UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Facultad de Ingeniería Económica y Ciencias Sociales

ESTIMACION DEL CONSUMO TELEFONICO EN EL SERVICIO LOCAL MEDIDO FIJO-FIJO PARA LOS TELEFONOS PUBLICOS INTERIORES

Tesis para optar el Título de Licenciado en Estadística

Autor : Segundo Ramón Gonzales Biffi

LIMA-PERU
Diciembre-2000

A mis queridos padres: Teresa y Carlos

por todo su esfuerzo y dedicación brindada a lo largo de mi vida estudiantil, en especial a mi madre por sus consejos y enseñanzas.

Agradecimientos

Al Ingeniero Alipio Ordóñez, porque fue el soporte teórico fundamental para el desarrollo del presente trabajo.

De igual modo al Ingeniero Cirilo Alvarez, quien gracias a sus correcciones y enseñanzas me brindó la confianza y apoyo necesarios.

Al Licenciado Carlos Risco, quien supo encaminar y orientar los aspectos redactivos.

Y finalmente a todas aquellas personas que de algún modo contribuyeron a materializar el presente trabajo.

INDICE

SUMARIO

El presente trabajo consta de cuatro partes claramente diferenciadas: Introducción, Entorno o contexto teórico, las Funciones Cuasi Verosímiles y un ejemplo aplicativo para estimar el consumo telefónico en el Servicio Local Medido de telefonía fija en los Teléfonos Públicos Interiores.

La parte Introductoria está orientada a describir los objetivos que busca el presente trabajo de investigación, así como la importancia y justificación del mismo. De igual manera nos sitúa en el entorno de las Telecomunicaciones en el Perú indicándonos las necesidades y la problemática de éste sector productivo.

En la segunda parte hacemos referencias a estudios anteriores relacionados con el tema, ya sea en el ámbito mundial o local. En este último caso se toma como referencias los trabajos realizados por el INEI, respecto al Uso del Servicio de Telefonía a Larga Distancia. De igual manera , procedemos a la identificación y selección de variables que intervendrán en la aplicación.

El contenido principal de nuestro trabajo lo centralizamos en el capítulo tres, que describe en detalle las herramientas estadísticas que son el soporte teórico de nuestra investigación. Aquí se expone desde la definición de una función Cuasi verosímil ya sea uniparametral o multiparametral, hasta los métodos de estimación de parámetros pasando por la demostración de sus propiedades asintóticas . De

igual manera también se expone claramente las pruebas de hipótesis y medidas de bondad de ajuste necesarias para corroborar la adecuacidad del modelo.

Finalmente el capítulo cuatro recoge la aplicación de las Técnicas de Cuasi Verosimilitud, adaptadas a la estimación de un caso real del consumo Telefónico (Llamadas) para el Servicio Local Medido Fijo-Fijo en la telefonía pública interior, donde quedará demostrada la aplicabilidad de nuestra investigación.

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

I.A. TEMATIZACION O MARCO SITUACIONAL

Las nuevas exigencias y retos que ahora se presentan, en el marco de un mercado en competencia y en crecimiento, exigen más que nunca dinamizar la administración y gestión de Telefónica, aumentar su eficiencia con rapidez y credibilidad, exige a Telefónica contar con herramientas de decisión que le permitan predecir el consumo telefónico a corto, mediano y largo plazo, con el menor error posible.

Esta revisión de los sistemas de gestión en Telefónica, sólo será posible con el desarrollo de modelos matemáticos estadísticos que le garanticen la mayor confiabilidad posible, lo que originará a la larga ***incrementar su productividad****.*

Con miras a fortalecer cada vez más su gestión y mejorar el servicio, la gerencia de Telefónica de Uso Publico tiene mucho interés en contar con un método de predicción del consumo telefónico, basado en modelos estadísticos que le permita agilizar su gestión generando con ello una ***ventaja competitiva respecto a nuevos competidores****. Así pues la estimación del Consumo Telefónico usando los estimadores máximo cuasi verosímiles, es una nueva alternativa que a corto plazo le ofrecerá significativos beneficios*

I.B. PROBLEMATIZACION

La liberación de los mercados a nivel mundial, así como las rápidas innovaciones tecnológicas permiten la entrada de nuevas empresas.

De esta manera, las telecomunicaciones empiezan a parecerse a la industria de las computadoras, la cual tiene un comportamiento muy dinámico, ya que muy rápidamente cambian los productos y aparecen nuevas empresas.

Para lograr sobrevivir en este mercado, las empresas de telecomunicaciones deben ser capaces de adaptarse al cambio y enfocar totalmente su atención a las necesidades del cliente mejorando entre otras cosas sus sistemas de gestión.

Si esto no se logra, repercutirá directamente en la estabilidad e ingresos de la empresa y por ende de todos los trabajadores y accionistas, pues ante la presencia de nuevos competidores la alta gerencia y en particular para el negocio de Telefonía de Uso Publico verá más dificultoso predecir el comportamiento del consumo telefónico de sus clientes, y con ello se corre el riesgo que las políticas comerciales de la gerencia no se logren y se desvíen de los objetivos trazados.

Como es de público conocimiento, la liberación total del servicio telefónico (Apertura de Mercado) conlleva a la entrada de nuevos competidores globales tales como: BELLSOUTH , FIRSTCOM ,NEXTEL , solo por nombrar algunas que *inducirán en los próximos meses a una pérdida paulatina de participación de mercado de Telefónica.*

Dada esta coyuntura, es imprescindible que Telefónica revise constantemente sus procesos internos, y de gestión cuestionando permanentemente sobre si se pueden hacer de alguna forma mejor, garantizando con ello un alto nivel de competitividad.

Actualmente Telefónica ofrece entre sus diversos servicios el de Telefonía de Uso Público destacando los productos Telefonía Pública Interior (TPI) y Telefonía Pública Exterior (TPE) . El presente trabajo estará enfocado únicamente a estimar el consumo telefónico en el servicio local medido para los Teléfonos Públicos Interiores (TPI), los TPI'S es un servicio cuyos clientes está formado en su mayoría por establecimientos comerciales tales como: bodegas , farmacias , restaurantes ,hoteles , así como instituciones públicas y privadas. De este aparato telefónico se pueden hacer llamadas locales nacionales o internacionales , generalmente los ubicamos en establecimientos comerciales adosado a una pared o sobre un mostrador .Además permite al propietario hacer o recibir llamadas y administrar la recaudación del dinero depositado por los usuarios al efectuar sus llamadas.

La tesis que a continuación presentamos ofrece la posibilidad a Telefónica de contar con una herramienta, de estimación del consumo telefónico que le permitirá, contestar las siguientes interrogantes:

1.-¿Cuál es el número esperado de llamadas telefónicas generados por los clientes de telefonía de uso público interior (TPI)?

2.-¿Es posible conocer dicho valor (# de llamadas) a corto , mediano y largo plazo ? ¿ y cuánto es el Ingreso en soles que generaría ?

3.-¿Existirá algún modelo estadístico matemático capaz de simular el comportamiento del número de llamadas? ¿ Y cuáles son sus parámetros.?

4.-¿Predicción de ingresos con vista a definir lo mejor posible los planes de inversión, de los TPI's en términos de rentabilidad?

I.C. OBJETIVOS

La meta final de la presentación de este trabajo es:

1.-Encontrar el modelo estadístico apropiado, capaz de describir el comportamiento del consumo telefónico en los teléfonos públicos de interior.

1.1.- Estimación de los parámetros de tendencia y estacionalidad.

1.2.-Estimación del número esperado de llamadas telefónicas generados por los usuarios de los teléfonos públicos.

2.-Brindar a Telefónica de una herramienta de gestión ágil, confiable y de menor costo que reporte a la alta dirección los resultados del consumo telefónico para *la toma oportuna de decisiones , lo cual representará una ventaja competitiva frente a otras operadoras .*

I.D. IMPORTANCIA

Actualmente el sector de las telecomunicaciones viene atravesando por una circunstancia extraordinaria derivada de la reciente apertura del mercado nacional de telecomunicaciones. Es decir , telefónica pasa de una posición de exclusividad a una de competitividad en igualdad de condiciones con otras operadoras de servicio que ya ingresaron al mercado.

Según este contexto las empresas de telecomunicaciones se enfrentarán no solo con una dura competencia, si no que harán frente a muchos avances tecnológicos que las pueden hacer perder su predominancia. Estos nuevos avances en telecomunicaciones hacen que ya no sea necesario contar con grandes instalaciones y de recursos humanos, por lo que pueden entrar en el mercado nuevas empresas con la cuarta o quinta parte de los costos de las actuales empresas y con mejores sistemas de administración y gestión.

Las telecomunicaciones van a pasar por un fenómeno parecido al del mercado de las computadoras, con muchas innovaciones tecnológicas y un rápido crecimiento de la oferta y calidad de servicio.

Este panorama, está provocando al interior de Telefónica adoptar medidas urgentes e impostergables de tal manera que nos sitúen en una condición de competitividad. Por tal motivo, es necesario la búsqueda de nuevos mecanismos de gestión mucho más eficiente y certeros que le garanticen a Telefónica entre otras cosas ventaja competitiva siendo la estimación del Consumo Telefónico, usando los métodos estadísticos de Máximo Cuasi Verosímiles, una de las herramientas claves en la gestión de la empresa.

Finalmente, creemos que no se puede soslayar la decisión que Telefónica cuente con herramientas de gestión y análisis que le permitan anticiparse a la competencia mejorando con ello su Calidad de Servicio y Atención al Cliente, caso contrario se corre el riesgo que sean absorbidos por la competencia, lo que conlleva la sucesiva pérdida de mercado.

I.E. METODOLOGIA

Para el presente trabajo se ha considerado como datos fuente los registros provenientes de las centrales telefónicas , siendo la variable seleccionada el número de llamadas tasadas o cursadas de los Teléfonos TPI's en el período Diciembre'94 a Noviembre'98.

El universo a estudiar son, aquellos clientes TPI's activos que generen consumos (llamadas) de Servicio Local Medido Fijo-Fijo a nivel nacional, entendiéndose por *clientes activos a todo aquel individuo que no tiene corte total o parcial, ni mucho menos en situación de baja. Este criterio de inclusión nos asegura que el universo en estudio siempre genera llamadas telefónicas. Se excluyen las llamadas con destino a teléfonos celulares.*

Las llamadas provenientes de los Teléfonos Públicos Interiores, son recepcionadas por las Centralitas, quienes se encargan de registrar entre otros datos, el teléfono origen, teléfono destino, duración de llamada, fecha, central, etc. Estos datos son registrados en centrales mediante un formato de códigos binarios, los mismos que son traducidos(interpretados) por un super procesador a códigos ASCII. De las múltiples tareas y reportes que ejecuta este procesador, se procede a seleccionar el reporte consolidado del número de llamadas mensuales.

Con los datos anteriores se plantea el modelo estadístico y se procede a estimar los valores iniciales del modelo , utilizando para ello el software estadístico SPSS. De los resultados obtenidos y utilizando las técnicas de estimación de las funciones de cuasi verosimilitud procedemos a estimar los parámetros del modelo, para ello nos apoyaremos en un algoritmo iterativo de mínimos cuadrados ponderados desarrollado convenientemente en el aplicativo matemático Matlab.

Es importante destacar que la estimación del número de llamadas TPI´s del servicio local medido tomará como base a los modelos cuasi verosímiles, los mismos que no requieren la asunción de conocer la distribución de la variable respuesta , sólo *bastará conocer la estructura de la media y variancia ; es decir , el primer y segundo momento tiene que ser especificados y bajo condiciones apropiadas los parámetros del modelo pueden ser estimados consistentemente. De igual modo sus inferencias asintóticas son todavía posibles bajo modificaciones apropiadas.*

Como veremos en los capítulos siguientes una de las ventajas de los modelos cuasi verosímiles y que los hace en la práctica muy usados es que, el conocer y/o postular la forma o relación de la media y variancia es mucho más fácil que conocer la distribución que siguen las observaciones.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

II.A. ANTECEDENTES

Las grandes empresas de telecomunicaciones a nivel mundial son monopolios que han sido administrados normalmente por el gobierno y que poco a poco han empezado a privatizarse. Los políticos que controlaban estas empresas se están empezando a convencer que los ciudadanos (clientes) se verán beneficiados por la entrada de competencia a los mercados de telecomunicaciones, dada la caída en los precios y el desarrollo de nuevos productos.

Los gobiernos pensaban que debían proteger a las empresas de telecomunicaciones colocando muchas regulaciones para que estas puedan crecer aún más y puedan expandirse hacia otros mercados. Sin embargo, esto no funcionó. Un caso que lo prueba es la empresa BRITISH TELECOM(BT).

BT era un monopolio protegido que se fue introduciendo muy lentamente al mercado durante 14 años. Pero recién hace dos años, cuando fue sometida realmente a competencia, es que cayeron los precios en los servicios de larga distancia internacional.

Una llamada de INGLATERRA a EEUU cayó en 70%, volviendo a INGLATERRA en uno de los países con las tarifas más bajas en llamadas internacionales.

Las lecciones más importantes deben aprenderse de la industria de las computadoras. Las empresas deben estar completamente abiertas al cambio, aunque esto signifique el propio canibalismo de sus productos. Las redes y los productos recién creados deben cambiarse en dos o tres años y ya no en 10 ó 15 como hasta hace algunos años. Pero lo más importante es que las empresas logren enfocarse completamente hacia el cliente revisando permanentemente sus herramientas de gestión y apoyo en aras de obtener ventaja competitiva frente a otras operadoras. Aquí radica la importancia de este proyecto de tesis, pues será capaz de ofrecerle a Telefónica un instrumento de predicción del consumo telefónico de los TPI's que a la postre le garanticen mayores niveles de efectividad minimizando errores frente a otros métodos de predicción.

Respecto a estadísticas oficiales hemos revisado algunos estudios y trabajos realizados referidos a las necesidades de las telecomunicaciones en el Perú, pero no existen estudios oficiales dedicados o enfocados a la telefonía pública exclusivamente. Sin embargo, podemos destacar el estudio realizado por el INEI en la encuesta nacional de hogares, correspondiente al módulo de comunicaciones, estructurada durante el segundo trimestre de 1995, esta encuesta se ejecutó en base al marco muestral provenientes de los censos nacionales: IX de población y IV de vivienda; (1993) constituyendo la principal fuente de información estadística de *carácter social, demográfico y económico. A nivel nacional se recogió información en 20,000 viviendas, tanto del área urbana como del área rural.*

La encuesta nacional de hogares permitió presentar resultados que con carácter coyuntural permitieron conocer la demanda actual del servicio de telefonía a larga distancia nacional e internacional, evaluar programas sectoriales y contribuir a la toma de decisiones en la aplicación de planes y programas de desarrollo del sector, así fue que el INEI logró publicar en diciembre 95 su trabajo titulado "USO DEL SERVICIO DE TELEFONÍA A LARGA DISTANCIA", donde básicamente caracteriza o describe a la población que hace uso del servicio, con estadísticas por grupos de edad, nivel educativo, actividad, ingreso familiar, etc.
Es importante destacar que entre los objetivos específicos de la encuesta nacional de hogares, módulo de comunicaciones eran los siguientes:

1.-Cuantificar el número de integrantes del hogar que hacen uso del servicio de telefonía a larga distancia.
2.-Cuantificar el número de veces por llamadas nacionales y/o internacionales.
3.-Determinar si las tarifas del servicio de telefonía a larga distancia están al alcance de la población.
4.-Determinar lugar de preferencia del uso del servicio de telefonía a larga distancia.
5.-Conocer las razones por las que no se ha hecho uso del servicio de telefonía a larga distancia.

La captación de la información se empleó el método de encuesta directa, con personal capacitado y entrenado, para tal fin y que visitaron las viviendas seleccionadas.

Entre los principales resultados obtenidos por el INEI, en su encuesta nacional de hogares módulo de comunicaciones tenemos:

1.-Solo el 10,2% de la población de 15 años a más edad hace uso del servicio de telefonía a larga distancia (5,2% varones y 5% mujeres)

2.-El 93.5% de la población que hace uso del servicio de telefonía a larga distancia efectúa sus llamadas en el ámbito nacional. En tanto, solo el 8,6% lo hace en el mismo ámbito internacional.

3.-El 32.7% de la población que hace uso del servicio telefónico efectuó una sola llamada en el ámbito nacional y para este mismo ámbito, el 16.3% efectuó más de 4 llamadas.

4.-El 34.5% de la población que hace uso del servicio telefónico efectúa sus llamadas nacionales por algún teléfono público, llámese, centro comunitario, teléfono público o centro comercial.

5.-El 63.2% de la población que no hace uso del servicio de telefonía a larga distancia, declaró como razón principal de tal situación el hecho de "no tener a quien llamar". El 18.8% porque "no existe el servicio de telefonía". Mientras que el 14.6% declaró que no efectúa llamadas porque "la tarifa es muy cara".

Así como este estudio descriptivo, del INEI, existen otros métodos econométricos de revisión de la demanda y del consumo telefónico tal es el caso de Telefónica de España, donde a través de la conjunción de métodos econométricos y de series de tiempo se pretende efectuar la previsión de la demanda y el tráfico, reduciendo al mínimo la incertidumbre propia de muchos procesos económicos.

Una de las más grandes empresas de telecomunicaciones en el mundo, como AT&T utilizan también los modelos econométricos para predecir la demanda telefónica. Por tal motivo, el presente trabajo de tesis aborda desde un punto de vista estadístico la estimación del consumo telefónico TPI's para el servicio local medido fijo – fijo, esto quiere decir que utilizaremos un modelo econométrico con series de tiempo temporales discretas para la previsión de las llamadas basado en los modelos de cuasi verosimilitud.

Las asunciones básicas en la definición de los modelos lineales generalizados, es que la función de la densidad de las respuestas , sigue a una familia exponencial especifica , esto es la normal, binomial , poisson, gamma , etc. Sin embargo, en los modelos cuasi- verosímiles desarrollado por WEDDERBURN (1974) MCCULLAGH (1983) y por MCCULLAGH y NELDER (1983-1989) nos permite omitir la asunción de la familia exponencial y separar la estructura de la media y variancia.

La asunción de la distribución completa no es necesaria, solamente conocer y/o especificar los dos primeros momentos.

II.B. SELECCIÓN DE VARIABLES

Las principales variables consideradas en la estimación del consumo de llamadas salientes en los TPI's para el servicio local medido fijo – fijo son:

NUMERO DE LLAMADAS CURSADAS ***(Y_t) :*** *Corresponde a las llamadas efectuadas desde los teléfonos públicos TPI's a teléfonos residenciales y/o públicos. En este caso consideramos las llamadas en miles de millón (mm), para el período de Diciembre'94 a Noviembre'98. Además la variable respuesta Y_t, es de tipo discreto que asume valores enteros únicamente.*

TENDENCIA ***(t) :*** *Es la componente que refleja el comportamiento creciente o decreciente del modelo. Contempla valores enteros desde t=1 hasta 48.*

COMPONENTES ESTACIONALES:

COS (2πt/12) y SEN (2πt/12) representan a las componentes estacionales ***Anuales*** *que varían para valores enteros desde t=1 hasta 48. Por ejemplo: mayor consumo estacional en los TPI's por los meses de Diciembre – Enero.*

COS (2πt/6) y SEN (2πt/6) son las componentes estacionales ***Semestrales*** *que varían para valores enteros desde t=1 hasta 48. Por ejemplo: mayor consumo estacional en los TPI's en los meses de Julio – Agosto.*

<u>VARIABLE ALEATORIA</u> (ε_t) : Considera a todas aquellas variables no contempladas en el modelo y comprende valores desde t=1 hasta 48.

Antes de proceder a realizar la estimación de llamadas (consumo) Telefónica TPI's usando los estimadores máximos cuasi verosímiles, se hace necesario antes, recordar las definiciones básicas de los modelos lineales generalizados.

$$y_i = z_i^{'}\beta + \varepsilon_i \ ; \ i = 1,....,n$$

Donde el vector diseño z_i es una función apropiada del vector de covariables x_i y donde β es un vector de parámetros desconocidos. Para un vector de variables métricas la forma simple de z_i es $z_i = (1, x'_i)$,para un vector de variables cualitativa o una mixtura de variables, también pueden ser incluidas.

Los errores ε_i son asumidos que son independientes y normalmente distribuidos.

$$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2) \quad i = 1,...,n$$

A continuación reescribiremos el modelo en una forma que conduzca a los modelos lineales generalizados. Las observaciones y_i son independientes y normalmente distribuidos.

$$y_i \sim N(\mu_i,\sigma^2) \quad i = 1,...,n$$

Con $\mu_i = E(y_i)$. La media μ_i es dado por la combinación lineal $(z'_i\,\beta)$

$$\mu_i = z_i^{'}\beta_i \ ; \ i = 1,....,n$$

Si las covariables son estocásticas, asumimos los pares (y_i, x_i) son independientes e idénticamente distribuidos.

Luego el modelo es condicionalmente entendido; esto es, la densidad condicional de y_i dado x_i, y la y_i son condicionalmente independientes.

Las siguientes asunciones están relacionadas a los modelos lineales generalizados.

1.-ASUNCION DISTRIBUCIONAL

Dado x_i, los valores de y_i son (condicionalmente) independientes, y la (condicional) distribución de y_i sigue a una familia exponencial simple con (condicional) esperanza $E(y_i / x_i) = \mu_i$ y posiblemente a un parámetro escalar común ø , que no depende de i.

2.-ASUNCION DE ESTRUCTURA:

La esperanza μ_i es relacionada al predictor lineal $\eta_i = z'_i \beta$ por

$$\mu_i = h(\eta_i) = h(z_i'\beta)_i \;\; ; \; \eta_i = g(\mu_i)$$

DONDE:

***h** es una función de respuesta conocida uno a uno.*

***g** es la función enlace; esto es la inversa de **h**.*

β** es un vector de parámetros desconocido de dimensión **p

z_i es un vector de diseño de dimensión p, el cual es determinado por una función apropiada $z_i = z(x_i)$ de covariables.

Así pues, un modelo lineal generalizado es completamente caracterizado por tres componentes:

- *El tipo de familia exponencial*
- *La respuesta o función enlace y*
- *El vector diseño*

Todo modelo lineal generalizado tiene las siguientes propiedades:

(i) Para los modelos lineales generalizados univariados, la densidad de la respuesta y_i puede siempre ser escrita como:

$$f(y_i / \theta_i, \phi, \omega_i) = \exp\left(\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{\phi} \omega_i + c(y_i, \phi, \omega_i) \right)$$

Donde:

θ_i, es el llamado parámetro natural

ϕ, es el parámetro de dispersión o escalar adicional

b(.) y c(.) son funciones específicas correspondientes al tipo de familia exponencial.

w_i, es un peso con w_i =1 para data no agrupada (i =1,...,n) y $w_i = n_i$; para data agrupada (i =1,...,g) si el promedio es considerado como respuesta (o $w_i = 1/n_i$, si la suma de respuestas individuales es considerado).

Las funciones de distribución más importantes son la Normal, Binomial, la Poisson, la Gamma y la inversa Gaussiana. Sus características son expresadas en términos de familias exponenciales.

El parámetro natural θ, es una función de la media μ esto es $\theta_i=\theta(\mu_i)$ *, el cual es únicamente determinado por la familia exponencial específica, a través de la relación:*

$$\mu = b'(\theta) = \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta}$$

Además la varianza de y es de la forma.

$$Var(y_i / x_i) = \sigma^2(\mu_i) = \phi\, v(\mu_i)/\omega_i$$

Donde la función de varianza v(μ) es únicamente determinada por la familia exponencial a través de la relación:

$$v(\mu_i) = b''(\theta) = \frac{\partial^2 b(\theta)}{\partial \theta^2}$$

La especificación de la estructura de la media $\mu = h(z'_i\,\beta)$ *implica una estructura de varianza conocida.*

(ii) La selección apropiada de la función respuesta o enlace depende de la familia exponencial específica; es decir del tipo de respuesta y de la aplicación particular. Por cada familia exponencial existe una función de enlace canónica o llamada natural.

Las funciones de enlace natural relacionan el parámetro natural directamente al predictor lineal por:

$$\theta = \theta(\mu) = \eta = z'\beta$$

Esto es, $g(\mu)= \theta(\mu)$*. Las funciones de enlace natural pueden así ser determinada; es decir:*

$\eta = \mu$;	*Para la Normal*

$\eta = \log \mu$;	*Para la Poisson*
$\eta = \log (\mu/1-\mu)$;	*Para la Bernoullí*

(iii)Concerniente al vector diseño, nada nuevo se ha visto comparado a los modelos lineales, en muchos casos una constante correspondiente a la "Gran media" es agregada puesto que z es de la forma z=(1,w).

Las variables medibles pueden ser incorporadas directamente o después de transformaciones tales como: Log(x), x^2*, ...,etc.*

Las variables categóricas ordenadas o no, tienen que ser codificadas por un vector de variables dummy.

(iv) Veremos a continuación una última observación concerniente a la relación entre modelos para data agrupada y no agrupada. Supongamos que la data no agrupada (y_i, x_i)*,* $i=1,\ldots,n$ *son modelados por un modelo lineal generalizado, con función de respuesta y variancia:*

$$E(y_i / x_i) = \mu_i = h(z_i'\beta)$$

Tomando el Log Verosimilitud tenemos:

$$L_i(\theta_i) = Log\ f(y_i / \theta_i, \phi, \omega_i) = \frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\phi}\omega_i$$

La función $c(y_i, \phi, w_i)$*, la cual no contiene* θ_i *ha sido omitida. Insertando la relación* $\theta_i = \theta(\mu_i)$ *entre el parámetro natural y la media tenemos:*

$$L_i(\mu_i) = \frac{y_i\theta(\mu_i) - b(\theta(\mu_i))}{\phi}\omega_i$$

Usamos L como un símbolo genérico para Log-Verosímilitud por ejemplo, en el caso de respuestas Poisson ($\mu = \lambda_i$) se tiene :

$$L_i(\lambda_i) = y_i \log \lambda_i - \lambda_i$$

Finalmente, insertamos la estructura de la media $\mu_i = h(z'_i \beta)$

$$L_i(\beta) = L_i\left(h\left(z_i^{'} \beta\right)\right)$$

Como una función de β. Puesto que $y_1, \ldots, y_i, \ldots$ son observaciones de variables aleatorias independientes, la Log Verosimilitud de la muestra es la suma de contribuciones individuales:

$$L(\beta) = \sum L_i(\beta)$$

Esto es, la primera derivada es la función score "p"dimensional.

$$S(\beta) = \frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum S_i(\beta)$$

Las contribuciones individuales de la función score son:

$$S_i(\beta) = z_i D_i(\beta) \sigma_i^{-2}(\beta) [y_i - \mu_i(\beta)]$$

Donde:

$$\mu_i(\beta) = h\left(z_i^{'} \beta\right) \; ; \; \sigma_i^2(\beta) = v\left(h\left(z_i^{'} \beta\right)\right) \varphi / w_i$$

$$D_i(\beta) = \frac{\partial\, h\left(z_i \beta\right)}{\partial \eta}$$

Es la primera derivada de la función respuesta $h(\eta)$ evaluada en $\eta = z'_i \beta$.

El parámetro ϕ podría ser interpretado como un parámetro escalar o como un factor de sobredispersión para la función de la varianza.

La matriz de información de Fisher es:

$$F(\beta) = Cov\, S(\beta) = \sum F_i(\beta)$$

Con

$$F_i(\beta) = z_i z_i' w_i(\beta)$$

Las funciones ponderadas

$$w_i(\beta) = D_i^2(\beta)\sigma_i^{-2}(\beta)$$

La matriz de información observada es:

$$F_{obs}(\beta) = -\frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial\beta\partial\beta'}$$

De segundas derivadas negativas. Las matrices de información observadas y esperadas son relacionadas por:

$$F(\beta) = E(F_{obs}(\beta))$$

Las funciones de enlace natural, funciones scores y matrices de información de Fisher se simplifican en:

$$S(\beta) = \frac{1}{\phi}\sum_i w_i z_i [y_i - \mu_i(\beta)]$$

$$F(\beta) = \frac{1}{\phi}\sum_i w_i v(\mu_i(\beta)) z_i z_i'$$

Además la información de Fisher observada y esperada son idénticos.

$$F(\beta) = F_{obs}(\beta)$$

Para algunos propósitos, la notación matricial es conveniente. Para el caso de data agrupada se tiene:

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_g \end{bmatrix}\ ,\ \mu(\beta)=\begin{bmatrix} \mu_1(\beta) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_g(\beta) \end{bmatrix}\ ,\ \sum(\beta)=\begin{bmatrix} \sigma_i^2(\beta) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \sigma_g^2(\beta) \end{bmatrix}$$

$$D(\beta)=\begin{bmatrix} D_1(\beta) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & D_g(\beta) \end{bmatrix}$$

$$W(\beta)=\begin{bmatrix} w_1(\beta) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & w_g(\beta) \end{bmatrix}$$

y se obtiene:

$$S(\beta)=z'D(\beta)\sum^{-1}(\beta)[y-\mu(\beta)]$$

$$F(\beta)=z'W(\beta)z$$

para funciones de enlace canónica se obtiene:

$$S(\beta)=\frac{1}{\phi}z'\Omega[y-\mu(\beta)]$$

$$F(\beta)=\frac{1}{\phi}z'\Omega V(\beta)z$$

con

$$\Omega=diag(w_i)\ ;\ V(\beta)=diag(v(\mu_i))$$

CAPITULO III

FUNCIONES CUASI-VEROSIMILES

III.A. *CASO DE UN PARAMETRO*

III.A.1. Definición.

Supongamos que tenemos observaciones independientes z_i (i=1,2,3,...,n) con esperanzas μ_i y variancias $V(\mu_i)$, donde V es alguna función conocida. Supongamos además que para cada observación, μ_i es alguna función conocida de un conjunto de parámetros $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$.

Luego para cada observación z_i, definimos la ***<u>Función de Cuasi-Verosimilitud</u>*** ***$K(z_i, \mu_i)$*** *por la relación siguiente:*

$$\frac{\partial K(z_i, \mu_i)}{\partial \mu_i} = \frac{z_i - \mu_i}{V(\mu_i)} \qquad \textbf{Ecuac III.1}$$

o equivalentemente:

$$K(z_i, \mu_i) = \int_{R\,\mu} \frac{z_i - \mu_i'}{V(\mu')} d\mu_i' + funcion\ de\ z_i \qquad \textbf{Ecuac III.2}$$

vemos de la Ecuac III.1 que para definir la función de Cuasi-Verosimilitud es necesario solamente especificar una relación entre la ***<u>media y variancia</u>*** *de las observaciones, veremos luego que ésta función podrá usarse para la estimación. Note además que $Var(z_i) = Var(\mu_i)$; $\forall i$.*

a) Propiedades de las Funciones Cuasi-Verosímiles.

Mostraré ahora, que la función K, tiene propiedades similares a los de Log Verosimilitud, pero antes recordaremos algunas propiedades de la función Log Verosimilitud.

Sea $f(x/\theta)$ la función de Distribución de una población discreta o contínua, definimos la función de Verosimilitud de una muestra de "n" observaciones independientes por:

$$L = L(x_1,x_2,....,x_n/\theta) = f(x_1/\theta)f(x_2/\theta)....f(x_n/\theta) \qquad \textbf{Ecuac III.3}$$

entonces se cumple:

$$\int ......\int L\, dx_1......dx_n = 1 \qquad \textbf{Ecuac III.4}$$

Asumiendo que las primeras dos derivadas de L existen con respecto θ para todo θ, diferenciando ambos miembros de la ecuación anterior (Ecuac III.4) con respecto a θ, e intercambiando los operadores de diferenciación e integración tenemos:

$$\int ......\int \frac{\partial L}{\partial \theta}\, dx_1......dx_n = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.5}$$

el cual equivale a:

$$E\left(\frac{\partial Log L}{\partial \theta}\right) = \int ......\int \left(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) \mathrm{L}\, dx_1......dx_n = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.6}$$

$$\Rightarrow \quad E\left(\frac{\partial Log\ L}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.7}$$

si diferenciamos la ecuación Ecuac III.6 e intercambiamos operadores se tendrá:

$$\int \ldots\ldots \int \left\{ \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \frac{\partial L}{\partial \theta} + L \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \right\} dx_1 \ldots\ldots dx_n = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.8}$$

Factorizando L, se tiene:

$$\int \ldots\ldots \int \left\{ \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \right\} L \, dx_1 \ldots\ldots dx_n = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.9}$$

la cual viene de:

$$\int \ldots\ldots \int \left\{ \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 Log\ L}{\partial \theta^2} \right\} L \, dx_1 \ldots\ldots dx_n = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.10}$$

$$\int \ldots \int \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 L \, dx_1 \ldots\ldots dx_n + \int \ldots \int \frac{\partial^2 Log\ L}{\partial \theta^2} L \, dx_1 \ldots\ldots dx_n = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.11}$$

$$\int \ldots \int \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 L \, dx_1 \ldots\ldots dx_n = - \int \ldots \int \frac{\partial^2 Log\ L}{\partial \theta^2} L \ dx_1 \ldots\ldots dx_n \qquad \textbf{Ecuac III.12}$$

$$E\left[\left(\frac{\partial\, Log\, L}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -E\left(\frac{\partial^2\, Log\, L}{\partial \theta^2} \right) \qquad \textbf{Ecuac III.13}$$

Regresando nuevamente a las Funciones Cuasi-Verosímiles, presentamos el siguiente Teorema:

b) Teorema.

