m) \in T_m M$ al punto $m \in M$.

Una **curva integral** con condición inicial m_0 en $t=0$ es un mapeo diferenciable $c : (a,b) \rightarrow M$ tal que (a,b) es un intervalo abierto que contiene al 0, $c(0) = m_0$ y:

$$\frac{d}{dt}c(t) = X(c(t)), \quad \forall t \in (a,b)$$

Es posible interpretar un Vector Campo como un operador que asocia a cada punto del manifold un “vector velocidad”. La curva integral de un vector campo es una curva cuya velocidad en cada punto esta dada por el vector campo en cada punto.

A.18 Covector campo.- Un Covector campo X^* en un manifold M es un mapeo dado por $X^* : M \rightarrow T^*M$ que asigna un covector $X^*(m) \in T_m^*M$ al punto $m \in M$.

A.19 Derivada de Lie.- Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo suave definida en un manifold, y sea X un vector campo definido en M . Es posible determinar la variación del mapeo f a lo largo de la dirección determinada por X , esto es a lo largo de las curvas integrales de X .

La derivada de la función f a lo largo del vector campo X es un mapeo definido en M y esta definido por:

$$L_X f : M \rightarrow \mathbb{R} \qquad L_X f(x) = \frac{\partial^T f}{\partial x} X(x), \quad x \in M$$

Donde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

A.20 Corchete de Lie.- Dados dos vectores campos X y Y en un manifold y un mapeo $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, es posible definir un tercer vector campo, que es llamado el corchete de Lie de X y Y que es indicado por $[X, Y]$ que es único, tal que:

$$L_{[X;Y]} f : L_X L_Y f - L_Y L_X f$$

El significado del Corchete de Lie es que, si se va adelante a lo largo de la curva integral de X y luego se mueve por la curva integral de Y para luego moverse hacia atrás por la curva integral de X y finalmente a lo largo de la curva integral de Y , no se puede asegurar que se pueda alcanzar el punto inicial.

A.21 Distribución.- Una distribución Δ en un manifold diferencial M de dimensión n es un mapeo suave que asigna a cada punto $x \in M$ un sub-espacio $\Delta(x) \subset T_x M$. Una distribución es llamada suave si y solo si los sub-espacios que este determina en el espacio tangente de cada punto pueden ser abarcado por un conjunto de vectores campo suaves, esto es, existe $p(\leq n)$ vectores campo suaves X_i tal que:

$$\Delta(m) = \text{span}\{X_i(x)\} \quad i = 1, \dots, p$$

La distribución es llamada dimensionalmente constante si y solo si, para cada $x \in M$, $\Delta(x)$ tiene la misma dimensión.

A.22 Codistribución.- Una codistribución Δ^* en un manifold diferencial M de dimensión n es un mapeo suave que asigna a cada punto $x \in M$ un sub-espacio $\Delta^*(x) \subset T_x^*M$. Una codistribución es llamada suave si y solo si los sub-espacios que este determina en el espacio cotangente de cada punto pueden ser abarcado por un conjunto de covectores campo suaves, esto es, existe $p(\leq n)$ vectores campo suaves X_i^* tal que:

$$\Delta^*(m) = \text{span}\{X_i^*(x)\} \quad i = 1, \dots, p$$

La codistribución es llamada dimensionalmente constante si y solo si, para cada $x \in M$, $\Delta^*(x)$ tiene la misma dimensión.

A.24 Vector bundle.- Aproximadamente hablando, un vector bundle es un manifold con un espacio vectorial sujetado a cada punto. Los bundles tangente y cotangente de un manifold son ejemplos de vector bundles. Formalmente:

Un vector bundle Q sobre M consiste de:

- Un manifold Q , llamado el espacio total.
- Un mapeo suave $\pi : Q \rightarrow M$, llamado mapeo de proyección.

- Para cada $m \in M$, el conjunto $\pi^{-1}(m)$ tiene la estructura de un espacio vectorial.

