

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS



**“PRECESION DE LOS EQUINOCCIOS
DE LA TIERRA”**

TESIS

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN FISICA

FERNANDO CHIRINOS VILLARUEL

LIMA – PERU

2008

Agradecimientos

Agradezco infinitamente al Profesor Edgard Vidalón mi asesor de Tesis de Licenciatura por todas las interesantes discusiones que me ayudaron a comprender diversos aspectos de la Dinámica del cuerpo rígido , como también en la redacción del presente trabajo y en el apoyo de elaboración de los programas que se usaron para desarrollar la presente Tesis.

Agradezco también a la Facultad de Ciencias por permitirme el uso de la computadora Pentium III (que esta a cargo del profesor Edgard Vidalon) con la cual se desarrollo el presente trabajo.

También agradezco a todos mis amigos y colegas de la Facultad de Ciencias por ayudarme a resolver algunos problemas de integración, como también a descubrir varios secretos de la Ciencia de la computación e informática.

ABSTRACT

The Earth has several movements, some of them very evident as the rotation around its polar axes in 24 hours. But there exists some movement that are not so evident as nutation or equinox precession movement , this last earth's movement has a period of 26000 years and is related to some changes in earth's weather.

In this thesis , we study the equinox precession movement using Lagrange Dynamic of rigid body and solve the movement's equations numerically

Indice

Principales símbolos usados	ii
Introducción	1
<i>Capítulo 1.</i> Movimiento de un cuerpo rígido elipsoidal aislado	3
1.1 Introducción	4
1.2 Potencial Efectivo para un Cuerpo rígido simétrico aislado	5
1.3 Descripción Cualitativa del Movimiento del cuerpo rígido simétrico aislado	8
1.4 Precesión del vector \vec{W}	11
1.5 Solución Numérica para el elipsoide aislado utilizando el metodo de Runge Kutta de orden cuatro	15
1.6 Conclusiones y Observaciones.	57
<i>Capítulo 2.</i> El Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh	58
2.1 Introducción	59
2.2 Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh cuando la masa puntual está en el origen de coordenadas	59
2.3 Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh cuando la masa puntual está en cualquier punto	68
<i>Capítulo 3.</i> Precesión de los Equinoccios de la Tierra considerando solo la interacción con el Sol	74
3.1 Introducción	75
3.2 Ecuaciones diferenciales de Movimiento de la Tierra	77
3.3 Resultados Numéricos	82
3.4 Conclusiones y Observaciones	166
Apéndice del Capítulo 3	167
<i>Capítulo 4.</i> Precesión de los Equinoccios de la Tierra considerando el Sol y la Luna .	169
4.1 Introducción	170
4.2 Ecuaciones diferenciales de Movimiento de la Tierra	172
4.3 Resultados Numéricos	179
4.4 Conclusiones	264
Apéndice del Capítulo 4	265
<i>Bibliografía</i>	276

Principales símbolos usados

XYZ	Sistema de referencia inercial con origen en el Sol
$X_1 X_2 X_3$	Sistema de Ejes que se mueve ligado a la tierra con origen en el centro de masa.
$X_o Y_o Z_o$	Sistema de Ejes con origen en el centro de masa de la Tierra pero que son siempre paralelos a los Ejes XYZ
a, b, c	Semiejes del cuerpo elipsoidal.
I_K	Momentos de Inercia con respecto a los ejes X_K que coinciden con los ejes principales de Inercia .
$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$	Base de vectores que coinciden con los ejes XYZ y que son siempre paralelos a los ejes $X_o Y_o Z_o$.
$B_L = \{\vec{e}_k\}$	Base de vectores que coinciden con los ejes $X_1 X_2 X_3$.
m_L	Masa de la Luna .
M	Masa del Sol .
m	Masa de la Tierra .
T_P	Periodo de Precesion .
T_N	Periodo de Nutacion .

Introducción

Como resultado de la acción de la atracción gravitacional que ejerce la Luna y el Sol sobre la Tierra, el eje de la tierra describe en el espacio una superficie cónica con un período (T_P) aproximado de 26000 años. Este fenómeno se denomina precesión de los equinoccios y se puede demostrar que este fenómeno aparece debido al achatamiento de la Tierra. La precesión de los equinoccios de la Tierra fué descubierto por el griego Hiparco alrededor del año 153 A.C.

Podemos hacernos varias preguntas sobre este movimiento peculiar de la Tierra como:

- i) Será la precesión más rápida ó más lenta si la Tierra fuera más achatada?
- ii) Si la Tierra se encontrara más cerca o más lejana al Sol como se modifica el valor del período de precesión de los equinoccios?
- iii) Si no habría la Luna existiría la precesión de los equinoccios?

El objetivo de este presente trabajo es determinar el período (T_P) y responder las anteriores preguntas.

Para conseguir este objetivo consideramos un modelo mecánico sencillo que represente al sistema formado por el Sol, la Luna y la Tierra. En este modelo se considera al Sol, la Luna como partículas y a la Tierra como un cuerpo rígido de forma elipsoidal de revolución en todos los capítulos del presente trabajo. Aplicando luego la Dinámica de Lagrange y el análisis que se usa para estudiar el movimiento de un trompo simétrico. Es decir se usarán los ángulos de Euler para describir el movimiento de la Tierra. Al aplicar las ecuaciones de Lagrange como es evidente la ecuaciones diferenciales de movimiento son no lineales y acopladas que serán resueltas numéricamente y de estos resultados se puede deducir el valor del período T_P y su variación que sufre cuando se modifica uno de los parámetros de la órbita de la Tierra. Debemos mencionar que este fenómeno no es sólo de la Tierra sino de otros cuerpos celestes como por ejemplo el planeta Marte pero su análisis es más complicado. Además la Tierra tiene otro movimiento llamado nutación que consiste en un "tambaleo" del eje de la Tierra con un período de 19 años , pero en la presente tesis no se analiza este movimiento que se deja para un trabajo posterior.

El estudio de la precesión de los equinoccios de la tierra es importante por que este fenómeno es una de las causas de las epocas glaciares de la Tierra.

Esta tesis se ha dividido en 4 capítulos; a continuación ofrecemos un breve resumen de cada capítulo.

En el capítulo I se estudia a la Tierra en forma aislada aplicando la teoría del movimiento

del cuerpo elipsoidal aislado. Si bien el fenómeno de la precesión de los equinoccios no sucede cuando el planeta está aislado , este capítulo se presenta porque deseamos observar la diferencia que existe en el movimiento de un cuerpo aislado y un cuerpo que interactúa gravitatoriamente con otros cuerpos.

En el capítulo II se deduce el potencial gravitatorio de un cuerpo elipsoidal de revolución y una masa puntual, como es evidente se hace una expansión de un radical haciendo uso de los Polinomios de Legendre, tomándose los dos primeros términos diferentes de cero.

El potencial resultante es la suma del potencial gravitatorio de Kepler y un término llamado potencial de Mac Cullagh que son considerados en los capítulos III y IV

En el capítulo III se estudia el movimiento de la Tierra considerando su movimiento como el de un cuerpo rígido general (es decir se usan los ángulos de Euler) pero consideraremos solo su interacción con el Sol.

El principal resultado al no considerar la presencia de la Luna es que también habría la precesión de los equinoccios, siendo dicho período del orden de 80000 años.

En el capítulo IV se estudia también el movimiento de la Tierra como en el capítulo 3 pero ahora considerando también a la Luna , siendo el principal resultado el período de precesión teórico que es muy aproximado al observado experimentalmente (con error de solo centenas de años).

Demostrándose también que al variar las dimensiones de la Tierra cambia el período de precesión.

1 Movimiento de un cuerpo rígido elipsoidal aislado

1.1 Introducción.

1.2 Potencial Efectivo para el cuerpo rígido elipsoidal aislado.

1.3 Descripción Cualitativa del Movimiento del cuerpo rígido elipsoidal aislado.

1.4 Precesión del vector \vec{W} .

1.5 Solución Numérica para el elipsoide aislado utilizando el metodo de Runge Kutta de orden cuatro.

1.6 Conclusiones y Observaciones.

1.1 Introducción

Analizaremos el movimiento de un cuerpo rígido elipsoidal homogéneo de revolución aislado y aplicaremos esta teoría a la Tierra si no tomamos en cuenta su interacción gravitatoria con ningún cuerpo celeste. Para esto consideramos que el origen del sistema de referencia inercial $X Y Z$ coincide con el centro de masa (punto G), también se considera que el eje de rotación pasa por el centro de masa. En este caso el eje de simetría es uno de los ejes principales de inercia y lo denotaremos por eje X_3 (Ver Fig.1)

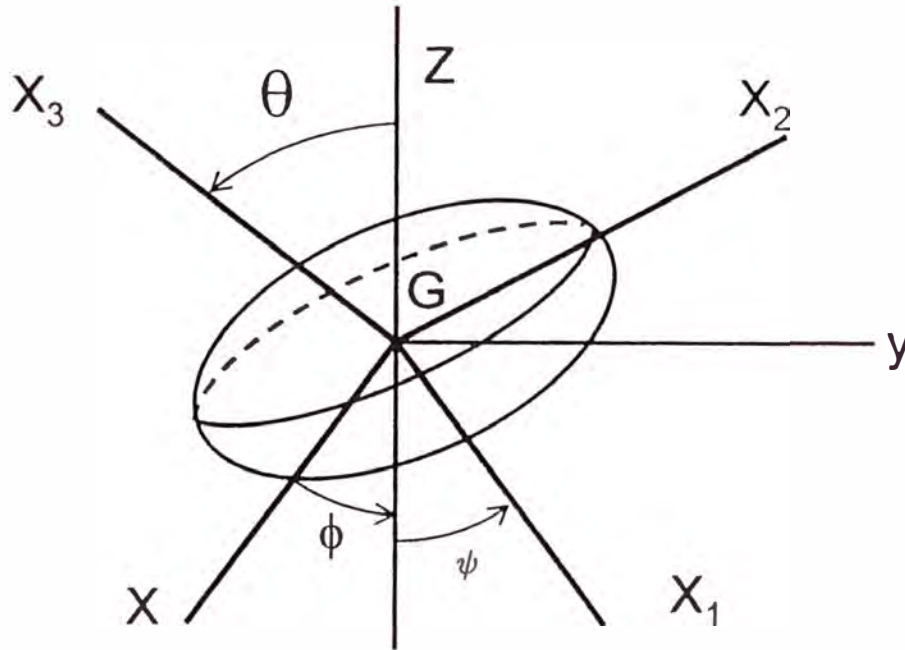


Fig.1

Recordemos que cuando se estudia un cuerpo rígido en general se considera dos bases de vectores:

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}. \quad (1.1)$$

$$B_L = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}. \quad (1.2)$$

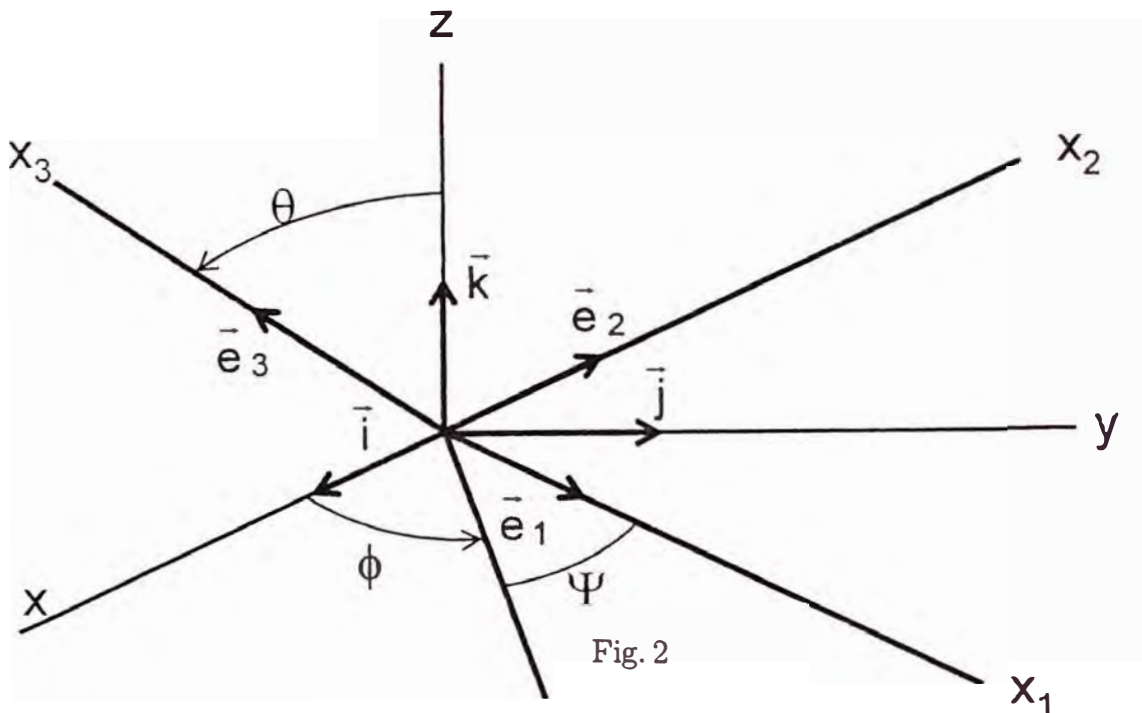
Donde los vectores \vec{e}_k coinciden con los ejes ortogonales X_k , estos ejes (con centro en el punto $G = O$) se mueven ligados al cuerpo rígido (Ver Fig 2) para todo instante y son los ejes principales de inercia del cuerpo rígido.

Denotaremos por I_k como los momentos principales de inercia con respecto a los ejes X_k . Como el cuerpo es simétrico definimos

$$I \equiv I_1 = I_2 \quad (1.3)$$

Para analizar el movimiento general de este elipsoide (recordando que el centro de masa está fijo) usaremos como coordenadas generalizadas los ángulos de Euler θ , ϕ , ψ . A partir del Lagrangiano y el concepto de momentos generalizados se hallará una ecuación para la energía mecánica de tal modo que dependerá sólo del ángulo de Euler θ . Luego se estudiará el movimiento del vector velocidad angular. Para determinar el movimiento del cuerpo se resolverán numéricamente las ecuaciones diferenciales de movimiento obtenidas al aplicar las ecuaciones de Lagrange.

Debemos mencionar que en este tipo de movimiento se conserva el Momentun Angular del cuerpo rígido porque no hay torques externos.



1.2 Potencial Efectivo para el cuerpo rígido simétrico aislado

De la Dinámica del cuerpo rígido tenemos ecuaciones que relacionan las componentes de la velocidad angular $\vec{\omega}$ con respecto al sistema inercial XYZ (denotados por w_k) en la base ligada al cuerpo rígido y los ángulos de Euler. Estas ecuaciones son:

$$w_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \quad (1.4)$$

$$w_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \dot{\theta} \operatorname{sen}\psi, \quad (1.5)$$

$$w_3 = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}, \quad (1.6)$$

Por otra parte la energía cinética de un cuerpo rígido cuando tiene un movimiento general (Ver Fig.3) está dado por la siguiente ecuación:

$$E_K = \frac{M V_Q^2}{2} + M \vec{V}_{QG} \cdot \vec{V}_Q + \sum_{i=1}^3 \frac{I_i \omega_i^2}{2} \quad (1.7)$$

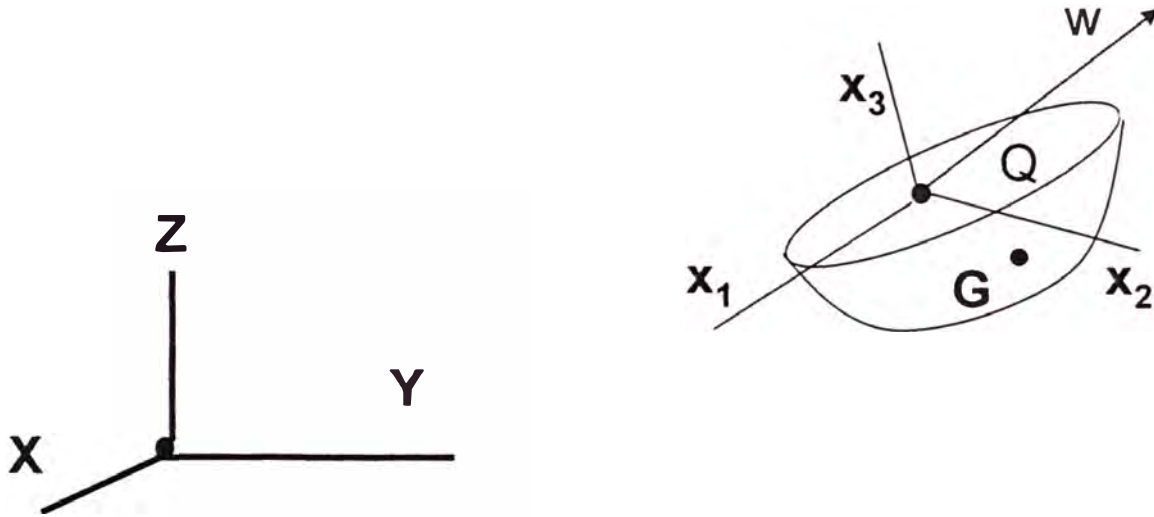


Fig. 3

donde consideramos que el eje de rotación pasa por el punto Q (que pertenece al cuerpo rígido) y los ejes X_k son los ejes principales de Inercia. Pero en nuestro caso $Q = G$ y está fijo en el origen de coordenadas, entonces:

$$E_k = \sum_{i=1}^3 \frac{I_i \omega_i^2}{2} \quad (1.8)$$

es decir

$$E_k = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (1.9)$$

de las ecuaciones (1.4), (1.5), (1.6) y (1.9) obtenemos :

$$E_k = \frac{1}{2} [I_1 (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \operatorname{cos} \psi)^2 + I_2 (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi)^2 + I_3 (\dot{\phi} \operatorname{cos} \theta + \dot{\psi})^2] \quad (1.10)$$

pero:

$$I_1 = I_2 = I. \quad (1.11)$$

luego de la ecuación (1.10), obtenemos :

$$E_k = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2, \quad (1.12)$$

La energía potencial externa es cero por estar el cuerpo aislado luego el lagrangiano del cuerpo rígido es :

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2, \quad (1.13)$$

observamos que las coordenadas generalizadas ψ y ϕ son cíclicas, luego sus momentos generalizados correspondientes:

$$p_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \quad (1.14)$$

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (1.15)$$

son constantes. De (1.14) y (1.15) se consigue:

$$p_\psi = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (1.16)$$

$$p_\psi = I_3 \omega_3 \quad (1.17)$$

$$p_\phi = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta + I \dot{\phi} \text{sen}^2 \theta \quad (1.18)$$

Es facil probar que :

$$p_\psi = I_3 \omega_3 \quad (1.19)$$

De las ecuaciones (1.16) y (1.18) podemos despejar $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \text{sen}^2 \theta} \quad (1.20)$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \left[\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \text{sen}^2 \theta} \right] \cos \theta \quad (1.21)$$

De las dos expresiones anteriores y de la ecuación (1.12) la energía cinética podemos expresarla como :

$$E_k = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \text{sen}^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2 I_3} \quad (1.22)$$

como no hay energía potencial, la energía mecánica es :

$$E_m = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \text{sen}^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2 I_3} \quad (1.23)$$

Observamos que la energía mecánica depende sólo del ángulo θ , podemos escribir la anterior relación como:

$$E_m - \frac{p_\psi^2}{2I_3} = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I \sin^2\theta}. \quad (1.24)$$

definiendo

$$E'_m \equiv E_m - \frac{p_\psi^2}{2I_3} \quad (1.25)$$

de la ecuación (1.24) y (1.25) obtenemos :

$$E'_m = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I \sin^2\theta}. \quad (1.26)$$

es obvio que la magnitud física E'_m se conserva, si definimos como el potencial efectivo:

$$V(\theta) \equiv \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I \sin^2\theta}. \quad (1.27)$$

la relación (1.26) se convierte en :

$$E'_m = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + V(\theta). \quad (1.28)$$

La importancia de la función $V(\theta)$ es que permitirá describir el movimiento del cuerpo rígido cualitativamente sin necesidad de hallar y resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento.

1.3 Descripción Cualitativa del Movimiento del cuerpo rígido simétrico aislado.

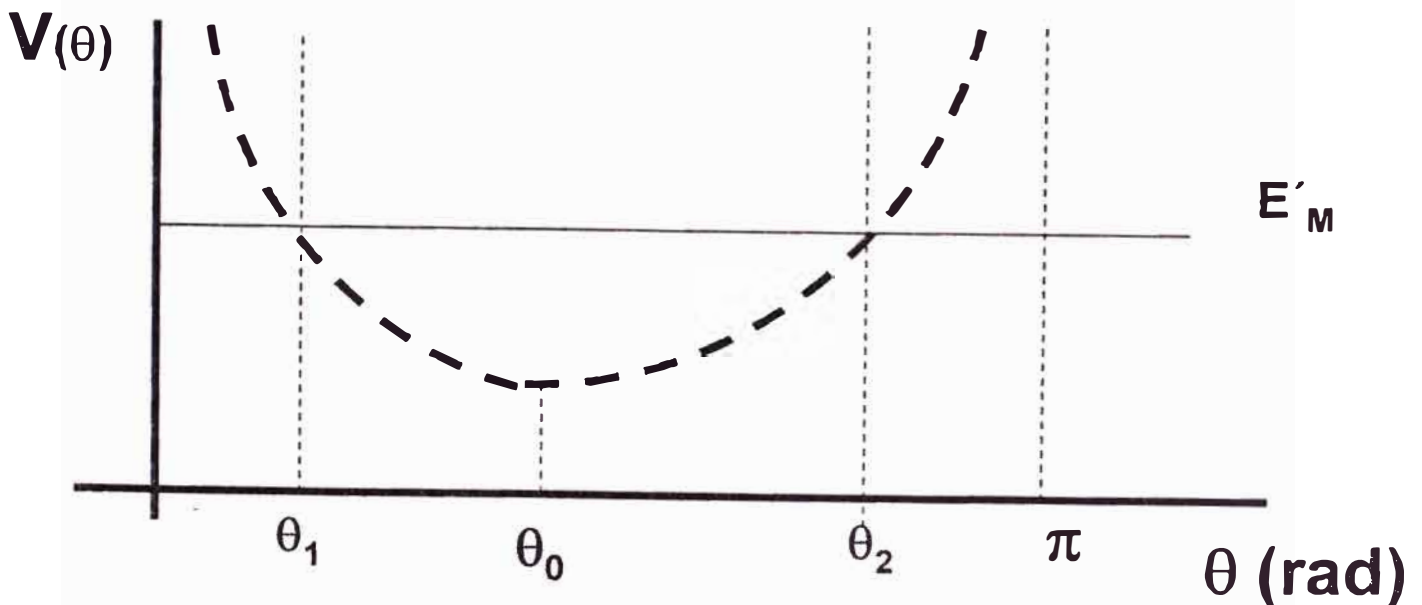


Fig. 4

Como es evidente el término $\frac{I\dot{\theta}^2}{2}$ es mayor o igual que cero luego de la relación (1.28)

$$V(\theta) \leq E'_m. \quad (1.29)$$

Si graficamos la función $V(\theta)$ teniendo en cuenta que $p_\psi \neq p_\phi$ obtenemos la grafica (ver fig 4).

De la gráfica de la función $V(\theta)$ y de la relación (1.29) podemos concluir que:

a) El ángulo θ está acotado, es decir existe un θ_{min} y θ_{max} tal que :

$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}. \quad (1.30)$$

b) Podemos afirmar que el eje X_3 'cabezea' o tiene un movimiento de nutación con velocidad angular $\dot{\theta}(t)$ (llamada también velocidad angular de nutación).

c) Es posible que la función $\theta(t)$ sea periódica (siendo T_N el período de nutación si existe), si se cumple esta propiedad entonces la función $\dot{\theta}(t)$ también es periódica con el mismo período T_N de $\theta(t)$ así como las funciones: $\dot{\phi}(t)$ (denominada velocidad angular de precesión) y $\dot{\psi}(t)$ (llamada velocidad angular de rotación propia) con el mismo período.

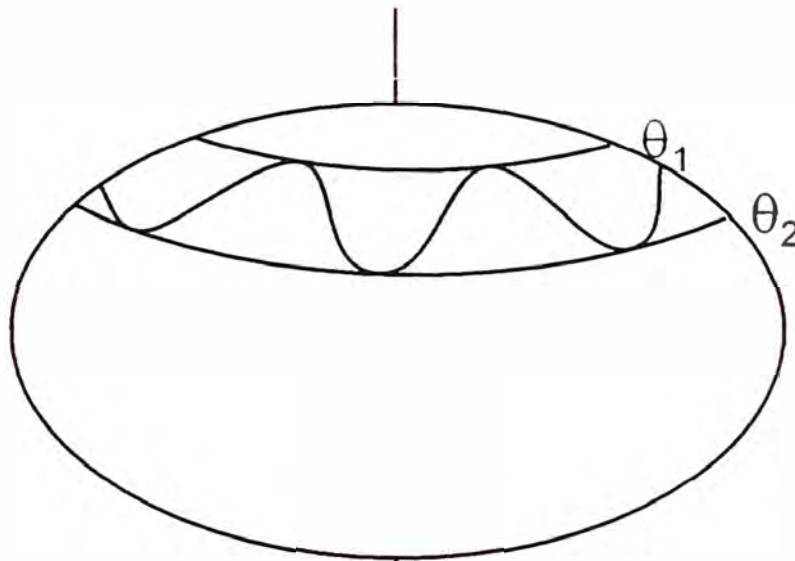


Fig. 5

Para demostrar estas afirmaciones usamos las ecuaciones (1.20) y (1.21) y la definición de función periódica .

Algunos casos posibles del movimiento del eje X_3 son:

a) En el caso que $p_\phi \geq p_\psi$ la velocidad de precesión $\dot{\phi}(t)$ es no negativo luego el ángulo ϕ crece entonces el eje de simetría se mueve alrededor del eje z , oscilando entre $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$, fenómeno que recibe el nombre de nutación. En este caso decimos que el eje de simetría precesa monotonamente alrededor del Eje Z (Ver Fig.5) en la cual se muestra la trayectoria descrita por la proyección del eje de simetría del cuerpo sobre una esfera unidad proyectadas sobre el sistema de coordenadas fijas al cuerpo.

b) Si $\dot{\phi}$ cambia de signo y $\phi(t)$ es creciente podemos afirmar que la velocidad angular de precesión($\dot{\phi}$) cambia de sentido entre los extremos $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$.

Entonces el movimiento de precesión y nutación origina que el eje de simetría describa bucles o rizos tal como se muestra en la Fig.6.

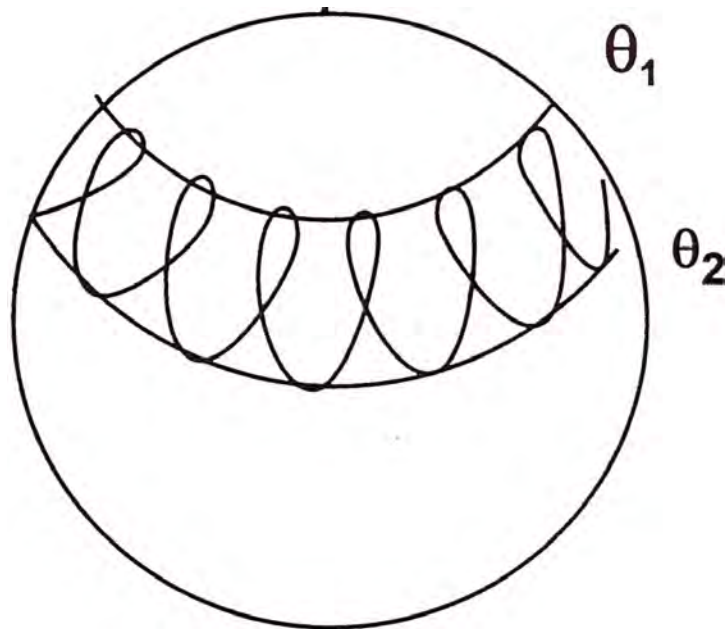


Fig. 6

c) Pudiera darse un caso especial en el cual, el cuerpo rígido gira inicialmente alrededor del eje de simetría con una rapidez angular ω_3 y forma un ángulo θ_1 inicial los ejes X_3 con Z es decir tenemos las condiciones iniciales:

$$\theta(0) = \theta_1, \dot{\theta}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0, \dot{\psi}(0) = \omega_3, \phi(0) = \phi_o, \psi(0) = \psi_o, \quad (1.31)$$

Entonces es evidente que se cumple

$$\vec{W}(t) = \omega_3 \vec{e}_3 \quad (1.32)$$

por estar el cuerpo aislado. En general se puede entonces realizar una descripción cualitativa del movimiento de precesión y nutación analizando p_ϕ y p_ψ .

Para obtener más propiedades del movimiento del cuerpo debemos de resolver las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido (usando la dinámica de Lagrange, considerando como coordenadas generalizadas a los ángulos de Euler). Como es evidente el movimiento dependerá de las condiciones iniciales, que es lo que haremos más adelante en el subcapítulo 1.5.

1.4 Precesión del vector \vec{W} .

Analizaremos el vector velocidad angular \vec{W} del cuerpo rígido, para conseguir este objetivo consideramos las ecuaciones de Euler que se aplican a un cuerpo rígido cuando actúan torques externos con respecto al centro de masa o a un punto fijo, estas ecuaciones son:

$$I_1 \dot{W}_1 + W_2 W_3 (I_3 - I_2) = \tau_1 \quad (1.33)$$

$$I_2 \dot{W}_2 + W_1 W_3 (I_1 - I_3) = \tau_2 \quad (1.34)$$

$$I_3 \dot{W}_3 + W_1 W_2 (I_2 - I_1) = \tau_3 \quad (1.35)$$

Donde los τ_i son las componentes del torque total externo con respecto a la base de vectores B_L , como el cuerpo está aislado $\tau_k = 0$, luego de las ecuaciones (1.33), (1.34), (1.35) y considerando

$$I_1 = I_2 = I \quad (1.36)$$

obtenemos

$$I_1 \dot{W}_1 + W_2 W_3 (I_3 - I_1) = 0 \quad (1.37)$$

$$I_1 \dot{W}_2 + W_3 W_1 (I_1 - I_3) = 0 \quad (1.38)$$

$$I_3 \dot{W}_3 = 0 \quad (1.39)$$

De la ecuación (1.39) se establece que W_3 es constante y si dividimos las ecuaciones (1.37) y (1.38) entre I_1 obtenemos

$$\dot{W}_1 + W_2 W_3 \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) = 0 \quad (1.40)$$

$$\dot{W}_2 + W_1 W_3 \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) = 0 \quad (1.41)$$

De las ecuaciones anteriores (1.40) y (1.41) deducimos que

$$\ddot{W}_2 + W_3^2 \left[\frac{I_3 - I_1}{I_1} \right]^2 W_2 = 0 \quad (1.42)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (1.42) y con (1.41) se consigue

$$W_2 = A \operatorname{sen}[\Omega t + \delta] \quad (1.43)$$

$$W_1 = A \cos[\Omega t + \delta] \quad (1.44)$$

luego el vector velocidad angular tiene módulo constante y gira uniformemente alrededor del eje X_3 con una frecuencia angular Ω siendo :

$$\Omega = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) W_3 \quad (1.45)$$

Luego decimos que la velocidad angular \vec{W} precesa alrededor del eje X_3 . De la expresión anterior (1.45), determinamos el período de precesión:

$$T = \frac{2\pi I_1}{(I_3 - I_1) W_3} \quad (1.46)$$

Además como es evidente la proyección del extremo del vector \vec{W} en el plano $X_1 X_2$ es una *circunferencia*.

Se puede expresar T en función del cociente de los semiejes c y a para conseguir este objetivo recordamos que un cuerpo homogéneo limitado por una superficie elipsoidal:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.47)$$

tiene los momentos principales de inercia:

$$I_1 = \frac{M}{5} (b^2 + c^2) \quad (1.48)$$

$$I_2 = \frac{M}{5} (a^2 + c^2) \quad (1.49)$$

$$I_3 = \frac{M}{5} (a^2 + b^2) \quad (1.50)$$

para el caso $a = b$ y usando los anteriores momentos de inercia, se obtiene

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = 1 - \frac{c}{a} \quad (1.51)$$

por lo tanto de (1.46)

$$T = \frac{2\pi a}{(a - c)W_3} \quad (1.52)$$

que se puede expresar como

$$T = \frac{2\pi}{(1 - \frac{c}{a})W_3} \quad (1.53)$$

Apliquemos la ecuación anterior a la Tierra considerada como un elipsoide de revolución (esferoide achatado) es decir los semiejes a y b son iguales. En este caso particular a los semiejes $a = b$ y c se le dice radio ecuatorial y polar respectivamente.

Recordando que la Tierra realiza una vuelta por día, tomaremos

$$W_3 = 2\pi \frac{rad}{dia} \quad (1.54)$$

Además el radio polar

$$c = 6355.55 Km \quad (1.55)$$

y el radio ecuatorial :

$$a = b = 6376.46 Km \quad (1.56)$$

reemplazando estos datos en la expresión (1.51) obtenemos:

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = 0.00328 \quad (1.57)$$

luego mediante (1.53) se obtiene el período de precesión

$$T = 304,94 dias \quad (1.58)$$

En la tabla (I) (pag.14) se muestra como cambia el período de precesión cuando modificamos el radio polar.

Table 1: Período de Precesión de la velocidad Angular alrededor del Eje X_3

Radio ecuatorial "a" (Km)	Radio polar "c" (Km)	c/a	Período de Precesión(días)
6376,46	6355,55	0,996	304,94
6376,46	6325.55	0.993	151.93
6376,46	6255.55	0.981	52.73
6376,46	6205.55	0.973	37.30
6376,46	6000.55	0.941	16.96

Observaciones:

- a) A pesar de existir una diferencia de 21 Km entre el radio polar y el ecuatorial ,considerandola pequeña frente al radio ecuatorial de 6376.46 Km existe un período de precesión de alrededor de 304 días.
- b) Los calculos observados del período de precesión de la tierra son de alrededor de 400 días.
- c) Podemos afirmar que la diferencia entre el valor teorico con la observada del período se debe principalmente al considerar a la tierra como un cuerpo rígido homogéneo y no consideramos un modelo más real(por ejemplo la densidad de al tierra no es homogenea).
- d) Notamos que conforme el radio polar disminuye el período de precesión decrece enormemente, llegando a ser de 16 días para una disminución del radio polar de alrededor del 6 por ciento.
- e) Si el radio polar aumentase el período de precesión también aumenta.
- f) En el caso hipotético que el cuerpo rígido fuese una esfera perfecta no presentaria el fenómeno de precesión de la velocidad angular.

Podemos finalmente comentar que de la ecuación (1.53) el período de precesión de la velocidad angular sólo depende de la relación c/a y puede suceder que un cuerpo pequeño y grande tengan el mismo movimiento si se dan las mismas condiciones iniciales.

1.5 Solución Numérica para el elipsoide aislado utilizando el metodo de Runge Kutta de orden cuatro.

Como el cuerpo está aislado la energía potencial es igual a cero entonces la función de Lagrange

$$L = E_k \quad (1.59)$$

reemplazando (1.12) en (1.59)

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (1.60)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange para θ , ϕ y ψ obtenemos las ecuaciones diferenciales del movimiento

$$I\ddot{\theta} + I_3\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta + (I_3 - I)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \quad (1.61)$$

$$\ddot{\phi}(I\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta) + \dot{\theta}\dot{\phi}\sin 2\theta(I - I_3) - I_3\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta + I_3\ddot{\psi}\cos\theta = 0 \quad (1.62)$$

$$\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta = 0 \quad (1.63)$$

De las ecuaciones anteriores (1.61), (1.62), (1.63) obtenemos: $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$, $\ddot{\psi}$

$$\ddot{\theta} = \frac{(I - I_3)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - I_3\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta}{I} \quad (1.64)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_3\dot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\phi}(I_3 - 2I)\cos\theta}{I\sin\theta} \quad (1.65)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\dot{\theta}\dot{\phi}\sin^2\theta - I_3\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\phi}(I_3 - 2I)\cos^2\theta}{I\sin\theta} \quad (1.66)$$

Con el cambio de variable:

$$X_1 = \theta \quad (1.67)$$

$$X_2 = \phi \quad (1.68)$$

$$X_3 = \psi \quad (1.69)$$

$$X_4 = \dot{\theta} \quad (1.70)$$

$$X_5 = \dot{\phi} \quad (1.71)$$

$$X_6 = \dot{\psi} \quad (1.72)$$

las ecuaciones (1.64), (1.65), y (1.66), se transforman en las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{X}_1 = X_4 \quad (1.73)$$

$$\dot{X}_2 = X_5 \quad (1.74)$$

$$\dot{X}_3 = X_6 \quad (1.75)$$

$$\dot{X}_4 = \frac{X_5^2(I - I_3) \operatorname{sen} X_1 \cos X_1 - I_3 X_5 X_6 \cos X_1}{I} \quad (1.76)$$

$$\dot{X}_5 = \frac{I_3 X_4 X_6 + X_4 X_5 (I_3 - 2I) \cos X_1}{I \operatorname{sen} X_1} \quad (1.77)$$

$$\dot{X}_6 = \frac{X_4 X_5 \sin^2 X_1 - I_3 X_4 X_6 \cos X_1 - (I_3 - 2I) X_4 X_5 \cos^2 X_1}{I \operatorname{sen} X_1} \quad (1.78)$$

Estas ecuaciones se resuelven numéricamente con el método de Runge Kutta de orden 4 con paso $h = 10^{-5}$. Como estamos interesados en el movimiento de la tierra, los valores de 'a', 'c' serán de las dimensiones de la Tierra. Las condiciones iniciales que se consideran, son las siguientes :

$$X_{01} = 23 * \left(\frac{\pi}{180}\right) = 23^\circ \quad (1.79)$$

$$X_{02} = 0 \quad (1.80)$$

$$X_{03} = 0 \quad (1.81)$$

$$X_{04} = -0.01 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{año}} \quad (1.82)$$

$$X_{05} = -0.001 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{año}} \quad (1.83)$$

$$X_{06} = 2261.9 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{año}} \quad (1.84)$$

La justificación de considerar estas condiciones iniciales son por las siguientes razones:

- i) La condición inicial $\theta(0)$ se toma del valor de θ observada del movimiento de la Tierra.
- ii) Como el eje de rotación es aproximado al eje polar X_3 , se puede demostrar fácilmente que las condiciones iniciales $\dot{\theta}(0)$ y $\dot{\phi}$ deben ser pequeñas (pero no cero) comparada con $\dot{\psi}(0)$, luego $\dot{\psi}(0) = 2\pi \operatorname{rad}/\operatorname{día}$.
- iii) Con respecto a las otras condiciones iniciales $\phi(0)$ y $\psi(0)$ se tomaron valores arbitrarios y siempre las principales características del movimiento de la Tierra no se modificaban y se tomo el valor más simple que es el valor de cero para realizar los cálculos y mostrar los resultados.

Para observar la diferencia del movimiento de la Tierra cuando consideramos la interacción gravitatoria con el Sol y la Luna se toma las mismas condiciones iniciales en los capítulos 3 y 4.

Al resolver las ecuaciones diferenciales anteriormente se han obtenido los gráficos para las funciones : $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$ asi como los gráficos de la proyección de un punto N ubicado(Ver Fig.7) en el polo Norte (que pertenece al eje X_3) sobre el plano XY (Y versus X), proyección del extremo del vector \vec{W} sobre el plano XY (W_y versus W_x) y la proyección del extremo del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 (W_2 versus W_1).

Los cálculos se realizaron también para otro valor de c para observar como cambian el comportamiento del movimiento de la tierra.

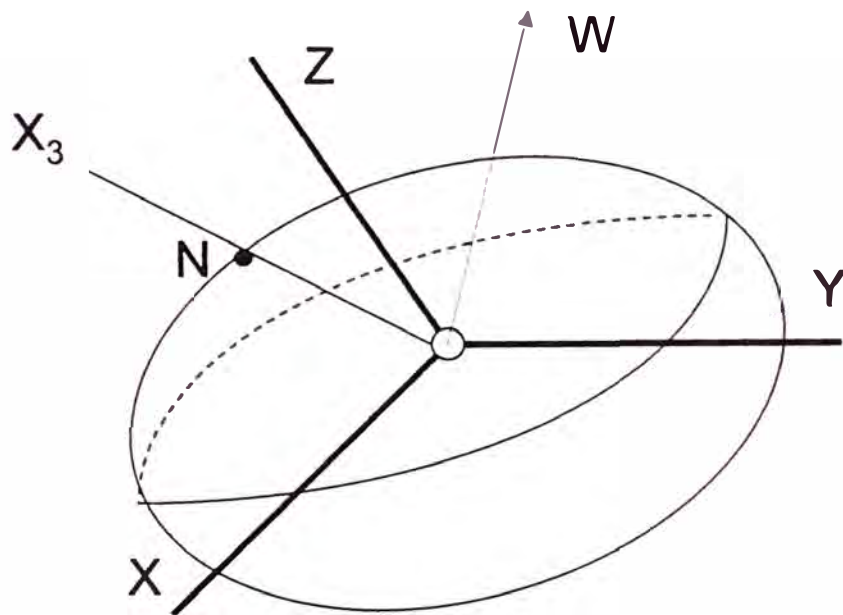


Fig. 7

Las gráficas más importantes que se muestran se presentan agrupadas de acuerdo al radio polar "c" y al intervalo de tiempo (medido en días)

I. PRIMER CASO.

Considerando el radio polar $C = 6355.55 \text{ Km}$, se muestran las tablas con sus respectivos gráficos para diversos intervalos de tiempo en días de la página (19) a la página (42).

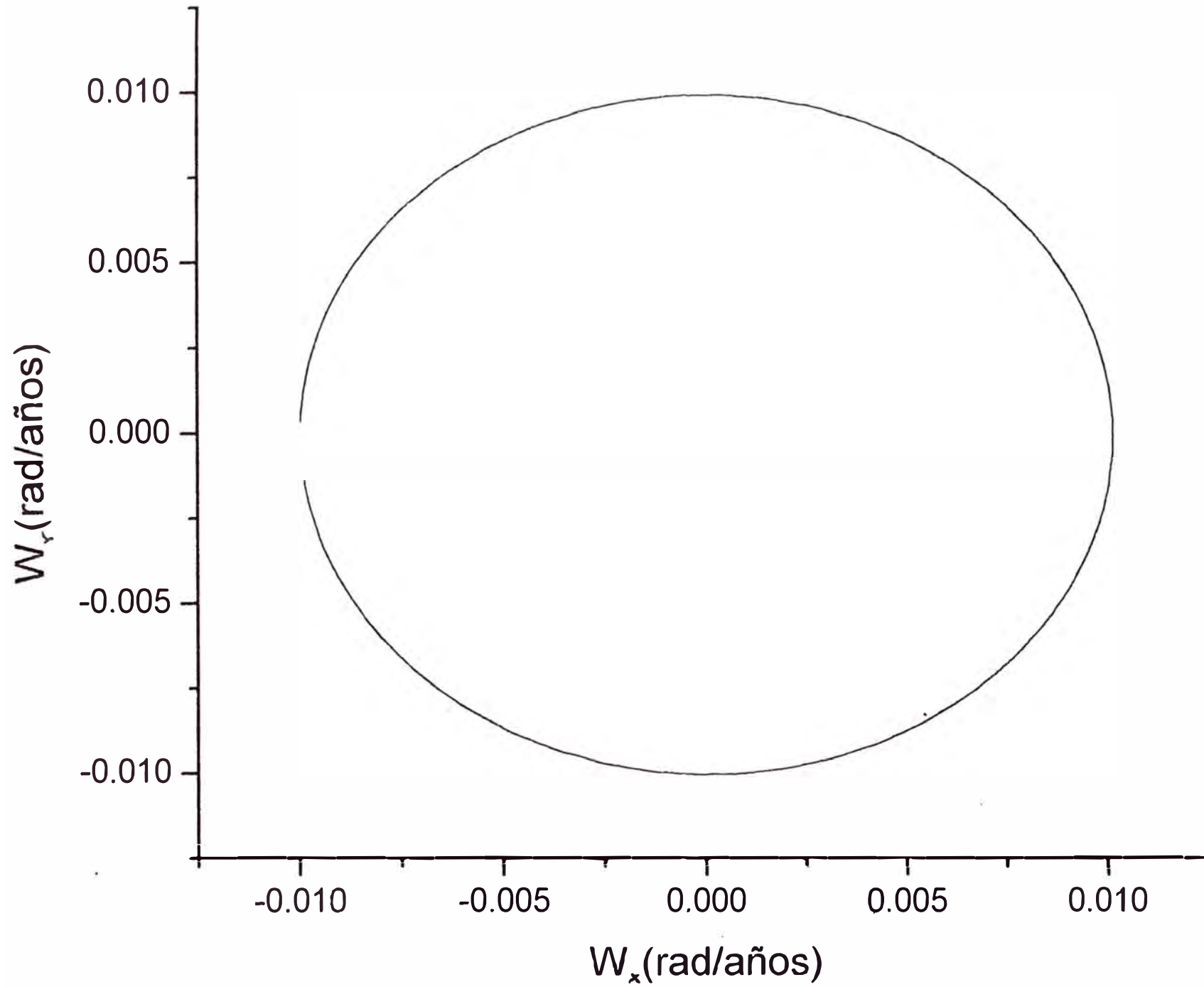
Table 1: Graficos obtenidos para $c = 6355.55 \text{ Km}$ para el intervalo de tiempo $0 < t < 1$ día

Función ó Grafico	Pagina
$W_Y \text{ vs } W_X$	19
$Y \text{ vs } X$	20
$E_M \text{ vs } t$	21

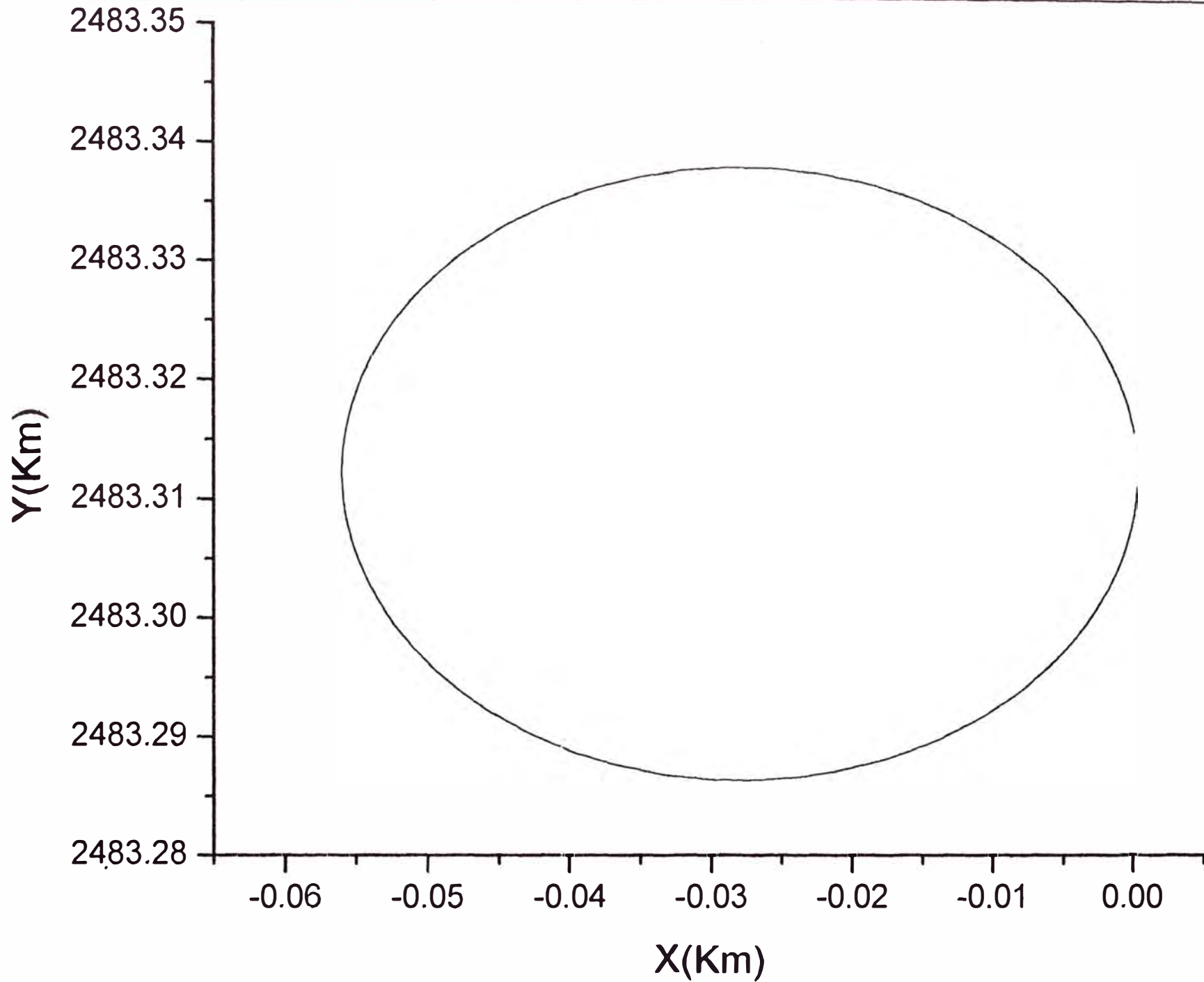
Observaciones:

- Del Gráfico de la proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es casi una circunferencia, luego este vector 'precesa' alrededor del Eje Z. Podemos estimar que el período de precesión T_z , es de alrededor de un día.
- Del Gráfico de la proyección del extremo del eje X_3 (Punto N) sobre el plano XY notamos que esta proyección se mueve sobre una Elipse pero aun la curva no se cierra. Se puede deducir que el tiempo en que demora dar una 'vuelta' la proyección es del orden del periodo T_z .
- Notamos que de la última gráfica la energía mecánica calculada numericamente (calculando previamente los ángulos de Euler) es una constante. Debemos mencionar que este comportamiento se conserva cuando se toma mayor intervalo de tiempo.

Proyección del Vector W sobre el plano XY para 1 día



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 1 día



Energia Mecanica Adimensional

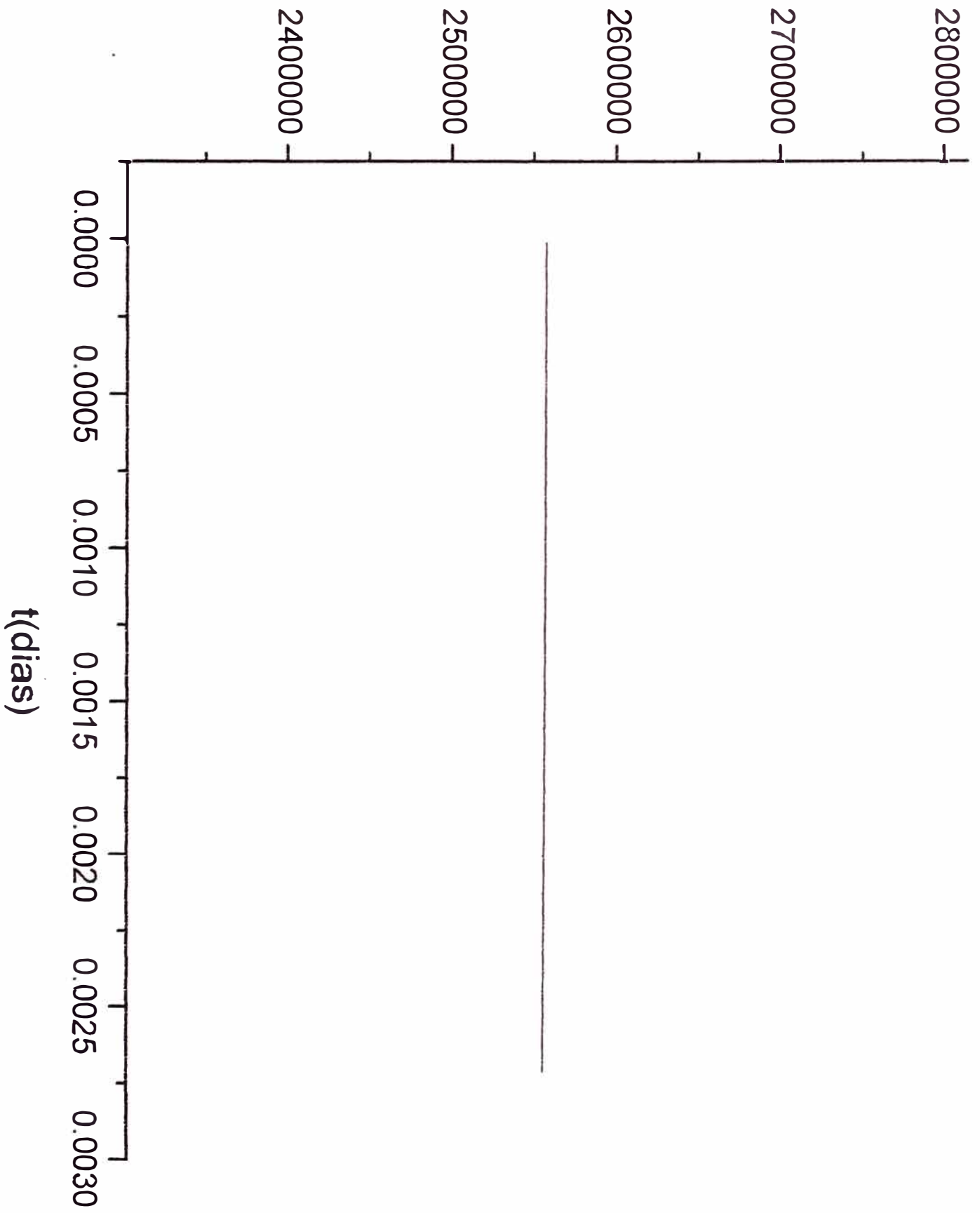
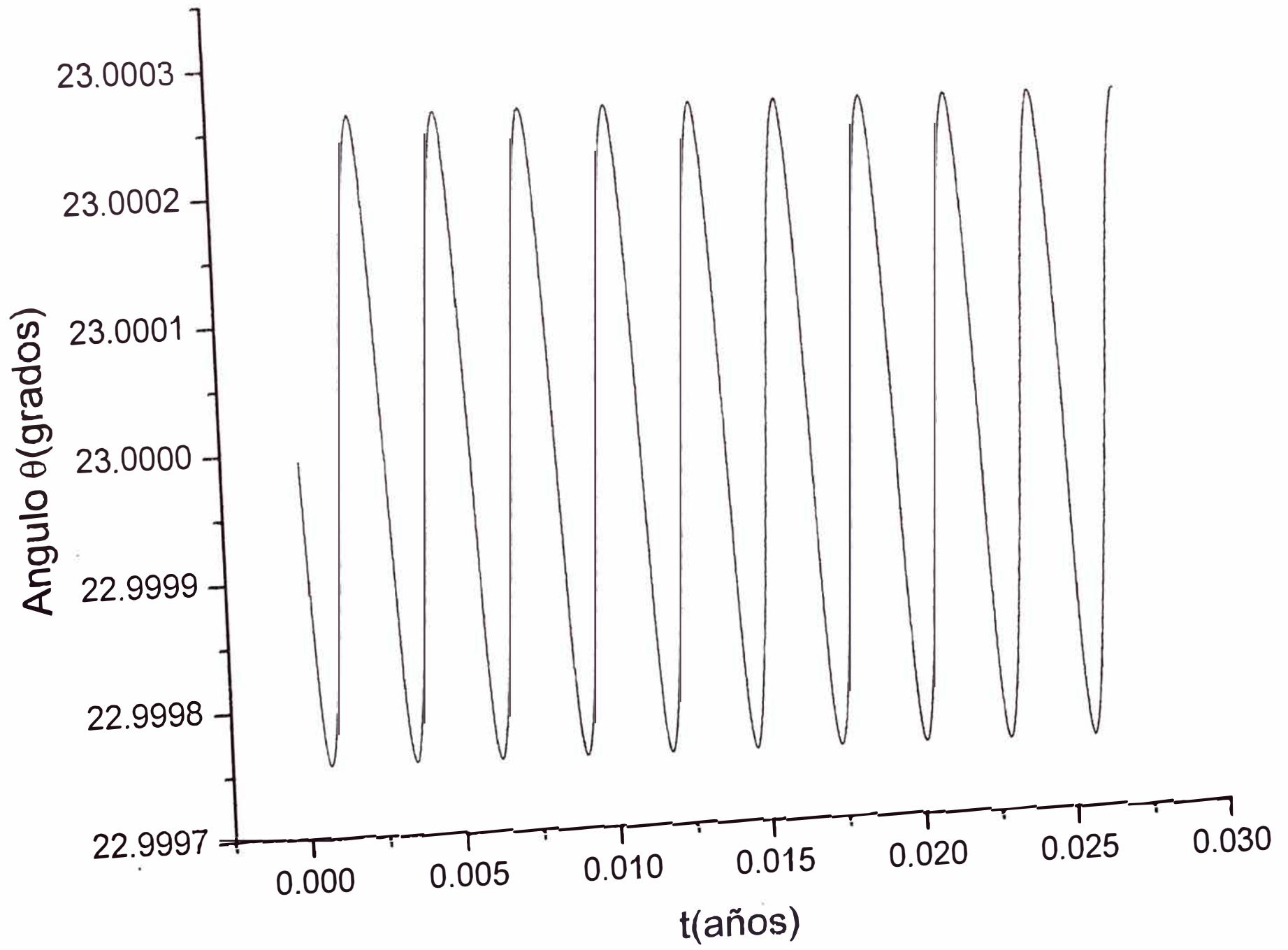