Sea z y K como se definió en la Ecuac III.1 y suponga que μ es expresado como una función de parámetros β_1, β_2, ..., β_m . Luego K tiene las siguientes propiedades:

$$E\left(\frac{\partial K}{\partial \mu}\right) = 0 \qquad \text{Ecuac III.14}$$

$$E\left(\frac{\partial K}{\partial \beta_i}\right) = 0 \quad i = 1,2,..,m \qquad \text{Ecuac III.15}$$

$$E\left(\frac{\partial K}{\partial \mu}\right)^2 = -E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \mu^2}\right) = \frac{1}{V(\mu)} \qquad \text{Ecuac III.16}$$

$$E\left(\frac{\partial K}{\partial \beta_i}\frac{\partial K}{\partial \beta_j}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right) = \frac{1}{\mathrm{V}(\mu)}\ \frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i} \qquad \text{Ecuac III.17}$$

Prueba:

(1)*Sabemos por definición que:*

$$\frac{\partial K(z,\mu)}{\partial \mu} = \frac{z-\mu}{V(\mu)} \quad \forall z \ \text{y} \ E(z) = \mu$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\partial K}{\partial \mu}\right) = E\left(\frac{z-\mu}{V(\mu)}\right) = \frac{1}{V(\mu)}\left[E(z) - \mu\right] = 0 \qquad \text{Ecuac III.18}$$

$$\therefore \ E\left(\frac{\partial K}{\partial \mu}\right) = 0 \qquad \text{Ecuac III.19}$$

(2)*Aplicando la regla de la cadena y tomando valor esperado tenemos:*

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = \left(\frac{\partial K}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\right) \qquad \text{Ecuac III.20}$$

$$E\left(\frac{\partial K}{\partial \beta_i}\right) = E\left(\frac{\partial K}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\right) = 0 \qquad \text{Ecuac III.21}$$

$$\therefore \ E\left(\frac{\partial K}{\partial \beta_i}\right) = 0 \qquad \text{Ecuac III.22}$$

(4)

$$E\left(\frac{\partial K}{\partial \beta_i}\frac{\partial K}{\partial \beta_j}\right) = E\left(\frac{\partial K}{\partial \mu}\right)^2 \frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}$$

$$= E\left(\frac{(z-\mu)^2}{\{V(\mu)\}^2}\right)\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i} \qquad \textbf{Ecuac III.23}$$

$$= \frac{Var(z)}{\{V(\mu)\}^2}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i} = \frac{V(\mu)}{\{V(\mu)\}^2}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i} \qquad \textbf{Ecuac III.24}$$

$$\therefore\ E\left(\frac{\partial K}{\partial \beta_i}\frac{\partial K}{\partial \beta_j}\right) = \frac{1}{\mathrm{V}(\mu)}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i} \qquad \textbf{Ecuac III.25}$$

Además se tiene:

$$-E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right) = -E\left(\frac{\partial}{\partial \beta_j}\frac{\partial K}{\partial \beta_i}\right) = -E\left(\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\frac{\partial K}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\right)\right)$$

$$= -E\left(\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\frac{z-\mu}{V(\mu)}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\right)\right) \qquad \textbf{Ecuac III.26}$$

$$= -E\left((z-\mu)\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\frac{1}{V(\mu)}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\right) - \frac{1}{V(\mu)}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_j}\right)$$

$$\therefore\ -E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right) = \frac{1}{\mathrm{V}(\mu)}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i} \qquad \textbf{Ecuac III.27}$$

(3) *es un caso especial de* **(4)**.

Vemos que las propiedades **(1)**, **(2)**, **(3)** *y* **(4)** *de la función de Cuasi-Verosimilitud son similares a las propiedades (Ecuac III.7, Ecuac III.13) de la Función de Verosimilitud.*

c) Corolario:

Si la distribución de z, es especificada en términos de μ, luego la función ***Log Verosimilitud L,*** *puede ser definida como:*

$$-E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \mu^2}\right) \leq -E\left(\frac{\partial^2 \, Log \, L}{\partial \mu^2}\right) \qquad \textbf{Ecuac III.28}$$

Prueba:

Sabemos por la Función de ***Log Verosimilitud L,*** *que se cumple la siguiente relación.*

$$Var\ t \geq -\frac{\{\tau'(\theta)\}^2}{E\left(\dfrac{\partial^2 Log\, L}{\partial \theta^2}\right)} \qquad \textbf{Ecuac III.29}$$

Esta desigualdad es conocida como la desigualdad de Cramer-Rao, donde t, es un estimador de $\tau(\theta)$.

Si hacemos $t = z$ y $\tau(\theta) = \mu$, tendremos:

$$Var\ z \geq -\frac{1}{E\left(\dfrac{\partial^2 Log\, L}{\partial \mu^2}\right)} \qquad \textbf{Ecuac III.30}$$

$$V(\mu) \geq -\frac{1}{E\left(\dfrac{\partial^2 Log\, L}{\partial \mu^2}\right)} \qquad \textbf{Ecuac III.31}$$

pero del Teorema anterior (Ecuac III.16) tenemos:

$$V(\mu) = -\frac{1}{E\left(\dfrac{\partial^2 K}{\partial \mu^2}\right)} \qquad \textbf{Ecuac III.32}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\mu^2}\right)} \geq -\frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 Log\, L}{\partial\mu^2}\right)}$$ **Ecuac III.33**

$$-E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\mu^2}\right) \leq -E\left(\frac{\partial^2 Log\, L}{\partial\mu^2}\right)$$ **Ecuac III.34**

III.A.2. Funciones de Verosimilitud de Familias Exponenciales.

Es posible definir una función ***Log de Verosimilitud*** *de una familia de distribuciones de un parámetro con* μ *como parámetro, especificado por z.*

El siguiente teorema muestra que la función ***Log de Verosimilitud*** *es* <u>*idéntica*</u> *a la función de Cuasi Verosimilitud* ***si y solamente si*** *ésta familia es una familia exponencial.*

a) Teorema.

Para una observación de z, la función ***Log Verosimilitud L,*** *tiene la siguiente propiedad:*

$$\frac{\partial L}{\partial\mu} = \frac{z-\mu}{V(\mu)}$$ **Ecuac III.35**

$$L \equiv K \text{ con } L = Log\, l\,.$$ **Ecuac III.36**

Donde $\mu=E(z)$ *y* $V(\mu)=Var(z)$ ***si y solamente si*** *la densidad de z con respecto a algún diferencial (dm), puede ser escrita en la forma de: exp* $\{z\theta-g(\theta)\}$*, donde* θ*, es alguna función de* μ*.*

Prueba:

Antes de pasar a demostrar el Teorema, recordemos algunas propiedades de la función ***Log Verosimilitud****. La condición necesaria y suficiente para que la igualdad estricta en Rao-Cramer se cumpla es que:*

$$\frac{\partial \, Log\, L}{\partial \theta} = A\ \{t - \tau(\theta)\} \qquad \textbf{Ecuac III.37}$$

Donde A es independiente de las observaciones, pero podría ser una función de θ. Luego se tiene:

$$\frac{\partial \, Log\, L}{\partial \theta} = A(\theta)\ \{t - \tau(\theta)\} \qquad \textbf{Ecuac III.38}$$

Multiplicando ambos miembros por {t-τ(θ)} y tomando esperanzas, tenemos:

$$\tau'(\theta) = A(\theta)\ Var\ t \qquad \textbf{Ecuac III.39}$$

Luego A(θ), tiene el mismo signo que τ' (θ) y

$$A(\theta) = \frac{\tau'(\theta)}{Var\ t} \qquad \textbf{Ecuac III.40}$$

Reemplazando en la Ecuac III.38 tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \, Log\, L}{\partial \theta} &= \frac{\tau'(\theta)}{Var\ t}\{t - \tau(\theta)\} \\ \left(\frac{\partial \, Log\, L}{\partial \theta}\right)^2 &= \frac{\{\tau'(\theta)\}^2}{\{Var\ t\}^2}\{t - \tau(\theta)\}^2 \end{aligned} \qquad \textbf{Ecuac III.41}$$

Tomando Esperanzas:

$$E\left(\frac{\partial \, Log\, L}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{\{\tau'(\theta)\}^2}{\{Var\ t\}^2} Var\ t = \frac{\{\tau'(\theta)\}^2}{Var\ t} \qquad \textbf{Ecuac III.42}$$

Pero:

$$E\left(\frac{\partial \, Log\, L}{\partial \theta}\right)^2 = -E\left(\frac{\partial^2 \, Log\, L}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\{\tau'(\theta)\}^2}{Var\, t} \qquad \textbf{Ecuac III.43}$$

Usando t=z y $\tau(\theta)=\mu$; $\tau'(\theta)=1$ y reemplazando en la Ecuac III.38 se tendrá:

$$\frac{\partial \, Log\, L}{\partial \mu} = \frac{z-\mu}{Var(z)} = \frac{z-\mu}{V(\mu)} \qquad \textbf{Ecuac III.44}$$

$$\therefore \frac{\partial \, Log\, L}{\partial \mu} = \frac{z-\mu}{V(\mu)} \qquad \textbf{Ecuac III.45}$$

La ecuación anterior es una de las premisas del Teorema. Continuando con la demostración del Teorema se tiene:

(⇒) Sabemos por definición que:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{z-\mu}{V(\mu)} \qquad \textbf{Ecuac III.46}$$

Integrando ambos miembros de la Ecuac III.46 con respecto a μ.

$$\int \frac{\partial L}{\partial \mu} d\mu = \int \frac{z-\mu}{V(\mu)} d\mu \qquad \textbf{Ecuac III.47}$$

$$L = z\int \frac{d\mu}{V(\mu)} - \int \frac{\mu}{V(\mu)} d\mu \qquad \textbf{Ecuac III.48}$$

$$L = z\theta - g(\theta) \qquad \textbf{Ecuac III.49}$$

Donde:

$$\theta = \int \frac{d\mu}{V(\mu)} \text{ y } g(\theta) = \int \frac{\mu}{V(\mu)} d\mu \qquad \textbf{Ecuac III.50}$$

Además:

$$L = Log\, f(z/\mu) = z\theta - g(\theta) \qquad \textbf{Ecuac III.51}$$

<u>Nota:</u>

Recordemos también que en la Ecuac III.3 se definió:

$$L = f(x_1/\theta)f(x_2/\theta)\cdots\cdots f(x_n/\theta) \qquad \textbf{Ecuac III.52}$$

Es decir, L no era más que la Función de Verosimilitud, sin embargo para el Teorema L=Log L' ; es decir aquí "L", es el Logaritmo de la Función de Verosimilitud.

Aplicando Antilogaritmo en la Ecuac III.51 tenemos:

$$f(z/\mu) = \exp\{z\theta - g(\theta)\} \qquad \textbf{Ecuac III.53}$$

Es la Función de densidad de una familia exponencial.

(⇐)Derivando Ecuac III.51 con respecto a μ se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\mu} &= \frac{\partial}{\partial\mu}\{z\theta - g(\theta)\} = z\frac{d\theta}{d\mu} - \frac{\partial}{\partial\mu}\{g(\theta)\} \\ &= z\frac{d\theta}{d\mu} - g'(\theta)\frac{d\theta}{d\mu}\end{aligned} \qquad \textbf{Ecuac III.54}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\mu} = \{z - g'(\theta)\}\frac{d\theta}{d\mu} \qquad \textbf{Ecuac III.55}$$

Por otro lado sabemos que la Función de densidad de z, es una exponencial tal como:

$$f(z/\mu) = \exp\{z\theta - g(\theta)\} \qquad \textbf{Ecuac III.56}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int f(z/\mu)d_m(z) &= \int \exp\{z\theta - g(\theta)\}d_m(z) = 1 \\ &= \exp\{-g(\theta)\}\int \exp(z\theta)d_m(z) = 1\end{aligned} \qquad \textbf{Ecuac III.57}$$

$$\Rightarrow \int \exp\{z\theta\}\, d_m(z) = \exp\{g(\theta)\} \qquad \textbf{Ecuac III.58}$$

Hallando la Función Generatriz de z tenemos:

$$M_Z(t) = E(\exp\ (tZ)) = \int \exp\ (tz) f(z/\mu)\, d_m(z)$$

$$= \int \exp\ (tz)\ \exp\ \{z\theta - g(\theta)\}\, d_m(z)$$

$$= \int \exp\ \{z(t+\theta)\}\ \exp\ \{-g(\theta)\}\, d_m(z) \qquad \textbf{Ecuac III.59}$$

$$= \exp\ \{-g(\theta)\} \int \exp\ \{z(t+\theta)\}\ d_m(z)$$

$$= \exp\ \{-g(\theta)\}\ \exp\ \{g(t+\theta)\}$$

$$= \exp\ \{g(t+\theta) - g(\theta)\}$$

$$\therefore\ M_Z(t) = \exp\ \{g(t+\theta) - g(\theta)\} \qquad \textbf{Ecuac III.60}$$

Además:

$$M_Z(t) = \exp\ \{g(t+\theta) - g(\theta)\} = 1 + \mu_1' t + \frac{\mu_2' t^2}{2!} + \ldots + \frac{\mu_r' t^r}{r!} + \ldots \qquad \textbf{Ecuac III.61}$$

Donde μ_r' *es el momento "r" -ésimo con respecto al origen:*

$$\mu_r' = \left[D_t^r\, M_Z(t)\right]_{t=0} \quad r = 1,2,\ldots.. \qquad \textbf{Ecuac III.62}$$

Por definición se sabe que: Log M_Z *(t) es la llamada Función Generatriz Cumulante de "Z". Aplicando Logaritmo a la Ecuac III.61 se tendrá:*

$$Log\, M_Z(t) = \{g(t+\theta) - g(\theta)\} = Log\left(1 + \mu_1' t + \frac{\mu_2' t^2}{2!} + \ldots + \frac{\mu_r' t^r}{r!} + \ldots\right) \qquad \textbf{Ecuac III.63}$$

Puesto que el Log M_Z *(t)=g(t+θ)-g(θ) , es una función de "t", entonces para t<>0 se tiene:*

$$\frac{1}{t} Log\, M_Z(t) = \frac{\{g(t+\theta) - g(\theta)\}}{t} = \frac{1}{t} Log\left(1 + \mu_1' t + \frac{\mu_2' t^2}{2!} + \ldots + \frac{\mu_r' t^r}{r!} + \ldots\right) \qquad \textbf{Ecuac III.64}$$

$$\leq \frac{1}{t}\left(\mu_1' t + \frac{\mu_2' t^2}{2!} + \ldots + \frac{\mu_r' t^r}{r!} + \ldots\right) \qquad \textbf{Ecuac III.65}$$

$$\leq \left(\mu_1' + \frac{\mu_2' t}{2!} + \ldots + \frac{\mu_r' t^{r-1}}{r!} + \ldots\right) \qquad \textbf{Ecuac III.66}$$

Tomando Límite a ambos lados cuando $t \to 0$

$$g'(\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\{g(t+\theta) - g(\theta)\}}{t} \leq \lim_{t\to 0}\left(\mu_1' + \frac{\mu_2' t}{2!} + \ldots + \frac{\mu_r' t^{r-1}}{r!} + \ldots\right) \qquad \textbf{Ecuac III.67}$$

$$g'(\theta) \leq \mu_1' \qquad \textbf{Ecuac III.68}$$

Usando la Ecuac III.62 para r =1, se tiene:

$$\mu_1' = \left[D_t\, M_Z(t)\right]_{t=0} = \int z \exp\{z\theta - g(\theta)\} d_m(z) = E(z) = \mu \qquad \textbf{Ecuac III.69}$$

r = 2

$$\mu_2' = \int z^2 \exp\{z\theta - g(\theta)\} d_m(z) \qquad \textbf{Ecuac III.70}$$

Vemos de la Ecuac III.68 y Ecuac III.69, se puede concluir que:

$$g'(\theta) = \mu \qquad \textbf{Ecuac III.71}$$

Puesto que existe $g'(\theta)$ asumamos que ésta función es derivable nuevamente, o admite derivar con respecto a θ, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} g'(\theta) = g''(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\mu) &= \frac{d}{d\theta}\left\{\int z \exp(z\theta - g(\theta)) d_m(z)\right\} \\
&= \int z \exp(z\theta - g(\theta)) \left[z - \frac{d}{d\theta} g(\theta)\right] d_m(z) \\
&= \int z \exp(z\theta - g(\theta)) \left[z - \mu\right] d_m(z) \\
&= \int z^2 \exp(z\theta - g(\theta)) d_m(z) - \mu \int z \exp(z\theta - g(\theta)) d_m(z)
\end{aligned} \qquad \textbf{Ecuac III.72}$$

Luego:

$$g''(\theta) = \mu_2' - \mu^2 = E(z^2) - [E(z)]^2 = Var(z) = V(\mu) \qquad \textbf{Ecuac III.73}$$

$$\Rightarrow g''(\theta) = V(\mu) \qquad \textbf{Ecuac III.74}$$

$$\therefore g''(\theta) = \frac{d\mu}{d\theta} = V(\mu) \qquad \textbf{Ecuac III.75}$$

Entonces:

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \frac{1}{V(\mu)} \qquad \textbf{Ecuac III.76}$$

Usando la Ecuac. III.71 y Ecuac. III.76 en la Ecuac. III.55 tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \{z - \mu\}\frac{1}{V(\mu)} = \frac{z - \mu}{V(\mu)} \qquad \textbf{Ecuac III.77}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{z - \mu}{V(\mu)} \qquad \textbf{Ecuac III.78}$$

*Si K es realmente una **Log Verosimilitud**, luego el Teorema muestra que dado V(μ), podemos construir θ y g(θ) por integración; es decir.*

$$\theta = \int \frac{d\mu}{V(\mu)} \quad \text{y} \quad g(\theta) = \int \frac{\mu}{V(\mu)} d\mu \qquad \textbf{Ecuac III.79}$$

También se podría sugerir usar la Función Característica $\phi_z(t)$ en lugar de $M_z(t)$; pero se tendrá que probar que V y g son funciones analíticas y que $\phi_z(t)$ es analítica en toda la recta real. En el corolario del Teorema III.A.1.b se probó que:

$$-E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \mu^2}\right) \leq -E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2}\right) \qquad \textbf{Ecuac III.80}$$

Luego el Teorema III.3.A.2.a prueba que ésta desigualdad se vuelve una igualdad para una familia exponencial de un parámetro. De este modo para *una relación* ***media-variancia,*** *dada la familia exponencial de un parámetro* ***minimiza*** *la información* $I = -E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\mu^2}\right)$, *siempre que exista una familia exponencial, para esta relación parece razonable considerar* $-E\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\mu^2}\right)$, *el cual es igual a 1/Var(z), como una medida de la información de un z dado, concerniente a* μ *solamente cuando la relación* ***media-variancia*** *es conocida, y considerar* $-E\left(\frac{\partial^2 (K-L)}{\partial\mu^2}\right)$ *la cual es siempre no negativa, puesto que la expresión anterior es mayor o igual a cero, y la consideramos como la información adicional siempre que la distribución de z es conocida.*

III.A.3. Estimación Usando Funciones Cuasi-Verosímiles.

Aquí discutiremos los estimadores ***Máximo Cuasi-Verosímiles*** *y probaremos que su precisión (variancia) puede ser estimada del valor esperado de las segundas derivadas de K, en la misma forma como la precisión de los estimadores Máximo Verosímiles pueden ser estimados del esperado de las segundas derivadas de* ***Log Verosimilitud.***

Sea u el vector cuyas componentes para cada z son: (l =1,2,..,n)

$$u_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_l}{\partial \beta_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial K_l}{\partial \beta_m} \end{pmatrix}$$ **Ecuac III.81**

Tomando esperanzas a u_l *; tenemos que:*

$$E(u_l) = 0 \quad l = 1,2,..,\text{n}\,(vector)$$ **Ecuac III.82**

puesto que:

$$E\left(\frac{\partial K}{\partial \beta_i}\right) = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.83}$$

Además sabemos que:

$$Cov(u_l, u_l) = Var(u_l) = E(u_l, u_l^{'}) \qquad \textbf{Ecuac III.84}$$

Entonces:

$$u_l u_l^{'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K_l}{\partial^2 \beta_1} & \cdots & Sim & \cdots \\ \frac{\partial^2 K_l}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 K_l}{\partial^2 \beta_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 K_l}{\partial \beta_m \partial \beta_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 K_l}{\partial^2 \beta_m} \end{bmatrix}_{m \times m} \qquad \textbf{Ecuac III.85}$$

Tomando esperanzas a la matriz anterior y considerando que:

$$E\left(\frac{\partial K_l}{\partial \beta_i} \frac{\partial K_l}{\partial \beta_j}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 K_l}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right) \qquad \textbf{Ecuac III.86}$$

Entonces:

$$E(u_l u_l^{'}) = Var(u_l) = \left\{-E\left(\frac{\partial^2 K_l}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right)\right\} \ (matriz) \ i, j = 1,2,\ldots,m \qquad \textbf{Ecuac III.87}$$

$$\therefore Var(u_l) = \left\{-E\left(\frac{\partial^2 K_l}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right)\right\} \ i, j = 1,2,\ldots,m \quad l = 1,2,..,n \qquad \textbf{Ecuac III.88}$$

Hagamos:

$$S(u) = \sum_{l=1}^{n} u_l \qquad \textbf{Ecuac III.89}$$

Tomando esperanzas a ambos miembros de esta ecuación resulta:

$$E[S(u)] = \sum_{l=1}^{n} E(u_l) = \sum_{l=1}^{n} 0 = 0 \quad (vector) \qquad \textbf{Ecuac III.90}$$

$$\therefore E[S(u)] = 0 \quad (vector) \qquad \textbf{Ecuac III.91}$$

Aplicando variancia a ambos miembros de la Ecuac III.89 y teniendo en cuenta que los z_l son independientes tenemos:

$$Var[S(u)] = \sum_{l=1}^{n} Var(u_l)$$

$$= \left\{-E\left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial\beta_i \partial\beta_j}\right)\right\} + \left\{-E\left(\frac{\partial^2 K_2}{\partial\beta_i \partial\beta_j}\right)\right\} + \ldots\ldots + \left\{-E\left(\frac{\partial^2 K_n}{\partial\beta_i \partial\beta_j}\right)\right\} \qquad \textbf{Ecuac III.92}$$

$$= \left\{-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta_i \partial\beta_j}(K_1 + K_2 + \ldots + K_n)\right)\right\}$$

$$\therefore Var[S(u)] = \left\{-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta_i \partial\beta_j} S(K)\right)\right\} \qquad \textbf{Ecuac III.93}$$

Hagamos:

$$H = \frac{\partial^2}{\partial\beta_i \partial\beta_j} S(K) \qquad \textbf{Ecuac III.94}$$

$$\therefore Var[S(u)] = \{-E(H)\} = D \quad (matriz) \qquad \textbf{Ecuac III.95}$$

Asumiendo que existen las dos primeras derivadas de K_l, y sabiendo que:

$$u_l = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_l}{\partial\beta_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial K_l}{\partial\beta_m} \end{pmatrix} \Rightarrow u_l = \left\{\frac{\partial K_l}{\partial\beta_j}\right\} \quad j = 1,2,\ldots,m \qquad \textbf{Ecuac III.96}$$

Derivando u_l con respecto a β_i se tiene:

$$u_l^{(1)} = \left\{\frac{\partial^2 K_l}{\partial\beta_i \partial\beta_j}\right\} \quad (matrız) \; l = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad i,j = 1,2,\ldots.,m \qquad \textbf{Ecuac III.97}$$

$$\Rightarrow S^{(1)}(u) = \sum_{l=1}^{n} u_l^{(1)}$$

$$= \left\{ \frac{\partial^2 K_1}{\partial\beta_i \partial\beta_j} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 K_2}{\partial\beta_i \partial\beta_j} \right\} + \ldots + \left\{ \frac{\partial^2 K_n}{\partial\beta_i \partial\beta_j} \right\} \qquad \textbf{Ecuac III.98}$$

$$\therefore S^{(1)}(u) = \left\{ \frac{\partial^2 S(K)}{\partial\beta_i \partial\beta_j} \right\} = H \quad (matriz)\ \forall u \qquad \textbf{Ecuac III.99}$$

Como $S(u)$ y $S^{(1)}(u)$ son contínuas, podemos aplicar la fórmula de Taylor alrededor de su valor esperado $E[S(u)]=0$ es decir:

$$S(u) \approx S(0) + S^{(1)}(u)\left(\beta_j - \hat{\beta}_j \right) \qquad \textbf{Ecuac III.100}$$

Entonces:

$$S(u) \approx \left\{ \frac{\partial^2 S(K)}{\partial\beta_i \partial\beta_j} \right\}\left(\beta_j - \hat{\beta}_j \right) \qquad \textbf{Ecuac III.101}$$

*Por lo tanto, **matricialmente** tendríamos que:*

$$S(u) \doteq H\left(\beta - \hat{\beta} \right) \qquad \textbf{Ecuac III.102}$$

Puesto que H, es simétrica y no singular entonces existe H^{-1}. Luego:

$$\left(\beta - \hat{\beta} \right) \doteq H^{-1} S(u) \qquad \textbf{Ecuac III.103}$$

Si aproximamos H por su Valor Esperado:

$$E(H) = -D \quad \Rightarrow \quad E\left(H^{-1}\right) = -D^{-1} \qquad \textbf{Ecuac III.104}$$

Luego:

$$\hat{\beta} \doteq \beta - H^{-1} S(u) \qquad \textbf{Ecuac III.105}$$

$$\hat{\beta} \doteq \beta - \left(-D^{-1} \right) S(u) \qquad \textbf{Ecuac III.106}$$

$$\therefore \hat{\beta} \doteq \beta + D^{-1}S(u) \qquad \textbf{Ecuac III.107}$$

a) Teorema.

Los estimadores Máximo Cuasi-Verosímiles tienen matriz de Dispersión aproximada igual a $D^{-1} = \{E(H)\}^{-1}$ *; donde H es la matriz de segundas derivadas de S(K).*

<u>Prueba:</u>

Sabemos que si usamos la Ecuac III.107 tenemos:

$$\left(\hat{\beta} - \beta\right) \doteq D^{-1}S(u) \qquad \textbf{Ecuac III.108}$$

Tomando la Transpuesta a ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\left(\hat{\beta} - \beta\right)' \doteq D^{-1}S'(u) \qquad \textbf{Ecuac III.109}$$

Considerando que D^{-1} *es simétrica, multiplicamos la Ecuac III.108 por la Ecuac III.109 y se tiene:*

$$\left(\hat{\beta} - \beta\right)\left(\hat{\beta} - \beta\right)' \doteq D^{-1}S(u)S'(u)D^{-1} \qquad \textbf{Ecuac III.110}$$

Aplicando el operador esperanza a la Ecuación anterior se tendrá:

$$\begin{aligned} Var\left(\hat{\beta}\right) &= E\left[\left(\hat{\beta} - \beta\right)\left(\hat{\beta} - \beta\right)'\right] \doteq D^{-1}E\left[S(u)S'(u)\right]D^{-1} \\ &= D^{-1}Var\left[S(u)\right]D^{-1} \qquad \textbf{Ecuac III.111} \\ &= D^{-1}DD^{-1} \end{aligned}$$

Concluímos:

$$\therefore Var\left(\hat{\beta}\right) = D^{-1} \qquad \textbf{Ecuac III.112}$$

III.A.4. Una Generalización del Método Gauss Newton.

a) Teorema.

Usando el Método Newton Rapmson con el esperado de las segundas derivadas de K, para calcular $\hat{\beta}$, es equivalente a calcular iterativamente una Regresión Lineal Ponderada de los residuales r, por la derivada de μ, con respecto a los β's con pesos $1/V(\hat{\mu})$ y usando los coeficientes de regresión como correcciones para $\hat{\beta}$

Prueba:

Sabemos que:

$$S(K) = \sum_{l=1} K_l = K_1 + K_2 + \ldots + K_n \qquad \textbf{Ecuac III.113}$$

Derivando con respecto a β_i a ambos miembros de la ecuación anterior y aplicando la regla de la cadena tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(K)}{\partial \beta_i} &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial K_l}{\partial \beta_i} \\ &= \frac{\partial K_1}{\partial \mu_1}\frac{\partial \mu_1}{\partial \beta_i} + \frac{\partial K_2}{\partial \mu_2}\frac{\partial \mu_2}{\partial \beta_i} + \ldots + \frac{\partial K_n}{\partial \mu_n}\frac{\partial \mu_n}{\partial \beta_i} \end{aligned} \qquad \textbf{Ecuac III.114}$$

$$\frac{\partial S(K)}{\partial \beta_i} = \frac{z_1 - \mu_1}{V(\mu_1)}\frac{\partial \mu_1}{\partial \beta_i} + \frac{z_2 - \mu_2}{V(\mu_2)}\frac{\partial \mu_2}{\partial \beta_i} + \ldots + \frac{z_n - \mu_n}{V(\mu_n)}\frac{\partial \mu_n}{\partial \beta_i} \qquad \textbf{Ecuac III.115}$$

Expresando la ecuación anterior en forma compacta.

$$\frac{\partial S(K)}{\partial \beta_i} = S\left(\frac{z-\mu}{V(\mu)}\frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}\right) = S\left\{\frac{r v_i}{V(\mu)}\right\} \quad con\ r = z - \mu \quad v_i = \frac{\partial \mu}{\partial \beta_i} \qquad \textbf{Ecuac III.116}$$

Vemos que la Ecuac. III.116 es un modelo de regresión Lineal Ponderada, de los residuales r, por la derivada de μ con respecto a los β's con pesos 1/V(μ). Puesto que los errores tienen variancia constante podemos aplicar Mínimos Cuadrados Ponderados.

