UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICIDAD

LIMA - PERU

"DIFERENCIALES MECANICOS CON ENGRANAJES"

Tesis que presenta el señor Henry Bertrand para optar el título de Ingeniero Mecánico-Electricista.

1957

Un movimiento 'resultante' de la diferencia entre dos simples, se designa con el nombre de movimiento diferencial.

Existen numerosos movimientos diferenciales mecánicos ó electricos. Entre los diferenciales mecánicos, los más conocidos son:

- el tornillo diferencial
- el torno de mano
- el arnés diferencial
- el aparejo
- las palancas de movimientos diferenciales
- los trenes epicicloidales con engranajes rectos
- " " " " " cónicos
- " " " " " mixtos
- los trenes hipocicloidales con engranajes rectos
- " " " " " cónicos
- " " " " " mixtos
- los trenes combinados epi é hipocicloidales

Entre todos los sistemas de diferenciales mecánicos, los trenes epicicloidales é hipocicloidales, tienen la posibilidad de permitir la realización de un movimiento diferencial de rotación de infinita amplitud y por ende, logran después de algunos años, una plaza muy importante dentro de la organización de mecánicas de precisión tales como:

- Caja-puente de automóviles
- Reductores de velocidades
- Arnés diferencial de herramientas mecánicas
- Máquina de calcular ó caja registradora
- Cambios de velocidades
- Sincronización de movimientos, etc.

El estudio de una forma práctica, de los diferentes tipos así como de sus construcciones racionales, son el objeto de ésta tesis, intitulada:

"<u>DIFERENCIALES MECANICOS CON ENGRANAJES</u>"

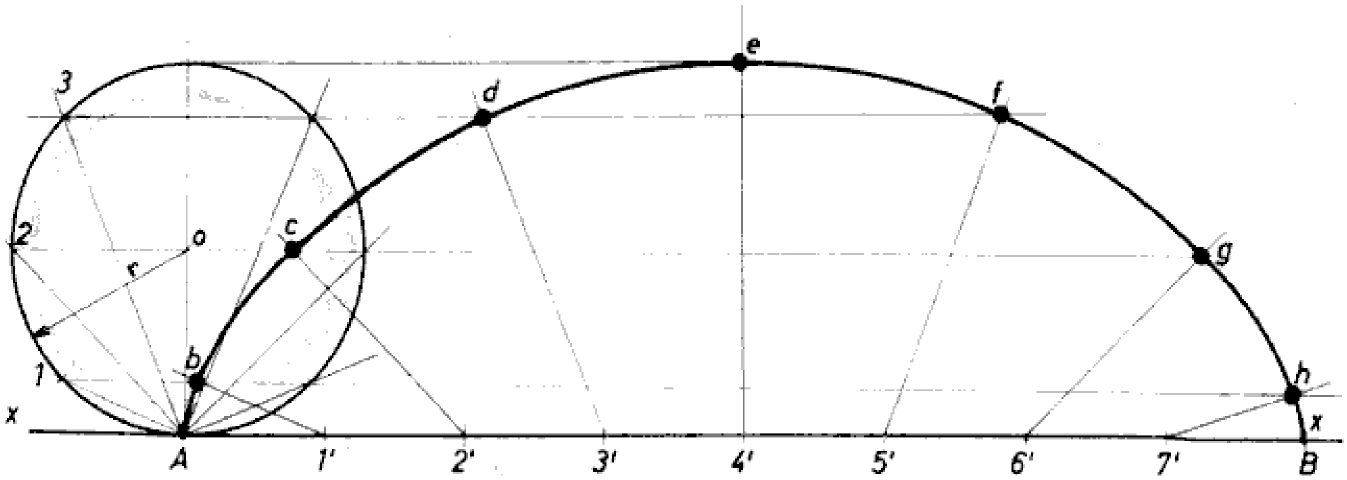
PLANO

PLANO

PLANO

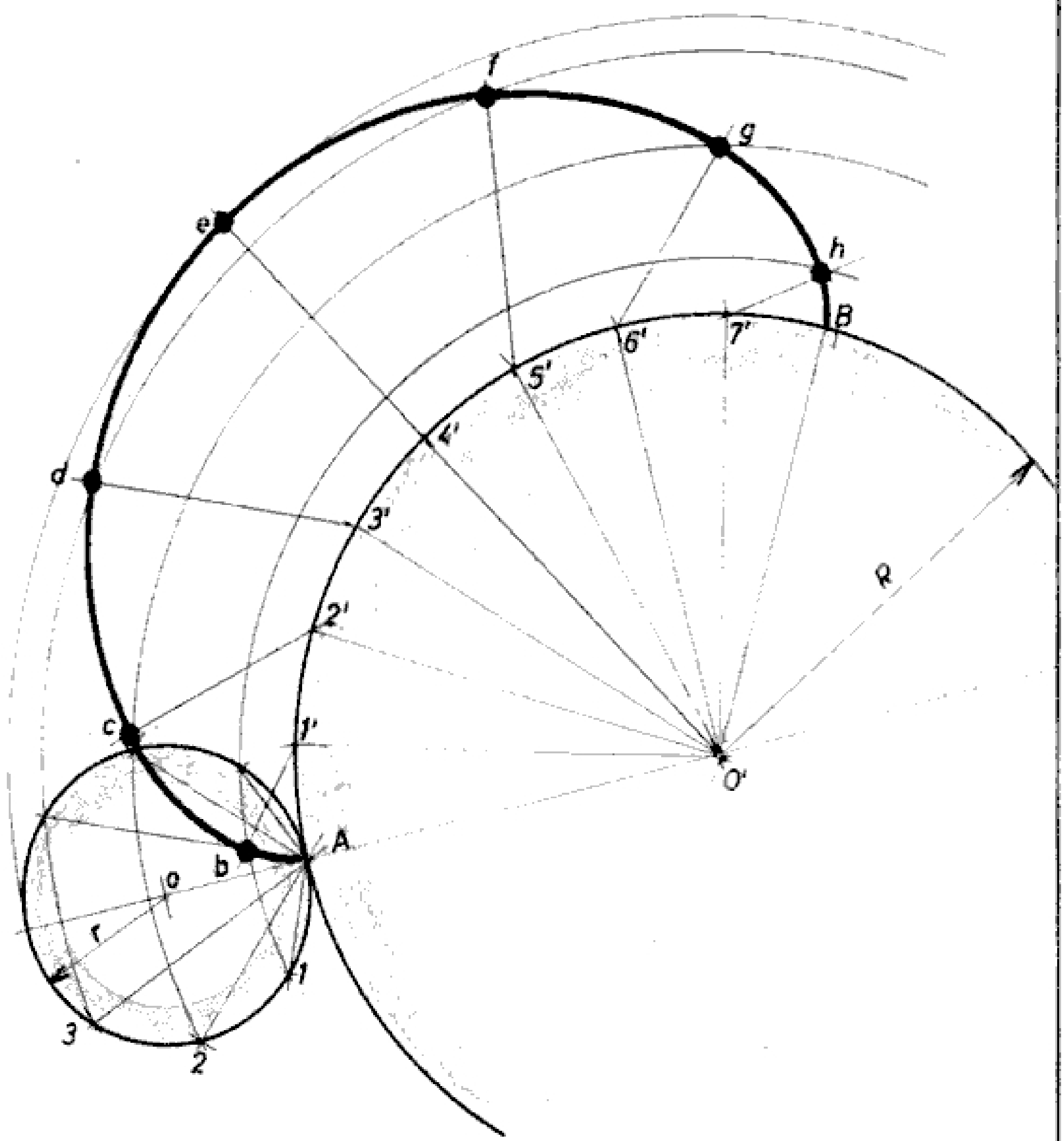
La CICLOIDE es la curva descrita por un punto A de un círculo generador de radio r que gira, sin deslizarse, sobre una línea recta xx durante una revolución completa.

TRAZO DE LA CICLOIDE



Para construír la cicloide de un círculo de radio r, se lleva sobre la línea recta xx una longitud AB igual al desarrollo de la circunferencia de dicho círculo. Se divide la línea recta AB llamada base ó vía de rodamiento y el círculo generador en una misma cantidad de partes iguales 1, 2, 3, n; 1', 2', 3', n'.

Se trazan las líneas rectas A1, A2, A3, An; por los puntos de división de la circunferencia, se llevan líneas paralelas a AB. Desde los puntos de división de AB (1', 2', 3', n'), se trazan paralelas a las líneas rectas A1, A2, A3, An; encontrando estas líneas a las paralelas a la base en los puntos b, c, d, etc., que pertenecen a la cicloide. Se obtiene el trazo de la cicloide uniendo los puntos: AbcdefghB.



La EPICICLOIDE es la curva descrita por un punto A de un círculo generador de radio r que rueda sin deslizarse sobre el exterior de un círculo fijo de radio R.

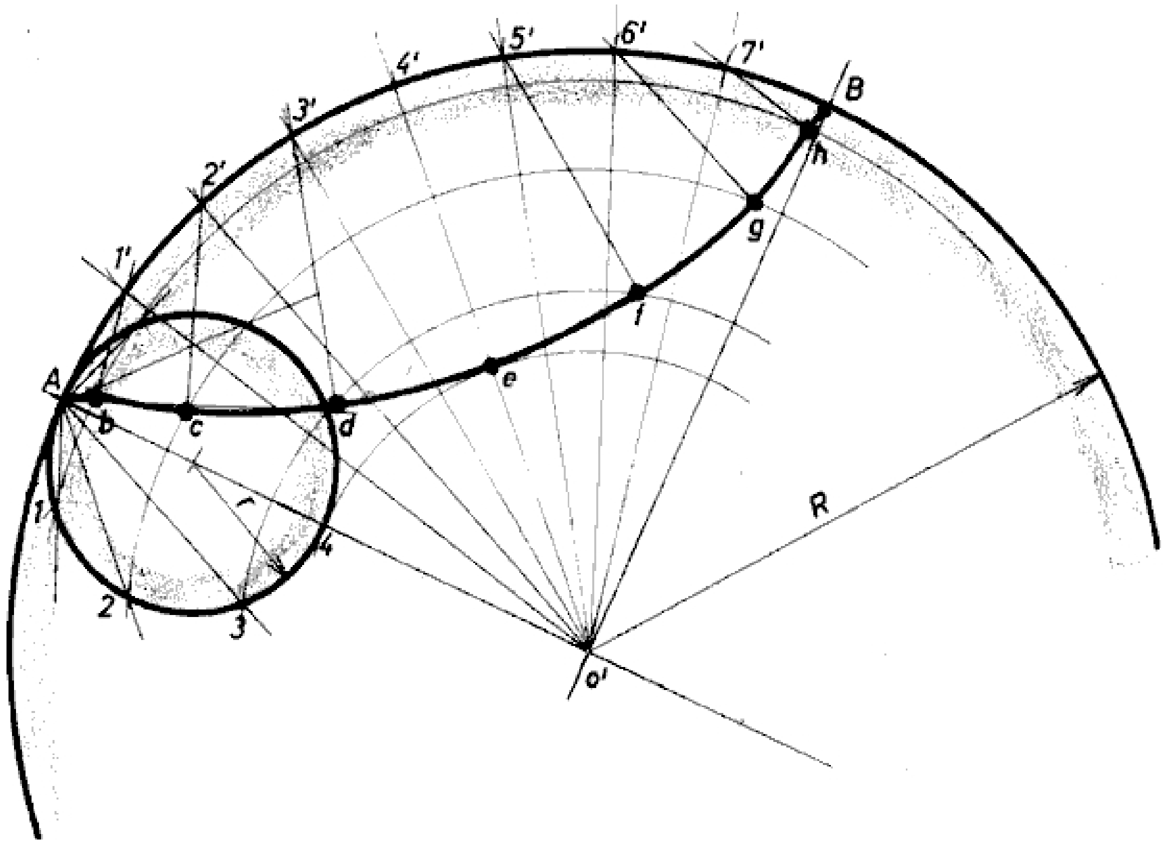
TRAZO DE LA EPICICLOIDE

Para trazar la epicicloide se procede de la misma manera de que se traza la cicloide, pero la base en lugar de ser una línea recta es un arco de círculo de O' con una longitud AB igual al desarrollo de la circunferencia del círculo generador O. Se divide esta última y el arco AB en una cantidad igual de partes iguales. Se trazan las rectas A1, A2, A3, An. Por los puntos de la división del círculo de centro O, se llevan paralelas a AB. A partir de los puntos de división de AB (1', 2', 3', n'). Se describen arcos de círculo que cortan los arcos descritos por O' en los puntos A, b, c, d, e, etc. que pertenecen a la epicicloide.

Se obtiene el trazo de la epicicloide juntando los puntos A, b, c, d, e, f, g, h, B

La HIPOCICLOIDE es la curva descrita por un punto A de un círculo generador de radio r que rueda sin deslizarse sobre el interior de un círculo fijo de radio R.