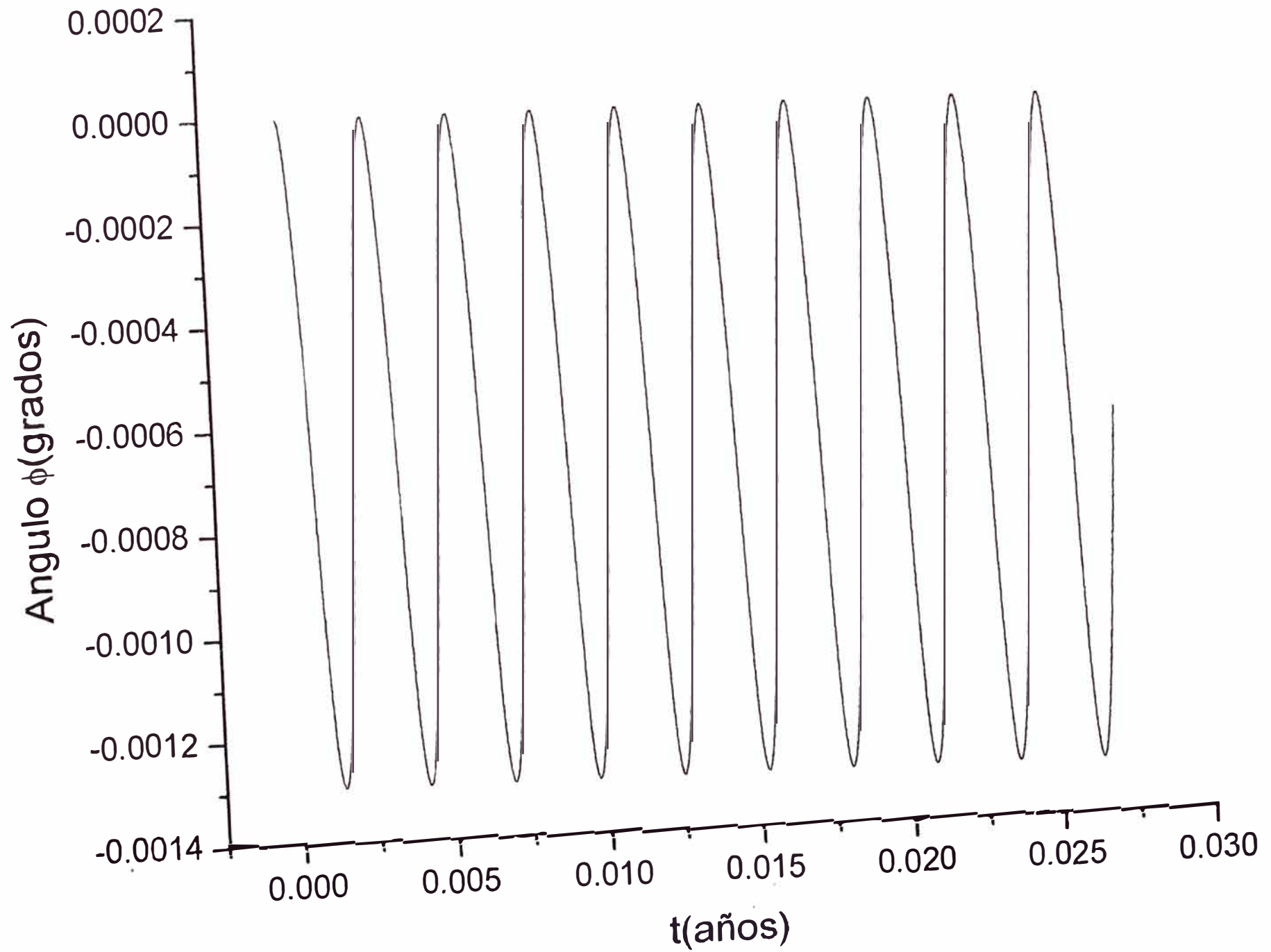
Table 2: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 10$ días

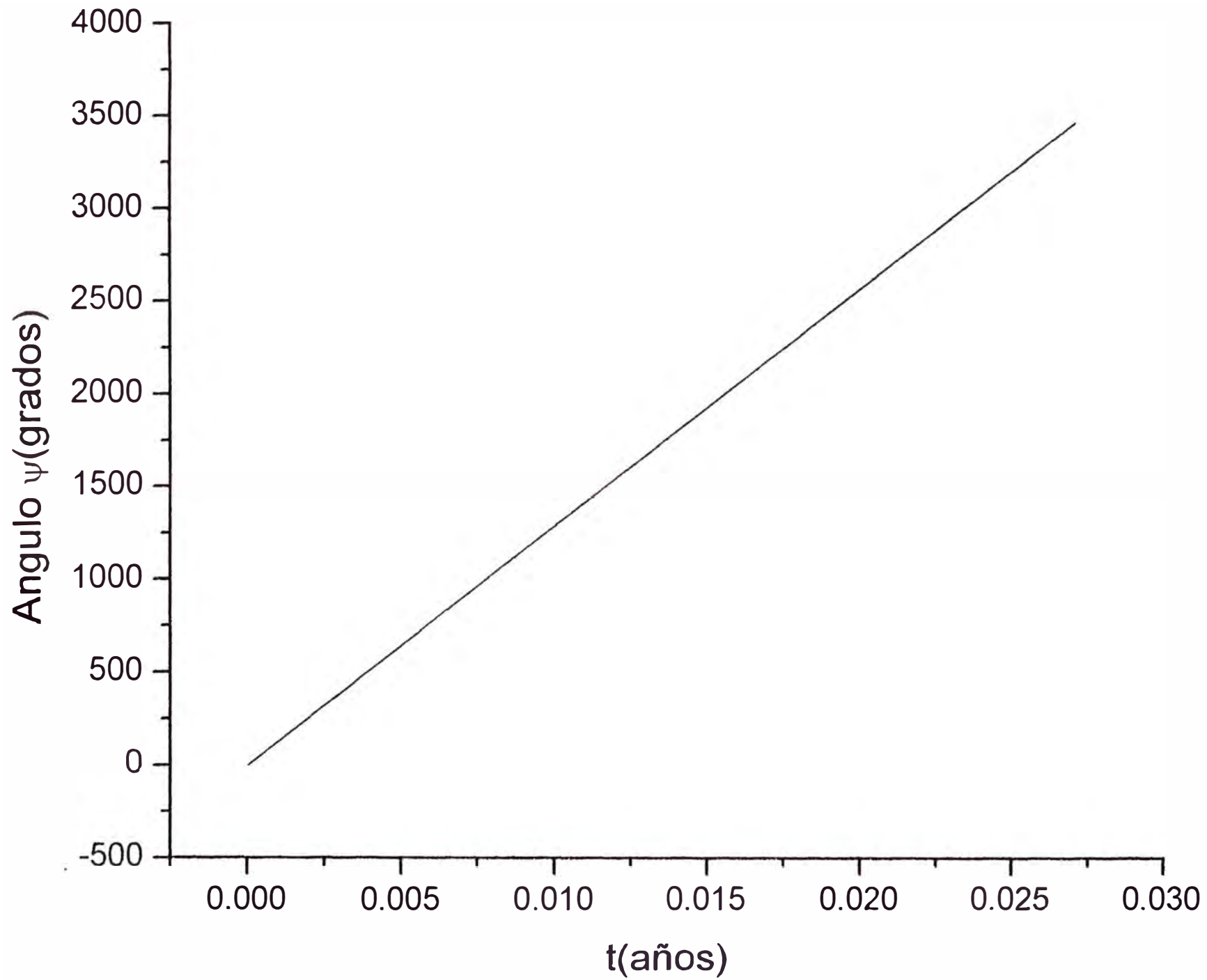
Función ó Grafico	Pagina
$\theta(t)$	23
$\phi(t)$	24
$\psi(t)$	25
$\dot{\theta}(t)$	26
$\dot{\phi}(t)$	27
$\dot{\psi}(t)$	28
Y vs X	29
W_2 vs W_1	30

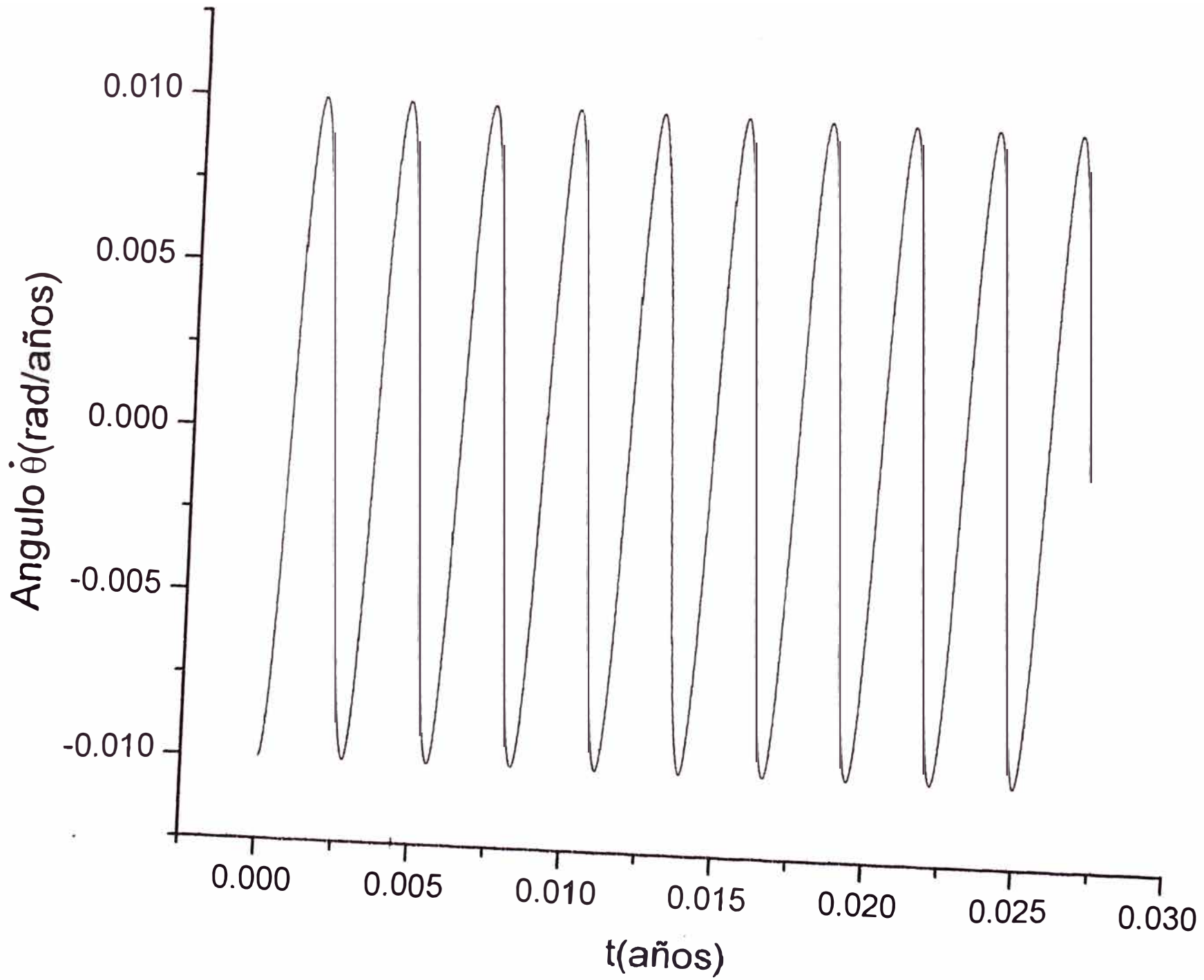
Observaciones:

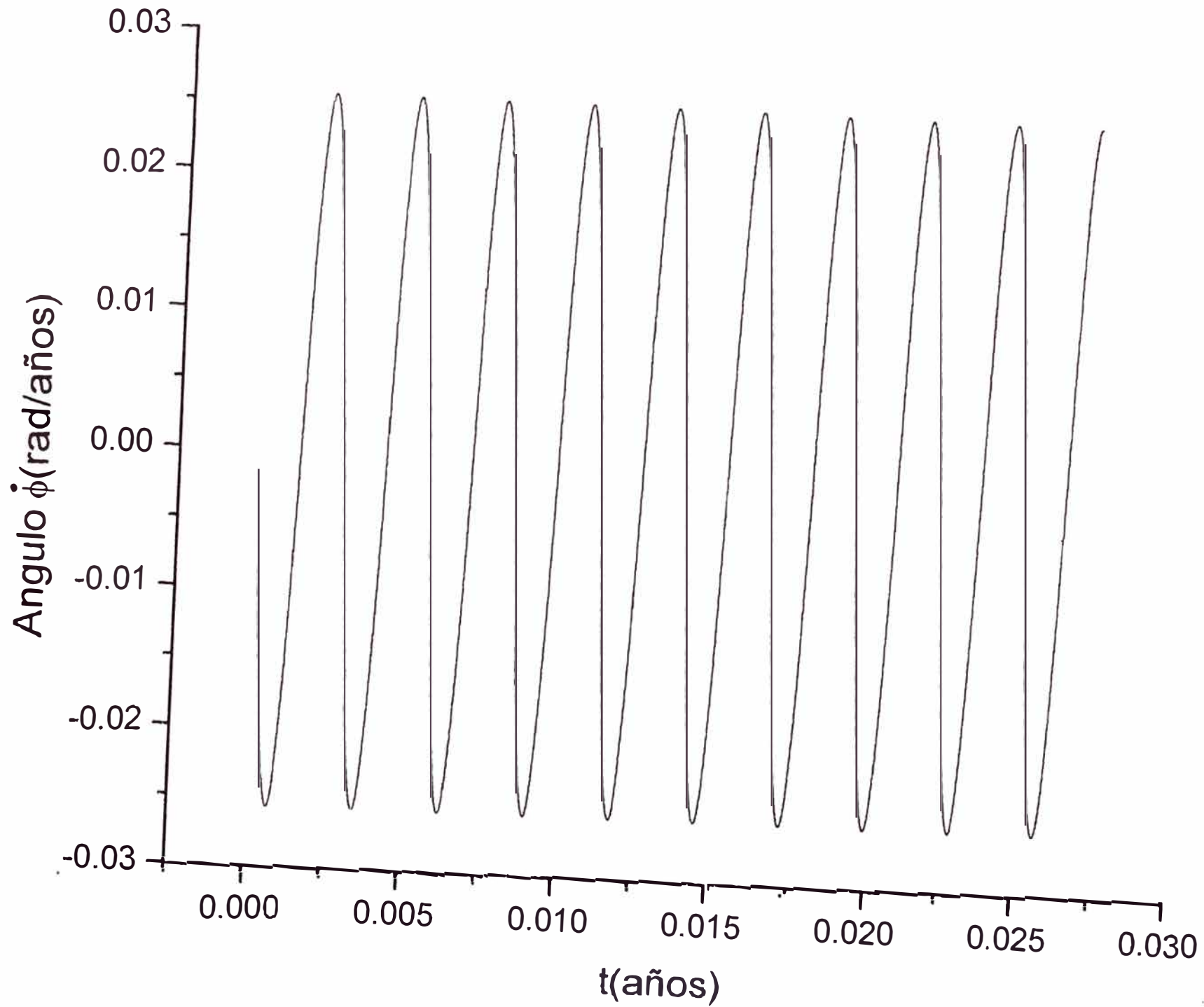
- a) Las gráficas de las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ son periódicas.
- b) El ángulo ψ es creciente.
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es exactamente una circunferencia.
- c) La proyección del extremo del eje X_3 sobre el plano XY se mueve periódicamente en una Elipse con un período menor de un día.
- d) El gráfico mas interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 que es curva decreciente en este intervalo de tiempo (más adelante se mostrará que será cerrada esta curva).

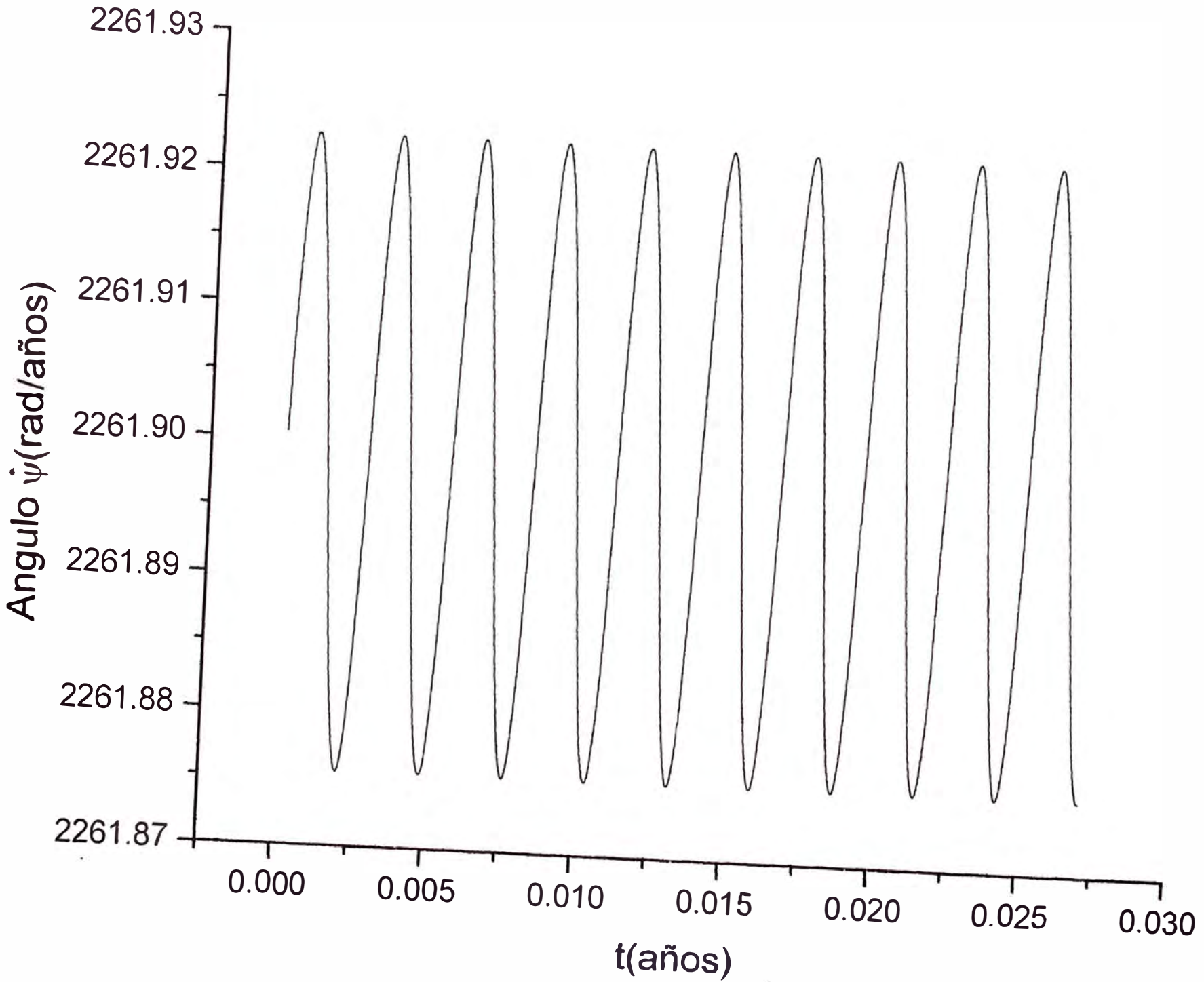




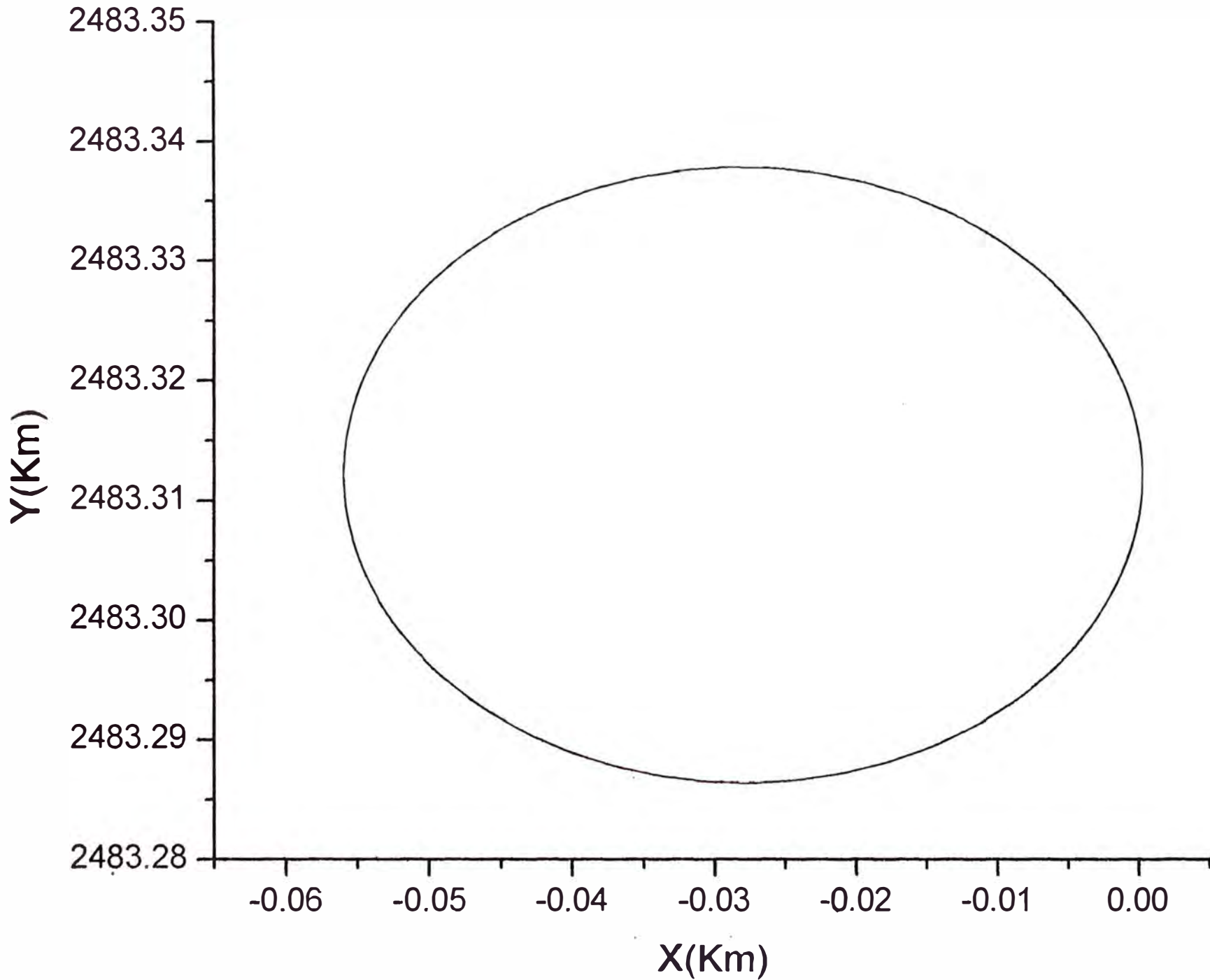








Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el Plano XY



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 10 días

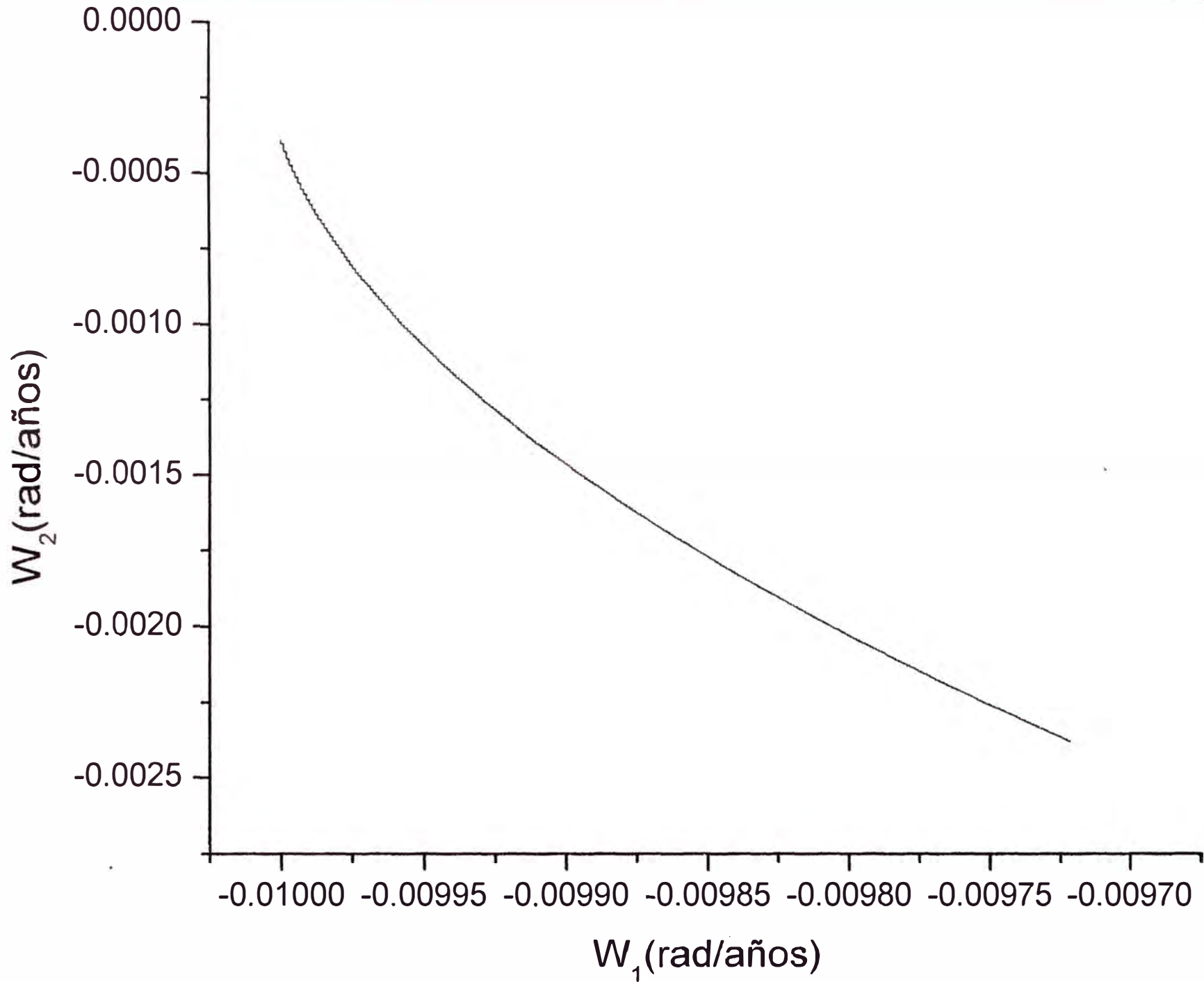
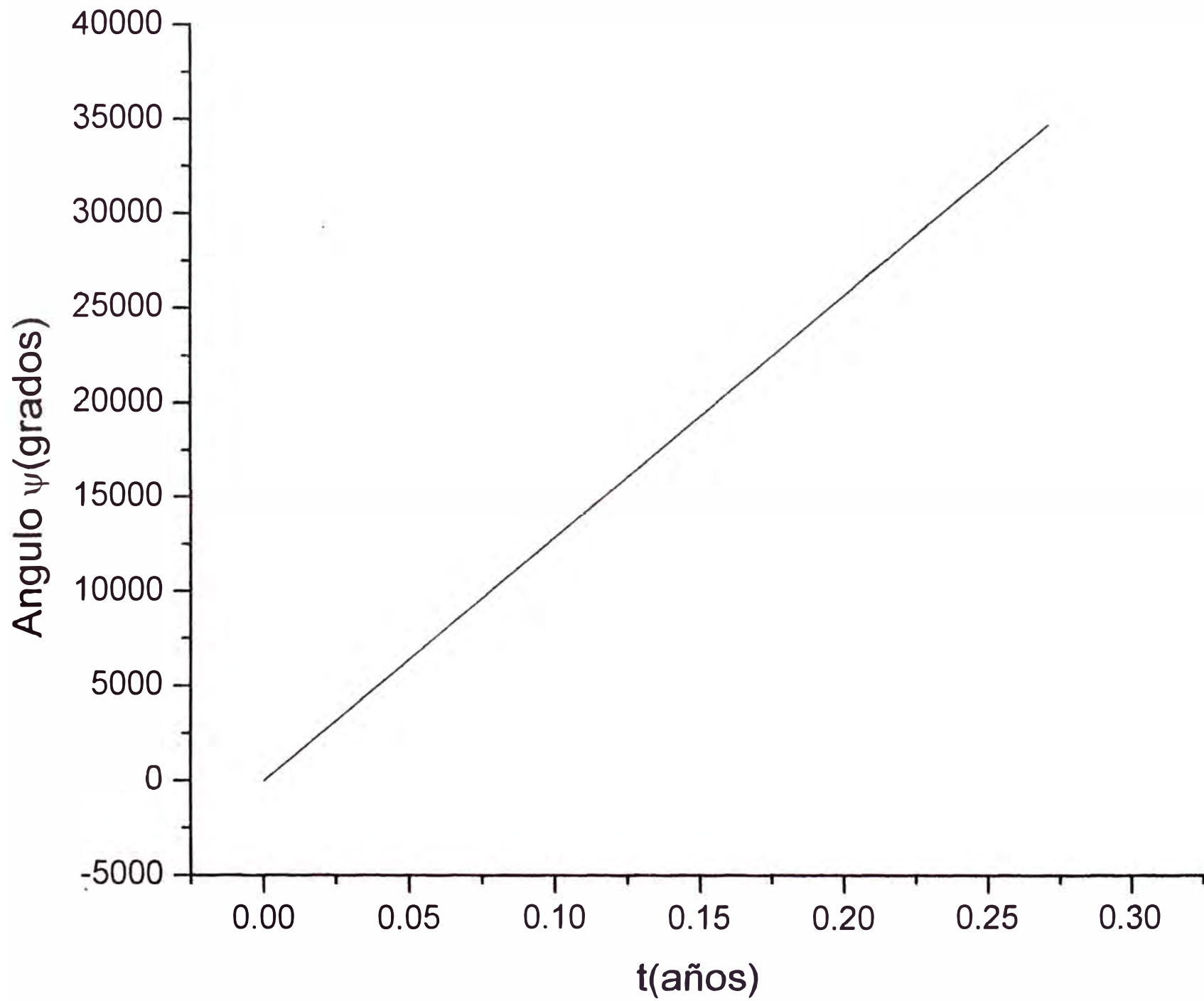


Table 3: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 100$ días

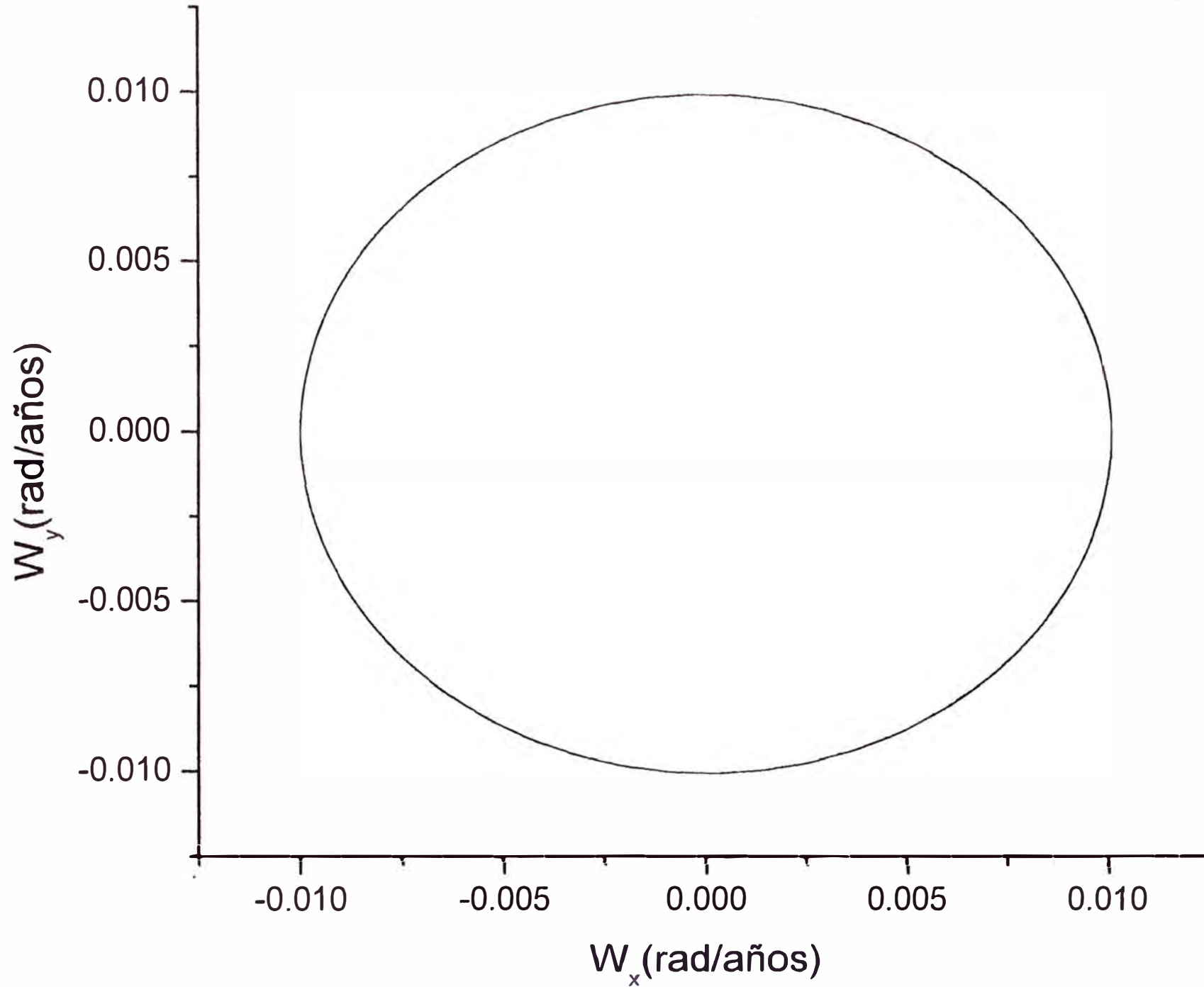
Función ó Grafico	Pagina
$\psi(t)$	32
W_y vs W_x	33
Y vs X	34
W_2 vs W_1	35

Observaciones:

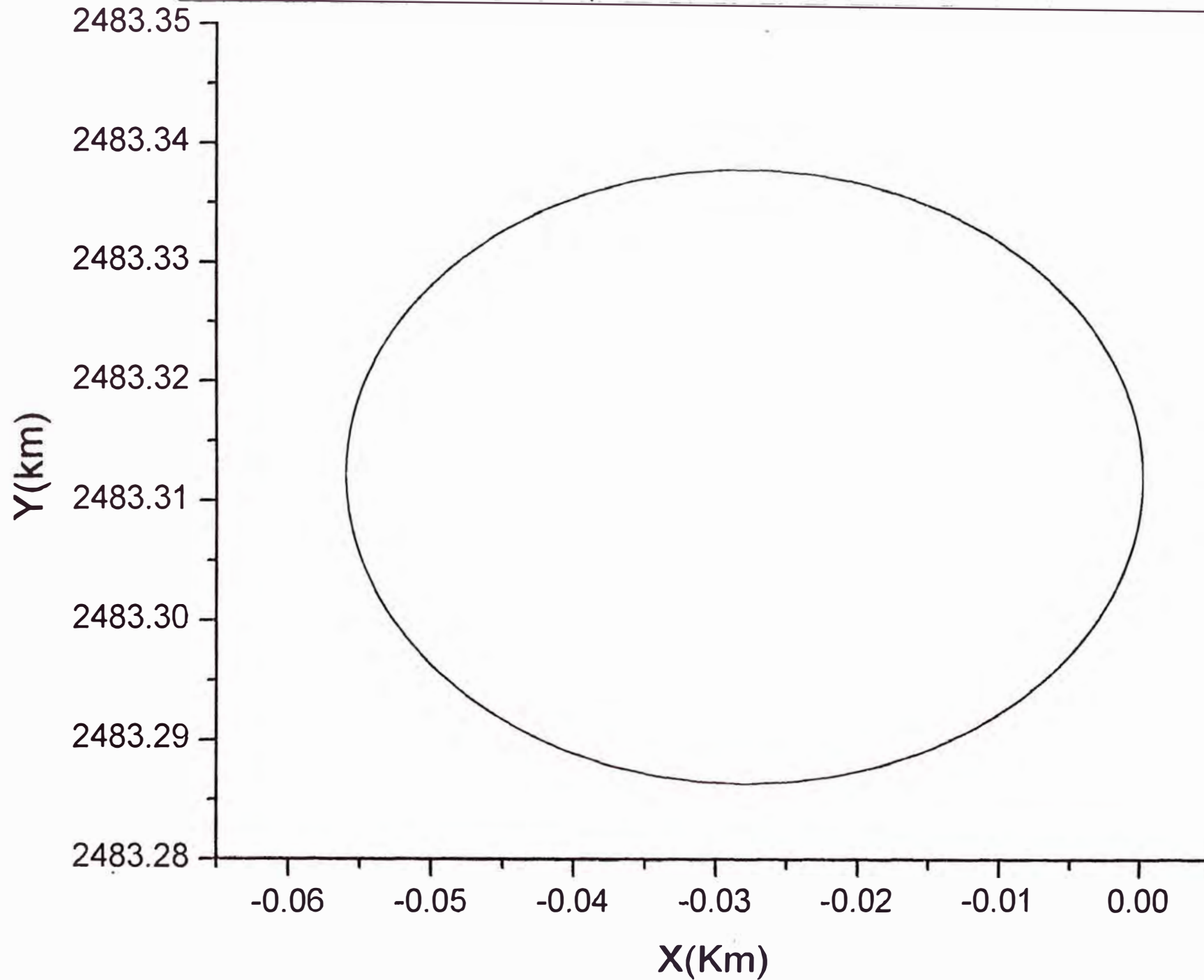
- a) El ángulo ψ sigue creciente.
- b) Que el vector \vec{W} sigue precesando alrededor del eje Z.
- c) La proyección del extremo del eje X_3 sobre el plano XY sigue siendo una elipse.
- d) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una curva que no es cerrada por lo tanto el período de precesión es un mayor de 100 días.



Proyección del Vector Velocidad Angular sobre el Plano XY



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el Plano XY



Proyeccion del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 100 dias

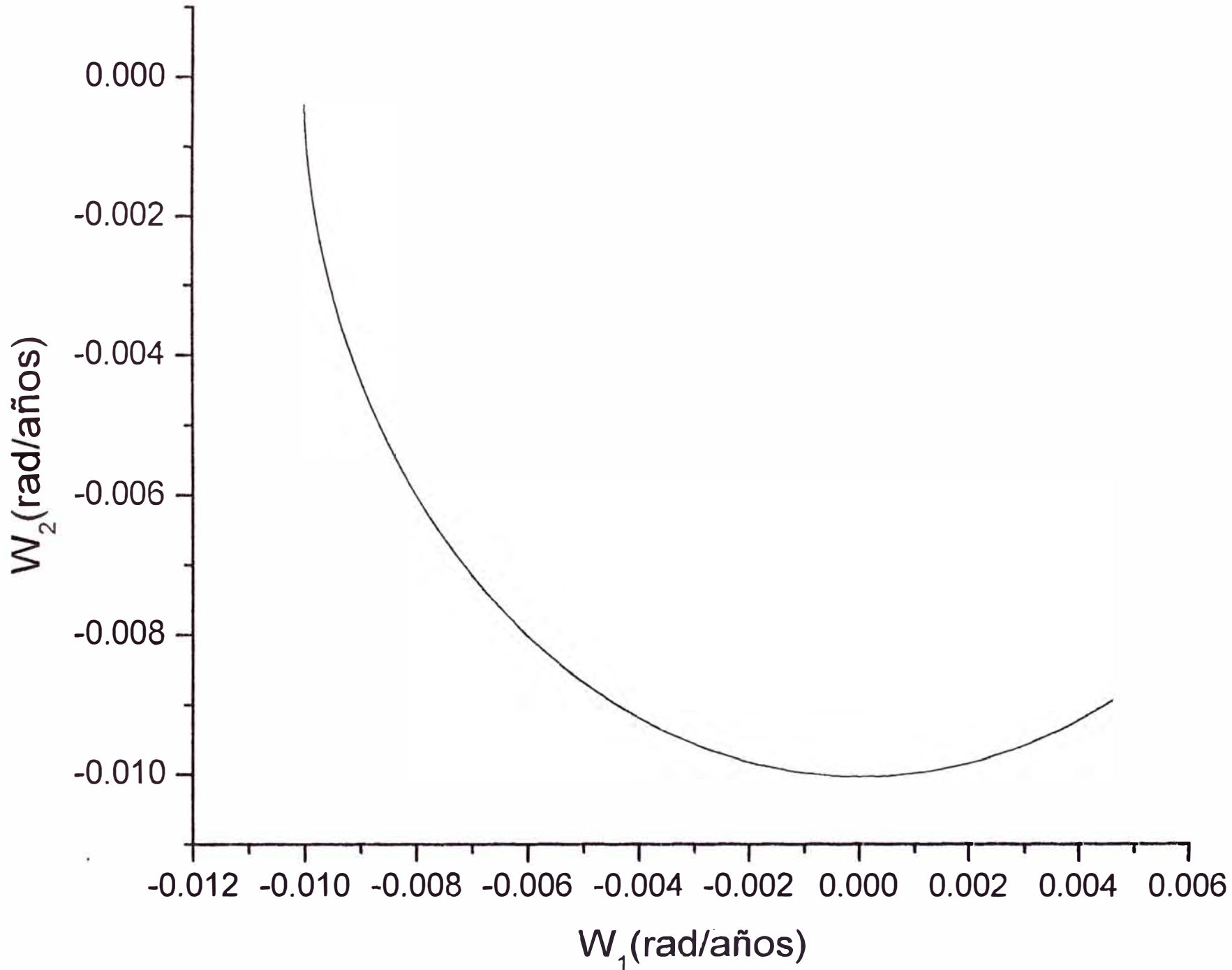


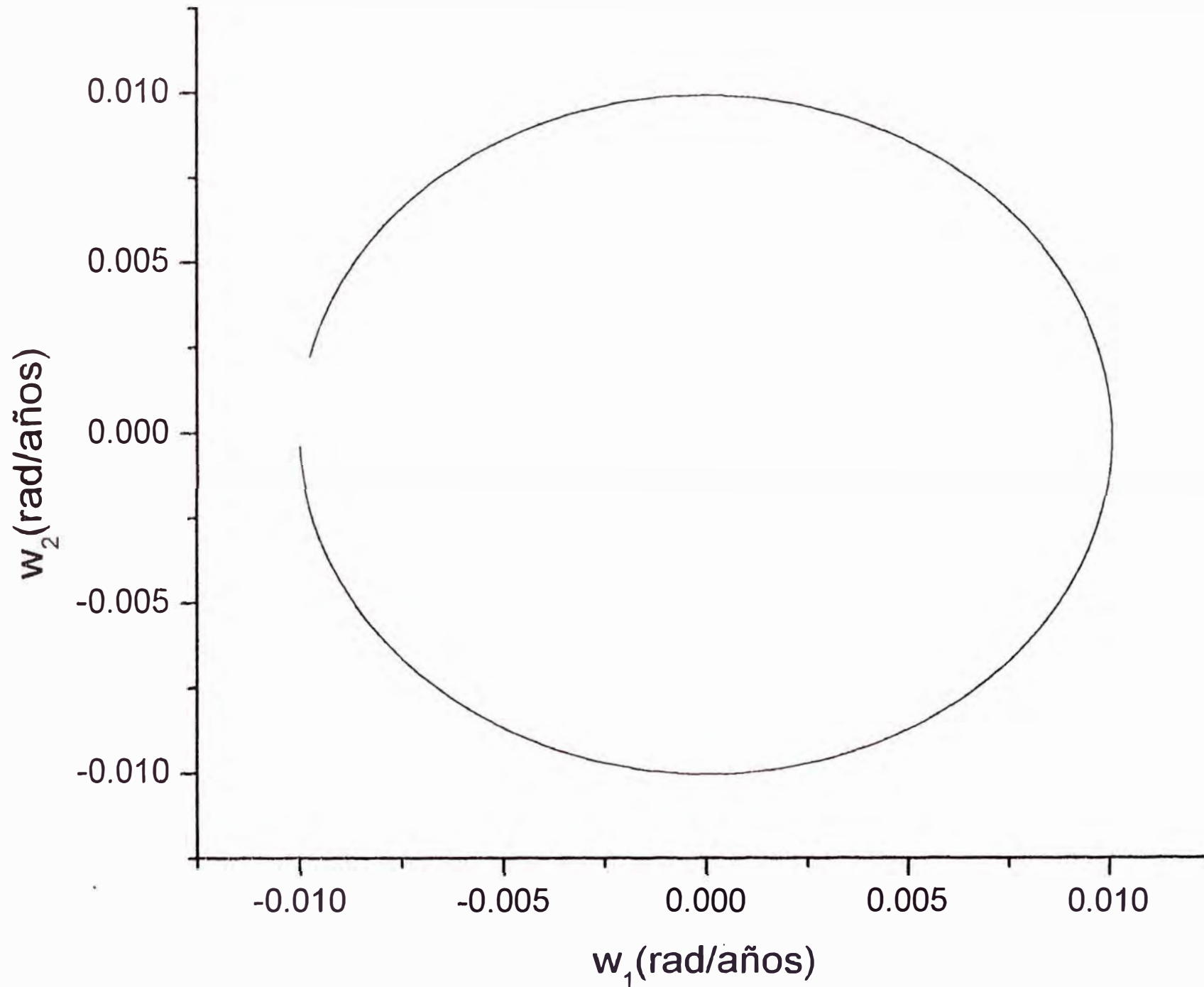
Table 4: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 300$ días

Función ó Grafico	Pagina
W_2 vs W_1	37
Y vs X	38
W_y vs W_x	39
$\psi(t)$	40

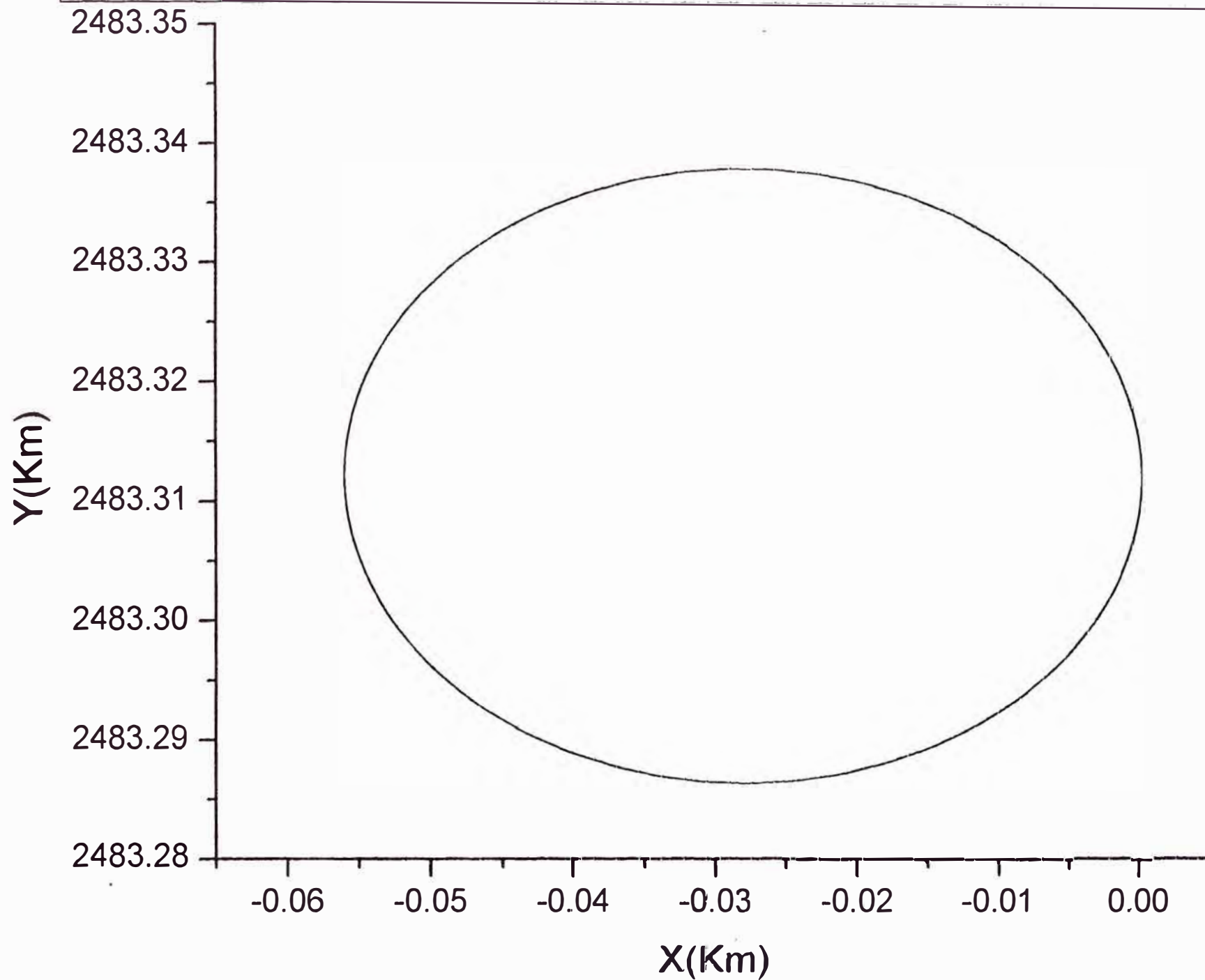
Observaciones:

- a) El ángulo ψ sigue creciente.
- b) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es una circunferencia.
- c) Sigue manteniendose una elipse la trayectoria de la proyección del eje X_3 sobre el plano XY , observemos que esta elipse está en el segundo cuadrante del plano XY .
- d) Mostramos que la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 en él casi esta cerrada y podemos afirmar que el período de precesión es de alrededor de 300 días.

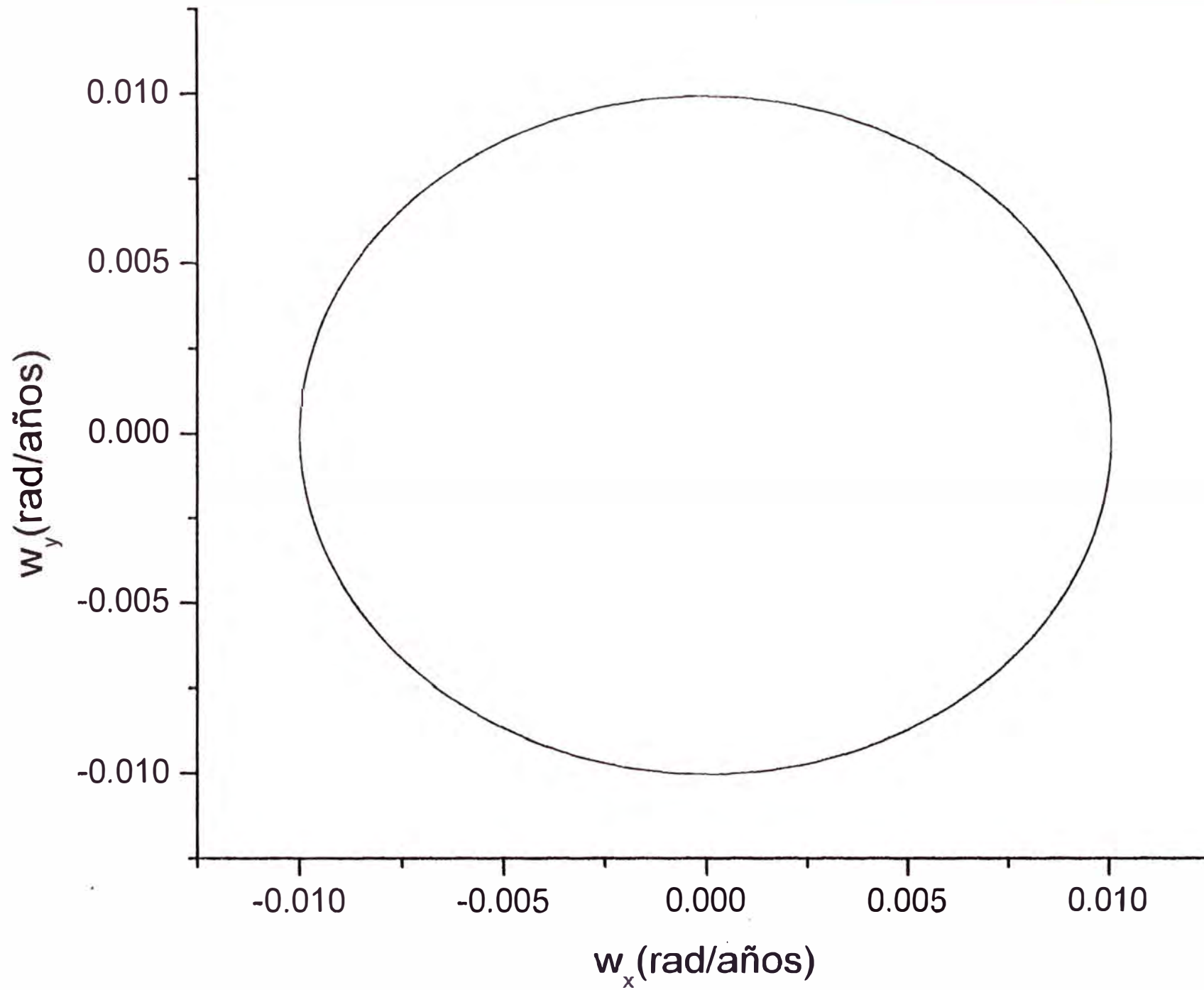
Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 300 días



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 300 dias



Proyección del Vector W sobre el plano XY para 300 días



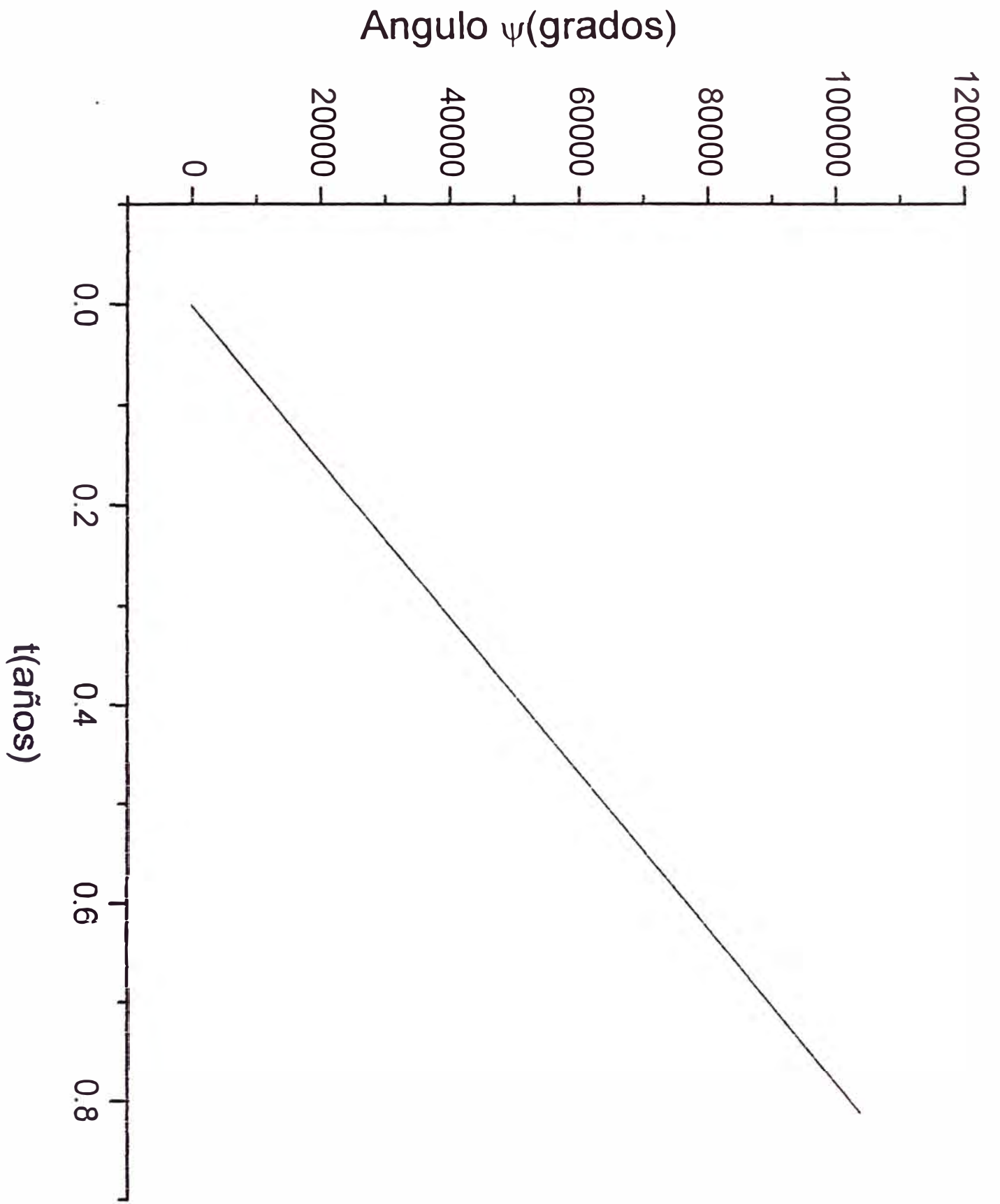


Table 5: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 1000$ días

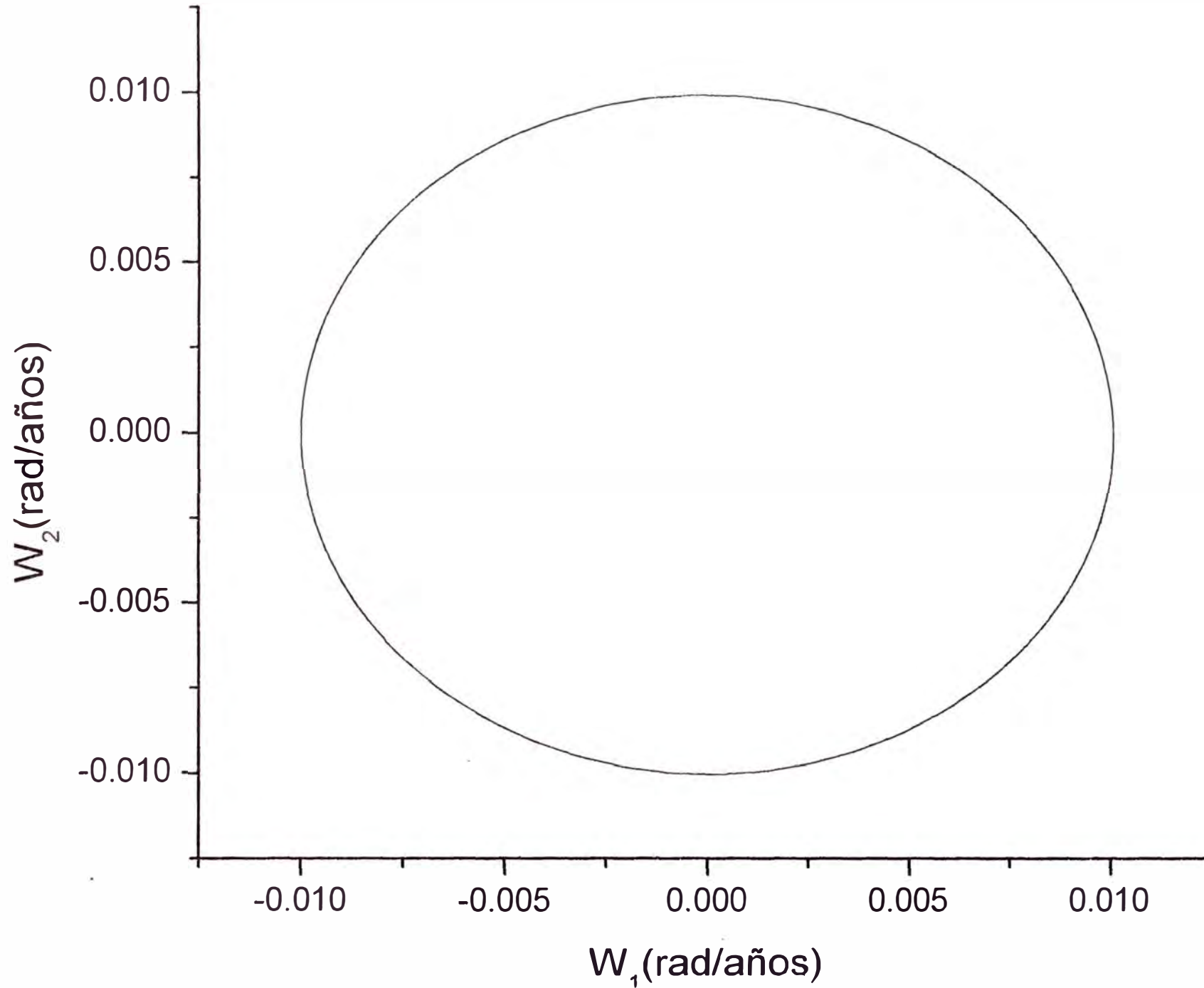
Gráfico	Pagina
W_2 vs W_1	42

Observaciones:

Podemos comprobar que la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una grafica cerrada confirmando las ecuaciones (1.43) y (1.44) , y que el período de precesión es menor que 1000 días.