Si derivamos la Ecuac III.116 con respecto a $\hat{\beta}_j$ *e igualando a cero, podemos hallar los estimadores; pero si aplicamos esperanzas, hallamos las correcciones δβ de los estimadores:*

$$\frac{\partial^2 S(K)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{V(\mu_l)}\left[\frac{\partial (z_l - \mu_l)}{\partial \beta_j}\frac{\partial \mu_l}{\partial \beta_i} + (z_l - \mu_l)\frac{\partial^2 \mu_l}{\partial \beta_j \partial \beta_i}\right] \qquad \textbf{Ecuac III.117}$$

$$\frac{\partial^2 S(K)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{V(\mu_l)}\left[-\frac{\partial \mu_l}{\partial \beta_j}\frac{\partial \mu_l}{\partial \beta_i} + (z_l - \mu_l)\frac{\partial^2 \mu_l}{\partial \beta_j \partial \beta_i}\right] \qquad \textbf{Ecuac III.118}$$

Tomando Esperanzas a ambos miembros de la ecuación anterior se tendrá:

$$E\left[\frac{\partial^2 S(K)}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right] = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{V(\mu_l)}\left[-\frac{\partial \mu_l}{\partial \beta_j}\frac{\partial \mu_l}{\partial \beta_i}\right] \qquad \textbf{Ecuac III.119}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 S(K)}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right] = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{V(\mu_l)}\left[\frac{\partial \mu_l}{\partial \beta_j}\frac{\partial \mu_l}{\partial \beta_i}\right] \qquad \textbf{Ecuac III.120}$$

Concluímos:

$$\therefore -E\left[\frac{\partial^2 S(K)}{\partial\beta_i \partial\beta_j}\right] = S\left\{\frac{v_i v_j}{V(\mu)}\right\} \quad i,j = 1,2,\ldots,m$$ **Ecuac III.121**

Luego:

$$\sum_j S\left\{\frac{v_i v_j}{V(\mu)}\right\}\delta\beta_j = S\left\{\frac{r v_i}{V(\mu)}\right\} \quad i,j = 1,2,\ldots,m$$ **Ecuac III.122**

III.B. *CASO MULTIPARAMETRAL*

III.B.1. Una clase de funciones de verosimilitud

Sea el vector de variables aleatorias Y de dimensión dada por (Nx1) y la distribución de una familia exponencial dada por:

$$l = \exp\left(\sigma^{-2}\left\{Y^T\theta - b(\theta) - c(Y,\sigma)\right\}\right)$$ **Ecuac III.123**

A la Ecuac. III.123 la consideramos como la función de Verosimilitud, si tomamos Log a la ecuación anterior se tendrá:

$$L = Log\, l = \sigma^{-2}\left\{Y^T\theta - b(\theta) - c(Y,\sigma)\right\}$$ **Ecuac III.124**

Diferenciando la Ecuac III.124 y asumiendo que la distribución de Y no depende de θ, además de la Ecuac III.124 vemos que L, es una función del parámetro θ (N-dimensional) y además del parámetro adicional σ^2

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sigma^{-2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{Y^T\theta - b(\theta) - c(Y,\sigma)\right\}$$ **Ecuac III.125**

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sigma^{-2}\left\{Y - b'(\theta)\right\}$$ **Ecuac III.126**

Sabemos por propiedad que se cumple: $E\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$, *entonces tomando esperanzas a ambos miembros de la Ecuac. III.126 se tiene:*

$$E\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = \sigma^{-2}\left\{E(Y) - b'(\theta)\right\} = 0$$
$$\Rightarrow E(Y) - b'(\theta) = 0$$ **Ecuac III.127**

$$\therefore\ E(Y) = b'(\theta) = \mu \qquad \textbf{Ecuac III.128}$$

Usando la Ecuac. III.126. Elevando al cuadrado y tomando esperanzas se tendrá:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 = \sigma^{-4}\{Y - b'(\theta)\}\{Y - b'(\theta)\}^T \qquad \textbf{Ecuac III.129}$$

$$E\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 = \sigma^{-4}E\left[\{Y - b'(\theta)\}\{Y - b'(\theta)\}^T\right] = \sigma^{-4}Cov(Y) \qquad \textbf{Ecuac III.130}$$

$$\therefore\ E\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 = \sigma^{-4}Cov(Y) \qquad \textbf{Ecuac III.131}$$

Derivando la Ecuac III.126 con respecto a θ, y tomando esperanzas a ambos miembros tenemos:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = -\sigma^{-2}b''(\theta) \qquad \textbf{Ecuac III.132}$$

Pero por propiedad de Log Verosimilitud se tiene:

$$E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right) = -\sigma^{-2}b''(\theta) = -E\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 \qquad \textbf{Ecuac III.133}$$

Igualando las ecuaciones Ecuac III.131 y Ecuac III.133

$$E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right) = \sigma^{-4}Cov(Y) = \sigma^{-2}b''(\theta) \qquad \textbf{Ecuac III.134}$$

$$\Rightarrow\ Cov(Y) = \sigma^2 b''(\theta) \qquad \textbf{Ecuac III.135}$$

Si usamos la Ecuac III.128 y derivamos con respecto a θ, se tiene:

$$b''(\theta) = \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = V(\mu)$$ **Ecuac III.136**

Usando la Ecuac III.136 en Ecuac III.135.

$$\therefore\ Cov(Y) = \sigma^2 b''(\theta) = \sigma^2 V(\mu)$$ **Ecuac III.137**

Hallando la Función Generatriz de Momentos del vector de variables aleatorias Y_{Nx1} tenemos:

$$M_Y(T) = E\{\exp(T'\,Y)\} = \int \ldots \int \exp(T'\,Y)\exp\left(\sigma^{-2}\{Y'\theta - b(\theta) - c(Y,\sigma)\}\right)dy_1 \ldots dy_N$$

Ecuac III.138

$$M_Y(T) = \int \ldots \int \exp\left(Y'T + \sigma^{-2}\{Y'\theta - b(\theta) - c(Y,\sigma)\}\right)dy_1 \ldots dy_N$$ **Ecuac III.139**

Además sabemos que:

$$\int \ldots \int \exp\left(\sigma^{-2}\{Y'\theta - b(\theta) - c(Y,\sigma)\}\right)dy_1 \ldots dy_N = 1$$ **Ecuac III.140**

$$\exp\left(-\sigma^{-2}b(\theta)\right) \int \ldots \int \exp\left(\sigma^{-2}\{Y'\theta - c(Y,\sigma)\}\right)dy_1 \ldots dy_N = 1$$ **Ecuac III.141**

$$\Rightarrow \int \ldots \int \exp\left(\sigma^{-2}\{Y'\theta - c(Y,\sigma)\}\right)dy_1 \ldots dy_N = \exp\left(\sigma^{-2}b(\theta)\right)$$ **Ecuac III.142**

De la Ecuac III.142 agrupamos convenientemente y se tiene:

$$M_Y(T) = \exp\left(-\sigma^{-2}b(\theta)\right)\int \ldots \int \exp\left(\sigma^{-2}\left\{Y'\left(\theta + \tfrac{T}{\sigma^{-2}}\right) - c(Y,\sigma)\right\}\right)dy_1 \ldots dy_N$$

Ecuac III.143

Usando la Ecuac. III.142 en la expresión anterior se tendrá:

$$M_Y(T) = \exp\left(-\sigma^{-2}b(\theta)\right)\exp\left\{\sigma^{-2}b\left(\theta + \frac{T}{\sigma^{-2}}\right)\right\}$$ **Ecuac III.144**

$$\therefore\ M_Y(T) = \exp\left\{\sigma^{-2}\left\{b\left(\theta + \frac{T}{\sigma^{-2}}\right) - b(\theta)\right\}\right\}$$ **Ecuac III.145**

Construímos la Función Cumulante, tomando Logaritmo a la Ecuación *anterior.*

$$Log\ M_Y(T) = \sigma^{-2}\left\{b\left(\theta + \frac{T}{\sigma^{-2}}\right) - b(\theta)\right\}$$ **Ecuac III.146**

Sabemos que se puede hallar el "r" ésimo cumulante a través de:

$$k_r = \left[\partial_T^r\ LogM_Y(T)\right]_{T=0} \qquad r = 1,2,\ldots$$ **Ecuac III.147**

Derivando en ambos miembros de la Ecuac III.146 con respecto a T y evaluado para T=0 tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial T} Log\ M_Y(T) = I_{NxN}\left\{b^{(1)}\left(\theta + \left\{\frac{T}{\sigma^{-2}}\right\}\right)\right\}$$ **Ecuac III.148**

$$\left.\frac{\partial}{\partial T} Log\ M_Y(T)\right|_{T=0} = b^{(1)}(\theta) = \mu$$ **Ecuac III.149**

Derivando nuevamente la Ecuac III.148 con respecto a T y evaluando para T=0 tenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial T \partial T'} Log\ M_Y(T) = \frac{1}{\sigma^{-2}} I_{NxN}\left\{b^{(2)}\left(\theta + \left\{\frac{T}{\sigma^{-2}}\right\}\right)\right\}$$ **Ecuac III.150**

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial T \partial T'} Log\ M_Y(T)\right|_{T=0} = \sigma^2 b^{(2)}(\theta) = \sigma^2 V(\mu)$$ **Ecuac III.151**

Por lo tanto podríamos Generalizar diciendo que el "r"-ésimo cumulante (orden "r") de Y está dado por:

$$k_r = \sigma^{2r-2}\ b^{(r)}(\theta)$$ **Ecuac III.152**

Por lo cual hay una conexión entre la Ecuac III.124 y las Convoluviones naturales de Familias exponenciales, donde σ^{-2} juega el rol de un tamaño *muestral.*

La expresión para los cumulantes de Y, y en particular las Ecuac III.128 y Ecuac III.137 para los dos primeros cumulantes, describen la componente aleatoria del modelo. Sin embargo, en las aplicaciones es generalmente la variación sistemática o no aleatoria de importancia fundamental. A menudo la componente sistemática puede ser expresada en términos de la ecuación de regresión.

$$E(Y) = \mu = \mu(\beta) \qquad \textbf{Ecuac III.153}$$

Donde ß es el vector de parámetros "p"-dimensional y $\mu(\,.)$ *es un vector de funciones conocidas, que admite derivadas de tercer orden. En muchas aplicaciones la función de regresión* $\mu(\,.)$ *tiene una componente lineal envolviendo un modelo de matriz X, describiendo el experimento u observaciones y las condiciones bajo las cuales las observaciones fueron realizadas. En la presente investigación asumimos identificable claramente que ß's distintos implican* μ*'s distintos. Esto quiere decir, que la matriz del modelo X, o más generalmente, la matriz* $D = \dfrac{d\mu}{d\beta}$ *de derivadas tiene rango "p" para todo ß.*

La Ecuac III.153 de regresión es un caso especialmente importante, porque no envuelve a σ^2. *A propósito de los contrastes, también consideramos las ecuaciones de regresión que envuelven implícitamente a* σ^2 *, y tenemos:*

$$E\{h(y)\} = \phi(\beta)$$ **Ecuac III.154**

Donde h(.) es una función no lineal conocida de los datos. Podríamos reemplazar la ecuación anterior con un modelo más general que envuelva a σ^2 explícitamente, pero este nivel adicional de generalidad no es requerido aquí.

Si σ^2 es conocido la expresión de la izquierda de la Ecuac III.154 es una función de μ solamente y sujeto a una monotoneidad razonable, podremos expresar la Ecuac III.154 en la forma de la Ecuac III.153. Además para σ^2 conocido , la Ecuac III.124 es una familia exponencial con la propiedad que la variancia y todos los cumulantes de orden superior de Y son funciones del vector de medias solamente.

Los Mínimos Cuadrados Ponderados podrían ser usados para calcular el Estimador Máximo Verosímil de ß tanto en la Ecuac III.153 o en la Ecuac III.154 .

En el caso más general, donde σ^2 es un parámetro desconocido, la Ecuac III.124 no es generalmente una familia Exponencial. Además no es posible expresar la Ecuac. III.154 en la forma de la Ecuac III.153.

Sin embargo los Mínimos Cuadrados Ponderados todavía podrían ser usados para calcular β siempre que el modelo de interés tenga la forma de la Ecuac III.153 y no involucre a σ^2

Una propiedad adicional de la Ecuac III.124 es que μ y σ^2 son ortogonales en el sentido que la segunda derivada Mixta tiene esperanza cero.

Además bajo la Ecuac III.153 pero no generalmente bajo el modelo de la Ecuac III.54 , ß y σ^2 *son también ortogonales.*

Supongamos de nuevo que σ^2 *es desconocido y que* $c(y,\sigma) = g(y) + h(\sigma)$ *corresponden a un modelo de familia exponencial. Se conocen solamente tres familias de distribuciones, la normal, normal inversa y Gamma, que satisfacen estos requerimientos. Estas tres familias comparten la propiedad observable de que* $b'(.)$ *y* $g'()$ *son funciones inversas. Esta propiedad está estrechamente conectada con la existencia de un estadístico* $W(y,\mu)$ *cuya distribución es independiente de* μ *, pero podría depender de* σ^2

Además una propiedad importante de esta clase exponencial es que, para σ *fijado, la Máxima Verosimilitud conseguida es una constante, independiente de* **y** *y ocurre que* μ=*y . Además el estimador de* σ^2 *es una función de :*

$$-2\left\{ Y'\hat{\theta} - b\left(\hat{\theta}\right) - g(y)\right\}$$

Ecuac III.155

la cual es equivalente a:

$$-2\left[Y'\left\{\hat{\theta} - \theta(y)\right\} - b\left(\hat{\theta}\right) + b(\theta(y))\right]$$

Ecuac III.156

Esta cantidad es algunas veces llamada la Desviación y juega el rol de la suma de cuadrados residuales. La segunda forma de la expresión usa solamente las funciones $\theta(\mu)$ *,*$b(\theta)$ *por lo tanto la expresión podría ser usada indiferentemente si la Ecuac III.124 es o no de una familia exponencial.*

De hecho el sustento de la Ecuac III.124 requiere no ser independiente de σ.

Las ecuaciones de Mínimos Cuadrados Generalizados para los parámetros en la Ecuac III.153 puede ser escrita como:

$$D^T V^{-1}\left\{Y-\mu\left(\hat{\beta}\right)\right\}=0_{px1}$$

Ecuac III.157

Donde: $D=\dfrac{d\mu}{d\beta}$ *es de orden Nxp y* V^{-} *es la inversa generalizada de V. Nos referimos a la ecuac III.157 como las ecuaciones de Mínimos Cuadrados elementales porque de la interpretación geométrica la cual involucra sucesivas proyecciones del vector residual*

$$Y-\mu\left(\hat{\beta}_0\right)$$

Ecuac III.158

a la tangente del espacio de la solución local $\mu(\beta)$ *. Aquí* $\hat{\beta}_o$ *es el estimador actual de* β *. Estas ecuaciones no dependen de* σ^2 *por lo tanto el valor numérico de* $\hat{\beta}$ *es el mismo si* σ^2 *es o no conocido. El método de Newton-Raphson con la matriz de segundas derivadas reemplazada por su valor esperado* $D^T V^- D$*, resulta en una corrección para* $\hat{\beta}_o$ *dado por:*

$$\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_0=\left(D^T V^- D\right)^{-1} D^T V^-\left(Y-\hat{\mu}_0\right)$$ **Ecuac III.159**

Donde las cantidades de la derecha son calculadas de β_0.

En la sección siguiente el orden natural de las asunciones es invertido. En vez de tomar el Logaritmo de la Verosimilitud de la Ecuac III.124 de la cual los momentos podrían ser derivados, comencemos con los momentos e intentemos *reconstruir la Ecuac III.124. La función* ***<u>reconstituída</u>*** *es llamada una Cuasi verosimilitud y sus propiedades asintóticas son investigadas.*

III.B.2. Funciones Cuasi Verosímiles

En esta sección solamente las asunciones de la distribución de los datos son las concernientes al primer y segundo momentos y algunas condiciones adicionales de regularidad referentes a la Ecuac III.153.

Dado el vector de variables aleatorias $\boldsymbol{Y}$ *, con media* $\boldsymbol{\mu}$ *y matriz de covariancias* $\sigma^2 V(\mu)$ *el logaritmo de la Cuasi Verosimilitud, es considerada como una función de* $\boldsymbol{\mu}$ *, es dado por el sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales:*

$$\frac{\partial}{\partial\mu} l(\mu;y) = V^{-}(\mu)(y-\mu)$$

Ecuac III.160

La Ecuación anterior es una extensión de la definición de Wedderburn's (1974) dada en la Ecuación III.1 (caso de un parámetro).

Para muchos propósitos no es necesario resolver para $l(\mu;\, y)$ *. Cuando una solución explícita es requerida, se puede a menudo encontrarla por la construcción de funciones* $\theta(\mu)$*,* $b(\theta)$ *satisfaciendo la Ecuac III.128 y Ecuac III.137 y escribiendo:*

$$l(\mu;Y) = Y^T\theta - b(\theta) - c(Y,\sigma)$$

Ecuac III.161

Donde $c(Y,\sigma)$ *es completamente arbitraria, solamente siempre que la parte sistemática del modelo tenga la forma de la Ecuac III.153 sin involucrar el* *parámetro* σ^2 *desconocido, las ecuaciones de Mínimos Cuadrados Generalizados para* β *son dadas por la Ecuac III.155.*

Esto es, desde luego no se garantiza que β *es el estimador Máximo Verosímil, porque la correcta función de Verosímilitud, es generalmente diferente de la forma* $l(\mu;\, y)$. *En particular las cumulantes de orden mayor de* $\mathbf{Y}$, *podrían no tener la forma multiplicativa requerida.*

Procedamos ahora a bosquejar las propiedades de los estimadores Cuasi Verosímiles, es importante enfatizar, que las propiedades de los estimadores Cuasi Verosímiles ***no*** *son propiedades generales, para todos los estimadores Mínimo Cuadrados Ponderados.*

Por ejemplo, los Mínimos Cuadrados Ponderados pueden ser usados para la estimación de parámetros cuando $Cov(Y)= V(\sigma^2, \rho)$, *donde* ρ *es un* ***vector*** *de coeficientes autorregresivos.*

Las Funciones Cuasi Verosímiles son definidas solamente cuando la matriz de covariancias tiene la forma multiplicativa simple $\sigma^2 V(\mu)$. *Ver Tabla I.*

Morton (1981) considera un problema más general involucrando varios parámetros de ruído. Sus ecuaciones de estimación tienen la forma de la Ecuac III.154, donde la cantidad $Y - \mu(\beta)$ *es reemplazada por un vector de* ***pivotes*** *cuya distribución es independiente de los parámetros de ruído. En los problemas considerados aquí, hay un solo parámetro de ruído* σ^2, *no es*

TABLA I

Funciones de Cuasi Verosimilitud, asociadas con alguna función de variancia

$V(\mu)$	$l(\mu; y)$	***Nombre***	***Restricciones***
σ^2	$\frac{1}{2}(y-\mu)^2$	*Normal*	-
$\sigma^2\mu$	$y\log\ \mu-\mu$	*Poisson*	***μ>0 ; y>=0***
$\sigma^2\mu^2$	$y/\mu-\log\ \mu$	*Gamma*	***μ>0 ; y>=0***
$\sigma^2\mu^p$	$\mu^{-p}\left(\frac{\mu y}{1-p}-\frac{\mu^2}{2-p}\right)$	-	***P<>0,1,2 ; μ>0;y>=0***
$\sigma^2 e^{\mu}$	$-(y-\mu)e^{-\mu}+e^{-\mu}$	-	-
$\sigma^2\mu(1-\mu)$	$y\log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)+\log(1-\mu)$	*Binomial*	***0<μ<1;0<=y<=1***

*necesario construir **pivotes** y de hecho la distribución de $Y-\mu$ o $V^{-1/2}(Y-\mu)/\sigma$ dependerá de σ^2.*

III.B.3. Propiedades de las Funciones Cuasi Verosímiles

*Las propiedades estadísticas de las funciones Cuasi Verosímiles son muy similares a las Verosimilitudes ordinarias, excepto que el parámetro de ruído **σ^2 cuando es desconocido** , es tratado separadamente para ß **y no es estimado por Mínimos Cuadrados Ponderados**. Los principales resultados caen convenientemente en tres clases:*

*La que concierne a la función **Score**, $U_\beta = \dfrac{\partial l}{\partial \beta}$, la concerniente al estimador β y la que concierne a la distribución del estadístico de Razón Cuasi Verosímil .*

La función Score es definida por:

$$U_\beta = U_\beta(\beta;Y) = D^T V^-(Y-\mu(\beta))$$

Ecuac III.162

Esto se verifica puesto que:

$$U_\beta = \frac{\partial}{\partial \beta} l(\mu(\beta),Y)$$

Ecuac III.163

Aplicando la regla de la Cadena a la Ecuación anterior y usando la Ecauc III.155 y Ecuac III.153 tenemos:

$$U_\beta = \frac{\partial l}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)^T V^-(\mu)(Y - \mu(\beta))$$

Ecuac III.164

Por lo tanto:

$$U_\beta = U_\beta(\beta;Y) = D^T V^-(Y - \mu(\beta))$$

Ecuac III.165

Con:

$$D = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)$$

Ecuac III.166

Tomando valor esperado a ambos miembros de la Ecuac III.162 tenemos:

$$E(U_\beta) = D^T V^- E(Y - \mu(\beta)) = 0_{px1}$$

Ecuac III.167

*Esto debido a que $E(Y) = \mu(\beta)$, concluímos entonces $E(U_\beta) = 0$; es decir la esperanza de la **función Score** es cero.*

Antes de hallar la matriz de Covariancias de la Función Score, recordemos el siguiente teorema:

*Si $S(X;\theta)$ es el score de una función de verosimilitud y si **T** (estadístico) es cualquier función de **X** y θ, entonces bajo ciertas condiciones de regularidad se tiene:*

$$E(ST') = \frac{\partial}{\partial \theta} E(T') - E\left(\frac{\partial}{\partial \theta} T'\right)$$

Ecuac III.168

Ahora sí, hallemos la matriz de Covariancias de la función score, por definición sabemos que:

$$Cov(U_\beta)= E(U_\beta U_\beta')= E(\sigma^{-2}U_\beta\sigma^2U_\beta')$$ **Ecuac III.169**

Aplicando la expresión de la Ecuac III.168 del teorema enunciado en la Ecuac III.169 tenemos:

$$Cov(U_\beta)= \frac{\partial}{\partial\beta}E(\sigma^2U_\beta')-E(\frac{\partial}{\partial\beta}\sigma^2U_\beta')$$ **Ecuac III.170**

Por otro lado sabemos que $E(U_\beta)=0$ *y en particular lo será para* $E(U_\beta')=0$, *luego:*

$$Cov(U_\beta) = -\sigma^2 E\left(\frac{\partial}{\partial\beta}U_\beta'\right) = -\sigma^2 E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\beta^T}\right)_{pxp}$$ **Ecuac III.171**

Por lo tanto:

$$Cov(U_\beta)= \sigma^2 i_\beta = \sigma^2 D^T V^- D$$ **Ecuac III.172**

Donde:

$$i_\beta = -E\left(\frac{\partial^2 l(\mu(\beta);y)}{\partial\beta\partial\beta^T}\right)$$ **Ecuac III.173**

Es la matriz de Información de Fisher, puesto que no hay ambiguedad escribiremos $l(\beta;y)$ *en lugar de* $l(\mu(\beta);y)$.

Bajo condiciones suaves sobre la derivada de tercer orden de la Ecuac III.153 y asumiendo que $N^{-1}i_\beta$ *tiene límite definido positivo y que los momentos de tercer orden de* ***Y*** *son finitos aplicamos los resultados asintóticos siguientes.*

Procedamos ahora a averiguar como se distribuye $N^{-1/2}U_\beta$, *para ello hallemos la Función Generatriz de Momentos.*

$$M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = E\left(\exp\left(T^T N^{-/2} U_\beta\right)\right) \qquad \textbf{Ecuac III.174}$$

Donde:

$$T_{px1} \quad \text{y} \quad U_{\beta_{(px1)}} = D^T V^-(Y-\mu) \qquad \textbf{Ecuac III.175}$$

Luego:

$$\begin{aligned} M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) &= E\left(\exp\left(T^T N^{-/2} U_\beta\right)\right) = E\left(\exp(T^T N^{-/2} D^T V^-(Y-\mu))\right) \\ &= \exp\left(-N^{-/2} T^T D^T V^- \mu\right) E\left(\exp(N^{-/2} T^T D^T V^- Y)\right) \end{aligned} \qquad \textbf{Ecuac III.176}$$

$$M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = \exp\left(-\mu S^T\right) E\left(\exp(S^T Y)\right) \qquad \textbf{Ecuac III.177}$$

con $S^T_{1xN} = N^{-1/2} T^T D^T V^-$ *entonces la Ecuac III.129 se convierte en:*

$$M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = \exp\left(-\mu S^T\right) M_Y(S) \qquad \textbf{Ecuac III.178}$$

Desarrollando $M_Y(S)$ *tenemos:*

$$M_Y(S) = E\left(\exp(S^T Y)\right) \qquad \textbf{Ecuac III.179}$$

$$M_Y(S) = I_{(NxN)} + \mu_{1(Nx1)} S^T_{(1xN)} + \mu_{2(NxN)} S^T S_{(1x1)} + \mu_{3(Nx1)} S^T S S^T_{(1xN)} + \ldots\ldots \qquad \textbf{Ecuac III.180}$$

Tomando Logaritmo a ambos miembros de la Ecuac III.178 y usando la expresión de la Ecuac III.180 tenemos:

$$Log\ M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = -\mu S^T + Log\ M_Y(S)$$

$$Log\ M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = -\mu S^T + Log\left[I + \mu_1 S^T + \mu_2 S^T S + \mu_3 S^T SS^T + ...\right]$$ **Ecuac III.181**

Al desarrollar en serie la expresión del Logaritmo tenemos:

$$\begin{aligned} Log\ M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = & -\mu S^T + \left(\mu_1 S^T + \mu_2 \frac{S^T S}{2!} + \mu_3 \frac{S^T SS^T}{3!} + ...\right) \\ & -\frac{1}{2}\left(\mu_1 S^T + \mu_2 \frac{S^T S}{2!} + \mu_3 \frac{S^T SS^T}{3!} + ...\right)^2 \\ & +\frac{1}{3}\left(\mu_1 S^T + \mu_2 \frac{S^T S}{2!} + \mu_3 \frac{S^T SS^T}{3!} + ...\right)^3 \\ & .... \end{aligned}$$

Ecuac III.182

Agrupando los términos en función a S^T y usando el hecho que $\mu_{1_{(Nx1)}} = \mu_{(Nx1)}$ tenemos:

$$\begin{aligned} Log\ M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = & \left(-\mu S^T + \mu_1 S^T\right) + \left(\mu_2 - \mu_1 \mu_1^T\right)\frac{S^T S}{2!} \\ & + \left(\mu_3 + 2\mu_1 \mu_1^T \mu_1\right)\frac{S^T SS^T}{3!} + ... \\ = & \left(\mu_2 - \mu_1 \mu_1^T\right)\frac{S^T S}{2!} + \left(\mu_3 + 2\mu_1 \mu_1^T \mu_1\right)\frac{S^T SS^T}{3!} + ... \end{aligned}$$

Ecuac III.183

Por otro lado desarrollando $S^T S$:

$$S^T S = \left(N^{-1/2} T^T D^T V^-\right)\left(N^{-1/2} V^- DT\right)$$ **Ecuac III.184**

$$S^T S = N^{-1} T^T D^T V^- V^- DT$$ **Ecuac III.185**

Usando la ecuación anterior y aprovechando que $\sigma^2 V_{(NxN)} = \mu_2 - \mu_1 \mu_1^T$ se tendrá:

$$Log\ M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = \frac{1}{2}\sigma^2 N^{-1} T^T D^T V^- V V^- DT + \left(\mu_3 + 2\mu_1\mu_1{}^T\mu_1\right)\frac{S^T S S^T}{3!} + \ldots..$$

Ecuac III.186

Además sabemos que V^- es la inversa Generalizada de V, entonces por propiedad se cumple que:

$$V^- V V^- = V^-$$ **Ecuac III.187**

Usando la ecuación anterior en la Ecuac III.186:

$$Log\ M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = \frac{1}{2}\sigma^2 N^{-1} T^T D^T V^- DT + \left(\mu_3 + 2\mu_1\mu_1{}^T\mu_1\right)\frac{S^T S S^T}{3!} + \ldots..$$

Ecuac III.188

$$Log\ M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = \frac{1}{2}T^T \frac{\sigma^2 i_\beta}{N} T + O\left(N^{-1/2}\right)$$ **Ecuac III.189**

Tomando Límite a ambos miembros de la ecuación anterior, cuando N→ ∞ (Teo. Límite Central), tenemos:

$$\lim_{N\to\infty} Log\ M_{N^{-1/2}U_\beta}(T) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}T^T \frac{\sigma^2 i_\beta}{N} T + \lim_{N\to\infty} O\left(N^{-1/2}\right)$$ **Ecuac III.190**

Por Consiguiente de la expresión anterior concluímos lo siguiente:

$$\therefore N^{-1/2}U_\beta \sim N_p\left(0, \frac{\sigma^2 i_\beta}{N}\right) + O_p\left(N^{-1/2}\right)$$

Ecuac III.191

Donde: $i_\beta = D^T V^- D$ *y* $O_p\left(N^{-1/2}\right)$ *es un vector aleatorio (Z_N) tal que para* *algún ε >0 se tiene que:*

$$\underset{N\to\infty}{Lim}\ \Pr\left(\left|Z_N - Z\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Ecuac III.192

Además de la Ecuac III.190 observamos que:

$$\underset{N\to\infty}{Lim}\ \frac{1}{2}T^T\frac{\sigma^2 i_\beta}{N}T = 0$$

Ecuac III.193

Esto quiere decir que todo punto que se desplaza a través de la curva $T^T\frac{\sigma^2 i_\beta}{N}T$ conforme N crece, la distancia al eje de las abcisas es "cero"; esto quiere decir que el eje de las abscisas es una ***asíntota*** *para dicha curva; o que la curva es asintótica.*

A continuación veamos ***otras propiedades de eficiencia*** *de estos estimadores.*

Sabemos que U_β es un vector aleatorio de orden px1. Bajo ciertas condiciones de regularidad, $\hat{\beta}$ es un estimador consistente; expandimos la función Score U_β en series de Taylor alrededor del valor verdadero ß entonces para un y_j ("j" fijo) tenemos:

$$U\left(\hat{\beta};y_j\right) = U\left(\beta;y_j\right) + \sum_{i=1}^{p} U'\left(\beta;y_j\right)\left(\hat{\beta}_i - \beta_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} U''\left(\beta;y_j\right)\left(\hat{\beta}_i - \beta_i\right)^2$$

Ecuac III.194

Donde:

$$U'\left(\beta;y_j\right)=\frac{\partial}{\partial\beta}U\left(\beta;y_j\right)$$
$$U''\left(\beta;y_j\right)=\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}U\left(\beta;y_j\right)$$

Ecuac III.195

Denotando matricialmente la Ecuac III.194 tenemos:

$$U\left(\hat{\beta};y\right)_{(px1)}=U(\beta;y)_{(px1)}+U'(\beta;y)_{(pxp)}\left(\hat{\beta}-\beta\right)_{(px1)}+\frac{1}{2}U''(\beta;y)\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2$$

Ecuac III.196

En la Ecuac III.194 hacemos $i = i^*$ (fijo o uniparametral) y haciendo uso de que $U\left(\hat{\beta};y\right)=0$; tenemos:

$$0=U\left(\beta_{i}.;y_j\right)+U'\left(\beta_i.;y_j\right)\left(\hat{\beta}_{i}.-\beta_{i}.\right)+\frac{1}{2}U''\left(\beta_i.;y_j\right)\left(\hat{\beta}_{i}.-\beta_{i}.\right)^2$$

Ecuac III.197

Puesto que $U\left(\beta_i.;y_j\right)$ es una variable aleatoria para y_j con "j " fijo, entonces supongamos que tenemos y_1 , y_2 ,..., y_N variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídos; luego:

$$U\left(\beta_i.;y_j\right)=-\left(\hat{\beta}_{i}.-\beta_{i}.\right)\left[U'\left(\beta_i.;y_j\right)+\frac{1}{2}U''\left(\beta_i.;y_j\right)\left(\hat{\beta}_{i}.-\beta_{i}.\right)\right]$$
$$\leq N\left(\hat{\beta}_{i}.-\beta_{i}.\right)\left[\frac{U'\left(\beta_i.;y_j\right)}{N}+\frac{1}{N}U''\left(\beta_i.;y_j\right)\left(\hat{\beta}_{i}.-\beta_{i}.\right)\right]$$

Ecuac III.198

Dado que tenemos "N" observaciones; luego habrán "N" variables aleatorias ($U\left(\beta_i.;y_j\right)$); aplicando entonces sumatorias a ambos miembros de la Ecuac III.198 se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}U(\beta_i.;y_j)\leq\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}U'(\beta_i.;y_j)+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}U''(\beta_i.;y_j)\left(\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right)\right]$$

Ecuac III.199

También se conoce que $i_\beta(\beta_i.;y_j)=E(-U'(\beta_i.;y_j)$ *con* $i_\beta(\beta_i.;y_j)\neq 0$*; entonces:*

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\frac{U(\beta_i.;y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}\leq\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{U'(\beta_i.;y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{U''(\beta_i.;y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}\left(\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right)\right]$$

Ecuac III.200

Sea e_N *una variable aleatoria dada por:*

$$e_N=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{U''(\beta_i.;y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}\left(\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right)$$

Ecuac III.201

Tomando valor absoluto a la expresión anterior y acotando tenemos:

$$|e_N|=\frac{1}{N}\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{U''(\beta_i.;y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}\left(\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right)\right|\leq\left|\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right|\frac{g(y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}$$

Ecuac III.202

Usando la ecuación anterior en la Ecuac III.200 tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\frac{U(\beta_i.;y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}\leq\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{U'(\beta_i.;y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}+e_N\right]$$

Ecuac III.203

Con

$$|e_N|\leq\left|\hat{\beta}_i.-\beta_i.\right|\frac{g(y_j)}{i_\beta(\beta_i.;y)}=o_p(1)$$

Ecuac III.204

Donde $g(y_j)$ es una función integrable cuya esperanza existe, y además para algún ε >0 se cumple:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(\left|e_N\right| > \varepsilon\right) = 0 \qquad \textbf{Ecuac III.205}$$

Por lo tanto bajo condiciones suaves aplicamos la Ley de los Grandes Números a la fracción del lado derecho de la Ecuac III.204 y tenemos:

$$\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_{i\cdot} - \beta_{i\cdot}\right)\left(1+o_p(1)\right) \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \frac{U\left(\beta_i \cdot ; y_j\right)}{i_\beta\left(\beta_i \cdot ; y\right)} \qquad \textbf{Ecuac III.206}$$

Donde:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{U'\left(\beta_i \cdot ; y_j\right)}{i_\beta\left(\beta_i \cdot ; y\right)} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{E\left(U'\left(\beta_i \cdot ; y_j\right)\right)}{i_\beta\left(\beta_i \cdot ; y\right)}\right| < \varepsilon\right] = 1 \qquad \textbf{Ecuac III.207}$$

Para ε >0 de la Ecuac III.206 se tiene:

$$\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_{i\cdot} - \beta_{i\cdot}\right)\left(1+o_p(1)\right) \approx \frac{N}{i_\beta\left(\beta_i \cdot ; y\right)N} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} N^{-1/2}\, U\left(\beta_i \cdot ; y_j\right) \qquad \textbf{Ecuac III.208}$$

Aplicando el Teorema de Límite Central a la expresión anterior y usándola para el caso univariado:

$$\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_{i\cdot} - \beta_{i\cdot}\right) \approx \frac{N}{i_\beta\left(\beta_i \cdot ; y\right)} N\left(0, \frac{\sigma^2\, i_\beta\left(\beta_i \cdot ; y\right)}{N}\right) + O_p \qquad \textbf{Ecuac III.209}$$

Para el caso Multivariado será:

$$\sqrt{N}\left(\hat{\beta}-\beta\right) \approx \frac{N}{i_\beta} N_p\left(0,\frac{\sigma^2 i_\beta}{N}\right)+O_p\left(N^{-1/2}\right)$$

Ecuac III.210

Tendremos luego:

$$N^{1/2}\left(\hat{\beta}-\beta\right) \approx N_p\left(0,\frac{N\, i_\beta^{-1}\sigma^2 i_\beta N\, i_\beta^{-1}}{N}\right)+O_p\left(N^{-1/2}\right)$$

Ecuac III.211

$$\therefore N^{1/2}\left(\hat{\beta}-\beta\right) \approx N_p\left(0,N\sigma^2\, i_\beta^{-1}\right)+O_p\left(N^{-1/2}\right)$$

Ecuac III.212

Al multiplicar por $N^{-1/2}$ a ambos miembros de la ecuación anterior se tiene:

$$\left(\hat{\beta}-\beta\right) \approx N_p\left(0,\sigma^2\, i_\beta^{-1}\right)+O_p\left(N^{-1}\right)$$

Ecuac III.213

Tomando esperanza a ambos miembros de la Ecuac III.213

$$E\left(\hat{\beta}-\beta\right)=O\left(N^{-1}\right)$$

Ecuac III.214

Si el tercer momento es infinito (muy grande) ver Ecuac III.186 y Ecuac III.188 los términos de error en Ecuac III.191 y Ecuac III.212 son $O_p(1)$, sin alteración del orden de la aproximación en la Ecuac III.191 y Ecuac III.212 la matriz observada de segundas derivadas.

