

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**Facultad de Ciencias  
Escuela Profesional de Física**



**Tesis para optar por el Título Profesional de:  
Licenciado en Física**

**Titulada:**

**HAMILTONIANO EFECTIVO PARA UN IÓN ATRAPADO  
INTERACTUANDO CON UN LÁSER EN EL INTERIOR DE  
UNA CAVIDAD QED**

**Presentada por  
Bach. Oscar Lennon Miculicich Egoavil**

**Asesor  
Dr. Eduardo Massoni Kamimoto**

**LIMA. PERÚ  
2011**

# Tabla de Contenidos

<b>Tabla de Contenidos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>ii</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Interacción de la radiación con la materia</b>	<b>4</b>
1.1. Cuantización del campo electromagnético . . . . .	4
1.1.1. Hamiltoniano Clásico . . . . .	5
1.1.2. Oscilador armónico, operadores bosónicos: . . . . .	9
1.1.3. Campo EM cuantizado, estados de Fock . . . . .	12
1.2. Interacción Átomo - Campo EM externo (Teoría Semiclásica) . . . . .	18
1.2.1. Hamiltoniano de interacción Átomo-Campo EM . . . . .	18
1.2.2. Aproximación dipolar y Hamiltoniano $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ . . . . .	20
1.2.3. Hamiltoniano $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ . . . . .	21
1.2.4. Dinámica de la interacción de un átomo de 2 niveles con un solo modo del campo EM . . . . .	22
1.3. Interacción Átomo-Campo (Teoría Cuántica) . . . . .	30
1.3.1. Hamiltoniano de interacción Átomo-Campo EM cuantizado . . . . .	30
1.3.2. Interacción de un átomo de 2 niveles con un solo modo del campo EM cuantizado . . . . .	33
<b>2. Ión atrapado interactuando con un láser en una cavidad QED</b>	<b>42</b>
2.1. Hamiltoniano del sistema físico . . . . .	43
2.2. Autovalores y autovectores . . . . .	49
2.3. Evolución del sistema . . . . .	51
2.4. Estados de Fock bimodales . . . . .	53
<b>3. Conclusiones</b>	<b>57</b>

<b>A. Eliminación adiabática</b>	<b>60</b>
A.1. Transformación a escala normal . . . . .	60
A.2. Condiciones para la eliminación adiabática . . . . .	61
<b>B. Hamiltoniano efectivo por método de la serie de Dyson</b>	<b>64</b>
B.1. Expansión en serie de Dyson . . . . .	64
B.2. Evolución efectiva del sistema . . . . .	65
<b>C. Autovalores y autovectores del Hamiltoniano <math>H_{ef}^{\pm}</math></b>	<b>68</b>
C.1. Autovalores y autovectores de un sistema de dos estados . . . . .	68
C.2. Autovalores de $H_{ef}^{\pm}$ . . . . .	70
<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>

# Resumen

En este trabajo se presenta el sistema físico formado por un ión atrapado que interactúa con un láser en el interior de una cavidad electrodinámica cuántica (QED), que alberga solo un modo del campo electromagnético (EM) cuantizado. El campo del láser es tratado de acuerdo a la teoría clásica, de tal forma que logra acoplar los estados atómicos del ión con sus grados de libertad de movimiento (estados del oscilador armónico).

El hamiltoniano del sistema incluye tres niveles atómicos interactuando con los dos campos EM's en una configuración tipo  $\Lambda$ , de tal forma que, el régimen que se establece para la dinámica del sistema permite eliminar uno de los tres niveles atómicos; esto es, se muestra que en cierto régimen el sistema se comporta, de manera efectiva, como un átomo de dos niveles acoplado a sus propios estados de movimiento y a un modo del campo EM en la cavidad QED.



# Introducción

Desde la primera demostración experimental, en 1984, del intercambio de fotones entre un átomo Rydberg (átomos con valores relativamente grandes del número cuántico principal que permiten un acoplamiento dipolar eléctrico relativamente fuerte) y un modo de una cavidad superconductora en el espectro de microondas [1], las técnicas experimentales con respecto a una cavidad QED han sido sustancialmente desarrolladas inclusive en el dominio óptico [2]. En este sentido, la preparación y control de estados cuánticos del sistema átomo-cavidad resulta cada vez más eficiente; así mismo, dicho desarrollo permite verificar y observar una variedad de fenómenos cuánticos atribuidos al "entanglement" entre el átomo y los fotones de la cavidad (en el límite de acoplamiento fuerte) [3], [4].

Por otro lado, el desarrollo de las técnicas de enfriamiento láser y de confinamiento de iones permiten diversas posibilidades en cuanto a la preparación, estudio y control de estados de movimiento no clásicos de los iones atrapados [5], [6], [7]. Como resultado y aplicación de la investigación en esta área, diversos trabajos muestran la posibilidad de almacenamiento y manipulación de información cuántica con el objetivo de desarrollar la computación cuántica [8], [4].

En cuanto a la dinámica de cada sistema, es bien conocido que el modelo de Jaynes-Cummings [9], para la el caso de la cavidad QED, tiene su contraparte generalizada para el sistema del ión atrapado dirigido por el láser; por ejemplo,

la dinámica vibracional de un ión de dos niveles atómicos interactuando con un láser puede ser descrita, bajo ciertas condiciones, por un modelo Jaynes-Cummings no lineal [10].

Con el espíritu de contribuir en el estudio de sistemas realizables que permitan generar estados no clásicos de la radiación y/o del movimiento, esta tesis presenta un sistema constituido por un ión atrapado que debe interactuar con un láser en el interior de una cavidad QED de alta calidad. En este caso, se consideran tres niveles atómicos del ión ( $g$ ,  $e$  y  $c$ ) en una configuración Raman (tipo  $\Lambda$ ), de tal forma que, dos de los niveles ( $g$  y  $c$ ) se encuentran acoplados fuertemente al modo del campo EM en la cavidad, y el tercer nivel ( $e$ ) se acopla con uno de los anteriores ( $c$ ) por medio del láser. Se muestra que, un acoplamiento efectivo entre los estados vibracionales del ión y el modo del campo EM en la cavidad es mediado por los grados de libertad de la estructura interna del ión. Con dicho fin, se utiliza técnicas estándar para obtener el Hamiltoniano efectivo del sistema y como resultado se muestra la posible eliminación adiabática de uno de los niveles atómicos del ión.

Sistemas como el propuesto exhiben la posibilidad de ser selectivos en su dinámica: esto es, al reducirse a un sistema de dos niveles, es posible preseleccionar solo un subespacio bidimensional para su evolución. Así mismo, dicha configuración brinda la posibilidad de generar estados de Fock bimodales por aplicación de un pulso  $\pi$  de Rabi.

La estructura de esta tesis intenta ser lo más sencilla posible, por tanto, en el primer capítulo se presenta el estudio y repaso del proceso de cuantización del campo EM de la radiación, así como su interacción con átomos tanto desde el punto de vista semiclásico (ondas) como del caso cuántico (fotones). El

**segundo capítulo es referido al planteamiento, estudio y análisis del sistema físico propuesto (motivo de la tesis). Las conclusiones se redactan en el tercer y último capítulo, y el apéndice se muestra como apoyo al segundo capítulo en cuanto al desarrollo de la tesis.**

## **Capítulo 1**

# **Interacción de la radiación con la materia**

Este primer capítulo presenta el tema principal de esta tesis: la interacción del campo electromagnético (EM) con la materia. Para ello, se inicia con el estudio de las propiedades del campo EM como resultado del proceso de cuantización del mismo [11], [12]. A continuación se presentan dos modelos para la interacción de un átomo con un campo EM: el modelo semiclásico y el cuántico. El primero corresponde al caso en el cual el campo EM es tratado de acuerdo a la teoría clásica, mientras que el segundo corresponde al campo EM cuantizado [13].

### **1.1. Cuantización del campo electromagnético**

El procedimiento de cuantización del campo EM se basa en la construcción adecuada de la función hamiltoniana del sistema, en términos de variables canónicas, para su posterior reinterpretación como observables que satisfacen reglas de conmutación estandar de la teoría cuántica.

### 1.1.1. Hamiltoniano Clásico

Con el objetivo de expresar el campo EM transversal como una expansión en términos de modos normales, se considera el caso del campo confinado en una cavidad de paredes perfectamente reflectantes, con lo cual, los modos normales son consecuencia de las condiciones de contorno. Luego, si las dimensiones de la cavidad son de orden mucho mayor que el correspondiente a la longitud de onda, las cantidades físicas pueden ser consideradas independientes del tamaño y forma de la cavidad.

Se considera el caso de condiciones de contorno periódicas, y suponiendo ondas planas transversales con vector de propagación  $\mathbf{k}$ , en el interior de una cavidad cúbica de arista  $L$ , se debe satisfacer:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{L})} \quad (1.1.1)$$

o de manera equivalente:

$$\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{L}(N_x\hat{\mathbf{e}}_x + N_y\hat{\mathbf{e}}_y + N_z\hat{\mathbf{e}}_z) \quad (1.1.2)$$

con  $N_i \in Z$ . El módulo del vector  $\mathbf{k}$  y la frecuencia  $\omega_k$ , están relacionados por  $k = \omega_k/c$ , donde  $c$  es la rapidez de propagación de las ondas EM en el vacío.

La terna  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$  define un modo de propagación, y una configuración arbitraria del campo EM corresponde a una combinación lineal de dichos modos. En un intervalo definido por  $\Delta N_x$ ,  $\Delta N_y$  y  $\Delta N_z$ , el número total de modos, está dado por:

$$\Delta N = \Delta N_x \Delta N_y \Delta N_z = \frac{V}{8\pi^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (1.1.3)$$

y considerando el caso que  $\lambda \ll L$ , la densidad de modos en el  $k$ -espacio se puede expresar como:

$$dN = \frac{V}{8\pi^3} k^2 \sin \sigma \, d\varphi \, d\sigma \, dk = \frac{V \omega_k^2}{8\pi^3 c^3} d\omega_k d\Omega \quad (1.1.4)$$

donde  $d\Omega$  es el elemento de ángulo sólido en la dirección de propagación. Al integrar (1.1.4) en todas las direcciones, se obtiene:

$$\text{Número de modos entre } w_k \text{ y } w_k + dw_k = dN(w_k) = \frac{V w_k^2}{2\pi^2 c^3} dw_k \quad (1.1.5)$$

Por otro lado, se sabe que cada modo posee dos polarizaciones independientes, por lo cual la expresión previa debe ser duplicada,  $2dN(w_k)$ .

De acuerdo a lo anterior, el campo EM se puede considerar como un número infinito de ondas planas propagándose en todas las direcciones posibles en el interior de una cavidad cúbica libre de pérdidas. En general, el potencial vectorial se puede expresar como una superposición de ondas planas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ A_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_k t)} + A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_k t)} \right] \quad \text{con } \lambda = 1, 2 \quad (1.1.6)$$

donde la suma sobre  $\mathbf{k}$  representa una suma sobre cada terna  $N_x, N_y, N_z$ , y la suma sobre  $\lambda$  corresponde a las dos polarizaciones independientes de la onda, que deben satisfacer las condiciones de ortogonalidad:

$$\epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}; \quad \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (1.1.7)$$

Las cantidades físicas,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , se pueden obtener a partir de (1.1.6):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} w_k \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ A_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_k t)} - A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_k t)} \right] \quad (1.1.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ A_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_k t)} - A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_k t)} \right] \quad (1.1.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}\lambda} w_k (\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}) \left[ A_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_k t)} - A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_k t)} \right] \quad (1.1.10)$$

Para construir la función hamiltoniana del campo EM en la cavidad, es necesario expresar la energía del campo  $W$ , en término de las variables canónicas. De acuerdo a la teoría clásica, la energía EM en la cavidad, se calcula como:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) dV \quad (1.1.11)$$

donde se reemplazará, las expresiones (1.1.8) y (1.1.10).

Para obtener la contribución de la componente eléctrica a la energía del campo, se tiene en cuenta que:

$$\int_V e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dV = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V \quad (1.1.12)$$

con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_V \epsilon_0 \mathbf{E}^2 dV = & 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}\lambda} w_k^2 A_{\mathbf{k}\lambda}(t) A_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) \\ & - \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}\lambda\lambda'} w_k^2 \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \bullet \epsilon_{-\mathbf{k}\lambda'} [A_{\mathbf{k}\lambda}(t) A_{-\mathbf{k}\lambda'}(t) + A_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) A_{-\mathbf{k}\lambda'}^*(t)] \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

donde:

$$A_{\mathbf{k}\lambda}(t) \equiv A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} \quad (1.1.14)$$

En el caso de la contribución magnética, se debe tener en cuenta la identidad vectorial:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})(\mathbf{B} \bullet \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{D})(\mathbf{B} \bullet \mathbf{C}) \quad (1.1.15)$$

para verificar, de acuerdo a las condiciones (1.1.7), que:

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}) \bullet (\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (1.1.16)$$

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}) \bullet (-\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon_{-\mathbf{k}\lambda'}) = -\epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \bullet \epsilon_{-\mathbf{k}\lambda'} \quad (1.1.17)$$

con lo cual se verifica que:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} dV = & 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}\lambda} w_k^2 A_{\mathbf{k}\lambda}(t) A_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) \\ & + \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}\lambda\lambda'} w_k^2 \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \bullet \epsilon_{-\mathbf{k}\lambda'} [A_{\mathbf{k}\lambda}(t) A_{-\mathbf{k}\lambda'}(t) + A_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) A_{-\mathbf{k}\lambda'}^*(t)] \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Al reemplazar las expresiones (1.1.13) y (1.1.18) en (1.1.11), se obtiene la energía del campo EM:

$$W = 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}\lambda} w_k^2 A_{\mathbf{k}\lambda}(t) A_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) = 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}\lambda} w_k^2 A_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mathbf{k}\lambda}^* \quad (1.1.19)$$

Ahora se introduce un nuevo conjunto de variables:

$$Q_{\mathbf{k}\lambda} \equiv \sqrt{\epsilon_0 V} [A_{\mathbf{k}\lambda} + A_{\mathbf{k}\lambda}^*] \quad (1.1.20)$$

$$P_{\mathbf{k}\lambda} \equiv -i w_k \sqrt{\epsilon_0 V} [A_{\mathbf{k}\lambda} - A_{\mathbf{k}\lambda}^*] \quad (1.1.21)$$

de tal forma que:

$$A_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2w_k \sqrt{\epsilon_0 V}} [w_k Q_{\mathbf{k}\lambda} + i P_{\mathbf{k}\lambda}] \quad (1.1.22)$$

$$A_{\mathbf{k}\lambda}^* = \frac{1}{2w_k \sqrt{\epsilon_0 V}} [w_k Q_{\mathbf{k}\lambda} - i P_{\mathbf{k}\lambda}] \quad (1.1.23)$$

y la energía del campo EM, se expresa como:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} (P_{\mathbf{k}\lambda}^2 + w_k^2 Q_{\mathbf{k}\lambda}^2) \quad (1.1.24)$$

Para verificar que las nuevas variables satisfacen las ecuaciones de Hamilton, se introduce la dependencia del tiempo según (1.1.14), y se calcula:

$$Q_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \sqrt{\epsilon_0 V} [A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i w_k t} + A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i w_k t}] \quad (1.1.25)$$

$$\partial_t Q_{\mathbf{k}\lambda}(t) = -i w_k \sqrt{\epsilon_0 V} [A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i w_k t} + A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i w_k t}] = P_{\mathbf{k}\lambda} \quad (1.1.26)$$

$$\partial_t P_{\mathbf{k}\lambda}(t) = -w_k^2 \sqrt{\epsilon_0 V} [A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i w_k t} + A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i w_k t}] = -w_k^2 Q_{\mathbf{k}\lambda}(t) \quad (1.1.27)$$

donde  $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ , además:

$$\frac{\partial W}{\partial Q_{\mathbf{k}\lambda}} = w_k^2 Q_{\mathbf{k}\lambda} = -\partial_t P_{\mathbf{k}\lambda}(t) \quad (1.1.28)$$

$$\frac{\partial W}{\partial P_{\mathbf{k}\lambda}} = P_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \partial_t Q_{\mathbf{k}\lambda}(t) \quad (1.1.29)$$

Finalmente, la energía EM escrita como en (1.1.24) satisface las ecuaciones de Hamilton (1.1.28) y (1.1.29); por ello,  $Q_{\mathbf{k}\lambda}$  y  $P_{\mathbf{k}\lambda}$  son variables canónicas y la función (1.1.24) corresponde a la función hamiltoniana del campo EM:

$$H \equiv \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} (P_{\mathbf{k}\lambda}^2 + w_k^2 Q_{\mathbf{k}\lambda}^2) \quad (1.1.30)$$



Como conclusión, se observa que la expresión (1.1.30) para  $H$ , es idéntica al Hamiltoniano de un conjunto de osciladores armónicos simples (no interactuantes); luego, cada modo del campo EM equivale formalmente a un solo oscilador armónico, lo cual facilita la transición de el campo EM clásico al campo cuantizado.