Mencionamos que los gráficos de las otras proyecciones se mantiene igual a los gráficos obtenidos en los intervalos de tiempo menores, por esa razon no lo mostramos.

Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 1000 días



II. SEGUNDO CASO

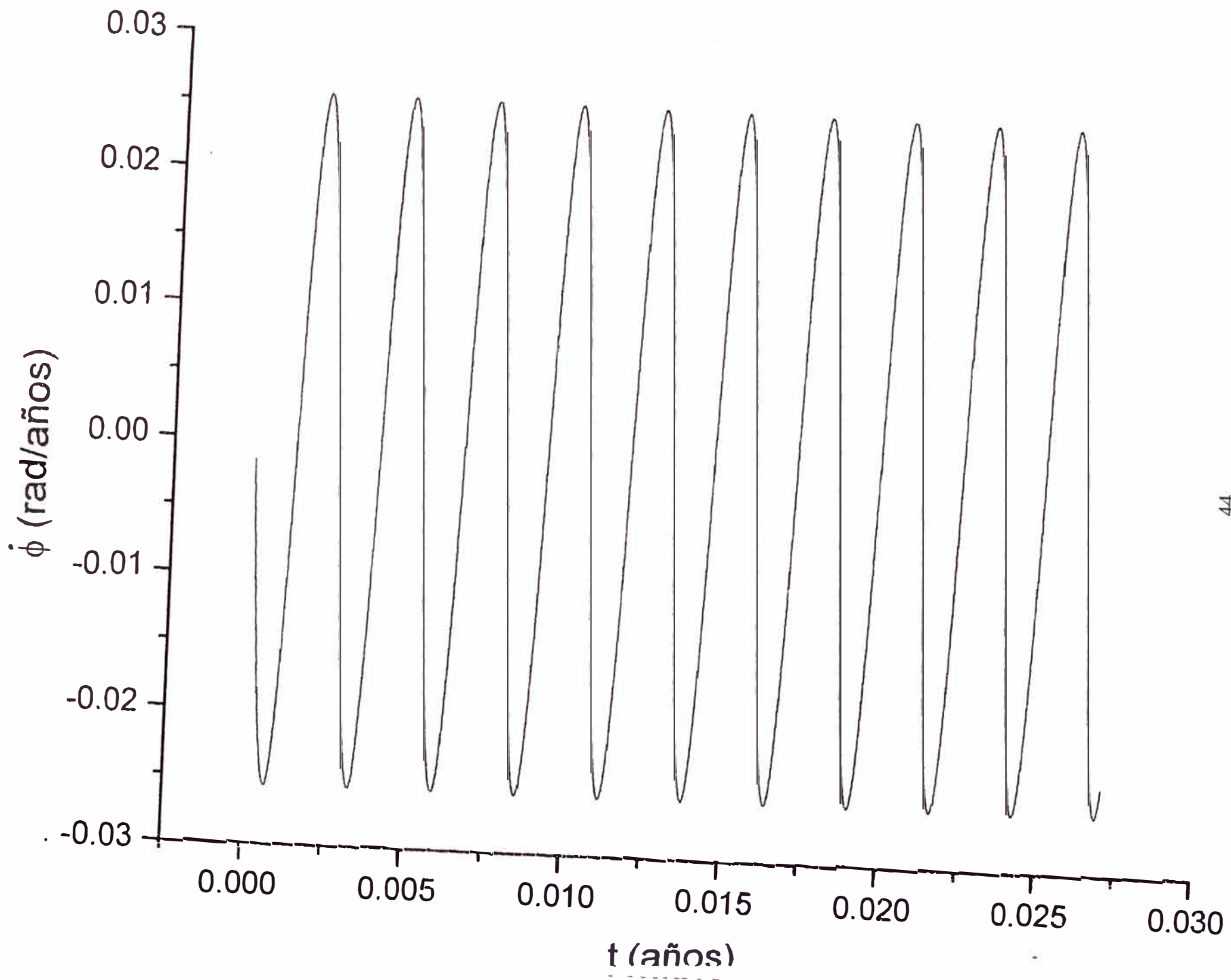
Considerando un radio polar $C = 6000.55K\text{m}$, se muestran las tablas con sus respectivos gráficos para diversos días de la página (44) a la página (56).

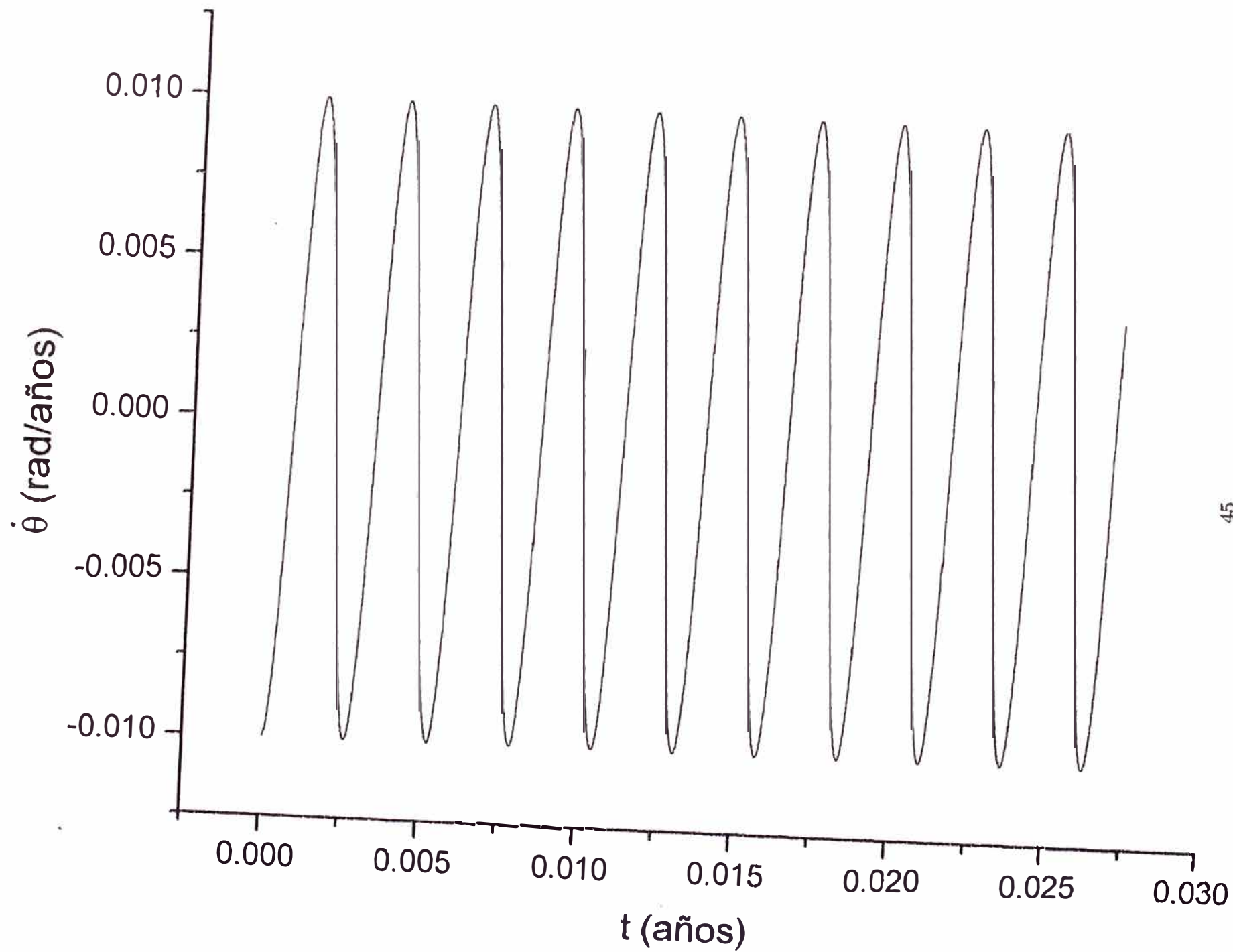
Table 1: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 10$ días

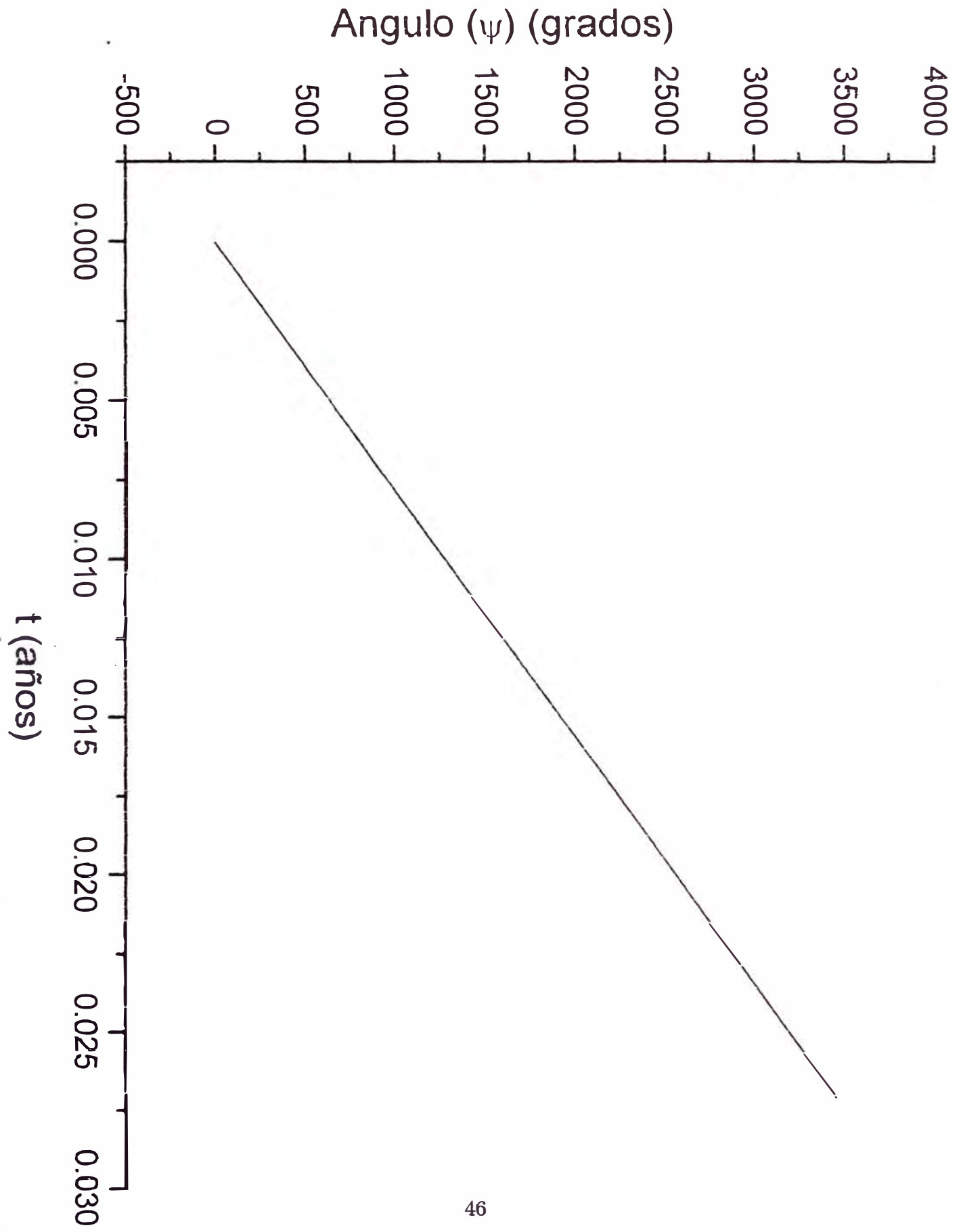
Función ó Grafico	Pagina
$\dot{\phi}(t)$	44
$\dot{\theta}(t)$	45
$\psi(t)$	46
$\phi(t)$	47
$\theta(t)$	48
W_2 vs W_1	49
Y vs X	50
W_y vs W_x	51
$\dot{\psi}(t)$	52

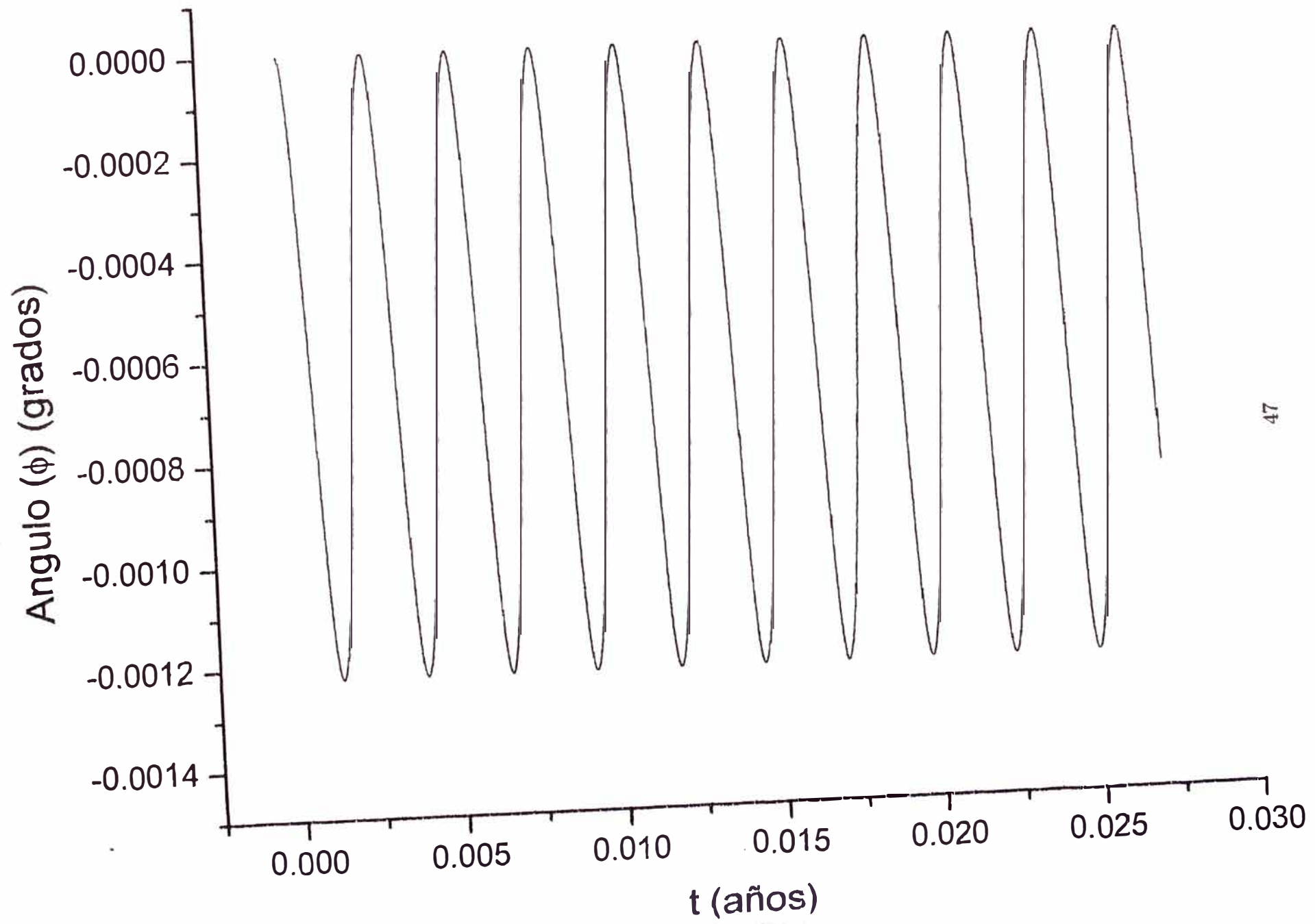
Observaciones:

- Las gráficas de las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ son periódicas con un período menor comparado con el caso del radio polar anterior.
- La gráfica de $\psi(t)$ es casi una recta.
- La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es una circunferencia, siendo el tiempo que demora en recorrer la circunferencia menor de un día.
- El extremo del eje X_3 sobre el plano XY es una elipse ubicada en el segundo cuadrante.
- La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una curva mayor que una semicircunferencia luego el período de precesión de la velocidad angular alrededor del eje X_3 es menor comparado con el caso del radio polar anterior.

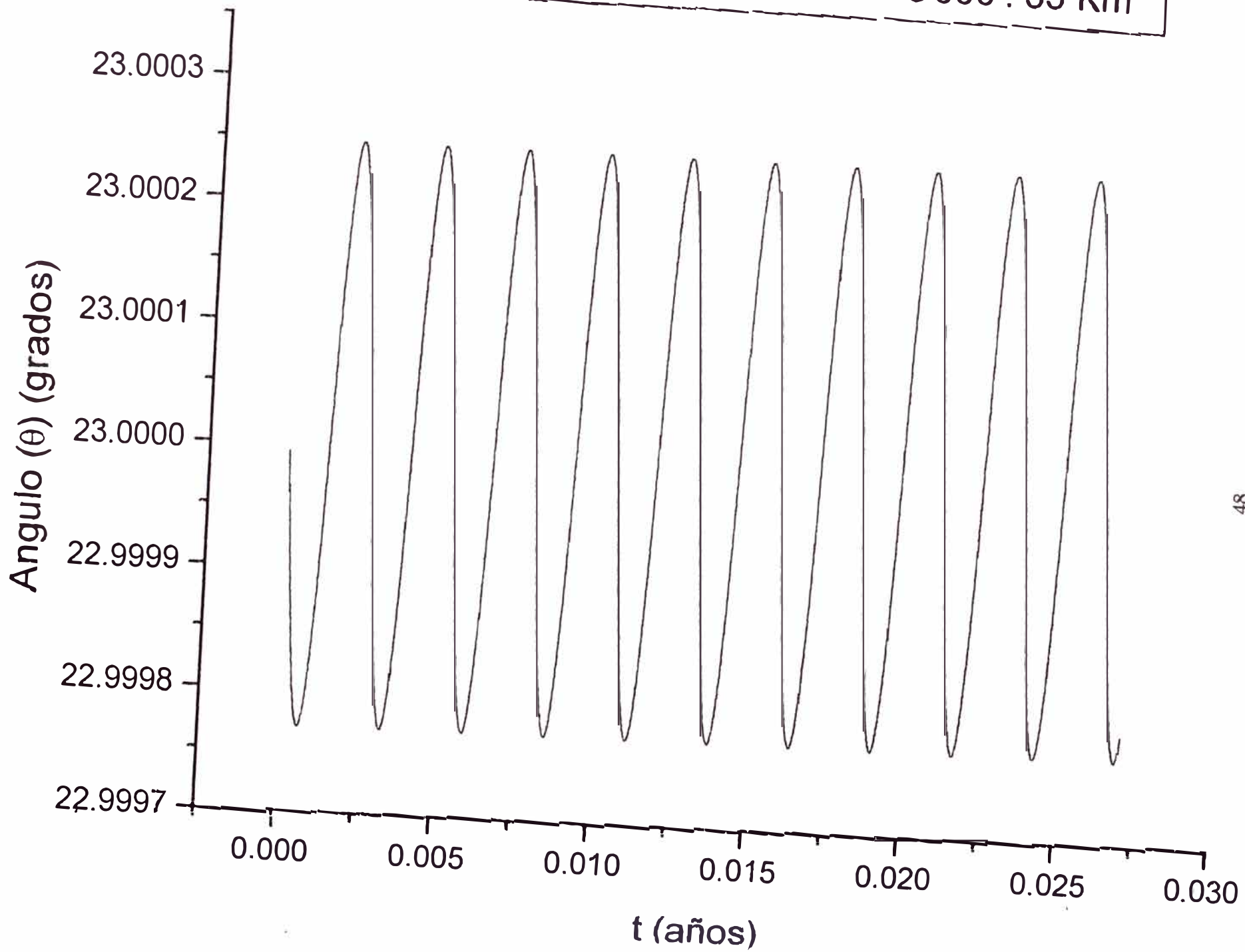




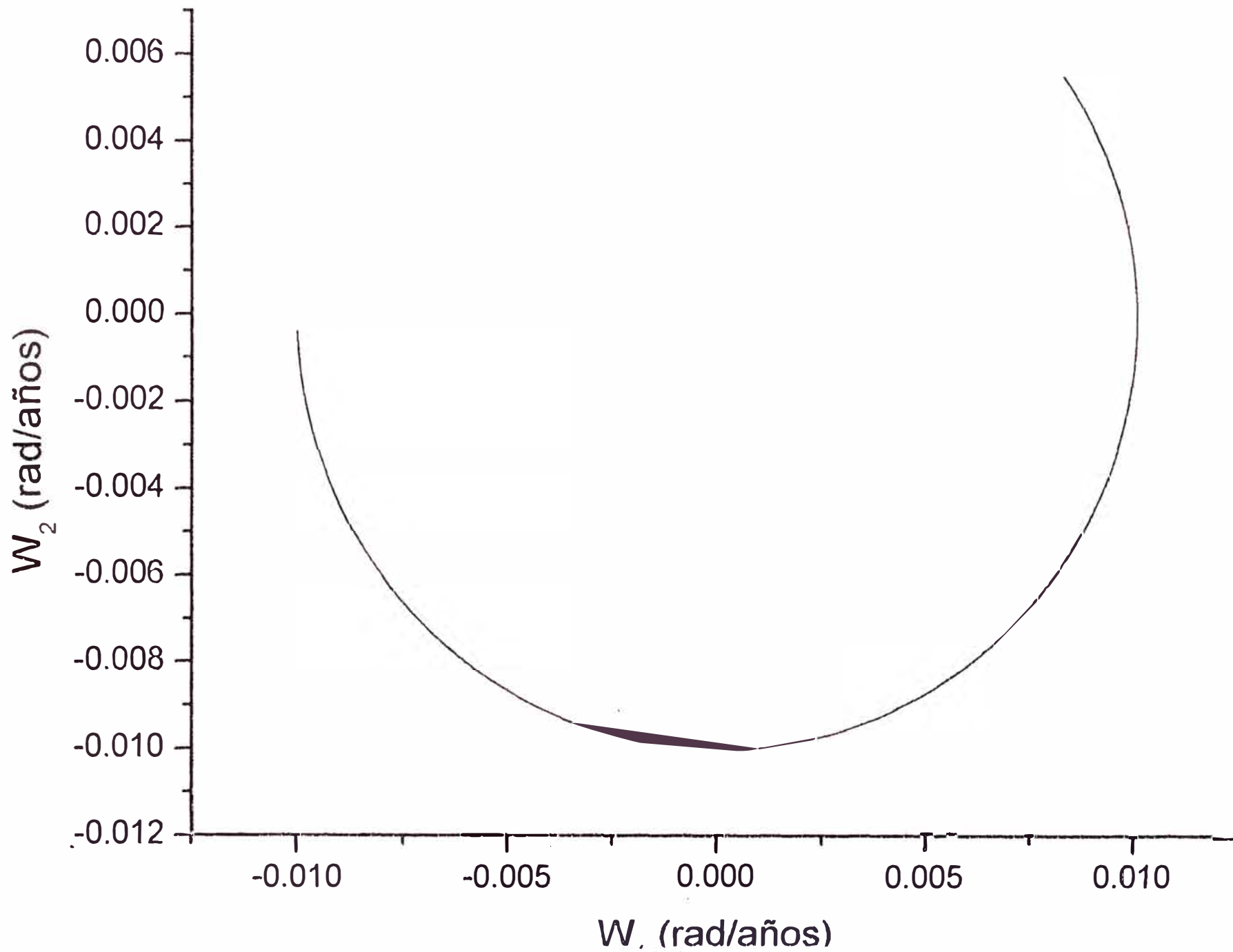




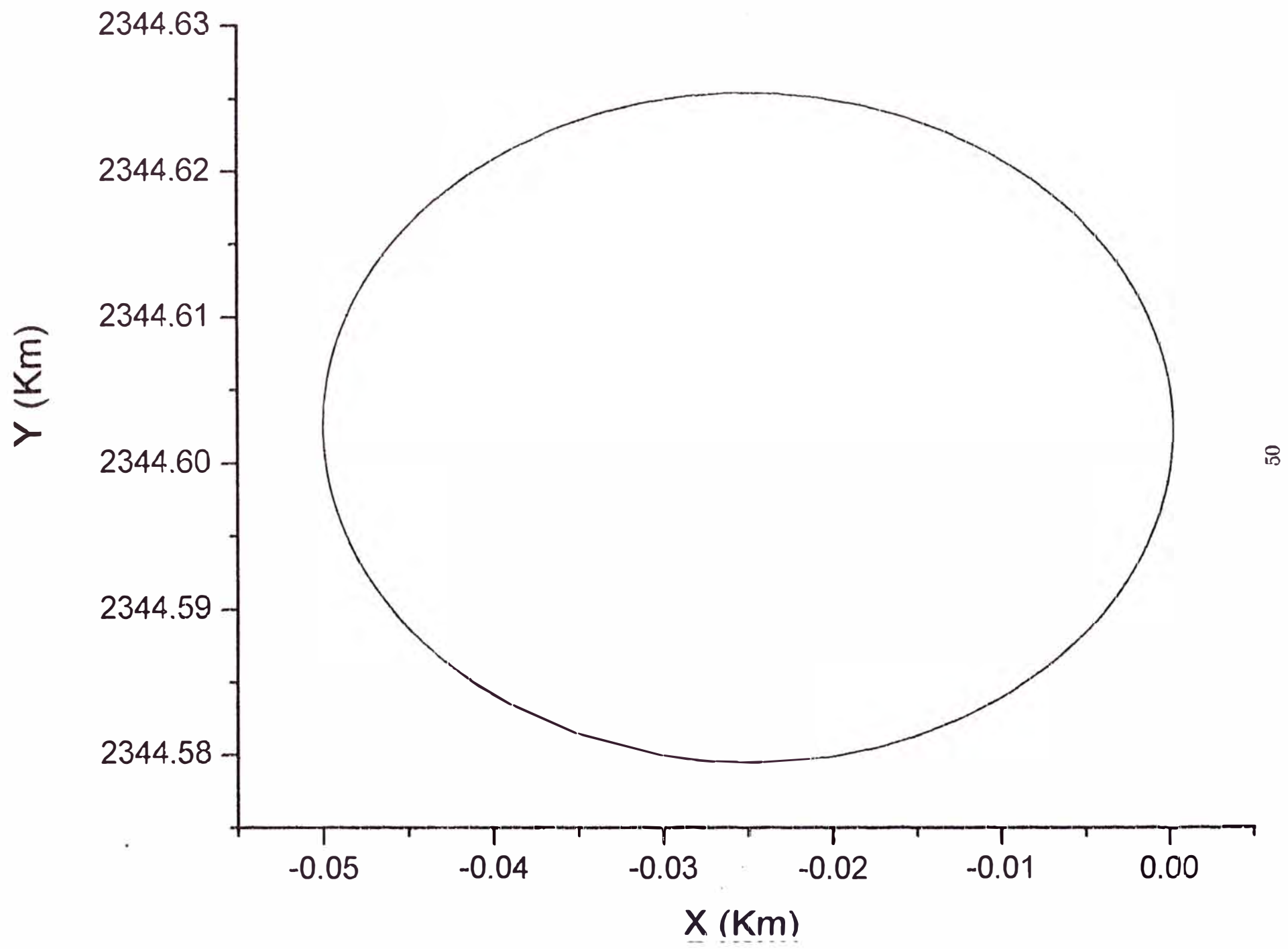
Para 10 días con $c=6000.55$ Km



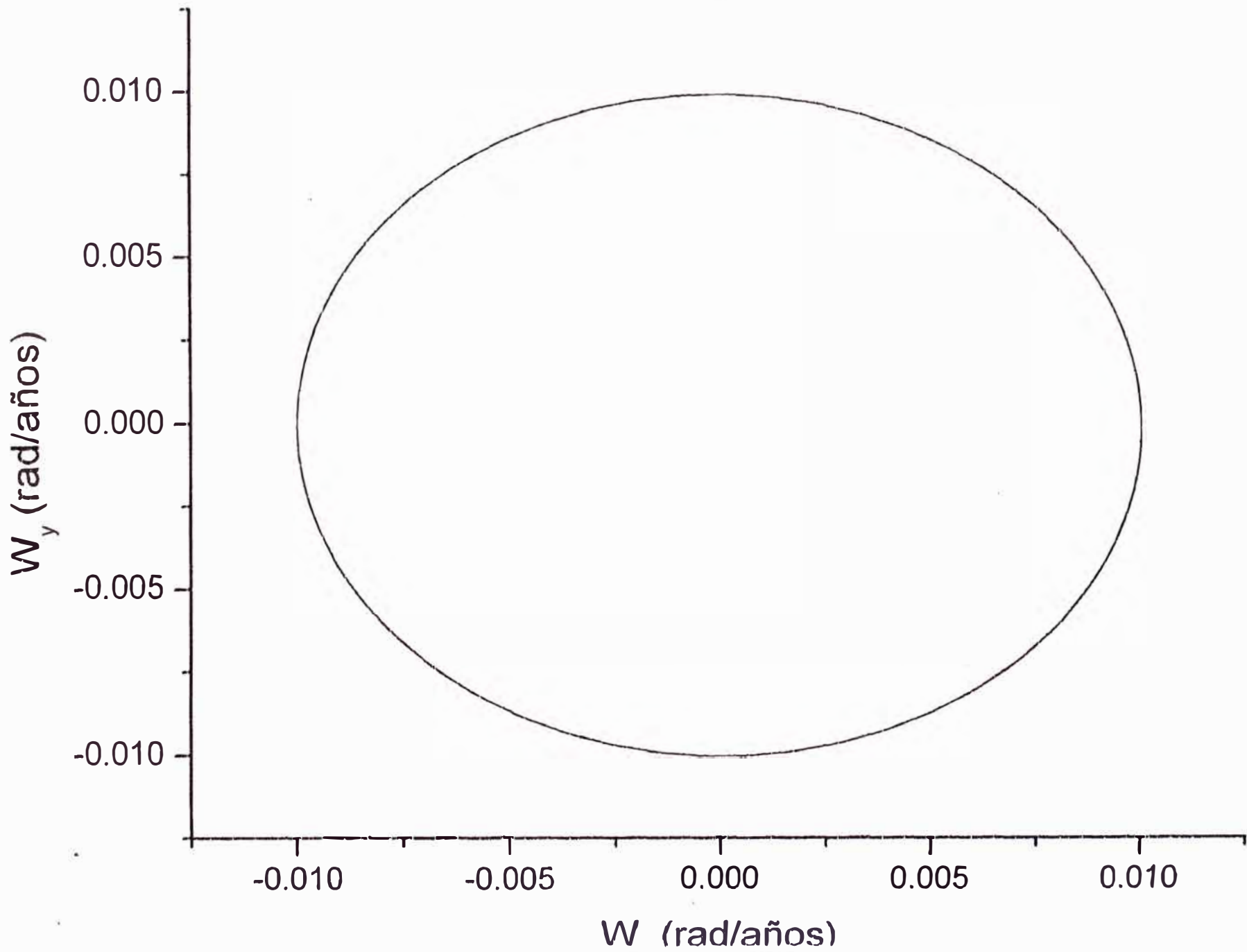
Proyección del vector W sobre el Plano X_1X_2 para 10 días con $c=6000.55$ Km



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 10 dias



Proyección del Vector W sobre el plano XY para 10 días con $c=6000.55$ Km



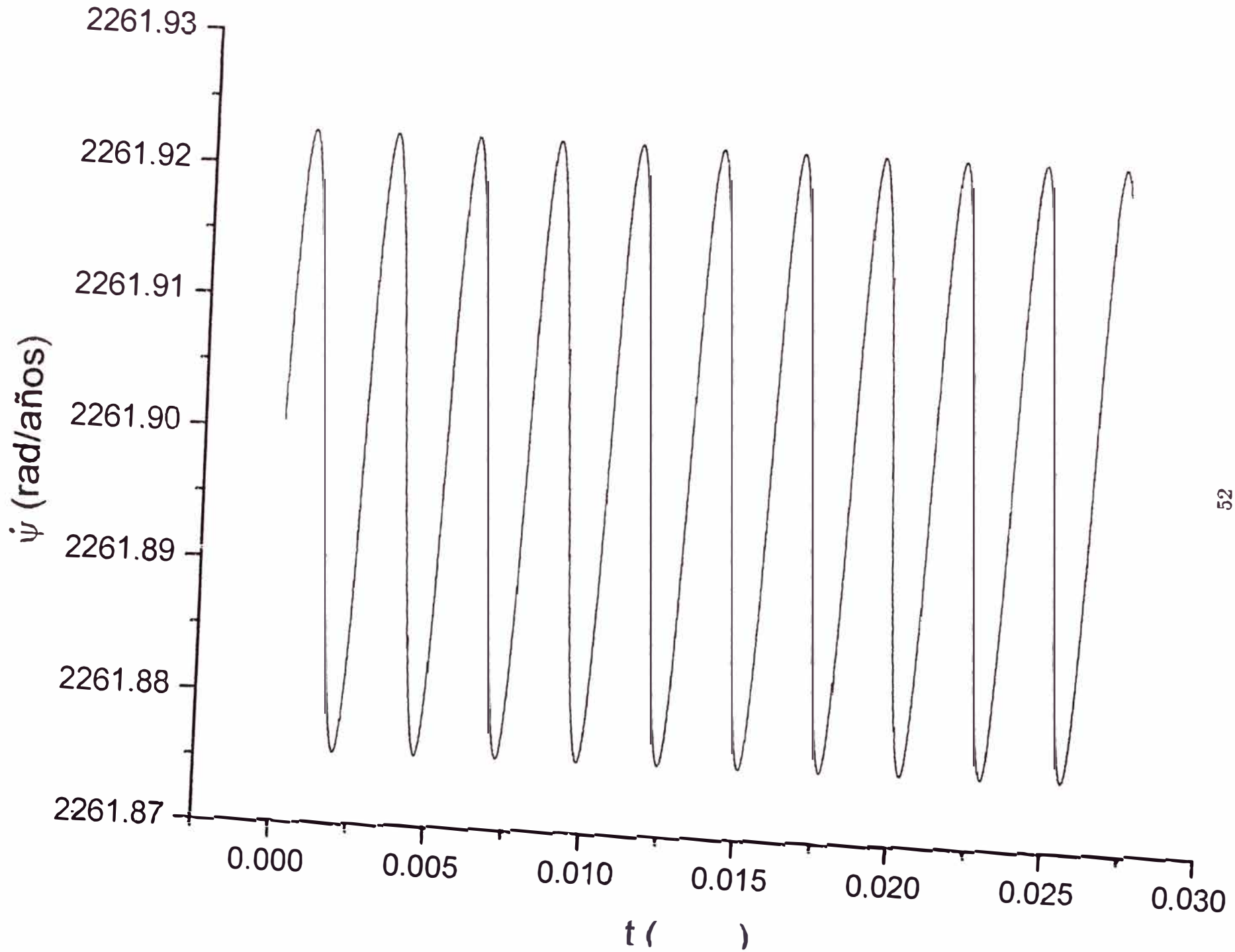


Table 2: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 50$ días

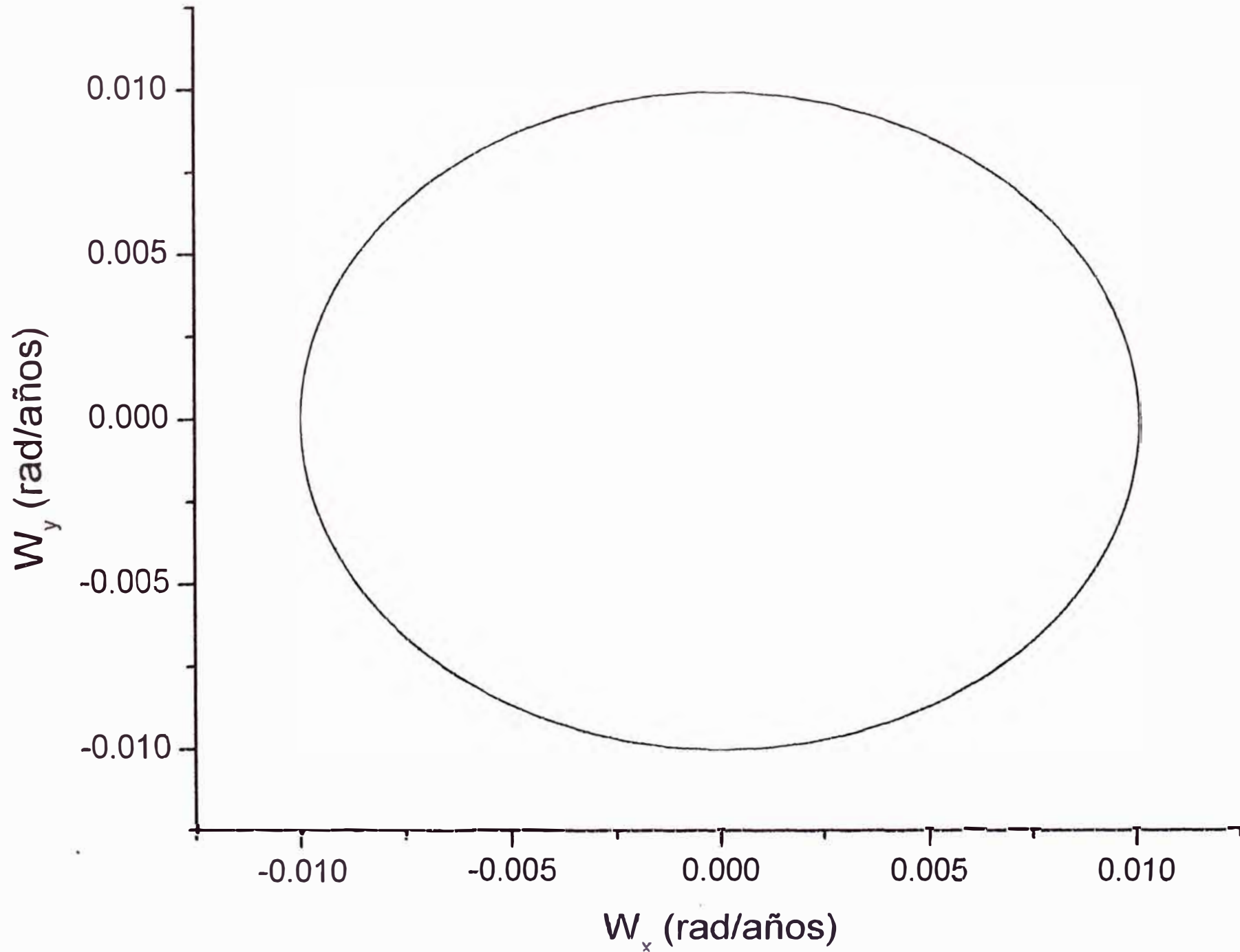
Función ó Grafico	Pagina
W_y vs W_x	54
Y vs X	55
W_2 vs W_1	56

Observaciones:

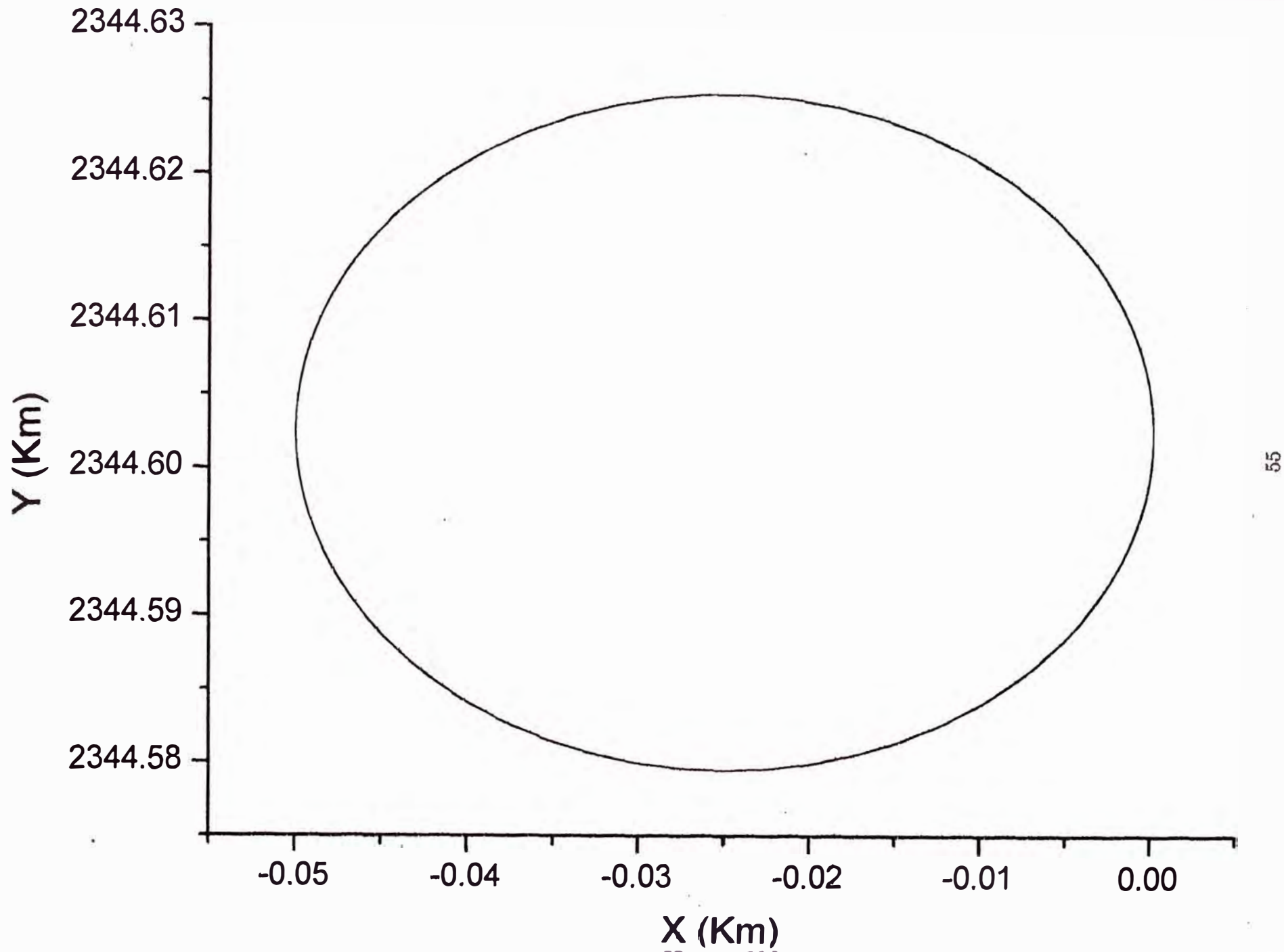
- a) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY continua siendo una circunferencia.
- b) La proyección del extremo del eje X_3 sobre el plano XY se mantiene como una elipse.
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 ya es un curva cerrada y por lo tanto se verifica que el período de precesión es menor de 50 días que es consistente con la ecuación (1.53).

No presentamos más gráficos para mayores intervalos de tiempo de 50 días por que los gráficos muestran las mismas características.

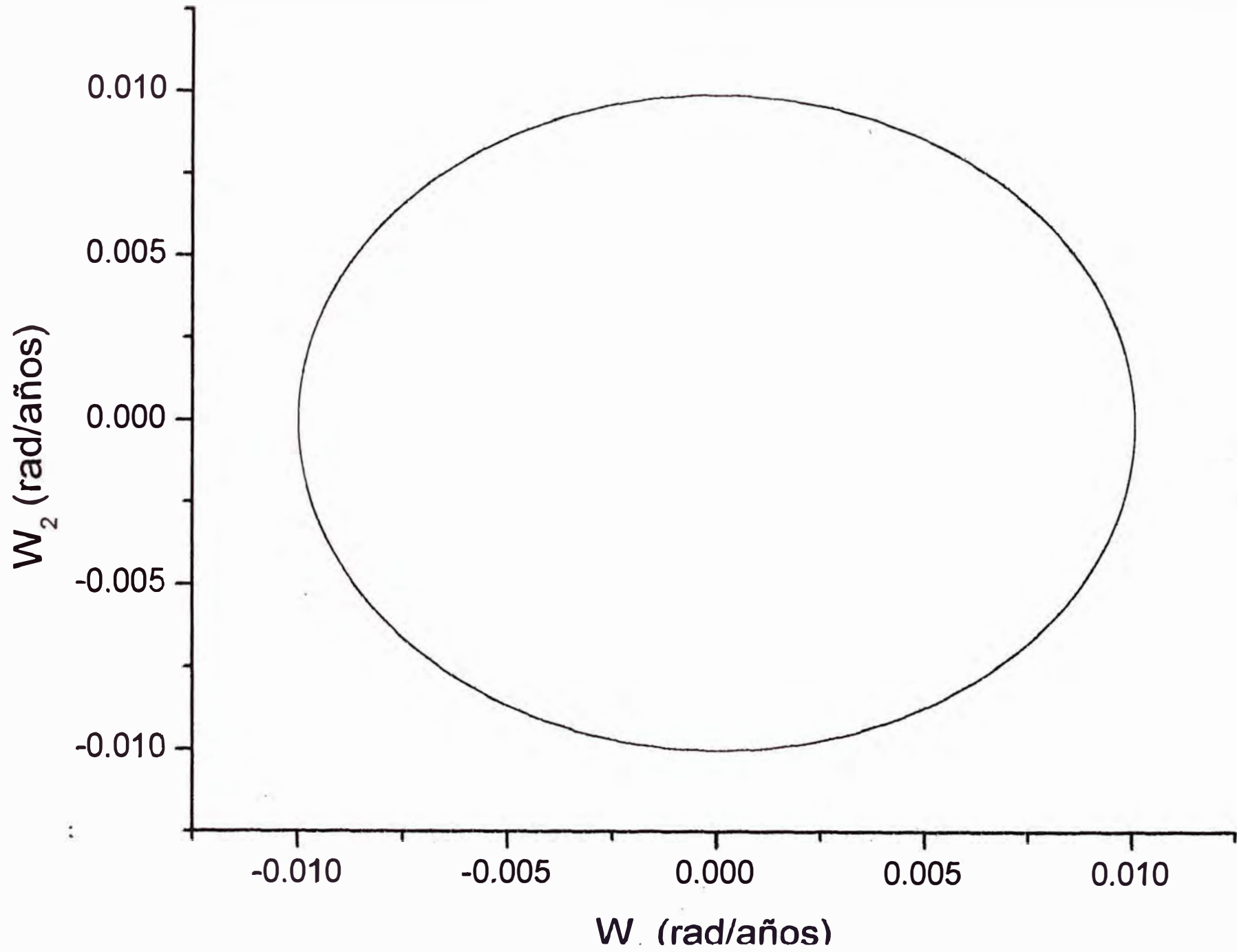
Proyección del Vector W sobre el plano XY para 50 días con $c=6000.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 50 días



Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 50 días con $c=6000.55$ Km



1.6 Conclusiones y observaciones

Con las condiciones iniciales consideradas y otras condiciones tomadas al azar (de tal modo que siempre el eje de rotación está próximo al eje X_3) se puede afirmar:

- a) Que las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ son periódicas y con el mismo período.
- b) De las gráficas de la función $\phi(t)$ y la proyección del punto N sobre el plano XY no aparece el fenómeno de Precesión de los equinoccios.
- c) De los gráficos de la proyección de la velocidad angular sobre el plano X_1X_2 , deducimos que la velocidad angular precesa alrededor del eje X_3 .
- d) De los gráficos de la proyección de la velocidad angular en el plano XY , deducimos que la velocidad angular precesa alrededor del eje Z generando un cono recto con un período mucho menor que el período T .
- e) De los gráficos de la proyección del punto N, el eje X_3 genera un cono oblicuo esto se deduce por que las proyecciones son una elipse que está en el segundo cuadrante.
- f) Que el período de precesión (T) del vector velocidad angular es 'afectado' cuando se modifica el valor de la razón de los semiejes c/a .

2 El Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh

2.1 Introducción.

2.2 Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh cuando la masa puntual está en el origen de coordenadas.

2.3 Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh cuando la masa puntual está en cualquier punto.

2.1 Introducción

En este capítulo se determina una expresión para la energía potencial gravitatoria que tiene un cuerpo rígido simétrico y homogéneo de masa m , debido a su interacción gravitatoria con una partícula de masa M . Esta energía potencial será aplicado para puntos del espacio donde se ubicará el centro de masa (Punto G) del cuerpo rígido tal que la distancia de estos puntos al punto donde está la partícula de masa M , es mucho mayor que las dimensiones del cuerpo.

Se demostrará en la siguiente sección que este potencial tiene dos términos, al segundo término se le llama el *Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh*.

Para facilitar la "construcción" de este potencial gravitatorio se considera que el cuerpo rígido está formado por un sistema discreto de N partículas y el primer caso es cuando la partícula de masa M se halla en el origen de coordenadas y luego el siguiente caso es cuando se ubica en cualquier punto del espacio. Aparte del sistema de ejes $X Y Z$ (que es nuestro sistema de referencia inercial) cuyas direcciones de los ejes coinciden con estrellas muy lejanas , también consideramos otro sistema de ejes X_1, X_2, X_3 (con origen en el centro de masa) que estan ligados al cuerpo rígido (C.R.). Estos ejes coinciden con los ejes principales de Inercia (E.P.I.). Como de costumbre el eje X_3 coincide con el eje de simetría. Como el cuerpo tiene un eje de simetría los momentos de inercia con respecto a los ejes X_1, X_2 son iguales y será denotado por I . También se consideran los vectores unitarios \vec{e}_k que coinciden siempre con los ejes X_k , luego tenemos dos bases de vectores:

$$B = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}. \quad (2.1)$$

$$B_L = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}. \quad (2.2)$$

Además cuando se analiza el movimiento general del cuerpo rígido se considera que el eje de rotación pasa por el centro de masa (Punto G).

Es importante el potencial de Mac Cullagh por que permitirá deducir el Lagrangiano de un sistema mecánico formado por un cuerpo rígido homogéneo simétrico (la tierra en el caso que nos interesa) y dos masas puntuales que interactuan gravitatoriamente (en el caso de nuestro interes serán el Sol y la Luna).

2.2 Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh cuando la masa puntual está en el origen de coordenadas

En este caso se supone que M está fijo en el origen de un sistema de referencia inercial $X Y Z$ (Ver Fig 2.1). Sea m_i la masa de una partícula P_i del cuerpo rígido , representemos por \vec{x}_i su vector posición con respecto al sistema de ejes x_1, x_2, x_3 . Luego

$$\vec{x}_i = x_{i1}\vec{e}_1 + x_{i2}\vec{e}_2 + x_{i3}\vec{e}_3 \quad (2.3)$$

y además

$$|\vec{x}_i| = \sqrt{x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2} \quad (2.4)$$

Denotaremos $|\vec{x}_i| = x_i$, luego

$$x_i = \sqrt{x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2} \quad (2.5)$$

representaremos por \vec{r} el vector posición del centro de masa del cuerpo rígido.

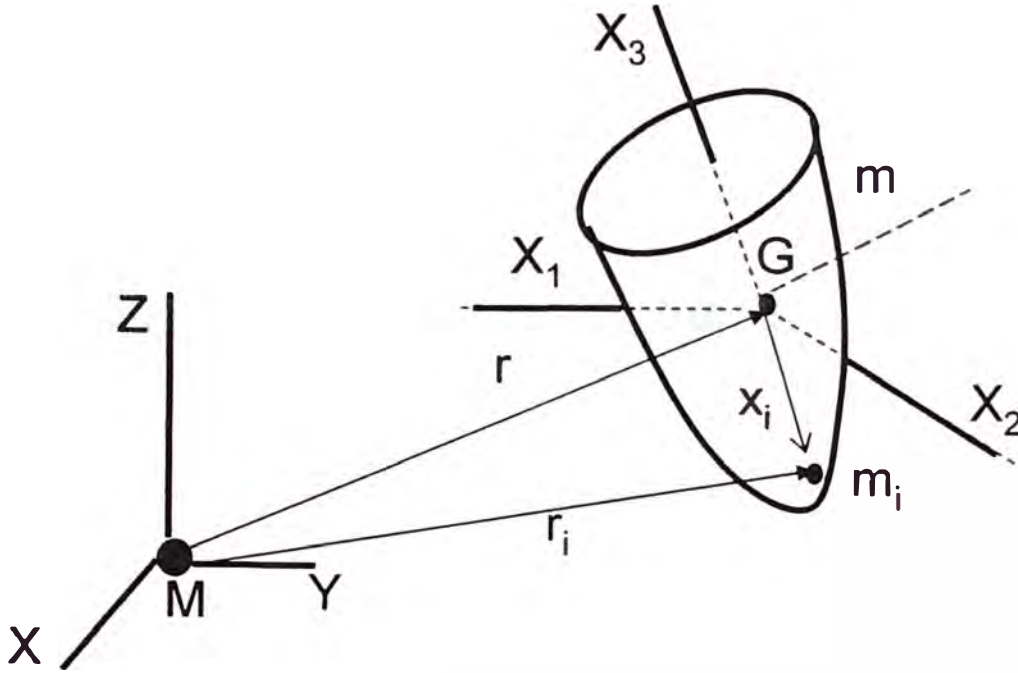


Fig. 2.1.

Se considera que siempre se cumple que

$$\frac{x_i}{r} < 1 \quad (2.6)$$

Un ejemplo que se cumple la relación (2.6) es el caso que nos interesa es decir cuando la partícula de masa M es el Sol y el cuerpo rígido es la Tierra.