TRAZO DE LA HIPOCICLOIDE



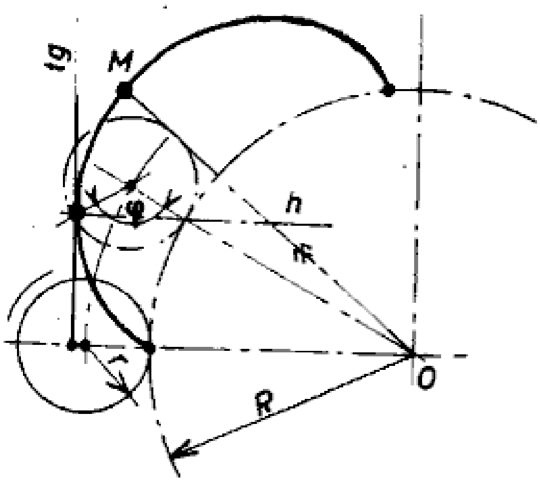
El método de trazado de la hipocicloide no difiere del que se utiliza para trazar la epicicloide.

El camino de rodamiento es el arco AB igual al desarrollo de la circunferencia del círculo generador.

Se divide esta última y el arco AB en una misma cantidad de partes iguales. Se trazan las rectas A1, A2, A3, An. Por los puntos de división del círculo de centro O se llevan paralelas hacia AB.

Desde los puntos de división de AB (1', 2', 3', n'), se trazan arcos de círculo de radios respectivamente iguales a A1, A2, A3, An. que cortan los del centro O' en los puntos b, c, d, e, etc. que pertenecen a la hipocicloide.

Se obtiene el trazo de la hipocicloide uniendo los puntos A, b, c, d, e, f, g, h, B.



EPICICLOIDE

$$x = (R+r)\cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r\cos\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right)$$

$$Y = (R+r)\sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r\sin\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right)$$

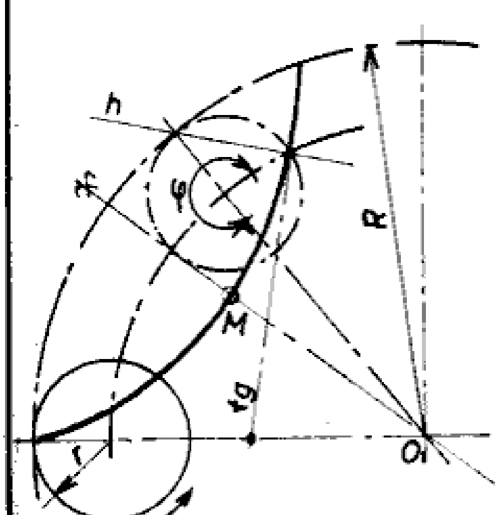
RADIOS DE CURVATURA ρ

$$\rho = \frac{4r\,(R+r)}{R+2r}\sin\frac{1}{2}\varphi$$

en M: $\rho = 4r\,\dfrac{R+r}{R+2r}$

DESARROLLO

$$L = 8r.\,\frac{R+r}{R}$$



HIPOCICLOIDE

$$x = (R-r)\cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) + r\cos\left(\frac{R-r}{R}\varphi\right)$$

$$Y = (R-r)\sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r\sin\left(\frac{R-r}{R}\varphi\right)$$

RADIOS DE CURVATURA ρ

$$\rho = \frac{4r\,(R-r)}{R-2r}\sin\frac{1}{2}\varphi$$

en M $\rho = 4r.\,\dfrac{R-r}{R-2r}$

DESARROLLO

$$L = 8r.\,\frac{R-r}{R}$$

PLANO

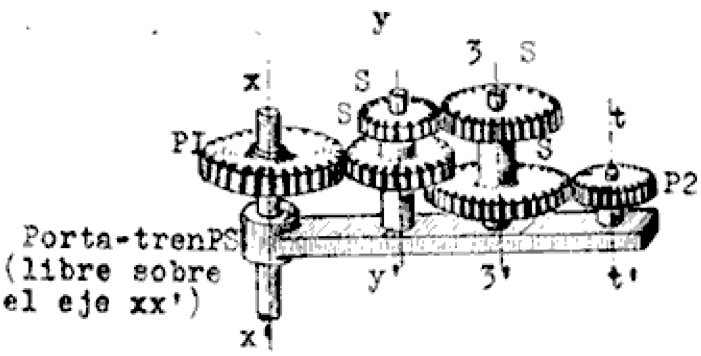


Figura I

Consideramos el aparato de la figura. La rueda dentada P1 está alojada sobre el árbol xx'; las 4 ruedas S y P2 están libres sobre los ejes yy' 33', tt' fijos del brazo porta-tren PS, que está libre sobre el eje xx'.

Si hacemos girar el brazo porta-tren y, simultaneamente ó no, la rueda P1, todas las otras ruedas empiezan a girar; un punto de la circunferencia de una rueda cualquiera describe con relación a la circunferencia primitiva de la rueda con la cual engrena, una epicicloide, de ahí el nombre de TREN EPICICLOIDAL al conjunto de éste dispositivo.

CONSTITUCION

a) Elementos esenciales

Un diferencial está constituído esencialmente por:

- dos ruedas dentadas extremas P1 y P2 denominadas planetarios (ver figura)
- una o varias ruedas dentadas intermedias S1, S2, S3, denominadas satélites.
- Un brazo PS que lleva los satélites y que se denomina porta-satélites.

Estos tres grupos de elementos (planetarios, satélites, llevados por el porta-satélites) son coaxiales.

El eje de rotación de los planetarios y del porta-satélites es efectivamente común y está en línea recta.

b) Elementos conexos

La realización mecánica de los diferenciales necesita de que se adjunten a los elementos esenciales engranajes suplementarios.

Estos piñones suplementarios se llaman engranajes conexos. Su finalidad es la de permitir la explotación de los movimientos obtenidos por el diferencial.
Los engranajes conexos son designados sobre la figura por C1, C2, C3, C4.

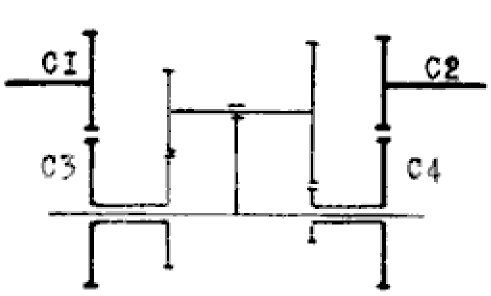
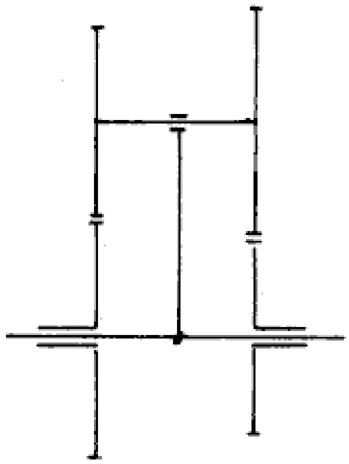
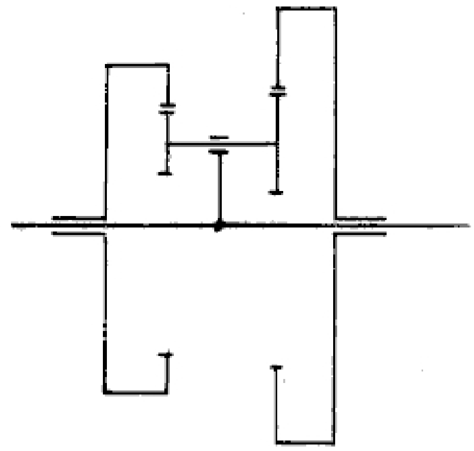


Figura 2

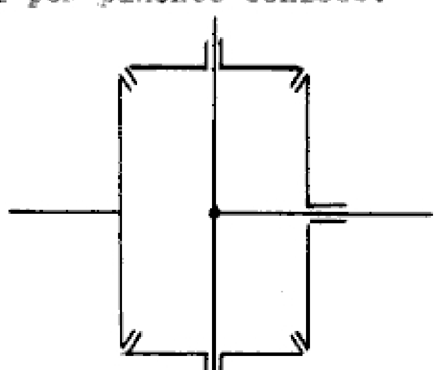
c) Categorías de los diferenciales

- Los diferenciales rectos constituídos por ruedas dentadas rectas, sea con dientes exteriores, sea con dientes interiores.

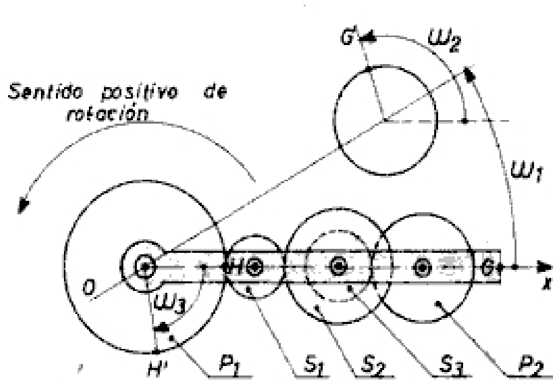




- Los diferenciales esféricos (ó cónicos) constituídos en su parte esencial por piñones cónicos.



d) Principios de funcionamiento



Sea el tren epicicloidal P1, S, S, S, S, P2. La rueda dentada P1, concéntrica del eje del brazo, es la primera rueda del tren, la rueda P2 es la última.

Escogiendo dentro del plano de la figura:

Una dirección fija, OX por ejemplo, a partir de aquella contaremos los ángulos barridos por las rectas pertenecientes a las diferentes piezas móviles.

Un sentido positivo de rotación, sentido trigonométrico, por ejemplo.

Designamos respectivamente por W1, W2, W3, signos algebraicos de velocidades angulares del brazo y de las ruedas expuestas en la dirección escogida.

Al cabo de un segundo, el brazo ha recorrido un ángulo de W1 radianes, la rueda P1 un ángulo W3 radianes y la rueda dentada P2 un ángulo de W2 radianes.

Por consiguiente, el ángulo del cual ha girado cada una de estas ruedas, con relación al brazo, es igual al ángulo de la cual ha girado con relación a Ox disminuído del ángulo del cual ha girado el brazo con relación a ésta dirección y esto cualquiera que sea el sentido de las rotaciones.

Obtenemos así:

Angulo de rotación de P1 con relación del brazo: W3 - W1
Angulo de rotación de P2 con relación del brazo: W2 - W1

Todo se pasa pués como si <u>el brazo quedando inmóvil</u>, las ruedas P1 y P2 giraran alrededor de sus respectivos ejes con velocidades angulares (W3 - W1) y (W2 - W1)

Pués, la razón del equipaje es igual a la relación de las velocidades angulares de las ruedas dentadas extremas P1, P2, el brazo quedando inmóvil; podemos escribir considerando a P1 como la rueda motora:

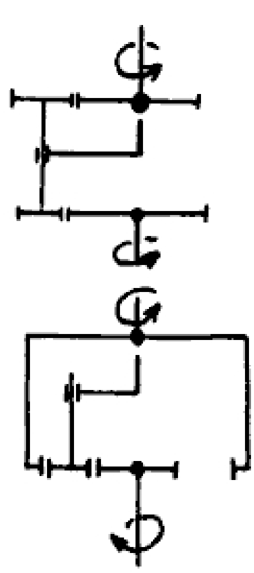
$$K = \frac{W3 - W1}{W2 - W1}$$

Esta expresión es llamada <u>fórmula de WILLIS</u>, es aplicada a todos los trenes epicicloidales.

Como las velocidades angulares son proporcionadas al número de revoluciones por minuto (RPM) ó también:

$$K = \frac{RPM3 - RPM1}{RPM2 - RPM1}$$

e) <u>Sentido de rotación</u>



Un diferencial puede ser de razón positiva ó negativa.

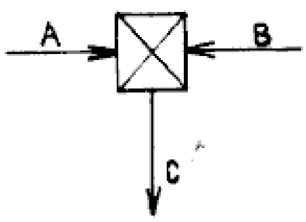
Es de <u>razón positiva</u> cuando el porta-satélites está bloqueado y el planetario dirigente hace girar al planetario dirigido en los <u>mismos sentidos</u>

Es de <u>razón negativa</u> cuando estando bloqueado el porta-satélites, el planetario dirigente hace girar al planetario dirigido en <u>sentido contrario</u>

Verificaremos luego que el movimiento más lento es siempre:

- a los diferenciales de razón positiva, uno de los planetarios.
- en los diferenciales de razón negativa, el porta-satélites.

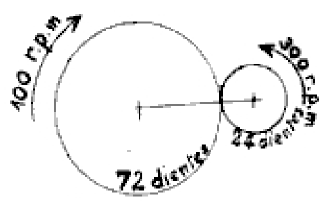
PLANO



Para determinar las relaciones entre los elementos A, B, C de un diferencial, se utilizan dos sistemas:

- el sistema de las "velocidades angulares"
- el sistema de las "variaciones por revolución", también llamado "sistema de escalas"

a)- Velocidades angulares



La relación entre las velocidades angulares de dos ruedas dentadas es igual a la inversa de la relación existente entre el número de dientes de los engranajes considerados.

Así tenemos en un par de engranajes de relación 1/3 cuya rueda grande tuviera 72 dientes, y la pequeña rueda tuviera 24 dientes.

Si Vr = 300 revoluciones/minuto la velocidad de la rueda grande será: VR = 100 revoluciones/minuto.

b)- Variaciones por revolución ó "escalas"

Se llama variación por revolución el número de grados angulares que gira la rueda R por una revolución completa de la rueda r.

La relación de las "variaciones por revolución"de un par de engranajes es igual a la relación del número de dientes de los engranajes considerados.

Las variaciones por revolución se expresan en unidades prácticas.