### 1.1.2. Oscilador armónico, operadores bosónicos:

De acuerdo al resultado de la sección previa, y con el objetivo de estudiar las propiedades del campo EM cuantizado, resulta conveniente realizar un resumen de las propiedades fundamentales de un oscilador armónico de acuerdo a la teoría cuántica.

Se considera el caso de un oscilador unidimensional de masa  $m$ , frecuencia  $\omega$ , desplazamiento  $q$ , y momentum  $p$  descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (1.1.31)$$

Al realizar un cambio de variables:

$$P^2 = \frac{p^2}{m} \quad \text{y} \quad Q^2 = m q^2 \quad (1.1.32)$$

el Hamiltoniano se expresa como:

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 Q^2) \quad (1.1.33)$$

Para obtener la forma cuantizada, de acuerdo a la mecánica cuántica, es necesario reinterpretar las variables canónicas,  $P$  y  $Q$ , como observables que obedecen la regla de conmutación:

$$[Q, P] = i\hbar \quad (1.1.34)$$

Por otro lado, se definen los operadores:

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega Q + iP) \quad \wedge \quad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega Q - iP) \quad (1.1.35)$$

o de manera equivalente:

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2w}}(a^\dagger + a) \quad \wedge \quad P = i\sqrt{\frac{\hbar w}{2}}(a^\dagger - a) \quad (1.1.36)$$

que satisfacen la regla de conmutación:

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar w} \{-iw[Q, P] + iw[P, Q]\} = 1 \quad (1.1.37)$$

lo cual es un resultado característico para partículas que obedecen la estadística de Bose-Einstein. En término de dichos operadores bosónicos, el Hamiltoniano del oscilador se expresa como:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\hbar w}{2}(a^\dagger - a)(a^\dagger - a) + \frac{\hbar w}{2}(a^\dagger + a)(a^\dagger + a) \right\} \\ H &= \frac{\hbar w}{4} [a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + a a^\dagger + a a - a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + a a^\dagger - a a] \\ H &= \frac{\hbar w}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger) = \hbar w(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \hbar w(N + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

donde se definió el operador número:

$$N \equiv a^\dagger a \quad (1.1.39)$$

Los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  son conocidos como operadores de aniquilación y creación, respectivamente. Como  $N$  es hermitico entonces sus valores propios  $n$  son reales, y corresponden a los vectores propios  $|n\rangle$ ; esto es:

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.1.40)$$

Teniendo en cuenta el álgebra de los operadores bosónicos (1.1.37), se demuestra que los autovalores el operador de número son solo valores enteros positivos ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ); por tanto, los autoestados (estados de Fock) y autovalores del Hamiltoniano son:

$$H |n\rangle = \hbar w(n + 1/2) |n\rangle; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.41)$$

Así mismo, se puede demostrar las siguientes propiedades para los operadores bosónicos:

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle; \quad n \geq 1 \quad (1.1.42)$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle; \quad n \geq 0 \quad (1.1.43)$$

$$a |0\rangle = 0 \quad (1.1.44)$$

De las expresiones previas, un estado de Fock  $|n\rangle$  puede ser generado del estado fundamental  $|0\rangle$ , por aplicación sucesiva del operador de creación:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (1.1.45)$$

También se pueden demostrar algunas identidades como:

$$aN^n = (N+1)^n a \quad (1.1.46)$$

$$a^\dagger N^n = (N-1)^n a^\dagger \quad (1.1.47)$$

$$[a, H] = \hbar\omega a \quad (1.1.48)$$

$$[a^\dagger, H] = -\hbar\omega a^\dagger \quad (1.1.49)$$

$$ae^{i\omega t N} = \sum_k a \frac{(i\omega t)^k}{k!} N^k = \sum_k \frac{(i\omega t)^k}{k!} (N+1)^k a = e^{i\omega t(N+1)} a \quad (1.1.50)$$

$$a^\dagger e^{i\omega t N} = \sum_k a^\dagger \frac{(i\omega t)^k}{k!} N^k = \sum_k \frac{(i\omega t)^k}{k!} (N-1)^k a^\dagger = e^{i\omega t(N-1)} a^\dagger \quad (1.1.51)$$

Finalmente, se sabe que los resultados físicos son independientes de la representación utilizada; por ello, en ciertos casos resulta conveniente cambiar de representación a los vectores de estado, operadores y observables sin modificar las propiedades y/o características del fenómeno.

En ocasiones se puede requerir expresar los operadores bosónicos en la representación de Heisenberg:

$$a_H(t) = e^{iHt/\hbar} a e^{-iHt/\hbar} \quad (1.1.52)$$

i.e. en el caso del oscilador:

$$a_H(t) = e^{i\omega t a^\dagger + i\omega t/2} a e^{-i\omega t a^\dagger - i\omega t/2} = e^{i\omega t a^\dagger} a e^{-i\omega t a^\dagger} \quad (1.1.53)$$

de acuerdo a (1.1.50), se obtiene:

$$a_H(t) = a e^{-i\omega t} \quad (1.1.54)$$

y su conjugado hermitico:

$$a_H^\dagger(t) = a^\dagger e^{i\omega t} \quad (1.1.55)$$

De manera similar, en la representación de interacción del Hamiltoniano:

$$H = H_o + V \quad (1.1.56)$$

donde  $H_o = \hbar\omega(N + 1/2)$ , se obtiene:

$$a_I(t) \equiv e^{iH_o t/\hbar} a e^{-iH_o t/\hbar} = e^{i\omega t a^\dagger} a e^{-i\omega t a^\dagger} = a e^{-i\omega t} \quad (1.1.57)$$

y su conjugado hermitico

$$a_I^\dagger(t) = a^\dagger e^{i\omega t} \quad (1.1.58)$$

### 1.1.3. Campo EM cuantizado, estados de Fock

Ahora se procede a cuantizar el campo EM en una cavidad de manera similar al caso del oscilador armónico en la sección previa. Para ello es necesario reinterpretar las variables canónicas,  $Q_{\mathbf{k}\lambda}$  y  $P_{\mathbf{k}\lambda}$ , de la función hamiltoniana (1.1.30) como operadores que satisfacen relaciones de conmutación similares a (1.1.34); se debe postular las siguientes reglas de conmutación:

$$[Q_{\mathbf{k}\lambda}, P_{\mathbf{k}'\lambda'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'} \quad (1.1.59)$$

$$[Q_{\mathbf{k}\lambda}, Q_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [P_{\mathbf{k}\lambda}, P_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0 \quad (1.1.60)$$

además, se definen los operadores de aniquilación y creación:

$$a_{\mathbf{k}\lambda} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar w_{\mathbf{k}}}}(w_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}\lambda} + iP_{\mathbf{k}\lambda}) \quad (1.1.61)$$

$$a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar w_{\mathbf{k}}}}(w_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}\lambda} - iP_{\mathbf{k}\lambda}) \quad (1.1.62)$$

o de manera equivalente

$$Q_{\mathbf{k}\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2w_{\mathbf{k}}}}(a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}\lambda}) \quad (1.1.63)$$

$$P_{\mathbf{k}\lambda} = i\sqrt{\frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2}}(a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} - a_{\mathbf{k}\lambda}) \quad (1.1.64)$$

Se verifica que se cumplen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'} \quad (1.1.65)$$

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^{\dagger}] = 0 \quad (1.1.66)$$

y de manera similar al caso del oscilador armónico, el Hamiltoniano para el campo EM en la cavidad, se expresa como:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\lambda} H_{\mathbf{k}\lambda} \equiv \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar w_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\lambda} + 1/2) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar w_{\mathbf{k}}(N_{\mathbf{k}\lambda} + 1/2) \quad (1.1.67)$$

donde se definió el operador número de fotones para el modo  $\mathbf{k}\lambda$  del campo EM:

$$N_{\mathbf{k}\lambda} \equiv a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\lambda} \quad (1.1.68)$$

La ecuación de autovalores satisface:

$$N_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = n_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle \quad (1.1.69)$$

$$H_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = \hbar w_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}\lambda} + 1/2) |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle \quad (1.1.70)$$

con:

$$\langle n_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}'\lambda'} \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'} \quad (1.1.71)$$

lo que define el estado número de fotones  $|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$ , cuyos valores propios son enteros positivos  $n_{\mathbf{k}\lambda} = 0, 1, 2, 3, \dots$

Por analogía con (1.1.42) , (1.1.43) y (1.1.44), se obtiene:

$$a_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}} |n_{\mathbf{k}\lambda} - 1\rangle \quad (1.1.72)$$

$$a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda} + 1} |n_{\mathbf{k}\lambda} + 1\rangle \quad (1.1.73)$$

$$a_{\mathbf{k}\lambda} |0\rangle = 0 \quad (1.1.74)$$

y como en (1.1.48) y (1.1.49), se cumple:

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, H] = \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda} \quad (1.1.75)$$

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, H] = -\hbar\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \quad (1.1.76)$$

De acuerdo a lo anterior,  $a_{\mathbf{k}\lambda}$  y  $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente, para un fotón con vector de propagación  $\mathbf{k}$ , polarización  $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}$ , momentum  $\hbar\mathbf{k}$ , frecuencia  $\omega_k$  y energía  $\hbar\omega_k$  (la frecuencia  $\omega_k$  solo depende de  $k = |\mathbf{k}|$ ). En el campo EM cuantizado  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  representa el número de fotones caracterizados por  $\mathbf{k}$  y  $\lambda$ .

Una descripción completa del campo EM cuantizado consiste en una enumeración del número de fotones  $n_{\mathbf{k}\lambda}$ . Puesto que cada modo es independiente, el Hamiltoniano total es la suma de Hamiltonianos parciales  $H_{\mathbf{k}\lambda}$ ; luego, el producto de todos los estados propios  $|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$  constituye un autoestado del Hamiltoniano total. Un estado multimodo del número de fotones del campo EM se expresa como:

$$|n_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\rangle |n_{\mathbf{k}_2\lambda_2}\rangle \dots |n_{\mathbf{k}_j\lambda_j}\rangle \dots \equiv |n_{\mathbf{k}_1\lambda_1}, n_{\mathbf{k}_2\lambda_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_j\lambda_j}, \dots\rangle \quad (1.1.77)$$

donde se puede simplificar la notación:

$$n_{\mathbf{k}_j\lambda_j} \equiv n_j \quad (1.1.78)$$

de tal forma que, el estado multimodo, se expresa como:

$$|n_1, n_2, n_3, \dots, n_j, \dots\rangle = |\{n_i\}\rangle = \prod_i |n_i\rangle \quad (1.1.79)$$

Un estado como el anterior, es autoestado del Hamiltoniano total:

$$H |\{n_i\}\rangle = \sum_j H_j \prod_i |n_i\rangle = \sum_j E_j \prod_i |n_i\rangle = E |\{n_i\}\rangle \quad (1.1.80)$$

donde:

$$E \equiv \sum_j E_j = \sum_j \hbar\omega_j(n_i + 1/2) \quad (1.1.81)$$

y satisface la condición de ortogonalidad:

$$\langle n_1, n_2, n_3, \dots, n_j, \dots | n'_1, n'_2, n'_3, \dots, n'_j, \dots \rangle = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \dots \delta_{n_j n'_j} \dots \quad (1.1.82)$$

Con la notación simplificada, para los operadores bosónicos:

$$a_j = a_{\mathbf{k}j} \quad \wedge \quad a_j^\dagger = a_{\mathbf{k}j}^\dagger \quad (1.1.83)$$

las relaciones (1.1.72), (1.1.73), y (1.1.74) se expresan como:

$$a_j |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\rangle = n_j^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots\rangle \quad (1.1.84)$$

$$a_j^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\rangle = (n_j + 1)^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots\rangle \quad (1.1.85)$$

$$a_j |n_1, n_2, \dots, 0_j, \dots\rangle = 0 \quad (1.1.86)$$

Se observa que, cuando un  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  es cero entonces el modo  $\mathbf{k}\lambda$  esta en su nivel más bajo de energía, y cuando  $n_{\mathbf{k}\lambda} = 0$  para todo  $\mathbf{k}$ , el campo EM se encuentra en su estado fundamental o estado vacío, denotado por:

$$|0\rangle \equiv |vac\rangle \equiv |0_1, 0_2, \dots, 0_j, \dots\rangle \quad (1.1.87)$$

y para dicho estado, se cumple:

$$a_j |0\rangle = 0 \quad \forall j \quad (1.1.88)$$

Por aplicación sucesiva de los operadores de creación, es posible generar un estado arbitrario del campo EM:

$$| \{n_i\} \rangle = \prod_i \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} | 0 \rangle \quad (1.1.89)$$

Finalmente, en este punto se puede calcular el valor medio de algunos observables del campo EM, por ejemplo, se calculará la componente eléctrica del campo. En mecánica cuántica el potencial vectorial clásico se reinterpreta como un operador vectorial; para obtener una expresión de dicho operador se reemplaza (1.1.63) y (1.1.64) en (1.1.22):

$$A_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2w_{\mathbf{k}}\sqrt{\epsilon_0 V}} \left[ w_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2w_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger + a_{\mathbf{k}\lambda}) + i \left( i \sqrt{\frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2}} \right) (a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - a_{\mathbf{k}\lambda}) \right]$$

de donde se obtiene:

$$A_{\mathbf{k}j} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 w_{\mathbf{k}} V}} a_{\mathbf{k}j} \quad (1.1.90)$$

y su conjugado hermitico:

$$A_{\mathbf{k}j}^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 w_{\mathbf{k}} V}} a_{\mathbf{k}j}^\dagger \quad (1.1.91)$$

los cuales se reemplazan en (1.1.6), para obtener el operador potencial vectorial:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 w_{\mathbf{k}} V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_{\mathbf{k}}t)} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - w_{\mathbf{k}}t)} \right] \quad (1.1.92)$$

que en la representación de Heisenberg se expresa como:

$$\mathbf{A}_H(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 w_{\mathbf{k}} V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ a_{\mathbf{k}\lambda}(t)_H e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t)_H e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad (1.1.93)$$

De manera similar, las componentes eléctrico y magnético del campo (1.1.8 y 1.1.9), se expresan como:

$$\mathbf{E}_H(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ a_{\mathbf{k}\lambda}(t)_H e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t)_H e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad (1.1.94)$$

$$\mathbf{B}_H(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} (\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}) \left[ a_{\mathbf{k}\lambda}(t)_H e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t)_H e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad (1.1.95)$$



y en la representación de Schrodinger, se tiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad (1.1.96)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} (\hat{\mathbf{k}} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}) \left[ a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad (1.1.97)$$

El valor esperado de la componente eléctrica, del campo, para un simple modo es:

$$\langle n | \mathbf{E}(\mathbf{r}) | n \rangle \rightarrow \langle n | a | n \rangle + \langle n | a^\dagger | n \rangle = 0 \quad (1.1.98)$$

El resultado (1.1.98) es válido para todos los modos; luego, el valor esperado de la componente eléctrica en algún estado multimodo  $| \{n_i\} \rangle$  es cero. Similarmente, se calcula el valor esperado de  $\mathbf{E}^2(\mathbf{r})$ :

$$\langle n | \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \langle n | aa^\dagger + a^\dagger a | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.1.99)$$

lo cual muestra que el valor esperado para la energía en un estado multimodo  $| \{n_i\} \rangle$  (inclusive el vacío) es infinita de acuerdo al modelo planteado; sin embargo, la teoría cuántica del campo EM es completamente satisfactoria en muchos casos (régimen de baja energía) de tal forma que singularidades de este tipo tienen pocas consecuencias y pueden ser ignoradas. En particular, esta aparente divergencia (energía infinita) se puede resolver al tomar una nueva referencia para la energía que no afecta el estudio del fenómeno, pues los cambios de energía son independientes de la referencia elegida.