La energía potencial gravitatoria entre M y m_i está dado por:

$$E_{pi} = -\frac{GMm_i}{r_i} \quad (2.7)$$

donde $r_i = |\vec{r}_i|$, de la Fig (2.1) y de la ley de los cosenos

$$|\vec{r}_i| = \sqrt{r^2 + x_i^2 - 2 r x_i \cos \gamma_i} \quad (2.8)$$

De las relaciones (2.7) y (2.8) se consigue que :

$$E_{pi} = \frac{-G M m_i}{\sqrt{r^2 + x_i^2 - 2 r x_i \cos \gamma_i}}, \quad (2.9)$$

Pero $\psi_i = 180 - \gamma_i$ es el ángulo (Ver Fig. 2.2) que forman los vectores \vec{x}_i y $\vec{r} = \overrightarrow{OG}$

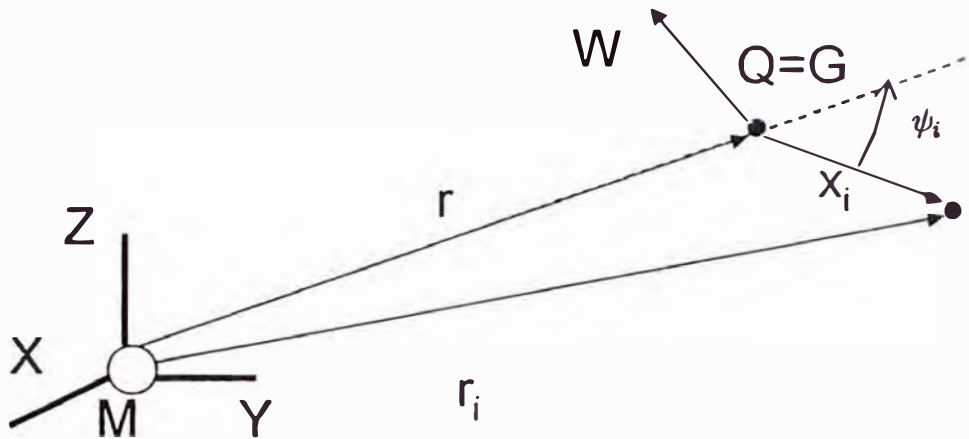


Fig. 2.2.

usando :

$$\cos \psi_i = \cos(180 - \gamma_i) \quad (2.23)$$

obtenemos de (2.22)

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{r^2} \sum_{i=1}^N m_i x_i \cos \psi_i - \frac{GM}{2r^3} \sum_{i=1}^N m_i (x_i)^2 [3 \cos^2 \psi_i - 1] + \dots \quad (2.24)$$

por otra parte tenemos la relación elemental

$$\cos \psi_i = \frac{\vec{r} \cdot \vec{x}_i}{r x_i} \quad (2.25)$$

Entonces la energía potencial gravitatoria total se escribe

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{r^2} \sum_{i=1}^N m_i x_i \frac{\vec{r} \cdot \vec{x}_i}{r x_i} - \frac{GM}{2r^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \left[3 \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{x}_i}{r x_i} \right)^2 - 1 \right] + \dots \quad (2.26)$$

Luego simplificando

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{r^3} \vec{r} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i - \frac{GM}{2r^3} \sum_{i=1}^N m_i (x_i)^2 \left[3 \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{x}_i}{r x_i} \right)^2 - 1 \right] + \dots \quad (2.27)$$

al modificar el segundo término tenemos:

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{r^3} \vec{r} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i - \frac{GM}{2r^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \left[3 \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{x}_i}{r x_i} \right)^2 - 1 \right] + \dots \quad (2.28)$$

Como "G" es el centro de masa del cuerpo y es evidente que

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i = \vec{0} \quad (2.29)$$

Entonces de la ecuación (2.28)

$$E_p = -\frac{G M m}{r} - \frac{G M}{2r^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \left[3 \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{x}_i}{r x_i} \right)^2 - 1 \right] + \dots \quad (2.30)$$

en adelante consideraremos $\frac{x_i}{r} \ll 1$ luego consideramos sólo términos del potencial gravitatorio proporcionales a $\frac{1}{r^3}$, y $\frac{1}{r^5}$ luego

$$E_p = -\frac{G M m}{r} - G M \sum_{i=1}^N \left[\frac{3m_i}{2r^5} (\vec{r} \cdot \vec{x}_i)^2 - \frac{m_i x_i^2}{2r^3} \right] \quad (2.31)$$

Usando el artificio elemental (pero importante) para el segundo término del corchete de la ecuación (2.31)

$$-\frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} \quad (2.32)$$

se consigue que :

$$E_p = -\frac{G M m}{r} - G M \sum_{i=1}^N \left[\frac{3m_i}{2r^5} (\vec{r} \cdot \vec{x}_i)^2 + \left(1 - \frac{3}{2} \right) \frac{m_i x_i^2}{r^3} \right] \quad (2.33)$$

que se puede expresar como :

$$E_p = -\frac{G M m}{r} - \frac{3GM}{2r^5} \sum_{i=1}^N [m_i (\vec{r} \cdot \vec{x}_i)^2 - m_i x_i^2 r^2] - G M \sum_{i=1}^N \frac{m_i x_i^2}{r^3} \quad (2.34)$$

por lo tanto

$$E_p = -\frac{G M m}{r} - \frac{3GM}{2r^5} \sum_{i=1}^N [-m_i x_i^2 (\vec{r} \cdot \vec{r}) + m_i (\vec{r} \cdot \vec{x}_i) (\vec{r} \cdot \vec{x}_i)] - \frac{G M}{r^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \quad (2.35)$$

ahora definimos

$$K \equiv \sum_{i=1}^N [-m_i x_i^2 (\vec{r} \cdot \vec{r}) + m_i (\vec{r} \cdot \vec{x}_i) (\vec{r} \cdot \vec{x}_i)] \quad (2.36)$$

Que equivale a:

$$K \equiv \vec{r} \cdot \sum_{i=1}^N [-m_i x_i^2 \vec{r} + m_i \vec{x}_i (\vec{r} \cdot \vec{x}_i)] \quad (2.37)$$

reemplazando (2.37) en (2.35) se consigue

$$E_p = -\frac{G M m}{r} - \frac{3 G M}{2 r^5} K - \frac{G M}{r^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \quad (2.38)$$

Como los ejes X_k son los ejes principales de inercia se tiene que los productos de inercia :

$$I_{lj} = \sum_{i=1}^N x_{li} x_{ji} m_i = 0 \quad (2.39)$$

si $l \neq j$. Con esta relación se puede demostrar facilmente que :

$$K = -\vec{r} \cdot \sum_{k=1}^3 I_k \vec{e}_k (\vec{e}_k \cdot \vec{r}) \quad (2.40)$$

Luego como

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (2.41)$$

donde :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.42)$$

$$K = -\vec{r} \cdot \sum_{k=1}^3 r I_k \vec{e}_k (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_k) \quad (2.43)$$

Entonces

$$K = -r^2 \vec{e}_r \cdot \sum_{k=1}^3 I_k \vec{e}_k (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_k) \quad (2.44)$$

Sea

$$\vec{\Pi} = \sum_{k=1}^3 I_k \vec{e}_k (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_k) \quad (2.45)$$

desarrollando la sumatoria

$$\vec{\Pi} = I_1 \vec{e}_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_r) + I_2 \vec{e}_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_r) + I_3 \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_r) \quad (2.46)$$

considerando los ángulos γ_k que forma el vector unitario \vec{e}_r con los vectores \vec{e}_k (Ver Fig.2.3) y del concepto de los cosenos directores tenemos

$$\vec{e}_r = \sum_{k=1}^3 \cos \gamma_k \vec{e}_k \quad (2.47)$$

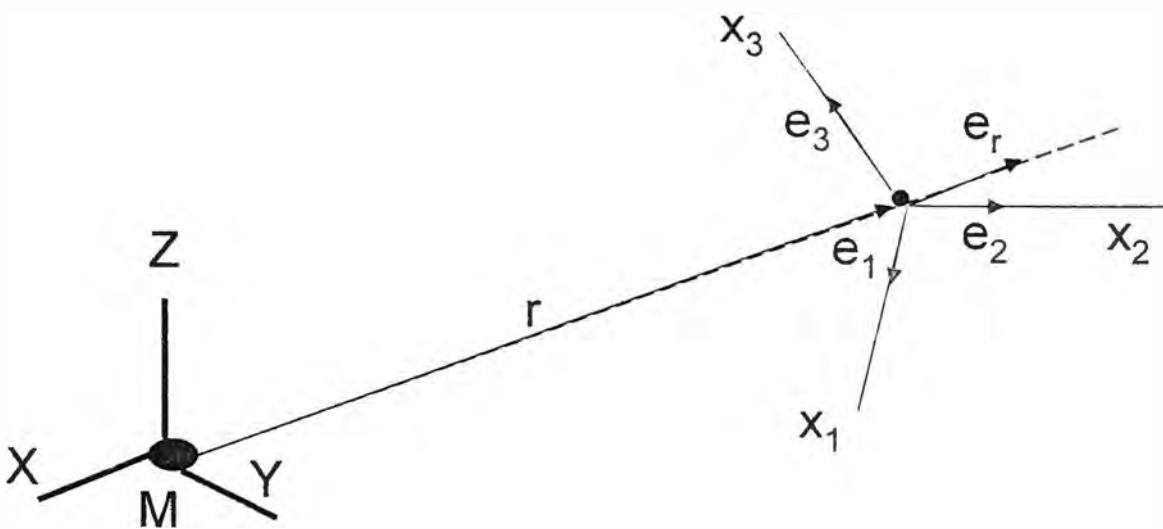


Fig. 2.3

entonces de la ecuacion (2.46)

$$\vec{\Pi} = I_1 \cos \gamma_1 \vec{e}_1 + I_2 \cos \gamma_2 \vec{e}_2 + I_3 \cos \gamma_3 \vec{e}_3 \quad (2.48)$$

si multiplicamos por \vec{e}_r a (2.48)

$$\vec{e}_r \cdot \vec{\Pi} = I_1(\cos^2 \gamma_1) + I_2(\cos^2 \gamma_2) + I_3(\cos^2 \gamma_3) \quad (2.49)$$

sustituyendo (2.49) en (2.44) obtenemos :

$$K = -r^2 [I_1(\cos^2 \gamma_1) + I_2(\cos^2 \gamma_2) + I_3(\cos^2 \gamma_3)] \quad (2.50)$$

esta ecuación es equivalente a :

$$K = -r^2 \sum_{l=1}^3 I_l \cos^2 \gamma_l \quad (2.51)$$

reemplazando el valor de K obtenido en (2.38) se consigue

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{3GM}{2r^5} r^2 \sum_{l=1}^3 I_l \cos^2 \gamma_l - \frac{GM}{r^3} \sum_{i=1}^N m_i (x_i)^2 \quad (2.52)$$

Por otra parte considerando la matriz de inercia del cuerpo rígido:

$$\| = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (x_{2i}^2 + x_{3i}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^N m_i (x_{1i}^2 + x_{3i}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^N m_i (x_{1i}^2 + x_{2i}^2) \end{pmatrix}$$

tomando la traza de la matriz $\|$

$$Traza(\|) = \sum_{i=1}^N 2 m_i [x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + x_{3i}^2] \quad (2.53)$$

pero la expresión dentro la sumatoria es el módulo del vector posición \vec{x}_i de la partícula m_i con respecto al origen G (ver Fig. 2.4) luego

$$Traza(\|) = 2 \sum_i^N m_i |\vec{x}_i|^2 \quad (2.54)$$

despejando la 'sumatoria'

$$\sum_i^N m_i |\vec{x}_i|^2 = \frac{Traza(\|)}{2} \quad (2.55)$$

reemplazando en la ecuacion (2.52)

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{3GM}{2r^3} \sum_{l=1}^3 I_l \cos^2 \gamma_l - \frac{GM}{r^3} \frac{Traza(\|)}{2} \quad (2.56)$$

pero la traza también es :

$$Traza(\|) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.57)$$

entonces la ecuación (2.56) se transforma en :

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{3GM}{2r^3} \sum_{l=1}^3 I_l (\cos^2 \gamma_l) - \frac{GM}{2r^3} (I_1 + I_2 + I_3) \quad (2.58)$$

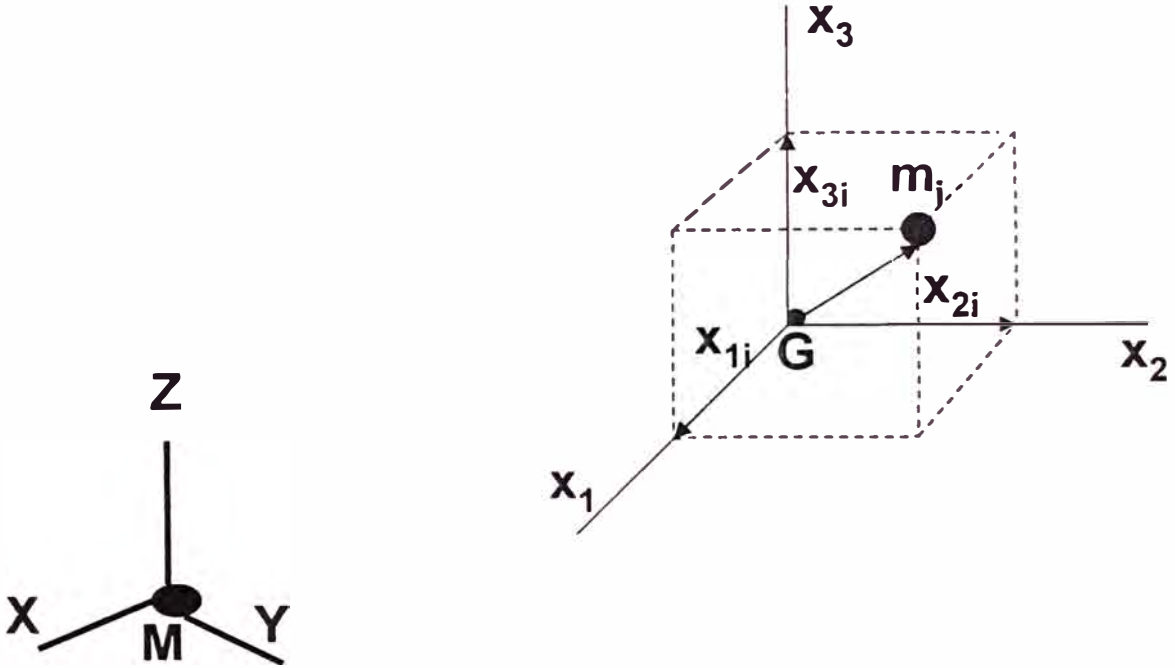


Fig. 2.4

desarrollando la sumatoria

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} [3I_1 \cos^2 \gamma_1 + 3I_2 \cos^2 \gamma_2 + 3I_3 \cos^2 \gamma_3 - I_1 - I_2 - I_3] \quad (2.59)$$

pero el cuerpo rígido es simétrico luego

$$I_1 = I_2 \equiv I \quad (2.60)$$

por lo tanto :

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} [3I \cos^2 \gamma_1 + 3I \cos^2 \gamma_2 + 3I_3 \cos^2 \gamma_3 - 2I - I_3] \quad (2.61)$$

para simplificar la ecuación anterior sumamos y restamos el término $3I \cos^2 \gamma_3$ en la ecuación (2.61) obtenemos :

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} [3I \cos^2 \gamma_1 + 3I \cos^2 \gamma_2 + 3I_3 \cos^2 \gamma_3 - 2I - I_3 + 3I \cos^2 \gamma_3 - 3I \cos^2 \gamma_3] \quad (2.62)$$

que equivale a la ecuación

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} [3I (\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3) - 2I - I_3 - 3I \cos^2 \gamma_3 + 3I_3 \cos^2 \gamma_3] \quad (2.63)$$

pero de la geometría analítica tenemos que :

$$\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 1 \quad (2.64)$$

luego en (2.63):

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} [3I - 2I - I_3 - 3I \cos^2 \gamma_3 + 3I_3 \cos^2 \gamma_3] \quad (2.65)$$

se transforma fácilmente en

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} (I - I_3)(1 - 3 \cos^2 \gamma_3). \quad (2.66)$$

a esta expresión recibe el nombre de *potencial de MacCullagh*.

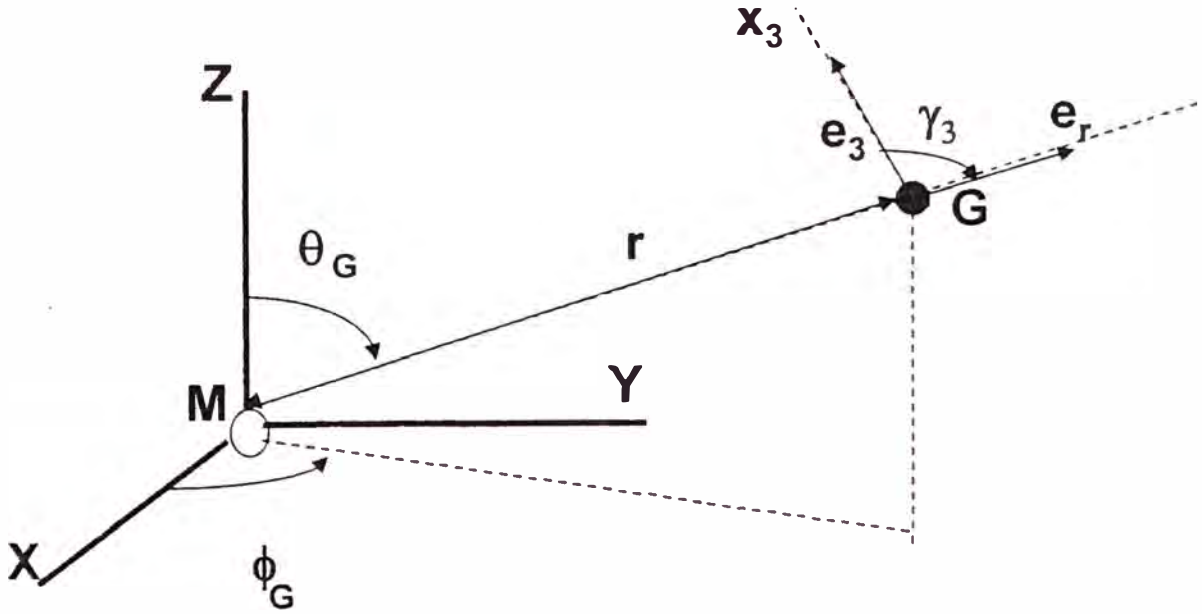


Fig. 2.5

Nos conviene determinar el ángulo (γ_3) formado por los vectores \vec{e}_r y \vec{e}_3 en función de los ángulos de Euler y las coordenadas esféricas del punto G, (ver Fig. 2.5).

Del análisis vectorial tenemos

$$\vec{e}_r = \sin \theta_G \cos \phi_G \vec{i} + \sin \theta_G \sin \phi_G \vec{j} + \cos \theta_G \vec{k} \quad (2.67)$$

de la mecánica teorica

$$\vec{e}_3 = \sin \phi \sin \theta \vec{i} - \cos \phi \sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \quad (2.68)$$

Luego:

$$\cos \gamma_3 = \sin \phi \sin \theta_G \cos \phi_G \sin \theta - \sin \phi_G \sin \theta_G \sin \theta + \cos \theta \cos \theta_G \quad (2.69)$$

que equivale a la ecuación

$$\cos \gamma_3 = \cos \theta \cos \theta_G + \sin \theta \sin \theta_G \sin(\phi - \phi_G) \quad (2.70)$$

Con la ecuación anterior podemos hallar el Lagrangiano del cuerpo rígido. La Energía Cinética del cuerpo rígido (recordar que estamos considerando que el eje de rotación pasa por el centro de masa y el cuerpo es simétrico) esta dado por:

$$E_{k_A} = \frac{mV_c^2}{2} + \sum_{K=1}^3 \frac{I_K W_K^2}{2} \quad (2.71)$$

y es fácil demostrar que

$$E_K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_G^2 + r^2\dot{\phi}_G^2 \sin^2 \theta_G) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (2.72)$$

con el potencial gravitatorio anterior más la energía cinética, el Langragiano es:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_G^2 + r^2\dot{\phi}_G^2 \sin^2 \theta_G) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + \frac{GMm}{r} - \frac{GM}{2r^3}(I - I_3)(1 - 3 \cos^2 \gamma_3) . \quad (2.73)$$

que también se puede expresar de esta manera:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_G^2 + r^2\dot{\phi}_G^2 \sin^2 \theta_G) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + \frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3}(I_3 - I)(1 - 3 \cos^2 \gamma_3) \quad (2.74)$$

donde el $\cos \gamma_3$ está dado por :

$$\cos \gamma_3 = \cos \theta \cos \theta_G + \sin \theta \sin \theta_G \sin(\phi - \phi_G) \quad (2.75)$$

2.3 Potencial Gravitatorio de Mac Cullagh cuando la masa puntual está en cualquier punto

En este caso la partícula de masa M está en cualquier punto, sea \vec{r}_M su vector posición. Al vector que une a la masa puntual M con el centro de masa (punto G) del cuerpo rígido se representará por \vec{R} (ver Fig. 2.6)

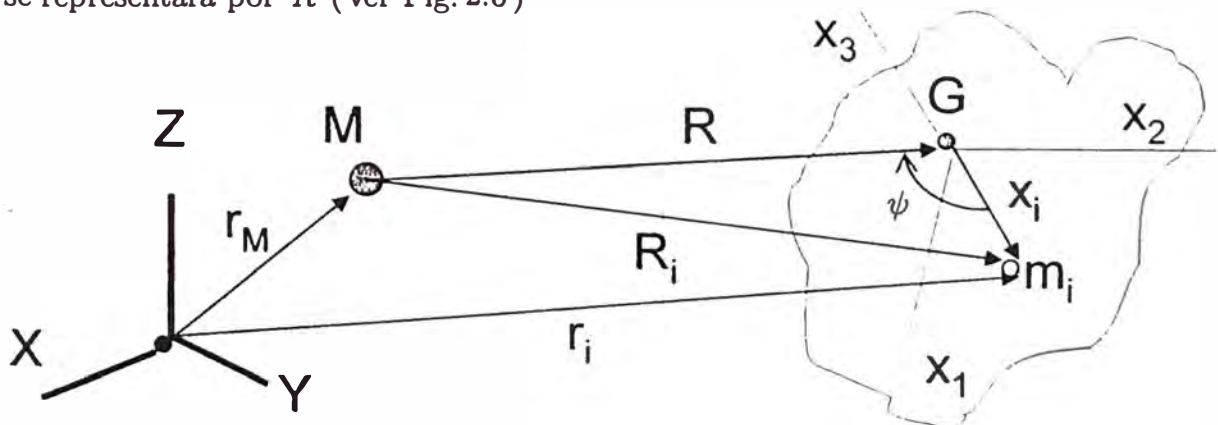


Fig. 2.6

Ahora el objetivo es determinar la energía potencial del sistema formado por la masa puntual M y el cuerpo rígido que tiene un eje de simetría y como en el caso anterior se considera que cuando se estudia el movimiento del cuerpo rígido (para el caso general), el eje de rotación pasa por el centro de masa del cuerpo rígido. Como es evidente la " construcción " de esta energía potencial es similar cuando $\vec{r}_M = \vec{0}$ por lo tanto algunos 'pasos' para demostrar las ecuaciones no se muestran. Comenzaremos considerando

la energía potencial gravitatoria entre M y una partícula P_i (de masa m_i) del cuerpo rígido luego

$$E_{pi} = -\frac{G M m_i}{R_i} \quad (2.76)$$

donde

$$|\vec{R}_i| = |\vec{r}_i - \vec{r}_M| \quad (2.77)$$

de la Fig(2.6) y la ley de los cosenos

$$|\vec{x}_i| = \sqrt{R^2 + x_i^2 - 2 R x_i \cos \psi_i} \quad (2.78)$$

De las relaciones (2.76) y (2.77) se consigue

$$E_{pi} = \frac{-G M m_i}{R \sqrt{1 + (\frac{x_i}{R})^2 - 2(\frac{x_i}{R}) \cos \psi_i}}, \quad (2.79)$$

ahora definimos

$$t \equiv \frac{x_i}{R}, \quad x \equiv \cos \psi_i \quad (2.80)$$

reemplazando las relaciones (2.80) en (2.79) tenemos:

$$E_{pi} = \frac{-G M m_i}{R \sqrt{1 - 2 t x + t^2}}, \quad (2.81)$$

El caso que nos interesa es cuando se cumple:

$$t = \frac{x_i}{R} < 1 \quad (2.82)$$

luego aplicaremos la propiedad de los polinomios de Legendre:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad (2.83)$$

sustituyendo (2.83) en (2.81)

$$E_{pi} = \frac{-G M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} m_i P_n(x) t^n \quad (2.84)$$

esta ecuación con las definiciones de t y x se transforma en:

$$E_{pi} = \frac{-G M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} m_i P_n(\cos \psi_i) \left(\frac{x_i}{R}\right)^n, \quad (2.85)$$

desarrollando

$$E_{pi} = \frac{-G m_i M}{R} [P_0(\cos \psi_i) \left(\frac{x_i}{R}\right) + P_1(\cos \psi_i) \left(\frac{x_i}{R}\right) + P_2(\cos \psi_i) \left(\frac{x_i}{R}\right)^2 + \dots] \quad (2.86)$$

Usando las relaciones (2.18), (2.19) y (2.20) en (2.86) la energía potencial gravitatoria total del sistema discreto de N partículas y la masa puntual se expresa como

$$E_p = -\frac{G M m}{R} - \frac{G M}{R^2} \sum_{i=1}^N m_i x_i \cos \psi_i - \frac{G M}{2 R^3} \sum_{i=1}^N m_i (x_i)^2 [3 \cos^2 \psi_i - 1] + \dots \quad (2.87)$$

Pero $\gamma_i = 180 - \psi_i$ es el ángulo (Ver Fig. 2.7) que forman los vectores \vec{x}_i y $\vec{R} = \vec{MG}$.
obtenemos de (2.87)

$$E_p = -\frac{GMm}{R} + \frac{GM}{R^2} \sum_{i=1}^N m_i x_i \cos \gamma_i - \frac{GM}{2R^3} \sum_{i=1}^N m_i (x_i)^2 [3 \cos^2 \gamma_i - 1] + \dots \quad (2.88)$$

usando

$$\cos \gamma_i = \frac{\vec{R} \cdot \vec{x}_i}{R x_i} \quad (2.89)$$

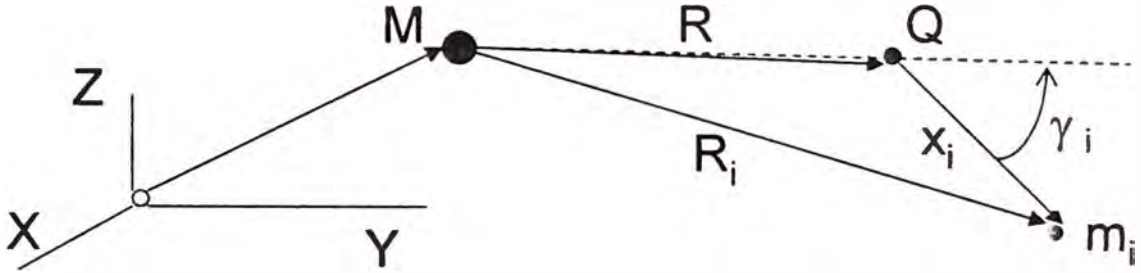


Fig. 2.7

la energía potencial gravitatoria total se escribe

$$E_p = -\frac{GMm}{R} + \frac{GM}{R^3} \sum_{i=1}^N m_i \vec{R} \cdot \vec{x}_i - \frac{GM}{2R^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 [3 \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{x}_i}{R x_i} \right)^2 - 1] + \dots \quad (2.90)$$

que se puede transformar en

$$E_p = -\frac{GMm}{R} + \frac{GM}{R^3} \vec{R} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i - \frac{GM}{2R^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 [3 \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{x}_i}{R x_i} \right)^2 - 1] + \dots \quad (2.91)$$

pero

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i = \vec{0} \quad (2.92)$$

Entonces de la ecuación (2.91)

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - \frac{GM}{2R^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 [3 \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{x}_i}{R x_i} \right)^2 - 1] + \dots \quad (2.93)$$

teniendo en cuenta que $\frac{x_i}{R} \ll 1$ consideramos sólo términos del potencial gravitatorio proporcionales a $\frac{1}{R^3}$, y $\frac{1}{R^5}$ luego

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - GM \sum_{i=1}^N \left[\frac{3m_i}{2R^5} (\vec{R} \cdot \vec{x}_i)^2 - \frac{m_i x_i^2}{2R^3} \right] \quad (2.94)$$

de lo anterior se consigue

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - \frac{3GM}{2R^5} \sum_{i=1}^N [m_i (\vec{R} \cdot \vec{x}_i)^2 - m_i x_i^2 R^2] - GM \sum_{i=1}^N \frac{m_i x_i^2}{R^3} \quad (2.95)$$

ahora haciendo

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^N [-m_i x_i^2 (\vec{R} \cdot \vec{R}) + m_i (\vec{R} \cdot \vec{x}_i) (\vec{R} \cdot \vec{x}_i)] \quad (2.96)$$

de donde

$$\Delta = \vec{R} \cdot \sum_{i=1}^N [-m_i x_i^2 \vec{R} + m_i \vec{x}_i (\vec{R} \cdot \vec{x}_i)] \quad (2.97)$$

reemplazando (2.97) en (2.95) se consigue

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - \frac{3GM}{2R^5} \Delta - \frac{GM}{R^3} \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \quad (2.98)$$

se demuestra facilmente que

$$\Delta = -\vec{R} \cdot \sum_{k=1}^N [I_k \vec{e}_k (\vec{e}_k \cdot \vec{R})] \quad (2.99)$$

definiendo

$$\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{R} \quad (2.100)$$

entonces

$$\Delta = -R^2 \vec{e}_R \cdot \sum_{k=1}^N [I_k \vec{e}_k (\vec{e}_k \cdot \vec{R})] \quad (2.101)$$

considerando los ángulos γ_k que forma el vector unitario \vec{e}_R con los vectores \vec{e}_k (Ver Fig. 2.8) y del concepto de cosenos directores tenemos

$$\vec{e}_R = \sum_{k=1}^3 \cos \gamma_k \vec{e}_k \quad (2.102)$$

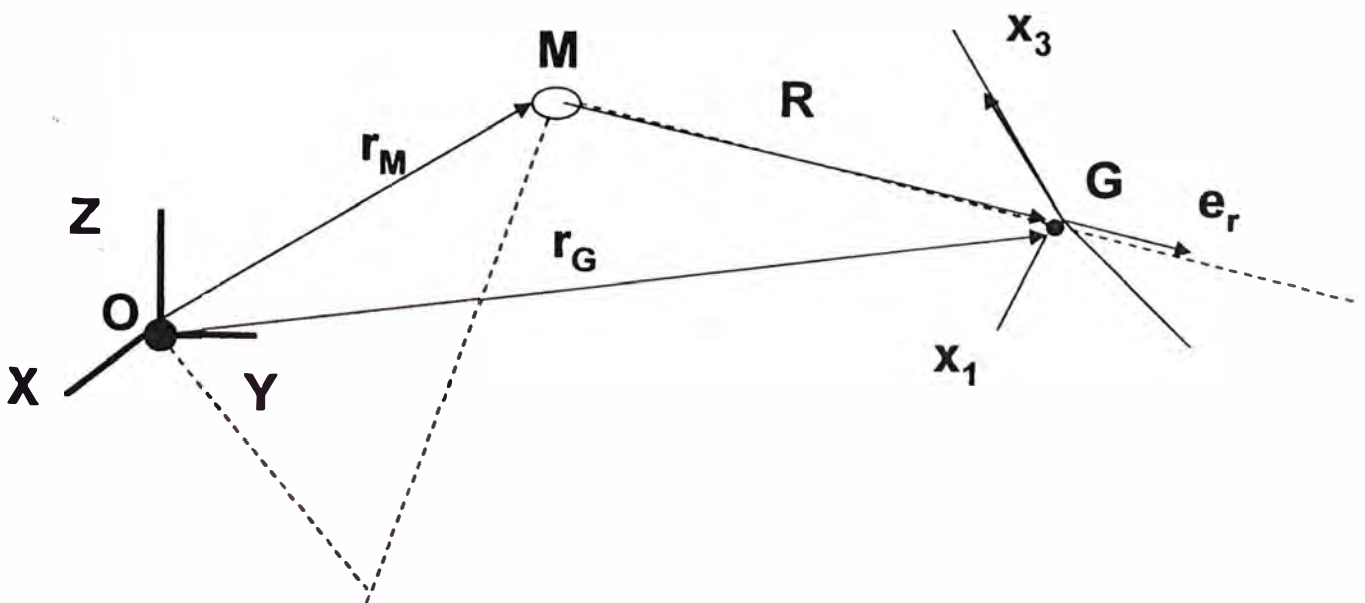


Fig. 2.8

sustituyendo (2.102) en (2.101) obtenemos

$$\Delta = -R^2 \sum_{l=1}^3 I_l \cos^2 \gamma_l \quad (2.103)$$

reemplazando el valor de Δ obtenido en (2.98) se consigue

$$E_p = -\frac{GMm}{R} + \frac{3GM}{2R^3} \sum_{l=1}^3 I_l \cos^2 \gamma_l - \frac{GM}{r^3} \sum_{i=1}^N m_i (x_i)^2 \quad (2.104)$$

Usando la relación (2.56) en (2.104) tenemos

$$E_p = -\frac{GMm}{R} + \frac{3GM}{2R^3} \sum_{l=1}^3 I_l \cos^2 \gamma_l - \frac{GM}{R^3} \frac{\text{Traza}(\|)}{2} \quad (2.105)$$

pero recordemos que la traza también es

$$\text{Traza}(\|) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.106)$$

entonces la ecuación (2.105) se transforma en :

$$E_p = -\frac{GMm}{R} + \frac{3GM}{2R^3} [3I \cos^2 \gamma_1 + 3I \cos^2 \gamma_2 + 3I_3 \cos^2 \gamma_3 - 2I - I_3] \quad (2.107)$$

que equivale a la ecuación

$$E_p = -\frac{GMm}{R} + \frac{GM}{2R^3} [3I (\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3) - 2I - I_3 - 3I \cos^2 \gamma_3 + 3I_3 \cos^2 \gamma_3] \quad (2.108)$$

pero

$$\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 1 \quad (2.109)$$

luego de (2.108):

$$E_p = -\frac{GMm}{R} + \frac{GM}{2R^3} (I - I_3)(1 - 3 \cos^2 \gamma_3). \quad (2.110)$$

que es el *potencial de Mac Cullagh* para un caso más general. Se puede determinar el ángulo(γ_3) formado por los vectores \vec{e}_R y \vec{e}_3 en función de los ángulos de Euler y las coordenadas esféricas del punto G y M. De la Fig. 2.9

$$\vec{R} \equiv \vec{OG} - \vec{OM} \quad (2.111)$$

definiremos los vectores unitarios:

$$\vec{e}_G \equiv \frac{\vec{OG}}{r_G} \quad (2.112)$$

donde

$$r_G = |\vec{OG}| \quad (2.113)$$

$$\vec{e}_M \equiv \frac{\vec{OM}}{r_M} \quad (2.114)$$

$$r_M = |\overline{OM}| \quad (2.115)$$

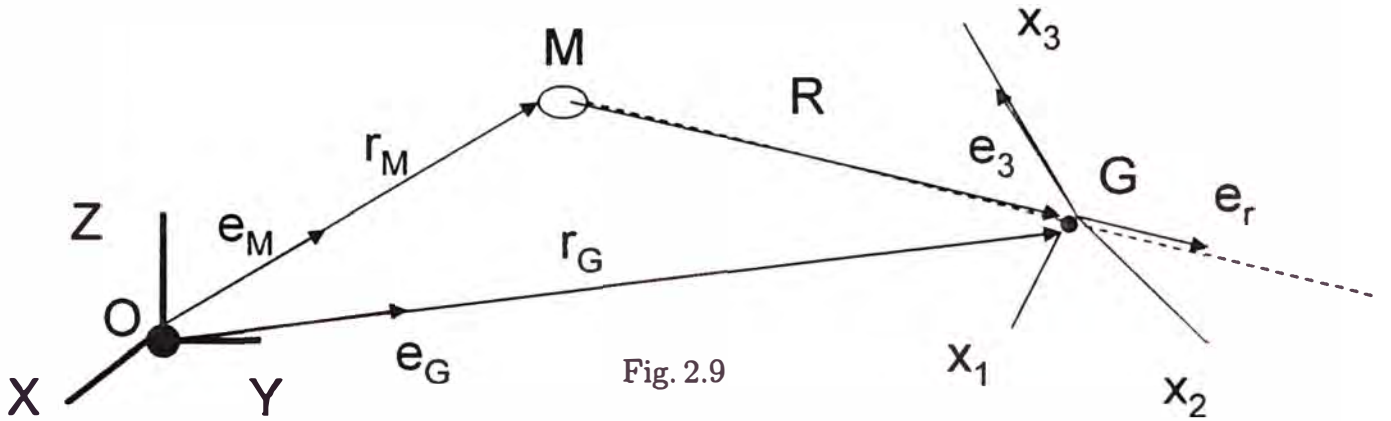


Fig. 2.9

de las definiciones anteriores

$$\overline{OG} = r_G \vec{e}_G \quad (2.116)$$

$$\overline{OM} = r_M \vec{e}_M \quad (2.117)$$

entonces:

$$\vec{R} = r_G \vec{e}_G - r_M \vec{e}_M \quad (2.118)$$

El punto M tiene coordenadas esfericas (r_M, θ_M, ϕ_M) al igual que G (r_G, θ_G, ϕ_G) , luego:

$$\vec{e}_M = \text{sen} \theta_M \cos \phi_M \vec{i} + \text{sen} \theta_M \sin \phi_M \vec{j} + \cos \theta_M \vec{k} \quad (2.119)$$

$$\vec{e}_G = \text{sen} \theta_G \cos \phi_G \vec{i} + \text{sen} \theta_G \sin \phi_G \vec{j} + \cos \theta_G \vec{k} \quad (2.120)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (r_G \text{sen} \theta_G \cos \phi_G - r_M \text{sen} \theta_M \cos \phi_M) \vec{i} + (r_G \text{sen} \theta_G \sin \phi_G - r_M \text{sen} \theta_M \sin \phi_M) \vec{j} \\ &+ (r_G \cos \theta_G - r_M \cos \theta_M) \vec{k} \end{aligned} \quad (2.121)$$

Por lo tanto el, modulo de \vec{R}

$$(2.122) |\vec{R}| = \sqrt{r_G^2 + r_M^2 - 2r_G r_M [\text{sen} \theta_G \text{sen} \theta_M \cos(\phi_G - \phi_M) + \cos \theta_M \cos \theta_G]} \quad (2.122)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \vec{e}_R &= \frac{1}{R} [(r_G \text{sen} \theta_G \cos \phi_G - r_M \text{sen} \theta_M \cos \phi_M) \vec{i} + (r_G \text{sen} \theta_G \sin \phi_G \\ &- r_M \text{sen} \theta_M \sin \phi_M) \vec{j} + (r_G \cos \theta_G - r_M \cos \theta_M) \vec{k}] \end{aligned} \quad (2.123)$$

y además tenemos

$$\vec{e}_3 = \text{sen} \theta \sin \phi \vec{i} - \text{sen} \theta \cos \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \quad (2.124)$$

Entonces de las ecuaciones (2.123) y (2.124) podemos obtener $\cos \gamma_3$ en funcion de $r_G, \theta_G, \phi_G, r_M, \theta_M, \phi_M, \theta, \phi, \psi$.

3 PRECESION DE LOS EQUINOCCIOS DE LA TIERRA CONSIDERANDO SOLO LA INTERACCION CON EL SOL

3.1 Introducción.

3.2 Ecuaciones diferenciales del Movimiento de la Tierra.

3.3 Resultados Numéricos.

3.4 Conclusiones y Observaciones.

3.1 Introducción

En este capítulo se analiza la precesión de los equinoccios para la Tierra considerando solo su interacción con el Sol. También analizaremos como cambiaría el período de precesión cuando se varia las dimensiones del radio polar de la Tierra. Para realizar estos cálculos vamos a considerar el siguiente modelo mecánico:

a) Un sistema formado por:

i) Una partícula S de masa M , que será el Sol.

ii) Un cuerpo elipsoidal homogéneo con semieje a, b, c tal que $(a = b > c)$ de masa m que será la Tierra.

b) Sólo consideraremos la interacción gravitatoria en este sistema físico.

c) Las masas satisfacen las relaciones $M \gg m$.

d) Un sistema de referencia inercial $X Y Z$ (Ver Fig. 3.1) con origen en el Sol, tal que se supone fijo el sistema de ejes con respecto a las estrellas lejanas.

e) La Tierra se mueve alrededor del Sol de tal modo que su centro de masa G tiene un movimiento circular uniforme (con período T).

f) La Tierra efectua un movimiento general de un cuerpo rígido considerando que el eje de rotación pasa por el centro de masa (G) de la Tierra.

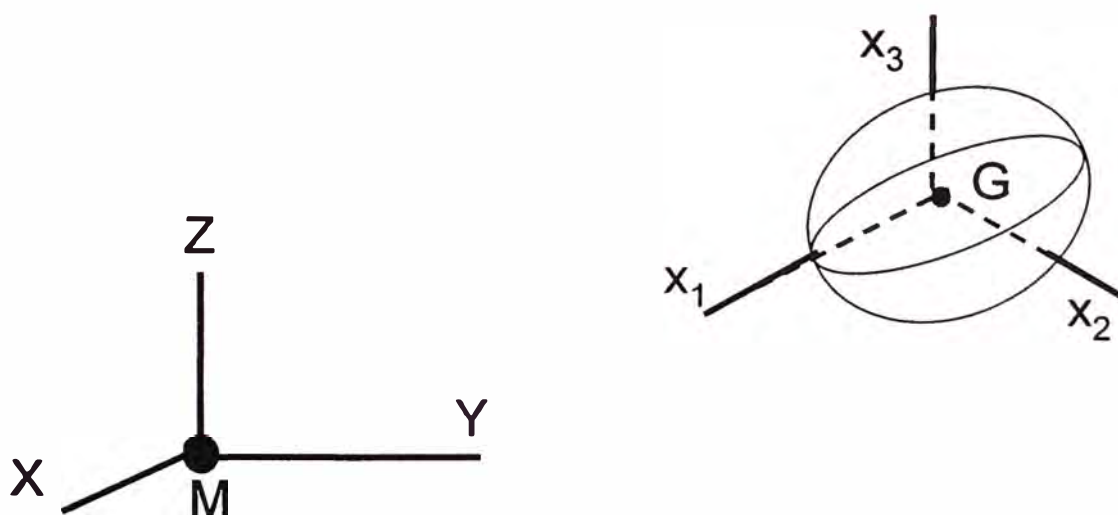


Fig. 3.1

g) La trayectoria del centro de masa (Punto G) de la Tierra está en el plano XY .

También consideramos un sistema de ejes $X_0Y_0Z_0$ (ver Fig. 3.2) siempre paralelos a los ejes $X Y Z$ respectivamente pero con origen en el centro de masa G que permitirá definir

los ángulos de Euler del cuerpo rígido(θ, ϕ, ψ) que serán las coordenadas generalizadas que consideramos en este caso.

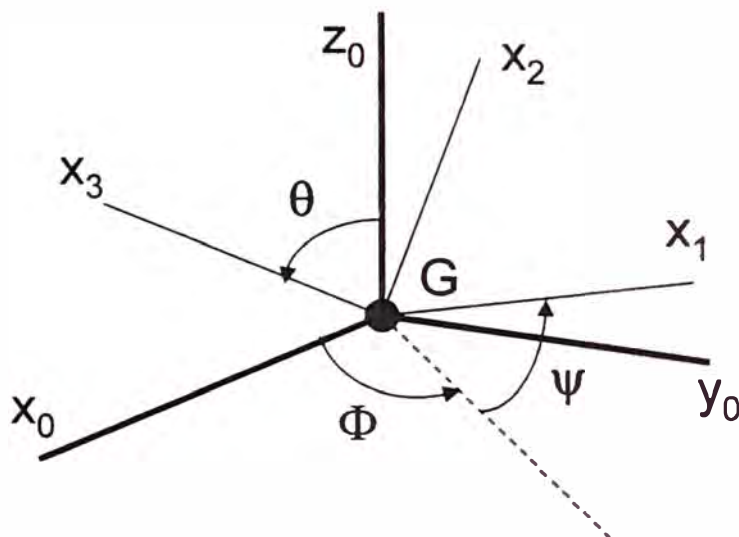


Fig. 3.2

Después aplicaremos las ecuaciones de Lagrange obteniendo ecuaciones diferenciales no lineales de movimiento y serán resueltas numéricamente.

Como en el capítulo I definimos:

$$I \equiv I_1 = I_2 \tag{3.1}$$

donde I_k son los momentos de inercia de la tierra con respecto a los ejes X_K que se mueven con la Tierra.

Hacemos notar que como estamos solo interesados en el movimiento de precesión de los equinoccios no estudiamos el movimiento en general del centro del elipsoide, en donde se puede presentar el caso en el que el centro de masa del cuerpo elipsoidal se mueve en el espacio. Pero para el lector interesado en el apéndice de este capítulo se muestran las ecuaciones diferenciales ordinarias para el caso general y algunos comentarios de los resultados obtenidos.

3.2 Ecuaciones diferenciales del Movimiento de la Tierra.

Como el eje de rotación pasa por el centro de masa G y la energía cinética del cuerpo elipsoidal con respecto al sistema XYZ será:

$$E_K = \frac{mV_G^2}{2} + \frac{I_1W_1^2}{2} + \frac{I_2W_2^2}{2} + \frac{I_3W_3^2}{2} \quad (3.2)$$

Expresando la energía cinética E_K en función de los ángulos de Euler.

$$E_K = \frac{mV_G^2}{2} + \frac{I_1}{2}(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{I_2}{2}(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (3.3)$$

Pero recordando que $I_1 = I_2 \equiv I$

$$E_K = \frac{mV_G^2}{2} + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (3.4)$$

La energía potencial de la tierra la obtenemos usando la ecuación (2.110) y haciendo

$$\vec{r}_M = \vec{0} \quad (3.5)$$

$$\vec{R} = \vec{r}_G \quad (3.6)$$

es

$$E_p = -\frac{GMm}{r_G} - \frac{GM}{2r_G^3}(I - I_3)(3 \cos^2 \gamma_3 - 1) \quad (3.7)$$

donde se halló :

$$\cos \gamma_3 = \cos \theta \cos \theta_G + \sin \theta \sin \theta_G \sin(\phi - \phi_G) \quad (3.8)$$

considerando nuestro modelo (Ver Fig. 3.3) tenemos

$$r_G = R \quad (3.9)$$

$$\theta_G = \pi/2 \quad (3.10)$$

$$\phi_G = \frac{2\pi t}{T} \quad (3.11)$$

donde T es el período de revolución de la tierra alrededor del Sol. luego de (3.7)

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - \frac{GM}{2R^3}(I - I_3)(3 \cos^2 \gamma_3 - 1) \quad (3.12)$$

con

$$\cos \gamma_3 = \sin \theta \sin(\phi - \frac{2\pi}{T} t) \quad (3.13)$$

y la energía cinética es

$$E_K = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}_G^2 + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (3.14)$$

luego la función de Lagrange es:

$$L = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}_G^2 + \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + \frac{G M m}{R} + \frac{G M}{2 R^3} (I - I_3) (3 \cos^2 \gamma_3 - 1) \quad (3.15)$$

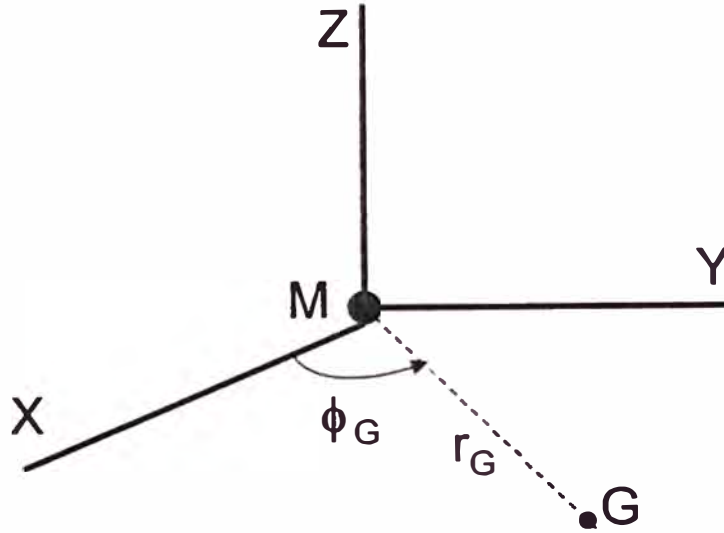


Fig. 3.3

Recordemos que la velocidad $\dot{\phi}_G$ y la distancia R son constantes en nuestro modelo, luego las coordenadas generalizadas son: θ, ϕ, ψ .

Además si reemplazamos las expresiones de los coseno de γ_3 solo hay una coordenada ciclica ψ . Por lo tanto no podemos determinar una ecuación diferencial de primer orden para el ángulo θ como se procede en el caso del movimiento del trompo ordinario. Aplicando las ecuaciones de Lagrange se puede demostrar que :

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\phi}^2 \operatorname{sen} 2\theta (I - I_3)}{2I} - \frac{I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta}{I} + \frac{3G(I - I_3) \operatorname{sen}(2\theta)}{2I} \left[\frac{M \operatorname{sen}^2(\phi - \phi_G)}{r_G^3} \right] \quad (3.16)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)} \left\{ -\dot{\phi} \dot{\theta} \sin 2\theta (I - I_3) - I_3 \ddot{\psi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \right. \\ \left. + 3G(I - I_3) \operatorname{sen}^2 \theta \left[\frac{M \operatorname{sen}(\phi - \phi_G) \cos(\phi - \phi_G)}{r_G^3} \right] \right\} \quad (3.18)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\phi} \cos \theta \quad (3.19)$$

Las ecuaciones (3.16) y (3.17) se pueden transformar de tal modo que sea factor en estas ecuaciones el período de revolución de la Tierra alrededor del Sol (T). Para obtener estas nuevas ecuaciones se consideran la relación (obtenidas de la Física elemental):

$$\frac{GM}{r_G^3} = \frac{4\pi}{T^2} \quad (3.20)$$

obteniéndose entonces:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\phi}^2 \operatorname{sen} 2\theta (I - I_3)}{2I} - \frac{I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta}{I} + \frac{6\pi^2 (I - I_3) \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}^2(\phi - \phi_G)}{IT^2} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \frac{1}{(I \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \operatorname{cos}^2 \theta)} \{ -\dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen} 2\theta (I - I_3) - I_3 \ddot{\psi} \operatorname{cos} \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \\ & + \frac{12\pi^2 (I - I_3) \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}(\phi - \phi_G) \operatorname{cos}(\phi - \phi_G)}{T^2} \} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Con las siguientes definiciones:

$$X_1 \equiv \theta \quad (3.23)$$

$$X_2 \equiv \phi \quad (3.24)$$

$$X_3 \equiv \psi \quad (3.25)$$

$$X_4 \equiv \dot{\theta} \quad (3.26)$$

$$X_5 \equiv \dot{\phi} \quad (3.27)$$

$$X_6 \equiv \dot{\psi} \quad (3.28)$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (3.18), (3.20) y (3.21) de segundo orden se reducen a las ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{X}_1 = X_4 \quad (3.29)$$

$$\dot{X}_2 = X_5 \quad (3.30)$$

$$\dot{X}_3 = X_6 \quad (3.31)$$

$$\dot{X}_4 = \frac{X_5^2 (I - I_3) \operatorname{sen} 2X_1}{2I} - \frac{I_3 X_5 X_6 \operatorname{sen} X_1}{I} + \frac{6\pi^2 (I - I_3) \operatorname{sen} 2X_1 \operatorname{sen}^2(X_2 - \phi_G)}{IT^2} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_5 = & \frac{1}{(I \operatorname{sen}^2 X_1 + I_3 \operatorname{cos}^2 X_1)} \{ -X_5 X_4 \operatorname{sen} 2X_1 (I - I_3) - I_3 \dot{X}_6 \operatorname{cos} X_1 + I_3 X_6 X_4 \operatorname{sen} X_1 \\ & + \frac{12\pi^2 (I - I_3) \operatorname{sen}^2 X_1 \operatorname{sen}(X_2 - \phi_G) \operatorname{cos}(X_2 - \phi_G)}{T^2} \} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_6 = & \frac{X_4 X_5 \operatorname{sen}^2 X_1 - I_3 X_4 X_6 \operatorname{cos} X_1 - 2(-I_3 + 2I) X_4 X_5 \operatorname{cos}^2 X_1}{I \operatorname{sen} X_1} \\ & + \frac{12\pi^2 (I - I_3) \operatorname{cos}^2 X_1 \operatorname{sen}(X_2 - \phi_G) \operatorname{cos}(X_2 - \phi_G)}{T^2 I} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Los valores de "a" , "c" (que determinan los momentos de inercia de I e I_3) y los valores de las condiciones iniciales son las usadas en el capitulo I, es decir:

$$X_{01} = \frac{23\pi}{180} = 23^\circ \quad (3.35)$$

$$X_{02} = 0 \quad (3.36)$$

$$X_{03} = 0 \quad (3.37)$$

$$X_{04} = -0.01 \text{rad/año} \quad (3.38)$$

$$X_{05} = -0.001 \text{rad/año} \quad (3.39)$$

$$X_{06} = 2261.9 \text{rad/año} \quad (3.40)$$

Luego se va ha tener en cuenta dos valores el primero el valor real de $c = 6355.55 \text{ Km}$ y otro ficticio con $c = 6000.55 \text{ Km}$ ambos casos se resuelven con las mismas condiciones iniciales.

Al resolver las ecuaciones diferenciales anteriormente se mostrarán los gráficos para las funciones : $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$ asi como los gráficos de la proyección de un punto "p" ubicado en el eje X_3 sobre el plano X_oY_o , la proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY (W_y versus W_x) y la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 (W_2 versus W_1).

Observación sobre el cálculo del período de precesión

Se puede demostrar facilmente que la proyección del eje X_3 sobre el plano X_oY_o coincide con las linea de los nodos (Ver Fig. 3.4)

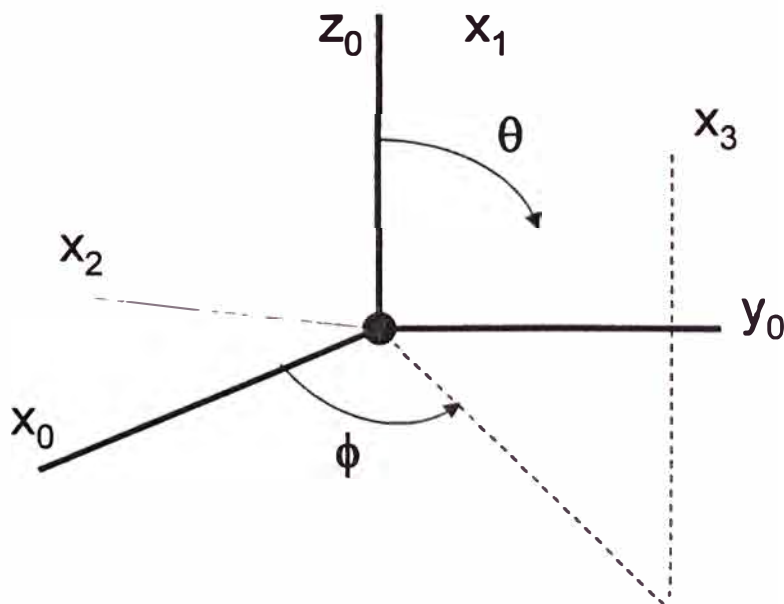


Fig. 3.4

Es decir que el ángulo que forma esta línea con el eje X_o es el ángulo ϕ . Por lo tanto el gráfico más interesante es el de la función $\phi(t)$ por que su dependencia con respecto al tiempo nos describe el movimiento del eje de simetria X_3 . Al resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento para todos los casos el gráfico de la función $\phi(t)$ es de la mostrada en la Fig. 3.5:

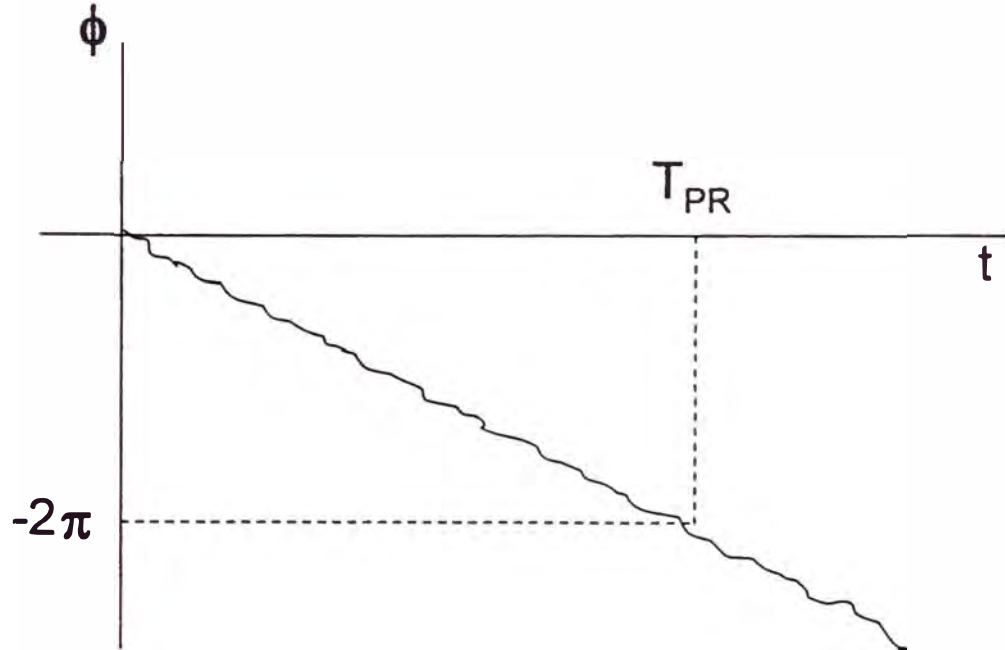


Fig. 3.5

Es decir es casi una recta con pendiente negativa luego se deduce que el eje de simetria rota alrededor del eje Z_o es decir que existe un movimiento de precesión del eje X_3 y al tiempo que tarda el ángulo ϕ en tener el valor de -2π recibe el nombre de período de precesión de los equinoccios (T_{equi}). Estos valores se pueden obtener aproximadamente directamente de los gráficos $\phi(t)$. Pero en ciertos casos si queremos que el intervalo de tiempo sea del orden de miles de años (que se considera para hallar $\phi(t)$) no se puede hacer ya que el número de datos almacenados es excesivo para el paquete que grafica las funciones, a lo más se puede simular el movimiento para centenares de años. En esta situación para hallar T_{equi} se extrapola el gráfico de la función $\phi(t)$. Para efectuar esta extrapolación asumimos que la función $\phi(t)$ es decreciente para todo el tiempo, esta suposición es consistente cuando graficamos $\phi(t)$ para otros casos y siempre se halló una curva que es casi una recta con pendiente negativa.

3.3 Resultados Numéricos

Las graficas mas importantes que se muestran , se presentan agrupadas de acuerdo al valor del radio polar "c" y al intervalo de tiempo (medido en días) de la página 83 a la página 127.

I. PRIMER CASO . Considerando el radio polar $C = 6355.55$ Km , se muestran las tablas con sus respectivos graficos para diversos intervalos de días donde se mencionan la pagina en donde estan las graficas respectivas .