La unidad práctica que debe utilizarse es la que expresa la finalidad propuesta en el mecanismo considerado.

Ejemplos:
- el metro ó el kilómetro para el automóvil
- el grado angular para un árbol de máquina
- el sol para una caja registradora
- el milésimo de artillería para un cañón

Simbolizaremos la escala por UPR, es decir, unidad por revolución, ya que la finalidad propuesta puede variar según el género de estudios que se desea ejecutar.

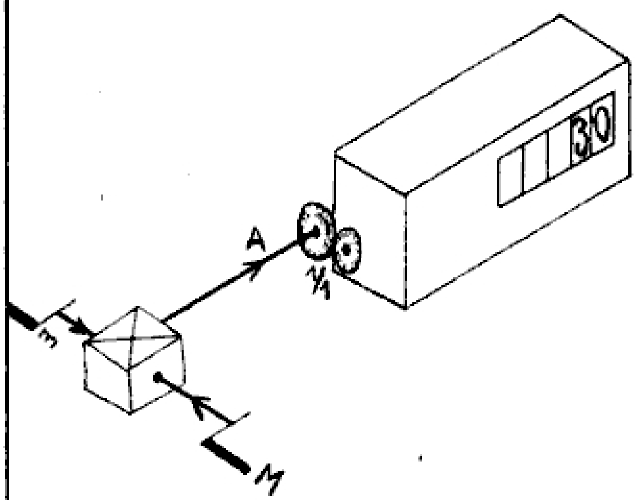
La relación de los pares es proporcional a las escalas.

Cuando el sentido de rotación de un elemento A del diferencial es definido, la escala de B ó de C, está precedida por el signo + ó - según de que el sentido del elemento B ó c, considerado sea creciente ó decreciente.

c)- Aplicación del sistema de escalas

Para concretar el sistema de escalas, tomemos un ejemplo:

- Sea una caja registradora (mandada por un diferencial) utilizada en una sección de almacén donde se venden dos clases de objetos: los unos a 10 soles, los otros a 20 soles la pieza.



Nuestro diferencial está organizado interiormente tal que, si la vendedora hace girar la manizuela m, de una vuelta (ver figura) en el sentido de las agujas del reloj, mientras que la manizuela M, queda en reposo, es decir, blocueada, nuestra caja marcará 10 soles.

De la misma manera, una vuelta de la manizuela M, equivale a marcar 20 soles.

Se puede concebir que sirviéndose de las dos manos pueda simultáneamente dar una vuelta (positiva) a m y una vuelta (positiva) a M, marcará así 30 soles.

Tendremos: $m + M = 10 + 20 = 30$

En éste ejemplo, la unidad por revolución (UPR) es el Sol.

Los diferentes tipos de diferenciales derivados de las dos grandes categorías: trenes rectos y trenes esféricos, pueden realizarse según variantes diversas.

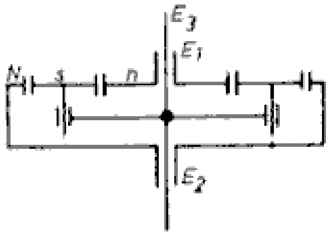
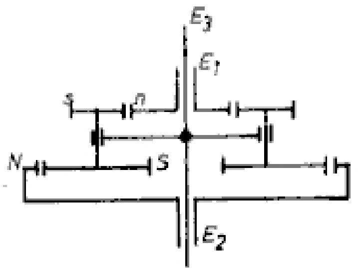
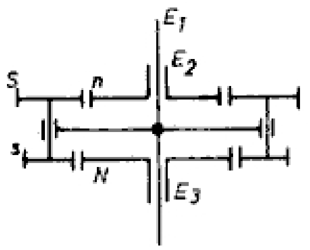
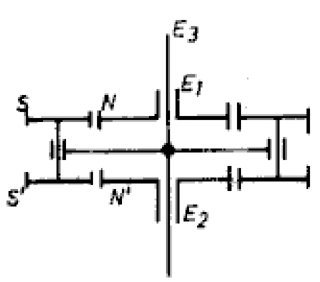
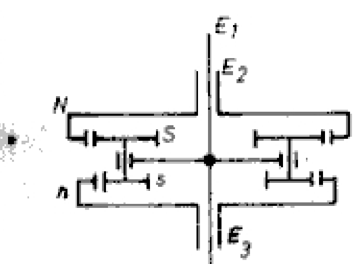
Los esquemas de dichas variantes serán representados en las tres páginas siguientes.

Los montajes prácticos correspondientes a los esquemas representados en ésta tesis, pueden ser muy diferentes, según el concepto de los fabricantes.

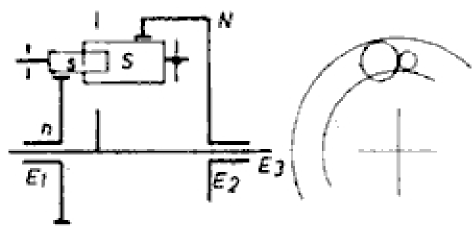
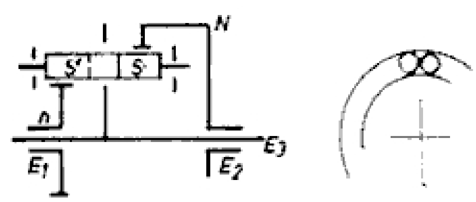
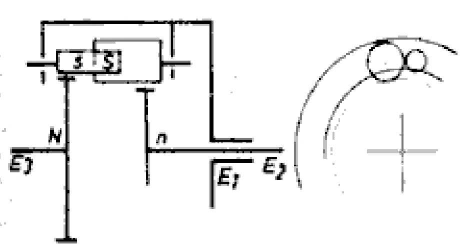
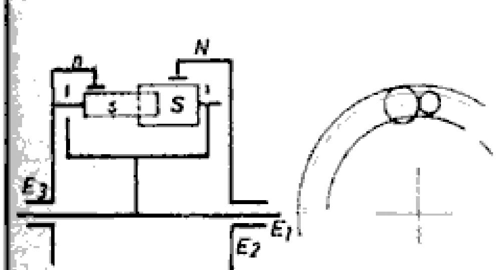
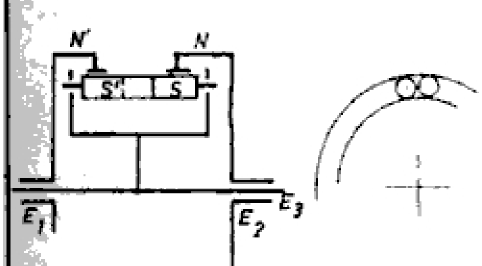
A título de ejemplo, algunos montajes comprobados están indicados a continuación.

N	Número de dientes del gran planetario
n	Número de dientes del pequeño planetario
S ó S'	Número de dientes de uno ó de los grandes satélites
s ó s'	Número de dientes de uno ó de los pequeños satélites
UPR	Unidad por revolución
P	Gran planetario
p	Pequeño planetario
c	Porta-satélites
E_1	Variación de la Unidad por revolución, por vuelta de árbol correspondiente al valor más pequeño
E_2	Variaciones de UPR por vuelta de árbol correspondiente al valor intermedio (comprendido entre E_1 y E_3)
E_3	Variaciones de UPR por vuelta de árbol correspondiente al valor mayor
w_1	Velocidad angular del árbol más veloz
w_2	Velocidad angular intermedia entre w_1 y w_3
w_3	Velocidad angular del árbol más lento
k	Razón positiva del diferencial
-k	Razón negativa del diferencial

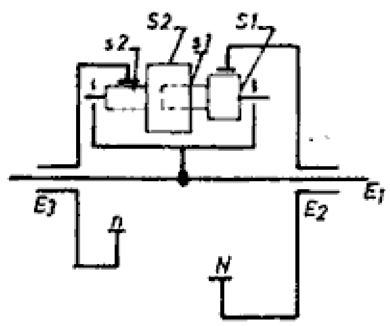
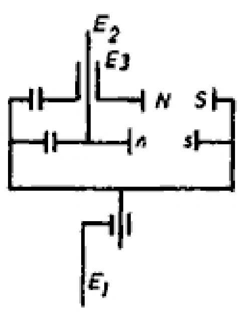
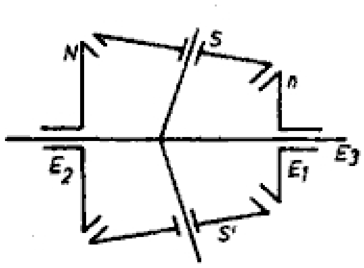
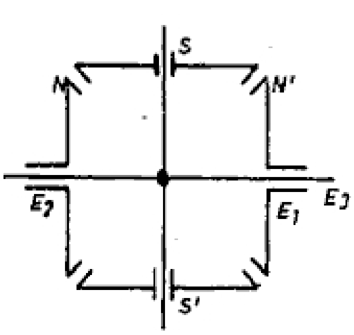
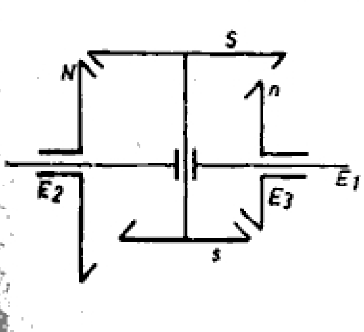
DIFERENTES TIPOS

ESQUEMA DEL DIFERENCIAL	RAZON DEL DIFERENCIAL	LIMITES	VALORES EN UPR. E1	E2	E3	LIMITES DE $\frac{E_2}{E_3}$
1	2	3	4	5	6	7
 Tipo 1 $N > n$	$-K = \frac{n}{N}$	mini.	1	2	3	0.66 a 0.8
		maxi.	1	4	5	
 Tipo 2 $N > n$	$-K = \frac{N \times S}{s \times N}$	mini.	1	1	2	0.5 a 0.95
		maxi.	1	19	20	
 Tipo 3 $N > n$	$K = \frac{N \times s}{S \times N}$	mini.	1	1	2	0.5 a 0.66
		maxi	1	2	3	
 Tipo 4 $N = N'$	$K = \frac{N \times s'}{S \times N'}$		1	1	2	0.5
 Tipo 5 $N > n$	$K = \frac{N \times s}{S \times n}$	mini.	1	4	5	0.8 a 0.99
		maxi.	1	999	1000	

DIFERENTES TIPOS

ESQUEMA DEL DIFERENCIAL	RAZON DEL DIFERENCIAL	VALORES EN U.P.R. LIMITES	E_1	E_2	E_3	LIMITES DE E_2/E_3
1	2	3	4	5	6	7
 Tipo 6 $N > n;\ S > s$	$K = \frac{n}{N}$	mini. maxi.	3 15	7 85	10 100	0.7 a 0.85
 Tipo 7 $N > n;\ S = S'$	$K = \frac{n}{N}$	mini. maxi.	1 1	2 4	3 5	0.66 a 0.8
 Tipo 8 $N > n;\ S > s$	$-K = \frac{n}{N}$	mini. maxi.	1 3	1 7	2 10	0.5 a 0.7
 Tipo 9 $N > n;\ S > s$	$-K = \frac{n}{N}$	mini. maxi.	1 1	1 2	2 3	0.5 a 0.66
 Tipo 10 $N = N';\ S = S'$	$-K = \frac{N}{N'}$		1	1	2	0.5

DIFERENTES TIPOS

ESQUEMA DEL DIFERENCIAL	RAZON DEL DIFERENCIAL	LIMITES	VALORES EN UPR E_1	E_2	E_3	LIMITES DE E_2/E_3
1	2	3	4	5	6	7
	$K = \frac{n \times S1 \times S2}{s_1 \times s2 \times N}$	mini.	3	7	10	0.7 a 0.75
		maxi	1	3	4	
Tipo 11 $N > n; S2 > s2; S_1 > s1$						
	$K = \frac{n \times S}{s \times N}$	mini.	1	1	2	0.5 a 0.95
		maxi	1	19	20	
Tipo 12 $N > n; S > s$						
	$K = \frac{n}{N}$	mini	1	1	2	0.5 a 0.66
		maxi	1	2	3	
Tipo 13 $N > n; S = S'$						
	$K = \frac{N}{N'}$		1	1	2	0.5
Tipo 14 $N = N'; S = s'$						
	$K = \frac{N+s}{S \times n}$	mini	1	11	12	0.92 a 0.99
		maxi	1	99	100	
Tipo 15 $N > n; S > s$						

Entre los diversos tipos que acabamos de ver, es necesario escoger uno que responda lo mejor posible al empleo que se le quiera dar y esto reza en cada uno de los casos que se presenten.

Puede suceder de que varios tipos respondan a las condiciones impuestas; en este caso, hay que escoger aquel cuyo rendimiento será mayor y su realización menos onèrosa.

Cada vez que los satélites deban girar de manera efectiva, hay que preferir un diferencial recto a un diferencial esférico, porque los satélites pueden montarse mas facilmente sobre rodajes de billas. En los demás casos, por ejemplo las partes posteriores de los autos, donde los satélites giran poco y con poca frecuencia, pueden estar constituídos por piñones cónicos.