## 1.2. Interacción Átomo - Campo EM externo (Teoría Semiclásica)

En esta sección se estudiará la teoría semiclassical de interacción de un átomo con un modo del campo EM. En este modelo, el átomo es tratado como un sistema cuántico de dos niveles, y el campo EM es tratado de acuerdo a la teoría clásica. La dinámica de este sistema es equivalente a la interacción de una partícula de spin 1/2 con un campo magnético que cambia en el tiempo. En este caso, las oscilaciones entre los niveles atómicos (oscilaciones de Rabi) se presentan de manera equivalente al caso de las oscilaciones entre los estados de spin de una partícula en el interior de una región con campo magnético oscilante.

### 1.2.1. Hamiltoniano de interacción Átomo-Campo EM

El Hamiltoniano de interacción entre un electrón, de carga  $e$  y masa  $m$ , con un campo EM externo, está dado por:

$$H = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + eU(\mathbf{r}, t) + V(r) \quad (1.2.1)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el operador momentum del electrón,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $U(\mathbf{r}, t)$  son los potenciales vectorial y escalar del campo EM, respectivamente, y  $V(r)$  es la energía potencial de interacción electrostática (usualmente el potencial coulombiano atómico).

### Invariancia local de calibre e interacción electrón-campo EM

En el caso de un electrón libre, la ecuación de Schrodinger se expresa como:

$$H\psi = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.2.2)$$

de tal forma que  $P(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$  corresponde a la densidad de probabilidad espacial, en el instante  $t$ .

Por otro lado, un cambio en el nivel de referencia para la energía potencial del sistema físico (SF) no debe mostrar diferencias en cuanto a las cantidades físicas del fenómeno. En la teoría cuántica esta situación es equivalente a la libertad de elegir una fase arbitraria global para la función de onda: por ejemplo, si  $\psi(\mathbf{r}, t)$  describe el estado del SF, entonces  $\psi_\chi(\mathbf{r}, t) \equiv e^{-i\chi t}\psi(\mathbf{r}, t)$  (con  $\chi$  constante) también describe el mismo estado:

$$P_\chi(\mathbf{r}, t) = |\psi_\chi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = P(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.3)$$

y satisface la ecuación de Schrodinger con un nivel de referencia de energía mayor en  $\hbar\chi$  unidades. Sin embargo, la situación difiere cuando la fase global cambia localmente, i.e. si la fase cambia con la posición y el tiempo:

$$\phi(\mathbf{r}, t) \equiv e^{i\chi(\mathbf{r}, t)}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.4)$$

se mantiene invariante la densidad de probabilidad, pero la nueva función ya no satisface la ecuación de Schrodinger. Luego, si se desea satisfacer la invariancia de la ecuación de Schrodinger, bajo una transformación de calibre local, el Hamiltoniano en la ecuación (1.2.2) debe ser modificado a:

$$H\psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla - i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + eU(\mathbf{r}, t) \right\} \psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (1.2.5)$$

donde  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $U(\mathbf{r}, t)$  son funciones (evaluadas en operadores) que se transforman según las siguientes reglas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar}{e}\nabla\chi(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.6)$$

$$U(\mathbf{r}, t) \rightarrow U(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{e}\frac{\partial\chi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.7)$$

De acuerdo a lo anterior, las funciones  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $U(\mathbf{r}, t)$  son identificadas como los potenciales vectorial y escalar del campo EM externo, respectivamente. El valor

de dichos potenciales depende de la elección de una referencia (dependen del calibre); sin embargo, las cantidades físicas:

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.2.9)$$

componentes eléctrica y magnética del campo EM, respectivamente, son independientes del calibre.

Como conclusión, el Hamiltoniano (1.2.5) que representa la interacción de un electrón con un campo EM, es derivado de la exigencia de mantener invariante la ecuación de Schrodinger bajo una transformación de calibre local (1.2.4), (1.2.6), y (1.2.7).

### 1.2.2. Aproximación dipolar y Hamiltoniano $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$

Ahora se considera el caso de un átomo, cuyo núcleo se encuentra centrado en  $\mathbf{r}_0$ , interactuando con el campo EM externo. El potencial vectorial del campo EM (onda EM), en el entorno del átomo, se puede expresar como  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t)$ : luego, si las dimensiones atómicas son de mucho menor orden que la longitud de onda asociada a la onda EM,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ , entonces dicho potencial se puede aproximar como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})} = \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} [1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots] \\ &\approx \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Con lo anterior, y en el calibre de radiación:

$$U(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.2.11)$$

la ecuación de Schrodinger se escribe como:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla - \frac{i e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \right]^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.12)$$

Con el objetivo de simplificar la ecuación previa, se realiza una transformación de calibre:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \exp \left[ -i \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \bullet \mathbf{r} \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.13)$$

de tal forma que los potenciales vectorial y escalar EM se transforman, de acuerdo a (1.2.6) y (1.2.7), como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) + \frac{\hbar}{e} \nabla \left[ -\frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \bullet \mathbf{r} \right] = 0 \quad (1.2.14)$$

$$U(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 - \frac{\hbar}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \bullet \mathbf{r} \right] = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} \bullet \mathbf{r} \quad (1.2.15)$$

y la ecuación de Schrodinger (1.2.12), se reduce a:

$$[H_o - e \mathbf{r} \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)] \phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \partial_t \phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.16)$$

donde  $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $H_o \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$  corresponde al Hamiltoniano del electrón en el átomo, y la componente eléctrica del campo EM esta dada por  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)$ .

Se concluye que (en la aproximación dipolar), la interacción entre un electrón de un átomo y el campo de una onda EM, se debe al acoplamiento entre el momento dipolar eléctrico atómico y la componente eléctrica del campo EM (en la ubicación del átomo).

### 1.2.3. Hamiltoniano $\mathbf{A} \bullet \mathbf{p}$

El Hamiltoniano previo (1.2.16) tiene un equivalente canónico en términos del momentum del electrón  $\mathbf{p}$ , y el potencial vectorial del campo  $\mathbf{A}$ . Para obtener dicha expresión, basta desarrollar el primer término del Hamiltoniano (1.2.1):

$$[\mathbf{p} - e\mathbf{A}]^2 = \mathbf{p}^2 - e\mathbf{p} \bullet \mathbf{A} - e\mathbf{A} \bullet \mathbf{p} + e^2 \mathbf{A}^2 = \mathbf{p}^2 - 2e\mathbf{A} \bullet \mathbf{p} + e^2 \mathbf{A}^2 \quad (1.2.17)$$

De acuerdo al calibre de radiación (1.2.11),  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \rightarrow (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) = 0$ , y en la aproximación dipolar, el Hamiltoniano (1.2.1) se expresa como:

$$H = H_o - \frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(r_0, t) + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2(r_0, t) \quad (1.2.18)$$

En cierto conjunto de fenómenos, el término  $e\mathbf{A}^2$  es de mucho menor orden que el término  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$  (límite de campo débil), con lo cual el hamiltoniano previo se reduce a:

$$H = H_o - \frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(r_0, t) \quad (1.2.19)$$

que, en la aproximación dipolar, debe predecir los mismos resultados en los fenómenos descritos por el Hamiltoniano de la ecuación (1.2.16). La equivalencia entre ambos Hamiltonianos se demuestra al considerar al átomo y al campo como un solo sistema dinámico cerrado, sobre el cual se realiza una transformación canónica adecuada tal como lo plantearon Power y Zienau [14].

#### **1.2.4. Dinámica de la interacción de un átomo de 2 niveles con un solo modo del campo EM**

En esta sección se estudia la dinámica del sistema constituido por un átomo interactuando con un láser monocromático. La frecuencia del láser se encuentra sintonizada con la diferencia energética entre dos niveles preseleccionados del átomo, de tal forma que, en la interacción las probabilidades de transición de dichos niveles con el resto de niveles atómicos es insignificante. En este caso, se presentan dos métodos para estudiar la evolución del sistema [13].

### Método de amplitud de probabilidad

De acuerdo a lo anterior, el Hamiltoniano del átomo de libre  $H_0$ , en el subespacio generado por los dos niveles  $|e\rangle$  (estado excitado) y  $|g\rangle$  (estado fundamental), se expresa (en notación de Dirac) como:

$$H_0 = \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| \quad (1.2.20)$$

el cual satisface la ecuación de autovalores:

$$H_0 |e\rangle = E_e |e\rangle \equiv \hbar\omega_e |e\rangle \quad (1.2.21)$$

$$H_0 |g\rangle = E_g |g\rangle \equiv \hbar\omega_g |g\rangle \quad (1.2.22)$$

Así, la función de onda para el átomo, en el instante  $t$ , se puede escribir como:

$$|\psi(t)\rangle = C_e(t) |e\rangle + C_g(t) |g\rangle \quad (1.2.23)$$

donde  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$  (autovectores de  $H_0$ ) satisfacen la ortogonalidad y completitud en el subespacio que generan.

La ecuación de Schrodinger para el sistema en estudio es:

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = [H_0 + H_1] |\psi(t)\rangle \quad (1.2.24)$$

donde  $H_1 \equiv -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$ , en acuerdo con (1.2.16), representa el término de interacción del átomo con el campo EM. En la notación de Dirac,  $H_1$  se escribe como:

$$\begin{aligned} H_1 &= (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) [-e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)] (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \\ H_1 &= -(u_{eg} |e\rangle\langle g| + u_{ge} |g\rangle\langle e|) E(t) \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

donde  $u_{eg} \equiv \langle e|e\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}|g\rangle$  es un elemento de matriz del momento dipolar eléctrico, y  $E(t)$  es la magnitud de la componente eléctrica del campo EM en las inmediaciones del átomo. En la aproximación dipolar, dicha componente, se puede expresar como:

$$E(t) = \mathcal{E} \cos \nu t \quad (1.2.26)$$

donde  $\mathcal{E}$  es la amplitud, y  $\nu = ck$  es la frecuencia del campo.

Al reemplazar (1.2.20), (1.2.25) y (1.2.23) en la ecuación (1.2.24), se tiene:

$$i\hbar\partial_t[C_e(t)|e\rangle + C_g(t)|g\rangle] = [\hbar w_e|e\rangle\langle e| + \hbar w_g|g\rangle\langle g| - u_{eg}|e\rangle\langle g| - u_{ge}|g\rangle\langle e|][C_e(t)|e\rangle - C_g(t)|g\rangle]$$

de donde las amplitudes de probabilidad deben satisfacer:

$$\partial_t C_e(t) = -i w_e C_e(t) + i \Omega_R e^{-i\phi} \cos \nu t C_g(t) \quad (1.2.27)$$

$$\partial_t C_g(t) = -i w_g C_g(t) + i \Omega_R e^{i\phi} \cos \nu t C_e(t) \quad (1.2.28)$$

donde se definió  $u_{eg} \equiv |u_{eg}| e^{-i\phi}$ , y la frecuencia de Rabi  $\Omega_R \equiv \frac{|u_{eg}| \mathcal{E}}{\hbar}$ .

Para resolver dichas ecuaciones, se ensaya el cambio de variables:

$$c_e(t) = C_e(t) e^{i w_e t} \quad (1.2.29)$$

$$c_g(t) = C_g(t) e^{i w_g t} \quad (1.2.30)$$

con lo que se obtiene, para las nuevas variables:

$$\partial_t c_e(t) = i \Omega_R e^{-i\phi} c_g(t) e^{i(w_e - w_g)t} \cos \nu t \quad (1.2.31)$$

$$\partial_t c_g(t) = i \Omega_R e^{i\phi} c_e(t) e^{-i(w_e - w_g)t} \cos \nu t \quad (1.2.32)$$

Luego, teniendo en cuenta que  $\cos \nu t = \frac{1}{2}(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t})$ , y debido a que las contribuciones de los términos contrarrotantes proporcionales a  $e^{\pm i[(w_e - w_g) + \nu]t}$  son en promedio insignificantes (aproximación de onda rotante), las ecuaciones previas se reducen a:

$$\partial_t c_e(t) = i \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} c_g(t) e^{i(w - \nu)t} \quad (1.2.33)$$

$$\partial_t c_g(t) = i \frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} c_e(t) e^{-i(w - \nu)t} \quad (1.2.34)$$

donde  $w \equiv w_e - w_g$ . La solución del sistema previo es bien conocida, i.e. se deriva respecto del tiempo la ecuación (1.2.33) y al reemplazar (1.2.34), se obtiene:

$$\partial_t^2 c_e - i\Delta \partial_t c_e + \frac{|\Omega_R|^2}{4} c_e = 0 \quad (1.2.35)$$



con  $\Delta \equiv w - \nu$ . La solución general de la ecuación anterior es:

$$c_e(t) = \left( a_1 e^{i\Omega t/2} + a_2 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{i\Delta t/2} \quad (1.2.36)$$

donde  $\Omega \equiv \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}$ , y  $a_1, a_2$  son constantes de integración. De manera análoga se obtiene:

$$c_g(t) = \left( b_1 e^{i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2} \right) e^{-i\Delta t/2} \quad (1.2.37)$$

Las constantes de integración se determinan a partir de las condiciones iniciales del sistema:

$$a_1 = \frac{1}{2\Omega} \left[ (\Omega - \Delta)c_e(0) + \Omega_R e^{-i\phi} c_g(0) \right] \quad (1.2.38)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\Omega} \left[ (\Omega + \Delta)c_e(0) - \Omega_R e^{-i\phi} c_g(0) \right] \quad (1.2.39)$$

$$b_1 = \frac{1}{2\Omega} \left[ (\Omega + \Delta)c_g(0) + \Omega_R e^{i\phi} c_e(0) \right] \quad (1.2.40)$$

$$b_2 = \frac{1}{2\Omega} \left[ (\Omega - \Delta)c_g(0) - \Omega_R e^{i\phi} c_e(0) \right] \quad (1.2.41)$$

Finalmente se obtiene:

$$c_e(t) = \left\{ c_e(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] + i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} c_g(0) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right\} e^{i\Delta t/2} \quad (1.2.42)$$

$$c_g(t) = \left\{ c_g(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] + i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi} c_e(0) \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right\} e^{-i\Delta t/2} \quad (1.2.43)$$

que satisfacen:

$$|c_e(t)|^2 + |c_g(t)|^2 = 1 \quad (1.2.44)$$

Ahora, para entender la dinámica del sistema se considera el caso particular de un átomo que inicialmente se encuentra en su estado excitado, es decir  $c_e(0) = 1$  por tanto  $c_g(0) = 0$ . Las probabilidades de encontrar al átomo en su estado excitado  $|e\rangle$  o en su estado fundamental  $|g\rangle$ , en el instante  $t$ , están dadas por  $|c_e(t)|^2$  y  $|c_g(t)|^2$ , respectivamente. En este caso, la inversión  $W(t) \equiv |c_e(t)|^2 - |c_g(t)|^2$  se expresa como:

$$W(t) = \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{\Delta^2 - \Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (1.2.45)$$

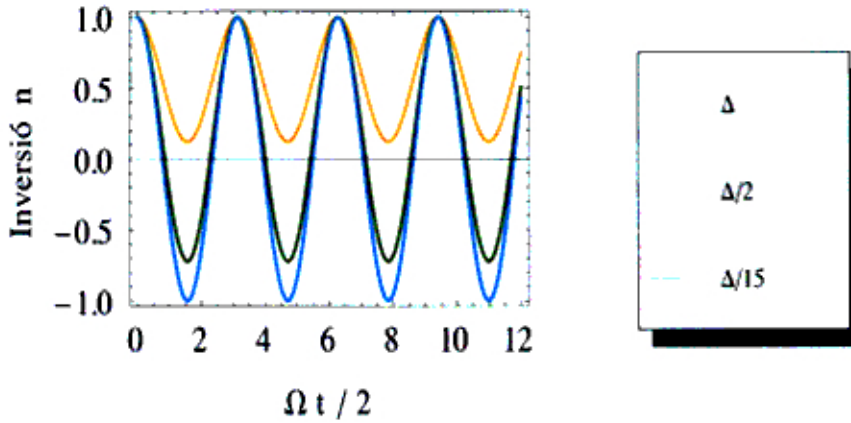


Figura 1.1: Inversión  $W(t)$  como función del tiempo. Se observa que en resonancia ( $\Delta \rightarrow 0$ ), para ciertos instantes de tiempo, es posible encontrar al átomo en su estado fundamental con probabilidad 1.

excitado al estado fundamental. En resonancia ( $w = \nu$ ) ocurre que  $\Delta = 0$  y  $\Omega = \Omega_R$ , con lo cual la inversión se reduce a:

$$W(t) = \cos(\Omega_R t) \quad (1.2.46)$$

de donde se observa que, en instantes  $t = n\pi/\Omega_R$  (con  $n$  impar), el átomo se encuentra con certeza en el estado fundamental.