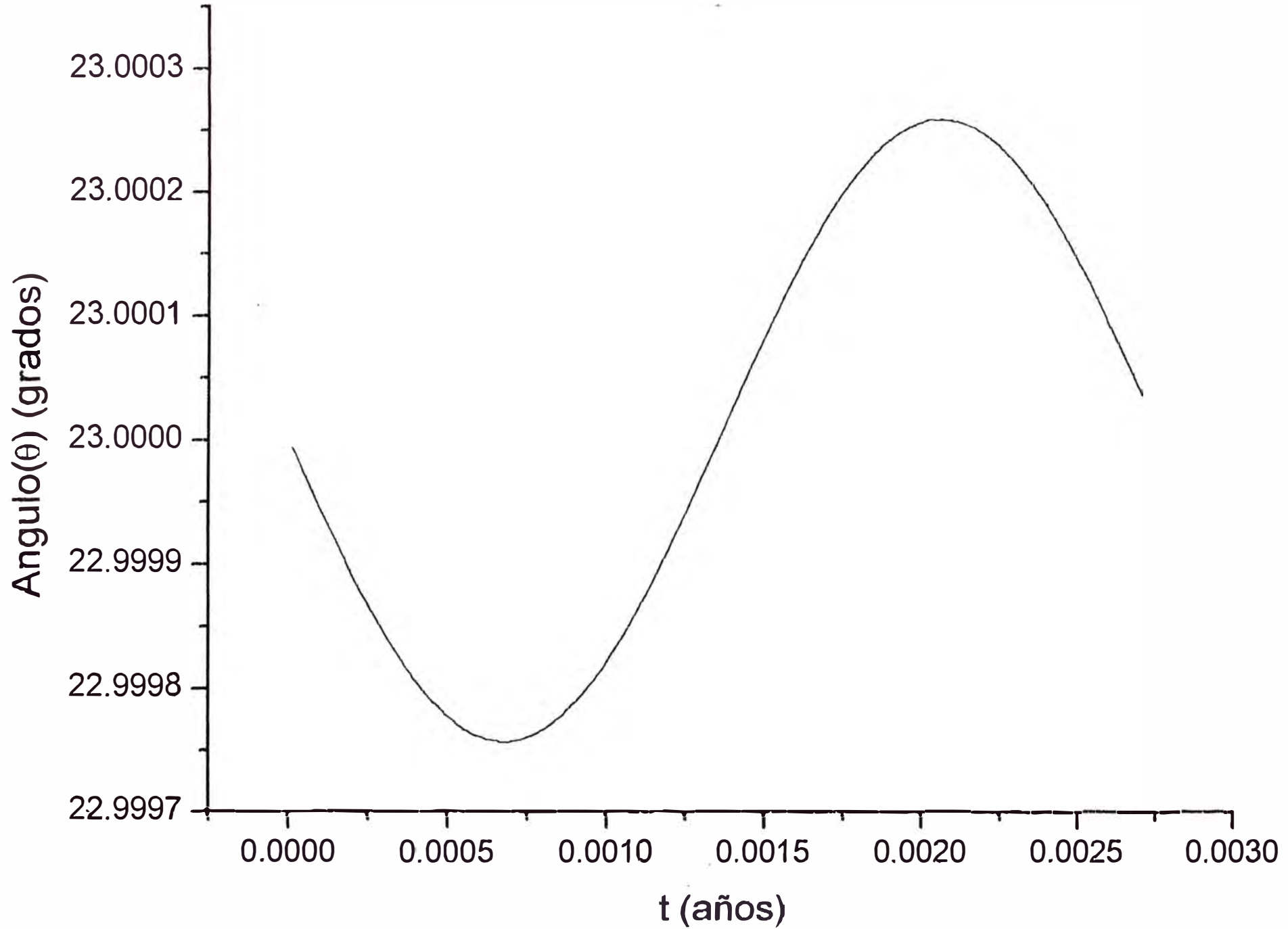
Table 1: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 1$ día

Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	83
$\phi(t)$	84
$\psi(t)$	85
$\dot{\theta}(t)$	86
$\dot{\phi}(t)$	87
$\dot{\psi}(t)$	88
W_y vs W_x	89
Y vs X	90

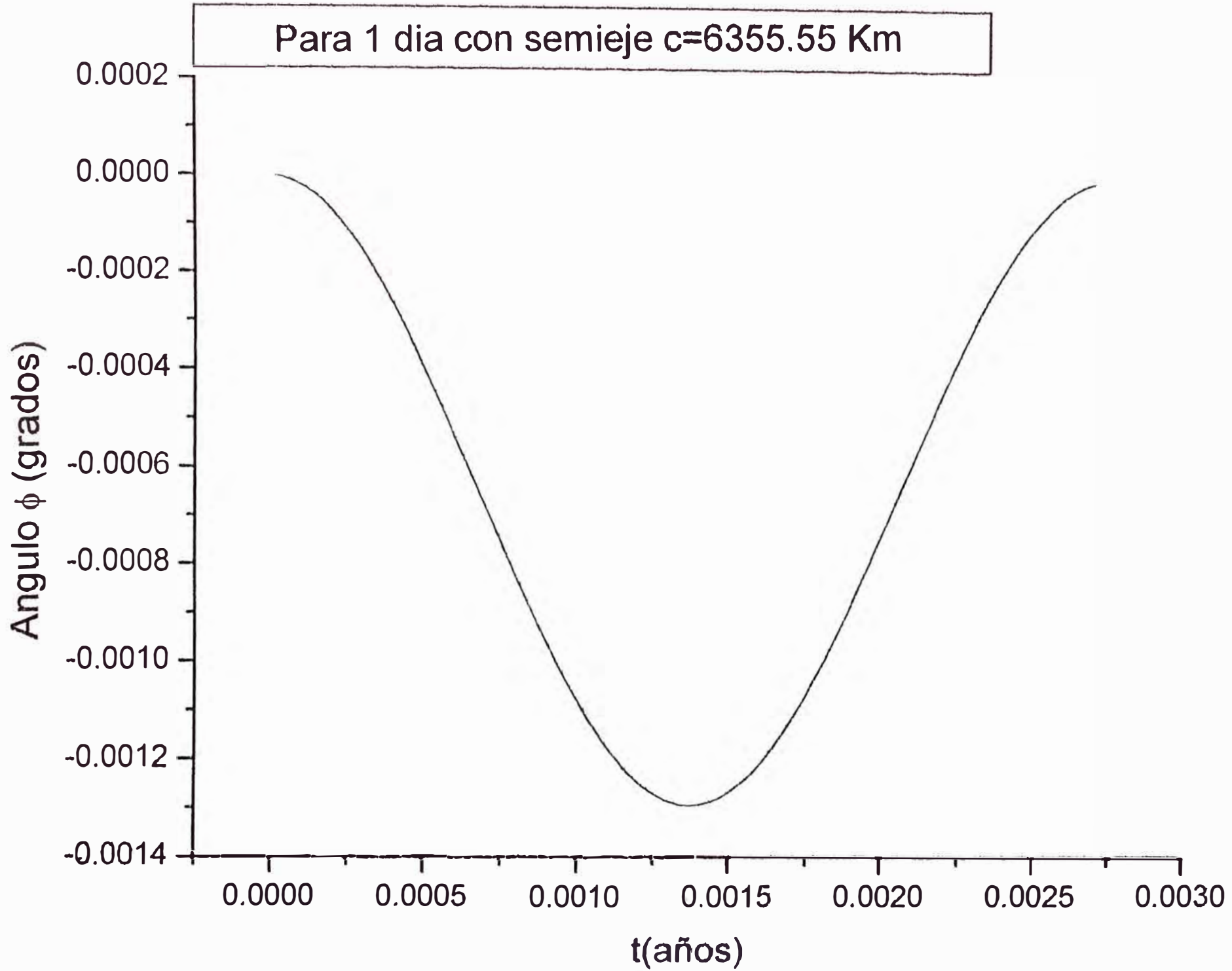
Observaciones:

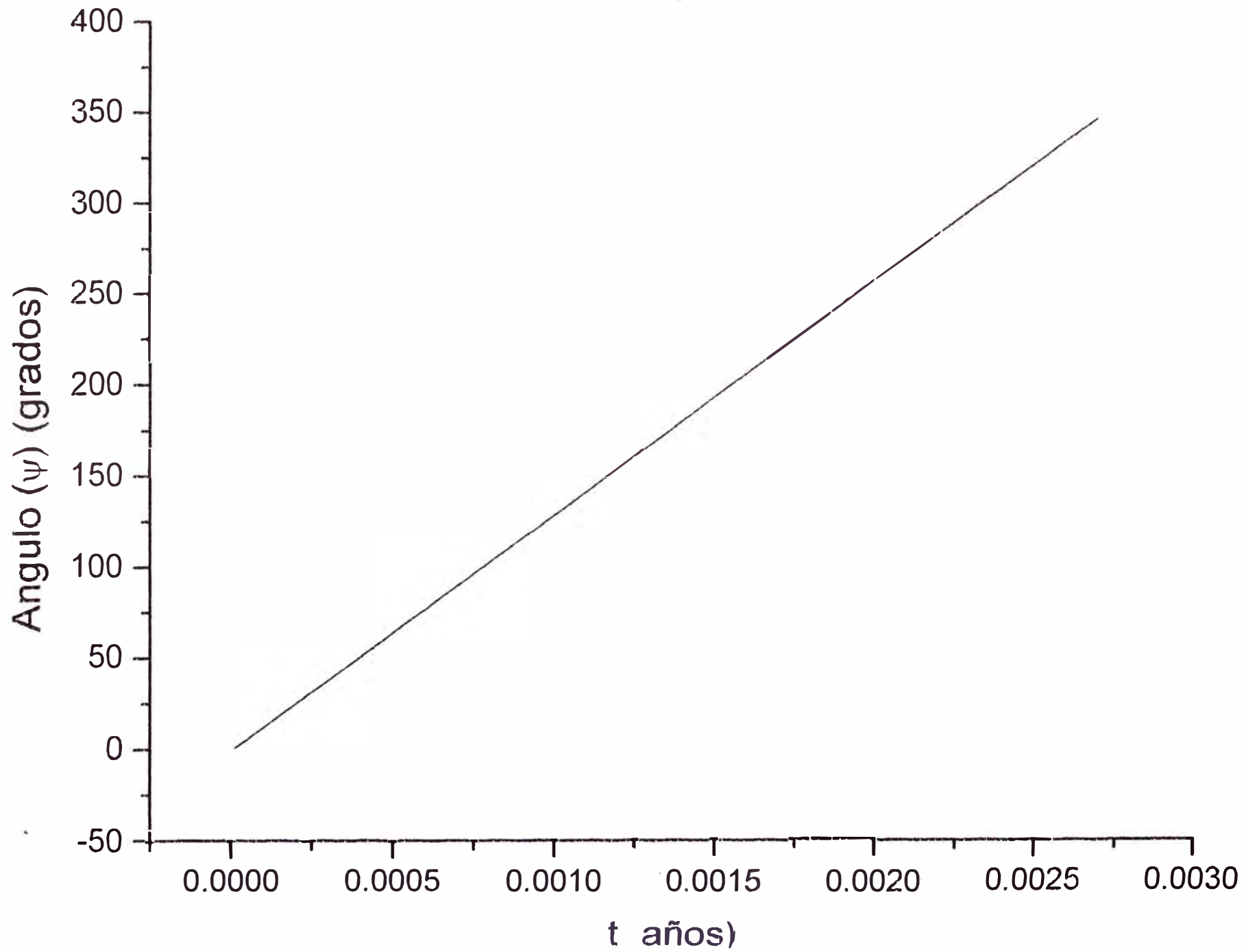
- Las gráficas de las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ parecen ser periódicas.
- La función $\psi(t)$ es una recta con pendiente positiva.
- La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY tiende a ser una circunferencia que precesa alrededor del eje Z_0 .
- Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY es casi una elipse, notando que al compararla con el caso aislado la curva aun no es cerrada .

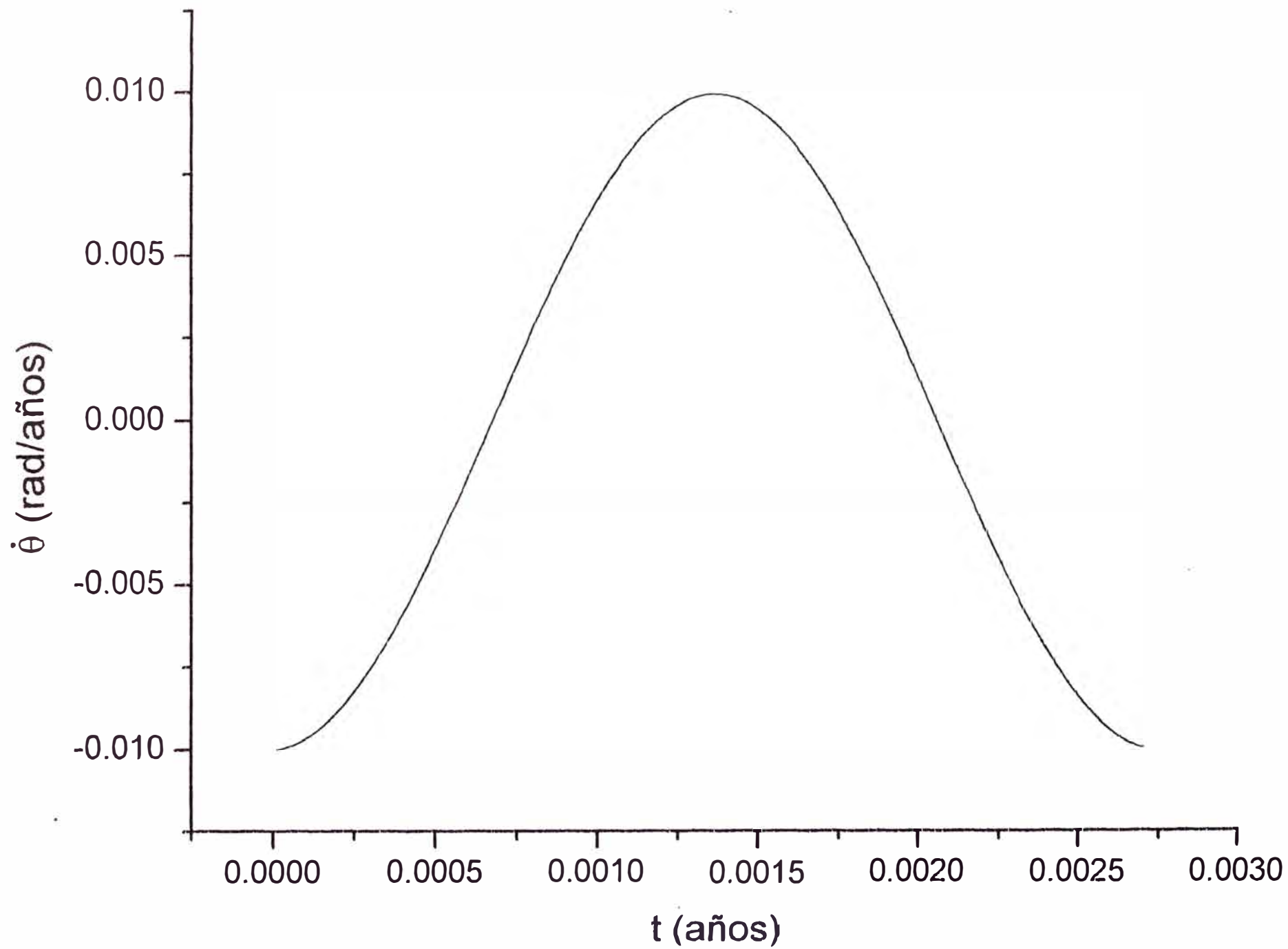
Para 1 día con $c=6355.55$ Km sin Luna

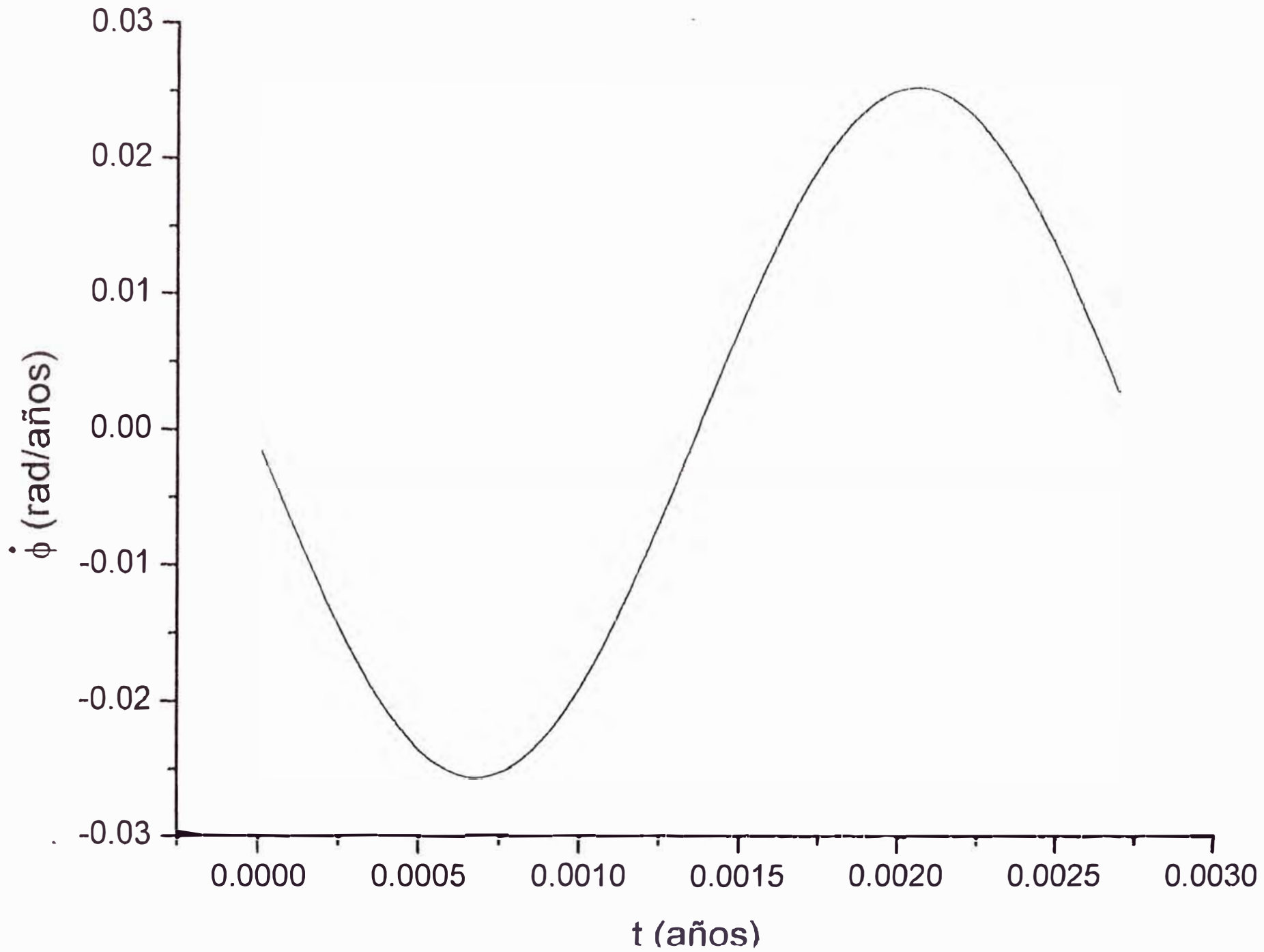


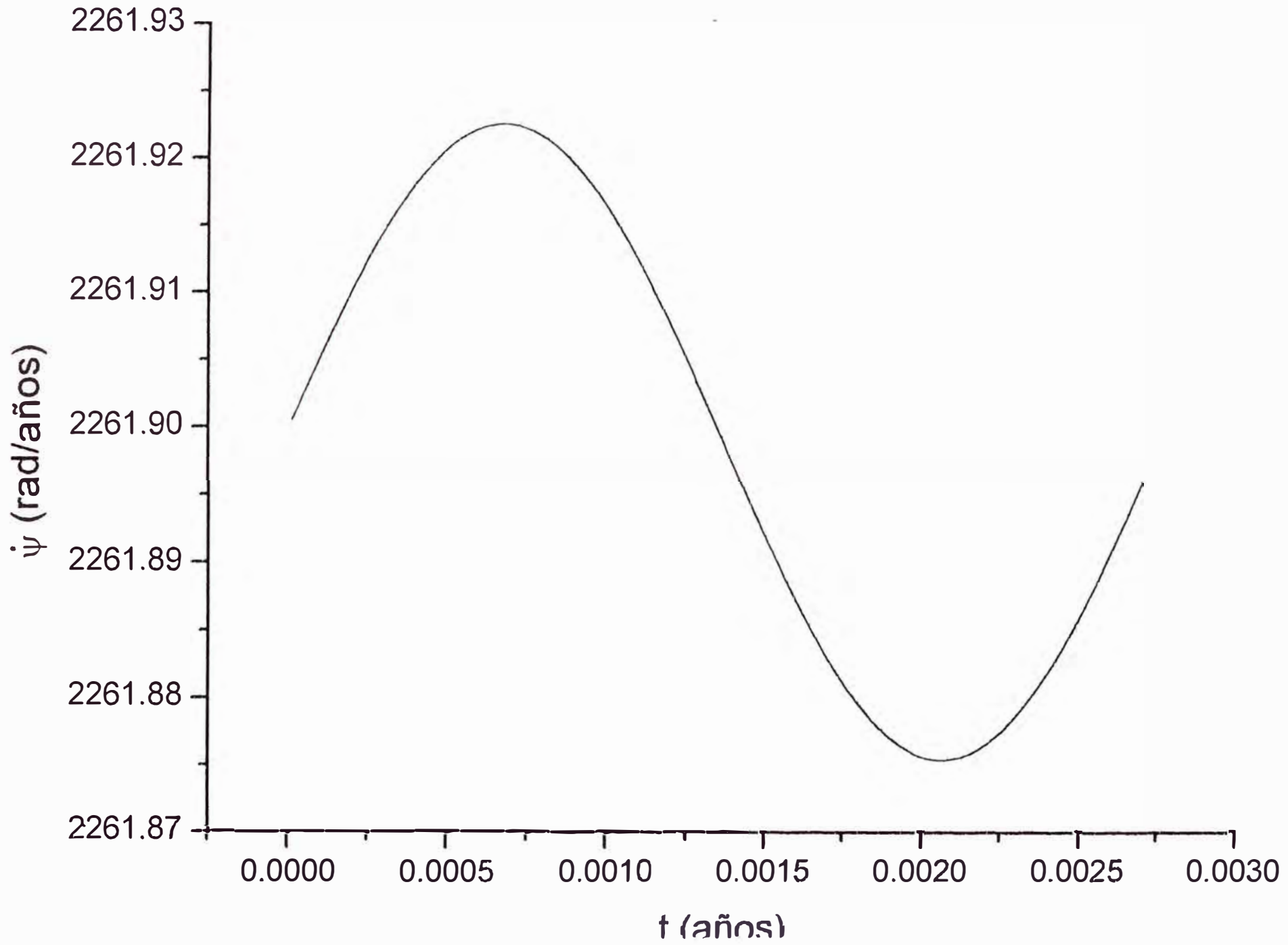
Para 1 dia con semieje c=6355.55 Km



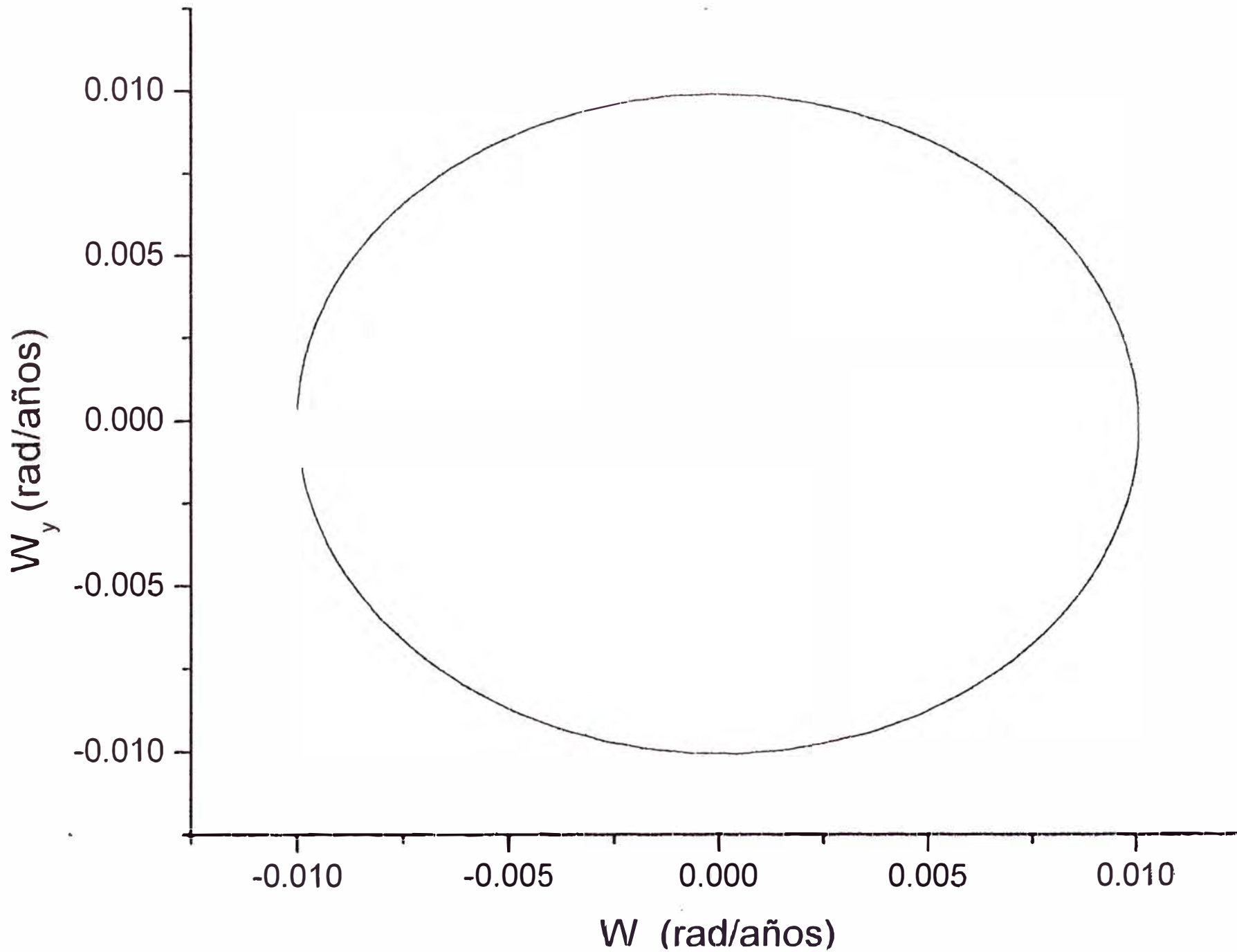








Proyección del Vector W sobre el plano XY para 1 día con $c=6355.55$ Km



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY

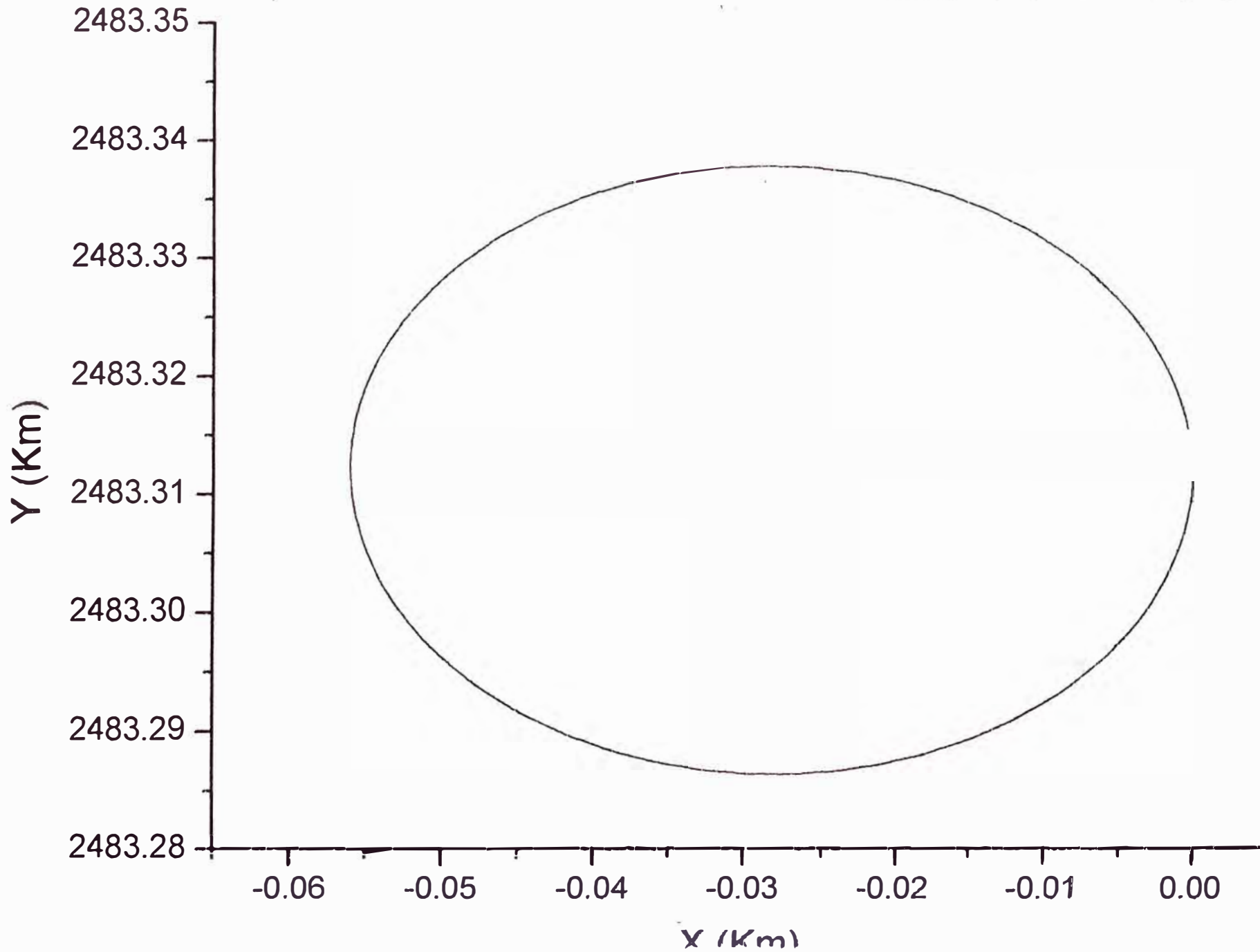


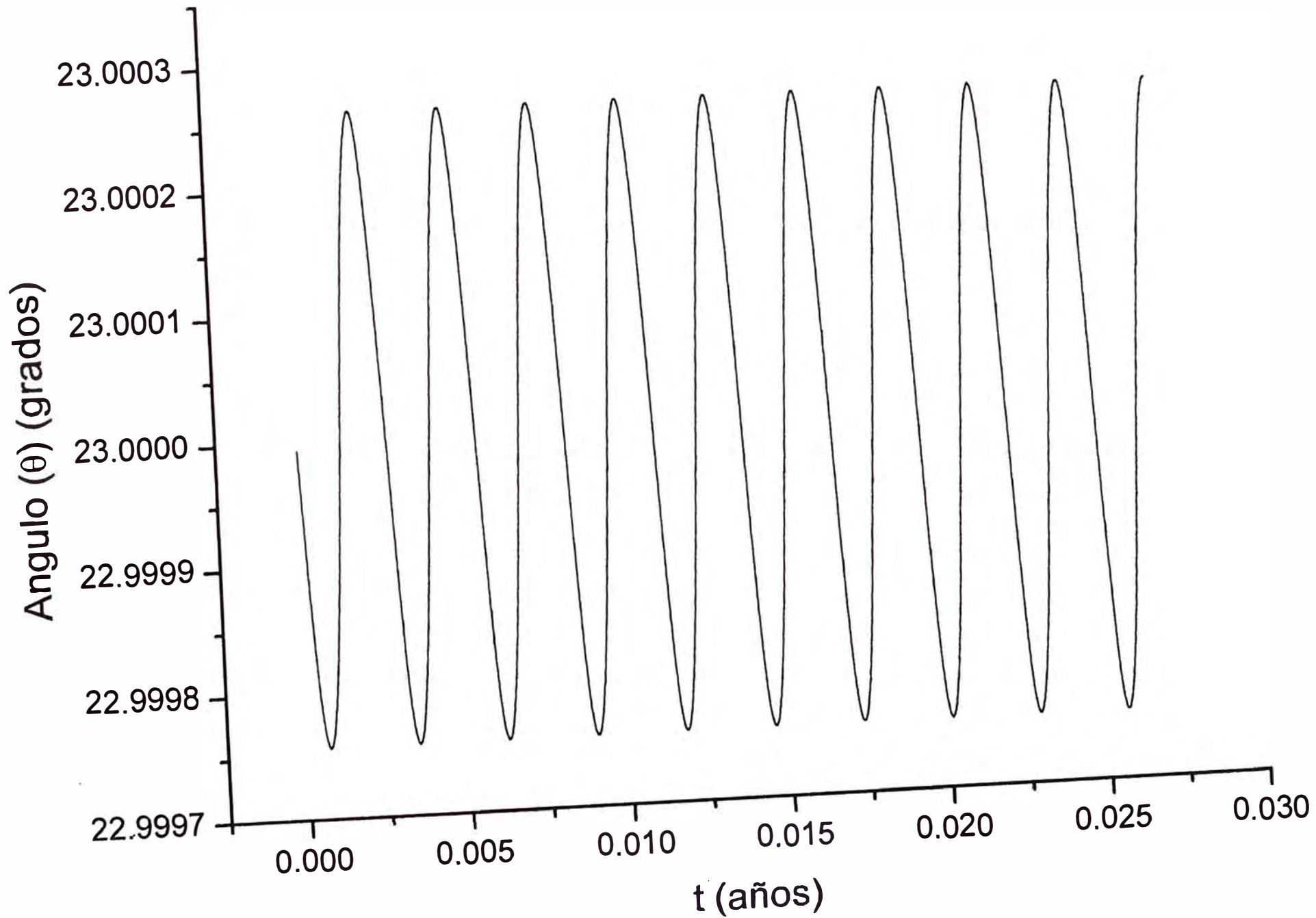
Table 2: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 10$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	92
$\phi(t)$	93
$\psi(t)$	94
$\dot{\theta}(t)$	95
$\dot{\phi}(t)$	96
$\dot{\psi}(t)$	97
W_y vs W_x	98
Y vs X	99
W_2 vs W_1	100

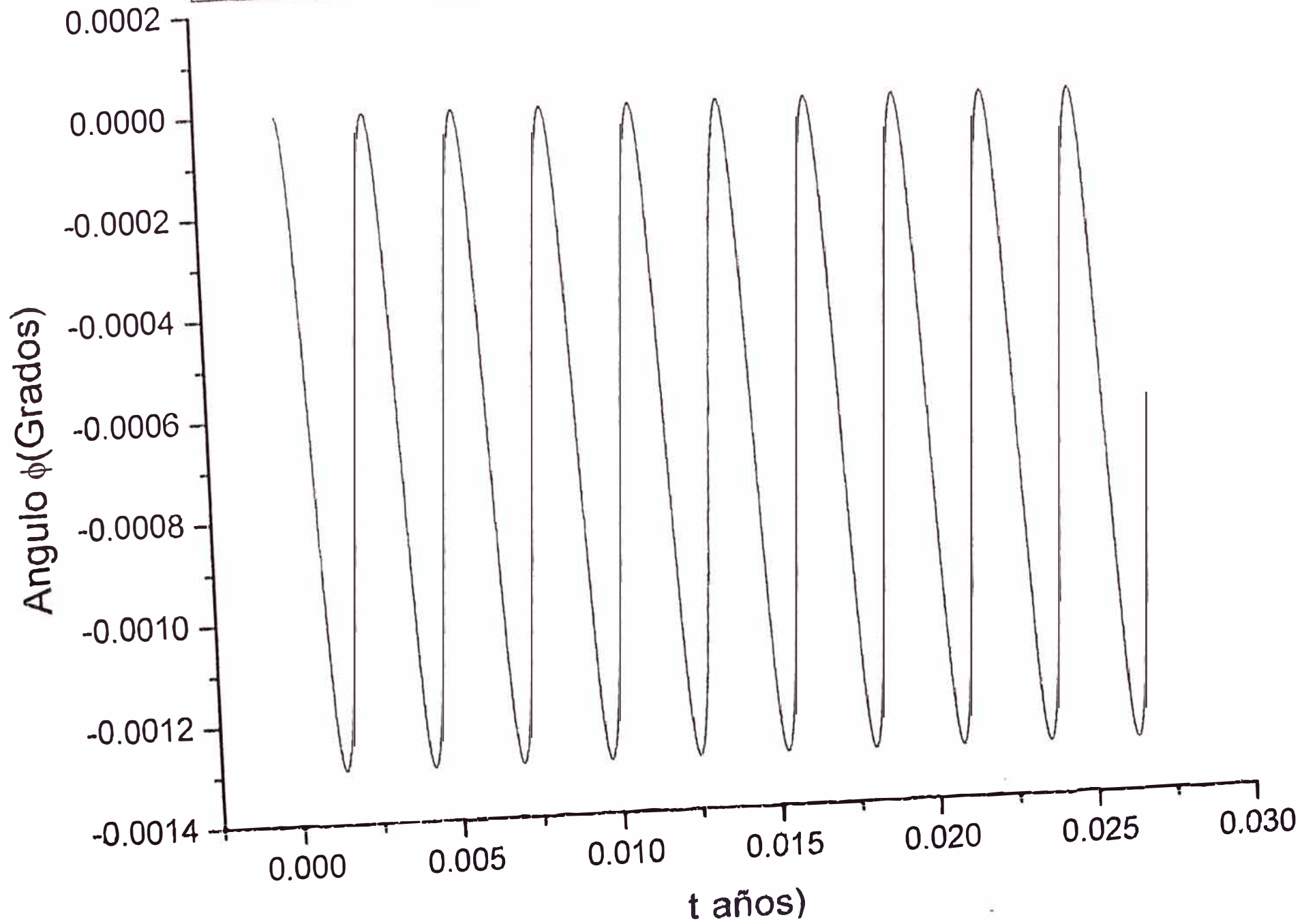
Observaciones:

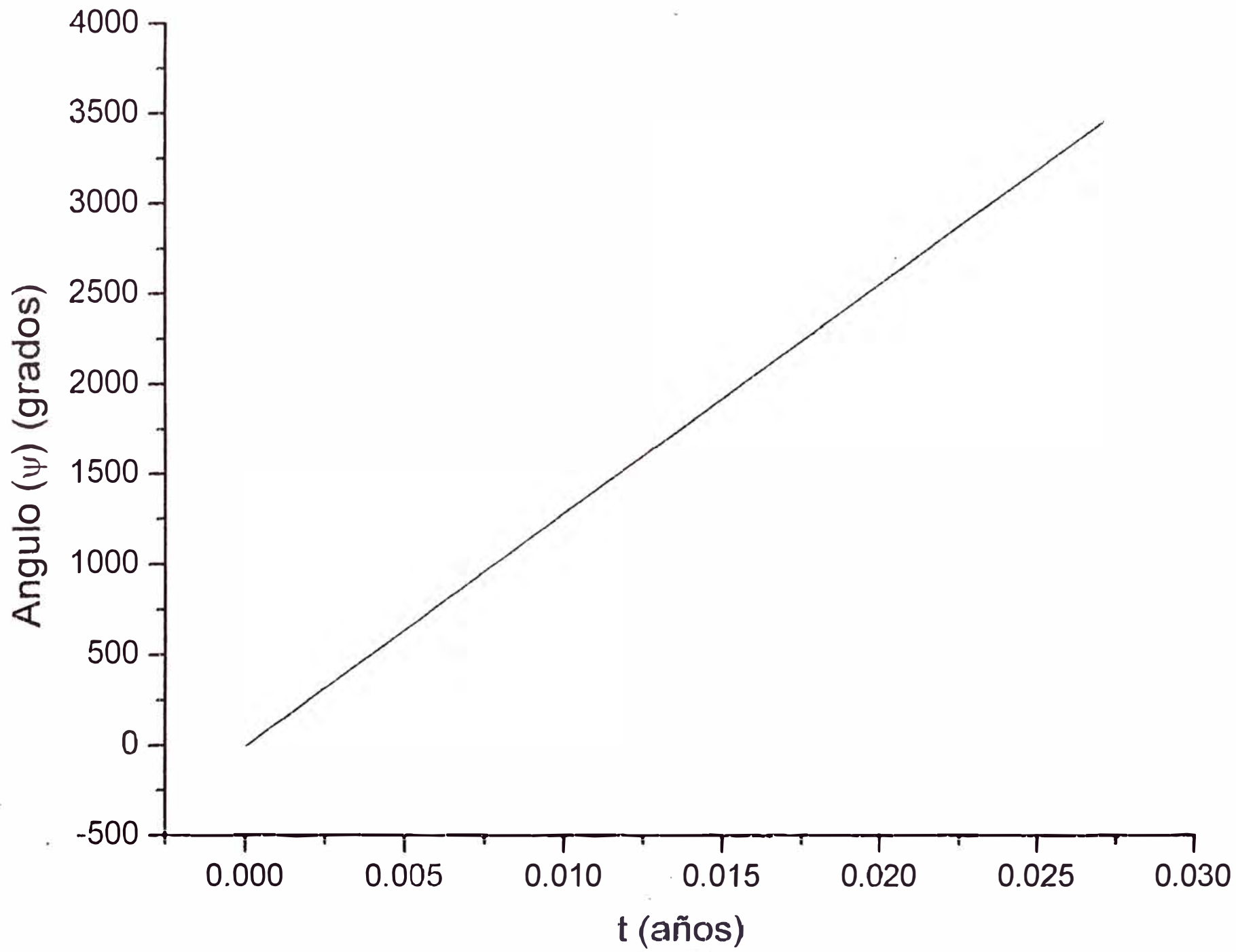
- a) Las gráficas de las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ parecen ser periódicas.
- b) La grafica de $\phi(t)$ nos muestra que es una función oscilante pero decreciente y podemos afirmar que el comportamiento del cuerpo rígido es aun semejante el caso aislado
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es una circunferencia .
- d) Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY ya es una elipse y el tiempo que se demora en cerrar la curva es un poco mas de un día
- e) El gráfico más interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 en el cual sólo se observa una curva que más adelante se mostrara que será cerrada y permitira determinar el período de precesión de dicho vector

Para 10 dias con $c=6355.55$ Km sin Luna

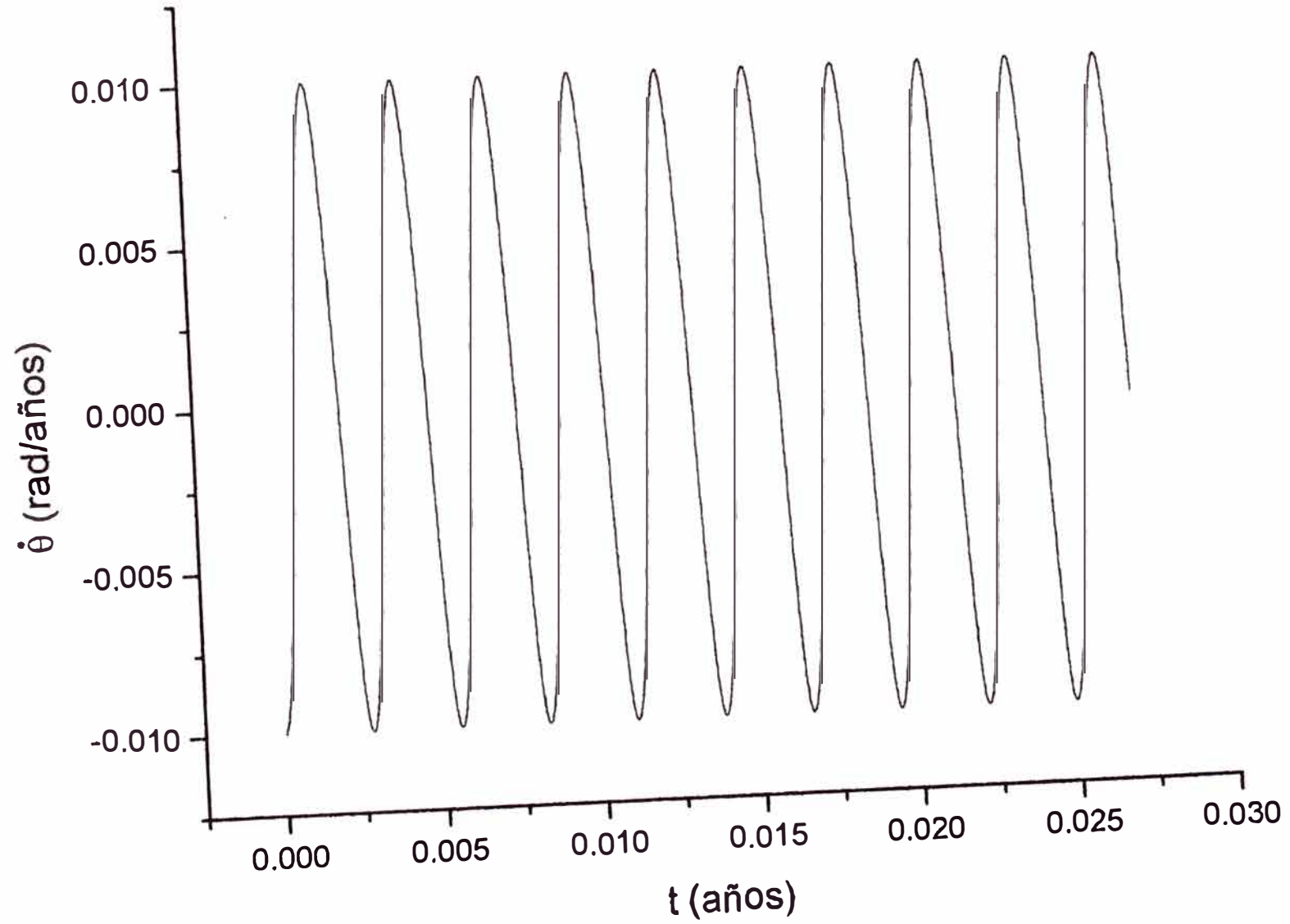


Para 10 dias con semieje $c=6355.55$ Km

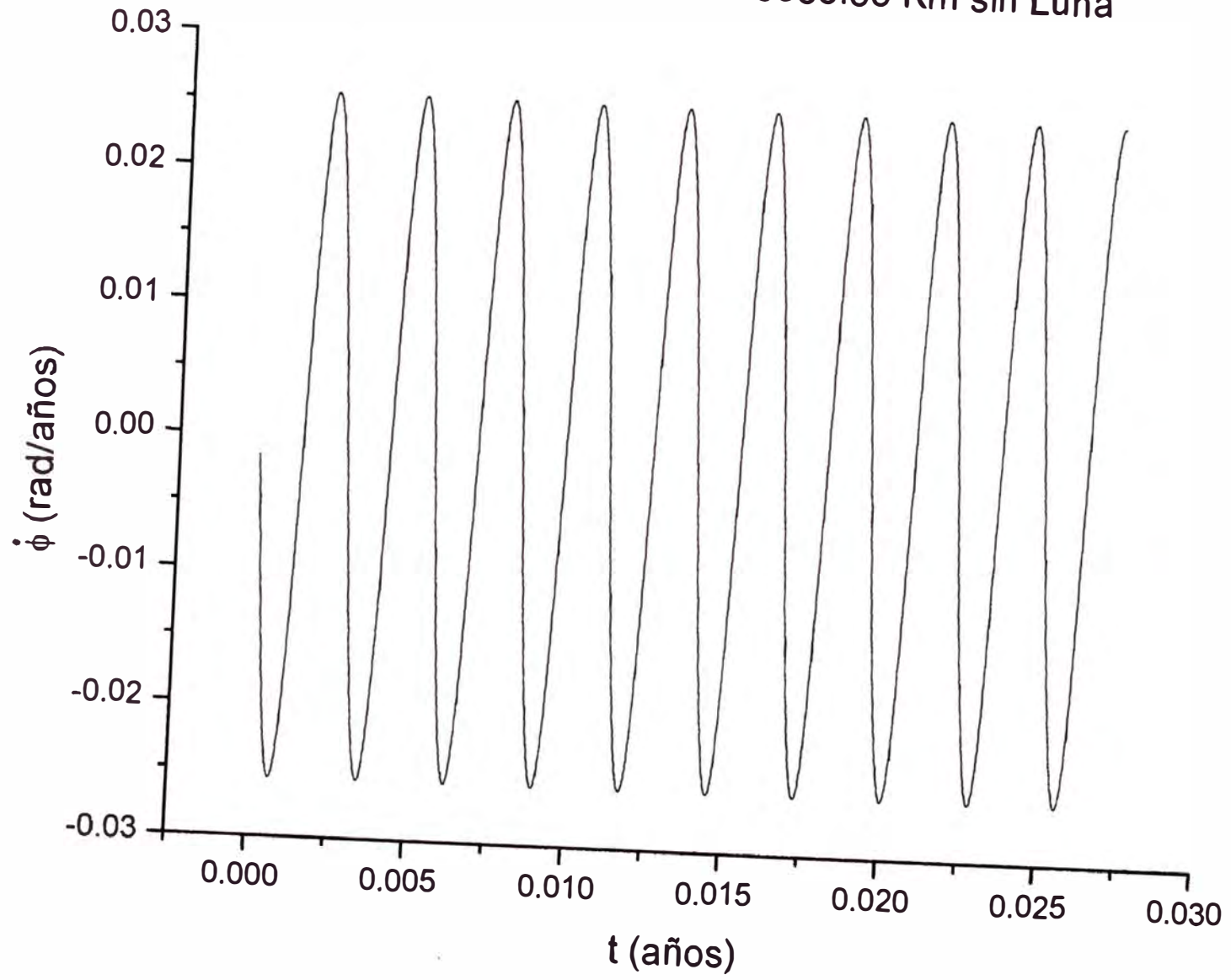


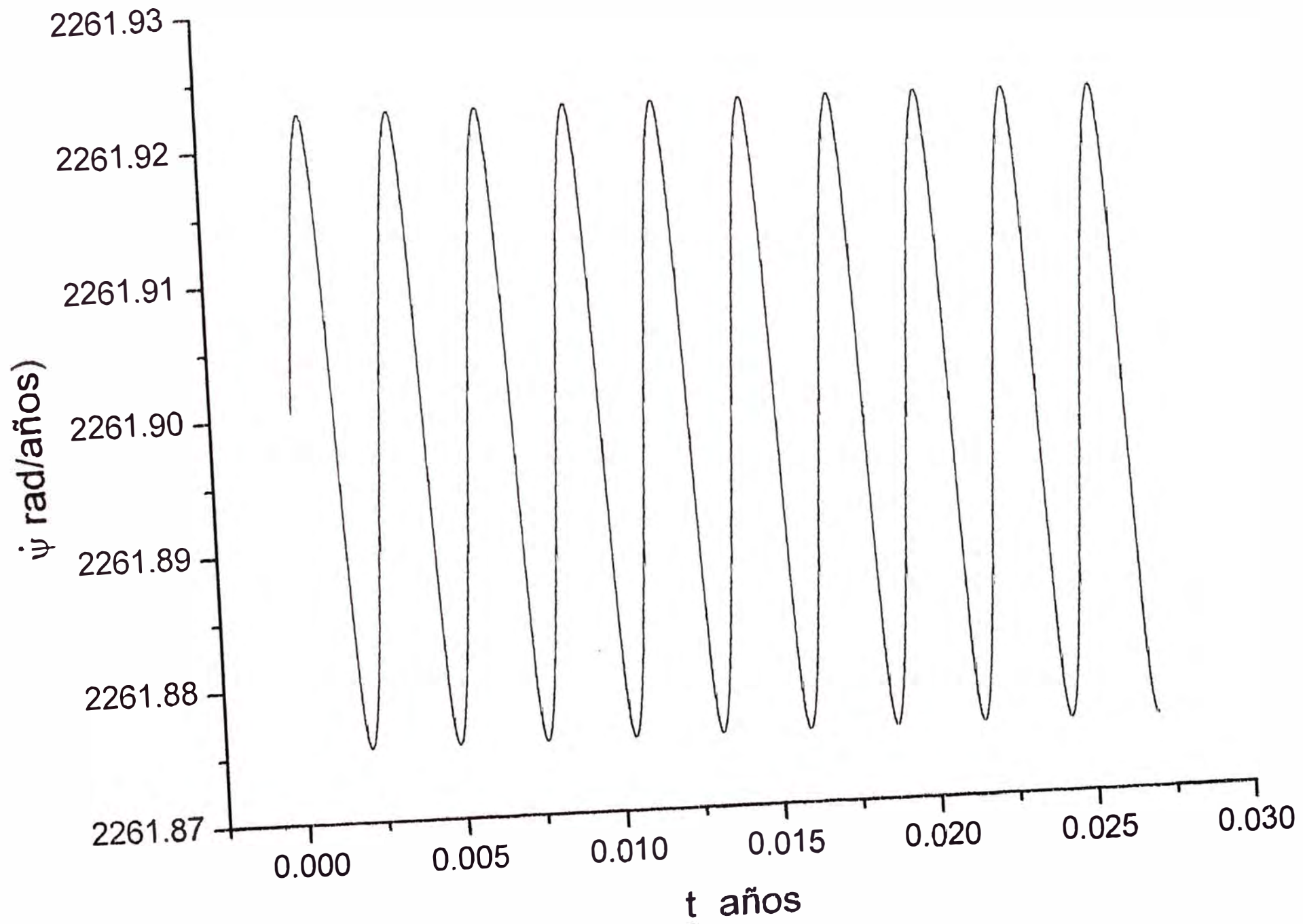


Para 10 dias con $c = 6355.55$ Km sin Luna

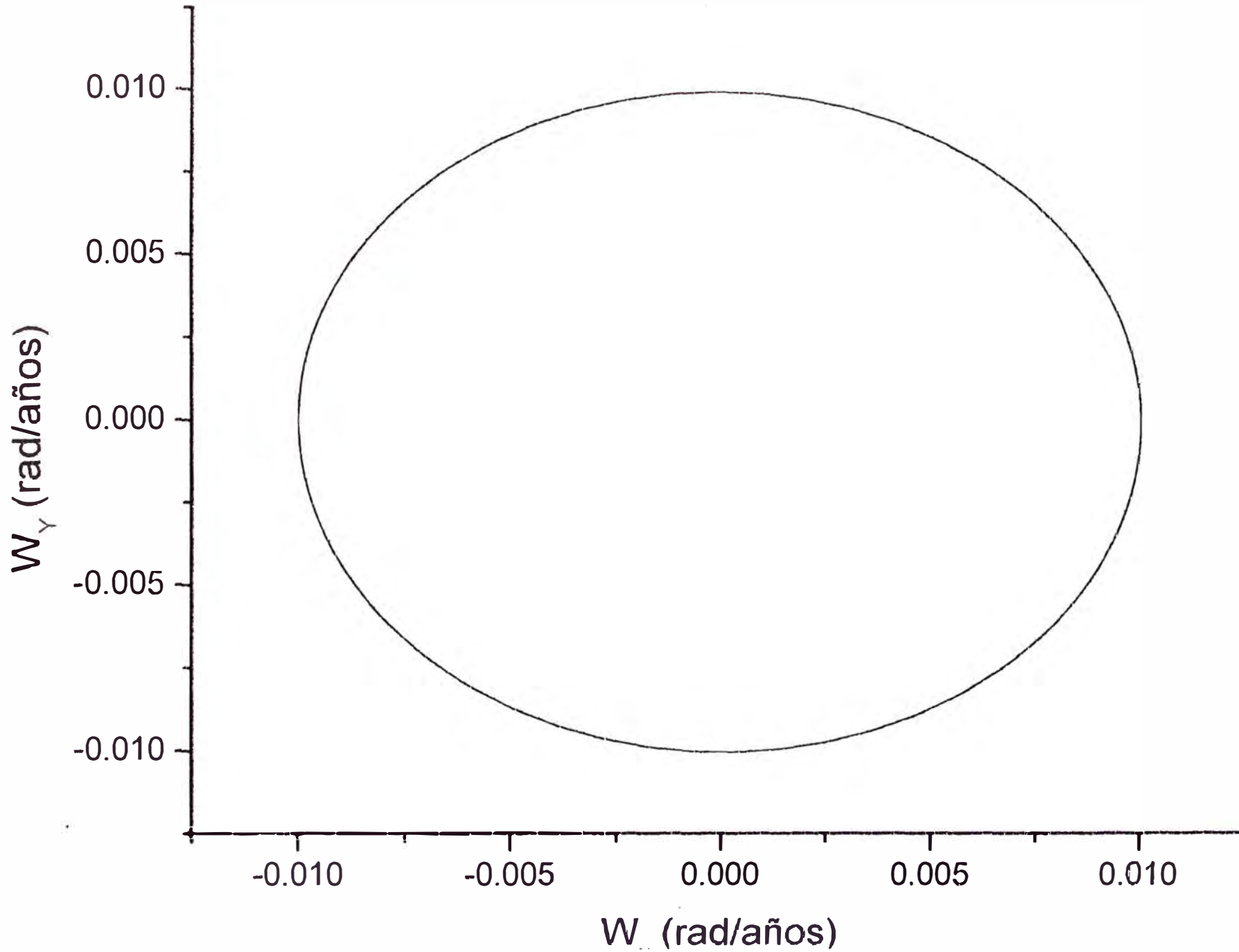


Para 10 dias con $c= 6355.55$ Km sin Luna

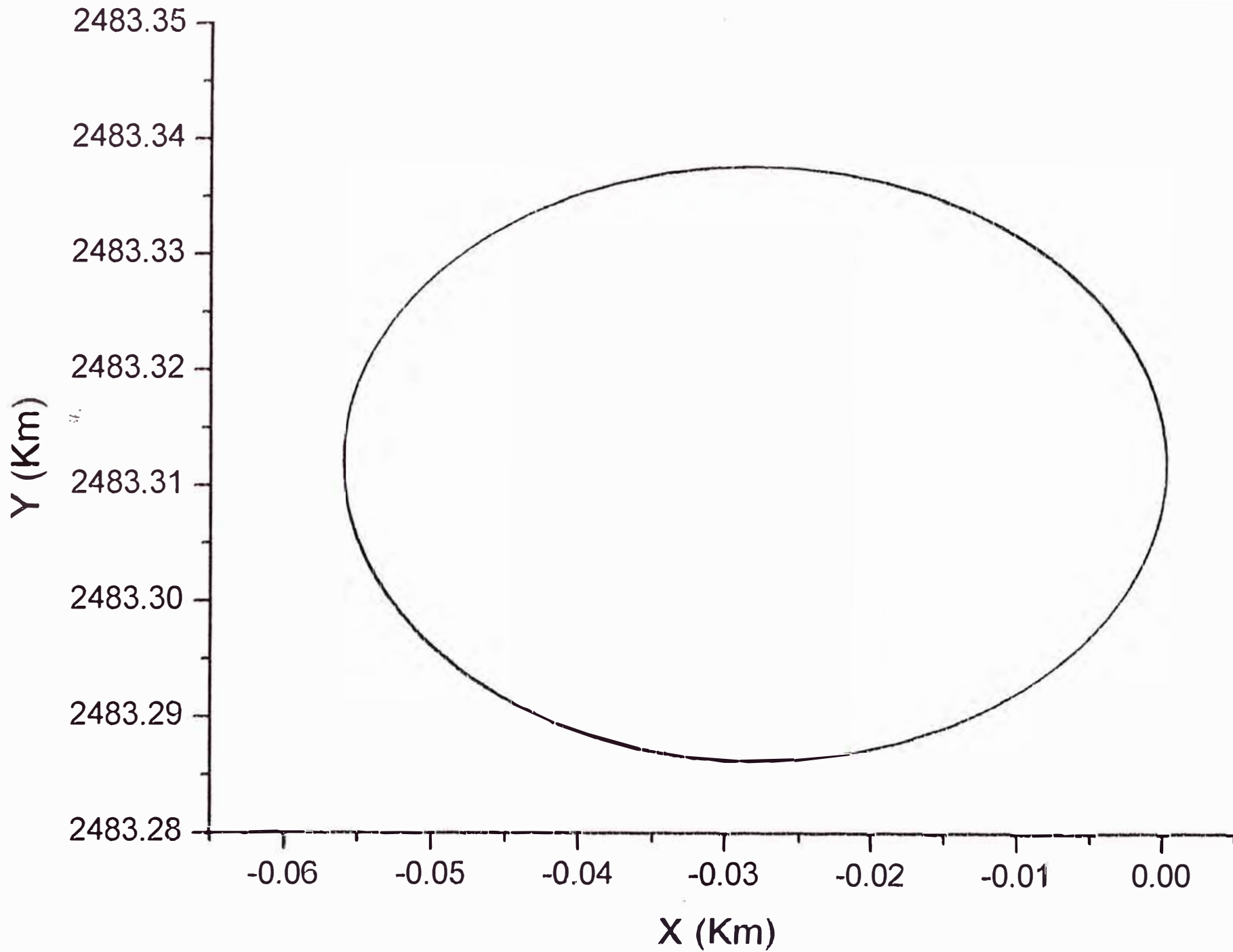




Proyección del Vector W sobre el plano XY para 10 días con $c=6355.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 10 días con $c=6355.55$ Km