Notaremos que en los cuadros de las páginas 17, 18 y 19 para todos los diferenciales, hemos tomado la misma relación:

$$E_1 + E_2 = E_3 \quad (1)$$

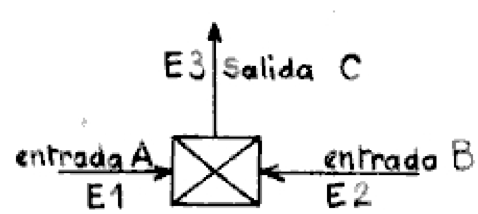
pero que E_1, E_2 ó E_3, no corresponden siempre al mismo elemento, esto se debe al hecho de que para todos los diferenciales, el elemento más lento ó el más rápido, no es siempre el mismo.

De todos modos, el ingreso siempre está (en principio) en E_1, es decir, sobre el elemento más rápido y la suma sobre E_3, que corresponde al elemento más lento.

Los valores de E_1, E_2 ó E_3, se expresan siempre en unidades por revolución (UPR)

Método práctico

Sea un diferencial figurado esquematicamente, comporta:
- una entrada A teniendo por UPR el valor E_1
- una entrada B teniendo por UPR el valor E_2
- una salida C teniendo por UPR el valor E_3



Se da siempre, para cualquier tipo, en la entrada, teniendo el valor más pequeño en UPR, la denominación E_1, y a la salida, es decir, para el mayor valor en UPR, la denominación E_3.

Hemos visto que para todos los diferenciales tenemos:

$$E_1 + E_2 = E_3$$

es por consiguiente fácil, cuando se tienen dos valores sea E_1 y E_2 ó E_1 y E_3 ó E_2 y E_3, conocer el tercer valor.

Estos valores deben ser números enteros para facilitar el cálculo. Se les hace enteros afectándolos con un coeficiente que será el mismo para los 3 elementos.

Enseguida, se determina el valor de la relación:

$$\frac{E2}{E3} = \theta$$

Se busca en las columnas (7) de las páginas 17, 18 y 19 cuales son los diferenciales que puedan convenir porque permiten obtener la relación θ.

Enseguida, nos queda entre los tipos posibles a tomar el diferencial más simple.

Ejemplo: Se trata de determinar la organización interna del diferencial de la caja registradora que nos ha servido de ejemplo en la página 14.

Tenemos la relación:

$$E1 + E2 = E3$$

E1 = 10 soles
E2 = 20 soles
E3 = 10 + 20 = 30 soles

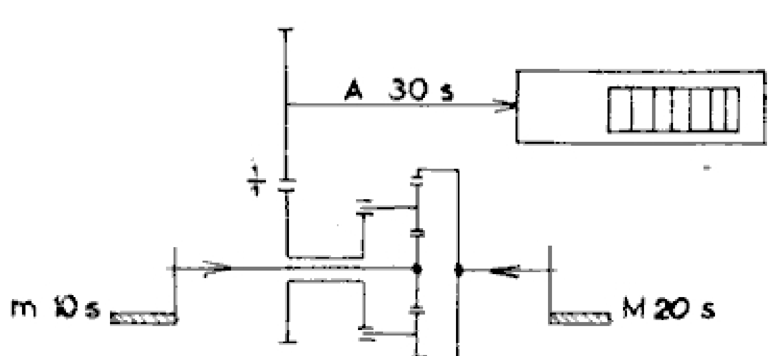
Determinemos la relación $\frac{E2}{E3}$

$$\frac{E2}{E3} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,66$$

Nos referimos a las páginas 17, 18, 19 y en las columnas (7) buscamos que tipos son favorables para la realización considerada.

Encontramos en el órden los tipos Nos. 1, 2, 3,

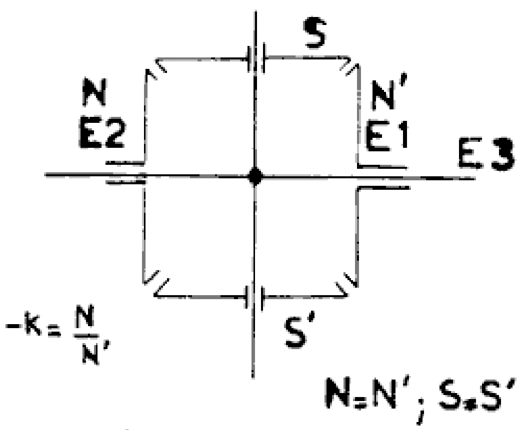
La construcción del tipo N°. 1 siendo la menos onerosa, la adoptamos y el esquema de nuestra caja registradora se establecerá según



PLANO

Si, para determinar el número de dientes de los diversos elementos constituyentes de un tren esférico, el problema es excesivamente sencillo, no sucede lo mismo para los diferenciales rectos, sobre todo cuando se quiere fijar primeramente el estorbo, y conservar el mismo módulo, tanto para el pequeño planetario, así como para el gran planetario.

DIFERENCIALES ESFERICOS



El diferencial de este tipo es el de más fácil determinación. Efectivamente, la relación E2/E3 = 0,5 sea cual fuere el número de dientes de los planetarios ó de los satélites.

Las únicas relaciones a tener en cuenta son de que el número de dientes N y N1 de dos planetarios sean cantidades iguales. Asimismo el número de dientes S y S1 de los satélites deben ser también cantidades iguales.

Para los diferenciales esféricos, de los tipos 13,14,15 de las páginas 19 bastará conocer la razón del diferencial para determinar el número de dientes, según las fórmulas de la columna (2) páginas 19.

DIFERENCIALES RECTOS

Existen varios métodos para determinar el número de dientes de los diferenciales rectos.

No todos dan resultados idénticos para un mismo diferencial, y particularmente para los de los tipos 2, 3 y 5 que son muy utilizados.

El método de las fracciones equimúltiples que se indicará más adelante es el más práctico, el más conveniente en muchos casos, el más rápido, pero suministra números de dientes sin proporción entre los planetarios y los satélites.

En cambio, el método de descomposición en factores primos da una cantidad mucho más pequeña de posibilidades.

Conviene ensayar primero el método de las fracciones equimúltiples y de acuerdo con el estorbo del que se disponga, y la estética del resultado logrado, debe considerar dicho resultado como satisfactorio ó ensayar otro método.

Lo que complica enormemente la determinación de los dientes de los engranajes constituyentes de los trenes rectos, es la necesidad absoluta de obtener la relación:

$$N + s = n + S$$

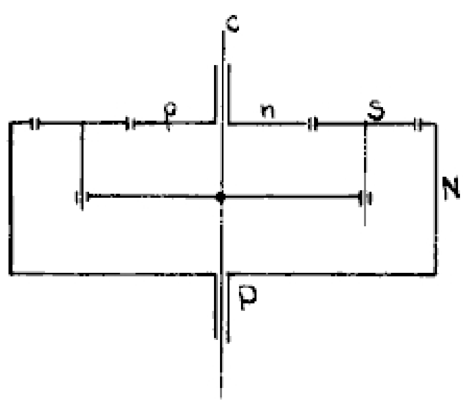
es decir, que la suma de los dientes del gran planetario y del pequeño satélite debe ser igual a la suma de los dientes del pequeño planetario y del gran satélite.

Esta obligación se debe al hecho de que es necesario tener a los dos satélites s y S sobre un eje común.

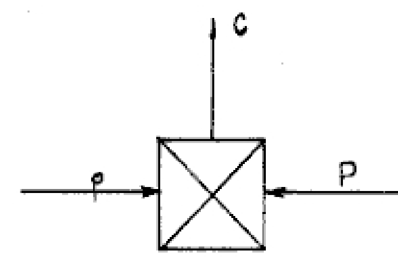
Los diferenciales de los tipos 1, 2, 3 y 5 son los más utilizados; por lo tanto los estudiaremos más profundamente enseguida.

DETERMINACION DEL NUMERO DE DIENTES DE UN DIFERENCIAL DEL TIPO 1

Sea un diferencial de razon $-K = 1/2$



$$-K = \frac{n}{N}$$



Se necesita: $n + S = N - s$

Se puede obtener una fracción equimúltiple equivalente multiplicando los dos términos por la misma cantidad.

Sea "A" dicha cantidad, que puede ser cualquiera

$$\frac{1 \times A}{2 \times A}$$

Tomemos por ejemplo: $A = 30$

$$\frac{1 \times 30}{2 \times 30} = \frac{30}{60}$$

$$\text{O } n = 30 \quad \text{y} \quad N = 60$$

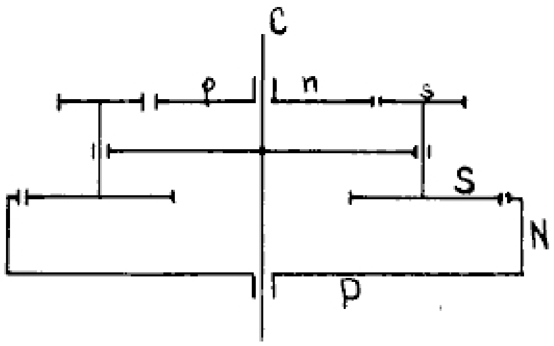
$$S = \frac{N - n}{2} = \frac{60 - 30}{2} = 15$$

Se puede hacer, por consiguiente:

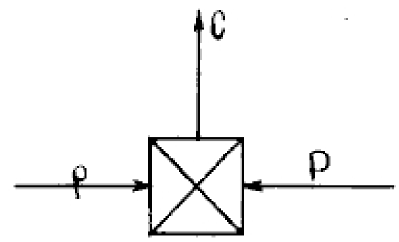
N = 60 dientes.
S = 15 dientes.
n = 30 dientes.

DIFERENCIAL DEL TIPO 2

Sea un diferencial de razón $-K = -2/3$



$$-K = \frac{n \times S}{s \times N}$$



Se requiere: $N - S = n + s$ y $N > 2S$

Se puede obtener una fracción equimúltiple equivalente multiplicando los dos términos por una misma cantidad.

Sea "A" esta cantidad, que puede ser cualquiera

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{6 \times A}{9 \times A} = \frac{6 \times A}{A \times 9} = \frac{6}{A} \times \frac{A}{9}$$

Tomemos por ejemplo $A = 4$ se tiene: $\frac{6}{4} \times \frac{4}{9}$

Sumemos los dos términos de la primera fracción, se tiene:

$$6 + 4 = 10 = B$$

Restemos los términos de la segunda fracción, se tiene:

$$9 - 4 = 5 = B$$

Multipliquemos los términos de la primera fracción por B', se tiene:

$$\frac{6}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{30}{20}$$

Multipliquemos los términos de la segunda fracción por B, se tiene:

$$\frac{4}{9} \times \frac{10}{10} = \frac{40}{90}$$

Puede escribirse:

$$\frac{n \times S}{s \times N} = \frac{30}{20} \times \frac{40}{90}$$

Verificación:

Es necesario que la suma de los términos de la primera fracción sea igual a la diferencia de los términos de la segunda.

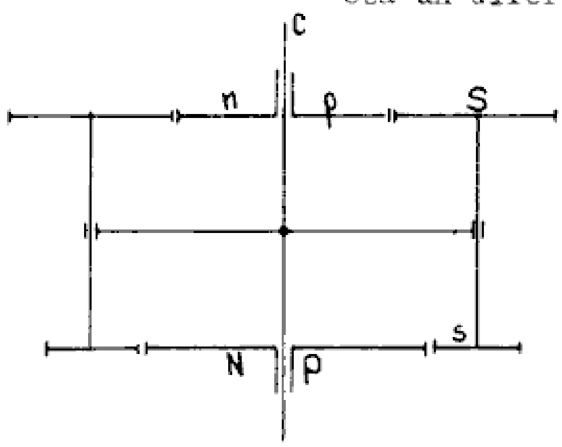
$$30 + 20 = 90 - 40$$

puede hacerse:

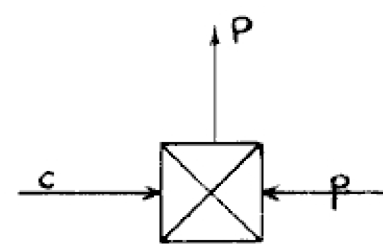
N = 90 dientes
n = 30 dientes
S = 40 dientes
s = 20 dientes

DIFERENCIAL DEL TIPO 3

Sea un diferencial de razón K = 1/2



$$K = \frac{n \times s}{S \times N}$$



Se necesita: $n + S = N + s$

Puede obtenerse una fracción equimúltiple equivalente multiplicando los dos términos por una misma cantidad.