Por otro lado, se puede calcular el momento dipolar atómico inducido debido al campo EM:

$$P(t) \equiv e \langle \psi(t) | \mathbf{r} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} | \psi(t) \rangle = c_e^* c_g u_{eg} + c_g^* c_e u_{ge} \quad (1.2.47)$$

que resulta:

$$P(t) = 2Re \left\{ \frac{i\Omega_R}{\Omega} u_{eg} \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{i\phi} e^{i\nu t} \right\} \quad (1.2.48)$$

el cual oscila con la frecuencia del campo EM incidente.

### Método de la representación de interacción

Un método alternativo para resolver el problema anterior, consiste en realizar una transformación unitaria del estado del sistema y de la ecuación de Schrodinger correspondiente; luego, se aplica el formalismo del operador de evolución, en la nueva representación, para hallar el estado del sistema en instantes posteriores.

Se considera el vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  como solución de la ecuación (1.2.24), que se transforma a la representación de interacción de acuerdo a:

$$|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t) |\psi(t)\rangle \quad (1.2.49)$$

donde

$$U_0(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \quad (1.2.50)$$

Con ello se cumple que:

$$\begin{aligned} \partial_t |\psi_I(t)\rangle &= [\partial_t U_0^\dagger] |\psi(t)\rangle + U_0^\dagger \partial_t |\psi(t)\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} U_0^\dagger H_0 |\psi(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} U_0^\dagger [H_0 + H_1] |\psi(t)\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} U_0^\dagger H_1 |\psi(t)\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} U_0^\dagger H_1 U_0 |\psi_I(t)\rangle \end{aligned} \quad (1.2.51)$$

que corresponde a la ecuación de Schrodinger:

$$i\hbar \partial_t |\psi_I(t)\rangle = \mathcal{V}(t) |\psi_I(t)\rangle \quad (1.2.52)$$

donde  $\mathcal{V}(t) \equiv U_0^\dagger(t) H_1 U_0(t)$ , es el Hamiltoniano en la representación de interacción.

Por analogía, un operador  $\mathcal{O}$  en la representación de Schrodinger, se transforma a la representación de interacción como:

$$\mathcal{O}_I = U_0^\dagger(t) \mathcal{O} U_0(t) \quad (1.2.53)$$

de tal forma que el valor medio es independiente de la representación:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O} \rangle &= \langle \psi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle = \langle \psi_I(t) | U_0^\dagger \mathcal{O} U_0 | \psi_I(t) \rangle \\ \langle \mathcal{O} \rangle &= \langle \psi_I(t) | \mathcal{O}_I(t) | \psi_I(t) \rangle\end{aligned}\quad (1.2.54)$$

La solución formal de (1.2.52), esta dada por:

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t)|\psi_I(0)\rangle \quad (1.2.55)$$

donde  $U_I(t)$  es el operador de evolución en la representación actual, y se puede expresar de acuerdo a la serie de Dyson:

$$U_I(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 \mathcal{V}(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \mathcal{V}(t_1) \mathcal{V}(t_2) + \dots \quad (1.2.56)$$

Ahora, para el sistema en estudio, se tiene:

$$U_0 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) = \exp(-i\omega_e t) |e\rangle \langle e| + \exp(-i\omega_g t) |g\rangle \langle g|$$

y el Hamiltoniano de interacción:

$$\mathcal{V}(t) = -\hbar\Omega_R U_0^\dagger(t) \left( e^{-i\phi} |e\rangle \langle g| + e^{i\phi} |g\rangle \langle e| \right) U_0(t) \cos \nu t \quad (1.2.57)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(t) &= -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \left[ e^{-i\phi} |e\rangle \langle g| e^{i\Delta t} + e^{i\phi} |g\rangle \langle e| e^{-i\Delta t} \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\phi} |e\rangle \langle g| e^{i(\omega+\nu)t} + e^{i\phi} |g\rangle \langle e| e^{-i(\omega+\nu)t} \right]\end{aligned}\quad (1.2.58)$$

donde  $\Delta \equiv \omega - \nu$ . Los términos proporcionales a  $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$ , como en el método previo, cambian muy rápidamente y sus promedios en escalas de tiempo mayores que  $1/\nu$  son cero. Dichos términos pueden ser ignorados en la aproximación de onda rotante, lo cual en resonancia ( $\Delta = 0$ ), reduce el Hamiltoniano previo a:

$$\mathcal{V}(t) = -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \left( e^{-i\phi} |e\rangle \langle g| + e^{i\phi} |g\rangle \langle e| \right) \quad (1.2.59)$$

Para construir el operador de evolución (1.2.56) se utiliza las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{2n}(t) &= \left(\frac{\hbar\Omega_R}{2}\right)^{2n} (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \\ \mathcal{V}^{2n+1}(t) &= \left(\frac{-\hbar\Omega_R}{2}\right)^{2n+1} (e^{-i\phi}|e\rangle\langle g| + e^{i\phi}|g\rangle\langle e|) \end{aligned} \quad (1.2.60)$$

con lo cual se obtiene:

$$U_I(t) = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) [|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|] + i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) [e^{-i\phi}|e\rangle\langle g| + e^{i\phi}|g\rangle\langle e|] \quad (1.2.61)$$

el operador de evolución del sistema en estudio. Por ejemplo, si el vector de estado inicial del sistema es  $|\psi(0)\rangle = |e\rangle$ , un instante posterior su vector de estado es:

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t) |e\rangle \quad (1.2.62)$$

$$|\psi_I(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) |e\rangle + i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) e^{i\phi} |g\rangle \quad (1.2.63)$$

y la inversión:

$$W(t) = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \cos(\Omega_R t) \quad (1.2.64)$$

con lo cual se verifica los resultados del método anterior.

### 1.3. Interacción Átomo-Campo (Teoría Cuántica)

En esta sección, a diferencia de la anterior, además de tratar al átomo como sistema cuántico se considera que el campo EM se comporta como un conjunto de partículas que satisfacen la estadística de Bose-Einstein; esto es, se trabaja con el campo EM cuantizado de acuerdo al apartado 1.1.3. Se obtiene el Hamiltoniano de interacción, de Jaynes y Cummings [9], a partir del cual se estudiarán las propiedades del sistema átomo-campo EM cuantizado, y se observarán las principales diferencias con el caso previo (modelo semiclásico).

#### 1.3.1. Hamiltoniano de interacción Átomo-Campo EM cuantizado

La interacción del campo EM cuantizado con un electrón de un átomo, puede ser descrita por el Hamiltoniano en la aproximación dipolar:

$$H = H_0 + H_F - er \bullet E \quad (1.3.1)$$

donde  $H_0$  corresponde al Hamiltoniano atómico, y  $H_F$  corresponde al Hamiltoniano del campo EM libre. En el capítulo 1 se mostró que el Hamiltoniano  $H_F$  está dado por:

$$H_F = \sum_k \hbar \nu_k (a_k^\dagger a_k + 1/2) \quad (1.3.2)$$

donde  $\nu_k$  corresponde a la frecuencia del modo  $k$ , y  $a_k$  ( $a_k^\dagger$ ) es el operador de aniquilación (creación) del campo EM.

Por otro lado, es conveniente expresar  $H_0$  y  $er$  en término de los operadores de transición:

$$\sigma_{ij} = |i\rangle \langle j| \quad (1.3.3)$$

donde  $\{|i\rangle\}$  representa el conjunto completo de autoestados de energía atómicos: es decir, se cumple:

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = 1 \quad \wedge \quad H_0 |i\rangle = \hbar\omega_i |i\rangle \quad \forall i \quad (1.3.4)$$

Con dichos operadores, se obtiene:

$$H_0 = \sum_i \hbar\omega_i |i\rangle \langle i| = \sum_i \hbar\omega_i \sigma_{ii} \quad (1.3.5)$$

$$e\mathbf{r} = \sum_{ij} e |i\rangle \langle i| \mathbf{r} |j\rangle \langle j| = \sum_{ij} \mathbf{u}_{ij} \sigma_{ij} \quad (1.3.6)$$

donde  $\mathbf{u}_{ij} \equiv \langle i| e\mathbf{r} |j\rangle$  es un elemento de matriz del momento dipolar eléctrico del átomo.

La componente eléctrica (operador) del campo EM cuantizado, en la ubicación del átomo, se puede expresar como:

$$\mathbf{E} = \sum_k \epsilon_k \mathcal{E}_k (a_k + a_k^\dagger) \quad (1.3.7)$$

con  $\mathcal{E}_k = \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2}$ . Ahora, se procede a reemplazar (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7) y (1.3.2) en (1.3.1), para obtener:

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_i \hbar\omega_i \sigma_{ii} + \hbar \sum_{ij} \sum_k g_k^{ij} \sigma_{ij} (a_k + a_k^\dagger) \quad (1.3.8)$$

donde  $g_k^{ij} \equiv -\frac{\mathbf{u}_{ij} \cdot \epsilon_k \mathcal{E}_k}{\hbar}$  se denomina constante de acoplamiento para la interacción átomo-campo EM. Se observa, en el Hamiltoniano previo, que la referencia de energía se toma en el vacío del campo EM. El espacio de estados del sistema es constituido por el producto tensorial de los autoestados del tomo libre y del campo EM externo:  $|i\rangle \otimes |\{n_k\}\rangle \equiv |i, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$ , donde el índice  $i$  corresponde a los estados atómicos, y  $n_k$  corresponde al número de fotones en el  $k$ -ésimo modo del campo EM.

Ahora se procede a estudiar el caso del átomo de 2 niveles. Si  $u_{eg} = u_{ge}$ , entonces  $g_k \equiv g_k^{eg} = g_k^{ge}$ , y el Hamiltoniano previo se reduce a:

$$H = \sum_k \hbar w_k a_k^\dagger a_k + (\hbar w_e \sigma_{ee} + \hbar w_g \sigma_{gg}) + \hbar \sum_k g_k (\sigma_{eg} + \sigma_{ge}) (a_k + a_k^\dagger) \quad (1.3.9)$$

Por otro lado, se definen los operadores:

$$\sigma_z \equiv \sigma_{ee} - \sigma_{gg} = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (1.3.10)$$

$$\sigma_+ \equiv \sigma_{eg} = |e\rangle\langle g| \quad (1.3.11)$$

$$\sigma_- \equiv \sigma_{ge} = |g\rangle\langle e| \quad (1.3.12)$$

que satisfacen el álgebra de las matrices de Pauli:

$$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z \quad (1.3.13)$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = 2\sigma_- \quad (1.3.14)$$

Así el Hamiltoniano (1.3.9), se expresa como:

$$H = \sum_k \hbar w_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \hbar w \sigma_z + \hbar \sum_k g_k (\sigma_+ + \sigma_-) (a_k + a_k^\dagger) \quad (1.3.15)$$

donde  $w \equiv w_e - w_g$ , y se redefine el cero de energía como el promedio  $\hbar(w_e + w_g)/2$ . La energía de interacción de este último Hamiltoniano, presenta cuatro términos:  $a_k \sigma_+$ ,  $a_k^\dagger \sigma_-$ ,  $a_k^\dagger \sigma_+$ , y  $a_k \sigma_-$ . Los dos primeros representan procesos en los cuales se conserva la energía, i.e. el átomo pasa del estado fundamental (excitado) al estado excitado (fundamental) y el campo aniquila (crea) un fotón de modo  $k$ , de acuerdo al término  $a_k \sigma_+$  ( $a_k^\dagger \sigma_-$ ). En tanto, los dos últimos términos representan procesos de cambio de energía (aumento para  $a_k^\dagger \sigma_+$  y pérdida para  $a_k \sigma_-$ ) del sistema átomo-campo EM.

Finalmente, en este contexto, la omisión de los términos no conservativos del Hamiltoniano (1.3.9) corresponde a la aproximación de onda rotante tratada en



la sección previa. El Hamiltoniano simplificado es:

$$H = \sum_k \hbar \nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + \hbar \sum_k g_k (\sigma_+ a_k + a_k^\dagger \sigma_-) \quad (1.3.16)$$

que representa la interacción de un átomo de 2 -niveles con un campo EM multimodal.

### 1.3.2. Interacción de un átomo de 2 niveles con un solo modo del campo EM cuantizado

En esta sección se estudia la interacción de un átomo con el campo EM de una cavidad QED optimizada para albergar un único modo del campo EM. Luego, la frecuencia del modo  $\nu$  es sintonizada con dos niveles preseleccionados del átomo, de tal forma que, la probabilidad de transición de dichos niveles con el resto de niveles de energía atómicos es insignificante.

De acuerdo a (1.3.16), el Hamiltoniano para este sistema se expresa como:

$$H = \hbar \nu a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + \hbar g (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-) \quad (1.3.17)$$

donde  $H_0 = \hbar \nu a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z$  corresponde a la energía del sistema libre de interacción, y  $H_1 = \hbar g (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)$  representa el término de interacción entre el átomo y el campo EM monomodo cuantizado. Así mismo, el espacio de estados se reduce al generado por  $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle / n = 0, 1, 2, \dots\}$ , donde  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$  corresponden a los estados atómicos, y  $|n\rangle$  es un autoestado del campo EM monomodo. De acuerdo a la sección anterior, dicho Hamiltoniano es resultado de la aproximación dipolar y de onda rotante.

Para estudiar la dinámica de este sistema es conveniente expresar el Hamiltoniano en la representación de interacción:

$$\mathcal{V} \equiv e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (1.3.18)$$

para lo cual se utilizará la identidad:

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (1.3.19)$$

en la transformación de los operadores de transición atómica y los operadores bosónicos a la representación de interacción:

$$\begin{aligned} e^{i\omega\sigma_z t/2} \sigma_+ e^{-i\omega\sigma_z t/2} &= \sigma_+ + \frac{i\omega t}{2} [\sigma_z, \sigma_+] + \frac{1}{2!} \left(\frac{i\omega t}{2}\right)^2 [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_+]] + \dots \\ &= \sigma_+ + i\omega t \sigma_+ + \frac{1}{2!} (i\omega t)^2 \sigma_+ + \dots \\ &= \sigma_+ e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

$$\begin{aligned} e^{i\nu t a^\dagger a} a e^{-i\nu t a^\dagger a} &= a + (i\nu t) [a^\dagger a, a] + \frac{1}{2!} (i\nu t) [a^\dagger a, [a^\dagger a, a]] + \dots \\ &= a + (-i\nu t) a + \frac{1}{2!} (-i\nu t)^2 a + \dots \\ &= a e^{-i\nu t} \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Con ello, el Hamiltoniano (1.3.18) se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \hbar g [\sigma_+ e^{i\omega t} a e^{-i\nu t} + a^\dagger e^{i\nu t} \sigma_- e^{-i\omega t}] \\ \mathcal{V} &= \hbar g (\sigma_+ a e^{i(\omega-\nu)t} + a^\dagger \sigma_- e^{-i(\omega-\nu)t}) \\ \mathcal{V} &= \hbar g (\sigma_+ a e^{i\Delta t} + a^\dagger \sigma_- e^{-i\Delta t}) \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

con  $\Delta \equiv \omega - \nu$ . Como se observa en el caso de resonancia, el Hamiltoniano en esta representación es independiente del tiempo, y por tanto solo se resolvería una ecuación de autovalores.