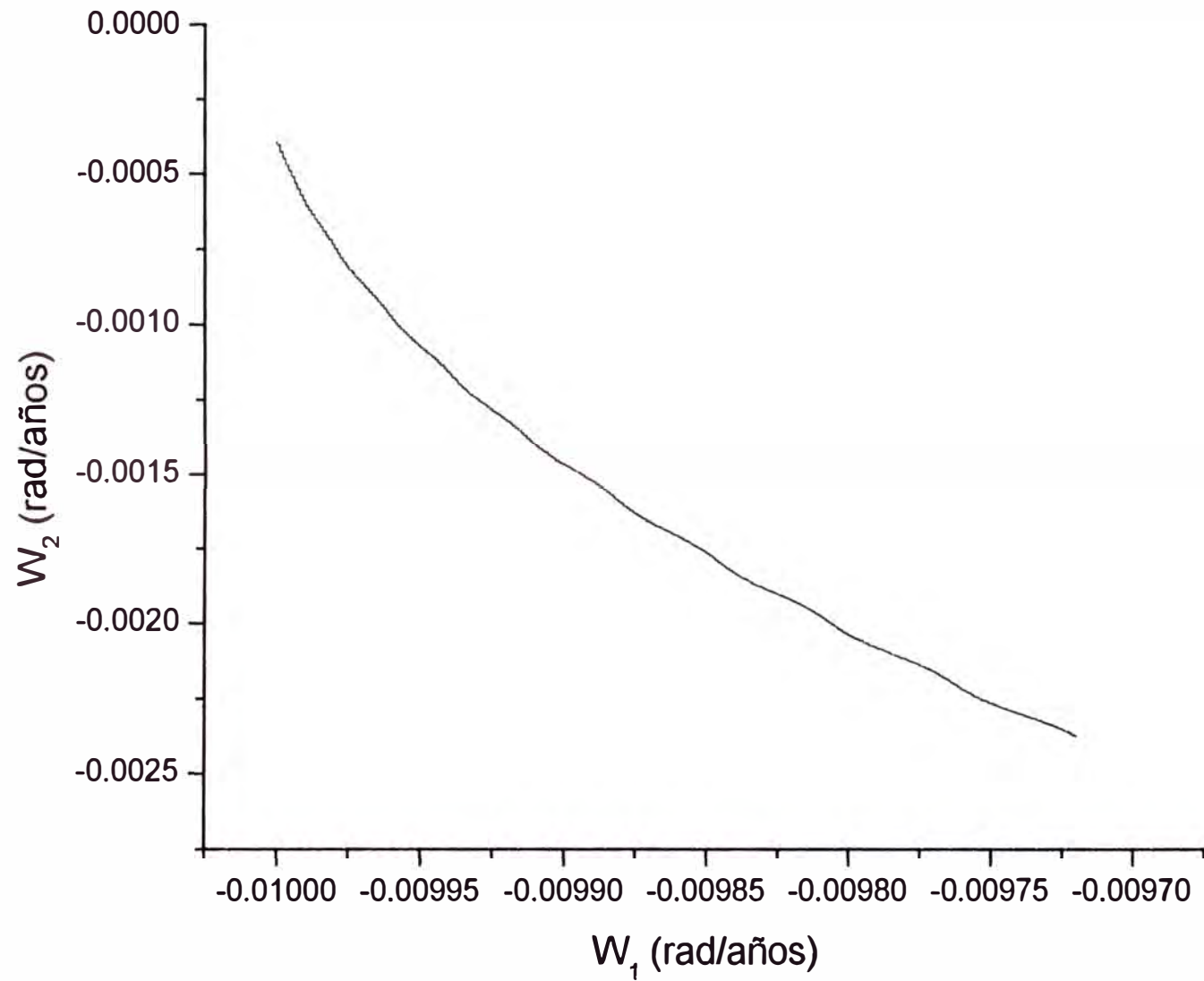


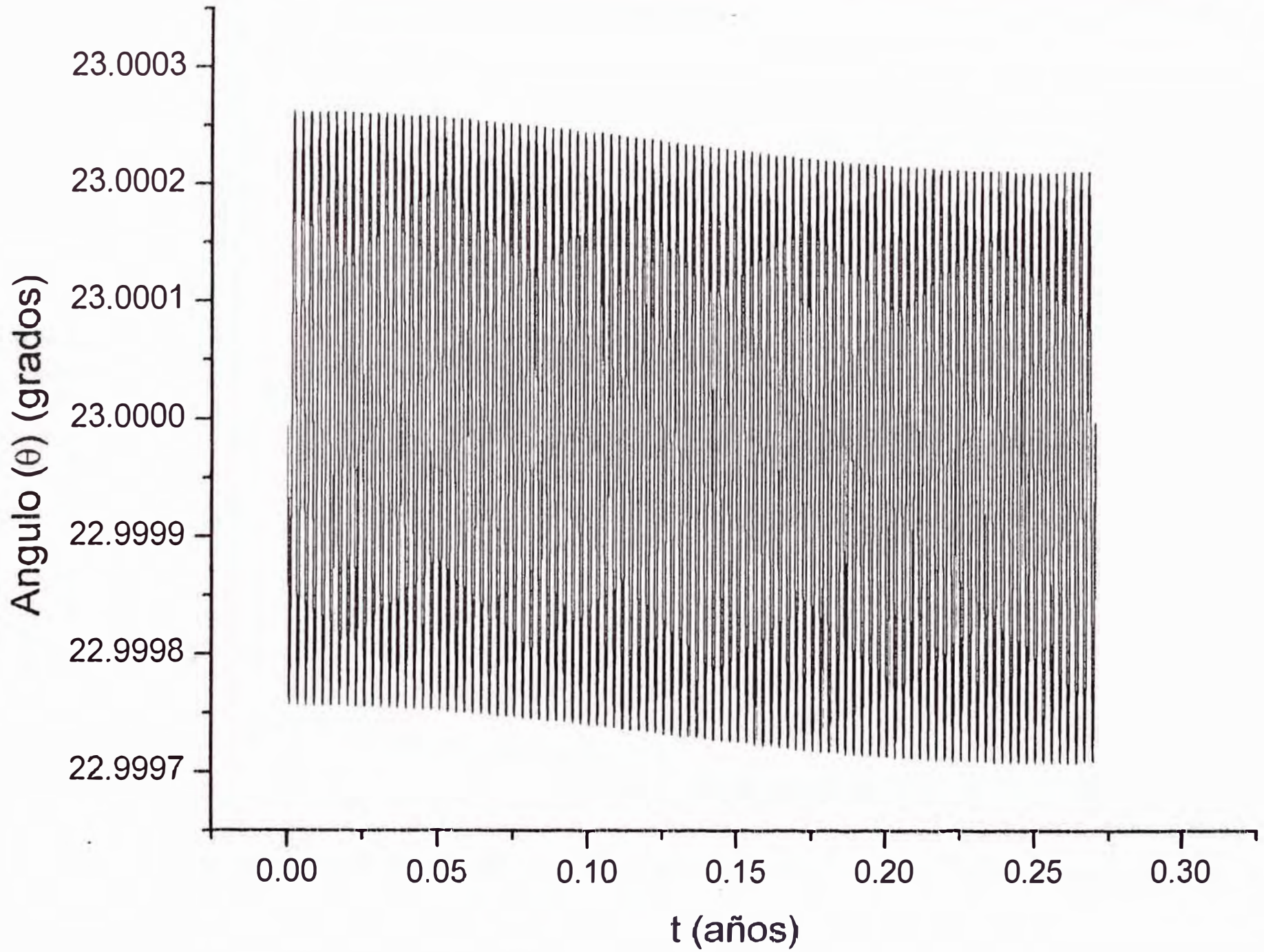
Table 3: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 50$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	102
$\phi(t)$	103
$\psi(t)$	104
$\dot{\theta}(t)$	105
$\dot{\phi}(t)$	106
$\dot{\psi}(t)$	107
W_y vs W_x	108
Y vs X	109
W_2 vs W_1	110

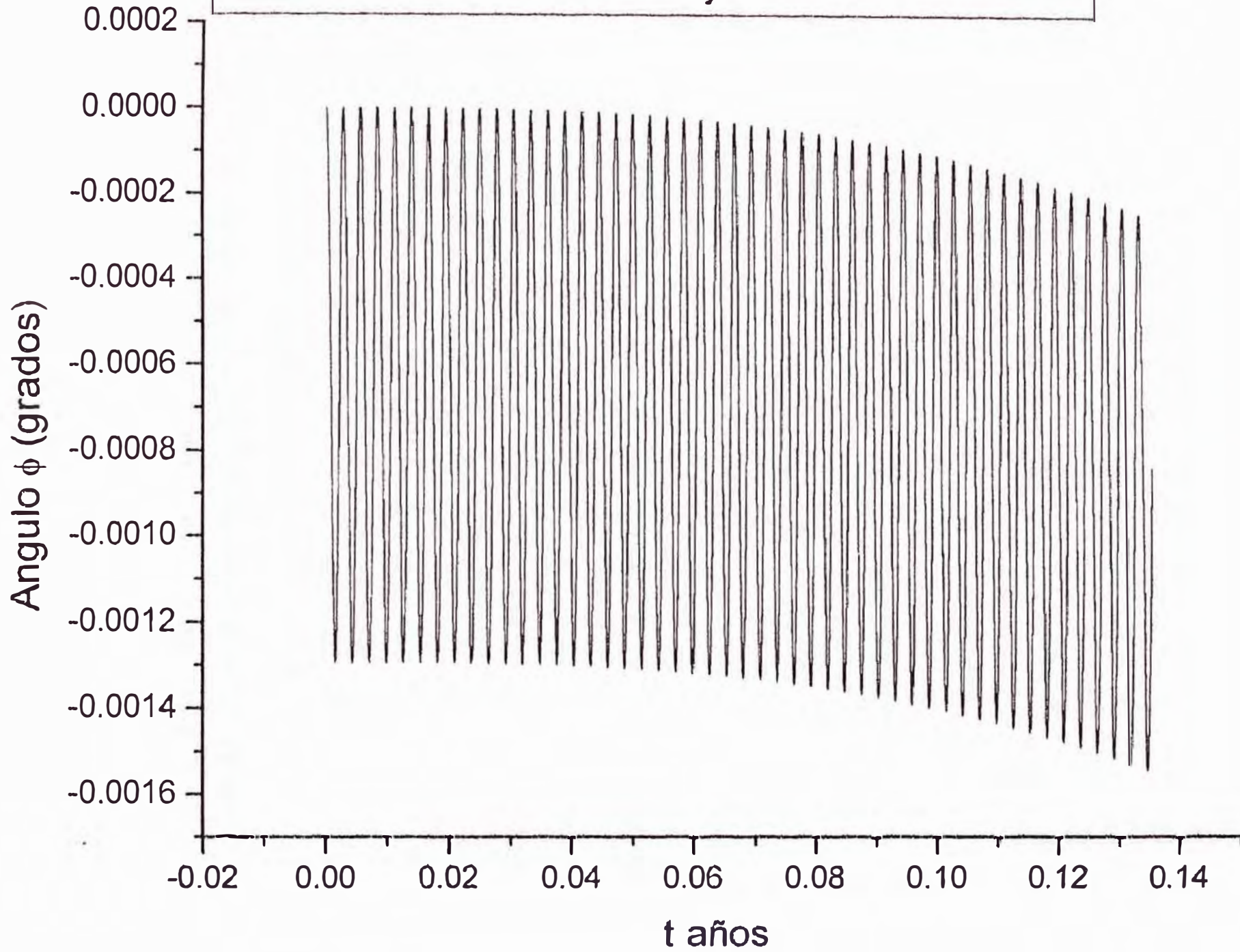
Observaciones:

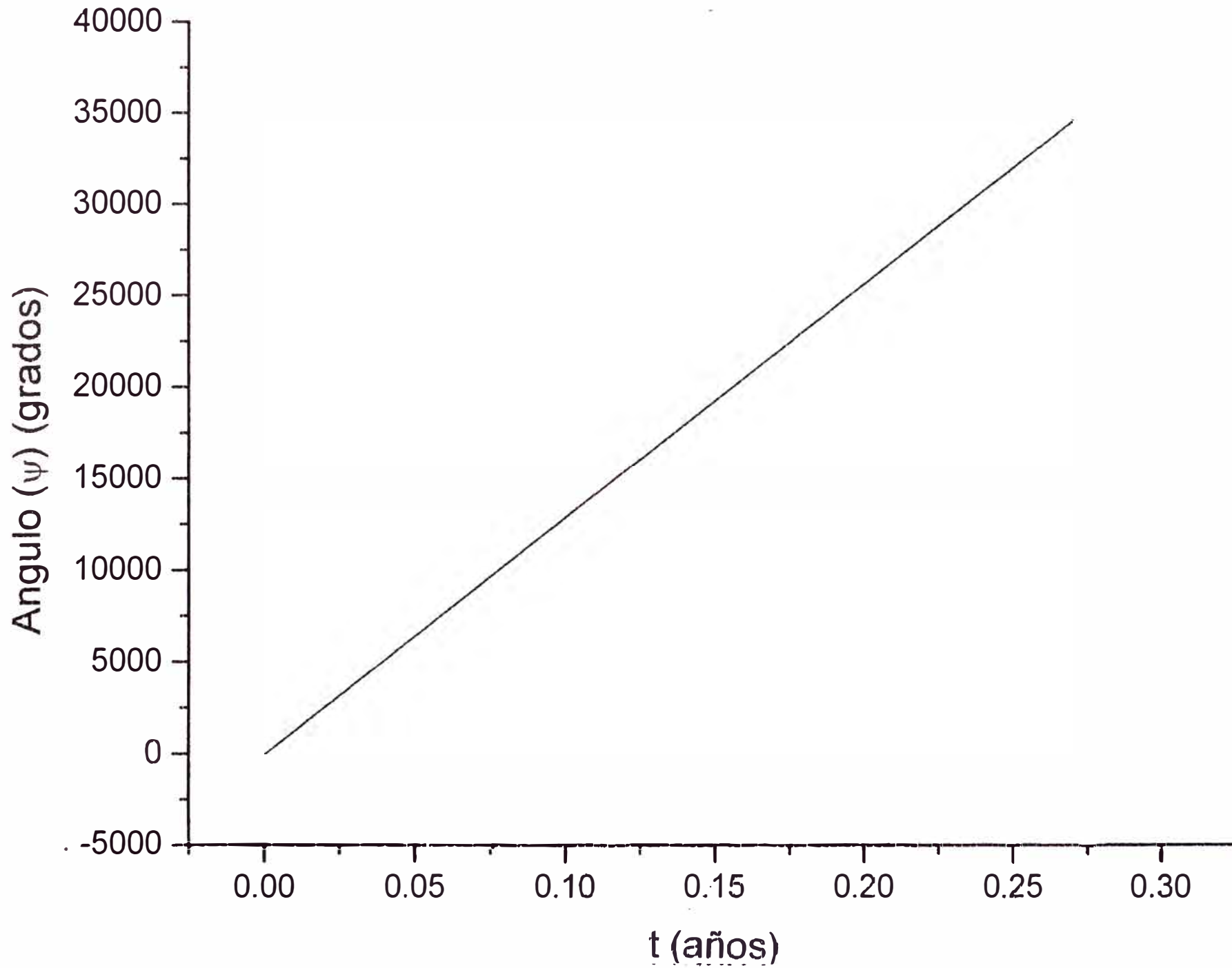
- a) Se observan que las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ son curvas oscilantes pero no son periódicas que comienzan a decrecer muy lentamente .
- b) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es una curva que se parece a una circunferencia cuyo centro se desplaza.
- c) Se observa que la proyección del extremo del eje X_3 sobre el plano XY es una elipse cuyo centro se desplaza .
- d) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una curva que empieza a mostrar perturbaciones en forma de *pequeños rizados*

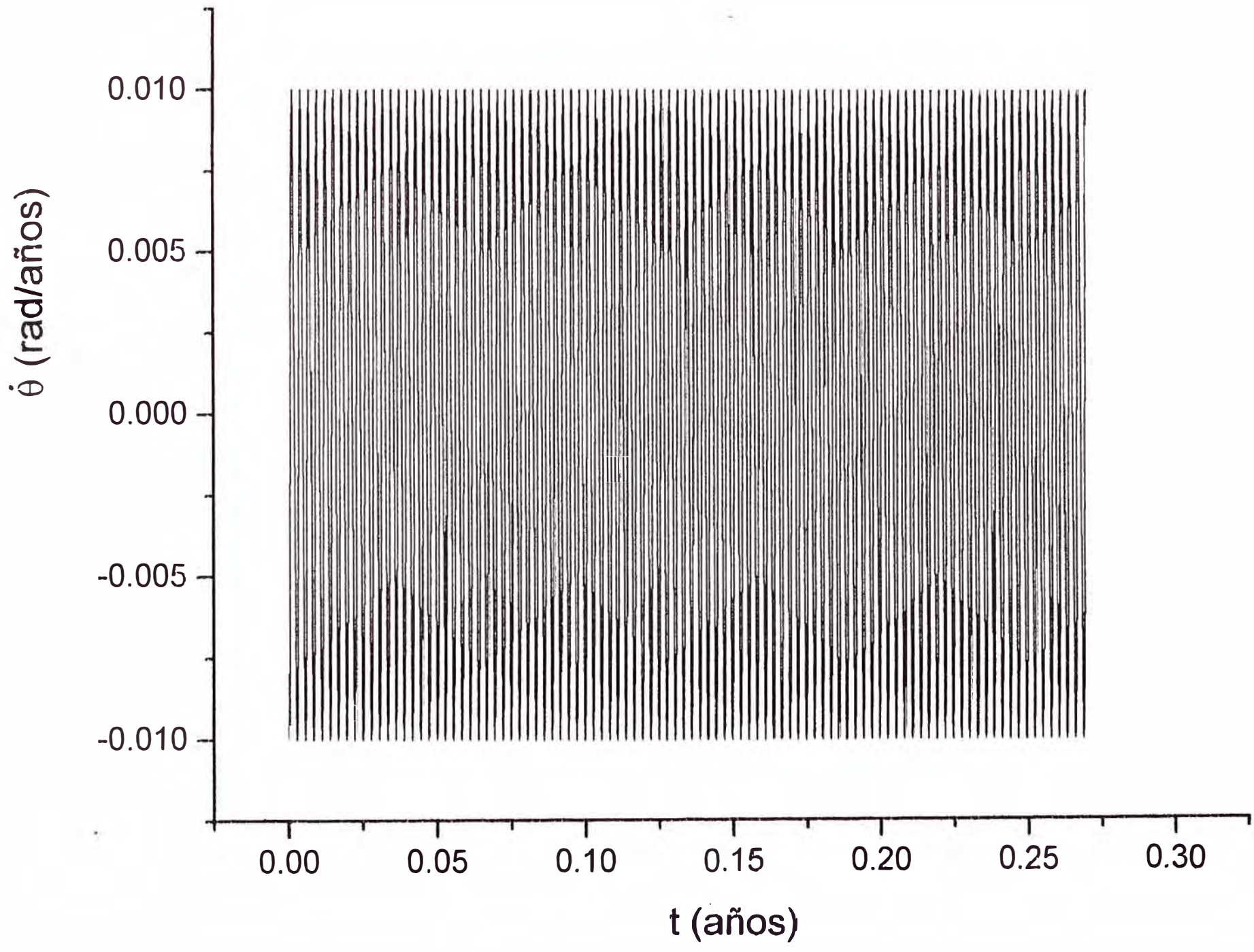
Para 50 dias con $c=6355.55$ Km sin Luna

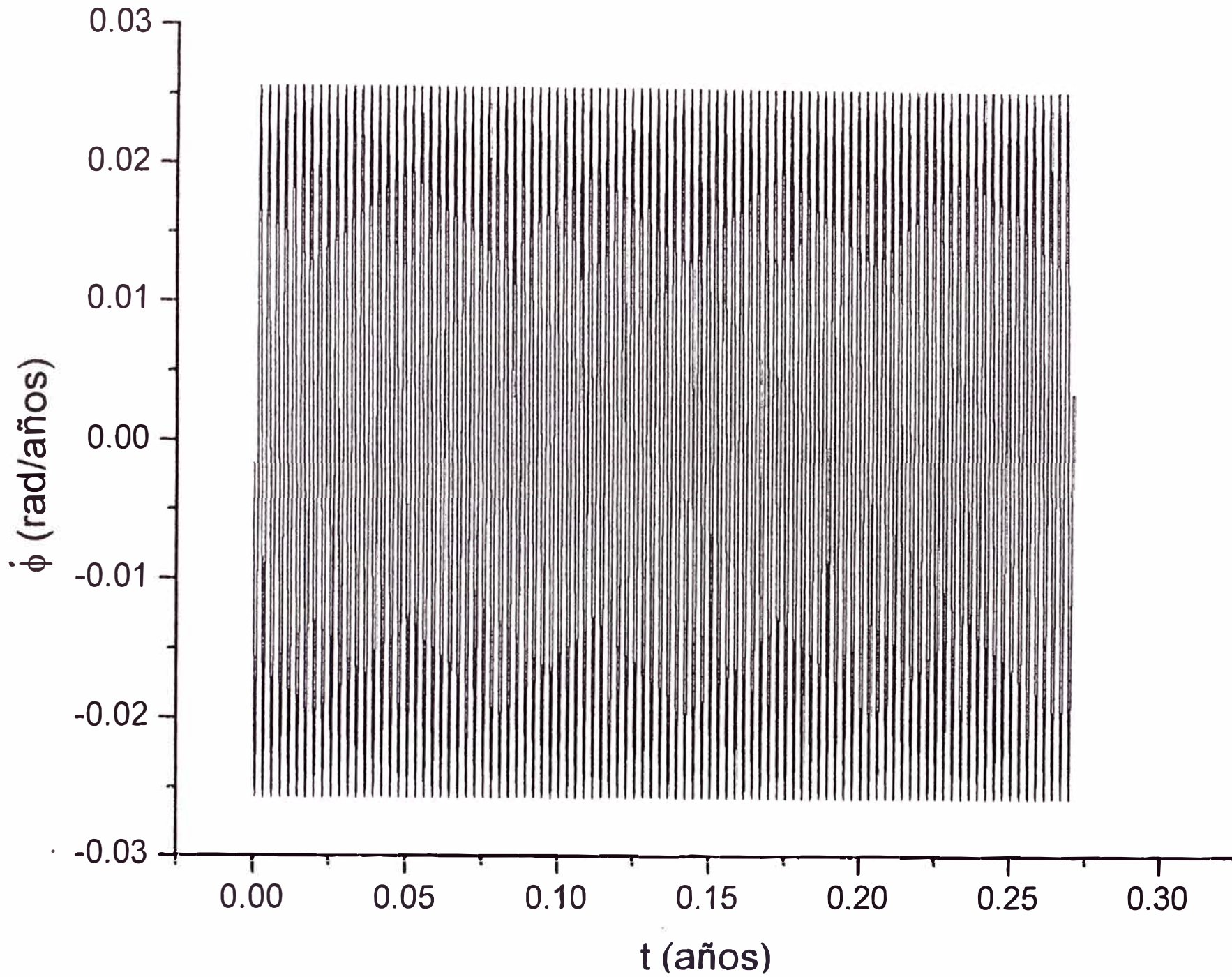


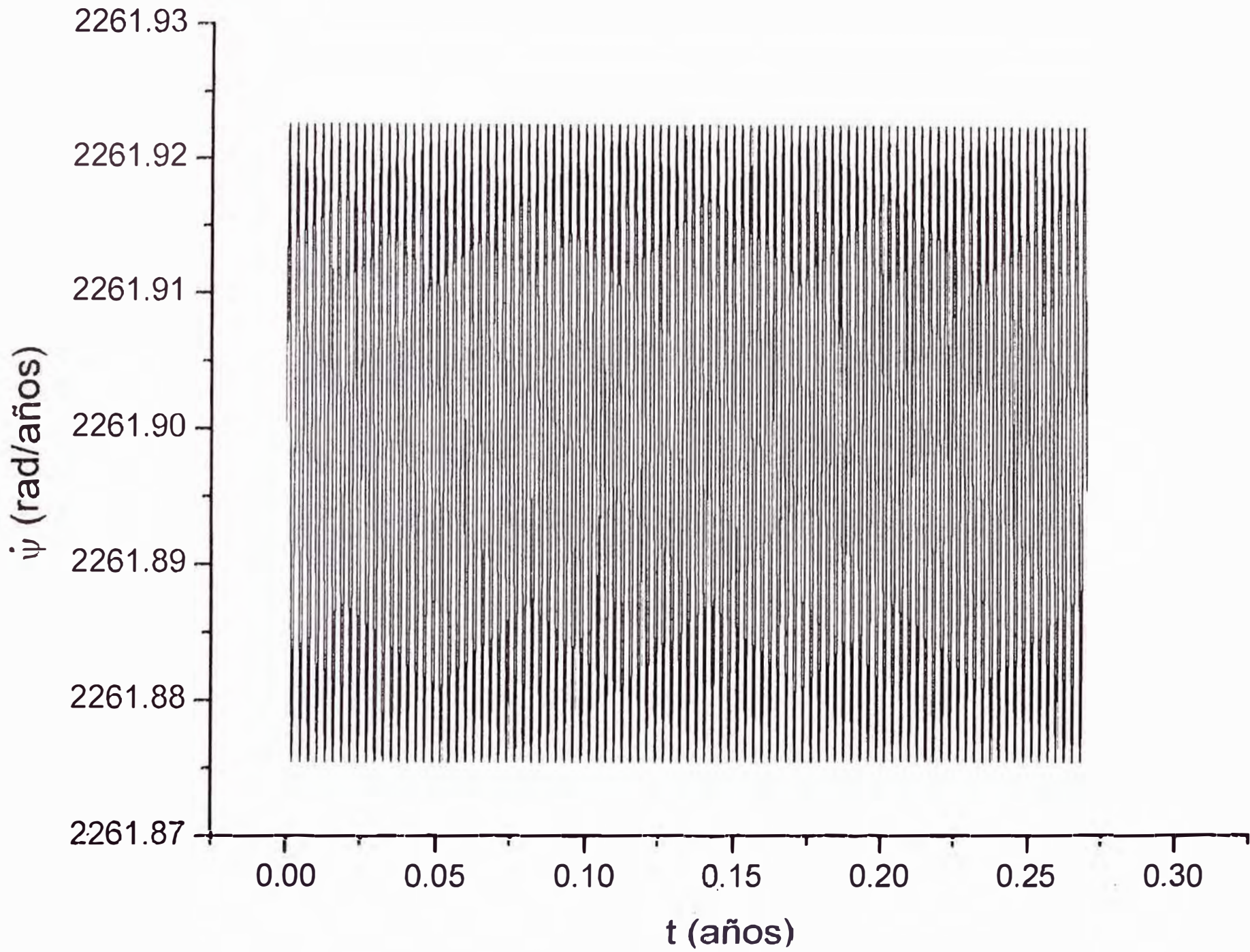
Para 50 dias con semieje c=6355.55 Km



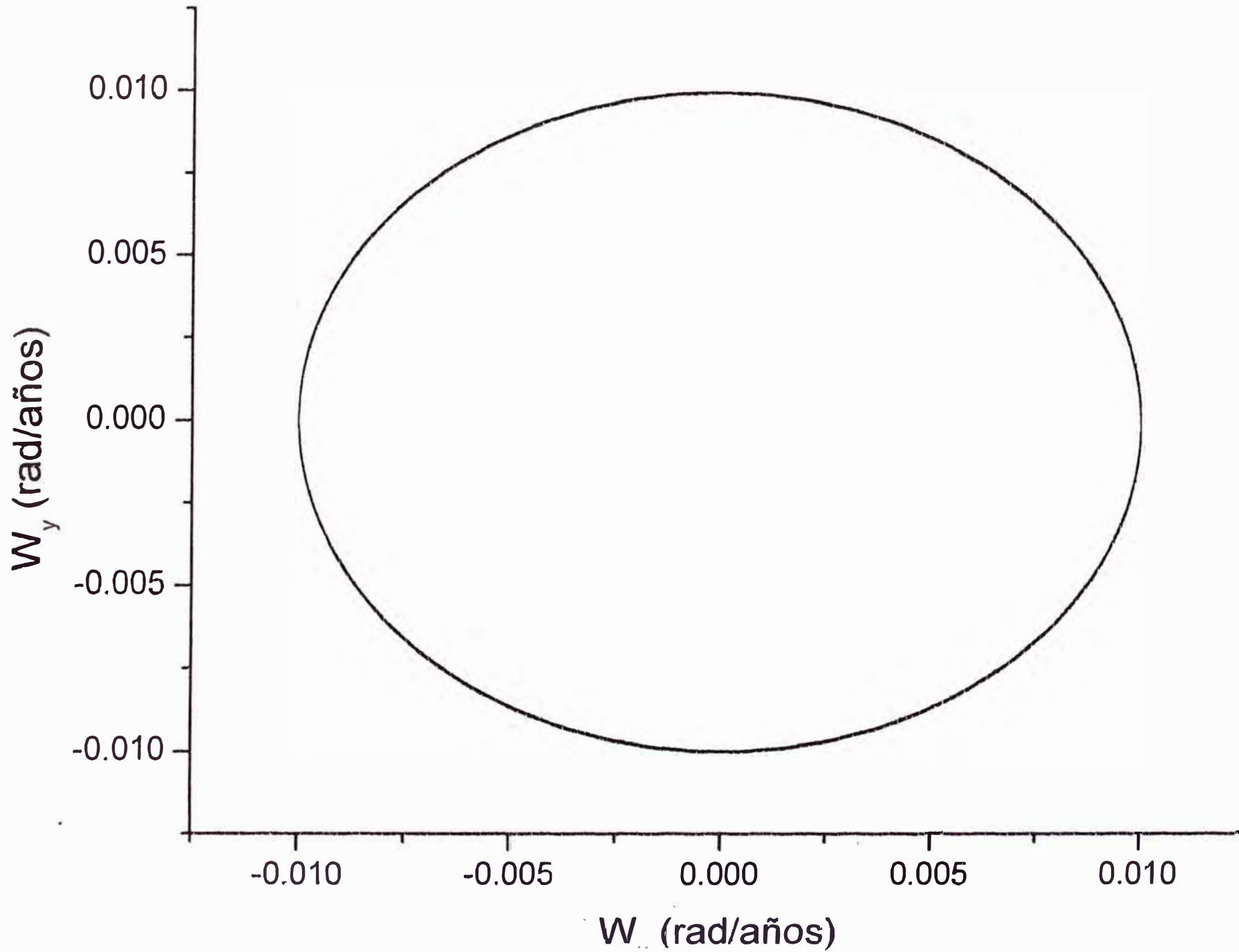




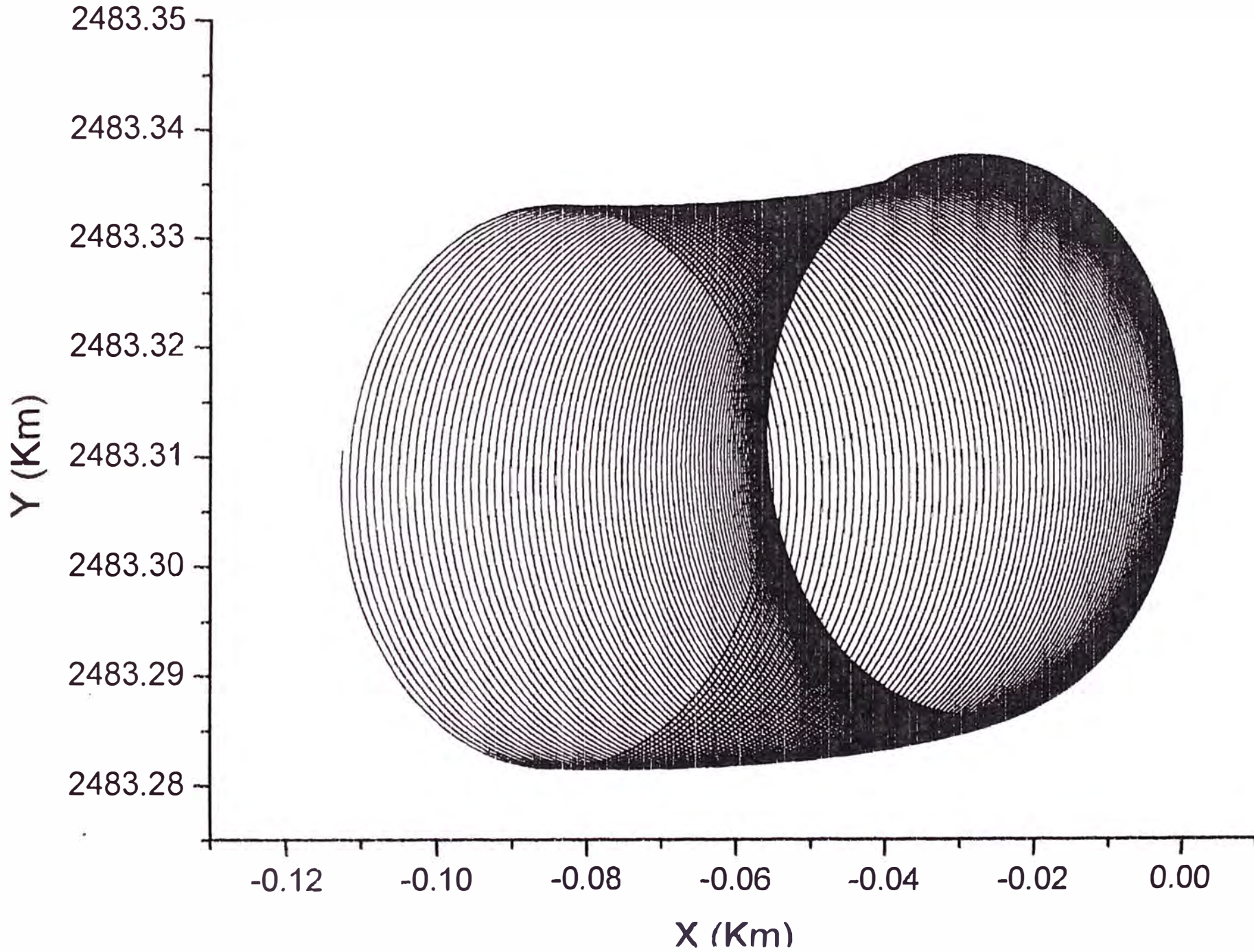




Proyección del Vector W sobre el plano XY para 50 días con $c=6355.55$ Km



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 50 días con $c=6355.55$ Km

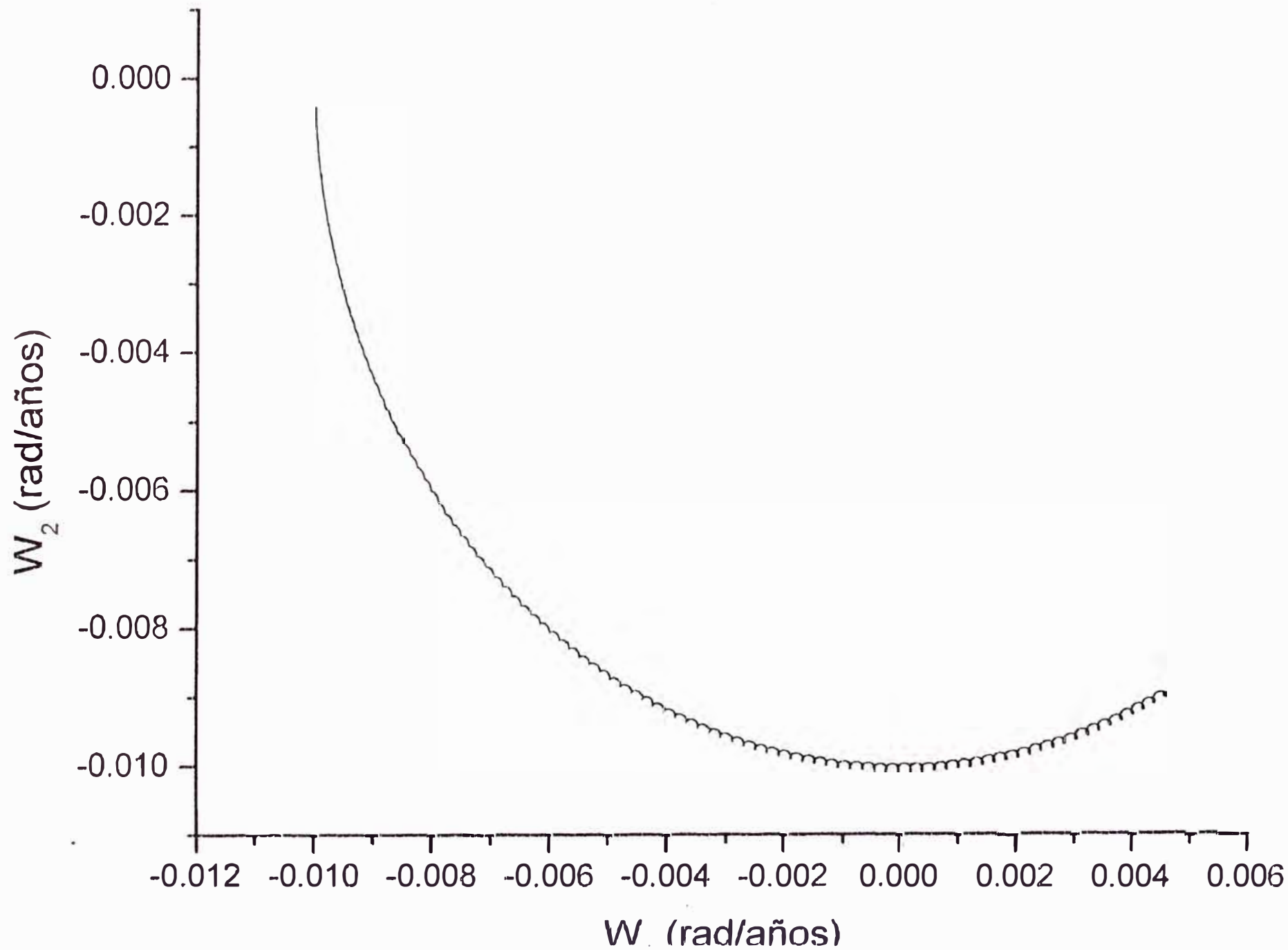


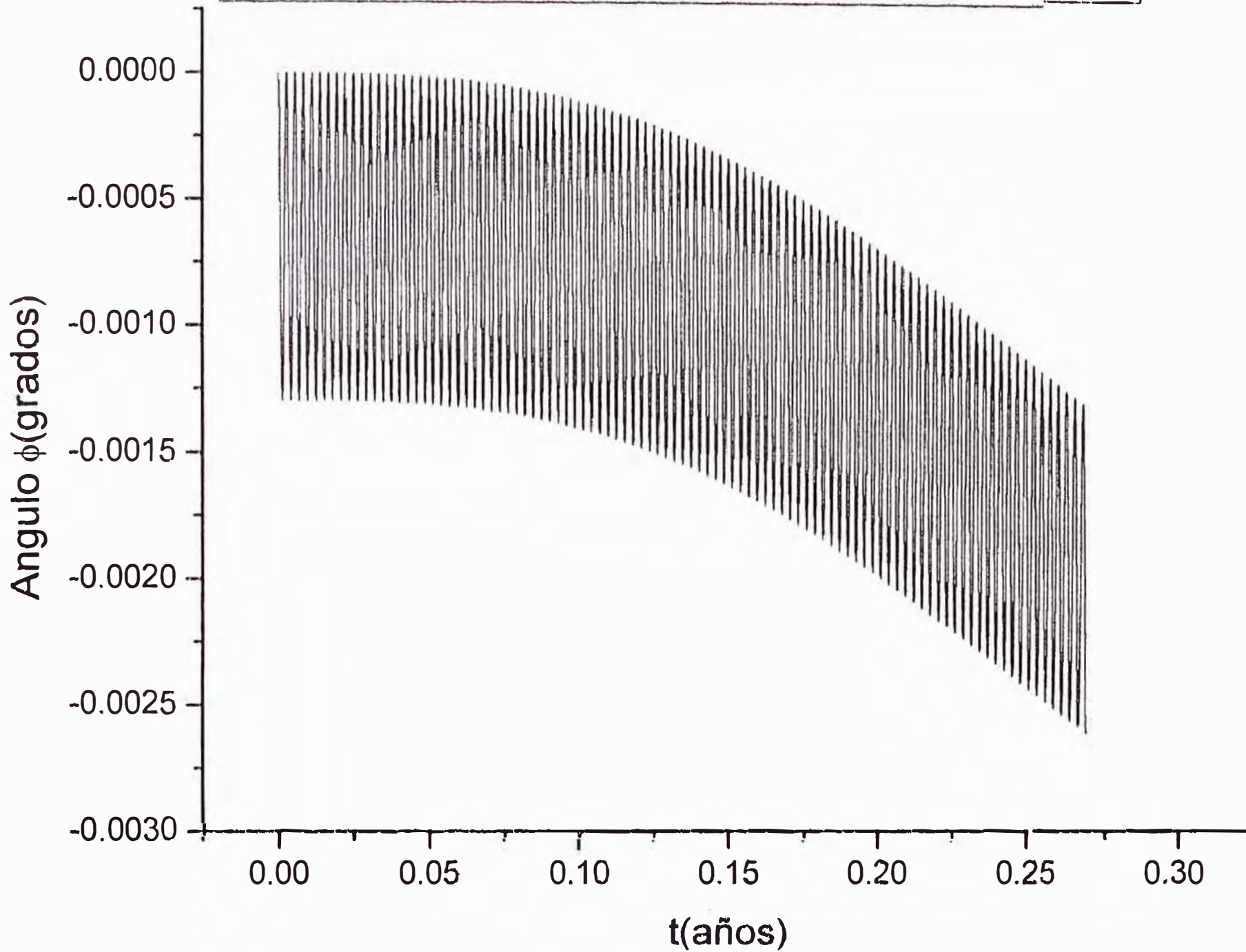
Table 4: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 100$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	112
W_y vs W_x	113
Y vs X	114
W_2 vs W_1	115

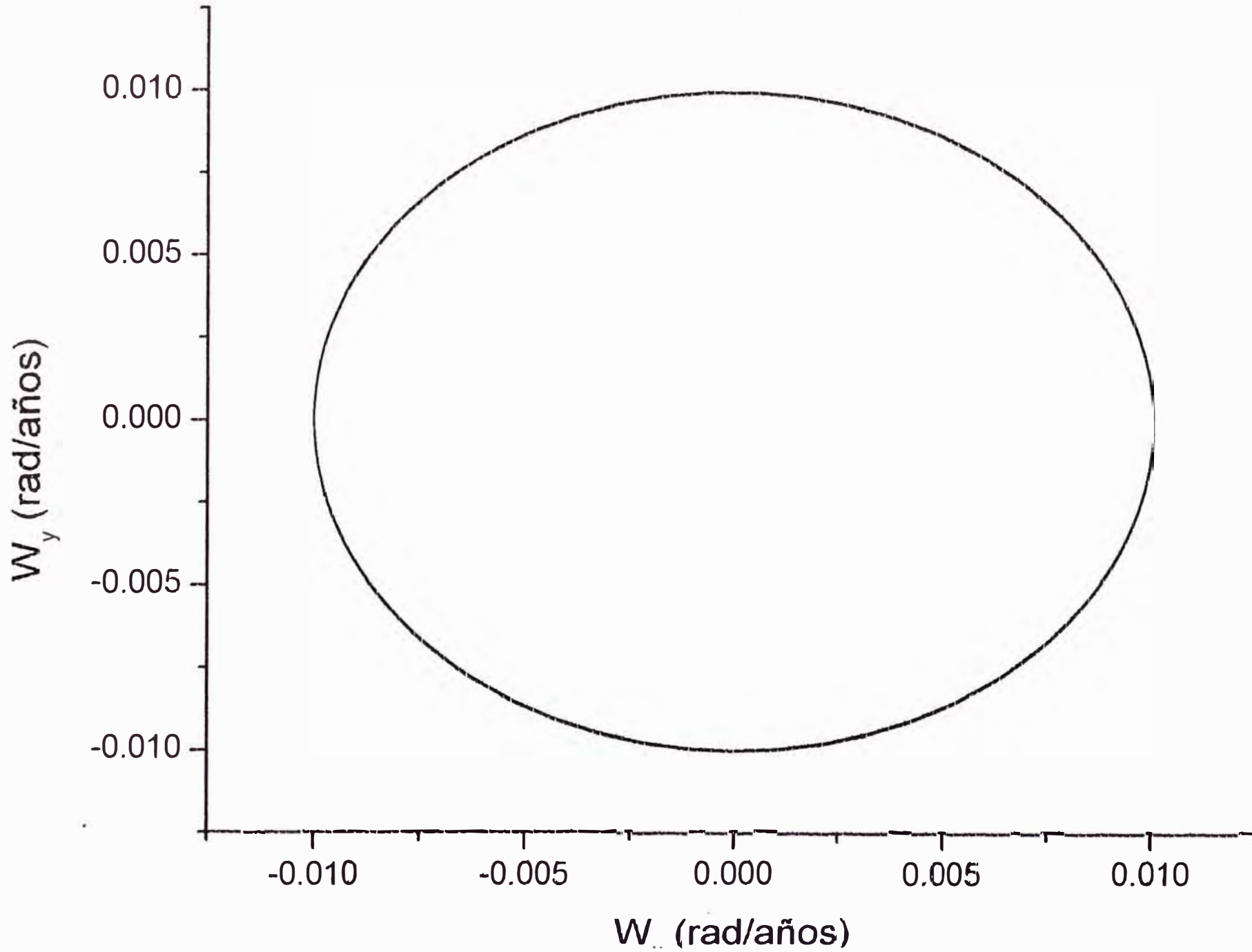
Observaciones:

- a) La grafica de la función $\phi(t)$, versus el tiempo es oscilante y decreciente donde los maximos y minimos relativos decrecen .
- b) Notamos que la proyección del extremo del vector \vec{W} sobre el plano XY es una curva limitada por dos elipses.
- c) Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY sigue siendo una elipse que desplaza su centro .
- d) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1, X_2 en el cual se observa una curva que es casi cerrada con perturbaciones apareciendo *pequeños* rizos que permitira determinar el período de precesión del vector \vec{W} alrededor del eje " X_3 " y notamos que es de alrededor de 100 días (comparado con 300 días para el caso libre).

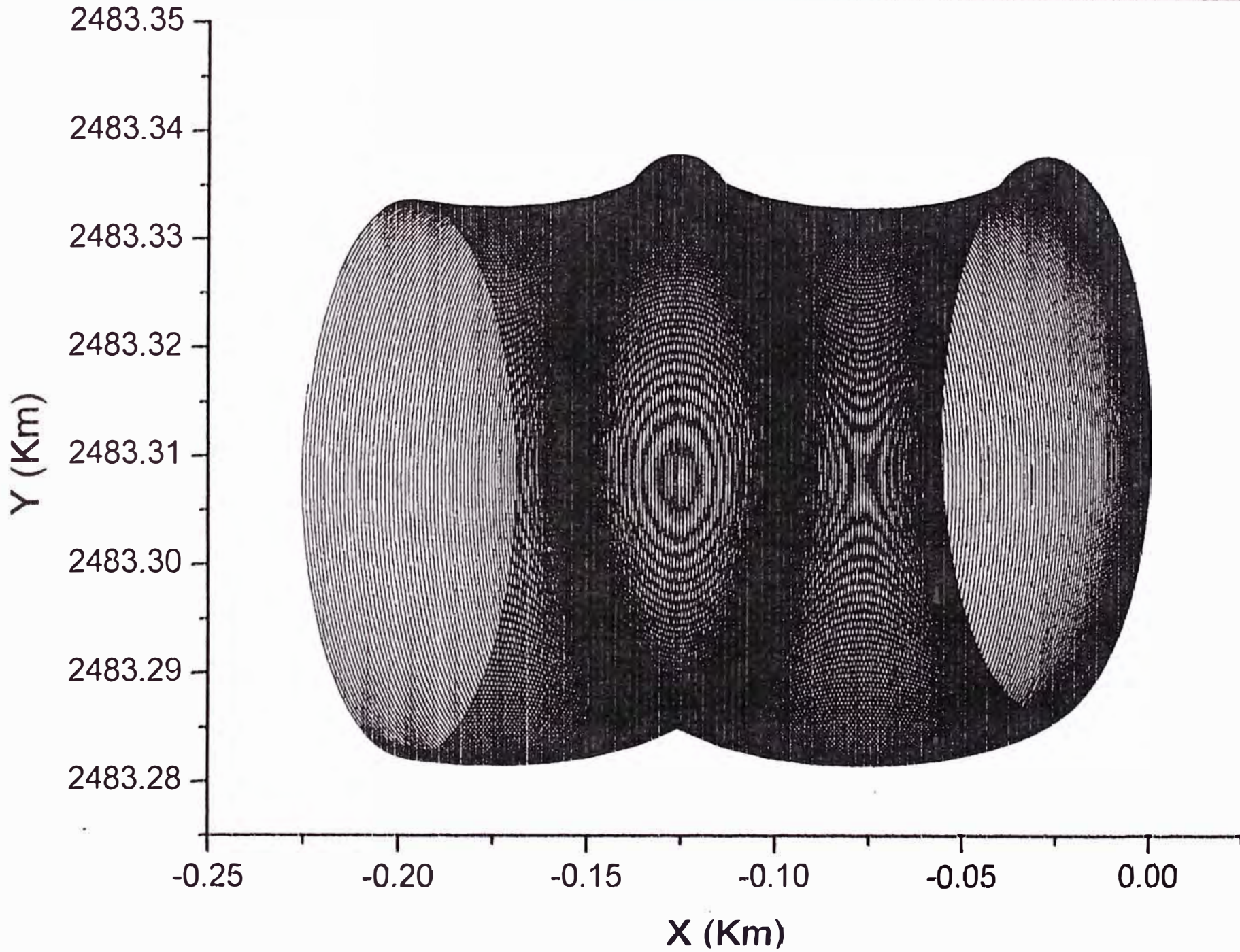
Para 100 días con semieje $c=6355.55$ Km



Proyección del Vector W sobre el plano XY para 100 días con $c=6355.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 100 días con $c=6355.55$ Km

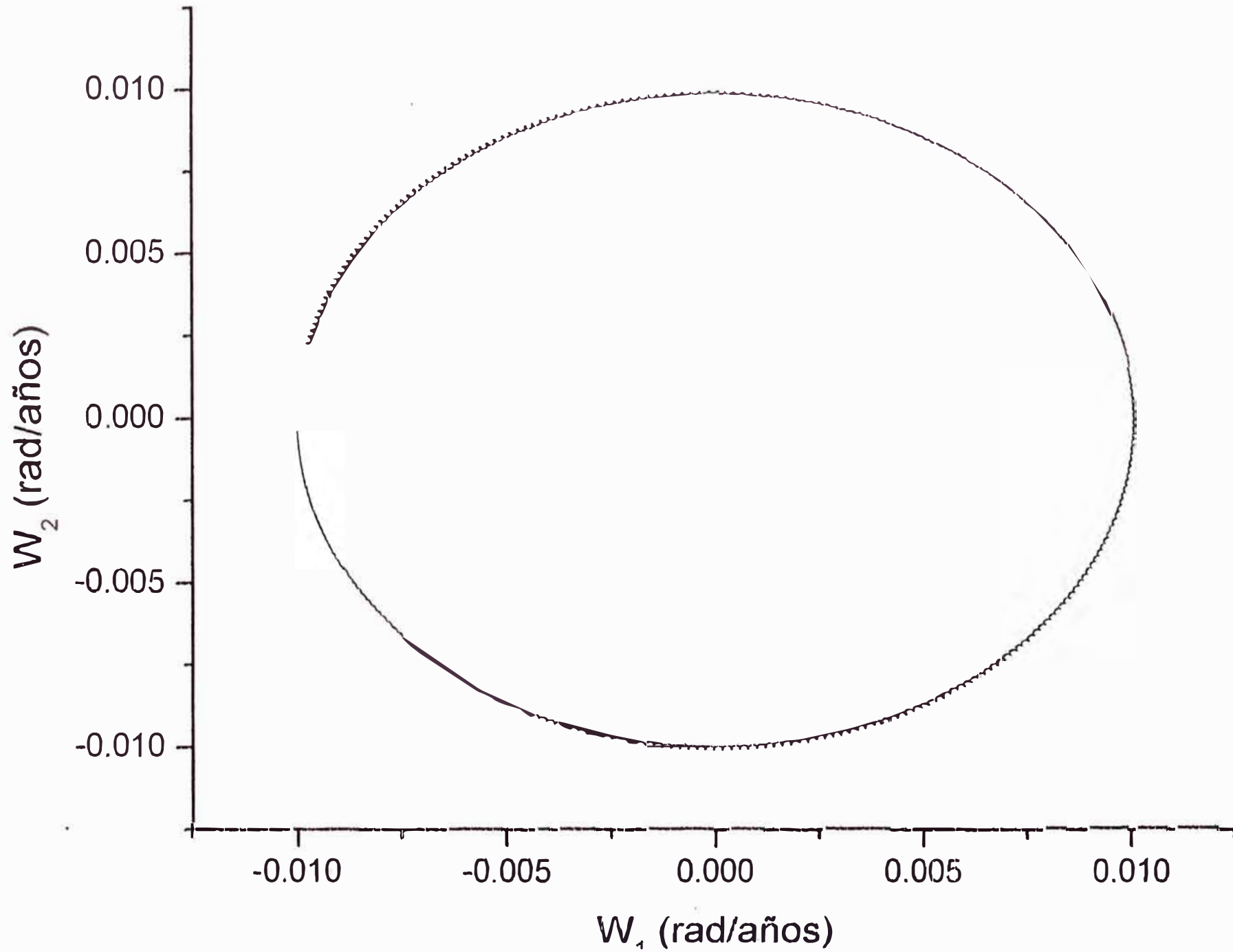


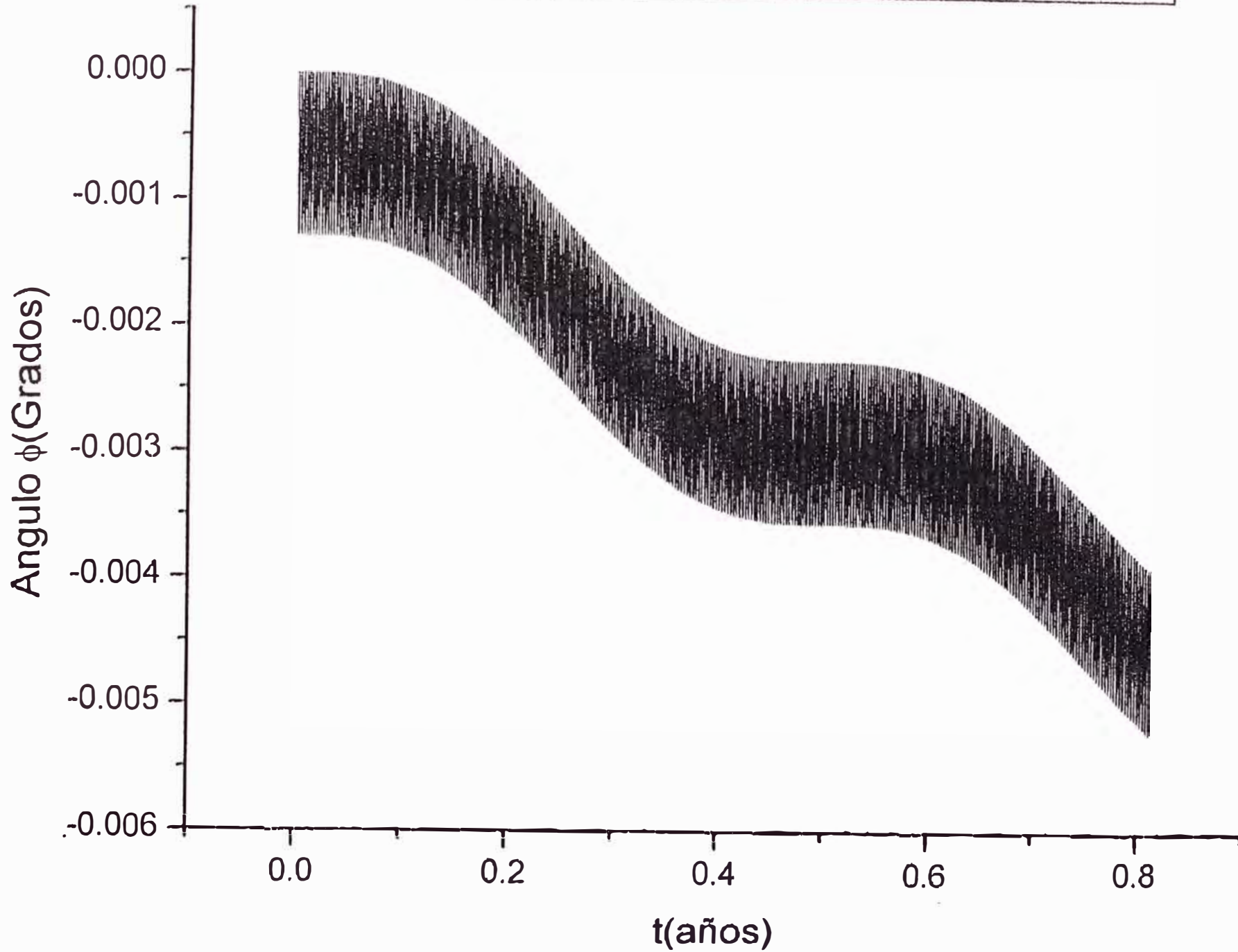
Table 5: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 300$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	117
W_y vs W_x	118
Y vs X	119 y 120
W_2 vs W_1	121

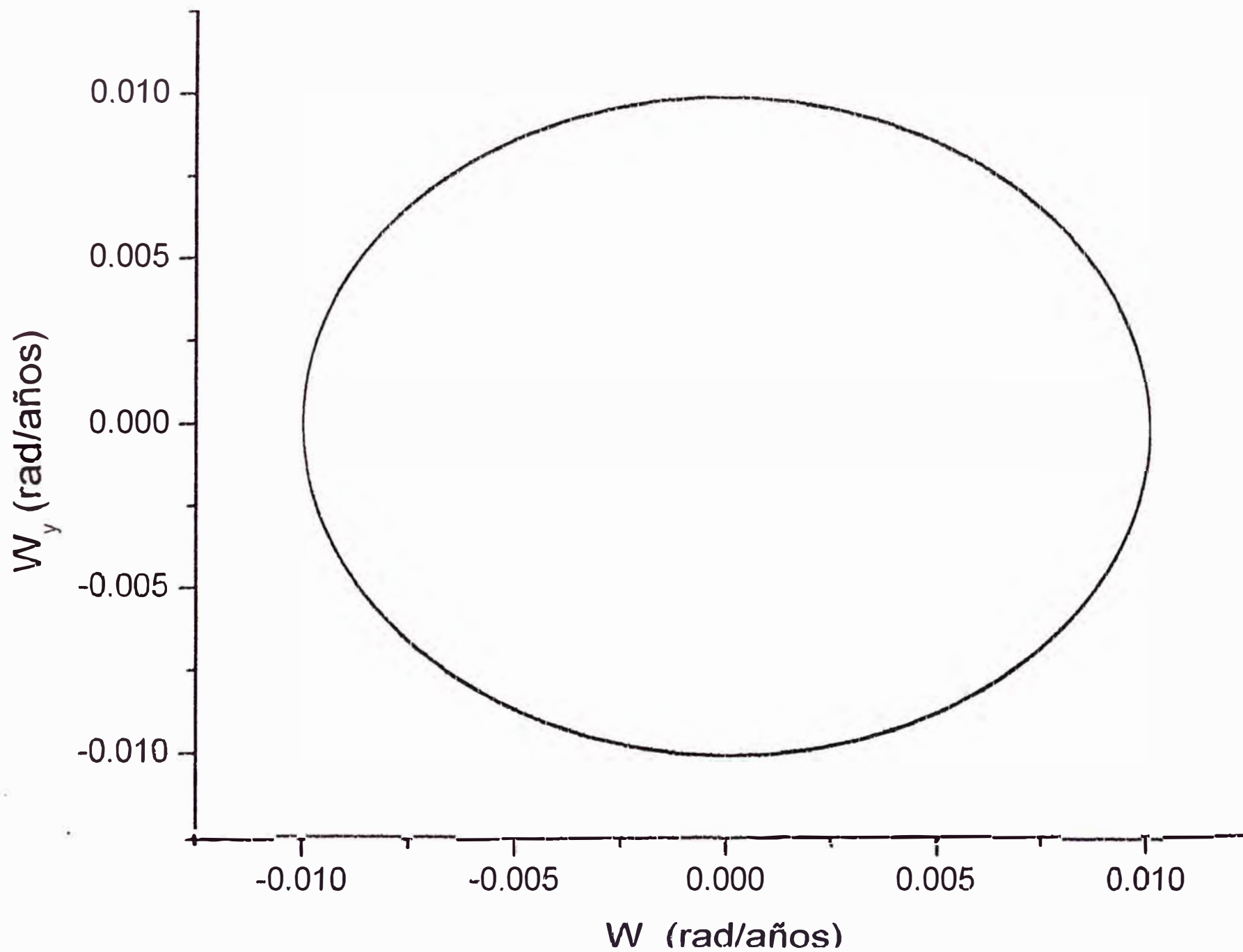
Observaciones:

- a) La gráfica de la función $\phi(t)$, versus el tiempo mantienen las características anteriores oscilante y decreciente
- b) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY no ha sufrido ningun cambio notable observando que el vector \vec{W} precesa alrededor del eje Z_0
- c) Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY sigue siendo una elipse que desplaza su centro como en el caso anterior , mostrandose mejor dicha grafica con una ampliación
- d) Podemos afirmar que la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una circunferencia perturbada con *pequeños* rizos.