Sea "A" dicha cantidad, que puede ser cualquiera

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times A}{2 \times A} = \frac{A \times 1}{2 \times A} = \frac{A}{2} \times \frac{1}{A}$$

Tomemos por ejemplo: A = 10

Se tiene: $\frac{10}{2} \times \frac{1}{10}$

Sumando los dos términos de cada fracción, se tiene:

$$10 + 2 = 12 = B$$
$$1 + 10 = 11 = B'$$

Multipliquemos los dos términos de la primera fracción por B' se tiene:

$$\frac{10}{2} \times \frac{11}{11} = \frac{110}{22}$$

Multipliquemos los dos términos de la segunda fracción por B se tiene:

$$\frac{1}{10} \times \frac{12}{12} = \frac{12}{120}$$

Puede escribirse:

$$\frac{n \times 1}{S \times N} = \frac{10}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{110 \times 12}{22 \times 120}$$

<u>Verificación</u>:

Es necesario que la suma de los dos términos de cada fracción sean iguales

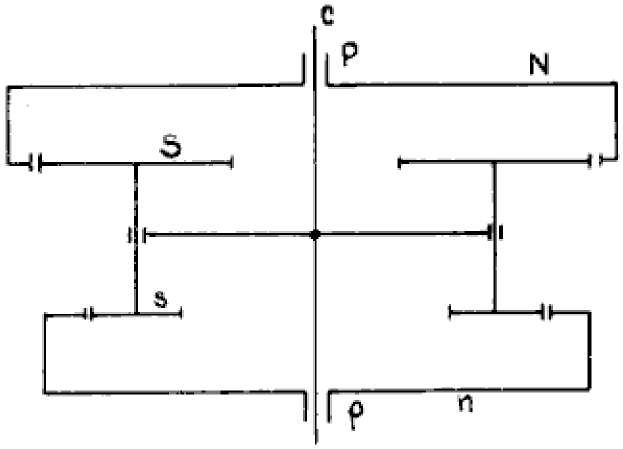
$$110 + 22 = 12 + 120 = 132$$

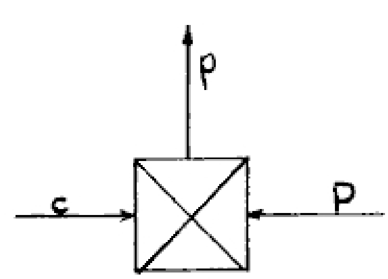
por consiguiente puede hacerse:

N = 110 dientes
S = 22 dientes
s = 12 dientes
N = 120 dientes

<u>DIFERENCIAL DEL TIPO 5</u>

Sea un diferencial de razón K = 7/8





$$K = \frac{N \times s}{S \times n}$$

Se necesita que $N - S = n - s$ y que: $n > 2\ s$
ó $N > 2\ S$

Se puede obtener una fracción equimúltiple equivalente, multiplicando los dos términos por una misma cantidad.

Sea "A" esta cantidad que puede ser cualquiera

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \times A}{8 \times A} = \frac{7 \times A}{A \times 8} = \frac{7}{A} \times \frac{A}{8}$$

Tomemos por ejemplo: A = 2, se tiene:

$$\frac{7}{2} \times \frac{2}{8}$$

Sustraemos los términos más pequeños de los mayores de cada fracción, tenemos:

$$7 - 2 = 5 = B$$
$$8 - 2 = 6 = B'$$

Multiplicamos los términos de la primera fracción por B' tenemos:

$$\frac{7}{2} \times \frac{6}{6} = \frac{42}{12}$$

Multiplicamos los términos de la segunda fracción por B tenemos:

$$\frac{2}{8} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{40}$$

Puede escribirse:

$$\frac{N \times s}{S \times n} = \frac{42}{12} \times \frac{10}{40} = \frac{42 \times 10}{12 \times 40}$$

Verificación:

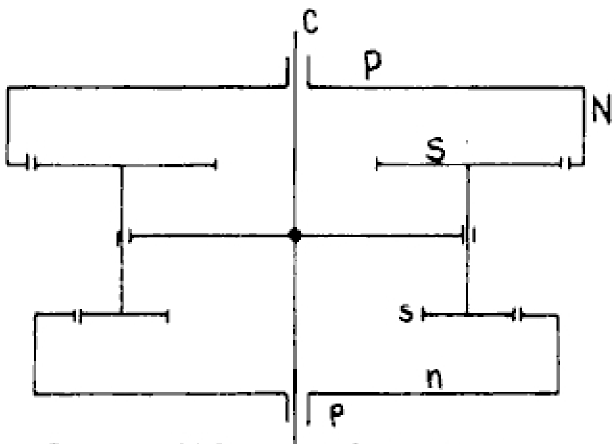
Es necesario que las diferencias de los términos de cada fracción sean iguales

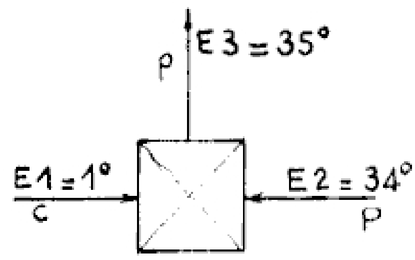
$$42 - 12 = 40 - 10 = 30$$

por consiguiente, puede hacerse:

N = 42 dientes	N = 84 dientes
S = 12 dientes	S = 24 dientes
s = 10 dientes	s = 20 dientes
n = 40 dientes	n = 80 dientes

DIFERENCIAL DEL TIPO 5 (2°. método de determinación)





Sea un diferencial teniendo como relación entre elementos:

$$E1 + E2 = E3 = 1° + 34° = 35°$$

Tendremos: $34 \times 35 = 1190$

Descomponiendo en factores primeros:

1190	2
595	5
119	7
17	17
1	1

$$1190 = 1 \times 2 \times 5 \times 7 \times 17$$

1	1
2	2
5	5 - 10
7	7 - 14 - 35 - 70
17	17 - 34 - 85 - 170

$$\underbrace{1,\ 2,\ 5 - 10,\ 7 - 14 - 35 - 70,\ 17 - 34 - 85 - 170}_{a}$$

Se escoge "a" entre las cifras comprendidas en la llave, pero de tal manera de que "a" sea <u>inferior</u> a los valores de E2.

Por lo tanto "a" debe ser aquí más pequeño que 34.

Por ejemplo: "a" = 5

Dividamos el producto E2 x E3 por "a"

Tendremos: $b = \dfrac{E1 \times E3}{a} = \dfrac{1190}{5} = 238$

Los números de dientes de los engranjes son:

$$s = E2 - a = 34 - 5 = 29$$
$$n = b - E3 = 238 - 35 = 203$$
$$S = E3 - a = 35 - 5 = 30$$
$$N = b - E2 = 238 - 34 = 204$$

<u>NOTA</u>:- Para obtener otras relaciones, hay que tomar un nuevo valor para "a".

"a"	b	s	n	S	N
5	238	29	203	30	204
7	170	27	135	28	136
10	119	24	84	25	85
14	85	20	50	21	51
17	70	17	35	18	36

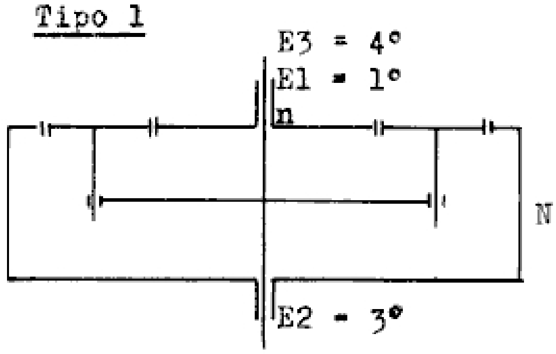
Notaremos que la solución obtenida con "a" = 17 no conviene porque 2s = 34 y que n = 35, lo que quiere decir que no hay paso para el árbol porta-satélites, tal como ha sido presentado en esquema.

Se dá el caso que para un diferencial dado, del que se conoce el número de dientes de los planetarios y de los satélites sea llevado el operador a buscar cuales son las demás características y particularmente las relaciones.

A esto se llama la prueba. Esto se concibe facilmente, porque es necesario verificar los valores relativos de las diferentes unidades por revolución (UPR) de los elementos antes de fabricar el diferencial, órgano costoso.

Los ejemplos que siguen indican las fórmulas sencillas que deben utilizarse para los diferenciales más empleados. Para todos éstos ejemplos, UPR es el grado.

<u>Tipo 1</u>

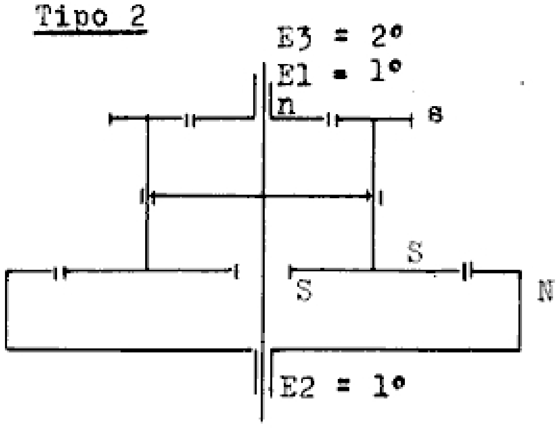


N = 90 dientes
n = 30 dientes

$$E2 = \frac{N}{n} \qquad E3 = \frac{N+n}{n}$$

$$E2 = \frac{90}{30} = 3° \qquad E3 = \frac{90+30}{30} = 4°$$

<u>Tipo 2</u>



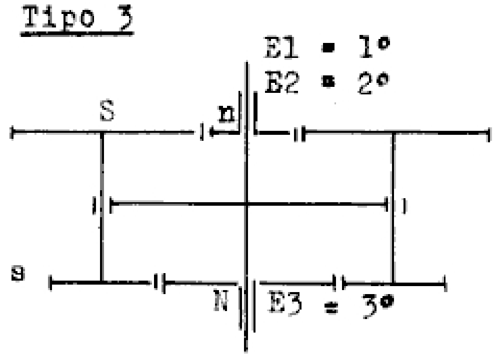
N = 130 dientes n = 70 dientes
S = 39 dientes s = 21 dientes

$$E2 = \frac{N \times s}{n \times S} \qquad E3 = \frac{N \times s + n \times S}{n \times S}$$

$$E2 = \frac{130 \times 21}{70 \times 39} = 1°$$

$$E3 = \frac{130 \times 21 + 70 \times 39}{130 \times 21} = 2°$$

<u>Tipo 3</u>



N = 90 dientes n = 85 dientes
S = 17 dientes s = 12 dientes

$$E2 = \frac{n \times s}{n \times s - N \times S}$$

$$E3 = \frac{N \times S}{N \times S - n \times s}$$

$$E2 = \frac{85 \times 12}{85 \times 12 - 90 \times 17} = 2°$$

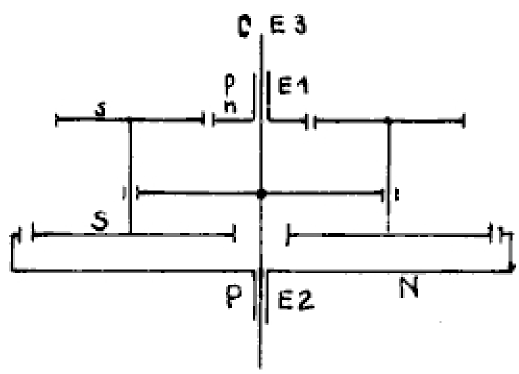
$$E3 = \frac{90 \times 17}{90 \times 17 - 85 \times 12} = 3°$$

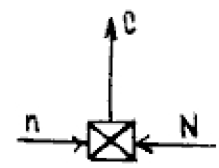
Las rotaciones relativas de los planetarios y del porta-satélites varían de acuerdo con la organización interna del diferencial.

Entre los métodos conocidos para analizar un tren epicicloidal, el más vivo es el método gráfico - Ver las páginas siguientes.

Otro método consiste en bloquear alternadamente los elementos y a formar un cuadro con los resultados obtenidos.

Tomemos el ejemplo de éste diferencial de razón - K = 2/3





Cuando C es bloqueado, tenemos:

N = - 2 revoluciones n = +3 revoluciones c = 0

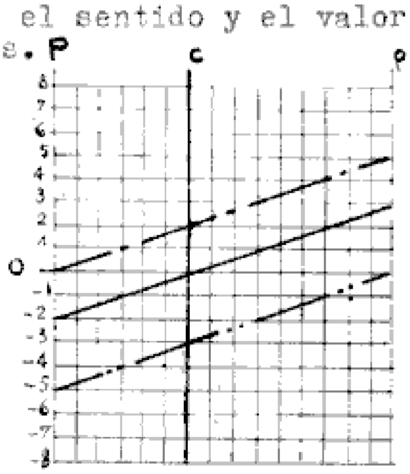
Cuando N es bloqueado, tenemos:

$$\begin{array}{r} -2 \\ +2 \\ \hline N = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3 \\ +2 \\ \hline n = +5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +2 \\ \hline c = +2 \end{array}$$

Cuando n es bloqueado, tenemos:

$$\begin{array}{r} -2 \\ -3 \\ \hline N = -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3 \\ -3 \\ \hline n = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ -3 \\ \hline c = -3 \end{array}$$

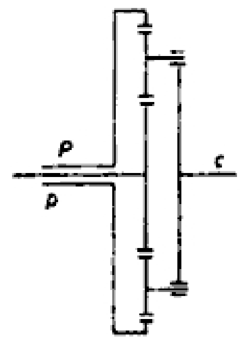
Si se adopta un sentido determinado para las rotaciones con signo positivo, se vé el sentido y el valor relativo de la rotación de los demás elementos.