Lo que es más, la siguiente condición de trivialidad local, debe ser satisfecha: Para cada $m \in M$ existe un vecindario $U \in M$, un entero $n > 0$ y un difeomorfismo:

$$h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

Tal que para cada $m \in M$, la correspondencia $x \rightarrow h(m, x)$ define un isomorfismo entre el espacio vectorial \mathbb{R}^n y el espacio vectorial $\pi^{-1}(m)$. El par (U, h) se llama las coordenadas locales del sistema para Q .

El espacio vectorial $\pi^{-1}(m)$ es llamado la fibra en m para cualquier $m \in M$.

Apéndice B

Programas en MATLAB para el Control del Robot de 2GDL

B.1 Programa – Parámetros del modelo port-Hamiltoniano del robot

```

% ESTE SCRIPT CALCULA LOS PARAMETROS DEL ROBOT DE 2GDL QUE SE
% UTILIZAN PARA HALLAR SU MODELO PORT-HAMILTONIANO
clc; clear all
m1 = 20;      m2 = 20;      % Kg
L1 = 1;      L2 = 1;      % m
Lc1 = 0.5;   Lc2 = 0.5;   % m
I1 = 5;      I2 = 5;      % Kg/m2
g = 9.81;    % m/s2

% MATRIZ DE INERCIA
syms q1 q2
h11 = m1*Lc1^2 + m2*(L1^2 + Lc2^2 + 2*L1*Lc2^2 + 2*L1*Lc2*cos(q2)) +
I1+I2;
h12 = m2*(Lc2^2 + L1*Lc2*cos(q2)) + I2;
h21 = h12;
h22 = m2*Lc2^2 + I2;
disp('Matriz de inercia :')
H = [h11 h12; h21 h22]

% ENERGIA CINETICA
syms p1 p2
a = inv(H);
Ek = 1/2*[a(1)*p1^2 + 2*a(2)*p1*p2 + a(4)*p2^2];
Ek = simple(Ek);
disp('Energia cinetica del manipulador:')
pretty(Ek)

% ENERGIA POTENCIAL
P1 = m1*g*Lc1*sin(q1);
P2 = m2*g*(L1*sin(q1) + Lc2*sin(q1 + q2));
Ep = P1 + P2;
Ep = simple(Ep);
disp('Energia potencial del manipulador:')
pretty(Ep)

% ENERGIA TOTAL
E = simple(Ek + Ep);
disp('Energia total del manipulador:')
pretty(E)

% DERIVADAS PARCIALES DE LA ENERGIA
dHq1 = diff(E,q1);

```

```

dHq1 = simple(dHq1);
disp('Derivada de la energia respecto de q1 "(dH/q1)":')
pretty(dHq1)
dHq2 = diff(E,q2);
dHq2 = simple(dHq2);
disp('Derivada de la energia respecto de q2 "(dH/q2)":')
pretty(dHq2)
dHp1 = diff(E,p1);
dHp1 = simple(dHp1);
disp('Derivada de la energia respecto de p1 "(dH/p1)":')
pretty(dHp1)
dHp2 = diff(E,p2);
dHp2 = simple(dHp2);
disp('Derivada de la energia respecto de p2 "(dH/p2)":')
pretty(dHp2)

```

B.2 Programa – Simulación usando el enfoque port-Hamiltoniano

```

% ESTE SCRIP GRAFICA MUESTRA GRAFICAMENTE LOS RESULTADOS QUE SE
% OBTIENEN AL APLICAR LA TECNICA DE CONTROL BASADA EN LA PASIVIDAD
% EN EL FORMALISMO PORT-HAMILTONIANO AL MANIPULADOR ROBOTICO DE 2GDL
clc; clear all; close all

```

```

% CONDICIONES INICIALES

```

```

q1(1) = 0; dq1(1) = 0;
q2(1) = 0; dq2(1) = 0;
p1(1) = 0; dp1(1) = 0;
p2(1) = 0; dp2(1) = 0;
T = 0.001;           % Periodo de muestreo
Kp = 6000;          % Ganancia proporcional
Kd = 1100;          % Ganancia derivativa
q1d = -0.4463;      % Posicion deseada de la junta q1
q2d = 1.0048;      % Posicion deseada de la junta q2
N = 1500;           % Numero de puntos a simular