A continuación se resuelve la ecuación de Schrodinger para el Hamiltoniano (1.3.22) por algunos métodos convencionales.

### Método de amplitud de probabilidad

Para resolver la ecuación de Schrodinger con el Hamiltoniano (1.3.22), se considera como solución una combinación lineal de los estados  $|e, n\rangle$  y  $|g, n\rangle$ :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [c_{e,n}(t) |e, n\rangle + c_{g,n}(t) |g, n\rangle] \quad (1.3.23)$$

que al reemplazar en la ecuación de Schrodinger y simplificar, se obtiene:

$$ih \sum_n (\partial_t c_{e,n}(t) |e, n\rangle + \partial_t c_{g,n}(t) |g, n\rangle) = g \sum_{n=0} c_{g,n+1} \sqrt{n+1} |e, n\rangle e^{i\Delta t} + g \sum_{n=0} c_{e,n-1} \sqrt{n} |g, n\rangle e^{-i\Delta t}$$

Debido a la ortogonalidad de la base  $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$ , las amplitudes de probabilidad deben satisfacer las siguientes ecuaciones acopladas:

$$\partial_t c_{e,n} = -ig\sqrt{n+1} e^{i\Delta t} c_{g,n+1} \quad (1.3.24)$$

$$\partial_t c_{g,n+1} = -ig\sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} c_{e,n} \quad (1.3.25)$$

que resultan similares a las ecuaciones (1.2.33) y (1.2.34). Por analogía con el caso en mención, se obtiene la siguiente solución general:

$$c_{e,n}(t) = \left\{ c_{e,n}(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - 2ig \frac{\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{g,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{i\Delta t/2} \quad (1.3.26)$$

$$c_{g,n+1}(t) = \left\{ c_{g,n+1}(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - 2ig \frac{\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{e,n}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{-i\Delta t/2} \quad (1.3.27)$$

donde

$$\Omega_n \equiv (4g^2(n+1) + \Delta^2)^{1/2} \quad (1.3.28)$$

Para describir el comportamiento del sistema se considera el caso particular de un átomo inicialmente en el estado excitado; esto es,  $c_{e,n}(0) = c_n(0)$  y  $c_{g,n+1}(0) = 0$ . En dicho caso, las amplitudes de probabilidad se reducen a:

$$c_{e,n}(t) = c_n(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] e^{i\Delta t/2} \quad (1.3.29)$$

$$c_{g,n+1}(t) = -c_n(0) \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) e^{-i\Delta t/2} \quad (1.3.30)$$

Así  $|c_{e,n}(t)|^2$  representa la probabilidad de que, en el instante  $t$ , en el interior de la cavidad se encuentren  $n$  fotones y el átomo se encuentre en su estado excitado  $|e\rangle$ . De manera similar,  $|c_{g,n}(t)|^2$  representa la probabilidad de que, en el instante  $t$ , en la cavidad se encuentren  $n$  fotones y el átomo se encuentre en su estado fundamental  $|g\rangle$ . También se puede calcular la probabilidad de tener  $n$  fotones en la cavidad en el instante  $t$ :

$$p(n) \equiv |c_{e,n}(t)|^2 + |c_{g,n}(t)|^2 \quad (1.3.31)$$

$$p(n) = \rho_{nn}(0) \left[ \cos^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] + \frac{4g^2 n}{\Omega_{n+1}^2} \rho_{n-1,n-1}(0) \sin^2\left(\frac{\Omega_{n-1} t}{2}\right) \quad (1.3.32)$$

donde  $\rho_{nn}(0) \equiv |c_n(0)|^2$  es la probabilidad de tener  $n$  fotones en la cavidad en el instante inicial  $t = 0$ . Un ejemplo de estadística inicial corresponde a un estado coherente:

$$\rho_{nn}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \quad (1.3.33)$$

donde  $\langle n \rangle$  es el valor medio del operador  $N = a^\dagger a$ .

Al igual que en el caso semiclásico, otra cantidad importante es la inversión:

$$W(t) = \sum_n [|c_{e,n}(t)|^2 - |c_{g,n}(t)|^2] \quad (1.3.34)$$

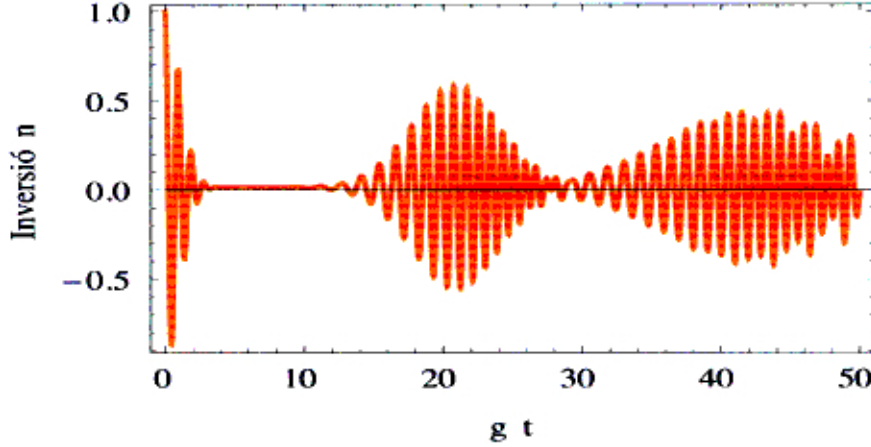


Figura 1.2: Inversión  $W(t)$  como función del tiempo. Se observa el fenómeno de "collapse and revival" de la inversión, una diferencia notable respecto del modelo semiclásico.

que se reduce:

$$W(t) = \sum_n \rho_{nn}(0) \left[ \frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right] \quad (1.3.35)$$

Como caso particular, de suma importancia, se observa que aún para un campo inicialmente vacío  $\rho_{nn}(0) = \delta_{n0}$ , las oscilaciones de Rabi son observadas:

$$W(t) = \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + 4g^2} + \frac{4g^2}{\Delta^2 + 4g^2} \cos \left[ (\Delta^2 + 4g^2)^{1/2} t \right] \quad (1.3.36)$$

El último resultado marca una diferencia clara con el modelo semiclásico, pues en el mismo un átomo inicialmente excitado no puede cambiar de estado en ausencia del campo EM; sin embargo, el modelo cuántico en discusión predice el decaimiento del átomo inclusive en el vacío del campo EM, mostrando así el caso más simple de la emisión espontánea. Existen otro conjunto de fenómenos de interacción átomo-campo que se predicen con el modelo cuántico del campo EM, los cuales no son compatibles con el modelo semiclásico, i.e. el "collapse and revival" de la inversión (ver figura 1.2) ocurre solo debido a la estructura granular del campo EM.

Así mismo, es posible mostrar de manera formal la equivalencia entre el modelo cuántico y semiclásico de un átomo interactuando con solo un modo del campo EM. Swain [15] mostró que, en la aproximación dipolar, los resultados cuánticos tienden a los correspondientes semiclásicos en el caso que el número de fotones tiende a infinito.

### Método del operador de Heisenberg

En este caso se utiliza un método algebraico para resolver la dinámica de la interacción entre un átomo de dos niveles y un modo del campo EM cuantizado. Se plantea el problema en la representación de Heisenberg y se resuelve las ecuaciones para los operadores  $a(t)$  y  $\sigma_{\pm}(t)$  y  $\sigma_z(t)$ :

$$\partial_t a = \frac{1}{i\hbar}[a, H] = -i\nu a - ig\sigma_- \quad (1.3.37)$$

$$\partial_t \sigma_- = \frac{1}{i\hbar}[\sigma_-, H] = -i\omega\sigma_- + ig\sigma_z a \quad (1.3.38)$$

$$\partial_t \sigma_z = \frac{1}{i\hbar}[\sigma_z, H] = 2ig(a^\dagger \sigma_- - \sigma_+ a) \quad (1.3.39)$$

Resulta conveniente definir las siguientes constantes de movimiento:

$$N \equiv a^\dagger a + \sigma_+ \sigma_- \quad (1.3.40)$$

$$C \equiv \frac{1}{2}\Delta\sigma_z + g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-) \quad (1.3.41)$$

que satisfacen  $[N, H] = [C, H] = 0$ .

Ahora, se deriva con respecto al tiempo (1.3.38):

$$\partial_t^2 \sigma_- = -i\omega\partial_t \sigma_- + ig(\partial_t \sigma_z a + \sigma_z \partial_t a)$$

y al reemplazar (1.3.37) y (1.3.39), se obtiene:

$$\partial_t^2 \sigma_- = -i\omega\partial_t \sigma_- - 2g^2(a^\dagger \sigma_- a - \sigma_+ a^2) + g\nu\sigma_z a - g^2\sigma_- \quad (1.3.42)$$

Se puede verificar que:

$$g^2(a^+\sigma_-a - \sigma_+a^2) = -i\left(\frac{\Delta}{2} + C\right)\partial_t\sigma_- + \left(\nu C - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}w\Delta\right)\sigma_- \quad (1.3.43)$$

$$g\sigma_+a = -i\partial_t\sigma_- + w\sigma_- \quad (1.3.44)$$

y al reemplazar en (1.3.42), se obtiene:

$$\partial_t^2\sigma_- + 2i(\nu - C)\partial_t\sigma_- + (2\nu C - \nu^2 + g^2)\sigma_- = 0 \quad (1.3.45)$$

De manera similar, se obtiene:

$$\partial_t^2a + 2i(\nu - C)\partial_t a + (2\nu C - \nu^2 + g^2)a = 0 \quad (1.3.46)$$

Ambas ecuaciones son equivalentes, y la solución general se expresa como:

$$\sigma_-(t) = e^{-i\nu t} e^{iCt} [Ae^{i\kappa t} + Be^{-i\kappa t}] \quad (1.3.47)$$

$$a(t) = e^{-i\nu t} e^{iCt} [Ee^{i\kappa t} + Fe^{-i\kappa t}] \quad (1.3.48)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $E$ , y  $F$  son operadores que se determinan al tener en cuenta las ecuaciones (1.3.37), (1.3.38), y (1.3.39), y con "condiciones iniciales" para  $\sigma_-$  y  $a$ .

Se obtiene:

$$\sigma_-(t) = e^{-i\nu t} e^{iCt} \left[ \left( \cos(\kappa t) + iC \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} \right) \sigma_-(0) - ig \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} a(0) \right] \quad (1.3.49)$$

$$a(t) = e^{-i\nu t} e^{iCt} \left[ \left( \cos(\kappa t) - iC \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} \right) a(0) - ig \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} \sigma_-(0) \right] \quad (1.3.50)$$

donde  $\kappa$  es un operador constante,  $\kappa = \left[ \frac{\Delta^2}{4} + g^2(N+1) \right]^{1/2}$ , que satisface  $[C, \kappa] = 0$ .

A partir de las expresiones (1.3.49) y (1.3.50) se pueden obtener las cantidades físicas de interés, i.e. la inversión en el caso que el estado inicial corresponde al átomo excitado  $|e\rangle$ , y el campo EM en estado coherente  $|\alpha\rangle$ :

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle e, \alpha | \sigma_z(t) | e, \alpha \rangle \\ &= 2 \langle e, \alpha | \sigma_+(t) \sigma_-(t) | e, \alpha \rangle - 1 \end{aligned}$$

### Método del operador de evolución

Como se realizó en el caso semiclásico, también es posible resolver la ecuación de Schrodinger de manera formal por medio del operador de evolución. Para mostrar el método se considera el caso resonante ( $\Delta = 0$ ) para el Hamiltoniano (1.3.22), con lo cual el operador de evolución del sistema en la representación de interacción es:

$$U(t) = \exp(-i\mathcal{V}t/\hbar) \quad (1.3.51)$$

donde

$$\mathcal{V} = \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-) \quad (1.3.52)$$

Para expandir el operador de evolución es necesario utilizar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)^2 &= \sigma_+ a \sigma_+ a + \sigma_+ a a^\dagger \sigma_- + a^\dagger \sigma_- \sigma_+ a + a^\dagger \sigma_- a^\dagger \sigma_- \\ &= a a^\dagger \sigma_+ \sigma_- + a^\dagger a \sigma_- \sigma_+ \\ (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)^2 &= a a^\dagger |e\rangle \langle e| + a^\dagger a |g\rangle \langle g| \end{aligned} \quad (1.3.53)$$

que por inducción implica:

$$(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)^{2k} = (a a^\dagger)^k |e\rangle \langle e| + (a^\dagger a)^k |g\rangle \langle g| \quad (1.3.54)$$

$$(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)^{2k+1} = (a a^\dagger)^k a |e\rangle \langle g| + a^\dagger (a a^\dagger)^k |g\rangle \langle e| \quad (1.3.55)$$



Con esto, el operador de evolución se expresa como:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k+1}}{(2k+1)!} (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)^{2k+1} \\
 U(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} (aa^\dagger)^k |e\rangle \langle e| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} (a^\dagger a)^k |g\rangle \langle g| \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k+1}}{(2k+1)!} (aa^\dagger)^k a |e\rangle \langle g| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k+1}}{(2k+1)!} a^\dagger (aa^\dagger)^k |g\rangle \langle e| \\
 U(t) &= \cos(gt\sqrt{a^\dagger a + 1}) |e\rangle \langle e| + \cos(gt\sqrt{a^\dagger a}) |g\rangle \langle g| \\
 &- i \frac{\sin(gt\sqrt{a^\dagger a + 1})}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} a |e\rangle \langle g| - ia^\dagger \frac{\sin(gt\sqrt{a^\dagger a + 1})}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} |g\rangle \langle e| \quad (1.3.56)
 \end{aligned}$$

Luego, el estado del sistema en el instante  $t$ , se calcula como:

$$|\psi_I(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \quad (1.3.57)$$

Por ejemplo, si  $|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) |e, n\rangle$ , el estado del sistema en el instante  $t$ , es descrito por:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) [\cos(gt\sqrt{n+1}) |e, n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n+1}) |g, n+1\rangle] \quad (1.3.58)$$

que equivale a (1.3.29) y (1.3.30) en el caso resonante ( $\Delta = 0$ ), con  $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$ .

## Capítulo 2

# Ión atrapado interactuando con un láser en una cavidad QED

En este capítulo se propone un sistema físico formado por un ión interactuando con dos campos electromagnéticos, de tal forma que, la estructura interna del ión pueda acoplarse -en cierto régimen- a sus grados de libertad de movimiento y a un campo cuantizado en el interior de una cavidad QED.

Como resultado se obtiene el Hamiltoniano efectivo, para la dinámica del sistema, por eliminación adiabática de uno de los niveles atómicos del ión. Así mismo, dicho Hamiltoniano puede ser diagonalizado de manera exacta, por tanto, la evolución del sistema queda completamente determinada de acuerdo a la teoría cuántica. Como aplicación se muestra la posibilidad de generar estados constituidos por un número fijo de fotones en la cavidad y un número fijo de fonones asociados al estado de movimiento del ión; ello a partir de una distribución estadística arbitraria y por medio de una medición oportuna sobre los estados asociados a la estructura interna del ión.

## 2.1. Hamiltoniano del sistema físico

El sistema físico (SF) consiste en un ión atrapado interactuando con dos campos electromagnéticos externos. El primero de ellos corresponde al campo asociado a un láser (caso clásico); mientras que el segundo es un modo del campo electromagnético (caso cuántico) en una cavidad QED de alta calidad. Con el objetivo de aplicar el formalismo Hamiltoniano, se asume que la frecuencia de la trampa es mucho mayor que la tasa de decaimiento atómico (límite de confinamiento fuerte), con lo cual se pueden omitir las contribuciones no unitarias.