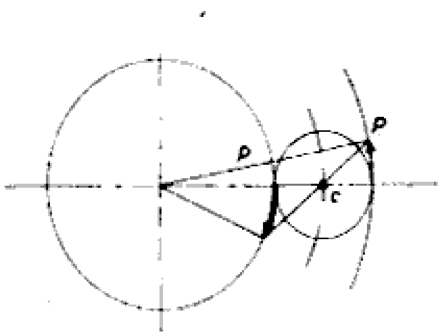


Ejemplo: c = 0 P = -2r p = 3r

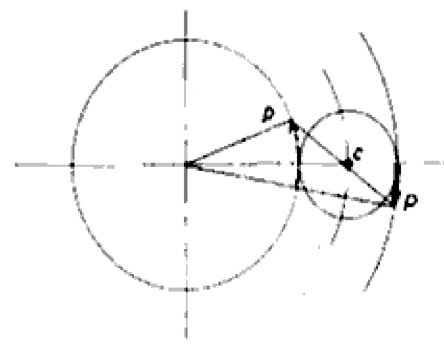
SENTIDO DE ROTACION

TIPO 1

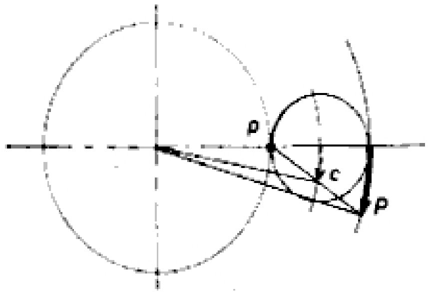




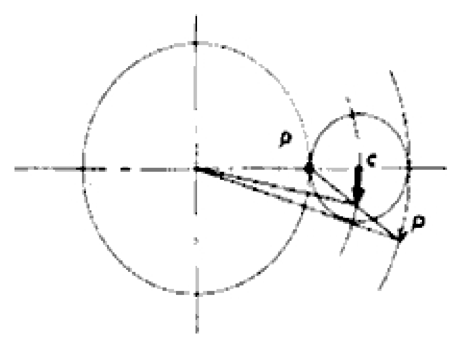
c._BLOQUEADO_ p._ MOTRIZ _ P_ GIRA
SENTIDO INVERSO.



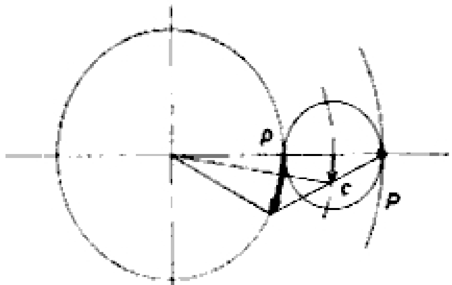
c_BLOQUEADO_ P_ MOTRIZ _ p _ GIRA
SENTIDO INVERSO.



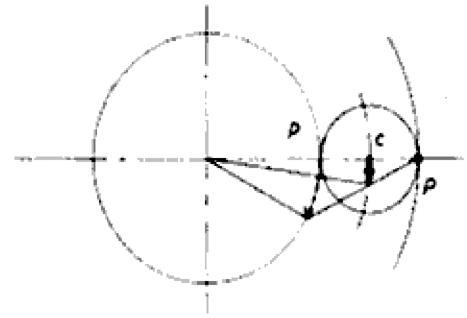
p _BLOQUEADO_ P_MOTRIZ_ c._ GIRA
EN EL MISMO SENTIDO.



p _BLOQUEADO_ c _ MOTRIZ_ P _ GIRA
EN EL MISMO SENTIDO.

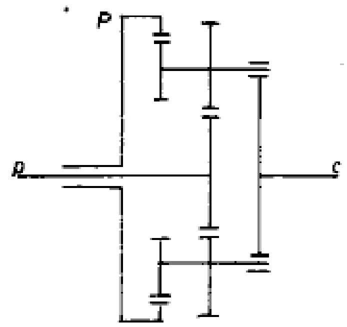


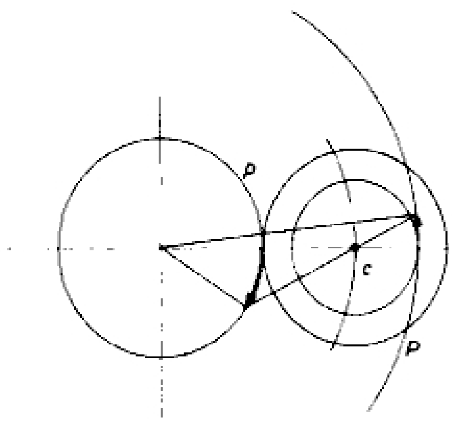
P_BLOQUEADO_ p _ MOTRIZ_ c _GIRA
EN EL MISMO SENTIDO.



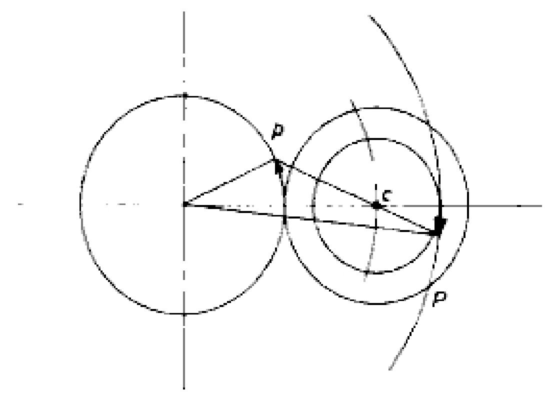
P_BLOQUEADO_ c _MOTRIZ_ p _ GIRA
EN EL MISMO SENTIDO.

TIPO 2

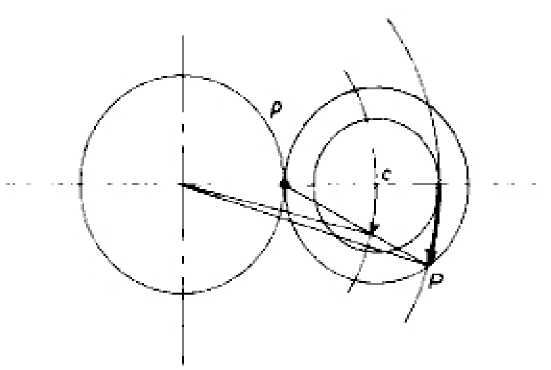




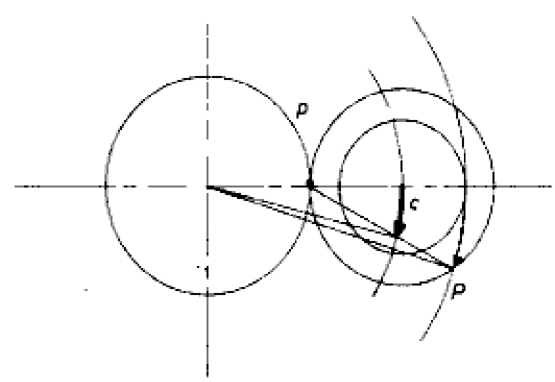
c._ BLOQUEADO_ p._ MOTRIZ_ P_ GIRA SENTIDO INVERSO.



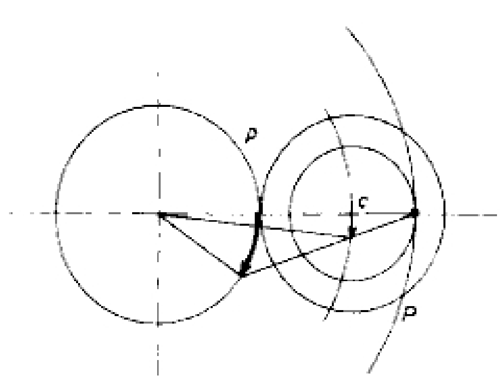
c._ BLOQUEADO_ P_ MOTRIZ_ p._ GIRA SENTIDO INVERSO.



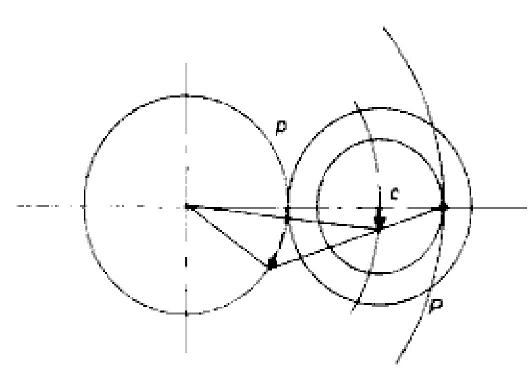
p._ BLOQUEADO _ P_ MOTRIZ_ c._ GIRA EN EL MISMO SENTIDO



p._ BLOQUEADO_ c._ MOTRIZ_ P_ GIRA EN EL MISMO SENTIDO.



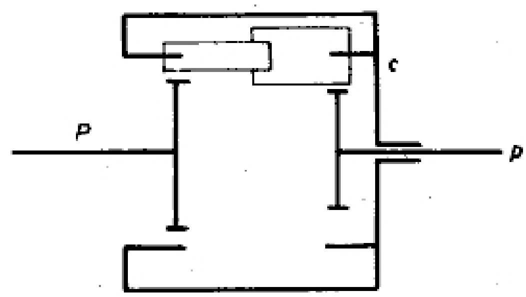
P._ BLOQUEADO_ p._ MOTRIZ_ c._ GIRA EN EL MISMO SENTIDO.

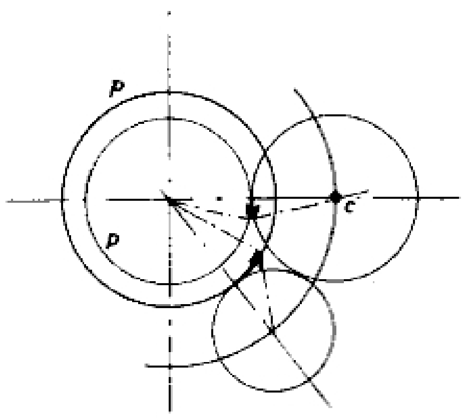


P._ BLOQUEADO_ c._ MOTRIZ_ p._ GIRA EN EL MISMO SENTIDO.

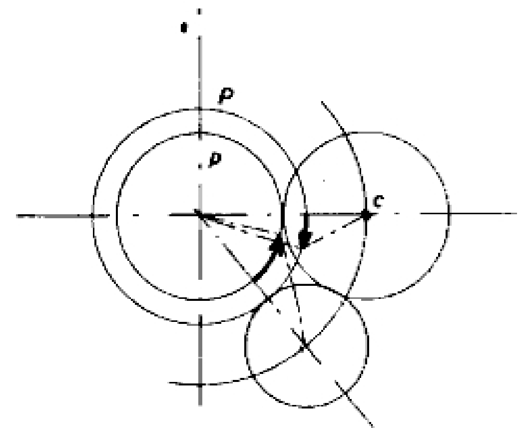
TIPO 8

TIPO 8

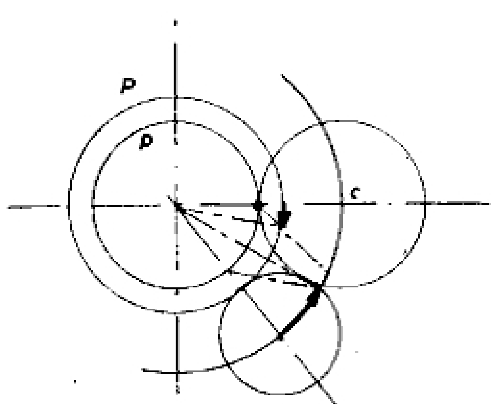




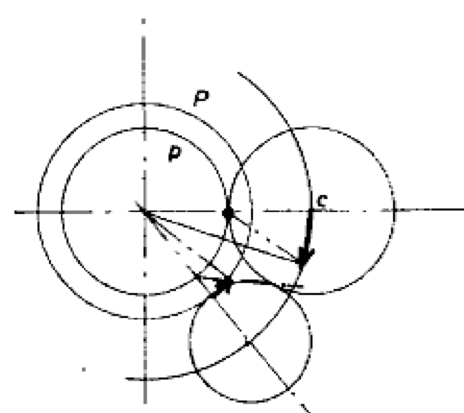
c.__BLOQUEADO__p.__MOTRIZ__P.__ GIRA SENTIDO INVERSO.



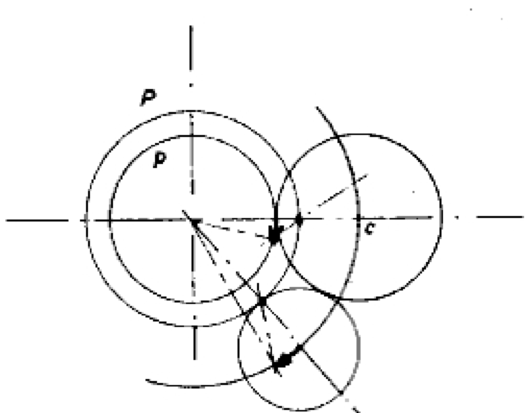
c.__BLOQUEADO__ P.__MOTRIZ__p.__GIRA SENTIDO INVERSO.



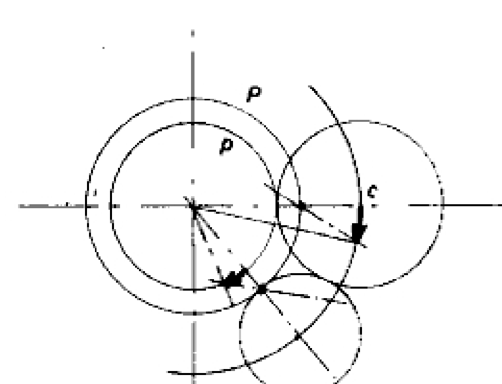
p.__BLOQUEADO__ P.__MOTRIZ__ c.__GIRA SENTIDO INVERSO.



p.__BLOQUEADO__ c.__ MOTRIZ__ P.__ GIRA SENTIDO INVERSO.