III.C. *UN MODELO PARA SERIES TEMPORALES DISCRETAS*

III.C.1. Modelo de Parámetros Conducidos

Para este tipo de modelos, especificaremos solamente los dos primeros momentos de y_t, puesto que esto es todo lo que necesitamos para aproximar la ecuación de estimación de nuestro modelo de regresión.

Supongamos que y_t, condicional a un proceso latente ε_t, es una secuencia discreta independiente, con media y variancia dado por:

$$u_t = E(y_t/\varepsilon_t) = \exp(x_t'\beta)\varepsilon_t \quad \text{y} \quad w_t = Var(y_t/\varepsilon_t) = u_t \qquad \textbf{Ecuac III.215}$$

donde y_t/ε_t es una Poisson.

También supongamos que ε_t, es un proceso no observable ***estacionario*** *con $E(\varepsilon_t) = 1$ y $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = \sigma^2 \rho_\varepsilon(\tau)$.*

Sea:

$$\sigma^2 = Var(\varepsilon_t) > 0 \quad \text{y} \quad E(\varepsilon_t) = 1\,; \quad \forall t \qquad \textbf{Ecuac III.216}$$

$$\rho_\varepsilon(\tau) = \frac{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau})}{[Var(\varepsilon_t)]^{1/2}[Var(\varepsilon_{t+\tau})]^{1/2}} = \frac{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau})}{\sigma^{2^{1/2}}\sigma^{2^{1/2}}} \qquad \textbf{Ecuac III.217}$$

$$\therefore Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = \sigma^2 \rho_\varepsilon(\tau) \quad \tau = 0,1,2,\ldots.. \qquad \textbf{Ecuac III.218}$$

Luego los momentos marginales de y_t, son:

$$\mu_t = E(y_t) = E\{E(y_t/\varepsilon_t)\} = \exp(x_t'\beta)E(\varepsilon_t) = \exp(x_t'\beta) \qquad \textbf{Ecuac III.219}$$

$$\mu_t = E(u_t)$$ **Ecuac III.220**

$$v_t = Var(y_t) = E(y_t^2) - [E(y_t)]^2$$ **Ecuac III.221**

Pero se sabe que:

$$E(y_t^2) = E\{E(y_t^2/\varepsilon_t)\} = E\left[Var(y_t/\varepsilon_t) + \{E(y_t/\varepsilon_t)\}^2\right]$$ **Ecuac III.222**

$$E(y_t^2) = E[u_t + u_t^2] = E(u_t) + E(u_t^2)$$ **Ecuac III.223**

Al tomar variancia a la Ecuac III.215 se tiene:

$$Var(u_t) = \exp(x_t'\beta)\exp(x_t'\beta)Var(\varepsilon_t) = \mu_t^2\sigma^2$$
$$\Rightarrow E(u_t^2) = Var(u_t) + [E(u_t)]^2$$ **Ecuac III.224**

$$E(u_t^2) = \mu_t^2\sigma^2 + \mu_t^2$$ **Ecuac III.225**

Al reemplazar las Ecuac III.225 y Ecuac III.219 en la Ecuac III.223 se tendrá:

$$E(y_t^2) = \mu_t + \mu_t^2\sigma^2 + \mu_t^2$$ **Ecuac III.226**

Usando la Ecuac III.226 en la Ecuac III.220 se tendrá:

$$v_t = Var(y_t) = \mu_t + \mu_t^2\sigma^2 + \mu_t^2 - \mu_t^2$$ **Ecuac III.227**

$$v_t = Var(y_t) = \mu_t + \mu_t^2\sigma^2$$ **Ecuac III.228**

Por lo tanto los dos momentos marginales de y_t, son:

$$\mu_t = E(y_t) = \exp(x_t' \beta) \quad \text{y} \quad v_t = Var(y_t) = \mu_t + \sigma^2 \mu_t^2 \qquad \textbf{Ecuac III.229}$$

A partir de este instante el objetivo principal del presente trabajo de tesis será estimar los parámetros del modelo μ_t descrito en la ecuación anterior.

Calculemos ahora la Función de Autocorrelación de y_t, para un instante τ.

Sabemos que:

$$\rho_y(t,\tau) = Corr(y_t, y_{t+\tau}) = \frac{Cov(y_t, y_{t+\tau})}{[Var(y_t)]^{1/2}[Var(y_{t+\tau})]^{1/2}} \qquad \textbf{Ecuac III.230}$$

Desarrollando la $Cov(y_t, y_{t+\tau})$ tenemos:

$$Cov(y_t, y_{t+\tau}) = E\{(y_t - E(y_t))(y_{t+\tau} - E(y_{t+\tau}))\} \qquad \textbf{Ecuac III.231}$$

Pero:

$$y_t - E(y_t) = \exp(x_t' \beta)\varepsilon_t - \exp(x_t' \beta) = \exp(x_t' \beta)(\varepsilon_t - 1) \qquad \textbf{Ecuac III.232}$$

$$y_{t+\tau} - E(y_{t+\tau}) = \exp(x_{t+\tau}' \beta)\varepsilon_{t+\tau} - \exp(x_{t+\tau}' \beta) = \exp(x_{t+\tau}' \beta)(\varepsilon_{t+\tau} - 1) \qquad \textbf{Ecuac III.233}$$

Si multiplicamos estas dos expresiones y tomando esperanzas:

$$Cov(y_t, y_{t+\tau}) = E\{\exp(x_t' \beta)(\varepsilon_t - 1)\exp(x_{t+\tau}' \beta)(\varepsilon_{t+\tau} - 1)\} \qquad \textbf{Ecuac III.234}$$

$$Cov(y_t, y_{t+\tau}) = \exp(x_t' \beta)\exp(x_{t+\tau}' \beta)E\{(\varepsilon_t - 1)(\varepsilon_{t+\tau} - 1)\} \qquad \textbf{Ecuac III.235}$$

$$Cov(y_t, y_{t+\tau}) = \mu_t \, \mu_{t+\tau} \, Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) \qquad \textbf{Ecuac III.236}$$

Si usamos la Ecuac III.218 en la Ecuac III.236 se tiene:

$$Cov(y_t\ ,y_{t+\tau}) = \mu_t\ \mu_{t+\tau}\ \sigma^2 \rho_\varepsilon(\tau)\ ; \quad \tau = 0,1,2,... \qquad \textbf{Ecuac III.237}$$

De la expresión Ecuac III.228 se sabe:

$$Var(y_t) = \mu_t + \mu_t^2\sigma^2 = \sigma^2\mu_t^2\left\{1+\left(\sigma^2\mu_t\right)^{-1}\right\}\ ; \quad \forall t \qquad \textbf{Ecuac III.238}$$

En particular lo será para:

$$Var(y_{t+\tau}) = \sigma^2\mu_{t+\tau}^2\left\{1+\left(\sigma^2\mu_{t+\tau}\right)^{-1}\right\}\ ; \qquad \textbf{Ecuac III.239}$$

Al reemplazar las Ecuac III.237 , Ecuac III.238 y Ecuac III.239 en la Ecuac III.230 se tendrá:

$$\rho_y(t\ ,\ \tau) = \frac{\mu_t\mu_{t+\tau}\sigma^2\rho_\varepsilon(\tau)}{\sigma\mu_t\left\{1+\left(\sigma^2\mu_t\right)^{-1}\right\}^{1/2}\sigma\mu_{t+\tau}\left\{1+\left(\sigma^2\mu_{t+\tau}\right)^{-1}\right\}^{1/2}} \qquad \textbf{Ecuac III.240}$$

Por lo tanto:

$$\rho_y(t\ ,\ \tau) = \frac{\rho_\varepsilon(\tau)}{\left[\left\{1+\left(\sigma^2\mu_t\right)^{-1}\right\}\left\{1+\left(\sigma^2\mu_{t+\tau}\right)^{-1}\right\}\right]^{1/2}} \quad \tau = 0,1,2,.... \qquad \textbf{Ecuac III.241}$$

La condición que $E(\varepsilon_t)=1$, fuerza la incondicionalidad de la media μ_t , para depender solamente de $x_t'\beta$ y no de los momentos de la serie ε_t , como es deseable en la teoría de regresión; esto se puede explicar como sigue:

Puesto que:

$$\mu_t = \exp(x_t'\beta)E(\varepsilon_t); \quad \forall t$$ **Ecuac III.242**

Sin embargo esta condición ($E(\varepsilon_t)=1$) es muy convencional. Puesto que la serie ε_t es de media estacionaria $\forall$ t, al aplicar Logaritmo a ambos miembros de la Ecuac III.242 tenemos:

$$Log \ \ \mu_t = c + x_t'\beta$$ **Ecuac III.243**

Donde $c = E(\varepsilon_t)$; $\forall$ t. De la Ecuac III.243 vemos que todos los coeficientes excepto el intercepto (c), no varían si cambiamos la asunción acerca del $E(\varepsilon_t)$.

El proceso latente ε_t, introduce tanto la sobredispersión y autocorrelación en y_t

En cuanto a la sobredispersión la apreciamos en la Ecuac III.227, es decir, que $Var(y_t) = \mu_t(1+\sigma^2\mu_t)$ de sobredispersión relativa a una variable Poisson depende de μ_t, es decir:

$$\frac{Var(y_t)}{\mu_t} = (1+\sigma^2\mu_t)$$ **Ecuac III.244**

En cuanto a la Autocorrelación el ¿por qué se dice que ε_t la introduce?, la respuesta puede ser, porque si la serie ε_t hemos dicho es una serie no observable, ésta de alguna forma se ha generado. Sea el mecanismo generador el siguiente:

$$\varepsilon_t = \theta_p\,\varepsilon_{t-1} + z_t \ ; \ con \ |\theta_p| < 1$$ **Ecuac III.245**

Donde z_t *es una perturbación estocástica que satisface* $E(z_t)=0$ *y* $Var(z_t)$ *=cte. De la Ecuac III.247 vemos que los* ε_t *dependen del* ε_{t-1} *; es decir para un t fijo (presente) depende del tiempo t-1 (pasado), de tal modo que están autocorrelacionados, ello implica que por la Ecuac III.213* y_t *depende de* ε_t , y_{t-1} , $\ldots, y_2$, y_1 . *Además la autocorrelación en* y_t *debe ser menor o igual que en* ε_t *; esto se ve de la Ecuac III.243 puesto que* $|\rho_\varepsilon(\tau)| \leq 1$ *, además el denominador de la Ecuac III.240 es mayor o igual a 1.*

Por otro lado el grado de autocorrelación en y_t *relativa a* ε_t *decrecen como* μ_t *y* σ^2 *decrece; esto se verifica puesto que:*

$$\frac{\rho_y(t\,,\,\tau)}{\rho_\varepsilon(\tau)} = \frac{1}{\left[\left\{1+\left(\sigma^2\mu_t\right)^{-1}\right\}\left\{1+\left(\sigma^2\mu_{t+\tau}\right)^{-1}\right\}\right]^{1/2}} \qquad \textbf{Ecuac III.246}$$

Se puede concluir que si $\rho_\varepsilon(\tau)$ *es pequeño, entonces* $\rho_y(t,\tau)$ *es más pequeño todavía; esto nos induciría a decir que* $\rho_y(t,\tau)$ *tiende a cero; por lo que podemos decir que se verifica el Teorema que dice:*

Si y_i , y_j *(i diferente de j) son independientes* $\Rightarrow Cov(y_i\,, y_j)=0$.

a) Estimación del Parámetro ß

Ahora consideraremos la estimación de los parámetros de regresión ß, dado estimadores consistentes de la covariancia de los parámetros $\theta = \left(\sigma^2, \theta_p\right)$*; donde* θ_p

especifica completamente la función de autocorrelación $\rho_{\varepsilon}(\tau\,;\,\theta_p)$ *ésto se aprecia en Ecuac. III.245 (AR(1)).*

Usaremos para estimar ß; una ecuación aproximada para series de tiempo usando Cuasi verosimilitud para datos ***independientes,*** *usando Mínimos Cuadrados Generalizados, tenemos que* $\hat{\beta}$ *es la raíz que minimiza a:*

$$U(\beta)=\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial\mu_t}{\partial\beta}v_t^{-1}(y_t-\mu_t)=0$$ **Ecuac III.247**

Donde: $\frac{\partial\mu_t}{\partial\beta}$ *es un vector ; es decir :*

$$\frac{\partial\mu_t}{\partial\beta}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\mu_t}{\partial\beta_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial\mu_t}{\partial\beta_p}\end{pmatrix}_{px1}$$ **Ecuac III.248**

siendo v_t *y* $(y_t - \mu_t)$ *escalares.*

Sabemos que la expresión anterior para t=1 es:

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial\beta}v_1^{-1}(y_1-\mu_1)=0$$ **Ecuac III.249**

es válida para una observación, sin embargo como tenemos "n" observaciones (respuestas o y_t *), entonces se justifica la sumatoria.*

Sabemos por la expresión de la Ecuac III.249 que como $\frac{\partial\mu_1}{\partial\beta}$ *es un vector, entonces habrá "p" ecuaciones igualadas a "**cero**" para los "p" parámetros. Por otro lado en la Ecuac III.247 vemos que estamos sumando "n" vectores, por ello sumaremos* *"n" componentes e igualaremos a "cero", de tal modo que tendremos al final "p" ecuaciones igualadas a cero.*

De la Ecuac III.247 el estimador de Cuasi Verosimilitud es consistente, asintóticamente Gaussiano. Esta aproximación es también robusta puesto que las inferencias sobre ß pueden ser hechas siempre que el $E(y_t)=\mu_t$ y si se cumple o no que $v_t = Var(y_t)$.

Generalizemos ahora, la ecuación de estimación de Cuasi-Verosimilitud para el caso de series de tiempo.

Hagamos:

$$\begin{aligned} Y &= (y_1,....,y_n)' \\ X &= (x_1,....,x_n)' \\ \mu &= (\mu_1,....,\mu_n)' \\ V &= Var(Y) = Cov(Y) \end{aligned}$$

Ecuac III.250

Entonces la Ecuac III.247 puede ser reescrita como:

$$\frac{\partial \mu'}{\partial \beta} V^{-1}(Y - \mu) = 0$$

Ecuac III.251

Donde:

$$\frac{\partial \mu'}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}(\mu_1,...., \mu_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \mu_1}{\partial \beta_p} \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \beta_2} & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{\partial \mu_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \mu_n}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial \mu_n}{\partial \beta_p} \end{pmatrix}_{nxp}$$

Ecuac III.252

y además:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} v_1^{-1} & & & \\ & v_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_n^{-1} \end{pmatrix}$$ **Ecuac III.253**

siendo V, una matriz diagonal puesto que los y_i son independientes por lo tanto su covariancia es "cero".

$$Cov(y_i, y_j) = 0 \ \ para \ \ i \neq j$$ **Ecuac III.254**

Al operar matricialmente en la Ecuac III.251 llegamos a obtener "p" ecuaciones igualadas a "cero", que son las siguientes:

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{n} \frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_1} v_t^{-1}(y_t - \mu_t) = 0 \\ &\sum_{t=1}^{n} \frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_2} v_t^{-1}(y_t - \mu_t) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{t=1}^{n} \frac{\partial \mu_t}{\partial \beta_p} v_t^{-1}(y_t - \mu_t) = 0 \end{aligned}$$ **Ecuac III.255**

El sistema de "p" ecuaciones obtenidas en la Ecuac III.255 son las mismas que se obtendrían en la Ecuac III.247.

Notar que $\dfrac{\partial \mu_t}{\partial \beta_i} \ \forall\, i = 1,2,..,p$ y $t \to$ *fijo es un escalar.*

*Con datos de series de tiempo, V incluiría términos fuera de la diagonal los cuales dependen de los parámetros de perturbación (ruído). Sin embargo resolver la Ecuac III.253 para $\hat{\beta}$ bajo las condiciones dadas, disminuye una aproximación efectiva. Por ejemplo **Liang & Zeger** (1986) usaron la Ecuac III.251 cuando V es una matriz* *diagonal por bloques, tal que cada bloque representa la covariancia entre observaciones repetidas para un sujeto en un estudio longitudinal.*

Para adaptar la Ecuac III.251 para datos con series de tiempo, hacemos que R_ε sea una matriz nxn con elementos j,k dados por $\rho_\varepsilon(|j-k|)$; es decir:

$$R_\varepsilon = \begin{pmatrix} \rho_\varepsilon(0) & \rho_\varepsilon(1) & \cdots & \rho_\varepsilon(n-1) \\ & \rho_\varepsilon(0) & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & \cdots \\ Sim & & & \rho_\varepsilon(0) \end{pmatrix}_{nxn} \qquad \textbf{Ecuac III.256}$$

Luego, para el modelo de parámetros conducidos: $V = Var(Y) = A + \sigma^2 A R_\varepsilon A$, *donde* $A = diag(\mu_1,...,\mu_n)$; *entonces tenemos:*

$$V = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} + \sigma^2 \begin{pmatrix} \mu_1^2\rho_\varepsilon(0) & \mu_2\mu_1\rho_\varepsilon(1) & \cdots & \mu_n\mu_1\rho_\varepsilon(n-1) \\ & \mu_2^2\rho_\varepsilon(0) & \cdots & \mu_n\mu_2\rho_\varepsilon(n-2) \\ & & \ddots & \cdots \\ Sim & & & \mu_n^2\rho_\varepsilon(0) \end{pmatrix} \qquad \textbf{Ecuac III.257}$$

$$V = \begin{pmatrix} \mu_1 + \sigma^2\mu_1^2\rho_\varepsilon(0) & \sigma^2\mu_2\mu_1\rho_\varepsilon(1) & \cdots & \sigma^2\mu_n\mu_1\rho_\varepsilon(n-1) \\ & \mu_2 + \sigma^2\mu_2^2\rho_\varepsilon(0) & \cdots & \sigma^2\mu_n\mu_2\rho_\varepsilon(n-2) \\ & & \ddots & \cdots \\ Sim & & & \mu_n + \sigma^2\mu_n^2\rho_\varepsilon(0) \end{pmatrix}_{nxn} \qquad \textbf{Ecuac III.258}$$

Proponemos estimar estimar $\hat{\beta}$ *por la solución de un sistema de px1 ecuaciones dadas por:*

$$\frac{\partial \mu'}{\partial \beta} V^{-1}(\beta,\theta)(Y-\mu) = 0_{px1} \qquad \textbf{Ecuac III.259}$$

Vemos que la Ecuac III.259 depende de β, *pero también de los parámetros de ruído* θ.

Sea $\hat{\theta}$ *un* $\sqrt{n}$ *estimador consistente de* θ *que depende de las observaciones y de* β*. Supongamos que* $\hat{\beta}$ *es la solución de:*

$$U(\beta) = \frac{\partial \mu'}{\partial \beta} V^{-1}\left\{\beta, \hat{\theta}(\beta)\right\}(y - \mu) = 0_{px1} \qquad \textbf{Ecuac III.260}$$

La expresión anterior Ecuac III.260 se justifica apreciando la Ecuac III.258 . De allí observamos que V depende de μ *y de* θ*, pero ambos dependen de* β *.*

A continuación proponemos lo siguiente:

b) Proposición 1.

Supongamos que ε_t *es un proceso estacionario. Bajo condiciones suaves de regularidad y dado* $\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right) = O_p(1)$ *para algún* θ *fijado, entonces* $\sqrt{n}\left(\hat{\beta} - \beta\right)$ *es asintóticamente multivariado Gaussiano con media cero y matriz de covariancias dada por :*

$$V_{\hat{\beta}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{\partial \mu'}{\partial \beta} V^{-1} \frac{\partial \mu}{\partial \beta}}{n} \right)^{-1} \qquad \textbf{Ecuac III.261}$$

Recordemos que la Distribución de $\sqrt{n}\left(\hat{\beta} - \beta\right)$ *fue demostrada anteriormente por lo cual concluímos que se verifica la presente proposición.*

De hecho, la prueba resalta que y_t *es un proceso* ***<u>mixto</u>*** *dado* ε_t *, puesto que cada* y_t *es condicionalmente independiente dado* ε_t

Para culminar $\hat{\beta}$ para un valor dado de $\hat{\theta}(\beta)$, se puede usar un proceso iterativo de Mínimos Cuadrados Ponderados, ya que asumimos una función de Cuasi Verosimilitud con datos independientes.

De lo anterior usaremos el método de ***Linealización de la serie de Taylor****, el cual usa los resultados de Mínimos Cuadrados en etapas sucesivas.*

Sea β_{10} , β_{20} , ... , β_{p1} los valores iniciales para los parámetros β_1 , β_2 , ... , β_p. Estos valores iniciales serán convenientemente supuestos o estimadores preliminares basados en cualquier información disponible. Por ejemplo podrían ser valores sugeridos por la información obtenida en un ajuste de una ecuación similar en un laboratorio diferente o sugeridos como "correctos" por el experimentador, basado en sus experiencias y conocimientos.

Si llevamos a cabo la expansión de la serie de Taylor de $f(x_t,\beta) = \exp(x_t'\beta) = \mu_t$ alrededor del punto β_0 donde $\beta_0 = (\beta_{10},\beta_{20},\ldots,\beta_{p1})'$ y restringimos la expansión a la primera derivada, entonces podremos decir que aproximadamente cuando β está próximo a β_0 se cumple:

$$f(x_t,\beta) = f(x_t,\beta_0) + \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial f(x_t,\beta)}{\partial \beta_i}\right]_{\beta=\beta_0} (\beta_i - \beta_{i0})$$

Ecuac III.262

Establecemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_t^0 &= f(x_t,\beta_0) \\ w_i^0 &= \beta_i - \beta_{i0} \\ P_{it}^0 &= \left[\frac{\partial f(x_t,\beta)}{\partial \beta_i}\right]_{\beta=\beta_0} \end{aligned}$$

Ecuac III.263

Reemplazando los valores anteriores en la Ecuac III.262 y reordenando tenemos:

$$y_t - f_t^0 = \sum_{i=1}^{p} w_i^0 P_{it}^0 + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,\ldots,n$$

Ecuac III.264

Ahora podemos estimar w_i^0 *con* $i = 1,2,\ldots,p$ *por la aplicación de la teoría de Mínimos Cuadrados Ponderados. Si escribimos:*

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_{11}^0 & P_{21}^0 & \ldots & P_{p1}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1t}^0 & P_{2t}^0 & \ldots & P_{pt}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n}^0 & P_{2n}^0 & \ldots & P_{pn}^0 \end{bmatrix}_{nxp} = \left\{ P_{it}^0 \right\}$$

Ecuac III.265

$$W_0 = \begin{pmatrix} w_1^0 \\ w_2^0 \\ \ldots\ldots \\ w_p^0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_1 - f_1^0 \\ y_2 - f_2^0 \\ \ldots\ldots \\ y_n - f_n^0 \end{pmatrix} = Y - f^0$$

Ecuac III.266

Decimos luego, que el estimador de: $W_0 = \left(w_1^0, w_2^0, \ldots., w_p^0 \right)$ *es dado por:*

$$\hat{W}_0 = \left(P_0' V^{-1} P_0 \right)^{-1} P_0' V^{-1} \left(y - f^0 \right)$$

Ecuac III.267

El vector W_0 *minimizará la suma de cuadrados:*

$$S(\beta) \equiv \sum_{t=1}^{n} v_t^2 \left\{ y_t - f(x_t, \beta_0) - \sum_{i=1}^{p} w_i^0 P_{it}^0 \right\}^2$$

Ecuac III.268

Donde:

$$w_i^0 = \beta_i - \beta_{i0} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots.,p$$

Ecuac III.269

Entonces los β_{i1}, $i = 1,2,\ldots.,p$. *Podemos pensar que serán los mejores estimadores corregidos de* β*.*

Colocamos luego, los valores β_{i1}, es decir los estimadores corregidos en el mismo papel que jugaron los valores β_{i0} y hacemos exactamente el mismo procedimiento descrito por las Ecuac III.262 hasta la Ecuac III.267 , pero reemplazando todos los subíndices "cero" por "unos". Esto nos conducirá a otro conjunto corregido del estimador β_{i2}.

En forma vectorial, extendemos la notación previa de una manera obvia, podemos escribir:

$$\hat{\beta}_{j+1} = \hat{\beta}_j + \hat{w}_j$$ **Ecuac III.270**

Utilizando la Ecuac III.267 en la Ecuac III.270 tenemos:

$$\hat{\beta}_{j+1} = \hat{\beta}_j + \left(P_j' V^{-1} P_j\right)^{-1} P_j' V^{-1}\left(y - f^j\right)$$ **Ecuac III.271**

Pero la primera expresión del miembro de la derecha de la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\hat{\beta}_{j+1} = \left(P_j' V^{-1} P_j\right)^{-1}\left(P_j' V^{-1} P_j\right)\hat{\beta}_j + \left(P_j' V^{-1} P_j\right)^{-1} P_j' V^{-1}\left(y - f^j\right)$$ **Ecuac III.272**

Donde:

$$P_j = \left\{P_{it}^j\right\} \; ; \; f^j = \left(f_1^j, f_2^j, \ldots, f_n^j\right)' \; ; \; \hat{\beta}_j = \left(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{pj}\right)'$$ **Ecuac III.273**

Factorizando convenientemente en la Ecuación anterior tenemos:

$$\hat{\beta}_{j+1} = \left(P_j' V^{-1} P_j\right)^{-1} P_j' V^{-1}\left[P_j \hat{\beta}_j + \left(y - f^j\right)\right]$$ **Ecuac III.274**

La Ecuac III.274 no se alterará, si hacemos $\hat{\beta}^{(j+1)}$ por $\hat{\beta}_{j+1}$, además hacemos uso de $f^j = \mu_j$ y de $P_j = \left[\frac{\partial f(x_t, \beta)}{\partial \beta}\right]_{\beta = \hat{\beta}_j} = \left[\frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right]_{\beta = \hat{\beta}_j}$, entonces tenemos:

$$\hat{\beta}^{(j+1)}=\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V^{-1}\left[\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\hat{\beta}^{(j)}+\left(y-f^{j}\right)\right]$$ **Ecuac III.275**

También la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\hat{\beta}^{(j+1)}=\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V^{-1}Z^{(j)}\right)$$ **Ecuac III.276**

*Donde **Z**, es la variable dependiente ajustada:*

$$Z^{(j)}=\left[\frac{\partial\mu^{-}}{\partial\beta}\hat{\beta}^{(j)}+\left(y-\mu^{(j)}\right)\right]$$ **Ecuac III.277**

Este proceso iterativo es continuado hasta que la solución converge, esto es, hasta que las iteraciones sucesivas j, $j+1$ cumplan lo siguiente:

$$\left|\frac{\hat{\beta}_{i(j+1)}-\hat{\beta}_{ij}}{\hat{\beta}_{ij}}\right|<\delta\ ; \qquad i=1,2,\ldots,p$$ **Ecuac III.278**

siendo δ un valor pre fijado, como por ejemplo 10^{-6}.

Por otro lado, dado un procedimiento de estimación para $\hat{\theta}(\beta)$, $\hat{\beta}$ es encontrado por la solución de la Ecuac III.276 para $\hat{\beta}^{(j+1)}$ dado $\hat{\theta}^{(j)}$, entonces usamos el valor actualizado de $\hat{\beta}^{(j+1)}$ para encontrar $\hat{\theta}^{(j+1)}$ hasta que converge.

Un inconveniente o desventaja de la Ecuac III.276 es que la solución requiere la inversión de la matriz de covariancia V de orden nxn. Se desconoce de un algoritmo eficiente para la inversión de matrices con la estructura de V. Por consiguiente consideremos una aproximación a la Ecuac III.276, esto es un simple cálculo computacional y nos conducirá a estimadores "cercanamente" eficientes en muchos casos prácticos.

La inversión de V es difícil porque el proceso de parámetros conducidos no tiene una función de autocorrelación estacionaria. Para simplificar cálculos, aproximamos la actual matriz de autocorrelación R_ε, por una matriz de bloques diagonales $R(\alpha)$ correspondiente a un proceso autorregresivo. Sea entonces:

$$R(\alpha)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} \rho_\varepsilon(0) & \cdots & \rho_\varepsilon(p-1) & & & \\ & \cdots & \cdots & & 0 & \\ Sim & & \rho_\varepsilon(0) & & & \\ \hline & & & \rho_\varepsilon(0) & \cdots & \rho_\varepsilon(q-1) \\ & 0 & & & \cdots & \cdots \\ & & & Sim & & \rho_\varepsilon(0) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} R_{11(pxp)} & 0 \\ \hline 0 & R_{22_{(qxq)}} \end{array}\right)_{sxs}$$

Ecuac III.279

Donde $R(\alpha)$ es la matriz de autocorrelación para un proceso autorregresivo con un vector de parámetros α de orden sx1.

Supongamos ahora que existen solo "p" raíces que caen **fuera del círculo unitario;** *es decir es estacionario; entonces $R_{11(pxp)}$ es una matriz de autocorrelaciones de orden "p".*

Por otro lado, existen "q" raíces que caen en el círculo unitario; es decir no es estacionario entonces R_{22} es la matriz de autocorrelaciones de orden $\leq q$, con $p+q=s$; donde $s=1,2,..,n$.

Definamos una matriz diagonal D como sigue:

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 + \sigma^2\mu_1^2 & & & \\ & \mu_2 + \sigma^2\mu_2^2 & & 0 \\ 0 & & \cdots & \\ & & & \mu_n + \sigma^2\mu_n^2 \end{pmatrix}_{nxn}$$ **Ecuac III.280**

De la Ecuac III.258 aproximamos V con $V_R = D^{1/2}R(\alpha)D^{1/2}$, *puesto que $D^{1/2}$ es de orden (nxn) y $R(\alpha)$ es de orden (sxs), para efectuar el producto $D^{1/2}R(\alpha)D^{1/2}$, dividimos la matriz diagonal $D^{1/2}$ en dos submatrices de orden (pxp) y (qxq), entonces tendremos:*

$$V_R = \left(\begin{array}{c|c} D^{1/2}{}_{11\,(pxp)} & 0 \\ \hline 0 & D^{1/2}{}_{22\,(qxq)} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} R_{11\,(pxp)} & 0 \\ \hline 0 & R_{22\,(qxq)} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} D^{1/2}{}_{11\,(pxp)} & 0 \\ \hline 0 & D^{1/2}{}_{22\,(qxq)} \end{array}\right)$$

Ecuac III.281

Puesto que R_{11} es una matriz simétrica y definida positiva, entonces existe exactamente una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos L y se cumple que: $R_{11} = L\,L$ (Algoritmo de Cholesky).