```

```

% Del modelo port-Hamiltoniano se obtiene que:

```

```

% dq1 = dH/dp1
% dq2 = dH/dp2
% dp1 = -dH/dq1 + u1
% dp2 = -dH/dq2 + u2
% Las expresiones dH/dp1, dH/dp2, dH/dq1 y dH/dq2 se
% encuentra en el archivo "Parametros_Hamiltoniano.m"

```

```

for k = 1:N
    % Señal de control
    U1(k) = 294.3*cos(q1(k)) + 98.1*cos(q1(k) + q2(k)) - Kp*(q1(k) -
q1d) - Kd*dq1(k);
    U2(k) = 98.1*cos(q1(k) + q2(k)) - Kp*(q2(k) - q2d) - Kd*dq2(k);
    % Respuesta del sistema a la señal de control
    q1(k+1) = q1(k) + ...
        T*(-p1(k) + p2(k) + p2(k)*cos(q2(k)))/(-35 +
5*cos(2*q2(k)));
    q2(k+1) = q2(k) + ...
        T*(p1(k) + p1(k)*cos(q2(k)) - 5*p2(k) -
2*p2(k)*cos(q2(k)))/(-35 + 5*cos(2*q2(k)));

```

```

    p1(k+1) = p1(k) + ...
                T*(-(294.3*cos(q1(k)) + 98.1*cos(q1(k) + q2(k))) +
U1(k));
    p2(k+1) = p2(k) + ...
                T*(-((-2*p1(k)*p2(k)*sin(q2(k)) +
2*p2(k)^2*sin(q2(k)))/(-70 + 10*cos(2*q2(k))) + ...
                20*(-p1(k)^2 + 2*p1(k)*p2(k) +
2*p1(k)*p2(k)*cos(q2(k)) - 5*p2(k)^2 - 2*p2(k)^2*cos(q2(k)))*...
                sin(2*q2(k))/(-70 + 10*cos(2*q2(k))).^2 +
98.1*cos(q1(k) + q2(k))) + U2(k));
    % Calculo de las nuevas velocidades
    dq1(k+1) = (q1(k+1) - q1(k))/T;
    dq2(k+1) = (q2(k+1) - q2(k))/T;
end

% DIBUJAMOS EL ERROR DE POSICION
k = 180/pi; % Para convertir el error de [rad] a [deg]
e1 = k*(q1 - q1d);
e2 = k*(q2 - q2d);
Ne = sqrt(e1.^2 + e2.^2);
t = [1:1:N]*T; % Eje de tiempo
plot(t,e1(1:N),'r',t,e2(1:N),'--b',t,Ne(1:N),'-k')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('posición [deg]')
a = title('Error de posición de las juntas - Enfoque port-
Hamiltoniano');
set(a,'FontSize',12,'Fontname','Comic Sans MS');
grid on
axis([0 1.5 -60 80])
legend('Error de la junta q1','Error de la junta q2',...
'Norma del error',1);

% DIBUJAMOS LOS TORQUES
figure
subplot(211)
plot(t,U1,'-k')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('taul')
%axis([0 1.5 -2500 500])
grid on
a = title('Torques en las juntas - Enfoque port-Hamiltoniano');
set(a,'FontSize',12,'Fontname','Comic Sans MS');
subplot(212)
plot(t,U2,'-k')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('tau2')
axis([0 1.5 -2000 8000])
grid on

```

B.3 Programa – Parámetros del modelo Lagrangiano del robot

```

% ESTE SCRIPT CALCULA LOS PARAMETROS DEL ROBOT DE 2GDL QUE SE
% UTILIZAN PARA HALLAR SU MODELO LAGRANGIANO
clc; clear all
m1 = 20;      m2 = 20;      % Kg