De acuerdo a lo anterior y en la aproximación de onda rotante para el acoplamiento átomo-cavidad, el Hamiltoniano del SF está dado por:

$$H = H_o + H_1 \quad (2.1.1)$$

$$H_o = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c |c\rangle\langle c| \quad (2.1.2)$$

$$H_1 = \hbar g \cos(k_o x + \phi) [a\sigma_1^\dagger + a^\dagger\sigma_1^-] + \hbar\Omega e^{-i(k_l x - \omega_l t)} \sigma_2^- + \hbar\Omega^* e^{i(k_l x - \omega_l t)} \sigma_2^+ \quad (2.1.3)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la cavidad,  $\nu$  es la frecuencia vibracional del ión,  $g$  es la constante de acoplamiento entre el átomo y la cavidad, y  $\Omega$  es la constante de acoplamiento entre el átomo y el láser, este último caracterizado por su frecuencia,  $\omega_l$ , y número de onda,  $k_l$ . Los operadores de creación de fotones y fonones son denotados por  $a^\dagger$  y  $b^\dagger$ , respectivamente. Se asume que el ión oscila en sólo una dirección (definiendo así el eje X de oscilación), y las frecuencias asociadas a los campos electromagnéticos son tales que sólo 3 niveles  $|g\rangle$ ,  $|e\rangle$ , y  $|c\rangle$ , de la estructura interna del átomo, participan principalmente en la dinámica del SF. Los operadores asociados a las transiciones entre dichos niveles son denotados por  $\sigma_1^- = |g\rangle\langle c|$  y  $\sigma_2^- = |e\rangle\langle c|$ , así como sus correspondientes operadores adjuntos  $\sigma_1^+ = |c\rangle\langle g|$  y  $\sigma_2^+ = |c\rangle\langle e|$ . La posición del átomo respecto al campo cuantizado en la cavidad se especifica a través de la fase  $\phi$ .

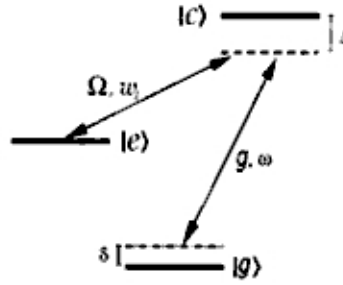


Figura 2.1: Acoplamiento de la estructura interna del átomo con los campos electromagnéticos externos.  $\Omega$  corresponde al acoplamiento con el láser y  $g$  con el campo cuantizado en la cavidad QED.

En la representación de interacción, la ecuación de Schrödinger esta dada por:

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle_I = V(t)|\psi(t)\rangle_I \quad (2.1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &\equiv U_o^+(t)|\psi(t)\rangle \\ V(t) &\equiv (H_1)_I \equiv U_o^+(t)H_1U_o(t) \\ U_o(t) &\equiv e^{-iH_o t/\hbar} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Sin embargo, con el objetivo de obtener un Hamiltoniano efectivo por eliminación adiabática del estado interno  $|c\rangle$  del ión, primero se pasará a una representación de interacción parcial al considerar:

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{H}_o + \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_o &= H_o - \hbar\omega_1|e\rangle\langle e| - \hbar\omega_2|g\rangle\langle g| - \hbar\nu b^\dagger b \\ \mathcal{H}_1 &= H_1 + \hbar\omega_1|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_2|g\rangle\langle g| + \hbar\nu b^\dagger b \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Ahora, teniendo en cuenta que un operador se transforma en forma análoga a  $H_1$  en (2.1.5) se obtienen -en la representación de interacción parcial- los siguientes

operadores:

$$a_I = a e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad (a^\dagger)_I = a^\dagger e^{i\omega t} \quad (2.1.7)$$

$$(\sigma_1^-)_I = \sigma_1^- e^{i(\omega_a - \omega_c - \omega_2)t} \quad \Rightarrow \quad (\sigma_1^\dagger)_I = \sigma_1^\dagger e^{-i(\omega_a - \omega_c - \omega_2)t} \quad (2.1.8)$$

$$(\sigma_2^-)_I = \sigma_2^- e^{i(\omega_c - \omega_c - \omega_1)t} \quad \Rightarrow \quad (\sigma_2^\dagger)_I = \sigma_2^\dagger e^{-i(\omega_c - \omega_c - \omega_1)t} \quad (2.1.9)$$

Luego, el operador  $\mathcal{V}(t) \equiv e^{i\mathcal{H}_0 t/\hbar} \mathcal{H}_I e^{-i\mathcal{H}_0 t/\hbar}$  esta dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & - \hbar \Delta |e\rangle \langle e| - \hbar(\Delta + \delta) |g\rangle \langle g| + \hbar g \cos(k_0 x + \phi) [a \sigma_1^\dagger + a^\dagger \sigma_1^-] \\ & + \hbar \Omega e^{-ik_1 x} \sigma_2^- + \hbar \Omega^* e^{ik_1 x} \sigma_2^\dagger + \hbar \nu b^\dagger b \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

donde se eligieron  $w_1 = -\Delta$  y  $w_2 = -(\Delta + \delta)$ , de tal forma que el operador  $\mathcal{V}$  no depende explícitamente del tiempo. Además:

$$\Delta \equiv \omega_c - \omega_c - w_1 \quad (2.1.11)$$

$$\delta \equiv \omega_c - \omega_g + w_1 - \omega \quad (2.1.12)$$

y:

$$x \equiv x_0 (b^\dagger + b) \quad (2.1.13)$$

En forma compacta, el Hamiltoniano (2.1.10) se puede expresar como:

$$\mathcal{V} = -\hbar \Delta |e\rangle \langle e| - \hbar(\Delta + \delta) |g\rangle \langle g| + \hbar \{ \Gamma_1 |c\rangle \langle g| + \Gamma_2 |c\rangle \langle e| + \text{h.c.} \} + \hbar \nu b^\dagger b \quad (2.1.14)$$

donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son funciones evaluadas en los operadores bosónicos:

$$\Gamma_1 \equiv g \cos(k_0 x + \phi) a = \frac{g}{2} [D(\beta) e^{i\phi} + D(\beta)^\dagger e^{-i\phi}] a \quad (2.1.15)$$

$$\Gamma_2 \equiv \Omega^* e^{ik_1 x} = \Omega^* D(\alpha) \quad (2.1.16)$$

donde  $D(u) \equiv e^{ub^\dagger - u^*b}$  es el operador de desplazamiento bosónico, y además se definieron los argumentos:

$$\beta \equiv i\eta_0 \quad \text{y} \quad \alpha \equiv i\eta \quad (2.1.17)$$

con los parámetros de Lamb-Dicke definidos como:  $\eta \equiv k_l x_o$  y  $\eta_o \equiv k_o x_o$ .

Por otro lado, a partir de la ecuación de Liouville:

$$\partial_t \rho = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{V}, \rho] \quad (2.1.18)$$

se obtienen las ecuaciones -asociadas al Hamiltoniano (2.1.14)- para los "elementos de matriz",  $\rho_{ij} \equiv \langle i | \rho | j \rangle$  ( $i, j = g, e, c$ ):

$$i\partial_t \rho_{cc} = \Gamma_1 \rho_{gc} - \rho_{cg} \Gamma_1^+ + \Gamma_2 \rho_{cc} - \rho_{cc} \Gamma_2^+ + \nu [b^+ b, \rho_{cc}] \quad (2.1.19)$$

$$i\partial_t \rho_{gg} = -\rho_{gc} \Gamma_1 + \Gamma_1^+ \rho_{cg} + \nu [b^+ b, \rho_{gg}] \quad (2.1.20)$$

$$i\partial_t \rho_{ee} = -\rho_{cc} \Gamma_2 + \Gamma_2^+ \rho_{cc} + \nu [b^+ b, \rho_{ee}] \quad (2.1.21)$$

$$i\partial_t \rho_{ce} = \Delta \rho_{ce} + \Gamma_1 \rho_{ge} + \Gamma_2 \rho_{cc} - \rho_{cc} \Gamma_2 + \nu [b^+ b, \rho_{ce}] \quad (2.1.22)$$

$$i\partial_t \rho_{cg} = (\Delta + \delta) \rho_{cg} + \Gamma_2 \rho_{eg} + \Gamma_1 \rho_{gg} - \rho_{cc} \Gamma_1 + \nu [b^+ b, \rho_{cg}] \quad (2.1.23)$$

$$i\partial_t \rho_{eg} = \delta \rho_{eg} - \rho_{cc} \Gamma_1 + \Gamma_2^+ \rho_{cg} + \nu [b^+ b, \rho_{eg}] \quad (2.1.24)$$

Ahora se procede a realizar la eliminación adiabática del nivel  $|c\rangle$ . Para ello se establecen las condiciones: (i) las constantes de acoplamiento,  $g$  y  $|\Omega|$ , deben ser del mismo orden, (ii)  $\delta$  y  $N_e \nu$  deben ser del orden de  $\frac{g|\Omega|}{\Delta}$ , y (iii)  $g|\Omega| \ll \Delta^2$  (ver apéndice A), con la cual los elementos  $\rho_{ce}$  y  $\rho_{cg}$  permanecen en estado estacionario en una escala de tiempo del orden de  $\left[\frac{g|\Omega|}{\Delta}\right]^{-1}$ ; esto es,  $\partial_t \rho_{ce} = \partial_t \rho_{cg} = 0$ . Luego, en dicha aproximación, las ecuaciones previas se expresan como:

$$i\partial_t \rho_{cc} = \left[ \frac{\Gamma_1 \Gamma_1^+}{\Delta}, \rho_{cc} \right] + \left[ \frac{\Gamma_2 \Gamma_2^+}{\Delta}, \rho_{cc} \right] + \nu [b^+ b, \rho_{cc}] \quad (2.1.25)$$

$$i\partial_t \rho_{gg} = \rho_{gc} \left( \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_1}{\Delta} \right) - \left( \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_2}{\Delta} \right) \rho_{cg} - \left[ \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_1}{\Delta}, \rho_{gg} \right] + \nu [b^+ b, \rho_{gg}] \quad (2.1.26)$$

$$i\partial_t \rho_{ee} = \rho_{eg} \left( \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_2}{\Delta} \right) - \left( \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_1}{\Delta} \right) \rho_{gc} - \left[ \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_2}{\Delta}, \rho_{ee} \right] + \nu [b^+ b, \rho_{ee}] \quad (2.1.27)$$

$$i\partial_t \rho_{eg} = \rho_{eg} \left[ \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_1}{\Delta} + \Delta + \delta \right] - \left[ \Delta + \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_2}{\Delta} \right] \rho_{eg} + \rho_{cc} \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_1}{\Delta} - \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_1}{\Delta} \rho_{gg} + \nu [b^+ b, \rho_{eg}] \quad (2.1.28)$$

Como se puede verificar, las últimas cuatro ecuaciones describen la dinámica del SF (ecuación de Liouville) asociada al siguiente Hamiltoniano efectivo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ef}(t) = & -\hbar \left[ \Delta + \frac{|\Omega|^2}{\Delta} \right] |e\rangle\langle e| - \hbar \left[ \Delta + \delta + \frac{\Gamma_1^\dagger \Gamma_1}{\Delta} \right] |g\rangle\langle g| - \hbar \left[ \frac{\Gamma_1^\dagger \Gamma_2}{\Delta} \right] |g\rangle\langle e| \\ & - \hbar \left[ \frac{\Gamma_2^\dagger \Gamma_1}{\Delta} \right] |e\rangle\langle g| + \hbar \left[ \Gamma_1 \Gamma_1^\dagger + \frac{|\Omega|^2}{\Delta} \right] |c\rangle\langle c| + \hbar \nu b^\dagger b \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

donde se reemplazó  $\Gamma_2^\dagger \Gamma_2 = |\Omega|^2$ , de acuerdo con la expresión (2.1.16).

Se puede observar, tanto de las ecuaciones (2.1.25 a 2.1.28) como del Hamiltoniano (2.1.29), que el nivel  $c$  -de la estructura interna del átomo- queda desacoplado de los otros niveles,  $g$  y  $e$ . Luego, el SF se comporta -efectivamente- como un átomo de dos niveles interactuando con dos modos bosónicos ( $a$  y  $b$ ).

Ahora, al completar el paso a la representación de interacción con los términos restantes de (2.1.6),  $-\hbar\Delta|e\rangle\langle e| - \hbar(\Delta + \delta)|g\rangle\langle g| + \hbar\nu b^\dagger b$ , y restringiéndonos al subespacio generado por los vectores  $|e, n, N\rangle$  y  $|g, m, M\rangle$ , el Hamiltoniano efectivo del SF -en la representación de interacción total- esta dado por:

$$H_{ef}(t) = -\frac{\hbar}{\Delta} \left\{ |\Omega|^2 |e\rangle\langle e| + \Gamma_{1t}^\dagger \Gamma_{1t} |g\rangle\langle g| + \Gamma_{1t}^\dagger \Gamma_{2t} e^{-i\delta t} |g\rangle\langle e| + \Gamma_{2t}^\dagger \Gamma_{1t} e^{i\delta t} |e\rangle\langle g| \right\} \quad (2.1.30)$$

donde  $\Gamma_{1t}$  y  $\Gamma_{2t}$  son funciones evaluadas en los operadores bosónicos:

$$\Gamma_{1t} \equiv \frac{g}{2} \left[ D(\beta_t) e^{i\phi} + D(\beta_t)^\dagger e^{-i\phi} \right] a \quad (2.1.31)$$

$$\Gamma_{2t} \equiv \Omega^\dagger D(\alpha_t) \quad (2.1.32)$$

con los argumentos (de los operadores de desplazamiento):

$$\beta_t \equiv i\eta_0 e^{i\nu t} \quad \text{y} \quad \alpha_t \equiv i\eta e^{i\nu t} \quad (2.1.33)$$

Finalmente, al considerar la condición de resonancia,  $\delta = \pm k\nu$ , y despreciando las contribuciones de los términos de oscilación rápida (Aproximación de onda rotante para los grados de libertad de movimiento del ión), el Hamiltoniano efectivo del SF se puede expresar como:

$$\begin{aligned} H_{ef}^\pm = & -\frac{g^2 \hbar}{2\Delta} \left[ e^{-2\eta_0^2} \cos(2\phi) f_o(2\eta_0) + 1 \right] a^\dagger a |g\rangle\langle g| - \frac{|\Omega|^2 \hbar}{\Delta} |e\rangle\langle e| \\ & - \frac{g\Omega^* \hbar}{2\Delta} F_{k,\pm}(\eta_0, \eta) a^\dagger |g\rangle\langle e| - \frac{g\Omega \hbar}{2\Delta} (F_{k,\pm}(\eta_0, \eta))^\dagger a |e\rangle\langle g| \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

donde las funciones evaluadas en operadores,  $F_{k,\pm}$ , están dadas por:

$$F_{k,+}(\eta_o, \eta) \equiv e^{-\frac{1}{2}(\eta_o+\eta)^2} e^{i\phi} [i(\eta_o + \eta)b^+]^k f_k(\eta_o + \eta) \\ + e^{-\frac{1}{2}(\eta_o-\eta)^2} e^{-i\phi} [i(\eta - \eta_o)b^+]^k f_k(\eta - \eta_o) \quad (2.1.35)$$

$$F_{k,-}(\eta_o, \eta) \equiv e^{-\frac{1}{2}(\eta_o+\eta)^2} e^{i\phi} f_k(\eta_o + \eta) [i(\eta_o + \eta)b]^k \\ + e^{-\frac{1}{2}(\eta_o-\eta)^2} e^{-i\phi} f_k(\eta - \eta_o) [i(\eta - \eta_o)b]^k \quad (2.1.36)$$

con el operador  $f_k(y)$  -en orden normal- dado por:

$$f_k(y) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-y^2)^s (b^+)^s b^s}{(k+s)! s!} \quad (2.1.37)$$

Se puede verificar que tomando  $\phi = 0$ ,  $k = \pm 1$  y en el régimen de Lamb-Dicke, el Hamiltoniano (2.1.34) se reduce a:

$$H_{ef}^+ = -\frac{g^2 \hbar}{\Delta} a^+ a |g\rangle \langle g| - \frac{|\Omega|^2 \hbar}{\Delta} |e\rangle \langle e| - \frac{ig\eta \hbar}{\Delta} [\Omega^* a^+ b^+ |g\rangle \langle e| - \Omega ab |e\rangle \langle g|] \quad (2.1.38)$$

$$H_{ef}^- = -\frac{g^2 \hbar}{\Delta} a^+ a |g\rangle \langle g| - \frac{|\Omega|^2 \hbar}{\Delta} |e\rangle \langle e| - \frac{ig\eta \hbar}{\Delta} [\Omega^* a^+ b |g\rangle \langle e| - \Omega ab^+ |e\rangle \langle g|] \quad (2.1.39)$$

donde el Hamiltoniano (2.1.38) -asociado al caso  $\delta = +\nu$ - corresponde a un átomo de dos niveles interactuando con dos modos bosónicos ( $a$  y  $b$ ), de tal forma que, en la absorción (emisión) atómica se aniquilan (crean) dos bosones, un fotón y un fonón. Así mismo, el Hamiltoniano (2.1.39) -asociado al caso  $\delta = -\nu$ - corresponde a un átomo de dos niveles interactuando con dos modos bosónicos ( $a$  y  $b$ ), de tal forma que, en la absorción (emisión) atómica se aniquila (crea) un fotón y se crea (aniquila) un fonón.