P.__BLOQUEADO__ p.__MOTRIZ__ c.__GIRA EN EL MISMO SENTIDO



P.__ BLOQUEADO__ c.__MOTRIZ__ p.__ GIRA EN EL MISMO SENTIDO.

Todos los diferenciales actualmente realizados industrialmente comportan 2 ó 3 trenes de satélites montados en paralelo, con el fín de que cada uno de ellos soporte una parte de la carga total.

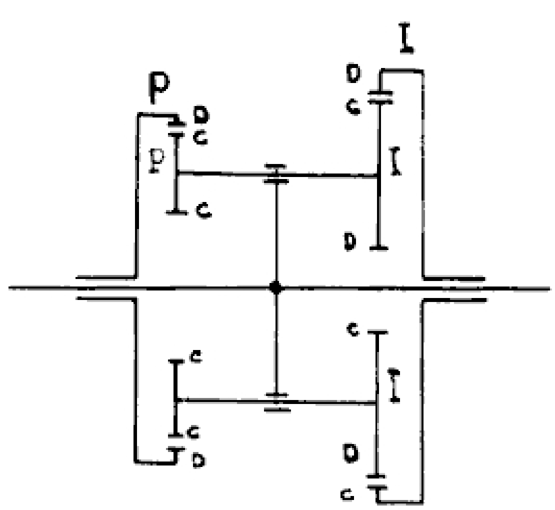
Esto requiere una ejecución precisa con el fín de que los dientes soporten real y no solo teoricamente; de todos modos, hasta si uno solo de los trenes soporta realmente, esto conducirá a disminuír los juegos de los engranajes en presencia, y daría ya cierto interés. Por otra parte, esto equilibra al porta-satélites de una manera más racional, ya que no hay porque agregar masa de equilibrio.

La única dificultad estriba en preveer un montaje de satélites que sea realizable, sobre todo cuando los dos satélites son construídos de una sola pieza.

Este montaje de los satélites presenta una gran ventaja, ya que suprime el claveteo, lo que siempre es una fuente de juego.

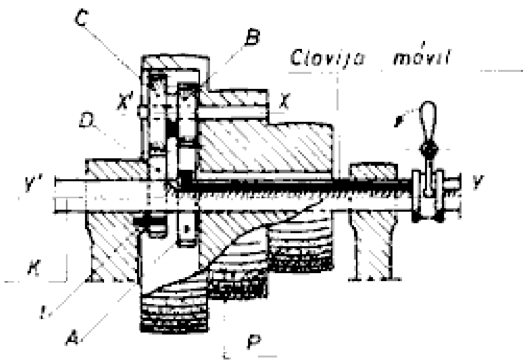
Con el fín de ver si el montaje es posible, se procede para cada tipo como en el caso de la figura adjunta, verificando siempre que un diente se encuentre frente a un vacío. En el caso contrario, se calculará el número de dientes ó fijar uno de los satélites mediante fijación por clavija en el montaje.

P cantidad de dientes pares
I cantidad de dientes impares
D dientes
C vacío del diente

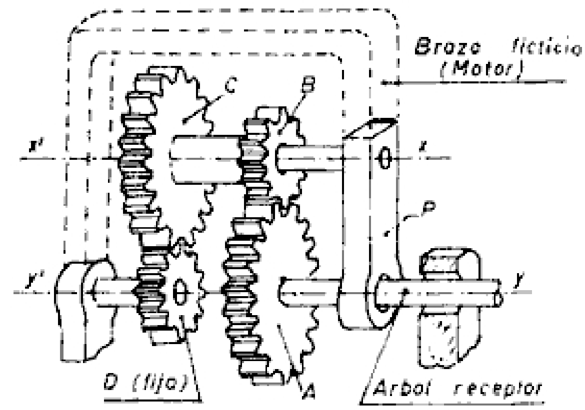


PLANO

Arnés Diferencial



Arnés diferencial



Esquema

W = Velocidad angular de la polea P
WA = " " del planetario A
$WB = 0$ " " " " D

NA = 24 dientes
NB = 20 dientes
Nc = 23 dientes
ND = 21 dientes

La polea P tiene por gamas de valocidad: 150, 120 y 90 RPM.

Fórmula de Willis: $r = \dfrac{WA - W}{WD - W} = \dfrac{ND \times NB}{Nc \times NA}$

$WD = 0 \qquad r = \dfrac{WA - W}{-W} \qquad WA = W\,(1 - r)$

Calcular las velocidades del árbol K en la marcha con arnés.

SOLUCION

Suponemos la polea P fija y la rueda dentada D libre en rotación:

La razón r del tren tiene por valor:

$$r = \frac{WA - W}{WD - W} = \frac{ND \times NB}{NC \times NA} = + \frac{21 \times 20}{23 \times 24} = + \frac{35}{46} = 0{,}76$$

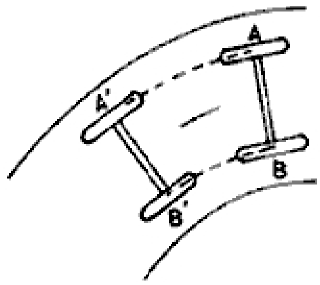
En la marcha al arnés, el árbol K es solidario de la rueda A cuya velocidad es:

$$WA = W\,(1 - r) = W\,(1 - 0{,}76) = 0{,}24\ W$$

Como la relación de las velocidades angulares es igual a la relación de los números de revoluciones por minuto, las velocidades del árbol K son:

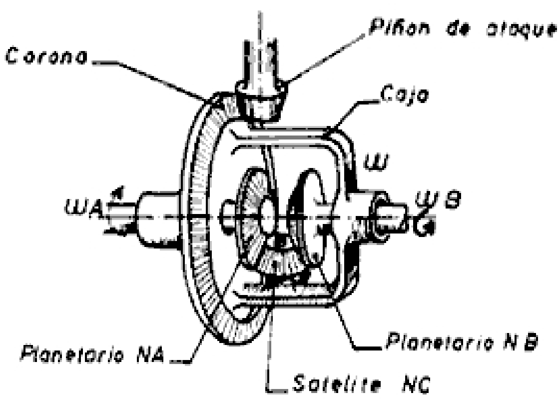
$150 \times 0{,}24 \simeq 36$ RPM.
$120 \times 0{,}24 \simeq 29$ RPM.
$90 \times 0{,}24 \simeq 21$ RPM.

Diferencial de automovil



I.- Necesidad del Diferencial

En una curva, la rueda exterior recorre un espacio $\widehat{AA'}$ más grande que el espacio $\widehat{BB'}$ recorrido por la rueda interior.



II.- Funcionamiento

$$r = -\frac{NA \times Nc}{Nc \times NB} \qquad NA = NB$$

$$r = -1 = \frac{WB - W}{WA - W}$$

$$WA + WB = 2W$$

a) En línea recta

$$WA = WB = W$$

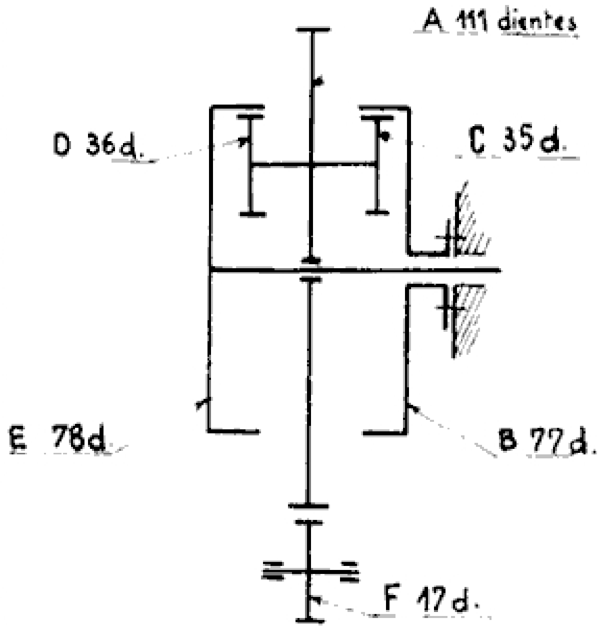
b) En una curva

$$WA + WB = 2W$$

Si $WB = 0$ la rueda exterior $WA = 2W$

c) El coche parado, inmovilizado el piñón de ataque, (embragar, motor parado) - Si hacemos girar una rueda, la otra gira en sentido contrario.

$$WA + WB = 0 \quad ó \quad WA = -WB$$



El mecanismo representado (figura) es el de un medidor kilométrico establecido para un vehículo cuyas ruedas tendrían un diámetro de 75 cm.

Se reconoce en el mecanismo, un tren epicicloidal cuyo porta-tren A es mandado por la rueda F girando a igual velocidad que las ruedas del vehículo. La primera conductora es la rueda B siempre inmovilizada ($W_0 = 0$); la última conducida es la rueda E. Esas dos ruedas llevan una dentadura interior.

Calculamos la relación $\frac{WE}{W}$ de las velocidades angulares de la última conducida y del porta-tren.

La razón del tren es =

$$r = \frac{WE - W}{- W} = \frac{77 \times 36}{35 \times 78} = \frac{66}{65}$$

entonces: $= \frac{W'E}{W} = -\frac{1}{65}$

ó sea, en valor absoluto: $\frac{1}{65}$

Pero, por un recorrido de 1000 Km. por ejemplo, el número de revoluciones de las ruedas es dado por =

$$\frac{1{,}000\ 000}{0{,}75 \times 3{,}1416}$$

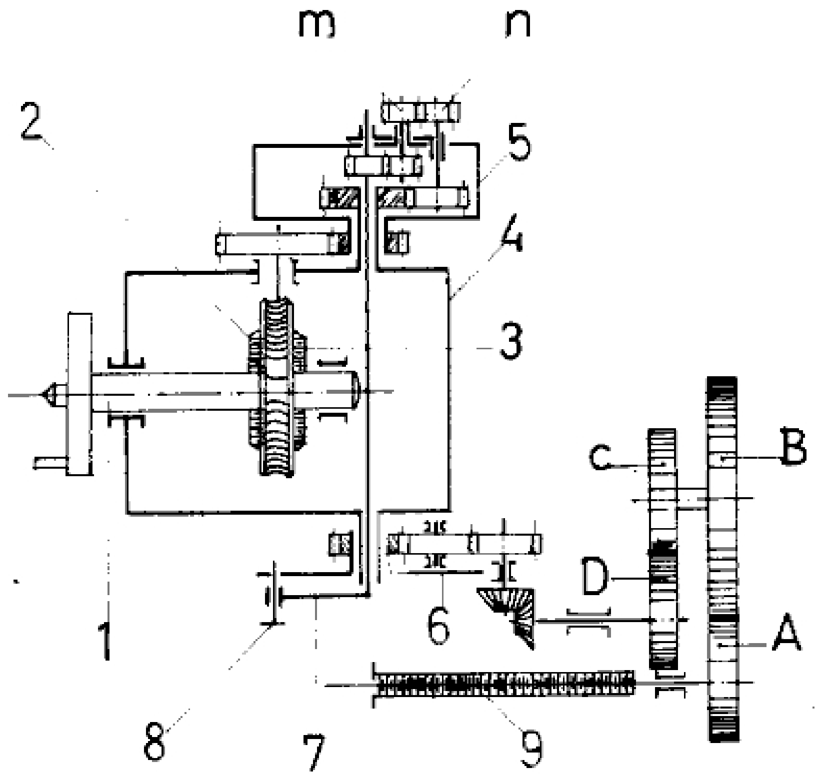
El del porta-tren es los $\frac{17}{111}$ del precedente, y el de la última conducida:

$$= \frac{1{,}000\ 000}{0{,}75 \times 3{,}1416} \times \frac{17}{111} \times \frac{1}{65} = 1{,}000\ 001 \text{ revoluciones}$$

Así, la última conducida efectúa 1000 revoluciones más $\frac{1}{1000}$ de revolución cuando el vehículo recorre 1000 Km.

Dicho en otra forma, la rueda E efectúa una revolución por kilómetro y el medidor indica de más un metro por 1000 Km. recorridos.