```

```

L1 = 1;      L2 = 1;      % m
Lc1 = 0.5;  Lc2 = 0.5;  % m
I1 = 5;     I2 = 5;     % Kg/m2
g = 9.81;   % m/s2

% MATRIZ DE INERCIA
syms q1 q2
h11 = m1*Lc1^2 + m2*(L1^2 + Lc2^2 + 2*L1*Lc2^2 + 2*L1*Lc2*cos(q2))+
I1+I2;
h12 = m2*(Lc2^2 + L1*Lc2*cos(q2)) + I2;
h21 = h12;
h22 = m2*Lc2^2 + I2;
disp('Matriz de inercia :')
H = [h11 h12; h21 h22]

% MATRIZ DE CORIOLIS
syms q1 q2 dq1 dq2 k
k = -m2*L1*Lc2*sin(q2);
c11 = k*dq2;
c12 = k*(dq1 + dq2);
c21 = -k*dq1;
c22 = 0;
disp('Matriz de coriolis:')
C = [c11 c12; c21 c22];
pretty(C)

% VECTOR DE CORIOLIS
disp('Vector coriolis:')
VC = C*[dq1; dq2];
pretty(VC)

% VECTOR DE GRAVEDAD
g1 = (m1*Lc1 + m2*L1)*g*cos(q1) + m2*Lc2*g*cos(q1 + q2);
g2 = m2*Lc2*cos(q1 + q2);
disp('Vector de gravedad:')
G = [g1; g2];
pretty(G)

```

B.4 Programa – Matriz de inercia del robot

```

function H=H(q)
% Esta función devuelve de la matriz de inercia

q1=q(1);
q2=q(2);

%Matriz de Inercia con los valores
H = [ 50 + 20*cos(q2)      10+10*cos(q2);
      10 + 10*cos(q2)      10      ];

```

B.5 Programa – Inversa de la matriz de Inercia del robot

```

function invH =inv_ache(q)

```

```

% Esta función devuelve la inversa de la matriz de inercia
q1=q(1);
q2=q(2);

% Matriz de Inercia
H = [ 50 + 20*cos(q2)          10+10*cos(q2);
      10 + 10*cos(q2)          10          ];

%Devolvemos la inversa
invH=inv(H);

```

B.6 Programa – Vector de coriolis del robot

```

function VC=Matriz_C(V)
% Esta función devuelve el vector C(q,dq)
dq1 = V(1);
dq2 = V(2);
q1 = V(3);
q2 = V(4);
% Devuelve la matriz C
VC=[      -dq2*sin(q2)   -1/2*dq2*sin(q2);
     1/2*dq1*sin(q2)           0];

```

B.7 Programa – Vector de gravedad del robot

```

function VG=gravedad(q)
% Esta función devuelve el vector de Gravedad
q1=q(1);
q2=q(2);

% Vector de gravedad
VG = [2943/10*cos(q1) + 981/10*cos(q1+q2);
      10*cos(q1+q2)];

```

B.8 Programa – Simulación usando el enfoque Lagrangiano

```

% ESTE SCRIP GRAFICA MUESTRA GRAFICAMENTE LOS RESULTADOS QUE SE
% OBTIENEN AL APLICAR LA TECNICA DE CONTROL PD+G(q) BASADA EN EL
% FORMALISMO DEL LAGRANGIANO AL MANIPULADOR ROBOTICO DE 2GDL
clear all, clc, close all

% EJECUTAMOS LA SIMULACION DEL SISTEMA EN SIMULINK
sim('robot.mdl')

% DIBUJAMOS EL ERROR DE POSICION
k = 180/pi; % Para convertir el error de [rad] a
[deg]
e1 = k*-E(1,:);

```

```

e2 = k*-E(2,:);
N = sqrt(e1.^2 + e2.^2);    % Calculamos la norma del error
plot(t,e1,':r',t,e2,'--b',t,N,'-k')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('posición [deg]')
a = title('Error de posición de las juntas - Enfoque Lagrangiano');
set(a,'FontSize',12,'Fontname','Comic Sans MS');
grid on
axis([0 1.5 -60 80])
legend('Error de la junta q1','Error de la junta q2',...
       'Norma del error',1);

% DIBUJAMOS LOS TORQUES
t1 = T(1,:);
t2 = T(2,:);
figure
subplot(211)
plot(t,t1,'-k')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('tau1')
%axis([0 1.5 -2500 500])
grid on
a = title('Torques en las juntas - Enfoque Lagrangiano');
set(a,'FontSize',12,'Fontname','Comic Sans MS');
subplot(212)
plot(t,t2,'-k')
xlabel('tiempo [s]')
ylabel('tau2')
axis([0 1.5 -2000 8000])
grid on