Si ignoramos los efectos (no estacionario) de R_{22} en el proceso, tendremos entonces una aproximación de V_R tal como:

$$V_R \approx D_{11}^{\frac{1}{2}} R_{11} D_{11}^{\frac{1}{2}}$$ **Ecuac III.282**

Denominemos $D_{11}^{1/2} = D^{1/2}$ *, matriz diagonal de orden (pxp) y usando* $R_{11} = L\,L$ *reemplazamos en la Ecuac III.286 y tenemos:*

$$V_R = D^{1/2}\,\tilde{L}\,\tilde{L}'\,D^{1/2} = \left(D^{1/2}\,\tilde{L}\right)\left(D^{1/2}\,\tilde{L}\right)'$$ **Ecuac III.283**

Tomando inversa a ambos miembros de la ecuación anterior tendremos:

$$V_R^{-1} = D^{-1/2}\left(\tilde{L}^{-1}\right)'\left(\tilde{L}^{-1}\right)D^{-1/2}$$ **Ecuac III.284**

Puesto que el proceso generador de la serie, es de orden "p", dado por un AR(p), entonces:

$$\varepsilon_t = \alpha_1\varepsilon_{t-1} + \alpha_2\varepsilon_{t-2} + \ldots\ldots + \alpha_P\varepsilon_{t-P} + a_t$$ **Ecuac III.285**

Con valores iniciales dados por $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \ldots\ldots = \varepsilon_{-p+1} = 0$ *y siendo* a_t *un ruído blanco. Luego:*

$$a_t = \varepsilon_t - \alpha_1\varepsilon_{t-1} - \alpha_2\varepsilon_{t-2} - \ldots\ldots - \alpha_P\varepsilon_{t-P}$$ **Ecuac III.286**

Dando valores a t (t =1,2,....,n).

$$\begin{aligned} a_1 &= \varepsilon_1 \\ a_2 &= \varepsilon_2 - \alpha_1\varepsilon_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \varepsilon_n - \alpha_1\varepsilon_{n-1} - \alpha_2\varepsilon_{n-2} - \ldots\ldots - \alpha_p\varepsilon_{n-p} \end{aligned}$$ **Ecuac III.287**

Expresando el sistema anterior matricialmente se tiene:

$$A = \tilde{L}\zeta$$ **Ecuac III.288**

Donde:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & & \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ **Ecuac III.289**

Es la matriz que aplica el filtro autorregresivo a ε *y además, es una matriz triangular inferior con unos (1's) en la diagonal, y puesto que la inversa de una matriz de la forma de la Ecuac III.289 es nuevamente una matriz triangular inferior con unos en la diagonal (**L**), podemos reescribir la Ecuac III. 284 como:*

$$V_R^{-1} \approx D^{-1/2} L^T L D^{-1/2}$$ **Ecuac III.290**

Por otro lado, definamos a $\theta_R = \left(\sigma^2, \alpha\right)$ *y supongamos que* $\hat{\theta}_R$*, es un* $\sqrt{n}$ *estimador consistente de* θ_R*. Haciendo uso de la Ecuac III.290 en la Ecuac III.259 tenemos:*

$$\frac{\partial\mu'}{\partial\beta} V_R\left(\hat{\theta}_R\right)^{-1}(y-\mu) = 0$$ **Ecuac III.291**

Siendo $\hat{\beta}_R$ *la solución de la anterior ecuación de estimación. Notar que el algoritmo para encontrar* $\hat{\beta}_R$ *dado* $\hat{\theta}_R$ *es simplificado grandemente.*

Mientras tanto, para determinar el procedimiento iterativo de Mínimos Cuadrados Ponderados, usaremos V_R^{-1} *( ) por* V^{-1} *en la Ecuac III.276 tenemos entonces:*

$$\hat{\beta}_R^{(j+1)} = \left\{ \frac{\partial \mu'}{\partial \beta} D^{-1/2} L^T L D^{-1/2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\partial \mu'}{\partial \beta} D^{-1/2} L^T L D^{-1/2} Z^{(j)} \right\}$$

Ecuac III.292

$$\hat{\beta}_R^{(j+1)} = \left\{ \left(L D^{-1/2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^T \left(L D^{-1/2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right\}^{-1} \left(L D^{-1/2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^T \left(L D^{-1/2} Z^{(j)} \right)$$

Ecuac III.293

*Donde **Z**, es la variable dependiente ajustada:*

$$Z^{(j)} = \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \hat{\beta}_R^{(j)} + (y - \mu)$$

Ecuac III.294

Diremos que este algoritmo, es un proceso iterativo ponderado y filtrado de Mínimos Cuadrados, porque involucra las siguientes etapas:

i)Pondera los valores actuales de $\frac{\partial \mu}{\partial \beta}$ *y de* $Z^{(j)}$, *por la inversa de la desviación estándar* $D^{-1/2}$.

ii)Filtra los valores normalizados de $D^{-1/2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta}$ *y* $D^{-1/2} Z^{(j)}$, *con un filtro para un proceso autorregresivo de orden p.*

iii)Resuelve las ecuaciones de Mínimos Cuadrados.

Iv)Itera de i) a iii) hasta que converge.

A continuación se muestra las propiedades asintóticas de $\hat{\beta}_R$.

c) Proposición 2

Bajo las asunciones de la Proposición 1 y asumiendo que I_o *y* I_1 *existen, entonces* $\sqrt{n}(\hat{\beta}_R - \beta)$ *es asintóticamente Gaussiano con media cero y matriz de covariancias dada por:*

$$V_{\hat{\beta}_R} = I_o^{-1} I_1 I_o^{-1}$$ **Ecuac III.295**

Donde:

$$I_o = \underset{n\to\infty}{Lim}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)$$ **Ecuac III.296**

$$I_1 = \underset{n\to\infty}{Lim}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}V\ V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)$$ **Ecuac III.297**

Prueba:

De lo anterior se probó que V_R *era una aproximación de* V, *y puesto que* V_R^{-1} *existe, entonces usamos esta expresión en la Proposición 1 (Ecuac III.261) y tenemos:*

$$V_{\hat{\beta}_R} = \underset{n\to\infty}{Lim}\ n\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}.I$$ **Ecuac III.298**

$$V_{\hat{\beta}_R} = \underset{n\to\infty}{Lim}\ \cancel{n}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}\frac{n}{n}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}$$ **Ecuac III.299**

$$V_{\hat{\beta}_R} = \underset{n\to\infty}{Lim}\ n\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}\frac{1}{n}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}V\ V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)n\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}$$ **Ecuac III.300**

$$V_{\hat{\beta}_R} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}V\ V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\cdot \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^{-1}$$

Ecuac III.301

Luego se concluye que:

$$V_{\hat{\beta}_R} = I_o^{-1} I_1 I_o^{-1}$$

Ecuac III.302

Donde:

$$I_o = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)$$

Ecuac III.303

$$I_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V_R^{-1}V\ V_R^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)$$

Ecuac III.304

La diferencia fundamental entre este resultado y la Proposición 1, es que la matriz V_R, en la ecuación de estimación no es la matriz de Covariancias actual. Esto nos conduce a una forma más complicada, para la variancia asintótica de $\hat{\beta}_R$.

d) Estimación del Parámetro σ^2

Sabemos pues, que y_t es un proceso estocástico, es decir $\{ y_t \}$ es una sucesión de variables aleatorias para el parámetro "t" discreto, entonces de lo definido anteriormente se sabe que: $E(y_t) = \mu_t$, luego podemos afirmar que la serie $\sum_{t=1}^{n} y_t$ converge a μ_t, entonces en particular se cumplirá que $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t$ converge a $\hat{\mu}_t$ cuando $n\to\infty$, matemáticamente será:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t = \sum_{t=1}^{\infty} y_t = \hat{\mu}_t = E(y_t)$$ **Ecuac III.305**

Puesto que:

$$\mu_t = E(y_t) = \exp(x_t^{'}\beta)$$ **Ecuac III.306**

$$Var(y_t) = \mu_t + \sigma^2\mu_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \mu_t)^2$$ **Ecuac III.307**

$$\sigma^2\mu_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[(y_t - \mu_t)^2 - \mu_t\right]$$ **Ecuac III.308**

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left[(y_t - \mu_t)^2 - \mu_t\right]}{\sum_{t=1}^{n}\mu_t^2}$$ **Ecuac III.309**

Procederemos ahora a estimar $\rho_\varepsilon(\tau)$ y también θ_p ; para ello sabemos que:

$$\rho_\varepsilon(\tau) = \frac{Cov(\varepsilon_t , \varepsilon_{t+\tau})}{\left[Var(\varepsilon_t)\right]^{1/2}\left[Var(\varepsilon_{t+\tau})\right]^{1/2}} \quad \tau = 0,1,2,...$$ **Ecuac III.310**

Con $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 > 0; \quad \forall t$. *Luego tenemos que para $\tau = 0$, $\rho_\varepsilon(0)=1$.*

También sabemos que la función de Autocorrelación de ε_t , puede ser similarmente estimada usando la Ecuac III.237. Despejando convenientemente tenemos:

$$\rho_\varepsilon(\tau) = \sigma^{-2}\frac{Cov(y_t , y_{t+\tau})}{\mu_t\mu_{t+\tau}} \quad \tau = 0,1,2,...$$ **Ecuac III.311**

Usando la ecuación anterior para una muestra de tamaño "n" , se tiene:

$$\hat{\gamma}(\tau) = Cov(y_t \,, y_{t+\tau}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})$$

Ecuac III.312

Al dividir ambos miembros de la ecuación anterior (Autocovariancia) por $\bar{y}^2$ *tendremos:*

$$\frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\bar{y}^2} = \frac{Cov(y_t \,, y_{t+\tau})}{\bar{y}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{n\bar{y}\bar{y}}$$

Ecuac III.313

Luego multiplicando la Ecuac III.313 por $\hat{\sigma}^2$ *y agrupando tenemos:*

$$\hat{\rho}_\varepsilon(\tau) = \hat{\sigma}^{-2}\frac{Cov(y_t \,, y_{t+\tau})}{\hat{\mu}_t \,\hat{\mu}_{t+\tau}} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{\mu}_t\right)\left(y_{t+\tau} - \hat{\mu}_{t+\tau}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\mu}_t \,\hat{\mu}_{t+\tau}}$$

Ecuac III.314

Por comodidad cambiamos el índice de la sumatoria.

$$\hat{\rho}_\varepsilon(\tau) = \hat{\sigma}^{-2}\frac{\sum_{t=\tau+1}^{n}\left(y_t - \hat{\mu}_t\right)\left(y_{t-\tau} - \hat{\mu}_{t-\tau}\right)}{\sum_{t=\tau+1}^{n}\hat{\mu}_t \,\hat{\mu}_{t-\tau}} \qquad \tau = 0,1,2,\ldots.$$

Ecuac III.315

Por otro lado, sabemos que $\rho_\varepsilon(\tau)$ *está completamente especificado en términos del parámetro* θ_p *y este puede ser estimado en la forma tradicional de* $\hat{\rho}_\varepsilon(\tau)$, *es decir puesto que* ε_t , *hemos asumido que es un proceso autoregresivo de primer orden AR(1), entonces se sabe que* $\rho_\varepsilon(\tau) = \theta_p^\tau$; $\tau = 0,1,2,\ldots$ *y podemos entonces estimar* θ_p *por* $\hat{\rho}_\varepsilon(1)$; *es decir la autocorrelación de orden o retardo 1.*

*Generalmente podemos decir que podemos estimar θ_p , resolviendo las ecuaciones de **Yule-Walker** para $\hat{\rho}_\varepsilon(\tau)$ dado.*

Sabemos que las ecuaciones de Yule Walker tienen la forma de:

$$\begin{aligned} &\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots\ldots + \phi_q \rho_{k-q} \\ &pero\ \phi_2 = \phi_3 = \cdots\cdots = \phi_q = 0 \end{aligned}$$

Ecuac III.316

entonces para k=1 en la ecuación anterior tenemos:

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\phi}_1 \hat{\rho}_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1}{\hat{\rho}_0}$$

Ecuac III.317

Además sabemos por la Ecuac III.310 que $\hat{\rho}_0 = 1$ para $\tau = 0$ y haciendo $\phi_1 = \theta_p$, luego se tendrá:

$$\hat{\theta}_p = \hat{\rho}_1 \equiv \hat{\rho}_1(1)$$

Ecuac III.318

Observación:

Una limitación de la estimación por momentos, es que puede ser negativo y $\hat{\rho}_\varepsilon(\tau)$ no está contenido en el intervalo <-1,1>. Cuando el tamaño de muestra n es pequeño y $|\rho_\varepsilon(\tau)|$ sea grande, una aproximación diferente será necesaria.

III.D. *PRUEBAS DE HIPOTESIS Y ESTADISTICOS DE BONDAD DE AJUSTE*

Debemos probar las siguientes hipótesis:

$$H_0 : C\beta = M \quad \text{vs.} \quad H_1 : C\beta \neq M$$

Ecuac III.319

Donde la matriz C tiene filas de rangos completo s<=p y M es un vector conocido de dimensión sx1.

Un caso especial es:

$$H_0 : \beta_r = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_r \neq 0$$ **Ecuac III.320**

Donde β_r es un subvector de β . Esta prueba corresponde a un submodelo definido por β= 0 versus el modelo completo. A continuación se asume que el parámetro desconocido de sobredispersión es reemplazado por un estimador consistente.

Asumimos como estadístico de razón de Verosimilitud:

$$\lambda = -2\{l(\tilde{\beta}) - l(\hat{\beta})\}$$ **Ecuac III.321**

El cual compara el estimador $l(\hat{\beta})$ máximo sin restricción del Log Verosimilitud con el estimador máximo $l(\tilde{\beta})$ obtenido, calculado bajo la restricción $C\beta=M$, H_0 . Si el máximo $l(\hat{\beta})$ sin restricción es significativamente mayor que $l(\beta)$ implica que λ es grande, luego H_0 será rechazado a favor de H_1

Una prueba de razón de Verosimilitud del tipo Ecuac III.320 esto es, probar un submodelo definido por β_r= 0 requiere nuevas iteraciones resultantes para el submodelo, donde se consideran mayores esfuerzos para estimar β que bajo el modelo general H_0 de la Ecuac III.319.

Notar que el estadístico de razón de verosimilitud no está apropiadamente definido para modelos de sobre dispersión, donde las asunciones distribucionales no son dadas completamente.

Sin embargo, con aproximación es común en la práctica trabajar con el usual Log. Verosimilitud para modelos Binomiales o Poisson.

La prueba de Wald y la prueba de Score son aproximaciones cuadráticas atractivas computacionalmente del estadístico de razón de verosimilitud.

El estadístico de WALD.

$$w=\left(c\hat{\beta}-M\right)'\left[cF^{-1}(\hat{\beta})\ c'\right]^{-1}\left(c\hat{\beta}-M\right) \qquad \textbf{Ecuac III.322}$$

Donde:

$$F\left(\hat{\beta}\right)=\left(\frac{\partial\mu'}{\partial\beta}V^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right) \qquad \textbf{Ecuac III.323}$$

Utiliza la distancia ponderada entre el estimador sin restricción $c\hat{\beta}$ *de* $c\beta$ *y su valor hipotético* M *bajo* H_o.

El peso es determinado por el inverso de la matriz de covariancias asintótica $cF^{-1}(\hat{\beta})c'$ *de* $c\hat{\beta}$. *El estadístico de WALD es usado si el estimador sin restricción ya ha sido calculado.*

El estadístico SCORE:

$$u=s'(\tilde{\beta})\ F^{-1}(\tilde{\beta})s(\tilde{\beta}) \qquad \textbf{Ecuac III.324}$$

Está basado en la siguiente idea: la función SCORE $S(\beta)$ *para el modelo sin restricción es el vector "cero" si está evaluado en el estimador de máxima verosimilitud* $\hat{\beta}$. *Si* $\hat{\beta}$ *es reemplazado por el estimador máximo verosímil* β *bajo* H_o $s(\tilde{\beta})$ *será significativamente diferente de cero si* H_o *es verdadero.*

La distancia entre $s(\tilde{\beta})$ *y cero es medido por el estadístico SCORE* u *, con la inversa de la matriz de información* $F^{-1}(\tilde{\beta})$ *actuando como un peso. La prueba SCORE es una ventaja si un modelo restringido ya ha sido bien ajustado y será probado versus un modelo más complejo, como en el procedimiento de selección Forward. No se requieren nuevas iteraciones resultantes para calcular el estimador máximo verosímil* $\hat{\beta}$ *de un gran modelo.*

Una ventaja de los estadísticos de WALD y SCORE, es también que son definidos apropiadamente para modelos con sobredispersión, puesto que solamente involucra al primer y segundo momentos.

Sea $A(\beta) = F^{-1}(\beta)$ *denota la inversa de la matriz de información. Para la hipótesis especial de la Ecuac III.320 el estadístico se reduce a:*

$$w = \hat{\beta}_r{}' \hat{A}_r^{-1} \hat{\beta}_r$$ **Ecuac III.325**

$$u = \tilde{s}_r{}' \tilde{A}_r \tilde{s}_r$$ **Ecuac III.326**

Donde A_r *es la submatriz de* $A = F^{-1}$ *correspondiente a los elementos de* β_r. s_r *es el subvector correspondiente de* s *y " ^ " o "~" miden la evaluación de* $\beta = \hat{\beta}$ *o* $\beta = \tilde{\beta}$.

Para el caso especial donde β_r *consiste de solamente una componente escalar de* β *, el estadístico de WALD es el cuadrado del valor "t".*

$$t_r = \frac{\hat{\beta}_r}{\sqrt{\hat{a}_{rr}}}$$ **Ecuac III.327**

El estimador estandarizado de β_r, *con* $\hat{a}_{rr} = \mathrm{var}(\hat{\beta}_r)$ *es el r-ésimo elemento diagonal de la matriz de covarianza asintótica (estimada)*

Bajo H_o *las tres pruebas estadísticos son asintóticamente equivalentes y tienen una distribución límite* X^2 *con "s" grados de libertad.*

$$\lambda \ , \ w \ , \ u \sim \mathrm{X}^2(s)$$ **Ecuac III.328**

Finalmente, usaremos como estadístico de bondad de ajuste del modelo a la función desvianza, la misma que se define como:

$$D = -2\sum_{i=1}^{n} \left\{ l_i(\hat{\mu}_i) - l_i(y_i) \right\}$$ **Ecuac III.329**

Sin embargo, usaremos como una aproximación a la desvianza el estadístico de Pearson para medir la adecuacidad del modelo:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{v(\hat{\mu}_i)}$$ **Ecuac III.330**

donde $\hat{\mu}_i$ *y* $v(\hat{\mu}_i)$ *son las funciones media y variancia estimada y* $l_i(\hat{\mu}_i)$ *es la función individual de cuasi verosimilitud. En ambos casos los estadísticos se distribuyen aproximadamente como una Chi-cuadrado con n-p grados de libertad.*

CAPITULO IV

CASO DE APLICACIÓN:

Estimación de Llamadas TPI's para el SLM-Fijo-Fijo

IV.A ANÁLISIS DE LOS DATOS

Antes de proceder al análisis de los datos es conveniente recordar que el evento desencadenador es el número de llamadas(consumos) que reporta una central Telefónica para un lapso de tiempo, de tal modo que sólo nos ocuparemos de las llamadas producidas por el Servicio Local Medido en los Teléfonos Públicos Interiores a algún otro teléfono fijo residencial o público. Se excluyen las llamadas por los servicios de Larga Distancia así como del Servicio 0-800 y 0-808. De igual manera se excluyen las llamadas desde y hacia teléfonos celulares. Es importante considerar que la recepción de llamadas es diaria, las 24 horas del día, sin embargo, para el presente trabajo se considera el consolidado de llamadas mensuales en el período Diciembre'94 a Noviembre'98 (En Miles de Llamadas), las cuales se exponen en la Tabla II.

Las variables que intervienen en el proceso son:

y_t *: Es el número de llamadas producidas expresadas en Miles de Millón, la misma que toma valores enteros desde 1 hasta 48 (ver Tabla II).*

x_t' *: Es el vector fila de covariables conocidas conformado por la constante 1, los pares de Cosenos y Senos para las estacionalidades anuales y semestrales (ver Tabla III).*

TABLA II
Evolución de las llamadas a nivel Nacional por SLM Fijo-fijo de TPI's
Para el periodo Diciembre'94 a Novtiembre'98

Tiempo	*Meses*	*Llamadas Miles Millón*
1	Dic-94	9
2	Ene-95	8
3	Feb-95	9
4	Mar-95	10
5	Abr-95	11
6	May-95	12
7	Jun-95	12
8	Jul-95	14
9	Ago-95	13
10	Sep-95	14
11	Oct-95	15
12	Nov-95	16
13	Dic-95	17
14	Ene-96	17
15	Feb-96	17
16	Mar-96	19
17	Abr-96	19
18	May-96	21
19	Jun-96	21
20	Jul-96	24
21	Ago-96	24
22	Sep-96	24
23	Oct-96	26
24	Nov-96	29
25	Dic-96	32
26	Ene-97	33
27	Feb-97	31
28	Mar-97	35
29	Abr-97	31
30	May-97	32
31	Jun-97	30
32	Jul-97	28
33	Ago-97	32
34	Sep-97	31
35	Oct-97	35
36	Nov-97	36
37	Dic-97	41
38	Ene-98	39

39	*Feb-98*	*35*
40	*Mar-98*	*40*
41	*Abr-98*	*37*
42	*May-98*	*39*
43	*Jun-98*	*38*
44	*Jul-98*	*42*
45	*Ago-98*	*44*
46	*Sep-98*	*44*
47	*Oct-98*	*45*
48	*Nov-98*	*46*

β *: Es un vector columna de parámetros desconocidos de dimensión 6x1 y cuya estimación es el interés del presente trabajo.*

Graficando convenientemente los datos de la variable y_t ver Figura N° 1 se aprecia la presencia de tendencias y estacionalidades en el período en estudio, por lo que se plantea la necesidad de averiguar el modelo matemático que explique el comportamiento del consumo telefónico. Para ello, ***especificaremos los dos primeros momentos de la variable consumo telefónico (y_t) y bajo los modelos Log Lineales podemos asumir que y_t sigue un modelo de este tipo***, *pero como el consumo de un mes "t" cualquiera depende de los consumos registrados en el mes anterior "t-1" o de meses anteriores "t-k"; se puede decir que el consumo telefónico y_t está condicionado a un proceso latente(aleatorio) ε_t por lo que definimos el siguiente modelo:*

$$u_t = E(y_t / \varepsilon_t) = \exp(x_t' \beta)\varepsilon_t \qquad \textbf{Ecuac IV.1}$$

$$Var(y_t / \varepsilon_t) = u_t \qquad \textbf{Ecuac IV.2}$$

Donde ε_t es un proceso no observable estacionario con las siguientes características:

$$E(\varepsilon_t) = c = 1 \qquad \textbf{Ecuac IV.3}$$

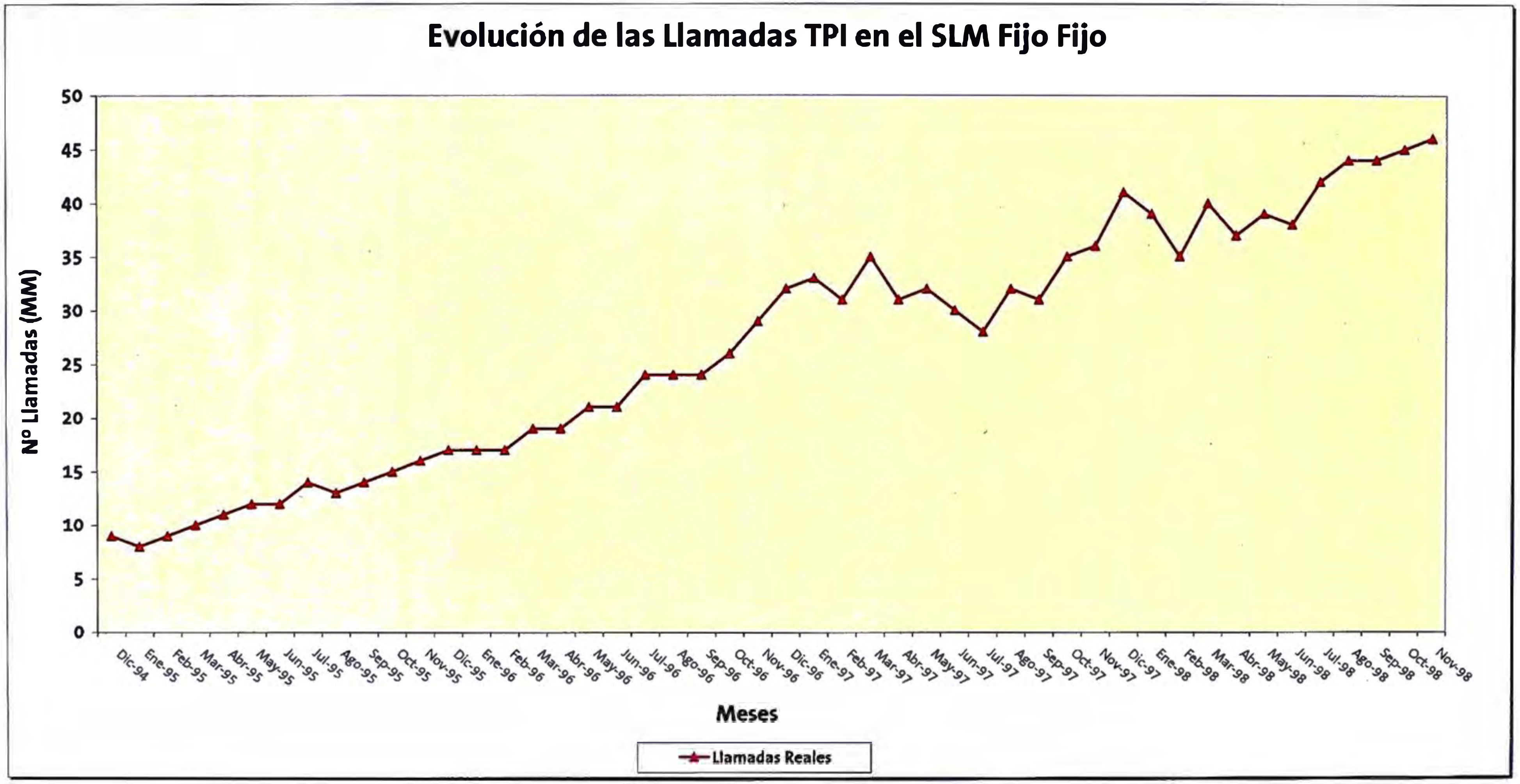
$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = \sigma^2 \rho_\varepsilon(\tau) \qquad \textbf{Ecuac IV.4}$$

Luego los momentos marginales de y_t son:

$$\mu_t = E(y_t) = \exp(x_t' \beta) E(\varepsilon_t) \qquad \textbf{Ecuac IV.5}$$

$$Var(y_t) = \mu_t + \sigma^2 \mu_t^2 \qquad \textbf{Ecuac IV.6}$$

Figura Nº 1


Evolución de las Llamadas TPI en el SLM Fijo Fijo
Nº Llamadas (MM)
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Dic-94
Ene-95
Feb-95
Mar-95
Abr-95
May-95
Jun-95
Jul-95
Ago-95
Sep-95
Oct-95
Nov-95
Dic-95
Ene-96
Feb-96
Mar-96
Abr-96
May-96
Jun-96
Jul-96
Ago-96
Sep-96
Oct-96
Nov-96
Dic-96
Ene-97
Feb-97
Mar-97
Abr-97
May-97
Jun-97
Jul-97
Ago-97
Sep-97
Oct-97
Nov-97
Dic-97
Ene-98
Feb-98
Mar-98
Abr-98
May-98
Jun-98
Jul-98
Ago-98
Sep-98
Oct-98
Nov-98
Meses
Llamadas Reales

Es este proceso latente el responsable de introducir tanto la sobredispersión y autocorrelación en la variable consumo, pues como sabemos el consumo telefónico es una variable de tipo Poisson con media igual a la variancia, sin embargo con los datos de la Tabla II, se tiene que:

Media de Y_t	Variancia de Y_t
26.60	127.74

con lo cual se podría justificar la expresión dada en la Ecuac IV.6 también llamado efecto de sobredispersión.

Respecto a la autocorrelación también es generada por el proceso latente ε_t , el cual depende de ε_{t-1} y de las observaciones pasadas de y_{t-1}, ..., y_1.

De este modo , redefiniendo la Ecuac IV.5 podemos decir que el modelo a estimar es el siguiente:

$$\boxed{\mu_t = \exp\left(x_t'\beta\right) ; \qquad \forall t = 1,\ldots 48} \qquad \textbf{Ecuac IV.7}$$

Donde ε_t es un proceso autorregresivo de primer orden AR(1) , por lo tanto el coeficiente de correlación ε_t puede ser estimados por métodos tradicionales.

IV.B PROCESAMIENTO DE LOS DATOS

Teniendo en cuenta el modelo planteado anteriormente (ver Ecuac IV.7), vemos que el vector de variables conocidas o también llamado de covariables (ver Tabla III) y el de parámetros desconocidos adopta la forma siguiente:

TABLA III
Matriz de Constantes conocidas X's

Constante	Tendencia	Componentes Estacionales (Sen,Cos)			
		Cos(2π t/12)	Sen(2π t/12)	Cos(2π t/6)	Sen(2π t/6)
1	0.0010	0.1543	-0.9880	-0.9524	-0.3048
1	0.0020	-0.9524	-0.3048	0.8142	0.5806
1	0.0030	-0.4481	0.8940	-0.5985	-0.8012
1	0.0040	0.8142	0.5806	0.3258	0.9454
1	0.0050	0.6993	-0.7149	-0.0221	-0.9998
1	0.0060	-0.5985	-0.8012	-0.2837	0.9589
1	0.0070	-0.8839	0.4677	0.5625	-0.8268
1	0.0080	0.3258	0.9454	-0.7877	0.6160
1	0.0090	0.9844	-0.1760	0.9380	-0.3466
1	0.0100	-0.0221	-0.9998	-0.9990	0.0442
1	0.0110	-0.9912	-0.1324	0.9650	0.2624
1	0.0120	-0.2837	0.9589	-0.8390	-0.5441
1	0.0130	0.9037	0.4282	0.6333	0.7739
1	0.0140	0.5625	-0.8268	-0.3672	-0.9301
1	0.0150	-0.7302	-0.6833	0.0662	0.9978
1	0.0160	-0.7877	0.6160	0.2410	-0.9705
1	0.0170	0.4871	0.8733	-0.5254	0.8509
1	0.0180	0.9380	-0.3466	0.7597	-0.6502
1	0.0190	-0.1978	-0.9803	-0.9218	0.3877
1	0.0200	-0.9990	0.0442	0.9961	-0.0883
1	0.0210	-0.1104	0.9939	-0.9756	-0.2195
1	0.0220	0.9650	0.2624	0.8623	0.5065
1	0.0230	0.4081	-0.9129	-0.6668	-0.7452
1	0.0240	-0.8390	-0.5441	0.4080	0.9130
1	0.0250	-0.6670	0.7451	-0.1103	-0.9939
1	0.0260	0.6333	0.7739	-0.1979	0.9802
1	0.0270	0.8623	-0.5063	0.4873	-0.8732
1	0.0280	-0.3672	-0.9301	-0.7303	0.6832
1	0.0290	-0.9756	0.2194	0.9038	-0.4280
1	0.0300	0.0662	0.9978	-0.9912	0.1322
1	0.0310	0.9961	0.0885	0.9844	0.1762
1	0.0320	0.2410	-0.9705	-0.8838	-0.4679
1	0.0330	-0.9217	-0.3879	0.6991	0.7150
1	0.0340	-0.5254	0.8509	-0.4479	-0.8941
1	0.0350	0.7596	0.6504	0.1541	0.9881
1	0.0360	0.7597	-0.6502	0.1544	-0.9880
1	0.0370	-0.5252	-0.8510	-0.4482	0.8939
1	0.0380	-0.9218	0.3877	0.6994	-0.7147
1	0.0390	0.2409	0.9706	-0.8840	0.4676
1	0.0400	0.9961	-0.0883	0.9844	-0.1759

1	0.0410	0.0664	-0.9978	-0.9912	-0.1326
1	0.0420	-0.9756	-0.2195	0.9036	0.4284
1	0.0430	-0.3674	0.9301	-0.7300	-0.6834
1	0.0440	0.8623	0.5065	0.4870	0.8734
1	0.0450	0.6334	-0.7738	-0.1976	-0.9803
1	0.0460	-0.6668	-0.7452	-0.1106	0.9939
1	0.0470	-0.8391	0.5439	0.4083	-0.9128
1	0.0480	0.4080	0.9130	-0.6671	0.7450

$$x_t' = \left[1 \;\; t \;\; Cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \;\; Sen\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \;\; Cos\left(\frac{2\pi t}{6}\right) \;\; Sen\left(\frac{2\pi t}{6}\right) \right] \qquad \textbf{Ecuac IV.8}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Ecuac IV.9}$$

Utilizando el software estadístico SPSS podemos hallar los valores iniciales de β^0, los mismos que resultan:

Descripción	***Valores Iniciales Estimados para*** β
Intercepto	*0.95*
Tendencia	*0.041*
Cos(2πt/12)	*-0.01*
Sen(2πt/12)	*0.007*
Cos(2πt/6)	*-0.35*
Sen(2πt/6)	*-0.0065*

Reemplazando estos datos en el algoritmo iterativo en Matlab, el cual puede apreciarse en el Anexo 1 y tomando una precisión en los cálculos de 10^{-6}, se obtuvo los siguientes resultados.

Descripción	***Valores Estimados para $\hat{\beta}$***	***Valores Estimados Para la Variancia $V_{\hat{\beta}}$***
Intercepto	$0.0733x10^{5}$	$0.0009x10^{-19}$
Tendencia	$7.7377x10^{5}$	$0.3945x10^{-19}$
Cos(2πt/12)	$-0.0010x10^{5}$	$0.0000x10^{-19}$
Sen(2πt/12)	$-0.0011x10^{5}$	$0.0000x10^{-19}$
Cos(2πt/6)	$0.0021x10^{5}$	$0.0000x10^{-19}$
Sen(2πt/6)	$0.0031x10^{5}$	$0.0000x10^{-19}$

De igual manera la matriz de covariancias de los estimadores es:

$$V_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} 0.0009 & -0.0184 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0184 & 0.3945 & 0.0002 & -0.0004 & 0.0007 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0004 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0007 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix} x10^{-19} \qquad \textbf{Ecuac IV.12}$$

La Tabla IV y Tabla V; presentan la matriz de Covariancias de la variable respuesta y_t así como la matriz de autocorrelaciones residuales ε_t.