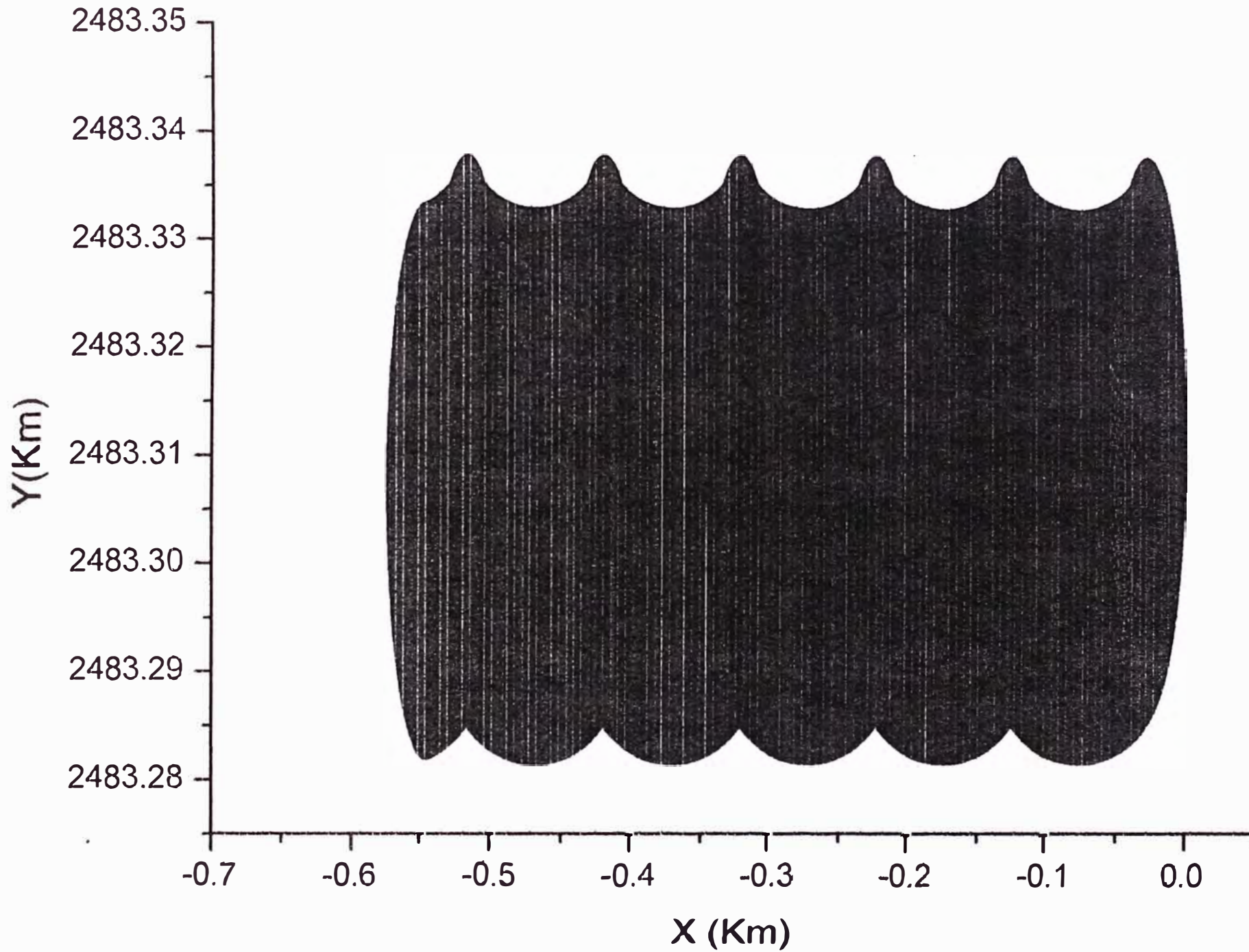
Para 300 días con semieje $c=6355.55$ Km



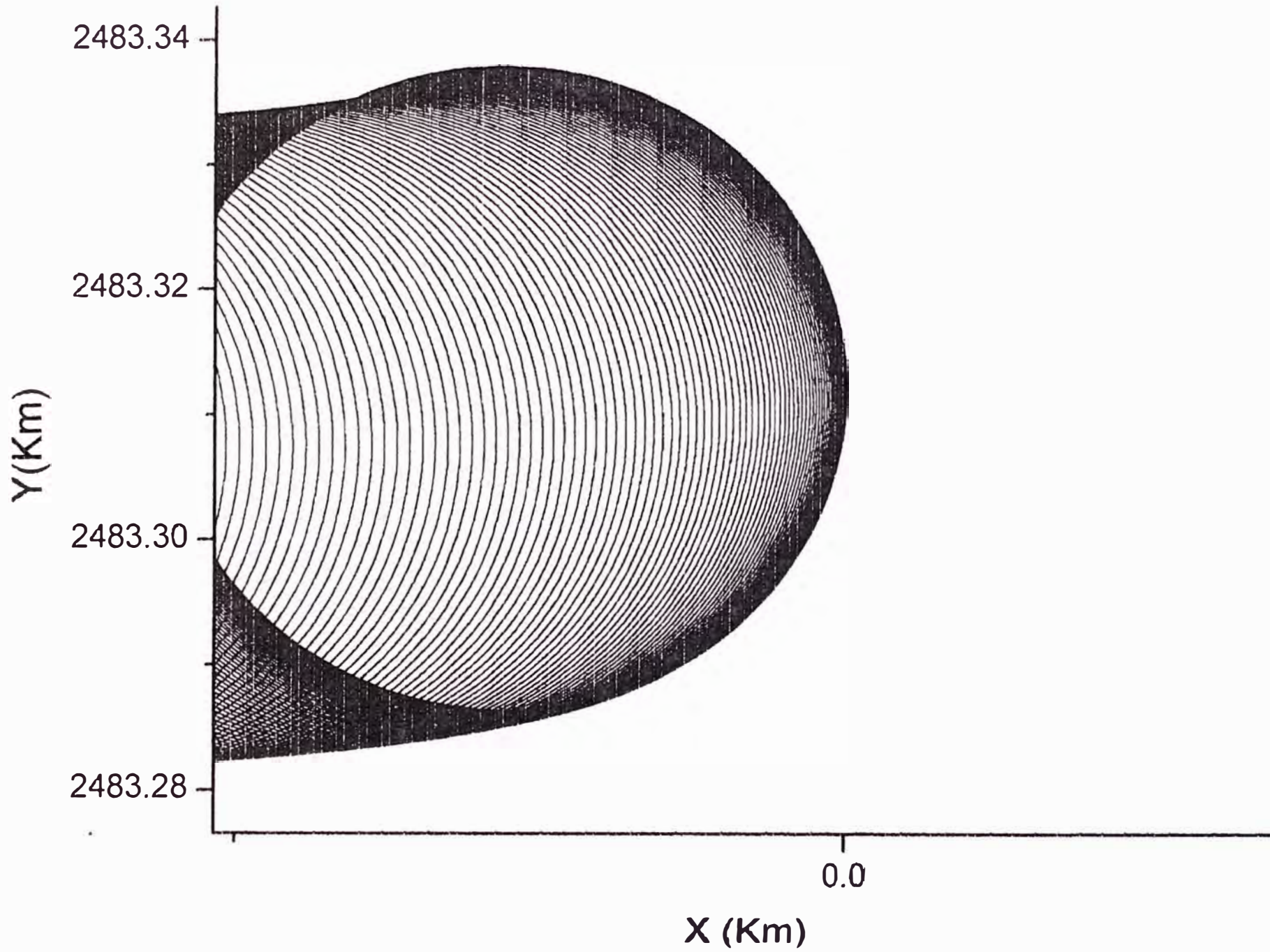
Proyección del Vector W sobre el plano XY para 300 días con $c=6355.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY



Ampliacion del grafico anterior



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 300 días con $c=6355.55$ Km

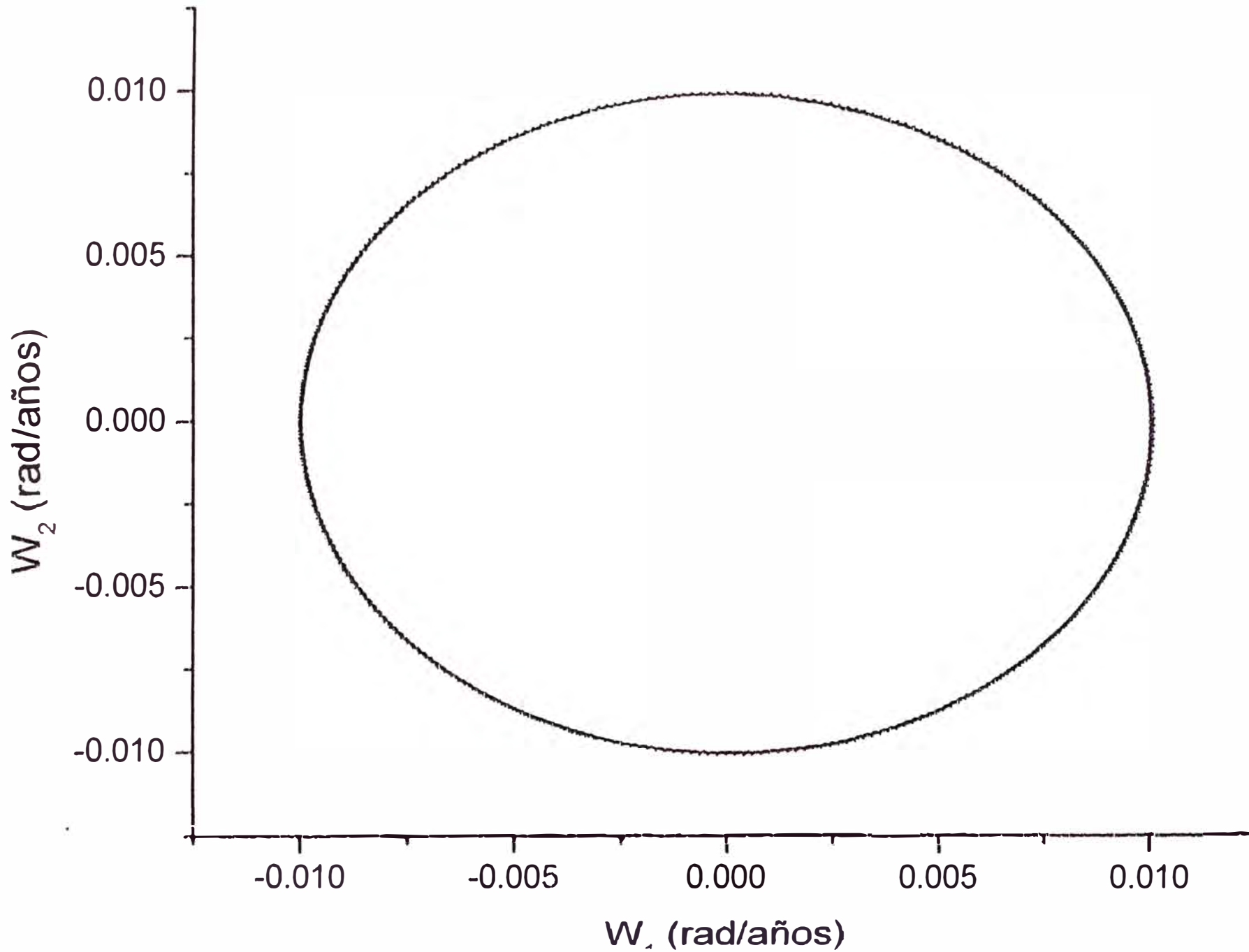


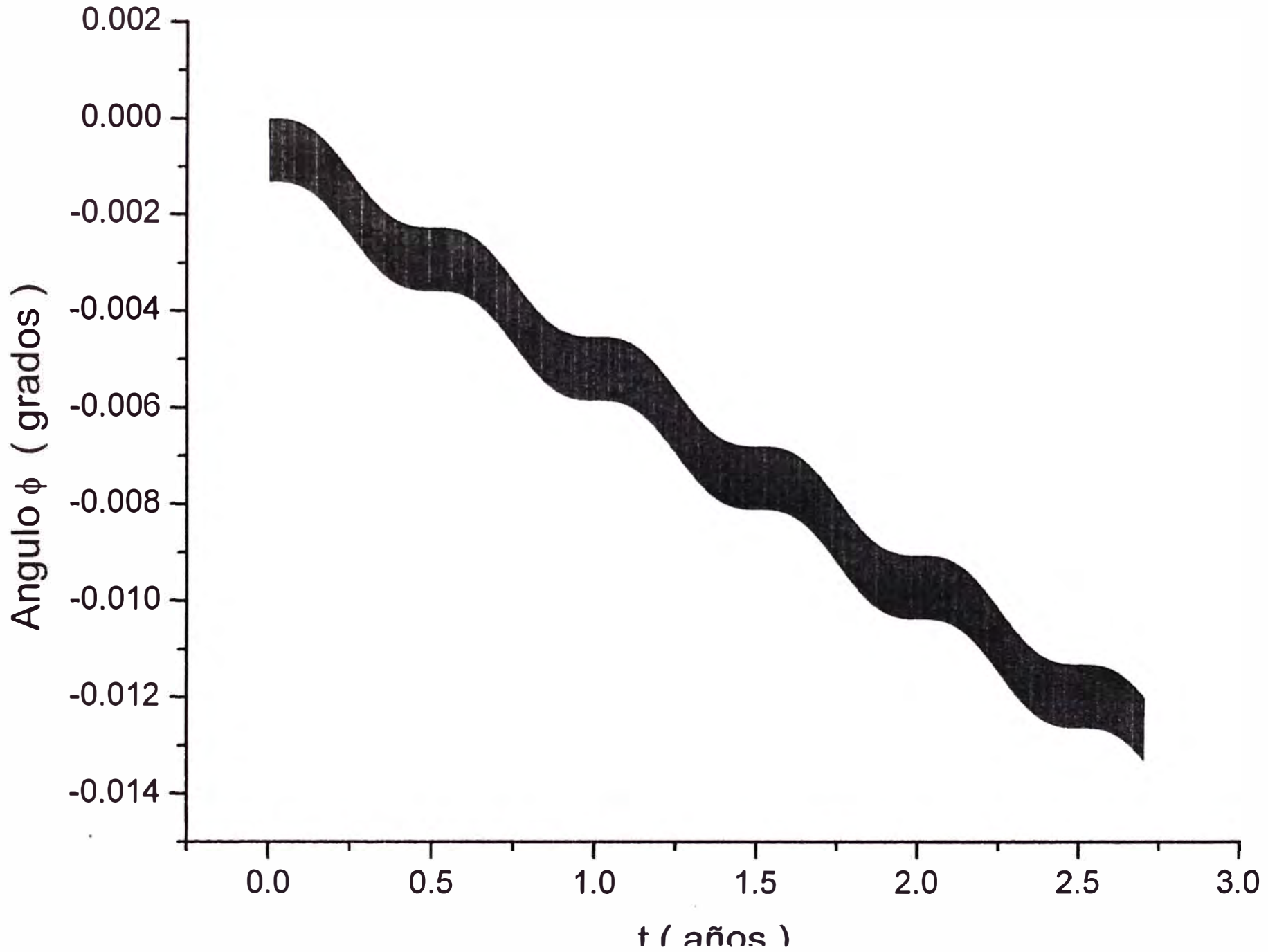
Table 6: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 1000$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	123
W_y vs W_x	124
W_2 vs W_1	125

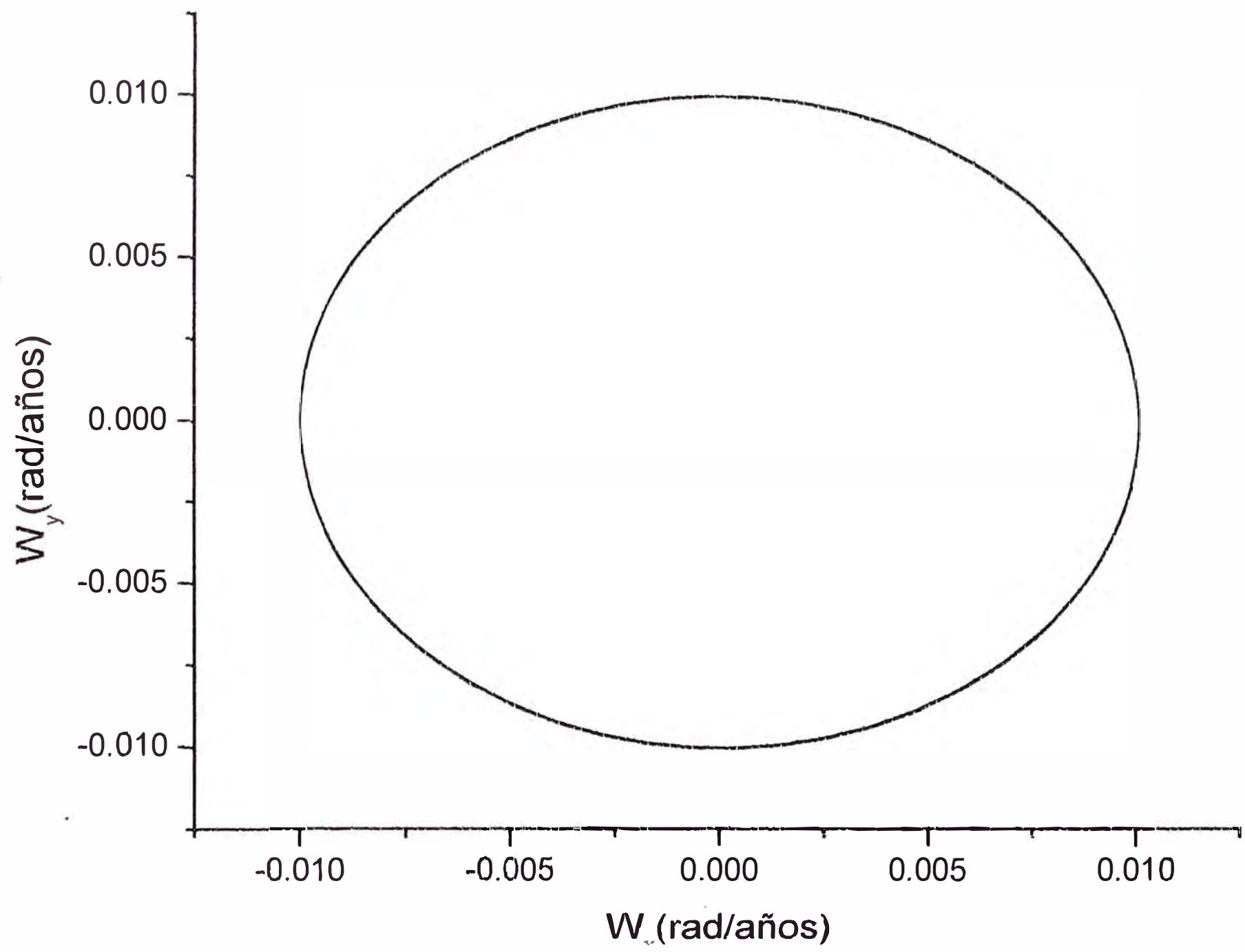
Observaciones:

- a) La gráfica de la función $\phi(t)$, versus el tiempo sigue siendo decreciente y oscilante , notando que ya se puede afirmar que el eje X_3 realiza el movimiento de precesión alrededor del eje Z_0 .
- b) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY sigue siendo una curva limitada por dos elipses.
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano $X_1 X_2$ se observa que ya es una curva limitada por 2 elipses

Para 1000 dias con $c = 6355.55$ Km



Proyección del Vector W sobre el plano XY para 1000 días con $c=6355.55$ Km



Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 1000 días con $c=6355.55$ Km

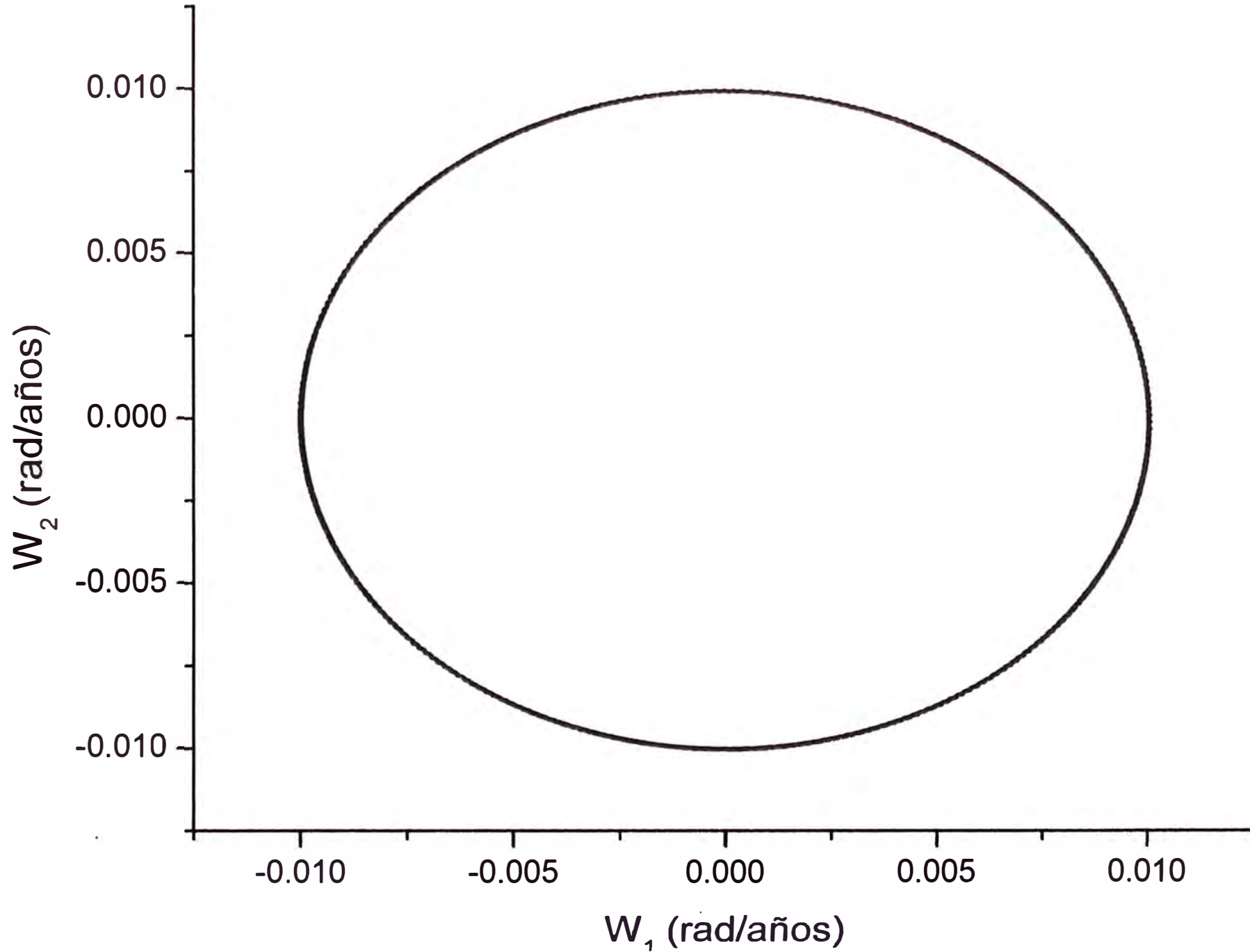


Table 7: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 3000$ días

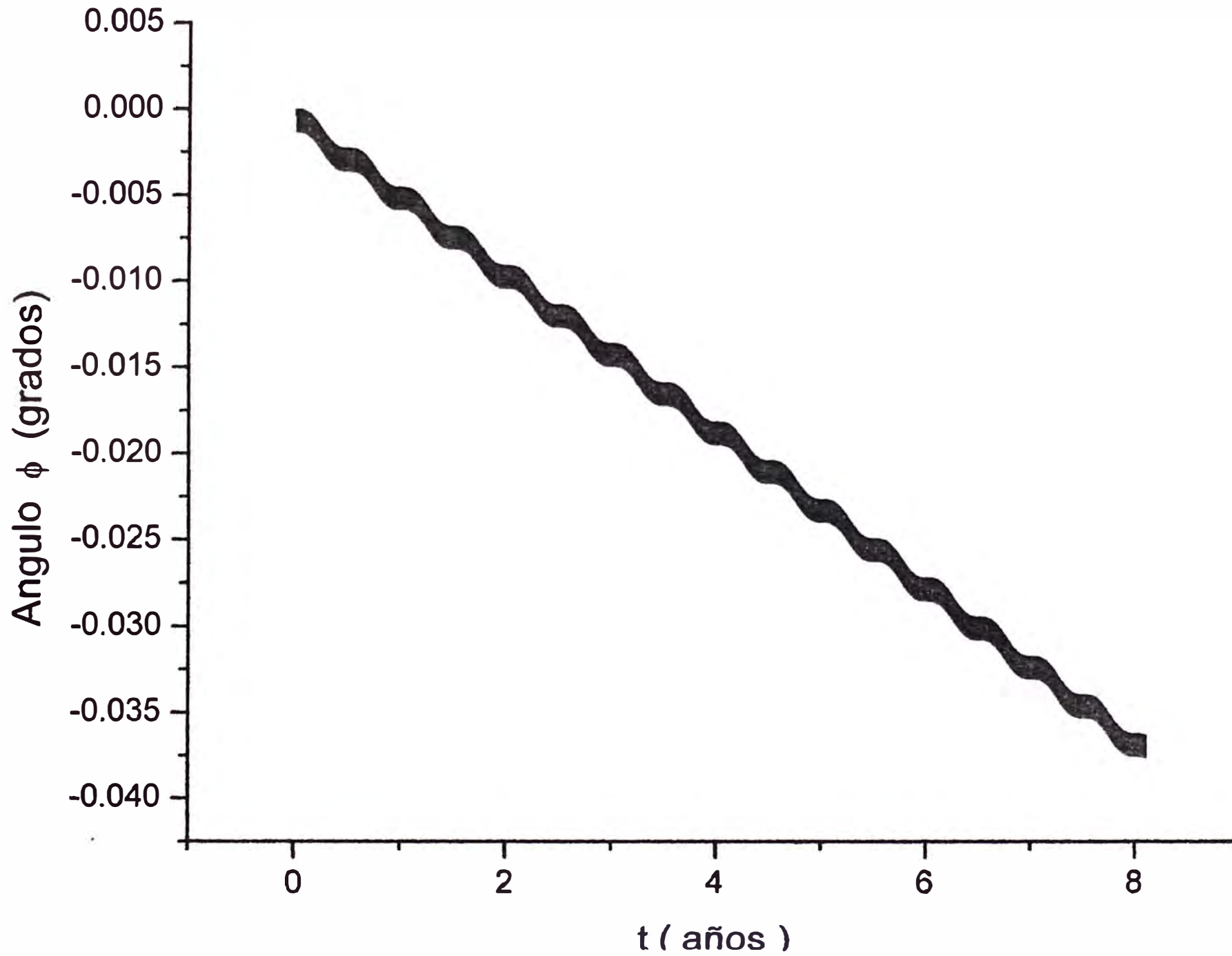
Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	127

Observaciones:

De este grafico observamos que el fenómeno de precesión es mas evidente notamos que el eje X_3 tiene un movimiento en promedio de rotación alrededor del eje Z y si extrapolamos este grafico deducimos que gira alrededor del eje Z

De esta grafica determinaremos también el período de precesión de los equinoccios (T_P) que resulta ser aproximadamente de 80000 años

Para 3000 dias con $c = 6355.55$ Km



II. SEGUNDO CASO . Ahora consideremos el radio polar $C = 6000.55 \text{ Km}$, se muestran las tablas con sus respectivos graficos para diversos intervalos de tiempo donde se mencionan las paginas donde se encuentran los gráficos mas importantes

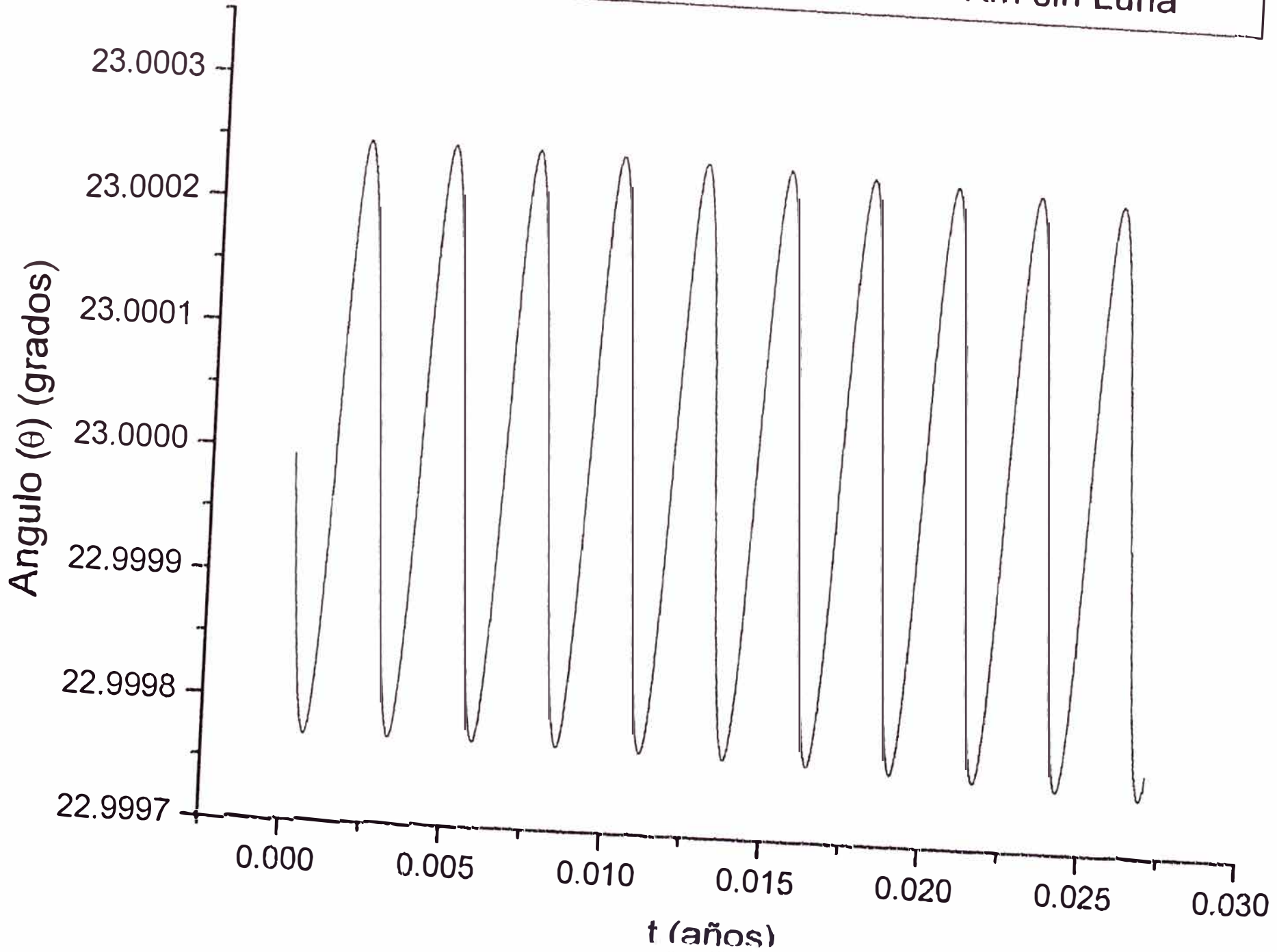
Table 8: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 10$ días

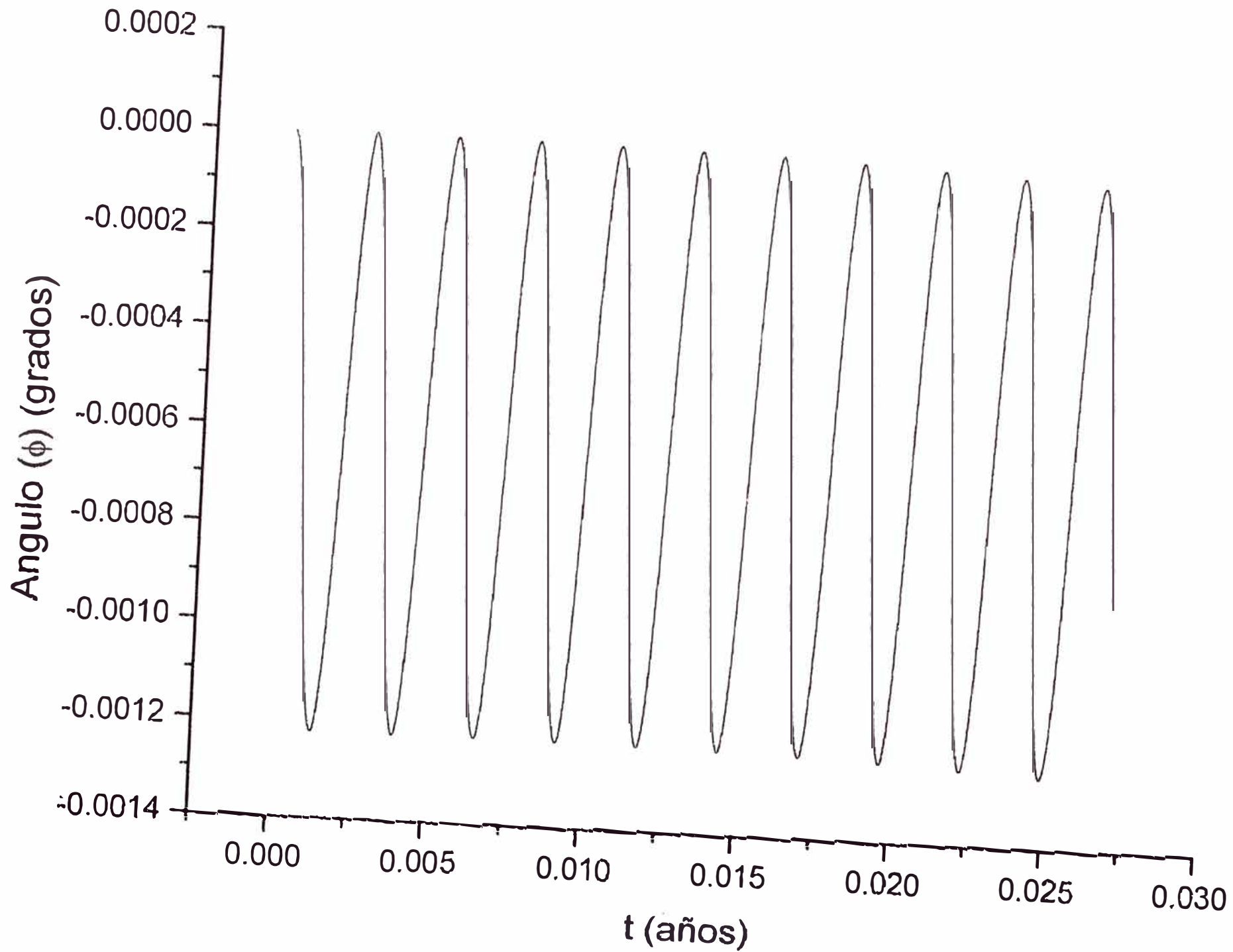
Función ó Grafico	Pagina
$\theta(t)$	129
$\phi(t)$	130
$\psi(t)$	131
$\dot{\theta}(t)$	132
$\dot{\phi}(t)$	133
$\dot{\psi}(t)$	134
W_y vs W_x	135
Y vs X	136
W_2 vs W_1	137

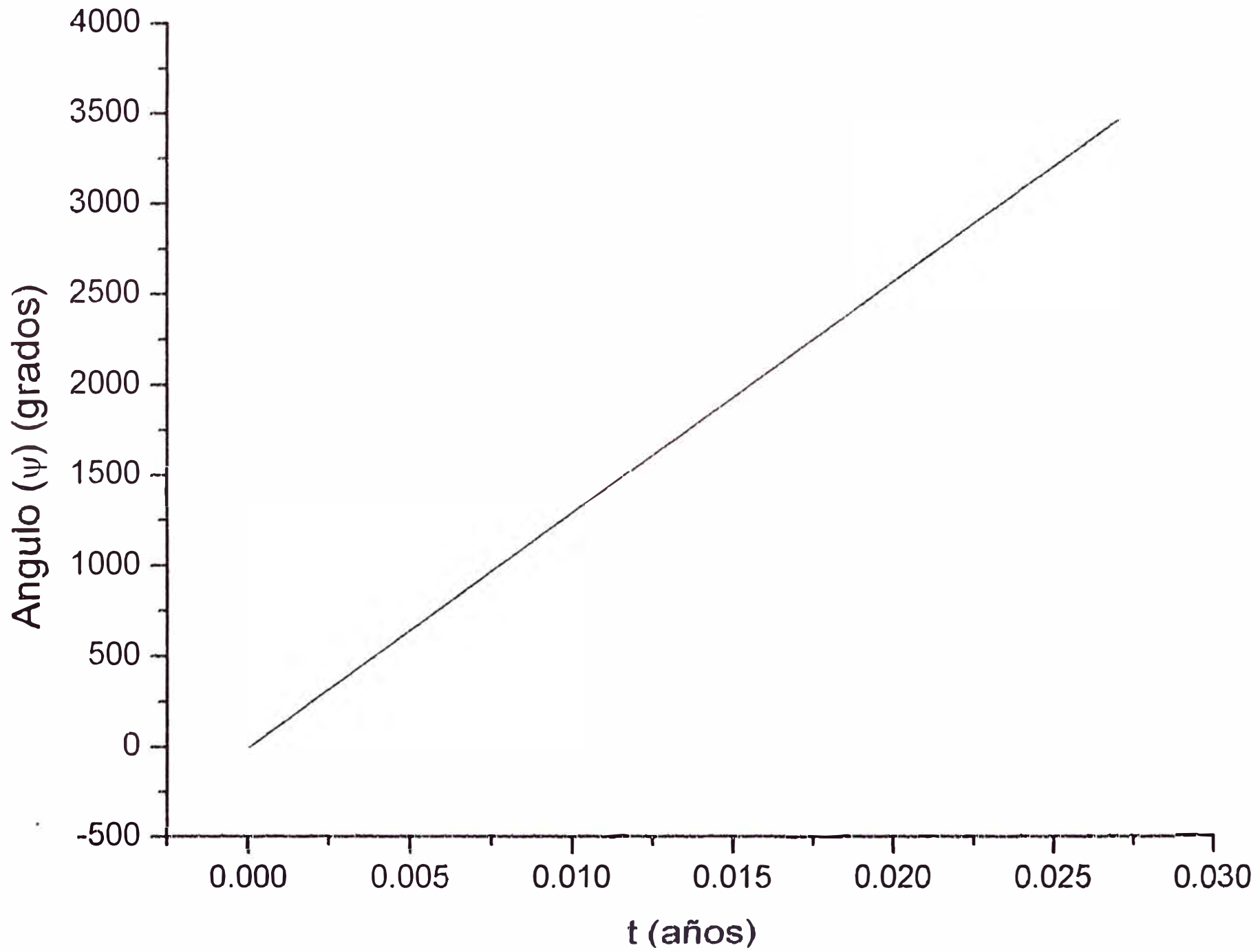
Observaciones:

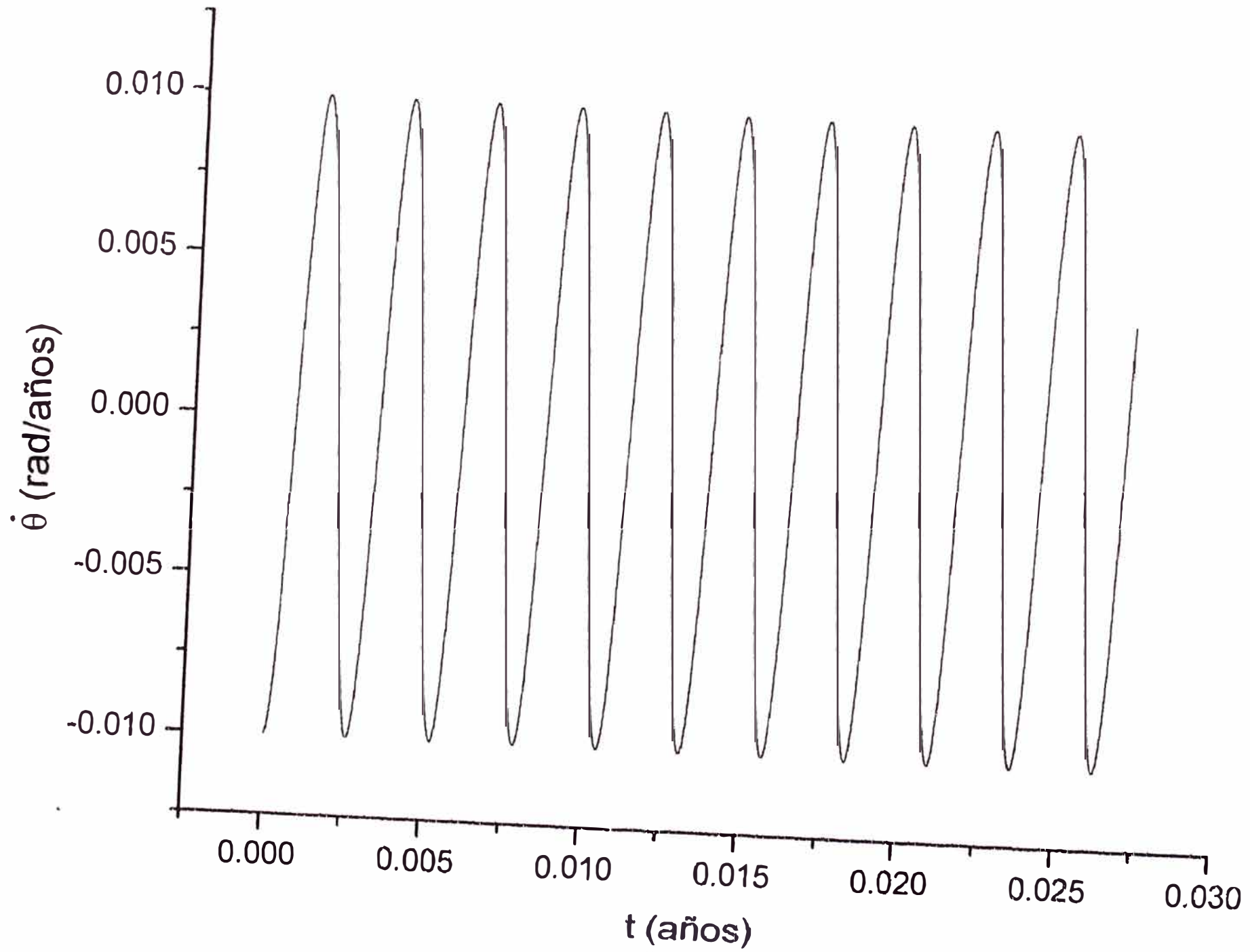
- Las graficas de las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ parecen ser periódicas , notando que el período disminuye aproximadamente en la decima parte del caso anterior.
- La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es una circunferencia .
- Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY es una elipse que rota .
- El gráfico más interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 en el cual sólo se observa una curva que mas adelante se mostrara que será cerrada y permitira determinar el período de precesión observandose que sera un poco mayor de 10 días pudiendose comparar para el caso aislado cuyo período es de 300 días

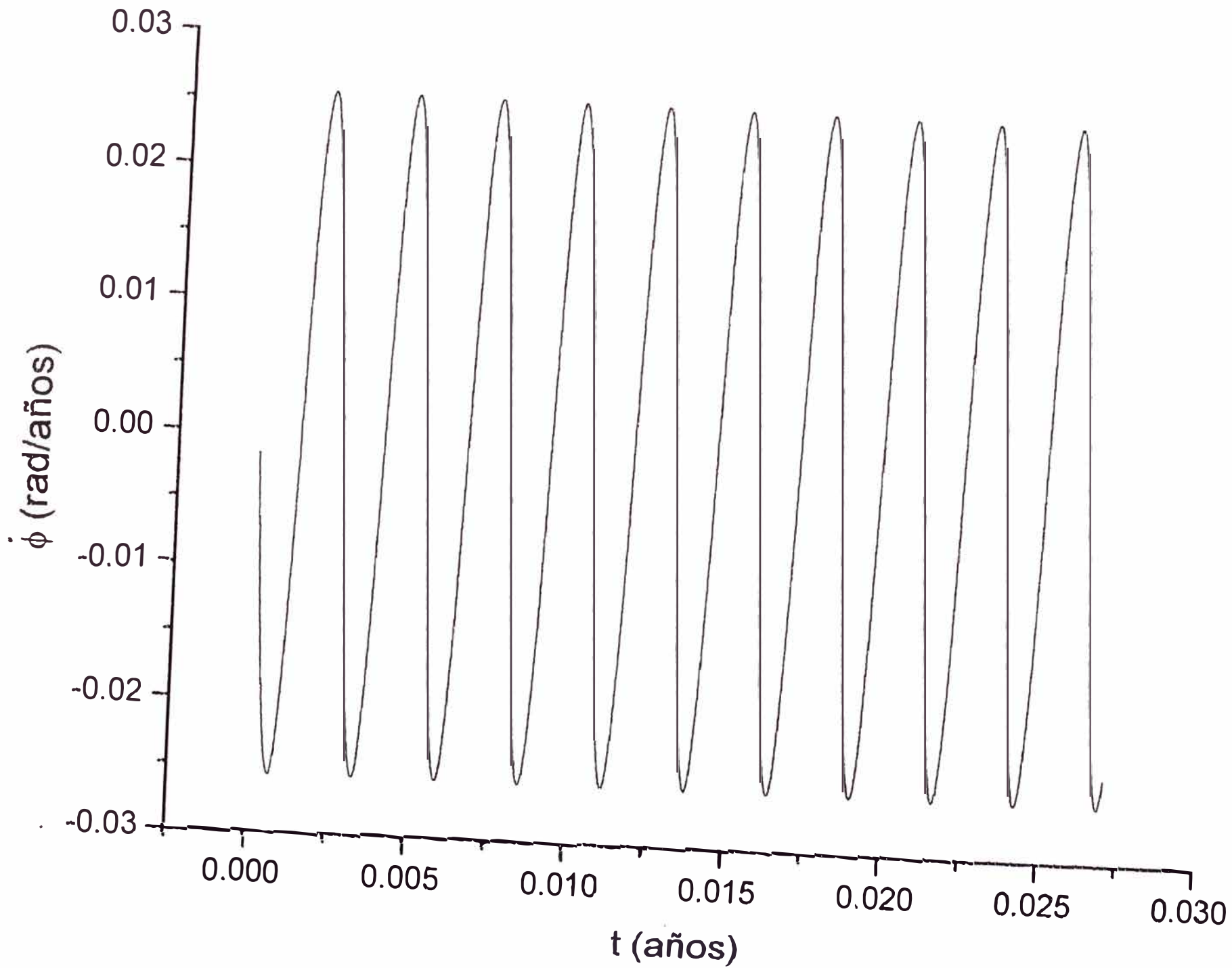
Para 10 días con $c=6000.55$ Km sin Luna

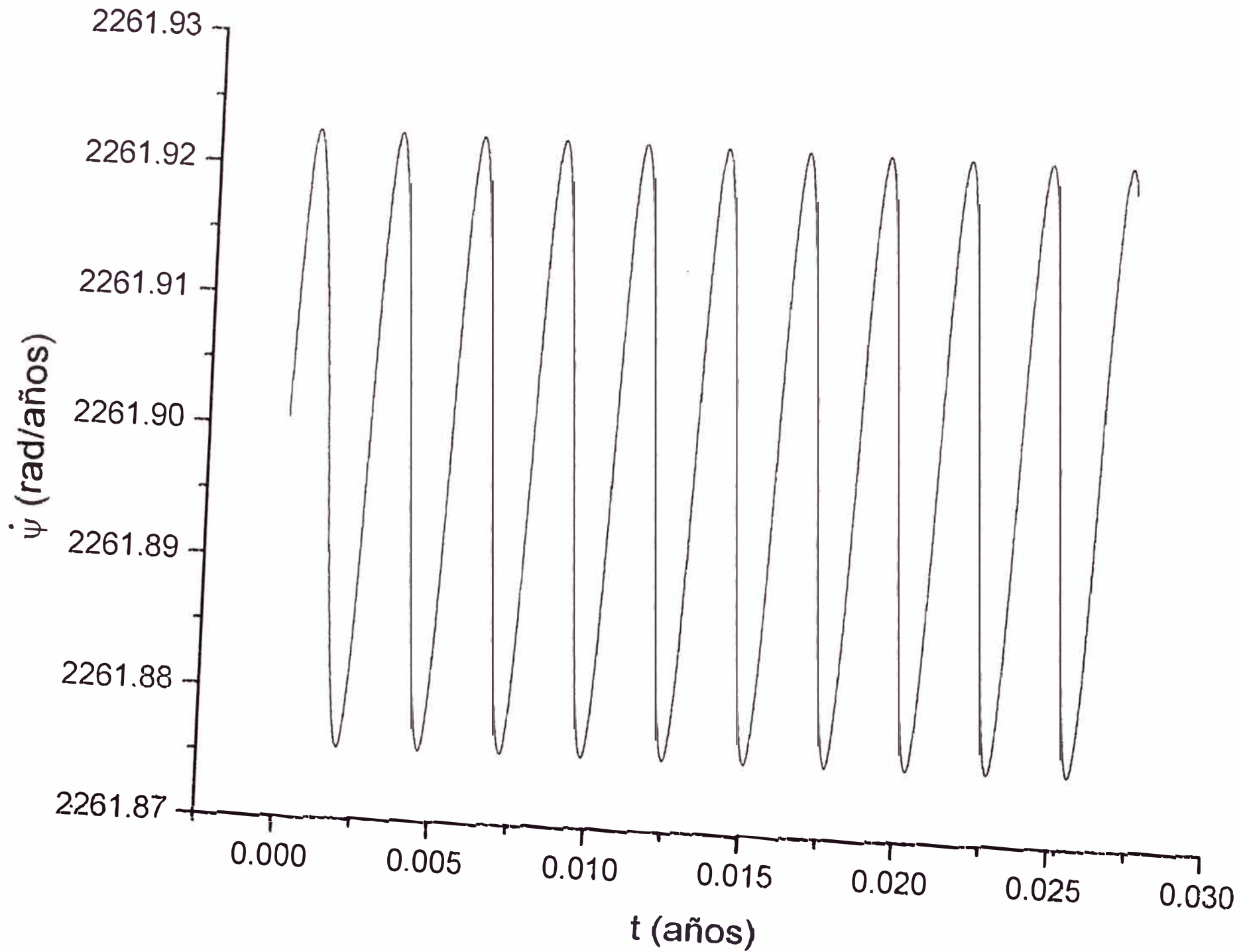




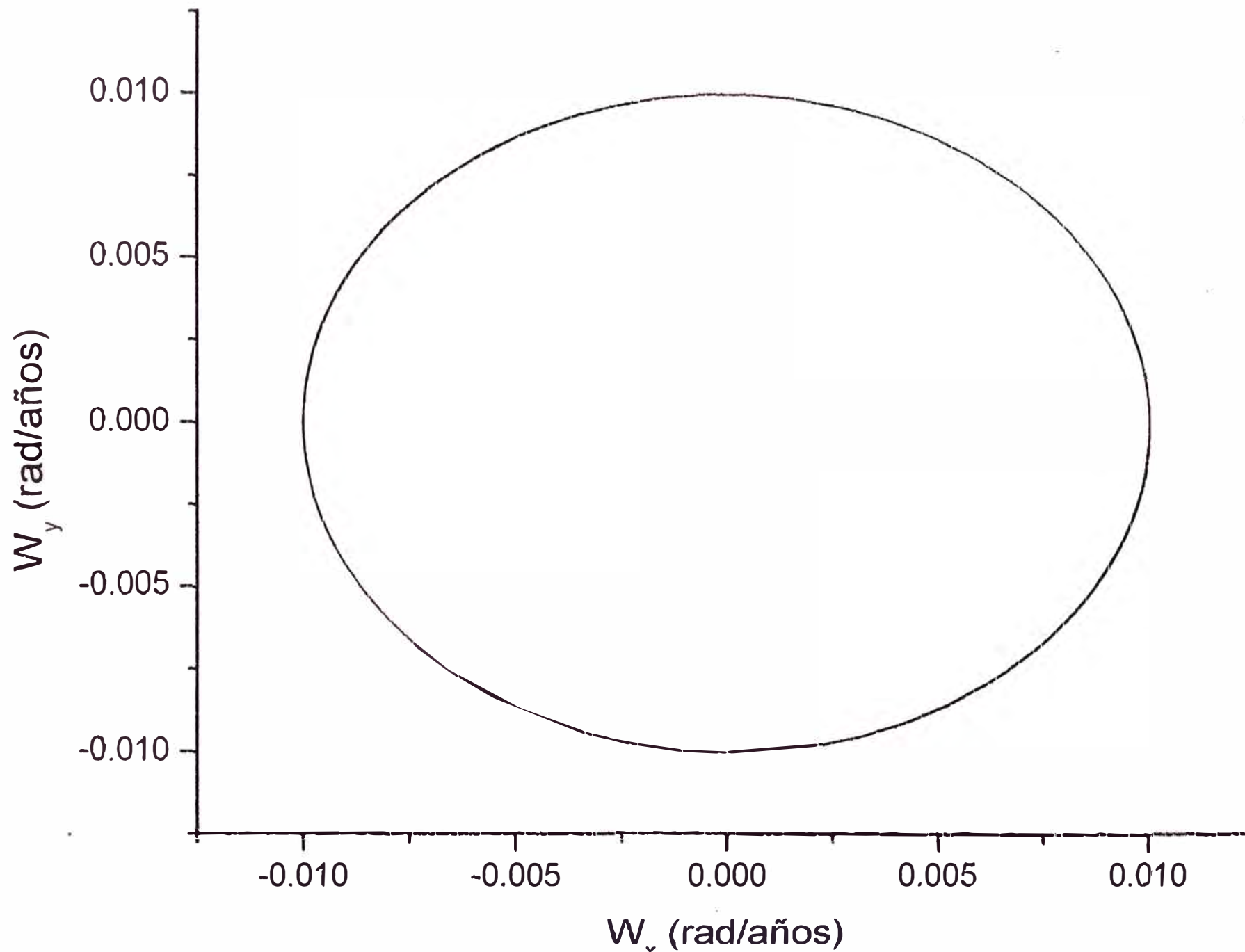




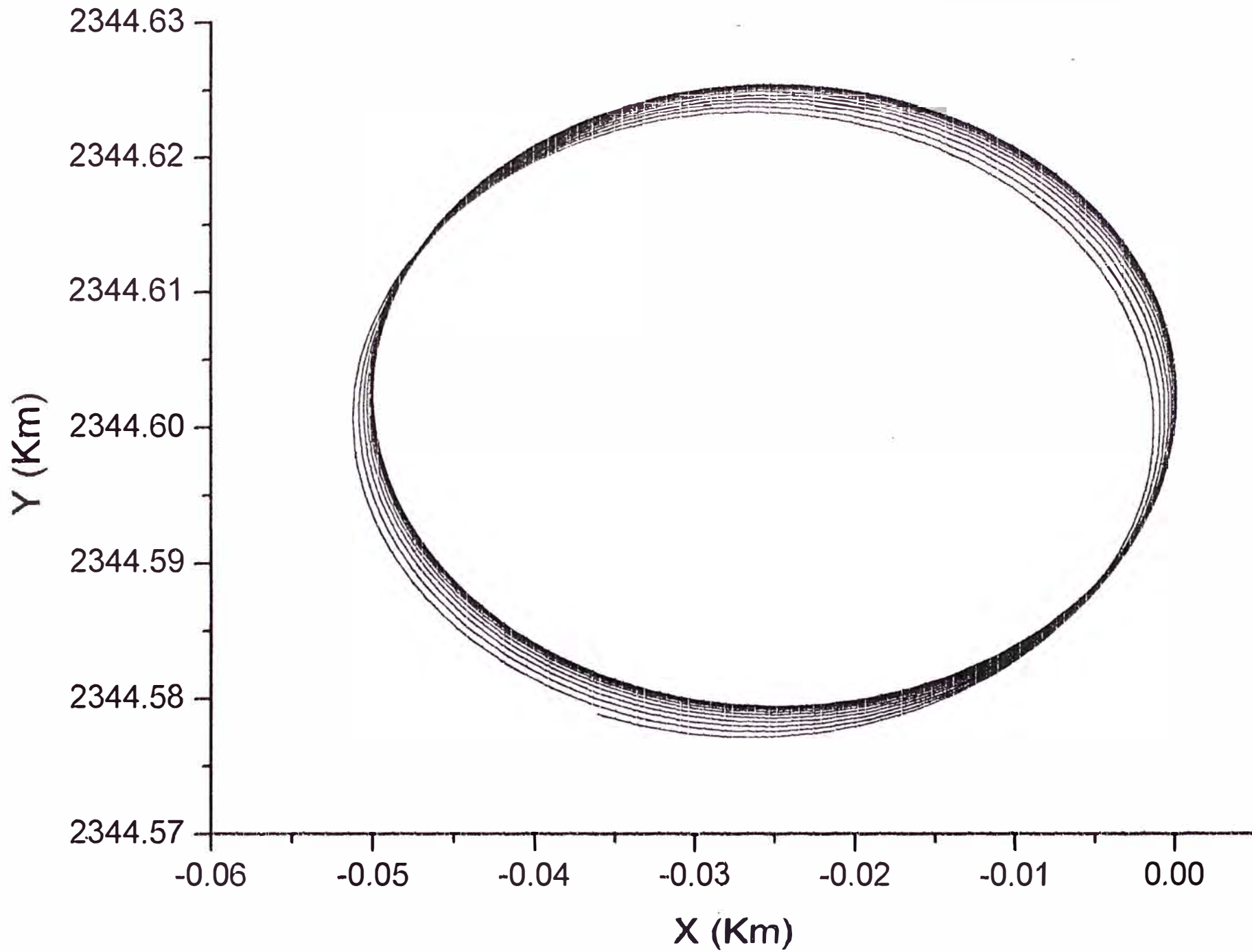




Proyección del Vector W sobre el plano XY para 10 días con $c=6000.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 10 días con $c=6000.55$ Km