Como conclusión, se ha establecido el régimen para el cual el SF evoluciona de manera efectiva con el Hamiltoniano (2.1.34). Dicho Hamiltoniano es resultado de la posible eliminación adiabática de uno de los niveles atómicos del ión; sin embargo, con el objetivo de respaldar este resultado se utilizó otra técnica estándar, expansión en serie de Dyson, para obtener el mismo Hamiltoniano como se muestra en el Apéndice B.



## 2.2. Autovalores y autovectores

Por lo visto en la sección previa, (2.1.34) representa un Hamiltoniano de Jaynes y Cummings generalizado; esto es, para el caso de  $H_{ef}^-$ , la absorción (emisión) atómica tiene como resultado la aniquilación (creación) de un fotón en la cavidad y la creación (aniquilación) simultánea de  $k$  fonones en el estado vibracional del átomo. De manera análoga, para el caso de  $H_{ef}^+$ , la absorción (emisión) atómica tiene como resultado la aniquilación (creación) de un fotón en la cavidad y la aniquilación (creación) simultánea de  $k$  fonones en el estado vibracional del átomo. Ahora, el problema de autovalores de  $H_{ef}^\pm$  puede ser resuelto exactamente al tomar autovectores de la forma  $\alpha|e, n, N\rangle + \beta|g, n+1, N \pm k\rangle$ , donde  $n$  (autovalores de  $a^\dagger a$ ) representa el número de fotones en la cavidad, y  $N$  (autovalores de  $b^\dagger b$ ) representa el número de fonones del estado vibracional del átomo.

Teniendo en cuenta el proceso de diagonalización mostrado en el apéndice C, los autovalores para  $H_{ef}^\pm$  y sus correspondientes autovectores, están dados por:

$$E_{n,N,\pm}^+ = \frac{\hbar}{4\Delta} \left( 4|\Omega|^2 - \Delta_{n,N,k}^+ \right) \pm \frac{\hbar}{4\Delta} R_{n,N,k}^+ \quad ; \text{ con } N \geq 0 \quad (2.2.1)$$

$$E_{n,N,0}^+ = \frac{\hbar g^2}{2\Delta} (n+1) \left[ e^{-2\eta_0^2} \cos(2\phi) L_N(4\eta_0^2) + 1 \right] \quad ; \text{ con } N < k \quad (2.2.2)$$

$$|\psi_{n,N,+}^+\rangle = \cos \left[ \frac{\theta_{n,N,k}^+}{2} \right] e^{-i\frac{k}{2}} |e, n, N\rangle + \sin \left[ \frac{\theta_{n,N,k}^+}{2} \right] e^{i\frac{k}{2}} |g, n+1, N+k\rangle \quad (2.2.3)$$

$$|\psi_{n,N,-}^+\rangle = -\sin \left[ \frac{\theta_{n,N,k}^+}{2} \right] e^{-i\frac{k}{2}} |e, n, N\rangle + \cos \left[ \frac{\theta_{n,N,k}^+}{2} \right] e^{i\frac{k}{2}} |g, n+1, N+k\rangle \quad (2.2.4)$$

$$|\psi_{n,N,0}^+\rangle = |g, n+1, N\rangle \quad (2.2.5)$$

de tal forma que  $H_{ef}^+ |\psi_{n,N,i}^+\rangle = E_{n,N,i}^+ |\psi_{n,N,i}^+\rangle$  con  $i = +, -, 0$ , además:

$$\Delta_{n,N,k}^+ \equiv 2|\Omega|^2 - g^2(n+1) \left[ e^{-2\eta_0^2} \cos(2\phi) L_{N+k}(4\eta_0^2) + 1 \right] \quad (2.2.6)$$

$$R_{n,N,k}^+ \equiv \left[ (\Delta_{n,N,k}^+)^2 + 4g^2|\Omega A_N^k|^2(n+1) \right]^{1/2} \quad (2.2.7)$$

$$\theta_{n,N,k}^+ \equiv \arccos \left( \frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+} \right) \quad (2.2.8)$$

Los  $A_N^k$  son definidos por  $F_{k,+}(\eta_0, \eta)|N\rangle = A_N^k(\eta_0, \eta)|N+k\rangle$ , y de manera explícita:

$$A_N^k(\eta_0, \eta) = i^k \sqrt{\frac{N!}{(N+k)!}} [(\eta + \eta_0)^k e^{-\frac{1}{2}(\eta + \eta_0)^2 + i\phi} L_N^k((\eta + \eta_0)^2) + (\eta - \eta_0)^k e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2 - i\phi} L_N^k((\eta - \eta_0)^2)] \quad (2.2.9)$$

El factor de fase,  $e^{i\mathcal{K}}$ , es definido a partir de los elementos no-diagonales del Hamiltoniano bidimensional correspondiente al sub-espacio generado por los vectores  $|e, n, N\rangle$  y  $|g, n+1, N+k\rangle$ , de la siguiente manera:

$$e^{i\mathcal{K}} \equiv \frac{\Omega(A_N^k)^*}{|\Omega(A_N^k)^*|} \quad (2.2.10)$$

Finalmente, se obtienen expresiones similares para  $H_{ef}^-$ :

$$E_{n,N,\pm}^- = \frac{\hbar}{4\Delta} (4|\Omega|^2 - \Delta_{n,N,k}^-) \pm \frac{\hbar}{4\Delta} R_{n,N,k}^- \quad ; \text{ con } N \geq k \quad (2.2.11)$$

$$E_{n,N,0}^- = \frac{\hbar|\Omega|^2}{\Delta} \quad ; \text{ con } N < k \quad (2.2.12)$$

$$|\psi_{n,N,+}^- \rangle = \cos\left[\frac{\theta_{n,N,k}^-}{2}\right] e^{-i\frac{\mathcal{K}}{2}} |e, n, N\rangle + \sin\left[\frac{\theta_{n,N,k}^-}{2}\right] e^{i\frac{\mathcal{K}}{2}} |g, n+1, N-k\rangle \quad (2.2.13)$$

$$|\psi_{n,N,-}^- \rangle = -\sin\left[\frac{\theta_{n,N,k}^-}{2}\right] e^{-i\frac{\mathcal{K}}{2}} |e, n, N\rangle + \cos\left[\frac{\theta_{n,N,k}^-}{2}\right] e^{i\frac{\mathcal{K}}{2}} |g, n+1, N-k\rangle \quad (2.2.14)$$

$$|\psi_{n,N,0}^- \rangle = |e, n, N\rangle \quad (2.2.15)$$

de tal forma que  $H_{ef}^- |\psi_{n,N,i}^- \rangle = E_{n,N,i}^- |\psi_{n,N,i}^- \rangle$  con  $i = +, -, 0$ , además:

$$\Delta_{n,N,k}^- \equiv 2|\Omega|^2 - g^2(n+1) \left[ e^{-2\eta_0^2} \cos(2\phi) L_{N-k}(4\eta_0^2) + 1 \right] \quad (2.2.16)$$

$$R_{n,N,k}^- \equiv \left[ (\Delta_{n,N,k}^-)^2 + 4g^2 |\Omega C_N^k|^2 (n+1) \right]^{1/2} \quad (2.2.17)$$

$$\theta_{n,N,k}^- \equiv \arccos\left(\frac{\Delta_{n,N,k}^-}{R_{n,N,k}^-}\right) \quad (2.2.18)$$

Los  $C_N^k$  son definidos por  $F_{k,-}(\eta_0, \eta)|N\rangle = C_N^k(\eta_0, \eta)|N-k\rangle$ , y de manera explícita:

$$C_N^k(\eta_0, \eta) = i^k \sqrt{\frac{(N-k)!}{N!}} [(\eta + \eta_0)^k e^{-\frac{1}{2}(\eta + \eta_0)^2 + i\phi} L_{N-k}^k((\eta + \eta_0)^2) + (\eta - \eta_0)^k e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2 - i\phi} L_{N-k}^k((\eta - \eta_0)^2)] \quad (2.2.19)$$

### 2.3. Evolución del sistema

Teniendo en cuenta los resultados previos, se puede considerar el problema de la evolución del SF. Suponiendo que en el instante inicial,  $t = 0$ , la estructura interna del ión se encuentra desacoplada de la cavidad y de sus propios estados de movimiento, el estado inicial del SF se puede expresar como:

$$|\psi(0)\rangle = |\varphi_{ion}\rangle \otimes \sum_{m,M} \chi_{m,M} |m, M\rangle \quad (2.3.1)$$

donde  $\chi(m, M)$  representa la amplitud de probabilidad de obtener  $m$  fotones en la cavidad y  $M$  fonones en el estado vibracional del ión. Ahora, para un ión inicialmente en su estado excitado, el vector de estado en instantes posteriores -debido a la evolución con el hamiltoniano  $H_{ef}^+$  - esta dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,N} a_{n,N,+} e^{-iE_{n,N,+}^+ t/\hbar} |\psi_{n,N,+}^+\rangle + a_{n,N,-} e^{-iE_{n,N,-}^+ t/\hbar} |\psi_{n,N,-}^+\rangle \quad (2.3.2)$$

donde:

$$a_{n,N,+} = \langle \psi_{n,N,+}^+ | \psi(0) \rangle = \cos\left(\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right) e^{i\xi/2} \chi_{n,N} \quad (2.3.3)$$

$$a_{n,N,-} = \langle \psi_{n,N,-}^+ | \psi(0) \rangle = -\sin\left(\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right) e^{i\xi/2} \chi_{n,N} \quad (2.3.4)$$

Luego, la inversión -en este caso- se puede expresar como:

$$W_c^+(t) \equiv \langle \psi(t) | \sigma_z | \psi(t) \rangle = 1 - 2 \sum_{n,N} \chi_{n,N}^2 \left[ 1 - \left( \frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+} \right)^2 \right] \sin^2\left(\frac{R_{n,N,k}^+}{4\Delta} t\right) \quad (2.3.5)$$

En la figura 2.2 se muestra un gráfico de la inversión  $W_c^+(t)$  como función del tiempo, donde la banda de oscilación cubre un mayor rango conforme se incrementa los valores de los parámetros de Lamb-Dicke.

En las mismas condiciones, la figura 2.3 representa la evolución del sistema en

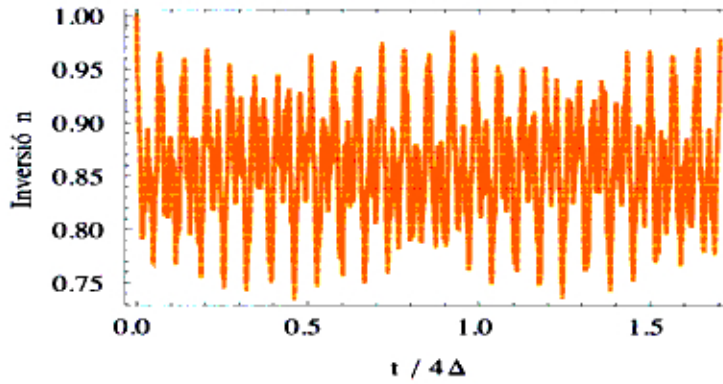


Figura 2.2: Inversión  $W_e^+(t)$  como función del tiempo. Parámetro  $\eta \simeq 0,7707$ , y se considera una distribución inicial fotónica y fonónica coherente.

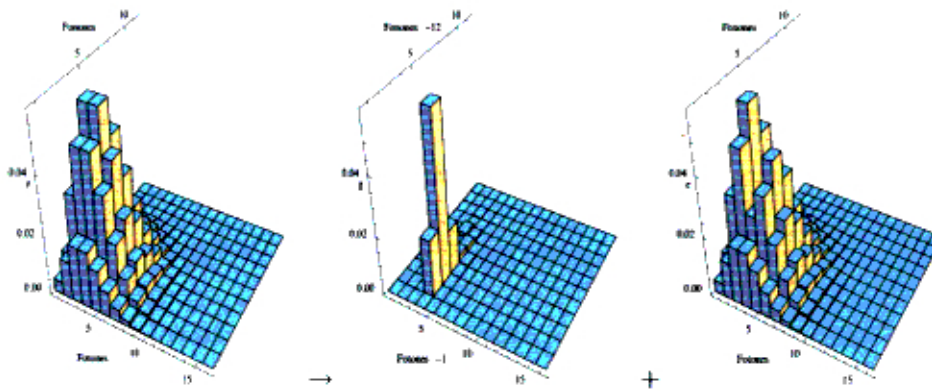


Figura 2.3: Evolución a partir del ión en estado excitado, y una estadística inicial coherente para los fotones y fonones ( $k = 12$  y  $\eta \simeq 0,7707$ )

cuanto a la distribución fotónica y fonónica. Se observa que un instante posterior al inicial, el subespacio  $|g, m, M\rangle$  comienza a poblarse con una distribución oscilante en acuerdo con el gráfico de inversión.