De los resultados obtenidos en la estimación del vector de parámetros es evidente que los coeficientes son significativos y en especial la componente de Tendencia positiva ***evidencia un comportamiento ascendente del consumo telefónico para periodos***

TABLA IV
Matriz de Covariancias de la variable respuesta Y

Vr =

*1.0e+003 **

Columns 1 through 7

0.7838	0.7396	0.6987	0.6595	0.6228	0.5881	0.5552
0.7396	1.4807	1.3989	1.3204	1.2469	1.1775	1.1115
0.6987	1.3989	2.1051	1.9870	1.8765	1.7720	1.6727
0.6595	1.3204	1.9870	2.6586	2.5107	2.3709	2.2381
0.6228	1.2469	1.8765	2.5107	3.1542	2.9786	2.8117
0.5881	1.1775	1.7720	2.3709	2.9786	3.5961	3.3947
0.5552	1.1115	1.6727	2.2381	2.8117	3.3947	3.9875
0.5245	1.0500	1.5801	2.1142	2.6561	3.2068	3.7668
0.4949	0.9909	1.4911	1.9951	2.5065	3.0261	3.5546
0.4676	0.9362	1.4089	1.8851	2.3683	2.8593	3.3586
0.4413	0.8834	1.3294	1.7788	2.2347	2.6980	3.1692
0.4169	0.8347	1.2561	1.6807	2.1114	2.5492	2.9943
0.3935	0.7877	1.1854	1.5861	1.9926	2.4057	2.8258
0.3716	0.7441	1.1197	1.4982	1.8822	2.2724	2.6692
0.3509	0.7025	1.0571	1.4144	1.7769	2.1453	2.5200
0.3313	0.6633	0.9981	1.3355	1.6778	2.0256	2.3793
0.3129	0.6264	0.9427	1.2613	1.5846	1.9131	2.2472
0.2953	0.5912	0.8897	1.1904	1.4955	1.8056	2.1209
0.2790	0.5586	0.8406	1.1247	1.4130	1.7059	2.0038
0.2633	0.5271	0.7932	1.0613	1.3333	1.6097	1.8908
0.2488	0.4980	0.7495	1.0028	1.2598	1.5210	1.7866
0.2347	0.4699	0.7072	0.9462	1.1888	1.4352	1.6859
0.2218	0.4440	0.6681	0.8939	1.1231	1.3559	1.5927
0.2093	0.4191	0.6306	0.8438	1.0601	1.2798	1.5033
0.1977	0.3958	0.5956	0.7969	1.0011	1.2087	1.4198
0.1867	0.3737	0.5624	0.7524	0.9453	1.1413	1.3406
0.1762	0.3528	0.5309	0.7103	0.8924	1.0774	1.2655
0.1664	0.3332	0.5015	0.6710	0.8430	1.0178	1.1955
0.1571	0.3145	0.4733	0.6332	0.7955	0.9605	1.1282
0.1484	0.2971	0.4472	0.5983	0.7517	0.9075	1.0660
0.1400	0.2804	0.4219	0.5645	0.7092	0.8563	1.0058
0.1323	0.2649	0.3987	0.5334	0.6701	0.8091	0.9503
0.1249	0.2500	0.3762	0.5034	0.6324	0.7635	0.8969
0.1180	0.2362	0.3554	0.4755	0.5974	0.7212	0.8472
0.1114	0.2229	0.3355	0.4489	0.5639	0.6809	0.7998
0.1051	0.2105	0.3168	0.4239	0.5325	0.6429	0.7552
0.0993	0.1988	0.2992	0.4003	0.5029	0.6072	0.7132

0.0937	0.1876	0.2824	0.3778	0.4747	0.5731	0.6732
0.0885	0.1773	0.2668	0.3570	0.4484	0.5414	0.6360
0.0836	0.1673	0.2517	0.3368	0.4232	0.5109	0.6001
0.0789	0.1581	0.2379	0.3183	0.3998	0.4827	0.5670
0.0745	0.1492	0.2245	0.3003	0.3773	0.4555	0.5351
0.0704	0.1409	0.2121	0.2837	0.3565	0.4304	0.5055
0.0664	0.1330	0.2001	0.2678	0.3364	0.4062	0.4771
0.0627	0.1256	0.1890	0.2529	0.3177	0.3836	0.4506
0.0592	0.1186	0.1785	0.2388	0.3000	0.3622	0.4255
0.0559	0.1120	0.1685	0.2255	0.2832	0.3420	0.4017
0.0528	0.1058	0.1592	0.2130	0.2675	0.3230	0.3794

Columns 8 through 14

0.5245	0.4949	0.4676	0.4413	0.4169	0.3935	0.3716
1.0500	0.9909	0.9362	0.8834	0.8347	0.7877	0.7441
1.5801	1.4911	1.4089	1.3294	1.2561	1.1854	1.1197
2.1142	1.9951	1.8851	1.7788	1.6807	1.5861	1.4982
2.6561	2.5065	2.3683	2.2347	2.1114	1.9926	1.8822
3.2068	3.0261	2.8593	2.6980	2.5492	2.4057	2.2724
3.7668	3.5546	3.3586	3.1692	2.9943	2.8258	2.6692
4.3420	4.0974	3.8715	3.6531	3.4516	3.2574	3.0768
4.0974	4.6492	4.3929	4.1452	3.9165	3.6961	3.4912
3.8715	4.3929	4.9346	4.6562	4.3994	4.1518	3.9217
3.6531	4.1452	4.6562	5.1764	4.8908	4.6156	4.3597
3.4516	3.9165	4.3994	4.8908	5.4047	5.1006	4.8178
3.2574	3.6961	4.1518	4.6156	5.1006	5.5964	5.2862
3.0768	3.4912	3.9217	4.3597	4.8178	5.2862	5.7766
2.9048	3.2960	3.7024	4.1160	4.5485	4.9906	5.4537
2.7427	3.1121	3.4958	3.8863	4.2947	4.7122	5.1493
2.5904	2.9393	3.3017	3.6705	4.0561	4.4505	4.8633
2.4448	2.7741	3.1161	3.4642	3.8282	4.2004	4.5901
2.3098	2.6209	2.9441	3.2729	3.6168	3.9685	4.3366
2.1796	2.4731	2.7781	3.0884	3.4129	3.7447	4.0921
2.0595	2.3368	2.6250	2.9182	3.2248	3.5383	3.8666
1.9433	2.2051	2.4769	2.7536	3.0429	3.3388	3.6485
1.8359	2.0832	2.3401	2.6014	2.8748	3.1543	3.4469
1.7329	1.9663	2.2087	2.4555	2.7135	2.9773	3.2535
1.6366	1.8570	2.0860	2.3190	2.5627	2.8118	3.0727
1.5453	1.7535	1.9697	2.1897	2.4198	2.6550	2.9013
1.4588	1.6553	1.8594	2.0671	2.2843	2.5063	2.7389
1.3780	1.5636	1.7564	1.9526	2.1578	2.3676	2.5872
1.3005	1.4756	1.6576	1.8427	2.0363	2.2343	2.4416
1.2288	1.3942	1.5661	1.7411	1.9240	2.1111	2.3069
1.1594	1.3156	1.4778	1.6428	1.8155	1.9919	2.1768
1.0955	1.2430	1.3963	1.5522	1.7153	1.8821	2.0567

1.0338	*1.1731*	*1.3177*	*1.4649*	*1.6188*	*1.7762*	*1.9410*
0.9766	*1.1081*	*1.2447*	*1.3838*	*1.5292*	*1.6778*	*1.8335*
0.9219	*1.0461*	*1.1750*	*1.3063*	*1.4435*	*1.5839*	*1.7308*
0.8705	*0.9877*	*1.1095*	*1.2334*	*1.3630*	*1.4956*	*1.6343*
0.8221	*0.9328*	*1.0478*	*1.1649*	*1.2873*	*1.4124*	*1.5435*
0.7760	*0.8805*	*0.9890*	*1.0995*	*1.2151*	*1.3332*	*1.4569*
0.7331	*0.8318*	*0.9344*	*1.0388*	*1.1479*	*1.2595*	*1.3764*
0.6917	*0.7849*	*0.8817*	*0.9802*	*1.0832*	*1.1885*	*1.2987*
0.6536	*0.7417*	*0.8331*	*0.9262*	*1.0235*	*1.1230*	*1.2272*
0.6168	*0.6998*	*0.7861*	*0.8739*	*0.9658*	*1.0597*	*1.1580*
0.5827	*0.6612*	*0.7427*	*0.8257*	*0.9124*	*1.0011*	*1.0940*
0.5500	*0.6240*	*0.7010*	*0.7793*	*0.8612*	*0.9449*	*1.0325*
0.5194	*0.5894*	*0.6621*	*0.7360*	*0.8133*	*0.8924*	*0.9752*
0.4904	*0.5565*	*0.6251*	*0.6949*	*0.7680*	*0.8426*	*0.9208*
0.4630	*0.5254*	*0.5902*	*0.6561*	*0.7250*	*0.7955*	*0.8693*
0.4374	*0.4963*	*0.5574*	*0.6197*	*0.6848*	*0.7514*	*0.8211*

Columns 15 through 21

0.3509	*0.3313*	*0.3129*	*0.2953*	*0.2790*	*0.2633*	*0.2488*
0.7025	*0.6633*	*0.6264*	*0.5912*	*0.5586*	*0.5271*	*0.4980*
1.0571	*0.9981*	*0.9427*	*0.8897*	*0.8406*	*0.7932*	*0.7495*
1.4144	*1.3355*	*1.2613*	*1.1904*	*1.1247*	*1.0613*	*1.0028*
1.7769	*1.6778*	*1.5846*	*1.4955*	*1.4130*	*1.3333*	*1.2598*
2.1453	*2.0256*	*1.9131*	*1.8056*	*1.7059*	*1.6097*	*1.5210*
2.5200	*2.3793*	*2.2472*	*2.1209*	*2.0038*	*1.8908*	*1.7866*
2.9048	*2.7427*	*2.5904*	*2.4448*	*2.3098*	*2.1796*	*2.0595*
3.2960	*3.1121*	*2.9393*	*2.7741*	*2.6209*	*2.4731*	*2.3368*
3.7024	*3.4958*	*3.3017*	*3.1161*	*2.9441*	*2.7781*	*2.6250*
4.1160	*3.8863*	*3.6705*	*3.4642*	*3.2729*	*3.0884*	*2.9182*
4.5485	*4.2947*	*4.0561*	*3.8282*	*3.6168*	*3.4129*	*3.2248*
4.9906	*4.7122*	*4.4505*	*4.2004*	*3.9685*	*3.7447*	*3.5383*
5.4537	*5.1493*	*4.8633*	*4.5901*	*4.3366*	*4.0921*	*3.8666*
5.9320	*5.6009*	*5.2899*	*4.9926*	*4.7170*	*4.4510*	*4.2057*
5.6009	*6.0715*	*5.7343*	*5.4121*	*5.1133*	*4.8250*	*4.5590*
5.2899	*5.7343*	*6.1994*	*5.8510*	*5.5280*	*5.2163*	*4.9288*
4.9926	*5.4121*	*5.8510*	*6.3051*	*5.9569*	*5.6211*	*5.3113*
4.7170	*5.1133*	*5.5280*	*5.9569*	*6.4118*	*6.0503*	*5.7168*
4.4510	*4.8250*	*5.2163*	*5.6211*	*6.0503*	*6.4919*	*6.1341*
4.2057	*4.5590*	*4.9288*	*5.3113*	*5.7168*	*6.1341*	*6.5798*
3.9685	*4.3019*	*4.6508*	*5.0117*	*5.3944*	*5.7881*	*6.2087*
3.7492	*4.0642*	*4.3938*	*4.7348*	*5.0963*	*5.4683*	*5.8656*
3.5388	*3.8361*	*4.1473*	*4.4691*	*4.8103*	*5.1614*	*5.5365*
3.3421	*3.6229*	*3.9168*	*4.2207*	*4.5430*	*4.8746*	*5.2288*
3.1558	*3.4209*	*3.6984*	*3.9854*	*4.2897*	*4.6027*	*4.9372*
2.9791	*3.2294*	*3.4913*	*3.7622*	*4.0495*	*4.3450*	*4.6607*

2.8141	3.0506	3.2980	3.5539	3.8253	4.1045	4.4027
2.6557	2.8789	3.1124	3.3539	3.6100	3.8734	4.1549
2.5093	2.7201	2.9407	3.1689	3.4109	3.6598	3.9257
2.3677	2.5666	2.7748	2.9901	3.2184	3.4533	3.7042
2.2371	2.4251	2.6217	2.8252	3.0409	3.2628	3.4999
2.1112	2.2886	2.4742	2.6662	2.8697	3.0792	3.3029
1.9943	2.1618	2.3372	2.5185	2.7108	2.9087	3.1200
1.8826	2.0408	2.2063	2.3775	2.5591	2.7458	2.9453
1.7776	1.9270	2.0833	2.2449	2.4163	2.5927	2.7811
1.6789	1.8199	1.9675	2.1202	2.2821	2.4486	2.6266
1.5846	1.7178	1.8571	2.0012	2.1540	2.3112	2.4791
1.4971	1.6228	1.7545	1.8906	2.0350	2.1835	2.3421
1.4126	1.5313	1.6555	1.7840	1.9202	2.0604	2.2101
1.3348	1.4469	1.5643	1.6857	1.8144	1.9468	2.0883
1.2595	1.3654	1.4761	1.5906	1.7121	1.8370	1.9705
1.1900	1.2900	1.3946	1.5028	1.6175	1.7356	1.8617
1.1231	1.2175	1.3162	1.4183	1.5266	1.6381	1.7571
1.0607	1.1499	1.2431	1.3396	1.4419	1.5471	1.6595
1.0015	1.0857	1.1738	1.2648	1.3614	1.4608	1.5669
0.9455	1.0250	1.1081	1.1941	1.2853	1.3791	1.4793
0.8931	0.9682	1.0467	1.1279	1.2140	1.3027	1.3973

Columns 22 through 28

0.2347	0.2218	0.2093	0.1977	0.1867	0.1762	0.1664
0.4699	0.4440	0.4191	0.3958	0.3737	0.3528	0.3332
0.7072	0.6681	0.6306	0.5956	0.5624	0.5309	0.5015
0.9462	0.8939	0.8438	0.7969	0.7524	0.7103	0.6710
1.1888	1.1231	1.0601	1.0011	0.9453	0.8924	0.8430
1.4352	1.3559	1.2798	1.2087	1.1413	1.0774	1.0178
1.6859	1.5927	1.5033	1.4198	1.3406	1.2655	1.1955
1.9433	1.8359	1.7329	1.6366	1.5453	1.4588	1.3780
2.2051	2.0832	1.9663	1.8570	1.7535	1.6553	1.5636
2.4769	2.3401	2.2087	2.0860	1.9697	1.8594	1.7564
2.7536	2.6014	2.4555	2.3190	2.1897	2.0671	1.9526
3.0429	2.8748	2.7135	2.5627	2.4198	2.2843	2.1578
3.3388	3.1543	2.9773	2.8118	2.6550	2.5063	2.3676
3.6485	3.4469	3.2535	3.0727	2.9013	2.7389	2.5872
3.9685	3.7492	3.5388	3.3421	3.1558	2.9791	2.8141
4.3019	4.0642	3.8361	3.6229	3.4209	3.2294	3.0506
4.6508	4.3938	4.1473	3.9168	3.6984	3.4913	3.2980
5.0117	4.7348	4.4691	4.2207	3.9854	3.7622	3.5539
5.3944	5.0963	4.8103	4.5430	4.2897	4.0495	3.8253
5.7881	5.4683	5.1614	4.8746	4.6027	4.3450	4.1045
6.2087	5.8656	5.5365	5.2288	4.9372	4.6607	4.4027
6.6413	6.2744	5.9223	5.5931	5.2812	4.9855	4.7095

6.2744	6.7113	6.3346	5.9826	5.6490	5.3327	5.0374
5.9223	6.3346	6.7622	6.3864	6.0302	5.6926	5.3774
5.5931	5.9826	6.3864	6.8148	6.4347	6.0744	5.7381
5.2812	5.6490	6.0302	6.4347	6.8593	6.4752	6.1167
4.9855	5.3327	5.6926	6.0744	6.4752	6.8956	6.5138
4.7095	5.0374	5.3774	5.7381	6.1167	6.5138	6.9368
4.4444	4.7539	5.0747	5.4151	5.7724	6.1472	6.5464
4.1993	4.4917	4.7949	5.1165	5.4541	5.8082	6.1854
3.9623	4.2382	4.5243	4.8278	5.1463	5.4804	5.8363
3.7438	4.0045	4.2748	4.5615	4.8625	5.1782	5.5144
3.5331	3.7791	4.0342	4.3048	4.5888	4.8867	5.2041
3.3374	3.5698	3.8108	4.0664	4.3347	4.6161	4.9159
3.1506	3.3700	3.5974	3.8387	4.0920	4.3577	4.6406
2.9749	3.1820	3.3968	3.6247	3.8638	4.1147	4.3819
2.8096	3.0052	3.2080	3.4232	3.6491	3.8860	4.1384
2.6519	2.8366	3.0280	3.2311	3.4443	3.6679	3.9061
2.5054	2.6798	2.8607	3.0526	3.2540	3.4652	3.6903
2.3641	2.5287	2.6993	2.8804	3.0705	3.2698	3.4822
2.2338	2.3893	2.5506	2.7217	2.9012	3.0896	3.2902
2.1078	2.2546	2.4068	2.5682	2.7377	2.9154	3.1047
1.9914	2.1301	2.2739	2.4264	2.5865	2.7544	2.9333
1.8795	2.0104	2.1461	2.2901	2.4411	2.5996	2.7685
1.7752	1.8988	2.0269	2.1629	2.3056	2.4553	2.6147
1.6761	1.7928	1.9138	2.0422	2.1769	2.3183	2.4688
1.5824	1.6926	1.8068	1.9280	2.0552	2.1886	2.3308
1.4947	1.5987	1.7067	1.8211	1.9413	2.0673	2.2016

Columns 29 through 35

0.1571	0.1484	0.1400	0.1323	0.1249	0.1180	0.1114
0.3145	0.2971	0.2804	0.2649	0.2500	0.2362	0.2229
0.4733	0.4472	0.4219	0.3987	0.3762	0.3554	0.3355
0.6332	0.5983	0.5645	0.5334	0.5034	0.4755	0.4489
0.7955	0.7517	0.7092	0.6701	0.6324	0.5974	0.5639
0.9605	0.9075	0.8563	0.8091	0.7635	0.7212	0.6809
1.1282	1.0660	1.0058	0.9503	0.8969	0.8472	0.7998
1.3005	1.2288	1.1594	1.0955	1.0338	0.9766	0.9219
1.4756	1.3942	1.3156	1.2430	1.1731	1.1081	1.0461
1.6576	1.5661	1.4778	1.3963	1.3177	1.2447	1.1750
1.8427	1.7411	1.6428	1.5522	1.4649	1.3838	1.3063
2.0363	1.9240	1.8155	1.7153	1.6188	1.5292	1.4435
2.2343	2.1111	1.9919	1.8821	1.7762	1.6778	1.5839
2.4416	2.3069	2.1768	2.0567	1.9410	1.8335	1.7308
2.6557	2.5093	2.3677	2.2371	2.1112	1.9943	1.8826
2.8789	2.7201	2.5666	2.4251	2.2886	2.1618	2.0408
3.1124	2.9407	2.7748	2.6217	2.4742	2.3372	2.2063

3.3539	3.1689	2.9901	2.8252	2.6662	2.5185	2.3775
3.6100	3.4109	3.2184	3.0409	2.8697	2.7108	2.5591
3.8734	3.6598	3.4533	3.2628	3.0792	2.9087	2.7458
4.1549	3.9257	3.7042	3.4999	3.3029	3.1200	2.9453
4.4444	4.1993	3.9623	3.7438	3.5331	3.3374	3.1506
4.7539	4.4917	4.2382	4.0045	3.7791	3.5698	3.3700
5.0747	4.7949	4.5243	4.2748	4.0342	3.8108	3.5974
5.4151	5.1165	4.8278	4.5615	4.3048	4.0664	3.8387
5.7724	5.4541	5.1463	4.8625	4.5888	4.3347	4.0920
6.1472	5.8082	5.4804	5.1782	4.8867	4.6161	4.3577
6.5464	6.1854	5.8363	5.5144	5.2041	4.9159	4.6406
6.9607	6.5768	6.2056	5.8634	5.5334	5.2270	4.9343
6.5768	6.9979	6.6030	6.2389	5.8877	5.5617	5.2503
6.2056	6.6030	7.0130	6.6263	6.2534	5.9071	5.5763
5.8634	6.2389	6.6263	7.0446	6.6481	6.2800	5.9284
5.5334	5.8877	6.2534	6.6481	7.0568	6.6661	6.2928
5.2270	5.5617	5.9071	6.2800	6.6661	7.0805	6.6840
4.9343	5.2503	5.5763	5.9284	6.2928	6.6840	7.0929
4.6592	4.9575	5.2654	5.5978	5.9419	6.3113	6.6974
4.4003	4.6820	4.9728	5.2867	5.6117	5.9606	6.3252
4.1533	4.4192	4.6937	4.9900	5.2968	5.6260	5.9702
3.9238	4.1750	4.4343	4.7143	5.0041	5.3152	5.6403
3.7025	3.9396	4.1842	4.4484	4.7219	5.0154	5.3222
3.4985	3.7225	3.9536	4.2032	4.4616	4.7390	5.0289
3.3012	3.5126	3.7307	3.9663	4.2101	4.4718	4.7454
3.1189	3.3186	3.5247	3.7472	3.9776	4.2249	4.4833
2.9437	3.1321	3.3267	3.5367	3.7541	3.9875	4.2314
2.7802	2.9582	3.1419	3.3403	3.5456	3.7660	3.9964
2.6251	2.7931	2.9666	3.1539	3.3478	3.5559	3.7734
2.4783	2.6370	2.8007	2.9775	3.1606	3.3571	3.5624
2.3409	2.4908	2.6455	2.8125	2.9854	3.1710	3.3650

Columns 36 through 42

0.1051	0.0993	0.0937	0.0885	0.0836	0.0789	0.0745
0.2105	0.1988	0.1876	0.1773	0.1673	0.1581	0.1492
0.3168	0.2992	0.2824	0.2668	0.2517	0.2379	0.2245
0.4239	0.4003	0.3778	0.3570	0.3368	0.3183	0.3003
0.5325	0.5029	0.4747	0.4484	0.4232	0.3998	0.3773
0.6429	0.6072	0.5731	0.5414	0.5109	0.4827	0.4555
0.7552	0.7132	0.6732	0.6360	0.6001	0.5670	0.5351
0.8705	0.8221	0.7760	0.7331	0.6917	0.6536	0.6168
0.9877	0.9328	0.8805	0.8318	0.7849	0.7417	0.6998
1.1095	1.0478	0.9890	0.9344	0.8817	0.8331	0.7861
1.2334	1.1649	1.0995	1.0388	0.9802	0.9262	0.8739
1.3630	1.2873	1.2151	1.1479	1.0832	1.0235	0.9658

1.4956	1.4124	1.3332	1.2595	1.1885	1.1230	1.0597
1.6343	1.5435	1.4569	1.3764	1.2987	1.2272	1.1580
1.7776	1.6789	1.5846	1.4971	1.4126	1.3348	1.2595
1.9270	1.8199	1.7178	1.6228	1.5313	1.4469	1.3654
2.0833	1.9675	1.8571	1.7545	1.6555	1.5643	1.4761
2.2449	2.1202	2.0012	1.8906	1.7840	1.6857	1.5906
2.4163	2.2821	2.1540	2.0350	1.9202	1.8144	1.7121
2.5927	2.4486	2.3112	2.1835	2.0604	1.9468	1.8370
2.7811	2.6266	2.4791	2.3421	2.2101	2.0883	1.9705
2.9749	2.8096	2.6519	2.5054	2.3641	2.2338	2.1078
3.1820	3.0052	2.8366	2.6798	2.5287	2.3893	2.2546
3.3968	3.2080	3.0280	2.8607	2.6993	2.5506	2.4068
3.6247	3.4232	3.2311	3.0526	2.8804	2.7217	2.5682
3.8638	3.6491	3.4443	3.2540	3.0705	2.9012	2.7377
4.1147	3.8860	3.6679	3.4652	3.2698	3.0896	2.9154
4.3819	4.1384	3.9061	3.6903	3.4822	3.2902	3.1047
4.6592	4.4003	4.1533	3.9238	3.7025	3.4985	3.3012
4.9575	4.6820	4.4192	4.1750	3.9396	3.7225	3.5126
5.2654	4.9728	4.6937	4.4343	4.1842	3.9536	3.7307
5.5978	5.2867	4.9900	4.7143	4.4484	4.2032	3.9663
5.9419	5.6117	5.2968	5.0041	4.7219	4.4616	4.2101
6.3113	5.9606	5.6260	5.3152	5.0154	4.7390	4.4718
6.6974	6.3252	5.9702	5.6403	5.3222	5.0289	4.7454
7.1071	6.7121	6.3354	5.9853	5.6478	5.3365	5.0357
6.7121	7.1226	6.7229	6.3514	5.9932	5.6629	5.3436
6.3354	6.7229	7.1285	6.7346	6.3548	6.0045	5.6660
5.9853	6.3514	6.7346	7.1462	6.7432	6.3715	6.0123
5.6478	5.9932	6.3548	6.7432	7.1456	6.7518	6.3711
5.3365	5.6629	6.0045	6.3715	6.7518	7.1634	6.7596
5.0357	5.3436	5.6660	6.0123	6.3711	6.7596	7.1612
4.7576	5.0486	5.3531	5.6803	6.0193	6.3863	6.7658
4.4902	4.7649	5.0523	5.3611	5.6810	6.0274	6.3856
4.2409	4.5002	4.7717	5.0634	5.3655	5.6927	6.0310
4.0043	4.2491	4.5055	4.7808	5.0662	5.3751	5.6945
3.7803	4.0115	4.2536	4.5135	4.7829	5.0745	5.3760
3.5708	3.7892	4.0178	4.2633	4.5178	4.7932	5.0780

Columns 43 through 48

0.0704	0.0664	0.0627	0.0592	0.0559	0.0528
0.1409	0.1330	0.1256	0.1186	0.1120	0.1058
0.2121	0.2001	0.1890	0.1785	0.1685	0.1592
0.2837	0.2678	0.2529	0.2388	0.2255	0.2130
0.3565	0.3364	0.3177	0.3000	0.2832	0.2675
0.4304	0.4062	0.3836	0.3622	0.3420	0.3230
0.5055	0.4771	0.4506	0.4255	0.4017	0.3794

0.5827	0.5500	0.5194	0.4904	0.4630	0.4374
0.6612	0.6240	0.5894	0.5565	0.5254	0.4963
0.7427	0.7010	0.6621	0.6251	0.5902	0.5574
0.8257	0.7793	0.7360	0.6949	0.6561	0.6197
0.9124	0.8612	0.8133	0.7680	0.7250	0.6848
1.0011	0.9449	0.8924	0.8426	0.7955	0.7514
1.0940	1.0325	0.9752	0.9208	0.8693	0.8211
1.1900	1.1231	1.0607	1.0015	0.9455	0.8931
1.2900	1.2175	1.1499	1.0857	1.0250	0.9682
1.3946	1.3162	1.2431	1.1738	1.1081	1.0467
1.5028	1.4183	1.3396	1.2648	1.1941	1.1279
1.6175	1.5266	1.4419	1.3614	1.2853	1.2140
1.7356	1.6381	1.5471	1.4608	1.3791	1.3027
1.8617	1.7571	1.6595	1.5669	1.4793	1.3973
1.9914	1.8795	1.7752	1.6761	1.5824	1.4947
2.1301	2.0104	1.8988	1.7928	1.6926	1.5987
2.2739	2.1461	2.0269	1.9138	1.8068	1.7067
2.4264	2.2901	2.1629	2.0422	1.9280	1.8211
2.5865	2.4411	2.3056	2.1769	2.0552	1.9413
2.7544	2.5996	2.4553	2.3183	2.1886	2.0673
2.9333	2.7685	2.6147	2.4688	2.3308	2.2016
3.1189	2.9437	2.7802	2.6251	2.4783	2.3409
3.3186	3.1321	2.9582	2.7931	2.6370	2.4908
3.5247	3.3267	3.1419	2.9666	2.8007	2.6455
3.7472	3.5367	3.3403	3.1539	2.9775	2.8125
3.9776	3.7541	3.5456	3.3478	3.1606	2.9854
4.2249	3.9875	3.7660	3.5559	3.3571	3.1710
4.4833	4.2314	3.9964	3.7734	3.5624	3.3650
4.7576	4.4902	4.2409	4.0043	3.7803	3.5708
5.0486	4.7649	4.5002	4.2491	4.0115	3.7892
5.3531	5.0523	4.7717	4.5055	4.2536	4.0178
5.6803	5.3611	5.0634	4.7808	4.5135	4.2633
6.0193	5.6810	5.3655	5.0662	4.7829	4.5178
6.3863	6.0274	5.6927	5.3751	5.0745	4.7932
6.7658	6.3856	6.0310	5.6945	5.3760	5.0780
7.1759	6.7726	6.3965	6.0396	5.7019	5.3858
6.7726	7.1750	6.7765	6.3984	6.0407	5.7058
6.3965	6.7765	7.1836	6.7827	6.4035	6.0485
6.0396	6.3984	6.7827	7.1876	6.7857	6.4095
5.7019	6.0407	6.4035	6.7857	7.1893	6.7908
5.3858	5.7058	6.0485	6.4095	6.7908	7.1980

TABLA V
Matriz de Autocorrelaciones de ε_t

Ralfa =
Columns 1 through 7

1.0000	0.9442	0.8916	0.8419	0.7949	0.7506	0.7087
0.9442	1.8916	1.7861	1.6865	1.5924	1.5036	1.4198
0.8916	1.7861	2.6865	2.5367	2.3952	2.2616	2.1355
0.8419	1.6865	2.5367	3.3952	3.2059	3.0271	2.8583
0.7949	1.5924	2.3952	3.2059	4.0271	3.8025	3.5904
0.7506	1.5036	2.2616	3.0271	3.8025	4.5904	4.3344
0.7087	1.4198	2.1355	2.8583	3.5904	4.3344	5.0927
0.6692	1.3406	2.0164	2.6989	3.3902	4.0927	4.8087
0.6319	1.2658	1.9040	2.5484	3.2011	3.8645	4.5405
0.5966	1.1952	1.7978	2.4062	3.0226	3.6490	4.2873
0.5634	1.1286	1.6975	2.2721	2.8541	3.4455	4.0482
0.5319	1.0656	1.6029	2.1453	2.6949	3.2533	3.8225
0.5023	1.0062	1.5135	2.0257	2.5446	3.0719	3.6093
0.4743	0.9501	1.4291	1.9127	2.4027	2.9006	3.4080
0.4478	0.8971	1.3494	1.8061	2.2687	2.7388	3.2180
0.4228	0.8471	1.2741	1.7053	2.1422	2.5861	3.0385
0.3993	0.7998	1.2031	1.6102	2.0227	2.4419	2.8691
0.3770	0.7552	1.1360	1.5204	1.9099	2.3057	2.7091
0.3560	0.7131	1.0726	1.4357	1.8034	2.1771	2.5580
0.3361	0.6734	1.0128	1.3556	1.7028	2.0557	2.4153
0.3174	0.6358	0.9563	1.2800	1.6079	1.9411	2.2806
0.2997	0.6003	0.9030	1.2086	1.5182	1.8328	2.1534
0.2830	0.5669	0.8526	1.1412	1.4335	1.7306	2.0334
0.2672	0.5353	0.8051	1.0776	1.3536	1.6341	1.9200
0.2523	0.5054	0.7602	1.0175	1.2781	1.5430	1.8129
0.2382	0.4772	0.7178	0.9607	1.2068	1.4569	1.7118
0.2249	0.4506	0.6778	0.9072	1.1395	1.3757	1.6163
0.2124	0.4255	0.6400	0.8566	1.0760	1.2989	1.5262
0.2005	0.4017	0.6043	0.8088	1.0160	1.2265	1.4411
0.1894	0.3793	0.5706	0.7637	0.9593	1.1581	1.3607
0.1788	0.3582	0.5388	0.7211	0.9058	1.0935	1.2848
0.1688	0.3382	0.5087	0.6809	0.8553	1.0325	1.2132
0.1594	0.3194	0.4803	0.6429	0.8076	0.9750	1.1455
0.1505	0.3015	0.4536	0.6071	0.7626	0.9206	1.0816
0.1421	0.2847	0.4283	0.5732	0.7200	0.8692	1.0213
0.1342	0.2688	0.4044	0.5412	0.6799	0.8208	0.9644
0.1267	0.2539	0.3818	0.5111	0.6420	0.7750	0.9106
0.1197	0.2397	0.3605	0.4826	0.6062	0.7318	0.8598
0.1130	0.2263	0.3404	0.4556	0.5724	0.6910	0.8119
0.1067	0.2137	0.3214	0.4302	0.5404	0.6524	0.7666

0.1007	*0.2018*	*0.3035*	*0.4062*	*0.5103*	*0.6161*	*0.7238*
0.0951	*0.1905*	*0.2866*	*0.3836*	*0.4818*	*0.5817*	*0.6835*
0.0898	*0.1799*	*0.2706*	*0.3622*	*0.4550*	*0.5493*	*0.6453*
0.0848	*0.1699*	*0.2555*	*0.3420*	*0.4296*	*0.5186*	*0.6094*
0.0801	*0.1604*	*0.2413*	*0.3229*	*0.4056*	*0.4897*	*0.5754*
0.0756	*0.1515*	*0.2278*	*0.3049*	*0.3830*	*0.4624*	*0.5433*
0.0714	*0.1430*	*0.2151*	*0.2879*	*0.3617*	*0.4366*	*0.5130*
0.0674	*0.1350*	*0.2031*	*0.2719*	*0.3415*	*0.4123*	*0.4844*