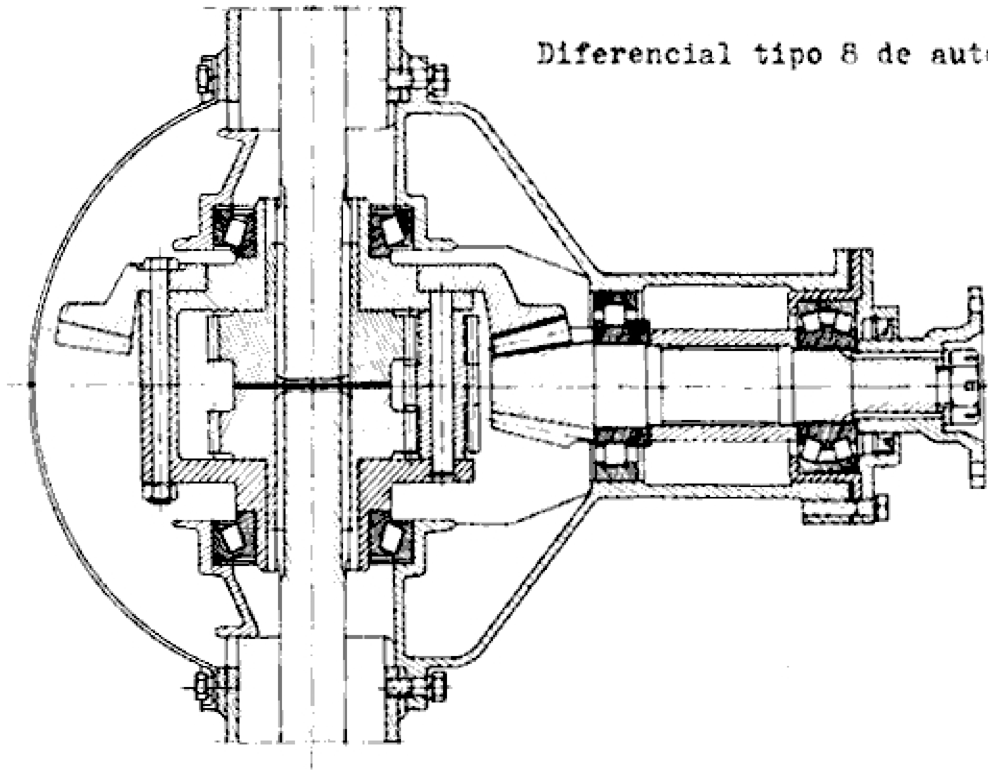
Aparato divisor



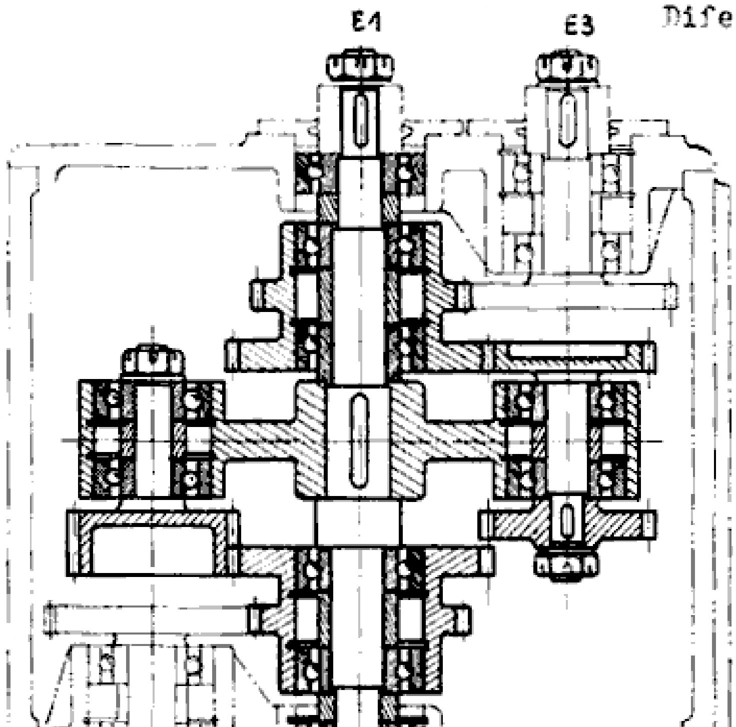
CADENA CINEMATICA DEL APARATO DIVISOR CON SATELITES EQUIPADO PARA EL TALLADO HELICOIDAL.

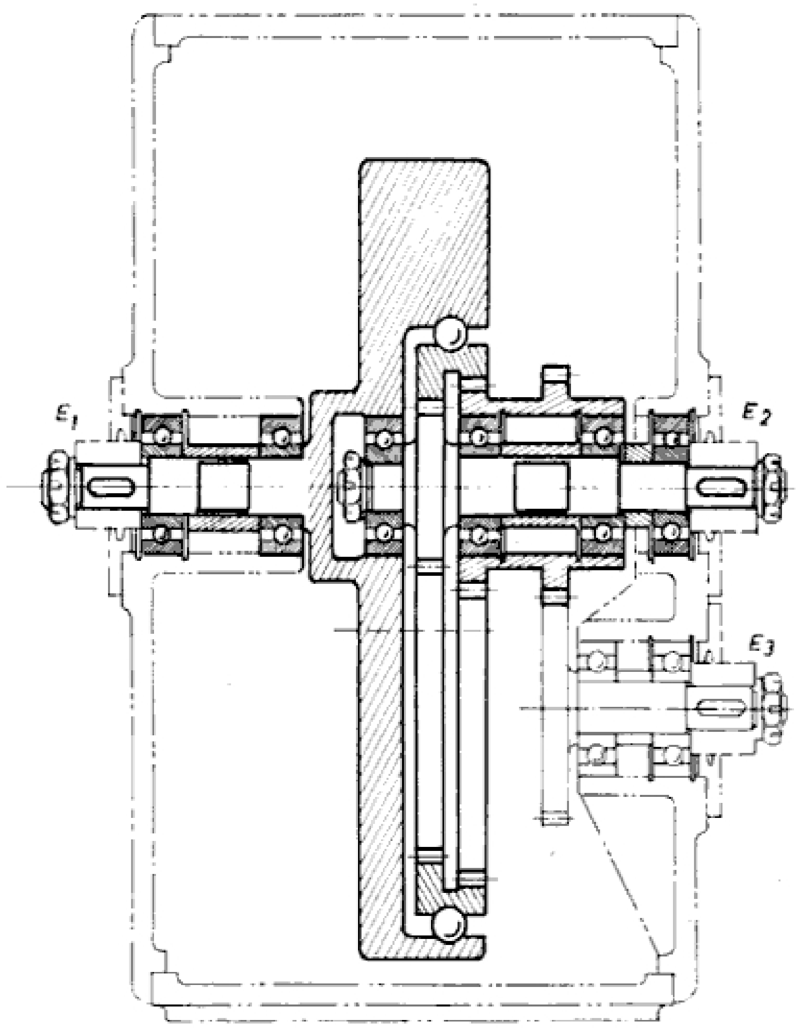
1.- Arbol principal del divisor
2.- Rueda helicoidal vaciada
3.- Tornillo sin fín
4.- Cuerpo del aparato
5.- Caja de satélites
6.- Disco de agujeros
7.- Manivela
8.- Percutor
9.- Husillo patrón de la fresadora
A-C.- Ruedas conductoras para el tallado hélico
B-D.- Ruedas conducidas
m.- Número de dientes del engranaje montado en el eje fijo
n.- Número de dientes del engranaje montado en el eje desplazable.

Diferencial tipo 8 de automóvil

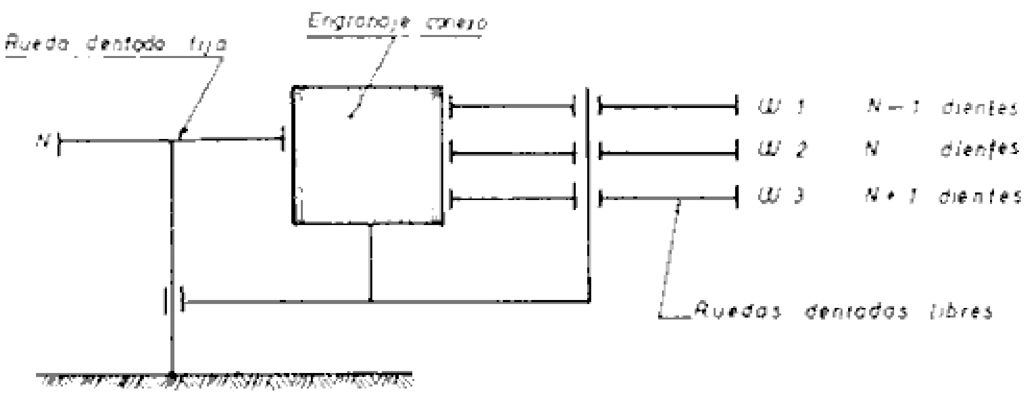


Diferencial tipo 8





DIFERENCIAL TIPO 12



Si λ(landa) = velocidad angular absoluta evaluada relativamente a los ejes de direcciones constantes -

Tendremos:

$$W1 = -\frac{\lambda}{N - 1}$$

$$W2 = 0$$

$$W3 = \frac{\lambda}{N + 1}$$

Esta propiedad ha sido utilizada para la ejecución de manizuelas con limitación de giro, y encuentra su aplicación igualmente, en los reductores de velocidad.

Sabemos que el rendimiento de un aparato está dado por la relación que existe entre la energía trasmitida y la energía recibida. La diferencia entre estas dos energías es la energía perdida por rozamientos.

En un tren de engranajes ordinarios, según de que la energía ingrese a un lado del tren ó del otro, el rendimiento toma tan solo dos valores.

En un tren epicicloidal ésta relación varía con la relación de las velocidades de dos de los elementos.

<u>SIGLAS</u>

Llamemos: P - el gran planetario
p - el pequeño planetario
c - el porta-satélites

CP -, Cp -, Cc - las propiedades cinemáticas de los elementos P, p, c.

WP -, Wp -, Wc - las velocidades de rotación de los elementos P, p, c. (positivas ó negativas).

KP -, Kp -, Kc - los pares de los elementos P, p, c.

Los pares K son positivos si tienden a hacer girar el elemento en el sentido positivo y negativo si tienden a hacer girar el elemento en el sentido negativo.

Las propiedades cinemáticas están ligadas por la condición:

$$CP + Cp + Cc = 0$$

La relación entre los pares en régimen de movimiento uniforme, teniendo en cuenta los rozamientos es la siguiente:

$$\frac{KP}{c'P} = \frac{Kp}{c\ p} = \frac{Kc}{-(C'P + Cp)} \qquad (1)$$

$$\frac{KP}{CP} = \frac{Kp}{C'p} = \frac{Kc}{-(CP + C'p} \qquad (2)$$

En las fórmulas de arriba, el rendimiento medido cuando el porta-satélites está paralizado, es igual a:

$\rho = \frac{C'P}{CP}$ cuando la energía sale por P

$\rho = \frac{C'p}{Cp}$ cuando la energía sale por p

Fórmulas que deben utilizarse

Las fórmulas que deben utilizarse según los casos, son:

Relación de velocidades	La energía sale por P
$\frac{WC}{WP} < +1$ ó negativo	Fórmula (1)
$\frac{WC}{WP} > +1$	Fórmula (2)
Relación de velocidades	**La energía sale por p**
$\frac{Wc}{Wp} < +1$ ó negativo	Fórmula (2)
$\frac{Wc}{Wp} > +1$	Fórmula (1)

Los trenes epicicloidales son de mecanismo costoso, en los que hay que vigilar estrictamente la fabricación.

Los tres factores de los cuales son función la calidad de los engranajes constituyentes son:

- la forma de los dientes
- el procedimiento de corte
- las materias primas empleadas y su tratamiento

La forma de los dientes varía según el tipo de diferencial.

- dientes rectos para los trenes rectos lentos.
- dientes cónicos para los trenes esféricos.

Cuando las velocidades son importantes, se escoge el corte helicoidal simple ó a cabrestante. Se debe escoger entre éstos dos últimos tipos de dientes teniendo en cuenta las reacciones de los ejes.

CONCLUSION

En conclusión, el principal interés que presentan los diferenciales, es de tener siempre los engranajes en contacto, sea cual fuere el movimiento relativo que se desea lograr; por ésto su empleo tiende á generalizarse.

Esta tesis muestra, tanto desde el punto de vista de la oficina de estudios, como del de la oficina de métodos, el vasto campo de aplicación de las numerosas propiedades de los trenes epicicloidales. Permiten, si se les utiliza de manera conveniente, la solución armoniosa de complejos problemas de cinemáticos.

Lima, 31 de Agosto de 1957.

Eléments de Construction a l'usage de l' Ingénieur, par F. Bernard (IV)
Editions Dunod, Paris

Cours de Mécanique , par Basquin - Editions Delagrave, Paris

El Torno y la Fresadora , por R. Nadreau - Editorial Gili, Barcelona

Curso de Mecánica de la Escuela Superior de Aeronautica de Paris, por Aussant

Cours de Mécanique , por Thomas - Editions Eyrolles, Paris

Catalogos de S.K.F.,Lima ; Piat , Paris ; Wyss , Alemaña

Folletos técnicos Renault, Lima ; P.K., Alemaña ; Wilson. EE.UU.

Ayuda-memoria del Ingeniero Mecánico, por Izart , Mexico

Convertisores de pares, transmisiones automaticas, por P.M.Heldt, EE.UU.

Mecánica Analitica para Ingenieros, por Seely y Ensign, Editorial UTEHA, Mejáco

Eléments de Construction a l'usage de l' Ingénieur, par F. Bernard (IV)
Editions Dunod, Paris

Cours de Mécanique , par Basquin - Editions Delagrave, Paris

El Torno y la Fresadora , por R. Nadreau - Editorial Gili, Barcelona

Curso de Mecánica de la Escuela Superior de Aeronautica de Paris, por Aussant

Cours de Mécanique , por Thomas - Editions Eyrolles, Paris

Catalogos de S.K.F.,Lima ; Piat , Paris ; Wyss , Alemaña

Folletos técnicos Renault, Lima ; P.K., Alemaña ; Wilson. EE.UU.

Ayuda-memoria del Ingeniero Mecánico, por Izart , Mexico

Convertisores de pares, transmisiones automaticas, por P.M.Heldt, EE.UU.

Mecánica Analitica para Ingenieros, por Seely y Ensign, Editorial UTEHA, Mejico