```

Bibliografía

1. A. D. Cerezo. Modeling, simulation and control of a doubly-fed induction machine controlled by a back-to-back converter. PhD Thesis, Universidad Politecnica de Cataluña (2006).
2. A. J van der Shaft, B.M Maschke. The Hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports. (1995).
3. A. J van der Shaft, M. Dalsmo, B. M. Maschke. Mathematical structure in the network representation of energy-conserving physical systems. IEEE Conference on Decision and Control (1996)
4. A. J van der Shaft, R. Ortega, I. Mareels, B. M. Maschke. Putting energy back in control. IEEE Control Magazine (2001)
5. A. J van der Shaft. L2-Gain and passivity techniques in nonlinear control. Springer Verlag (2000)
6. A. J van der Shaft. Port-Hamiltonian systems and Dirac structures. CDC, Paradise Island (2004)
7. A. J van der Shaft. Port-Hamiltonian systems: Network modeling and control of nonlinear physical systems. University of Twente (2004)
8. B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. Robotics, modelling, planning and control. Springer Verlag (2009)
9. B.M Maschke, A. J van der Shaft. An intrinsic Hamiltonian formulation of network dynamics: Non-standard Poisson structures and gyrators. (1992)

10. C. Secchi. Control of interactive robotic interfaces: a port-Hamiltonian approach. PhD Thesis, University of Modena and Reggio Emilia (2003)
11. D.C Karnopp and R.C Rosenberg. Analysis and simulation of multiports systems – The bond graph approach to physical systems dynamics. MIT Press (1968)
12. F. Bullo, A. D. Lewis. Geometric control of mechanical systems, modeling, analysis and design of simple mechanical control systems. Springer (2000)
13. F. Couenne, D. Eberard. Multiscale distributed parameter model of an absorption column using a port-based geometric approach (2005)
14. H. A. Wheeler, D. Dettinger, Wheeler monograph (1949)
15. H. M. Paynter, Analysis and design of engineering systems. MIT Press (1961)
16. H. K. Khalil. Nonlinear systems – Third edition. Prentice Hall (2002)
17. J. J. Acosta, R. Ortega. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. IEEE Transactions on Automatic Control (2005).
18. Jan C. Willems, Jan W. Polderman. Introduction to mathematical systems theory, a behavioral approach. Springer (1997).
19. Jan C. Willems. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. IEEE Transactions On Automatic Control (1991).
20. Jan C. Willems. The behavioral approach to open and interconnected systems. IEEE Control Systems Magazine (2007)
21. Jie Bao, Peter L. Lee. Process control, the passive systems approach. Springer Verlag (2007)
22. L. Ljung, T. Glad. Modeling of dynamical systems. Prentice Hall (1994)

23. M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar. Robot modeling and control. John Wiley & Sons (2000).
24. P. Breedveld. Bond graphs. University of Twente (2003).
25. P. Breedveld. Port-Based modeling of dynamic systems: Fundamental concepts and bond graphs. University of Twente (2005)
26. P. Fishwick. Handbook of dynamic system modeling. Chapman & Hall (2007)
27. P. J. Gawthrop, D. J Ballance. Bond graphs in the design of engineering systems.
28. P. R. Halmos. Finite-dimensional vector spaces. Springer (1974)
29. R. Douglas Gregory. Classical mechanics. Cambridge University Press (2006)
30. S. Banerjee. Dynamics for engineers. John Wiley & Sons Ltd (2005)
31. V. Duindam. Port-Based modeling and control for efficient bipedal walking robot. PhD Thesis, University of Twente (2006)
32. W. S. Levine. The control handbook. CRC Press (1999)