Columns 8 through 14

0.6692	*0.6319*	*0.5966*	*0.5634*	*0.5319*	*0.5023*	*0.4743*
1.3406	*1.2658*	*1.1952*	*1.1286*	*1.0656*	*1.0062*	*0.9501*
2.0164	*1.9040*	*1.7978*	*1.6975*	*1.6029*	*1.5135*	*1.4291*
2.6989	*2.5484*	*2.4062*	*2.2721*	*2.1453*	*2.0257*	*1.9127*
3.3902	*3.2011*	*3.0226*	*2.8541*	*2.6949*	*2.5446*	*2.4027*
4.0927	*3.8645*	*3.6490*	*3.4455*	*3.2533*	*3.0719*	*2.9006*
4.8087	*4.5405*	*4.2873*	*4.0482*	*3.8225*	*3.6093*	*3.4080*
5.5405	*5.2316*	*4.9398*	*4.6643*	*4.4042*	*4.1586*	*3.9267*
5.2316	*5.9398*	*5.6086*	*5.2958*	*5.0005*	*4.7216*	*4.4583*
4.9398	*5.6086*	*6.2958*	*5.9447*	*5.6132*	*5.3001*	*5.0046*
4.6643	*5.2958*	*5.9447*	*6.6132*	*6.2444*	*5.8961*	*5.5673*
4.4042	*5.0005*	*5.6132*	*6.2444*	*6.8961*	*6.5116*	*6.1484*
4.1586	*4.7216*	*5.3001*	*5.8961*	*6.5116*	*7.1484*	*6.7498*
3.9267	*4.4583*	*5.0046*	*5.5673*	*6.1484*	*6.7498*	*7.3734*
3.7077	*4.2097*	*4.7255*	*5.2568*	*5.8055*	*6.3734*	*6.9622*
3.5009	*3.9749*	*4.4619*	*4.9637*	*5.4818*	*6.0179*	*6.5739*
3.3057	*3.7532*	*4.2131*	*4.6869*	*5.1761*	*5.6823*	*6.2073*
3.1213	*3.5439*	*3.9782*	*4.4255*	*4.8874*	*5.3654*	*5.8611*
2.9473	*3.3463*	*3.7563*	*4.1787*	*4.6149*	*5.0662*	*5.5343*
2.7829	*3.1597*	*3.5468*	*3.9457*	*4.3575*	*4.7837*	*5.2256*
2.6277	*2.9835*	*3.3490*	*3.7256*	*4.1145*	*4.5169*	*4.9342*
2.4812	*2.8171*	*3.1623*	*3.5179*	*3.8850*	*4.2650*	*4.6590*
2.3428	*2.6600*	*2.9859*	*3.3217*	*3.6684*	*4.0272*	*4.3992*
2.2122	*2.5116*	*2.8194*	*3.1364*	*3.4638*	*3.8026*	*4.1539*
2.0888	*2.3716*	*2.6622*	*2.9615*	*3.2706*	*3.5905*	*3.9222*
1.9723	*2.2393*	*2.5137*	*2.7964*	*3.0882*	*3.3903*	*3.7035*
1.8623	*2.1144*	*2.3735*	*2.6404*	*2.9160*	*3.2012*	*3.4970*
1.7585	*1.9965*	*2.2412*	*2.4932*	*2.7534*	*3.0227*	*3.3020*
1.6604	*1.8852*	*2.1162*	*2.3541*	*2.5998*	*2.8541*	*3.1178*
1.5678	*1.7800*	*1.9982*	*2.2228*	*2.4549*	*2.6950*	*2.9439*
1.4804	*1.6808*	*1.8867*	*2.0989*	*2.3180*	*2.5447*	*2.7798*
1.3978	*1.5870*	*1.7815*	*1.9818*	*2.1887*	*2.4028*	*2.6247*
1.3199	*1.4985*	*1.6822*	*1.8713*	*2.0666*	*2.2688*	*2.4784*
1.2463	*1.4150*	*1.5883*	*1.7670*	*1.9514*	*2.1422*	*2.3402*
1.1768	*1.3361*	*1.4998*	*1.6684*	*1.8426*	*2.0228*	*2.2096*

1.1111	1.2616	1.4161	1.5754	1.7398	1.9100	2.0864
1.0492	1.1912	1.3372	1.4875	1.6428	1.8035	1.9701
0.9907	1.1248	1.2626	1.4046	1.5512	1.7029	1.8602
0.9354	1.0620	1.1922	1.3262	1.4647	1.6079	1.7565
0.8832	1.0028	1.1257	1.2523	1.3830	1.5182	1.6585
0.8340	0.9469	1.0629	1.1824	1.3059	1.4336	1.5660
0.7875	0.8941	1.0036	1.1165	1.2330	1.3536	1.4787
0.7436	0.8442	0.9477	1.0542	1.1643	1.2781	1.3962
0.7021	0.7971	0.8948	0.9954	1.0993	1.2069	1.3184
0.6629	0.7527	0.8449	0.9399	1.0380	1.1396	1.2448
0.6260	0.7107	0.7978	0.8875	0.9801	1.0760	1.1754
0.5911	0.6711	0.7533	0.8380	0.9255	1.0160	1.1099
0.5581	0.6337	0.7113	0.7913	0.8739	0.9593	1.0480

Columns 15 through 21

0.4478	0.4228	0.3993	0.3770	0.3560	0.3361	0.3174
0.8971	0.8471	0.7998	0.7552	0.7131	0.6734	0.6358
1.3494	1.2741	1.2031	1.1360	1.0726	1.0128	0.9563
1.8061	1.7053	1.6102	1.5204	1.4357	1.3556	1.2800
2.2687	2.1422	2.0227	1.9099	1.8034	1.7028	1.6079
2.7388	2.5861	2.4419	2.3057	2.1771	2.0557	1.9411
3.2180	3.0385	2.8691	2.7091	2.5580	2.4153	2.2806
3.7077	3.5009	3.3057	3.1213	2.9473	2.7829	2.6277
4.2097	3.9749	3.7532	3.5439	3.3463	3.1597	2.9835
4.7255	4.4619	4.2131	3.9782	3.7563	3.5468	3.3490
5.2568	4.9637	4.6869	4.4255	4.1787	3.9457	3.7256
5.8055	5.4818	5.1761	4.8874	4.6149	4.3575	4.1145
6.3734	6.0179	5.6823	5.3654	5.0662	4.7837	4.5169
6.9622	6.5739	6.2073	5.8611	5.5343	5.2256	4.9342
7.5739	7.1515	6.7527	6.3761	6.0205	5.6848	5.3678
7.1515	7.7527	7.3204	6.9121	6.5266	6.1627	5.8190
6.7527	7.3204	7.9121	7.4709	7.0542	6.6608	6.2894
6.3761	6.9121	7.4709	8.0542	7.6051	7.1810	6.7805
6.0205	6.5266	7.0542	7.6051	8.1810	7.7247	7.2939
5.6848	6.1627	6.6608	7.1810	7.7247	8.2939	7.8314
5.3678	5.8190	6.2894	6.7805	7·2939	7.8314	8.3947
5.0684	5.4945	5.9386	6.4024	6.8872	7·3947	7.9265
4.7858	5.1881	5.6075	6.0453	6.5031	6.9823	7.4845
4.5189	4.8987	5.2947	5.7082	6.1404	6.5929	7.0671
4.2669	4.6256	4.9995	5.3899	5.7980	6.2252	6.6730
4.0289	4.3676	4.7207	5.0893	5.4747	5.8781	6.3008
3.8042	4.1240	4.4574	4.8055	5.1694	5.5503	5.9495
3.5921	3.8940	4.2088	4.5375	4.8811	5.2407	5.6177
3.3918	3.6769	3.9741	4.2844	4.6089	4.9485	5.3044
3.2026	3.4718	3.7525	4.0455	4.3518	4.6725	5.0086

3.0240	3.2782	3.5432	3.8199	4.1091	4.4119	4.7293
2.8554	3.0954	3.3456	3.6069	3.8800	4.1659	4.4655
2.6961	2.9228	3.1590	3.4057	3.6636	3.9336	4.2165
2.5458	2.7598	2.9829	3.2158	3.4593	3.7142	3.9813
2.4038	2.6059	2.8165	3.0365	3.2664	3.5071	3.7593
2.2697	2.4605	2.6595	2.8671	3.0842	3.3115	3.5497
2.1432	2.3233	2.5111	2.7072	2.9122	3.1268	3.3517
2.0237	2.1938	2.3711	2.5563	2.7498	2.9524	3.1648
1.9108	2.0714	2.2389	2.4137	2.5965	2.7878	2.9883
1.8042	1.9559	2.1140	2.2791	2.4517	2.6323	2.8217
1.7036	1.8468	1.9961	2.1520	2.3149	2.4855	2.6643
1.6086	1.7438	1.8848	2.0320	2.1859	2.3469	2.5157
1.5189	1.6466	1.7797	1.9187	2.0640	2.2160	2.3754
1.4342	1.5548	1.6804	1.8117	1.9489	2.0925	2.2430
1.3542	1.4681	1.5867	1.7106	1.8402	1.9758	2.1179
1.2787	1.3862	1.4982	1.6152	1.7375	1.8656	1.9998
1.2074	1.3089	1.4147	1.5252	1.6406	1.7615	1.8882
1.1401	1.2359	1.3358	1.4401	1.5492	1.6633	1.7829

Columns 22 through 28

0.2997	0.2830	0.2672	0.2523	0.2382	0.2249	0.2124
0.6003	0.5669	0.5353	0.5054	0.4772	0.4506	0.4255
0.9030	0.8526	0.8051	0.7602	0.7178	0.6778	0.6400
1.2086	1.1412	1.0776	1.0175	0.9607	0.9072	0.8566
1.5182	1.4335	1.3536	1.2781	1.2068	1.1395	1.0760
1.8328	1.7306	1.6341	1.5430	1.4569	1.3757	1.2989
2.1534	2.0334	1.9200	1.8129	1.7118	1.6163	1.5262
2.4812	2.3428	2.2122	2.0888	1.9723	1.8623	1.7585
2.8171	2.6600	2.5116	2.3716	2.2393	2.1144	1.9965
3.1623	2.9859	2.8194	2.6622	2.5137	2.3735	2.2412
3.5179	3.3217	3.1364	2.9615	2.7964	2.6404	2.4932
3.8850	3.6684	3.4638	3.2706	3.0882	2.9160	2.7534
4.2650	4.0272	3.8026	3.5905	3.3903	3.2012	3.0227
4.6590	4.3992	4.1539	3.9222	3.7035	3.4970	3.3020
5.0684	4.7858	4.5189	4.2669	4.0289	3.8042	3.5921
5.4945	5.1881	4.8987	4.6256	4.3676	4.1240	3.8940
5.9386	5.6075	5.2947	4.9995	4.7207	4.4574	4.2088
6.4024	6.0453	5.7082	5.3899	5.0893	4.8055	4.5375
6.8872	6.5031	6.1404	5.7980	5.4747	5.1694	4.8811
7.3947	6.9823	6.5929	6.2252	5.8781	5.5503	5.2407
7.9265	7.4845	7.0671	6.6730	6.3008	5.9495	5.6177
8.4845	8.0113	7.5646	7.1427	6.7444	6.3682	6.0131
8.0113	8.5646	8.0869	7.6359	7.2101	6.8080	6.4283
7.5646	8.0869	8.6359	8.1543	7.6996	7.2702	6.8648
7.1427	7.6359	8.1543	8.6996	8.2144	7.7563	7.3238

6.7444	7.2101	7.6996	8.2144	8.7563	8.2680	7.8069
6.3682	6.8080	7.2702	7.7563	8.2680	8.8069	8.3158
6.0131	6.4283	6.8648	7.3238	7.8069	8.3158	8.8520
5.6778	6.0699	6.4819	6.9154	7.3716	7.8520	8.3584
5.3611	5.7314	6.1205	6.5297	6.9605	7.4142	7.8923
5.0622	5.4117	5.7791	6.1656	6.5723	7.0007	7.4521
4.7799	5.1099	5.4568	5.8217	6.2058	6.6103	7.0365
4.5133	4.8250	5.1525	5.4971	5.8597	6.2416	6.6441
4.2616	4.5559	4.8652	5.1905	5.5329	5.8936	6.2736
4.0239	4.3018	4.5939	4.9010	5.2244	5.5649	5.9237
3.7995	4.0619	4.3377	4.6277	4.9330	5.2545	5.5934
3.5876	3.8354	4.0958	4.3696	4.6579	4.9615	5.2815
3.3876	3.6215	3.8674	4.1260	4.3981	4.6848	4.9869
3.1987	3.4195	3.6517	3.8959	4.1529	4.4236	4.7088
3.0203	3.2288	3.4480	3.6786	3.9213	4.1769	4.4462
2.8518	3.0488	3.2558	3.4735	3.7026	3.9439	4.1983
2.6928	2.8788	3.0742	3.2798	3.4961	3.7240	3.9641
2.5426	2.7182	2.9028	3.0968	3.3011	3.5163	3.7431
2.4008	2.5666	2.7409	2.9241	3.1170	3.3202	3.5343
2.2669	2.4235	2.5880	2.7611	2.9432	3.1351	3.3372
2.1405	2.2883	2.4437	2.6071	2.7791	2.9602	3.1511
2.0212	2.1607	2.3074	2.4617	2.6241	2.7951	2.9754
1.9084	2.0402	2.1787	2.3244	2.4778	2.6393	2.8095

Columns 29 through 35

0.2005	0.1894	0.1788	0.1688	0.1594	0.1505	0.1421
0.4017	0.3793	0.3582	0.3382	0.3194	0.3015	0.2847
0.6043	0.5706	0.5388	0.5087	0.4803	0.4536	0.4283
0.8088	0.7637	0.7211	0.6809	0.6429	0.6071	0.5732
1.0160	0.9593	0.9058	0.8553	0.8076	0.7626	0.7200
1.2265	1.1581	1.0935	1.0325	0.9750	0.9206	0.8692
1.4411	1.3607	1.2848	1.2132	1.1455	1.0816	1.0213
1.6604	1.5678	1.4804	1.3978	1.3199	1.2463	1.1768
1.8852	1.7800	1.6808	1.5870	1.4985	1.4150	1.3361
2.1162	1.9982	1.8867	1.7815	1.6822	1.5883	1.4998
2.3541	2.2228	2.0989	1.9818	1.8713	1.7670	1.6684
2.5998	2.4549	2.3180	2.1887	2.0666	1.9514	1.8426
2.8541	2.6950	2.5447	2.4028	2.2688	2.1422	2.0228
3.1178	2.9439	2.7798	2.6247	2.4784	2.3402	2.2096
3.3918	3.2026	3.0240	2.8554	2.6961	2.5458	2.4038
3.6769	3.4718	3.2782	3.0954	2.9228	2.7598	2.6059
3.9741	3.7525	3.5432	3.3456	3.1590	2.9829	2.8165
4.2844	4.0455	3.8199	3.6069	3.4057	3.2158	3.0365
4.6089	4.3518	4.1091	3.8800	3.6636	3.4593	3.2664
4.9485	4.6725	4.4119	4.1659	3.9336	3.7142	3.5071

5.3044	5.0086	4.7293	4.4655	4.2165	3.9813	3.7593
5.6778	5.3611	.5.0622	4.7799	4.5133	4.2616	4.0239
6.0699	5.7314	5.4117	5.1099	4.8250	4.5559	4.3018
6.4819	6.1205	5.7791	5.4568	5.1525	4.8652	4.5939
6.9154	6.5297	6.1656	5.8217	5.4971	5.1905	4.9010
7.3716	6.9605	6.5723	6.2058	5.8597	5.5329	5.2244
7.8520	7·4142	7.0007	6.6103	6.2416	5.8936	5.5649
8.3584	7.8923	7.4521	7.0365	6.6441	6.2736	5.9237
8.8923	8.3964	7.9281	7.4860	7.0685	6.6743	6.3021
8.3964	8.9281	8.4302	7.9601	7.5162	7.0970	6.7012
7.9281	8.4302	8.9601	8.4604	7.9886	7.5431	7.1224
7.4860	7.9601	8.4604	8.9886	8.4873	8.0140	7.5671
7.0685	7.5162	7·9886	8.4873	9.0140	8.5113	8.0367
6.6743	7.0970	7·5431	8.0140	8.5113	9.0367	8.5327
6.3021	6·7012	7·1224	7.5671	8.0367	8.5327	9.0569
5.9507	6.3275	6.7252	7.1451	7.5885	8.0569	8.5518
5.6188	5.9747	6.3502	6.7466	7.1653	7.6076	8.0749
5.3055	5.6415	5.9960	6.3704	6.7657	7·1833	7.6246
5.0096	5.3269	5.6617	6.0151	6.3884	6.7827	7.1994
4.7302	5.0298	5.3459	5.6797	6.0321	6.4044	6.7979
4.4664	4.7493	5.0478	5.3629	5.6957	6.0473	6.4188
4.2173	4.4844	4.7663	5.0639	5.3781	5.7100	6.0608
3.9821	4.2343	4.5005	4.7815	5.0782	5.3916	5.7228
3.7601	3.9982	4.2495	4.5148	4.7950	5.0909	5.4037
3.5504	3.7752	4.0125	4.2630	4.5276	4.8070	5.1023
3.3524	3.5647	3.7888	4.0253	4.2751	4.5390	4.8178
3.1654	3.3659	3.5775	3.8008	4.0367	4.2858	4.5491
2.9889	3.1782	3.3780	3.5888	3.8116	4.0468	4.2954

Columns 36 through 42

0.1342	0.1267	0.1197	0.1130	0.1067	0.1007	0.0951
0.2688	0.2539	0.2397	0.2263	0.2137	0.2018	0.1905
0.4044	0.3818	0.3605	0.3404	0.3214	0.3035	0.2866
0.5412	0.5111	0.4826	0.4556	0.4302	0.4062	0.3836
0.6799	0.6420	0.6062	0.5724	0.5404	0.5103	0.4818
0.8208	0.7750	0.7318	0.6910	0.6524	0.6161	0.5817
0.9644	0.9106	0.8598	0.8119	0.7666	0.7238	0.6835
1.1111	1.0492	0.9907	0.9354	0.8832	0.8340	0.7875
1.2616	1.1912	1.1248	1.0620	1.0028	0.9469	0.8941
1.4161	1.3372	1.2626	1.1922	1.1257	1.0629	1.0036
1.5754	1.4875	1.4046	1.3262	1.2523	1.1824	1.1165
1.7398	1.6428	1.5512	1.4647	1.3830	1.3059	1.2330
1.9100	1.8035	1.7029	1.6079	1.5182	1.4336	1.3536
2.0864	1.9701	1.8602	1.7565	1.6585	1.5660	1.4787
2.2697	2.1432	2.0237	1.9108	1.8042	1.7036	1.6086

2.4605	2.3233	2.1938	2.0714	1.9559	1.8468	1.7438
2.6595	2.5111	2.3711	2.2389	2.1140	1.9961	1.8848
2.8671	2.7072	2.5563	2.4137	2.2791	2.1520	2.0320
3.0842	2.9122	2.7498	2.5965	2.4517	2.3149	2.1859
3.3115	3.1268	2.9524	2.7878	2.6323	2.4855	2.3469
3.5497	3.3517	3.1648	2.9883	2.8217	2.6643	2.5157
3.7995	3.5876	3.3876	3.1987	3.0203	2.8518	2.6928
4.0619	3.8354	3.6215	3.4195	3.2288	3.0488	2.8788
4.3377	4.0958	3.8674	3.6517	3.4480	3.2558	3.0742
4.6277	4.3696	4.1260	3.8959	3.6786	3.4735	3.2798
4.9330	4.6579	4.3981	4.1529	3.9213	3.7026	3.4961
5.2545	4.9615	4.6848	4.4236	4.1769	3.9439	3.7240
5.5934	5.2815	4.9869	4.7088	4.4462	4.1983	3.9641
5.9507	5.6188	5.3055	5.0096	4.7302	4.4664	4.2173
6.3275	5.9747	5.6415	5.3269	5.0298	4.7493	4.4844
6.7252	6.3502	5.9960	5.6617	5.3459	5.0478	4.7663
7.1451	6.7466	6.3704	6.0151	5.6797	5.3629	5.0639
7.5885	7.1653	6.7657	6.3884	6.0321	5.6957	5.3781
8.0569	7.6076	7.1833	6.7827	6.4044	6.0473	5.7100
8.5518	8.0749	7.6246	7.1994	6.7979	6.4188	6.0608
9.0749	8.5688	8.0909	7·6397	7.2137	6.8114	6.4315
8.5688	9.0909	8.5840	8.1052	7.6532	7.2264	6.8234
8.0909	8.5840	9.1052	8.5975	8.1180	7·6653	7.2378
7.6397	8.1052	8.5975	9.1180	8.6095	8.1294	7.6760
7.2137	7.6532	8.1180	8.6095	9.1294	8.6203	8.1395
6.8114	7.2264	7.6653	8.1294	8.6203	9.1395	8.6298
6.4315	6.8234	7.2378	7.6760	8.1395	8.6298	9.1486
6.0729	6.4429	6.8342	7.2480	7.6856	8.1486	8.6384
5.7342	6.0836	6.4531	6.8438	7.2570	7.6942	8.1566
5.4144	5.7443	6.0932	6.4621	6.8523	7.2651	7.7018
5.1125	5.4240	5.7534	6.1017	6.4702	6.8599	7.2723
4.8274	5.1215	5.4325	5.7614	6.1093	6.4774	6.8667
4.5581	4.8359	5.1296	5.4401	5.7686	6.1161	6.4838

Columns 43 through 48

0.0898	0.0848	0.0801	0.0756	0.0714	0.0674
0.1799	0.1699	0.1604	0.1515	0.1430	0.1350
0.2706	0.2555	0.2413	0.2278	0.2151	0.2031
0.3622	0.3420	0.3229	0.3049	0.2879	0.2719
0.4550	0.4296	0.4056	0.3830	0.3617	0.3415
0.5493	0.5186	0.4897	0.4624	0.4366	0.4123
0.6453	0.6094	0.5754	0.5433	0.5130	0.4844
0.7436	0.7021	0.6629	0.6260	0.5911	0.5581
0.8442	0.7971	0.7527	0.7107	0.6711	0.6337
0.9477	0.8948	0.8449	0.7978	0.7533	0.7113

1.0542	0.9954	0.9399	0.8875	0.8380	0.7913
1.1643	1.0993	1.0380	0.9801	0.9255	0.8739
1.2781	1.2069	1.1396	1.0760	1.0160	0.9593
1.3962	1.3184	1.2448	1.1754	1.1099	1.0480
1.5189	1.4342	1.3542	1.2787	1.2074	1.1401
1.6466	1.5548	1.4681	1.3862	1.3089	1.2359
1.7797	1.6804	1.5867	1.4982	1.4147	1.3358
1.9187	1.8117	1.7106	1.6152	1.5252	1.4401
2.0640	1.9489	1.8402	1.7375	1.6406	1.5492
2.2160	2.0925	1.9758	1.8656	1.7615	1.6633
2.3754	2.2430	2.1179	1.9998	1.8882	1.7829
2.5426	2.4008	2.2669	2.1405	2.0212	1.9084
2.7182	2.5666	2.4235	2.2883	2.1607	2.0402
2.9028	2.7409	2.5880	2.4437	2.3074	2.1787
3.0968	2.9241	2.7611	2.6071	2.4617	2.3244
3.3011	3.1170	2.9432	2.7791	2.6241	2.4778
3.5163	3.3202	3.1351	2.9602	2.7951	2.6393
3.7431	3.5343	3.3372	3.1511	2.9754	2.8095
3.9821	3.7601	3.5504	3.3524	3.1654	2.9889
4.2343	3.9982	3.7752	3.5647	3.3659	3.1782
4.5005	4.2495	4.0125	3.7888	3.5775	3.3780
4.7815	4.5148	4.2630	4.0253	3.8008	3.5888
5.0782	4.7950	4.5276	4.2751	4.0367	3.8116
5.3916	5.0909	4.8070	4.5390	4.2858	4.0468
5.7228	5.4037	5.1023	4.8178	4.5491	4.2954
6.0729	5.7342	5.4144	5.1125	4.8274	4.5581
6.4429	6.0836	5.7443	5.4240	5.1215	4.8359
6.8342	6.4531	6.0932	5.7534	5.4325	5.1296
7.2480	6.8438	6.4621	6.1017	5.7614	5.4401
7.6856	7.2570	6.8523	6.4702	6.1093	5.7686
8.1486	7.6942	7.2651	6.8599	6.4774	6.1161
8.6384	8.1566	7.7018	7.2723	6.8667	6.4838
9.1566	8.6460	8.1638	7.7086	7.2787	6.8728
8.6460	9.1638	8.6528	8.1703	7.7146	7.2844
8.1638	8.6528	9.1703	8.6588	8.1760	7.7200
7.7086	8.1703	8.6588	9.1760	8.6642	8.1811
7.2787	7.7146	8.1760	8.6642	9.1811	8.6691
6.8728	7.2844	7.7200	8.1811	8.6691	9.1856

futuros, *lo cual se puede contrastar con las respectivas pruebas de hipótesis para probar la significancia o no de los coeficientes.*

Asì pues bajo H_0 obtenemos que el estadístico de Wald alcanza los $9.4237x10^{36}$, lo cual es mucho mayor al valor tabulado de una Chi-cuadrado (12.592) con 6 grados de libertad para un nivel de significancia del 5%.

Finalmente, podemos decir que se rechaza la hipótesis H_0 y concluìmos que los parámetros contribuyen significativamente a explicar las variaciones en el modelo de consumo.

Teniendo en cuenta lo anterior, procedemos a realizar las estimaciones de ***la variable dependiente ajustada****. Para ello, nos basaremos en los parámetros estimados mediante la siguiente ecuación:*

$$\hat{Z} = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\hat{\beta} + \left(Y - \hat{\mu}\right) \qquad \textbf{Ecuac IV.13}$$

Donde:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right) \text{ es una matriz (nxp)} \qquad \textbf{Ecuac IV.14}$$

En la Tabla VI, apreciamos las observaciones reales para el perìodo en estudio asì como sus correspondientes estimaciones, las mismas que se encuentran graficadas en la Figura N ° 2. De igual forma en la Tabla VII y en la Figura N° 3 nos atrevemos a realizar las estimaciones a corto, mediano y largo plazo, es decir desde Diciembre'98 a Noviembre del 2001.

Figura N° 2

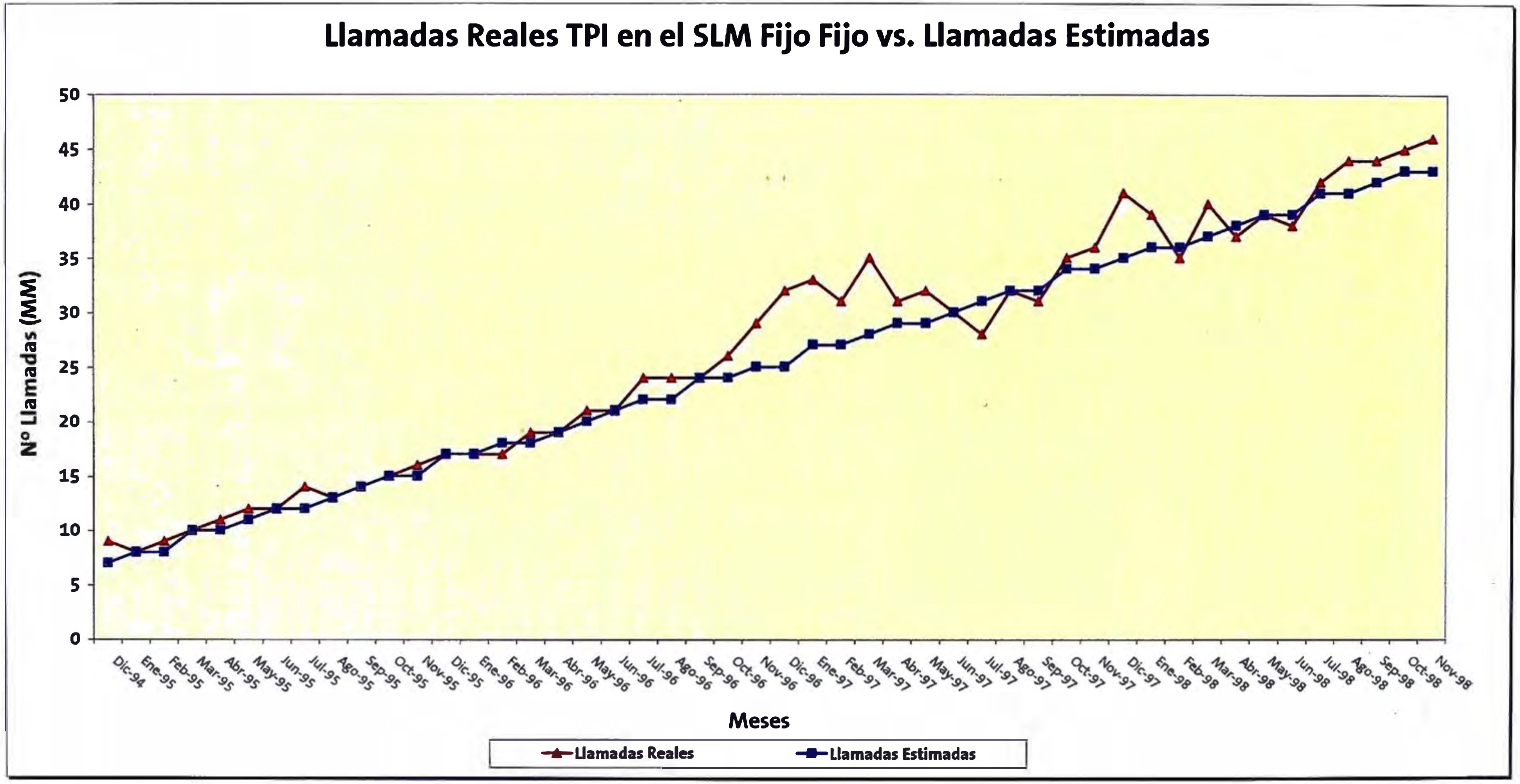

Llamadas Reales TPI en el SLM Fijo Fijo vs. Llamadas Estimadas
N° Llamadas (MM)
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Dic-94
Ene-95
Feb-95
Mar-95
Abr-95
May-95
Jun-95
Jul-95
Ago-95
Sep-95
Oct-95
Nov-95
Dic-95
Ene-96
Feb-96
Mar-96
Abr-96
May-96
Jun-96
Jul-96
Ago-96
Sep-96
Oct-96
Nov-96
Dic-96
Ene-97
Feb-97
Mar-97
Abr-97
May-97
Jun-97
Jul-97
Ago-97
Sep-97
Oct-97
Nov-97
Dic-97
Ene-98
Feb-98
Mar-98
Abr-98
May-98
Jun-98
Jul-98
Ago-98
Sep-98
Oct-98
Nov-98
Meses
Llamadas Reales
Llamadas Estimadas

TABLA VI
Consumo real de SLM (y_t) vs. los consumos estimados (z_t)

Tiempo	***Meses***	***Llamadas Reales (y_t) Miles Millón***	***Llamadas Estimadas (z_t) Miles Millón***
1	*Dic-94*	*9*	*7*
2	*Ene-95*	*8*	*8*
3	*Feb-95*	*9*	*8*
4	*Mar-95*	*10*	*10*
5	*Abr-95*	*11*	*10*
6	*May-95*	*12*	*11*
7	*Jun-95*	*12*	*12*
8	*Jul-95*	*14*	*12*
9	*Ago-95*	*13*	*13*
10	*Sep-95*	*14*	*14*
11	*Oct-95*	*15*	*15*
12	*Nov-95*	*16*	*15*
13	*Dic-95*	*17*	*17*
14	*Ene-96*	*17*	*17*
15	*Feb-96*	*17*	*18*
16	*Mar-96*	*19*	*18*
17	*Abr-96*	*19*	*19*
18	*May-96*	*21*	*20*
19	*Jun-96*	*21*	*21*
20	*Jul-96*	*24*	*22*
21	*Ago-96*	*24*	*22*
22	*Sep-96*	*24*	*24*
23	*Oct-96*	*26*	*24*
24	*Nov-96*	*29*	*25*
25	*Dic-96*	*32*	*25*
26	*Ene-97*	*33*	*27*
27	*Feb-97*	*31*	*27*
28	*Mar-97*	*35*	*28*
29	*Abr-97*	*31*	*29*
30	*May-97*	*32*	*29*
31	*Jun-97*	*30*	*30*
32	*Jul-97*	*28*	*31*
33	*Ago-97*	*32*	*32*
34	*Sep-97*	*31*	*32*
35	*Oct-97*	*35*	*34*
36	*Nov-97*	*36*	*34*
37	*Dic-97*	*41*	*35*

38	*Ene-98*	*39*	*36*
39	*Feb-98*	*35*	*36*
40	*Mar-98*	*40*	*37*
41	*Abr-98*	*37*	*38*
42	*May-98*	*39*	*39*
43	*Jun-98*	*38*	*39*
44	*Jul-98*	*42*	*41*
45	*Ago-98*	*44*	*41*
46	*Sep-98*	*44*	*42*
47	*Oct-98*	*45*	*43*
48	*Nov-98*	*46*	*43*

Figura Nº 3

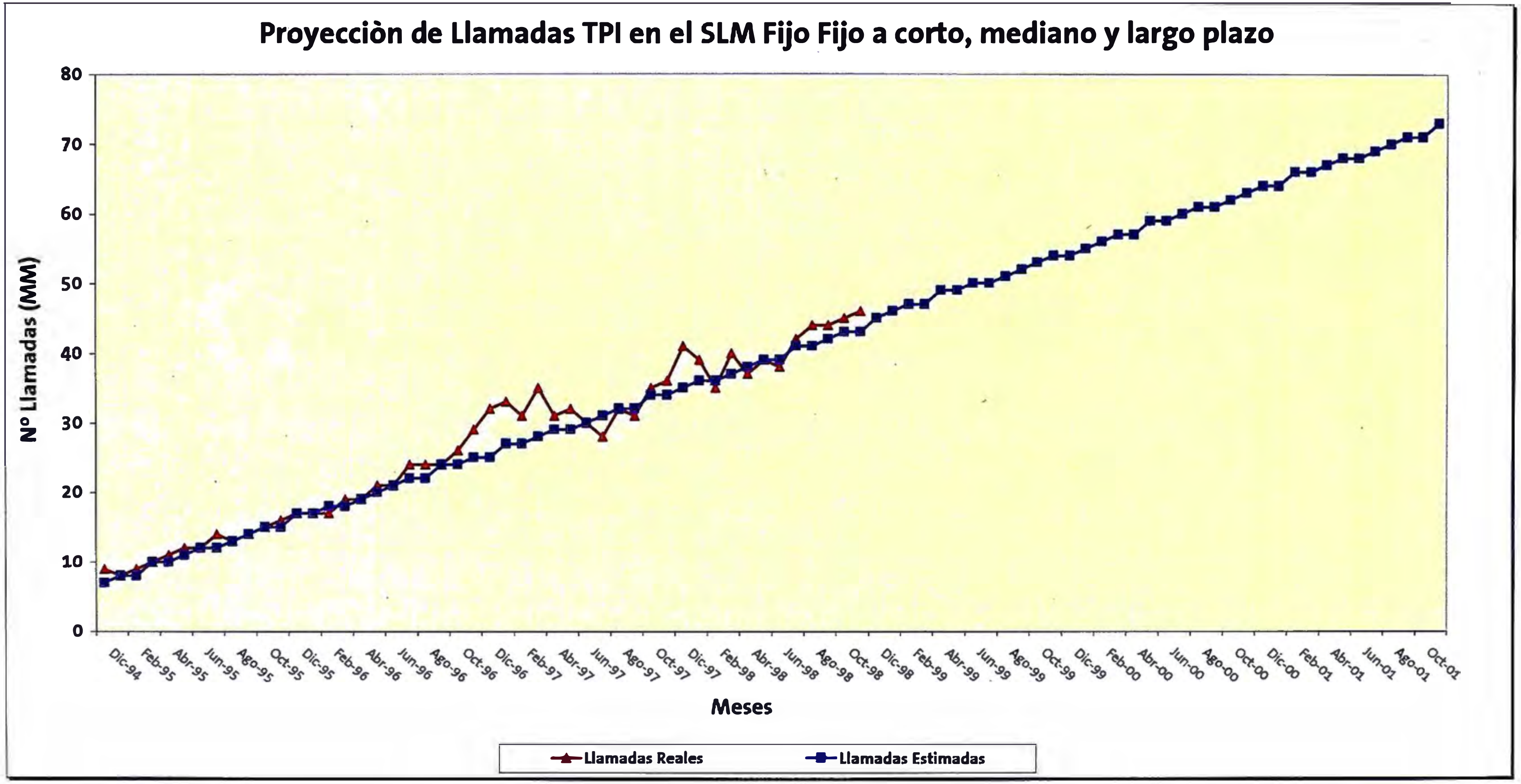

Proyecciòn de Llamadas TPI en el SLM Fijo Fijo a corto, mediano y largo plazo
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Nº Llamadas (MM)
Dic-94
Feb-95
Abr-95
Jun-95
Ago-95
Oct-95
Dic-95
Feb-96
Abr-96
Jun-96
Ago-96
Oct-96
Dic-96
Feb-97
Abr-97
Jun-97
Ago-97
Oct-97
Dic-97
Feb-98
Abr-98
Jun-98
Ago-98
Oct-98
Dic-98
Feb-99
Abr-99
Jun-99
Ago-99
Oct-99
Dic-99
Feb-00
Abr-00
Jun-00
Ago-00
Oct-00
Dic-00
Feb-01
Abr-01
Jun-01
Ago-01
Oct-01
Meses
Llamadas Reales
Llamadas Estimadas

TABLA VII

Proyecciones del consumo Telefónico Tpi en SLM a corto, mediano y largo plazo.