## 2.4. Estados de Fock bimodales

Se puede observar que, de la ecuación (2.3.5), la expresión  $\left[1 - \left(\frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+}\right)^2\right]$  actúa como un peso que puede seleccionar cual de los  $\chi_{n,N}^2$  será al final importante; esto es, con una adecuada elección de los parámetros del sistema se puede lograr que dicha expresión sea casi nula para todos los valores  $(n, N)$  excepto para un par  $(n_o, N_o)$  preseleccionado. Luego, lo anterior se puede conseguir si se logra satisfacer las siguientes condiciones:

$$\Delta_{n_o, N_o, k}^+ = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+} \approx 1 \quad \forall \quad (n, N) \neq (n_o, N_o) \quad (2.4.2)$$

donde primero se fija el parámetro  $\delta = k\nu$ . Ahora, las condiciones previas se pueden satisfacer si las constantes de acoplamiento,  $\Omega$  y  $g$ , cumplen:

$$|\Omega|^2 = \frac{1}{2}g^2(n_o + 1) \left[ e^{-2\eta^2} \cos(2\phi) L_{N_o+k}(4\eta_o^2) + 1 \right] \quad (2.4.3)$$

mientras que los parámetros de Lamb-Dicke,  $\eta_o$  y  $\eta$ , deben satisfacer:

$$S_{n,N,k}(\eta_o, \eta) \equiv \frac{2g|\Omega A_N^k| \sqrt{n+1}}{\Delta_{n,N,k}^+} \ll 1 \quad \forall \quad (n, N) \neq (n_o, N_o) \quad (2.4.4)$$

Con el objetivo de obtener una expresión que permita estimar el orden de magnitud de los parámetros de Lamb-Dicke adecuados para satisfacer las condiciones previas, se procede a realizar una expansión en serie de potencias de la función  $S_{n,N,k}(\eta_o, \eta)$ , obteniéndose:

$$S_{n,N,k}(\eta_o, \eta) \simeq \frac{2\sqrt{(1+n_o)(1+n)}}{(n_o - n)} \sqrt{\frac{1}{k!} \binom{N+k}{k}} \eta_m^k + O(\eta_m^{k+1}) \quad (2.4.5)$$

donde  $\eta_m \equiv \max\{\eta_o, \eta\} < 1$ . Luego, la condición (2.4.4) equivale a exigir:

$$Q_{n,N,k}(\eta_m) \equiv \frac{2\sqrt{(1+n_o)(1+n)}}{(n_o - n)} \sqrt{\frac{1}{k!} \binom{N+k}{k}} \eta_m^k \ll 1 \quad \forall \quad (n, N) \neq (n_o, N_o) \quad (2.4.6)$$

Ahora, se observa que  $Q_{n,N,k} \leq Q_{n_o+1,N_e,k} \forall n \geq 0$  y  $N \leq N_e$ , donde  $N_e$  es tomado de la estadística fonónica inicial, de tal forma que,  $\chi_{n_o,N} \ll 1$  si  $N > N_e$ , con lo cual (2.4.6) se reduce a:

$$\eta_m(n_o, N_o, k) \lesssim \left[ \frac{1}{2\sqrt{(1+n_o)(2+n_o)}} \sqrt{\frac{k!}{\binom{N_e+k}{k}}} \right]^{1/k} \times 10^{-\alpha/k} \quad (2.4.7)$$

con  $10^{-\alpha} \ll 1$ . Con esto, las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.7) establecen las condiciones para los parámetros del sistema de tal forma que, es posible preseleccionar un subespacio específico,  $\{|e, n_o, N_o\rangle, |g, n_o+1, N_o+k\rangle\}$ , para la evolución del sistema. De (2.4.7) se observa que para un parámetro de Lamb-Dicke dado,  $\eta_m(n_o, M_o, k)$ , es posible (con el mismo valor de dicho parámetro) preseleccionar subespacios,  $\{|e, n, N\rangle, |g, n+1, N+k\rangle\}$ , con las condiciones  $n \leq n_o$ ,  $N \leq N_o$  y  $k \geq k_o$ , siempre que logren satisfacer una ecuación como (2.4.3).

La fidelidad del estado de Fock bimodal, se puede estimar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n_o, N_o, k}(\alpha, t) &\equiv |\langle n_o+1, N_o+k | \psi(t) \rangle|^2 |_{\eta=\eta_o=\eta_m} \\ &= \frac{\chi_{n_o, N_o}^2 \sin^2\left(\frac{R_{n_o, N_o, k}^+}{4\Delta} t\right)}{\chi_{n_o, N_o}^2 \sin^2\left(\frac{R_{n_o, N_o, k}^+}{4\Delta} t\right) + \sum \chi_{n, N}^2 \sin^2(\theta_{n, N, k}^+) \sin^2\left(\frac{R_{n, N, k}^+}{4\Delta} t\right)} |_{\eta=\eta_o=\eta_m} \\ &\geq \frac{\sin^2\left(\frac{R_{n_o, N_o, k}^+}{4\Delta} t\right)}{\sin^2\left(\frac{R_{n_o, N_o, k}^+}{4\Delta} t\right) + 10^{-2\alpha} \sum_{(n, N) \neq (n_o, N_o)} \left(\frac{\chi_{n, N}^2}{\chi_{n_o, N_o}^2}\right)} |_{\eta=\eta_o=\eta_m} \quad (2.4.8) \end{aligned}$$

En las figuras 2.4 y 2.5, se muestra un caso en el cual el ión inicia en estado excitado, y tanto la distribución fotónica como fonónica corresponden a estados coherentes. Se observa que en la evolución del sistema, la observación del ión en su estado fundamental implicaría de inmediato la generación de un estado de Fock bimodal (preseleccionado) en la estadística fotón-fonón.

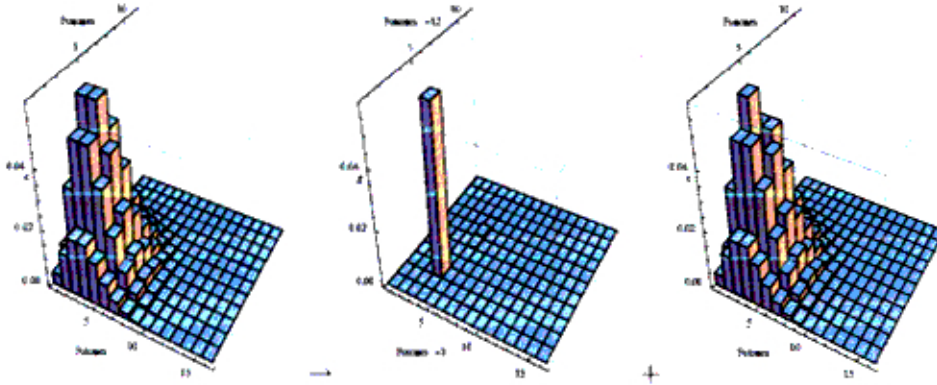


Figura 2.4: Estado preseleccionado:  $n_o = 3$ ,  $N_o = 2$ ,  $N_e = 10N_o$ ,  $k = 12$ ,  $\eta \simeq 0,6386$  ( $\alpha = 1, 0$ ). Probabilidad máxima de encontrar en  $|g, 4, 14\rangle$  es 0,0606.

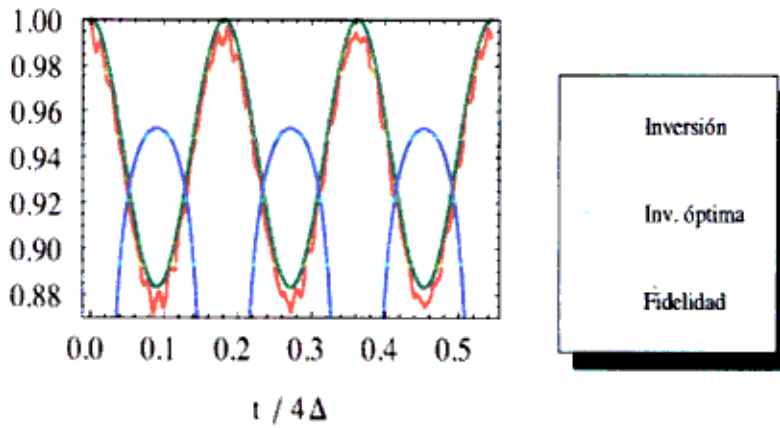


Figura 2.5: Inversión  $W_e^i(t)$  y fidelidad  $\mathcal{F}_{n_o, N_o, k}(\alpha, t)$  con estado preseleccionado:  $n_o = 3$ ,  $N_o = 2$ ,  $N_e = 10N_o$ ,  $k = 12$ ,  $\eta \simeq 0,6386$  ( $\alpha = 1, 0$ ). Máxima fidelidad para el estado  $|g, 4, 14\rangle$  es 0,9524.

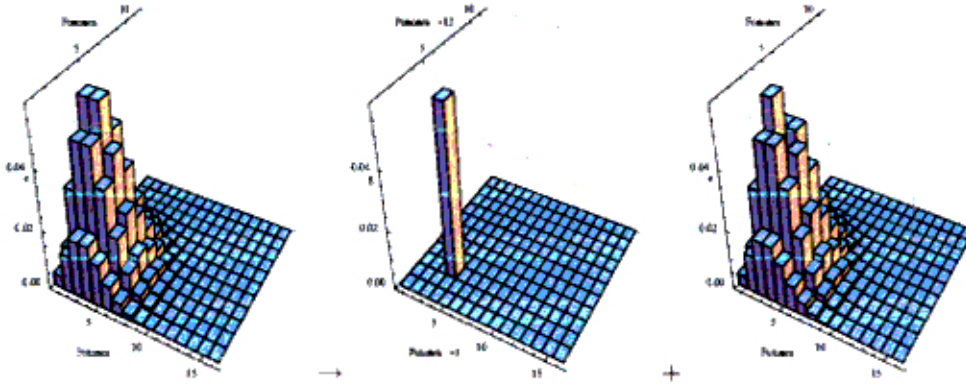


Figura 2.6: Estado preseleccionado:  $n_o = 3$ ,  $N_o = 2$ ,  $N_e = 10N_o$ ,  $k = 12$ ,  $\eta \simeq 0,5477$  ( $\alpha = 1, 8$ ). Probabilidad máxima de encontrar en  $|g, 4, 14\rangle$  es 0,0587.

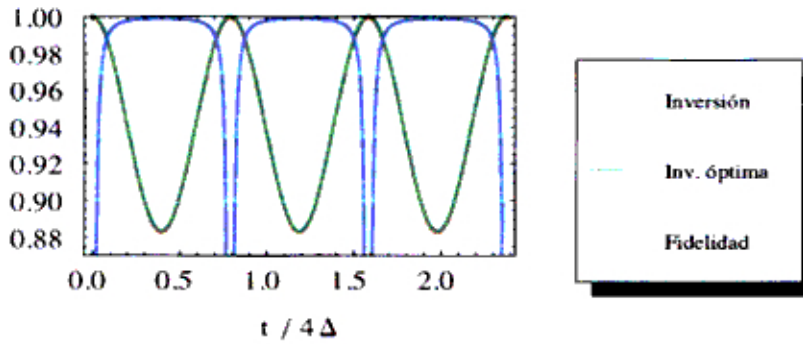


Figura 2.7: Inversión  $W_e^+(t)$  y fidelidad  $\mathcal{F}_{n_o, N_o, k}(\alpha, t)$  con estado preseleccionado:  $n_o = 3$ ,  $N_o = 2$ ,  $N_e = 10N_o$ ,  $k = 12$ ,  $\eta \simeq 0,5477$  ( $\alpha = 1, 8$ ). Máxima fidelidad para el estado  $|g, 4, 14\rangle$  es 0,9987.

Las figuras 2.6 y 2.7 muestran el caso previo pero con un mayor valor del parámetro  $\alpha$ , de tal forma que. la curva de inversión se superpone al caso óptimo y la fidelidad del estado bimodal es cercana al 100%.



## Capítulo 3

# Conclusiones

En el marco de esta tesis se identificó como objetivos principales el estudio de la interacción de la radiación con la materia, desde el punto de vista de la teoría cuántica, y la propuesta de un sistema físico en el cual se aplique el formalismo de dicha interacción para predecir sus características dinámicas. Teniendo en cuenta que dichos objetivos fueron por demás satisfechos, a continuación se citan las principales conclusiones de este trabajo.

El sistema propuesto del ión atrapado interactuando con un láser en el interior de una cavidad QED, permitió el estudio de la interacción de la radiación con la materia aplicando tanto el modelo semiclásico como el modelo cuántico desarrollados en el primer capítulo. La dinámica efectiva de dicho sistema fue obtenida por dos métodos que establecen un mismo régimen para este caso: la eliminación adiabática de un nivel atómico del ión, y la expansión en serie de Dyson del operador de evolución del sistema cerrado en la representación de interacción.

Respecto al proceso de eliminación adiabática, se estableció las condiciones específicas (y una escala de tiempo adecuada) para las cuales el sistema presentará una dinámica efectiva donde el nivel atómico  $|c\rangle$  no manifiesta un cambio significativo en su población. De manera formal, se puso en evidencia un régimen de adiabaticidad para el sistema en cuestión; sin embargo, será necesario

un mayor estudio en esta área, i.e. se debe proponer un procedimiento más riguroso y cuantificar la estabilidad de dicho régimen.

Tanto por eliminación adiabática como por el método de serie de Dyson, se obtuvo el Hamiltoniano efectivo (2.1.34) del sistema. Dicho Hamiltoniano resulta una generalización del Hamiltoniano de Jaynes y Cummings, que satisface la conservación de energía y es restringido a la aproximación de onda rotante, tanto para el acoplamiento de los estados atómicos con la cavidad como con los estados de movimiento del propio ión. En este sentido, previo al Hamiltoniano efectivo (2.1.34) -durante el proceso de eliminación adiabática- se obtuvo el Hamiltoniano (2.1.30) sin la aproximación de onda rotante para los grados de libertad de movimiento; dicho resultado brinda la oportunidad para realizar un estudio, de la evolución del sistema, en un régimen extendido respecto al establecido por la aproximación de onda rotante (caso del acople con estados de movimiento).

Así mismo, es una tarea pendiente el empleo de herramientas computacionales para la solución numérica de la ecuación de Schrodinger con el Hamiltoniano (2.1.1), con ello será posible establecer el efecto de las aproximaciones realizadas y verificar el límite de su validez.

Finalmente, el problema de autovalores para el Hamiltoniano efectivo fue resuelto de manera exacta, y por tanto la evolución del sistema es completamente determinada desde el punto de vista de la física cuántica. Como ejemplo de aplicación, se muestra la posibilidad de obtener un estado de Fock bimodal preseleccionado, en la distribución fotón-fonón, con solo una medición oportuna del estado atómico del ión. Este proceso de interacción selectiva es resultado de ajustar algunos parámetros del sistema como las constantes de acoplamiento, frecuencia del láser y tiempos de interacción. Es necesario resaltar que además de los límites del propio sistema físico, para ajustar dichos parámetros, queda por establecer

los límites debido a las condiciones que permiten la evolución efectiva del sistema de acuerdo al Hamiltoniano (2.1.34).

Por lo expuesto, la tesis concluye en este apartado y el trabajo de investigación acaba de comenzar.

## Bibliografia

- [1] D. Meschede, H. Walther, and G. Muller, "One-atom maser." *Phys. Rev. Lett.*, vol. 54, p. 551, 1985.
- [2] P. Munstermann, T. Fischer, P. Maunz, P. Pinkse, and G. Rempe, "Dynamics of single-atom motion observed in a high-finesse cavity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, p. 3791, 1999.
- [3] H. Walther, B. Varcoe, B. Englert, and T. Becker, "Cavity quantum electrodynamics," *Rep. Prog. Phys.*, vol. 69, p. 1325, 2006.
- [4] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, *The physics of quantum information*. Germany: Springer, 2000.
- [5] C. Monroe, D. Meekhof, B. King, S. Jefferts, W. Itano, D. Wineland, and P. Gould, "Resolved-sideband Raman cooling of a bound atom to the 3D zero-point energy," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, p. 4011, 1995.
- [6] D. Meekhof, C. Monroe, B. King, W. Itano, and D. Wineland, "Generation of nonclassical motional states of a trapped atom," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, p. 1796, 1996.
- [7] D. Leibfried, D. Meekhof, B. King, C. Monroe, W. Itano, and D. Wineland, "Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, p. 4281, 1996.

- [8] J. Garcia-Ripoll, P. Zoller, and J. I. Cirac, "Quantum information processing with cold atoms and trapped ions," *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 38, p. S567, 2005.
- [9] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, "Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser," *Proc. IEEE*, vol. 51, p. 89, 1963.
- [10] W. Vogel and R. de Matos Filho, "Nonlinear Jaynes-Cummings dynamics of a trapped ion," *Phys. Rev. A*, vol. 52, p. 4214, 1995.
- [11] P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the emission and absorption of radiation," *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 114, p. 243, 1927.
- [12] E. Fermi, "Quantum theory of radiation," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 4, p. 87, 1932.
- [13] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*. United Kingdom: Cambridge University Press, 1997.
- [14] E. A. Power and S. Zienau, "Coulomb gauge in non-relativistic quantum electrodynamics and the shape of spectral lines," *Phil Trans. R. Soc. Lond. A*, vol. 251, p. 427, 1959.
- [15] S. Swain, "On the quantum and semi-classical theories of the two-level atom interacting with a single-field mode," *J. Phys. A*, vol. 6, p. 169, 1973.
- [16] L. A. Lugiato, P. Mandel, and L. M. Narducci, "Adiabatic elimination in nonlinear dynamical systems," *Phys. Rev. A*, vol. 29, p. 1438, 1984.