Meses	Constante	Tendencia	Componentes Estacionales (Sen,Cos)				Llamadas Estimadas Miles M.
			Cos(2π t/12)	Sen(2π t/12)	Cos(2π t/6)	Sen(2π t/6)	
Dic-98	1	0.0490	0.9650	-0.2623	0.8624	-0.5062	45
Ene-99	1	0.0500	-0.1103	-0.9939	-0.9757	0.2192	46
Feb-99	1	0.0510	-0.9990	-0.0444	0.9961	0.0886	47
Mar-99	1	0.0520	-0.1979	0.9802	-0.9216	-0.3880	47
Abr-99	1	0.0530	0.9380	0.3468	0.7595	0.6505	49
May-99	1	0.0540	0.4873	-0.8732	-0.5251	-0.8510	49
Jun-99	1	0.0550	-0.7876	-0.6162	0.2407	0.9706	50
Jul-99	1	0.0560	-0.7303	0.6832	0.0666	-0.9978	50
Ago-99	1	0.0570	0.5623	0.8269	-0.3676	0.9300	51
Sep-99	1	0.0580	0.9038	-0.4280	0.6336	-0.7737	52
Oct-99	1	0.0590	-0.2835	-0.9590	-0.8392	0.5438	53
Nov-99	1	0.0600	-0.9912	0.1322	0.9650	-0.2621	54
Dic-99	1	0.0610	-0.0223	0.9998	-0.9990	-0.0445	54
Ene-00	1	0.0620	0.9844	0.1762	0.9379	0.3469	55
Feb-00	1	0.0630	0.3260	-0.9454	-0.7875	-0.6163	56
Mar-00	1	0.0640	-0.8838	-0.4679	0.5622	0.8270	57
Abr-00	1	0.0650	-0.5986	0.8010	-0.2833	-0.9590	57
May-00	1	0.0660	0.6991	0.7150	-0.0225	0.9997	59
Jun-00	1	0.0670	0.8143	-0.5805	0.3261	-0.9453	59
Jul-00	1	0.0680	-0.4479	-0.8941	-0.5987	0.8009	60
Ago-00	1	0.0690	-0.9525	0.3046	0.8144	-0.5803	61
Sep-00	1	0.0700	0.1541	0.9881	-0.9525	0.3045	61
Oct-00	1	0.0710	1.0000	0.0002	1.0000	0.0004	62
Nov-00	1	0.0720	0.1544	-0.9880	-0.9523	-0.3052	63
Dic-00	1	0.0730	-0.9524	-0.3050	0.8140	0.5809	64
Ene-01	1	0.0740	-0.4482	0.8939	-0.5982	-0.8014	64
Feb-01	1	0.0750	0.8141	0.5808	0.3254	0.9456	66
Mar-01	1	0.0760	0.6994	-0.7147	-0.0217	-0.9998	66
Abr-01	1	0.0770	-0.5983	-0.8013	-0.2840	0.9588	67
May-01	1	0.0780	-0.8840	0.4676	0.5628	-0.8266	68
Jun-01	1	0.0790	0.3256	0.9455	-0.7880	0.6157	68
Jul-01	1	0.0800	0.9844	-0.1759	0.9381	-0.3463	69
Ago-01	1	0.0810	-0.0219	-0.9998	-0.9990	0.0438	70
Sep-01	1	0.0820	-0.9912	-0.1326	0.9649	0.2628	71
Oct-01	1	0.0830	-0.2839	0.9589	-0.8388	-0.5444	71
Nov-01	1	0.0840	0.9036	0.4284	0.6330	0.7742	73

Para confirmar la adecuacidad del modelo procedemos a realizar el cálculo del estadístico de Bondad de ajuste de Pearson el mismo que asciende a 0.2585. Asimismo para un nivel de significancia del 5% con (48-6)=42 grados de libertad, vemos que el valor tabulado de la Chi-cuadrado asciende 58.11; el cual es mucho mayor que el estadístico calculado con los datos del modelo. En consecuencia, ***se acepta la hipótesis*** *nula que los datos muestrales se ajustan o provienen de la misma población y que las diferencias entre valor observado y estimado son sólo producto del azar.*

A continuación presentamos la estimación de los parámetros y errores estándares para los datos del consumo telefónico TPI, usando el modelo de parámetros conducidos con errores autorregresivos AR(1) y el modelo clásico Log Lineal

	Modelo de parámetros Conducidos		***Modelo clásico Log Lineal***	
Descripción	$\hat{\beta}$	***Error Estándar***	$\hat{\beta}$	***Error Estándar***
Intercepto	$0.0733x10^{5}$	$0.0093x10^{-9}$	$0.0595x10^{5}$	$0.0052x10^{-9}$
Tendencia	$7.7377x10^{5}$	$0.1986x10^{-9}$	$8.0108x10^{5}$	$0.1124x10^{-9}$
Cos(2πt/12)	-0.0010x10 5	$0.0001x10^{-9}$	$-0.0015x10^{5}$	$0.0001x10^{-9}$
Sen(2πt/12)	-0.0011x10 5	$0.0002x10^{-9}$	$-0.0013x10^{5}$	$0.0001x10^{-9}$
Cos(2πt/6)	0.0021x10 5	$0.0003x10^{-9}$	$0.0017x10^{5}$	$0.0003x10^{-9}$
Sen(2πt/6)	0.0031x10 5	$0.0001x10^{-9}$	$0.0032x10^{5}$	$0.0000x10^{-9}$

De los resultados anteriores se aprecia que los coeficientes estimados son muy cercanos y ambos métodos coinciden en que existe una tendencia creciente en el consumo telefónico que se mantendría para el corto, mediano y largo plazo. Sin embargo, es también notorio que el modelo de parámetros conducidos, expone una menor tendencia de crecimiento respecto al modelo Log Lineal.

De otro lado, se aprecia que el modelo de parámetros conducidos que toma en cuenta la autocorrelación posee errores estándares alrededor del 76% al 79% más grandes que los calculados por el modelo Log Lineal con observaciones independientes. En base a estos últimos resultados se puede concluir que los Estimadores producidos por el método de parámetros conducidos son menos eficientes que los calculados a partir de los modelos clásicos Log Lineales (Ver Figura N° 4).

Finalmente, la Figura N° 5 expone la distribución de los errores del consumo Telefónico real para el período en estudio respecto a sus correspondientes estimados, como es notorio se verifica que los errores son aleatorios oscilando alrededor de la unidad, lo cual evidencia que el modelo planteado capta o describe mejor el comportamiento de las llamadas telefónicas y que las diferencias entre el dato observado y estimado es consecuencia del azar. De igual manera en la Figura N° 6 y Figura N° 7 hemos graficado la Función de Autocorrelación Estimada y Función de Autocorrelación Parcial Estimada.

Figura Nº 4

Estimación de Llamadas TPI's para el SLM -País
Método de Parámetros Conducidos vs. Modelo Log Lineal

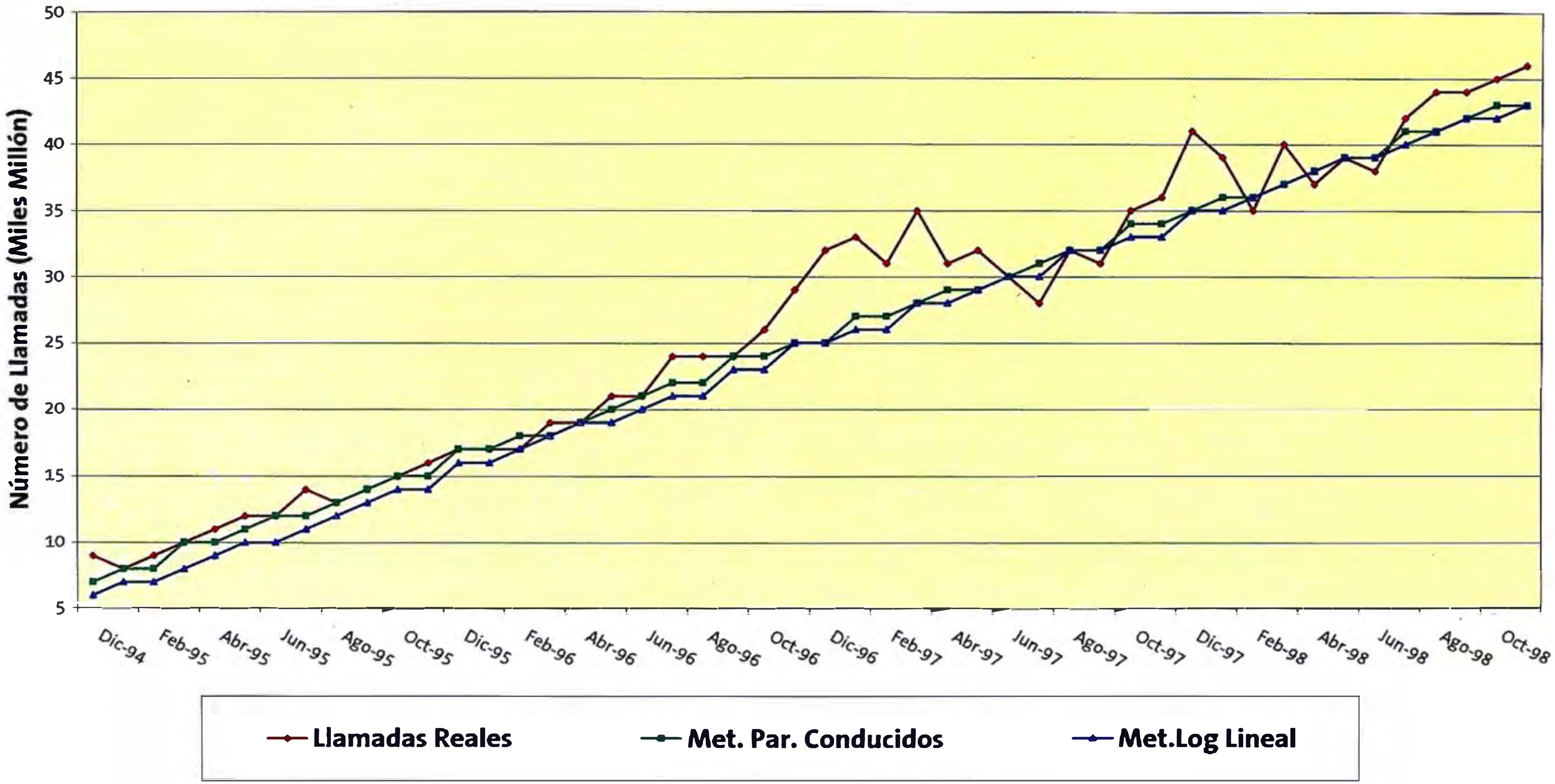


Figura Nº 5

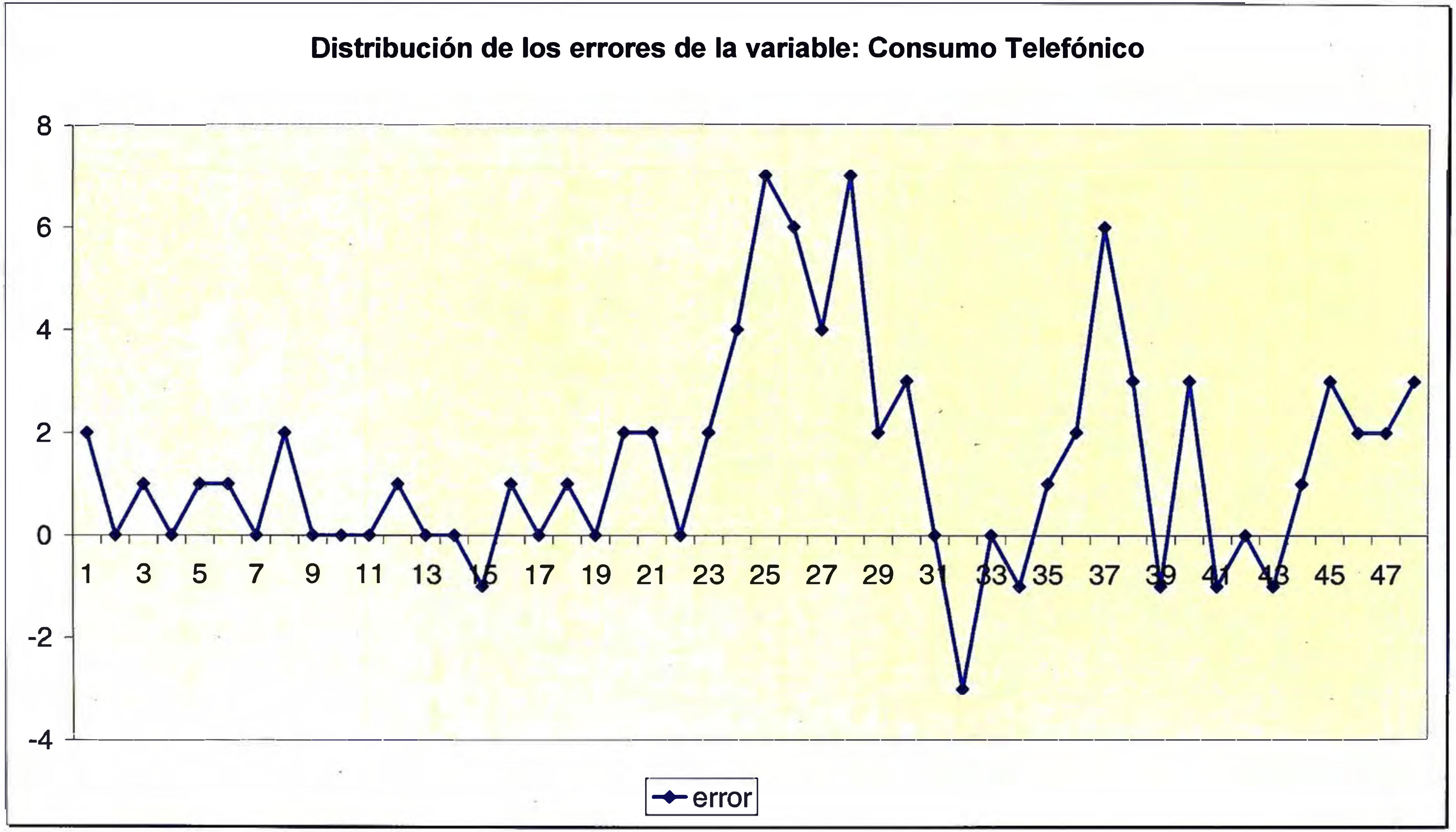

Distribución de los errores de la variable: Consumo Telefónico
8
6
4
2
0
-2
-4
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
31
33
35
37
39
41
43
45
47
error

Figura Nº 6

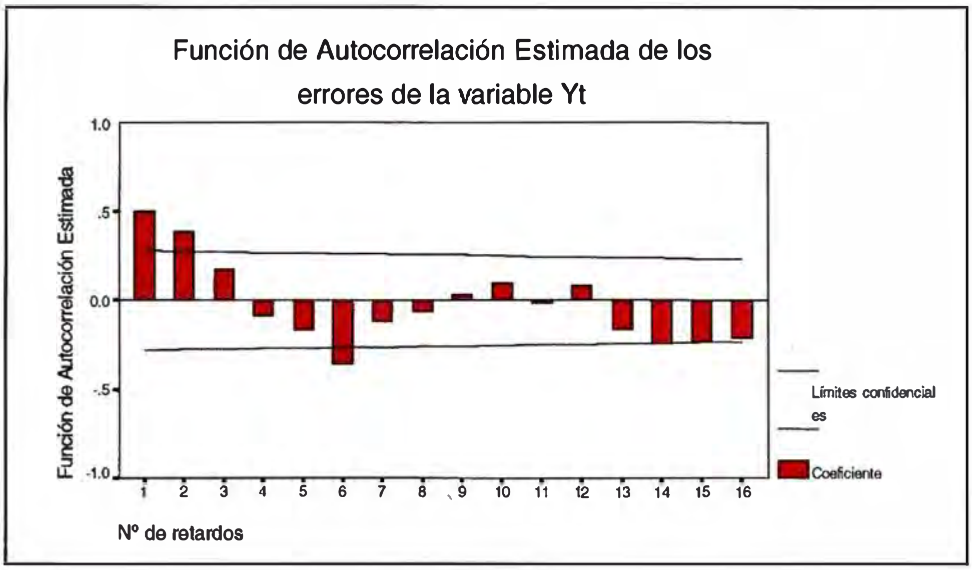
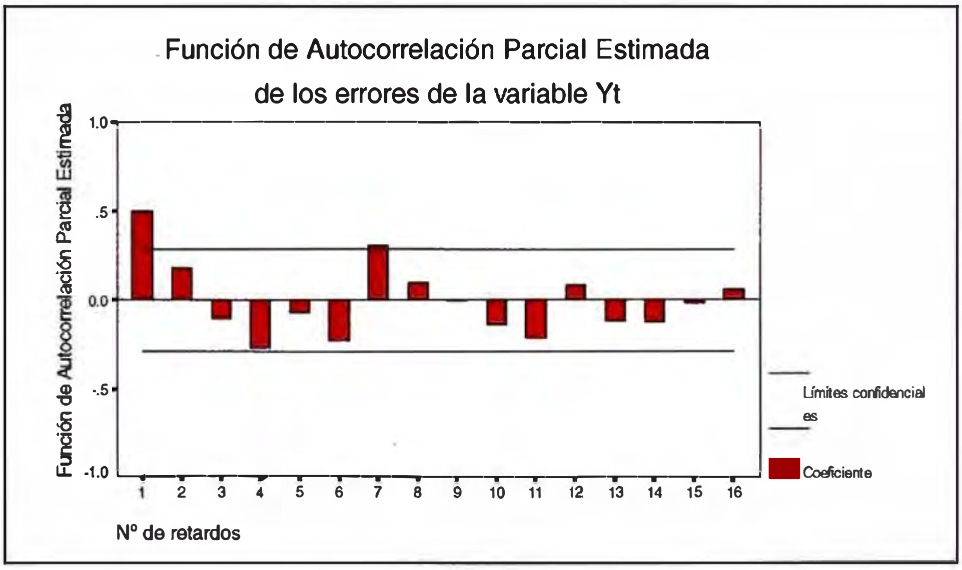


Figura Nº 7



Teniendo en cuenta el tamaño muestral de sólo 48 observaciones apreciamos que solamente son significativos estadísticamente los coeficientes de autocorrelación 1, 2 y 6; mientras que en el caso de los coeficientes de autocorrelación parcial estimados son significativos 1 y 7. Sin embargo, se esboza el parentesco de las funciones estimadas con las funciones teóricas. Así pues, en la Función de Autocorrelación Estimada se aprecia un cierto decrecimiento exponencial mientras que en la Función de Autocorrelación Parcial Estimada, se produce un corte brusco después del primer coeficiente, en consecuencia podemos concluir que los errores se distribuyen como un modelo AR(1), verificándose el supuesto inicial.

IV.C CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- ***DEL CONSUMO TELEFONICO***

1.-El modelo estadístico:

$$\boxed{\mu_t = \exp\left(x_{t1}\beta_0 + x_{t2}\beta_1 + x_{t3}\beta_2 + x_{t4}\beta_3 + x_{t5}\beta_4 + x_{t6}\beta_5\right); \quad \forall t = 1,...48}$$

con sus respectivos valores estimados es:

$$\hat{\mu}_t = \exp\left(10^5\left(0.0733x_{t1} + 7.7377x_{t2} - 0.0010x_{t3} - 0.0011x_{t4} + 0.0021x_{t5} + 0.0031x_{t6}\right)\right)$$

y la variable dependiente ajustada, es decir el consumo telefónico será:

$$\hat{Z} = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\hat{\beta} + \left(Y - \hat{\mu}\right)$$

Donde:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right) \text{ es una matriz (nxp)}$$

2.-Dado que la pendiente estimada ($7.7377x10^{5}$) es positiva se espera que las estimaciones del consumo telefónico para el corto y mediano plazo, expongan un crecimiento ascendente. (Ver Fig. Nº 2)

3.-Reemplazo de los modelos de estimación actuales por el modelo estadístico estimado, lo cual servirá de base para la toma correcta de decisiones reduciendo al mínimo los errores de estimación.

- ***DEL MODELO ESTADÍSTICO***

1.-Tanto el método de parámetros conducidos usando las funciones de cuasi verosimilitud y el método clásico Log Lineal, nos ofrecen estimadores de los parámetros muy parecidos. Sin embargo, los estimadores de cuasi verosimilitud ofrecen mayor variabilidad que los obtenidos por los modelos Log Lineales, lo cual los hace menos eficientes.

2.-El método de parámetros conducidos usando las funciones de cuasi verosimilitud rescata más adecuadamente el comportamiento de data real, pues toma en cuenta la correlación de la variable respuesta; mientras que el modelo Log Lineal asume valores independientes o incorrelacionados.

3.-El cálculo computacional de los estimadores de los parámetros bajo el modelo de parámetros conducidos, requiere de una aproximación, pues al contar con la autocorrelación hace más dificil el cálculo de la inversa de la matriz de Variancias Covariancias, sin embargo en el caso de los modelos Log Lineal se simplifica por la estructura diagonal de la matriz de Variancias Covariancias.

4.-Del análisis de los errores del consumo Telefónico (Ver Fig. Nº 5) se verifica que los errores siguen un comportamiento aleatorio oscilando alrededor de la unidad, lo cual evidencia que el modelo planteado capta o describe mejor el comportamiento de las llamadas telefónicas y que las diferencias entre el dato observado y estimado es consecuencia del azar.

- ***RECOMENDACIONES***

1.-En investigaciones futuras, la aplicación de la metodología de los modelos de parámetros conducidos requerirá encontrar una función de variancia conocida dependiente de la media de las observaciones.

2.-En algunas aplicaciones, cuando el tamaño de la muestra es pequeño, la estimación de la variancia por èl método de momentos es inadecuada, ya que ésta puede ser negativa y respecto a los coeficientes de autocorrelación puden caer fuera del intervalo [-1,1], con lo cual se hace necesario utilizar otro método de estimación diferente.

IV.D. ASESORAMIENTO

Teniendo en cuenta que el presente trabajo de Tesis estimación del consumo telefónico de los teléfonos públicos interiores, usando los métodos de cuasi verosimilitud, se requiere contar con el asesoramiento y colaboración de un experto con amplia experiencia en el área de los modelos lineales generalizados y su aplicación en series temporales además que tenga conocimiento del sector de las telecomunicaciones a nivel nacional o Internacional; de amplio criterio y con visión estratégica del sector. Por tal motivo propongo como asesor al Ing. Alipio Ordoñez Profesor Principal de la Facultad de Ingeniería Económica y Ciencias Sociales, de la escuela Profesional de Estadística de cuya experiencia estoy seguro servirá de soporte teórico para corregir y encaminar mis inquietudes.

IV.E. BIBLIOGRAFIA

1.- P.McCullagh y J.A.NELDER, F.R.S: Generalized Linear Models, (1,983).

2.- LUDWIG FAHRMEIR GERHARD Tutz: Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models (1,994).

3.- R.W.M. WEDDERBURN: Quasi – Likelihood Functions, Generalized Linear Modelsand the Gauss - Newton Method, Biometrika (1,974), 61, 3, 349.

4.- SCOTT L. ZEGER: A regresión Model for time Series of counts, Biometrika (1,988), 75, 4. 621 – 629.

5.- LYNWOOD A. JOHNSON Y DOUGLAS C. MONTGOMERY: Forecasting and time Series Analysis (1,976).

6.- PEDRO ALBERTO MORETTIN, Y CLELIA MARIA DE CASTRO TOLOI: Modelos para Previsa'o de Se'rie Temporai's, (1,981).

7.- EZEQUIEL URIEL: Análisis de Series Temporales Modelos Arima, (1,985).

8.- PETER Mc CUUAGH: Quasi – Likelihood Functions, the Annals of Statistics, (1,983), Vol.11, Nº 1, 59 – 67.

9.- N.R.DRAPER Y H. SHITH: Applied Regresión Analysis (1,966).

10.-KENDALL: The Aduanced Theory of Statistics.

11.-D.R. COX: Some Remarks on Overdispersion, Biometrika (1,983), 70, 1, 269 – 274.

12.-KUNG – YEE LIANG AND SCOTT L. ZEGER: Longitudinal Data Analisys Using Generalized Linear Models, Biometrika (1,986), 73, 1, 13 – 22.

13.-INEI: Encuesta nacional de hogares – 200 trimestre de 1,995, uso del servicio de telefonía a larga distancia.

14.-FUNDESCO: Comunicaciones y desarrollo (1,986).

ANEXO 1

PROGRAMAS EN MATLAB PARA EL CALCULO DE ESTIMADORES DEL MODELO CUASI VEROSIMIL

```
%El programa asume que se ingresan los datos de la matriz de constantes X
(nxp)
%el vector de variables respuesta Y (nx1) y los valores iniciales de beta
(px1)
%Estos valores se ingresarán a través de un archivo plano *.txt y serán
cargados
%en la memoria por el comando load.
%Este programa principal llamado Principl.mat trabaja asociado s otros
%subprogramas que serán requeridos en la ejecución del mismo.

global u sigma x b y vr Ralfa alfa1 Ralfainv w
d=input('Ingrese la precision : ');
n=length(y);
p=feval('f2',x,b);
%RR=' Rango de p'
rank(p);
u=feval('f1',x,b);
[q,sigma]=feval('re0',y);
diag(u);
z=p*b+(y-u);
vinv=inversa(y,b,u,sigma);
newb=inv(p'*vinv*p)*(p'*vinv*z);
delta=norm(newb-b);
p1=length(b);
count=0;
ddelta=norm(b);
dif=delta/delta;
while (dif >= d)
      b=newb;
      p=feval('f2',x,b);
      z=p*b+(y-u);
      [q,sigma]=feval('re0',y);
      newb=inv(p'*vinv*p)*(p'*vinv*z);
      delta=norm(newb-b);
      count=0;
      ddelta=norm(b);
      dif=delta/ddelta;
end
b=newb
autocorrey=correy(u,sigma,Ralfa)
vv=feval('vari',p,vinv,n)
%La variable respuesta ajustada será:
ZZ=(x*b)+inv(diag(u))*(y-u)
%Prueba de Hipòtesis b=0
WALD=b'*inv(vv)*b
```

```
%Función que estima la media del proceso para un modelo Log Lineal
function mus=f1(x,b)
mus=exp(x*b);


%Función que calcula las primeras derivadas
function p=f2(x,b)
 [n,m]=size(x);
f11=feval('f1',x,b);
d=diag(f11);
p=d*x;
%T=' Rango de p '
rank(p);
%Función que estima el parámetro de dispersión sigma
function [q,sigma]=re0(y)
global u sigma x b y q s sigma
n=length(y);
u=feval('f1',x,b);
end;
ss=0;
sc_mu=0;
for t=1:n
      ss=ss+(y(t)-u(t))^2-u(t);
      sc_mu=sc_mu+u(t)^2;
end;
sigma=(ss/sc_mu);


%Función que estima la matriz inversa de covariancias de Y
function v=inversa(y,b,u,sigma)
global vr Ralfa alfa1 Ralfainv
n=length(y);
p=length(b);
pause
media=0;
for t=1:n
    media=media+y(t);
end;
media1=media/n;
      s=0;
      for t=1:n-1
          s=s+(y(t)-media1)*(y(t+1)-media1);
      end;
        s=s/(n-1);
      s1=0;
      for t=1:n
          s1=s1+(y(t)-media1)*(y(t)-media1);
      end;
        s1=s1/n;
alfa1=s/s1;
k=n;
l=zeros(k);
for i=1:k
      l(i,i)=1;
end;
for i=2:k
```

```
      l(i,i-1)=-alfa1;
end;
ltrans=l';
Ralfainv=ltrans*l;
Ralfa=inv(Ralfainv);
dd=diag(u+sigma*u.^2);
vr=sqrt(dd)*Ralfa*sqrt(dd);
v=inv(vr);


%Esta función estima la variancia de los estimadores beta
function vv=vari(p,vinv,n)
vv=inv(p'*vinv*p/n);

%Función que estima la matriz de autocorrelaciones
function w=correy(u,sigma,Ralfa)
global u sigma w
n=length(u);
for i=1:n
      for j=1:n
            w(i,j)=Ralfa(i,j)/sqrt([1+(sigma*u(i))^(-1)]*[1+(sigma*u(j))^(-
1)]);
      end;
end;
            w(i,j)=w(j,i);
```