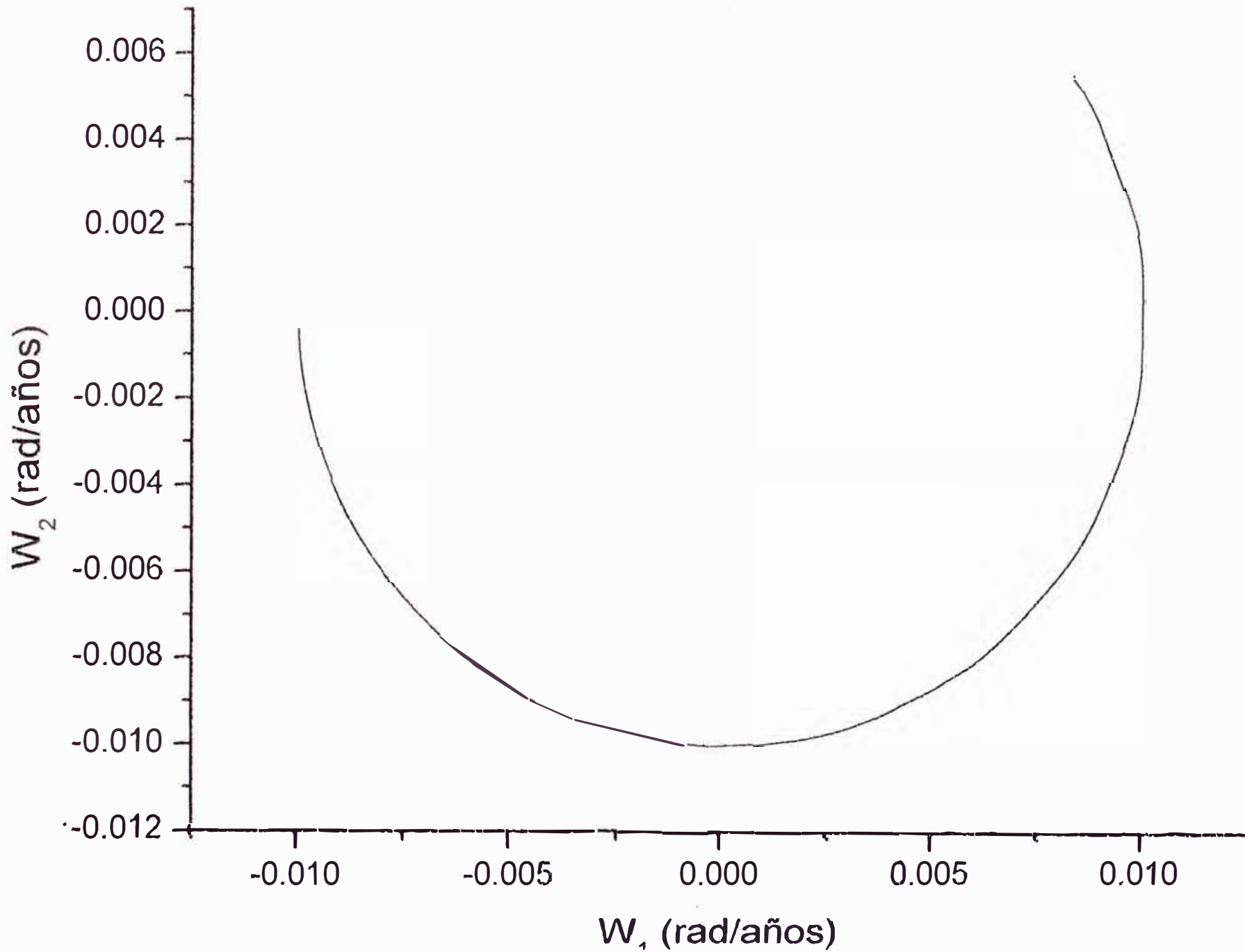


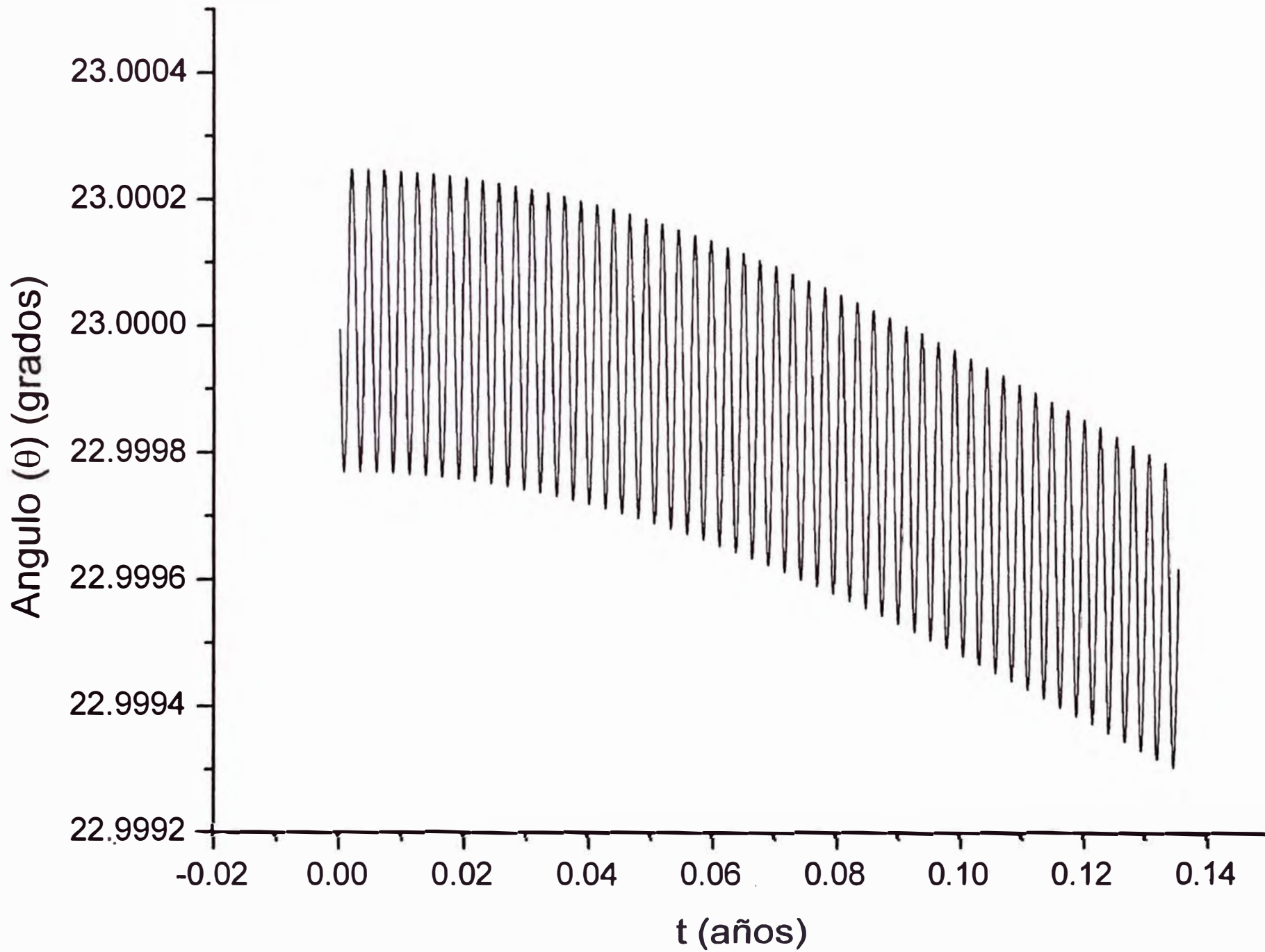
Table 9: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 50$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	139
$\phi(t)$	140
$\psi(t)$	141
$\dot{\theta}(t)$	142
$\dot{\phi}(t)$	143
$\dot{\psi}(t)$	144
W_y vs W_x	145
Y vs X	146
W_2 vs W_1	147

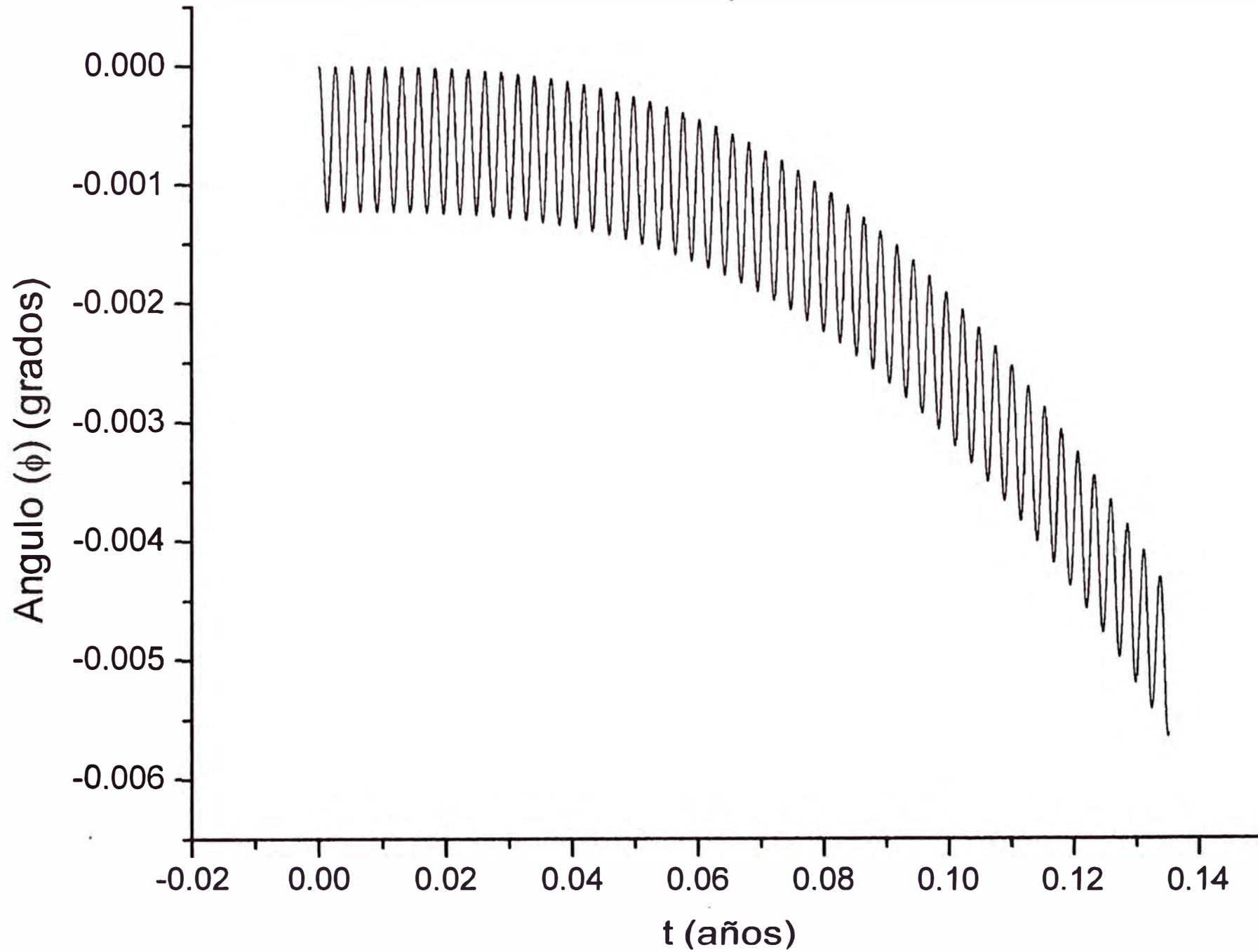
Observaciones:

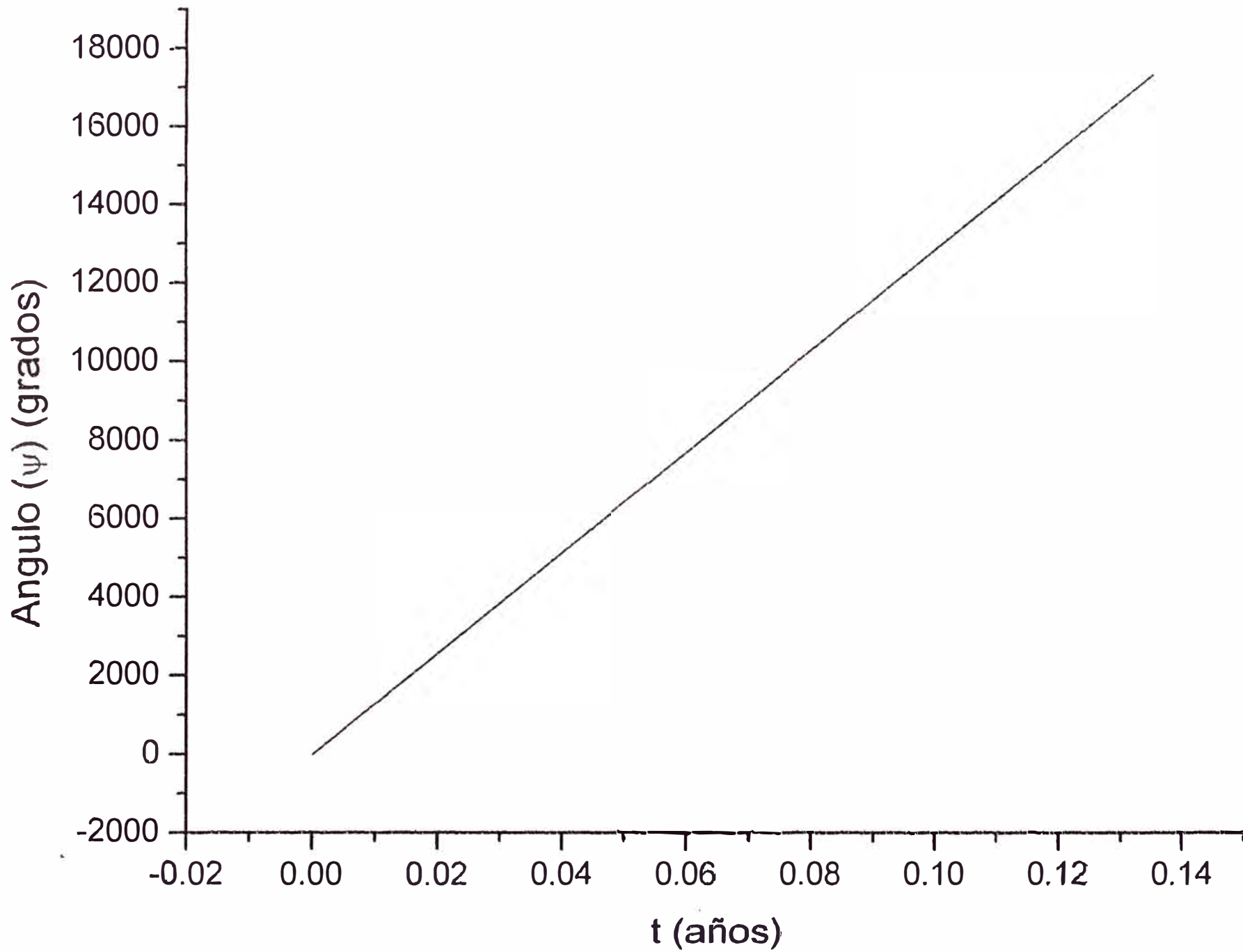
- a) Las graficas de las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ continuan siendo oscilantes pero decrecientes , notando que su caida es mas pronunciada para este valor de "c" en comparación con el valor anterior
- b) La proyección del extremo del vector \vec{W} sobre el plano XY es una curva limitada por dos elipses.
- c) El extremo del eje X_3 sobre el plano XY ya es una elipse que desplaza su centro, pero notamos que este desplazamiento es mayor comparado con el caso anterior con $c = 6355.55 \text{ km}$.
- d) El grafico mas interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 en el cual se observan curva limitadas por dos elipses.

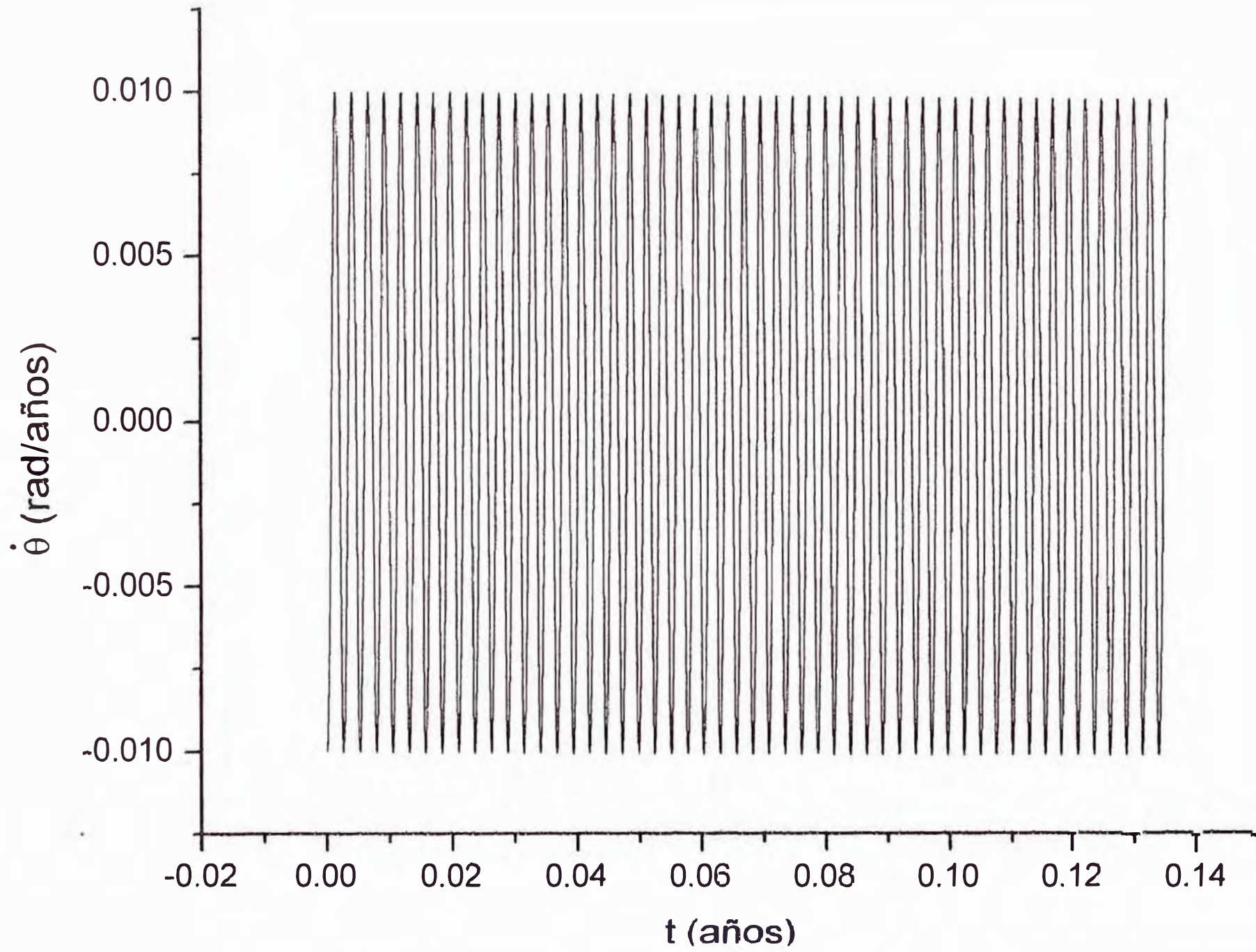
Para 50 días con $c = 6000.55$ Km sin Luna



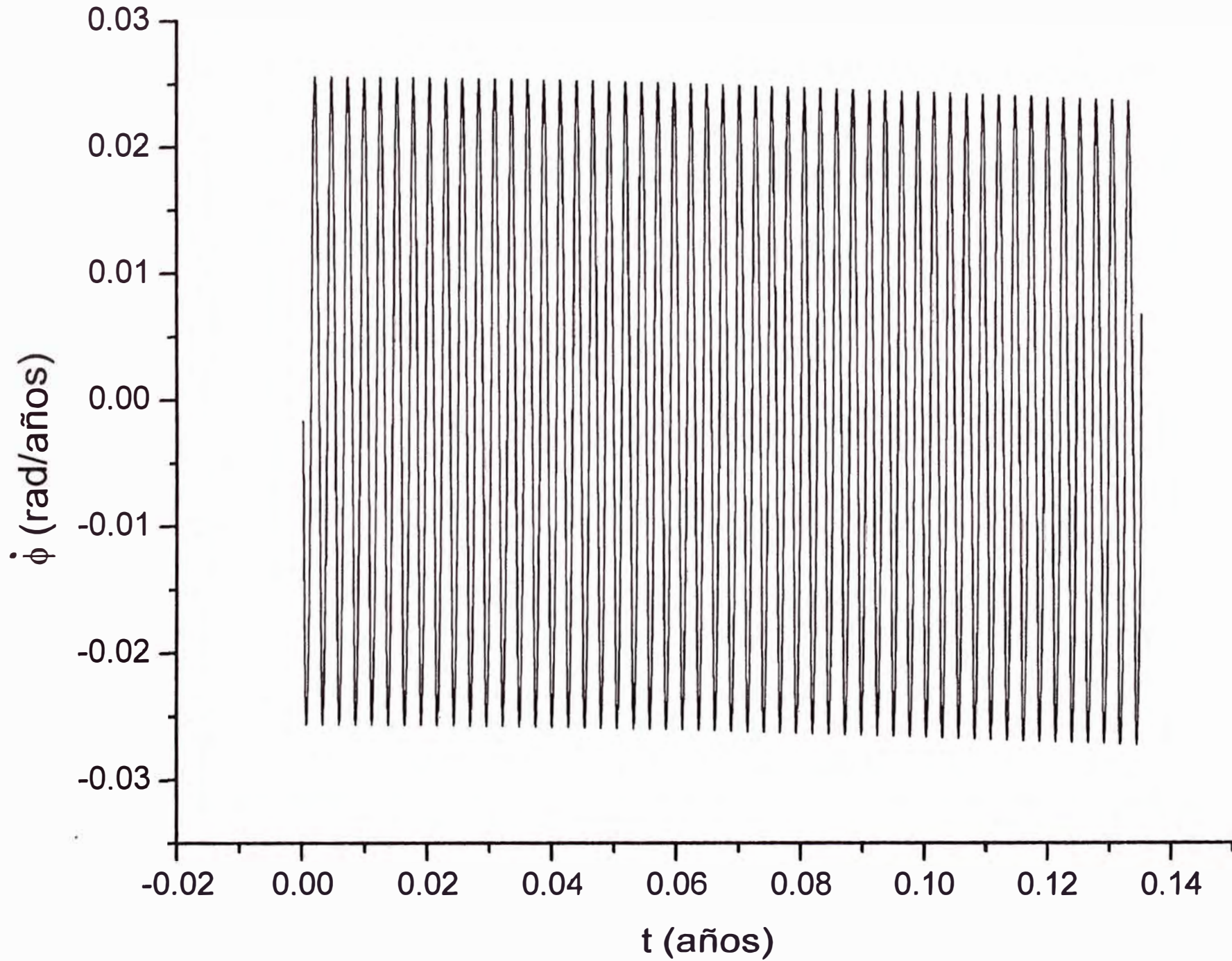
Para 50 dias con $c = 6000.55$ Km sin Luna

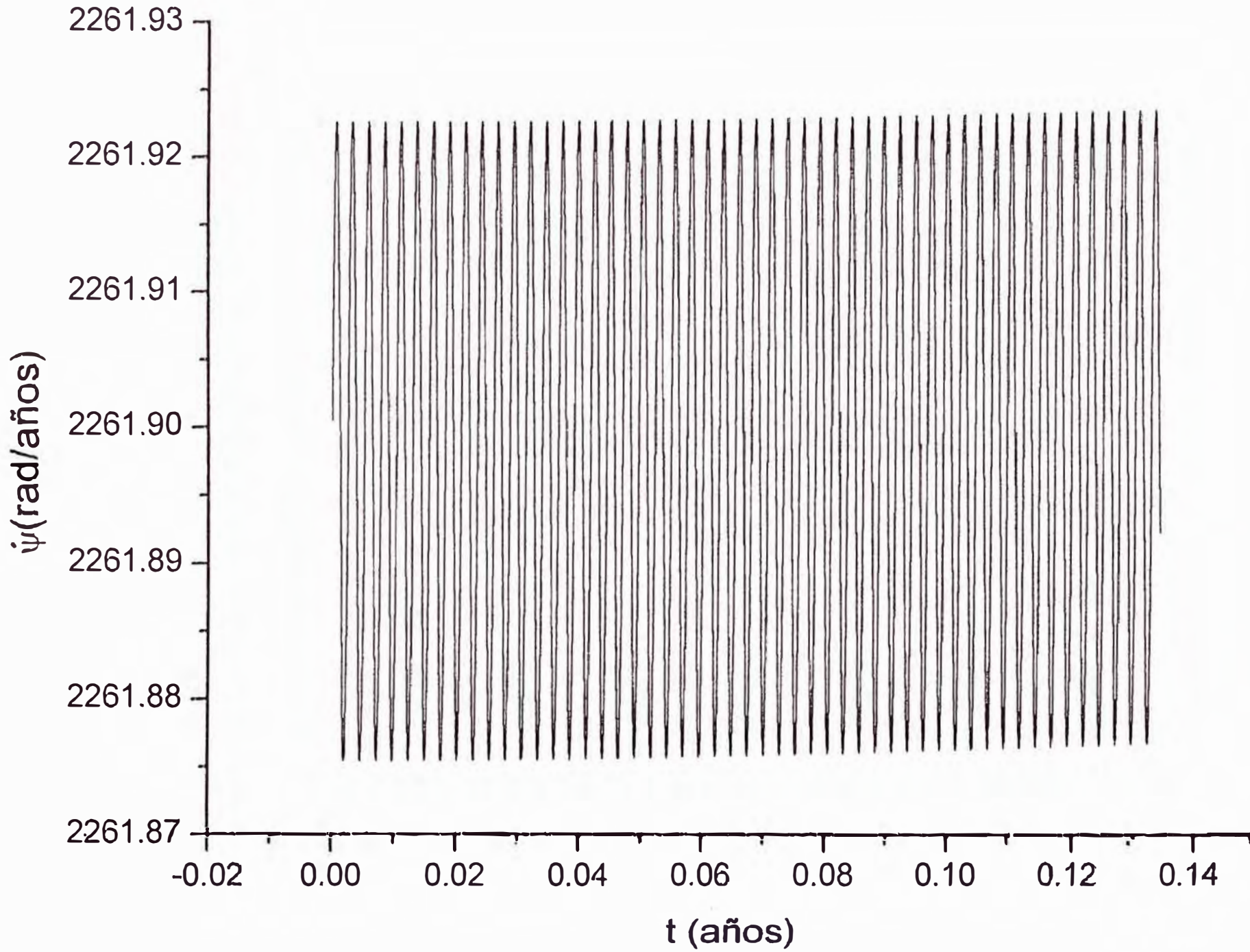




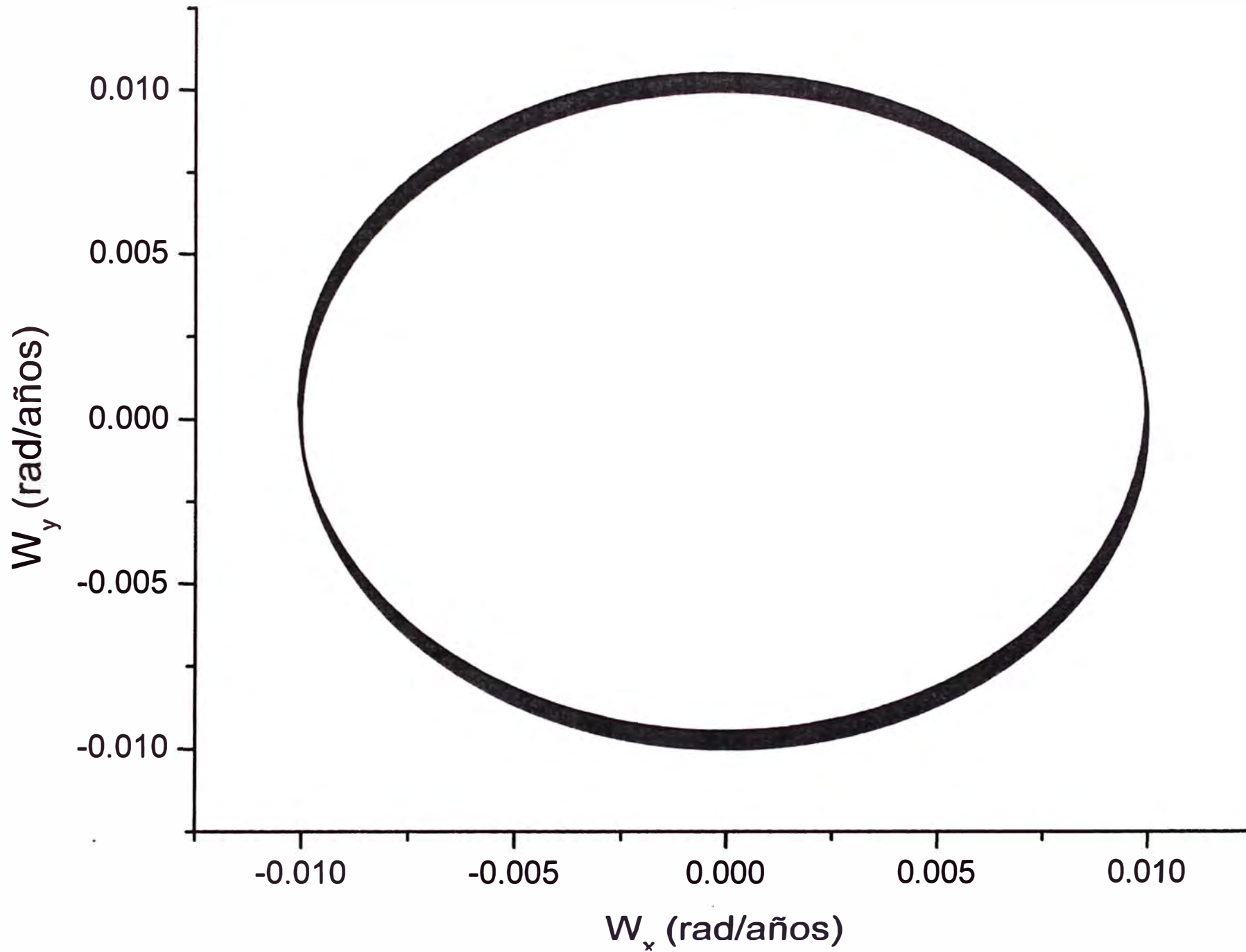


Para 50 dias con $c = 6000.55$ Km sin Luna

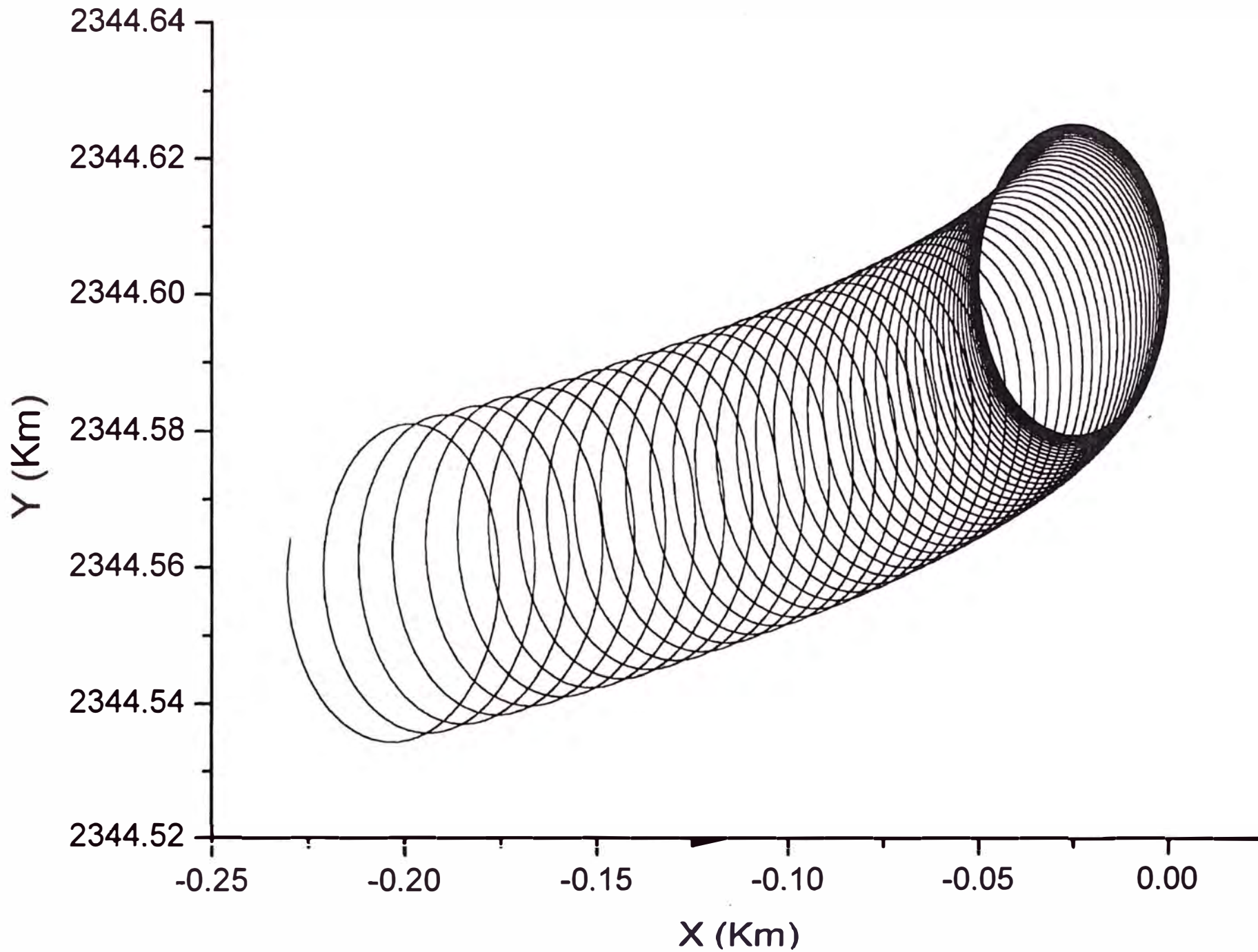




Proyección del Vector W sobre el plano XY para 50 días con $c=6000.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 50 días sin Luna



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 50 días con $\omega = 0.000268$ rad/año.

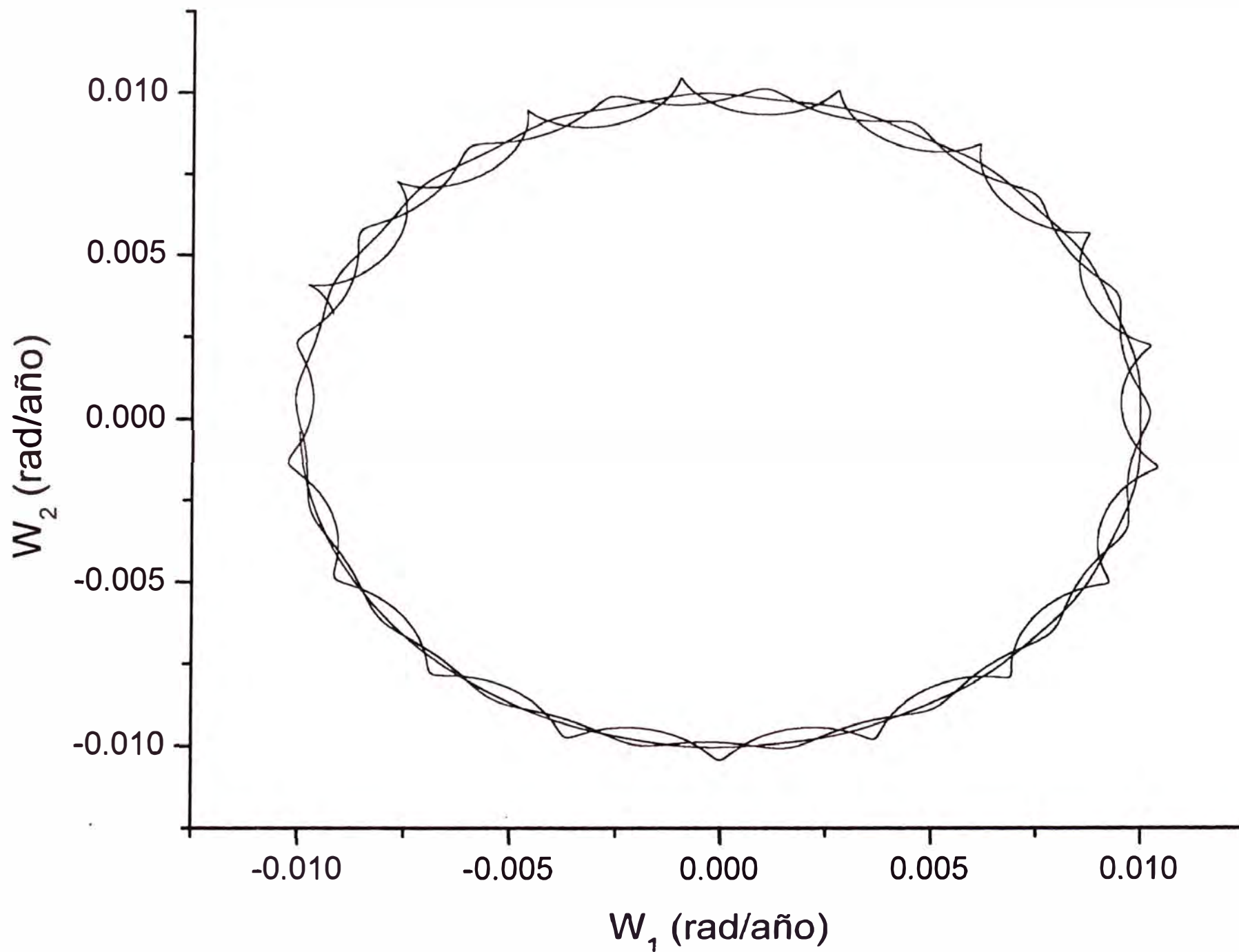


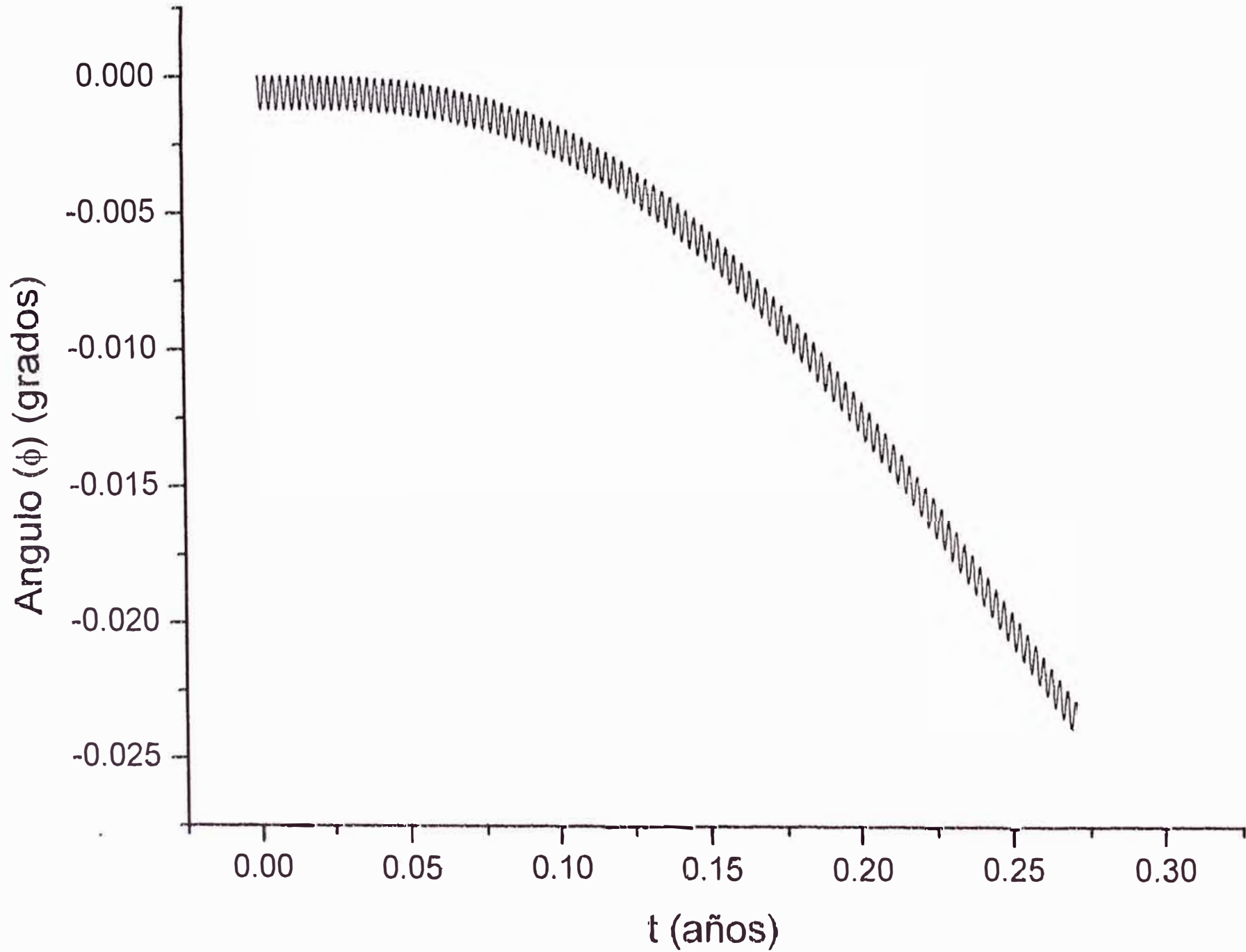
Table 10: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 100$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	149
W_y vs W_x	150
Y vs X	151
W_2 vs W_1	152

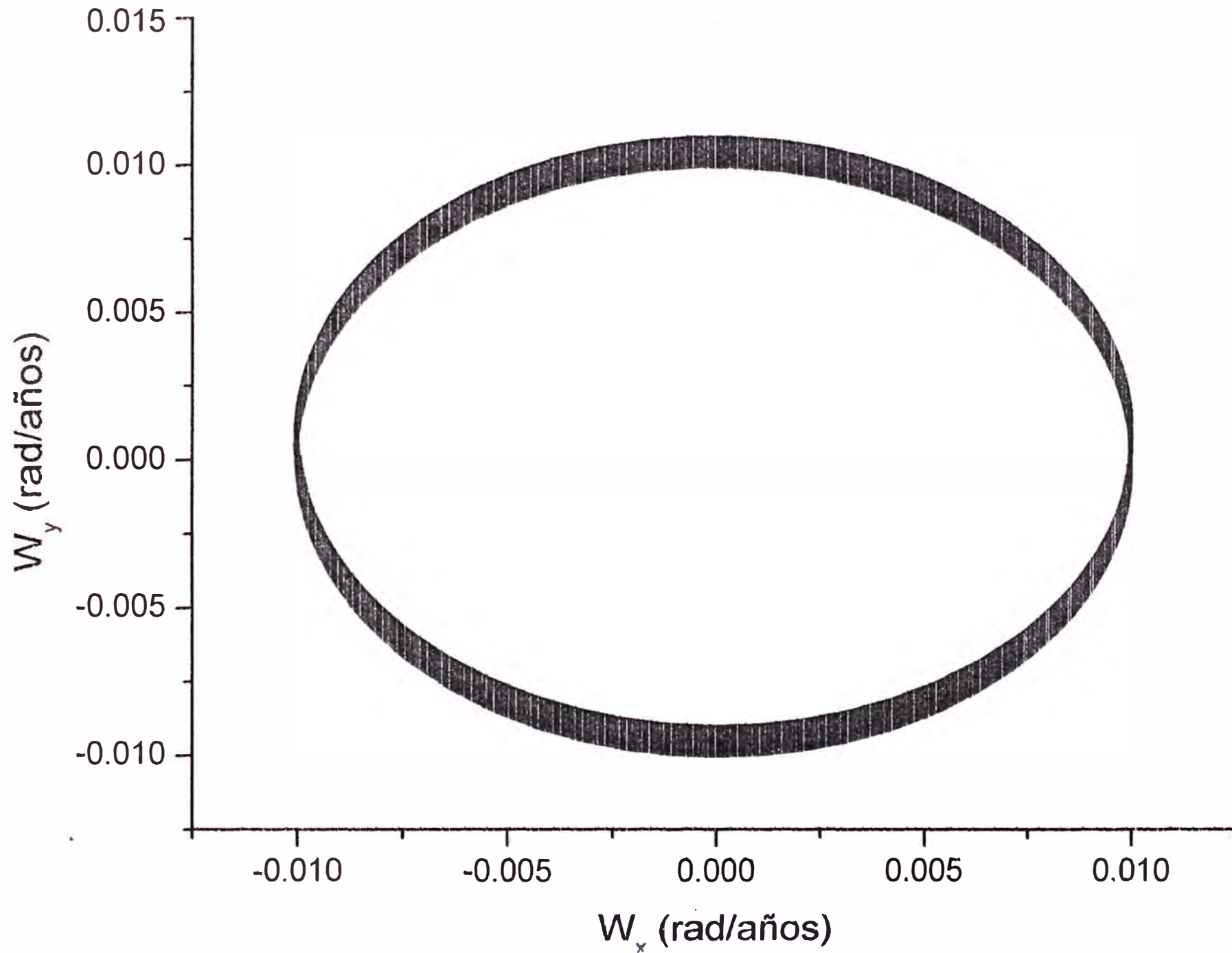
Observaciones:

- a) La gráfica de la función $\phi(t)$ es oscilante , decreciente y ya se puede apreciar la precesión de los equinoccios.
- b) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es semejante al caso del intervalo de tiempo anterior.
- c) El eje X_3 sobre el plano XY se traslada realizando un movimiento oscilante pero con una traslación neta, observandose también ya el movimiento de precesión de los equinoccios alrededor del eje Z_0 .
- d) El gráfico más interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano $X_1 X_2$ son curvas limitadas por dos elipses.

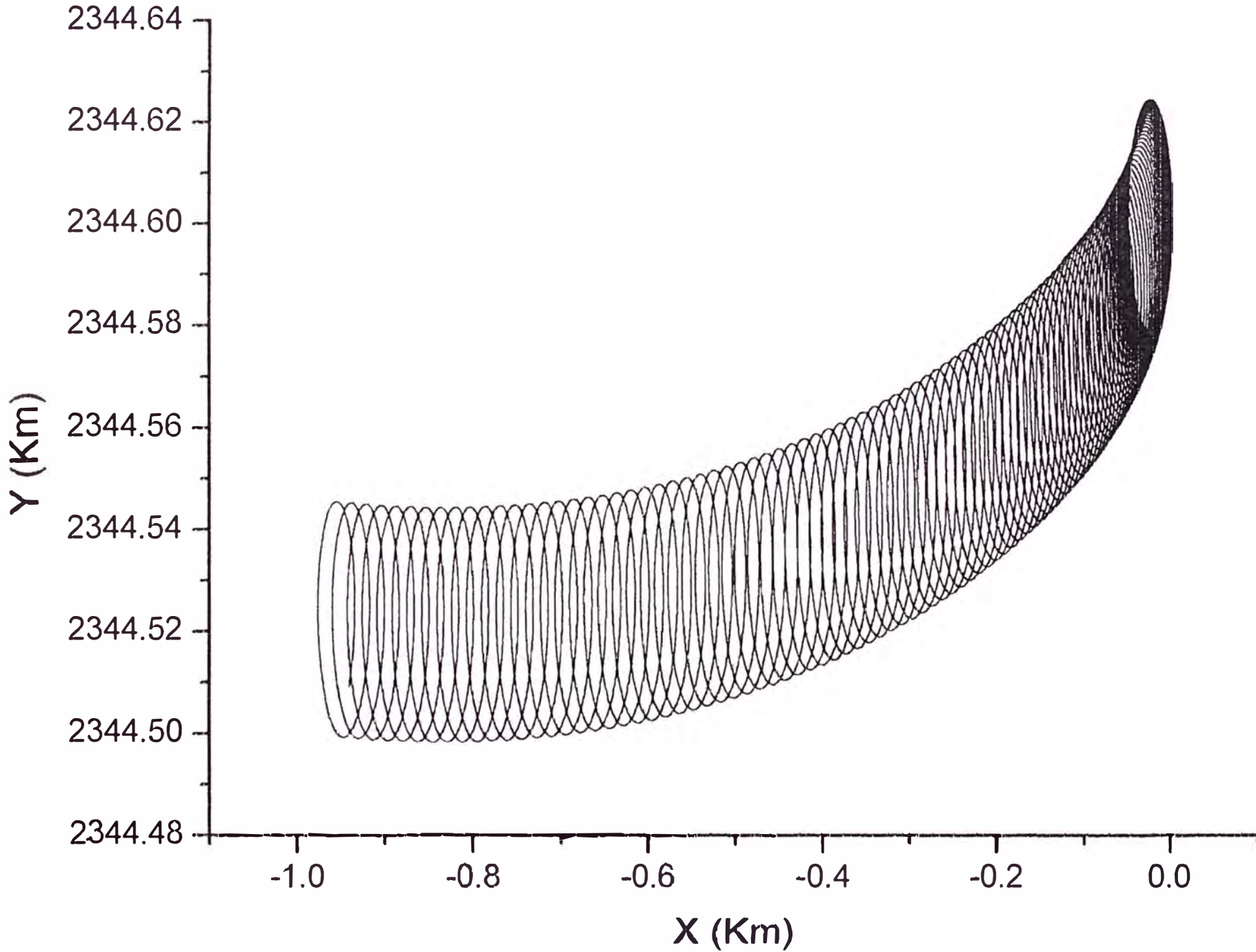
Para 100 días con $c=6000.55$ Km



Proyección del Vector W sobre el plano XY para 100 días con $c=6000.55$ Km



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 100 días con $c=6000.55$ Km

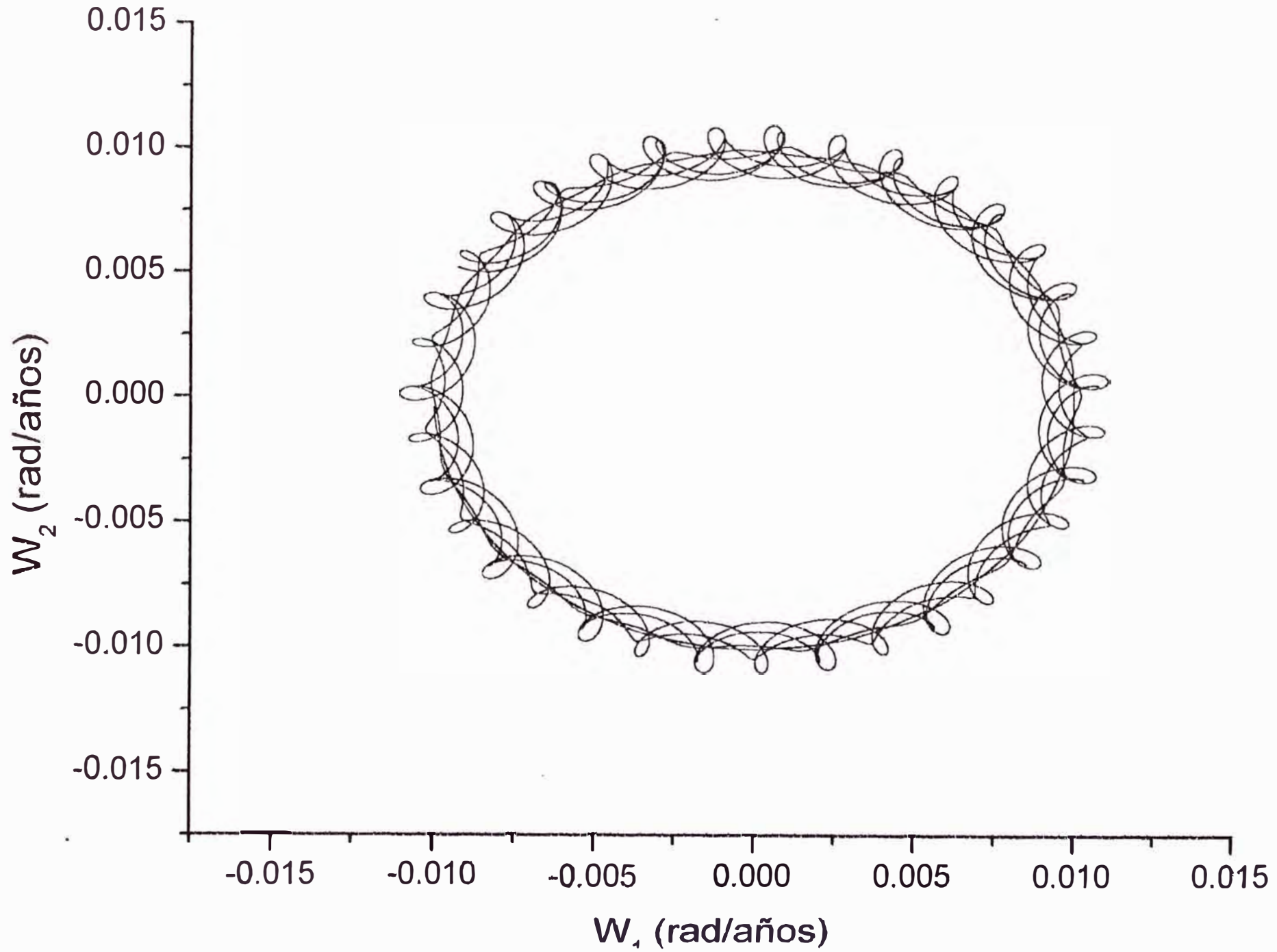


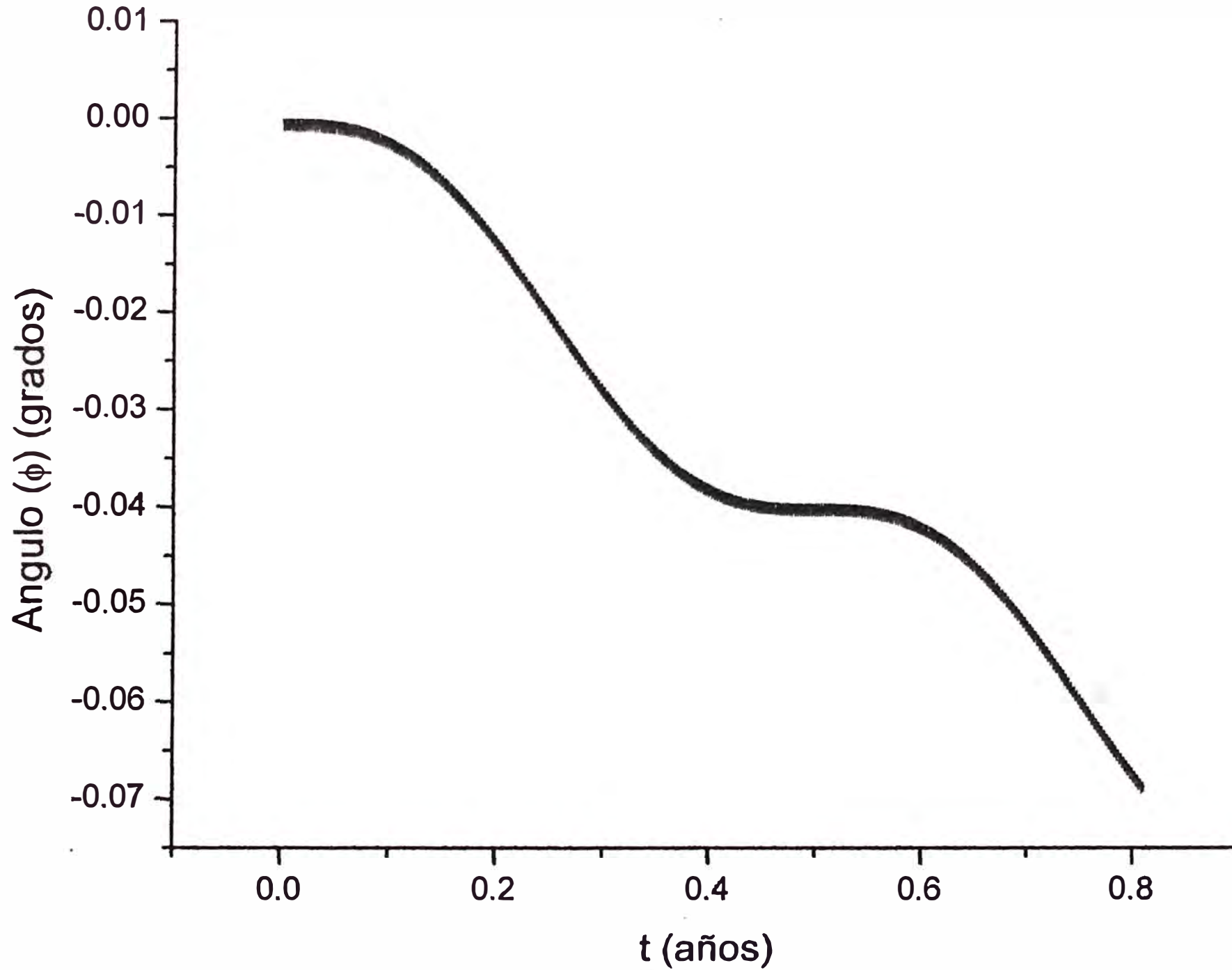
Table 11: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 300$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	154
W_y vs W_x	155
Y vs X	156
W_2 vs W_1	157

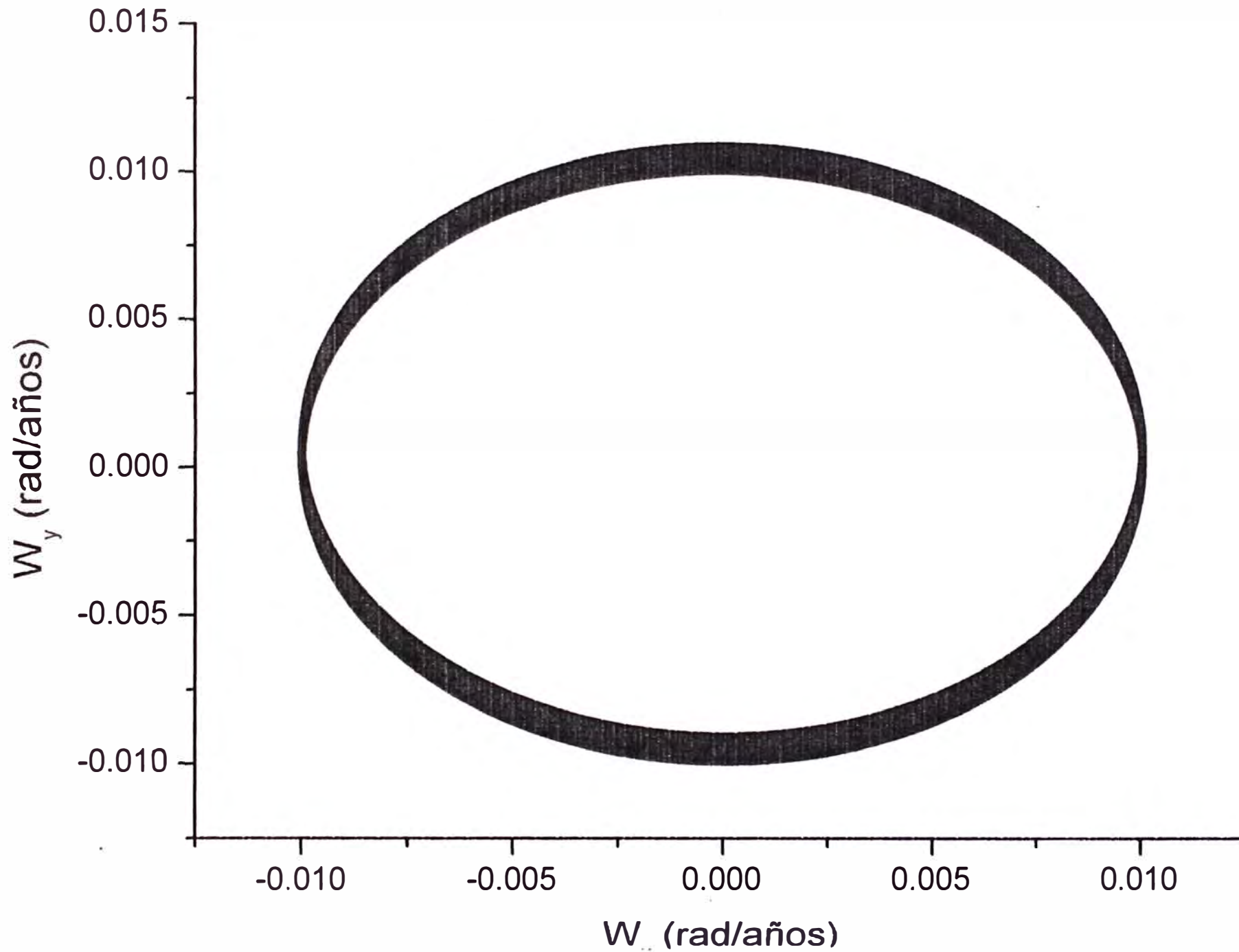
Observaciones:

- a) La grafica de la función $\phi(t)$ continua siendo oscilante , decreciente y notando en esta grafica ya el fenómeno de precesión de los equinoccios.
- b) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY continuan con las características anteriores observando que la región limitata por las dos elipses aumenta.
- c) La proyección del punto N del eje X_3 sobre el plano XY son curvas muy complicadas pero el movimiento neto que luego comprobaremos es de precesión.
- d) El gráfico más interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano $X_1 X_2$ en el cual se observan curvas complicadas limitadas por dos elipses , pero conservando sus rizos

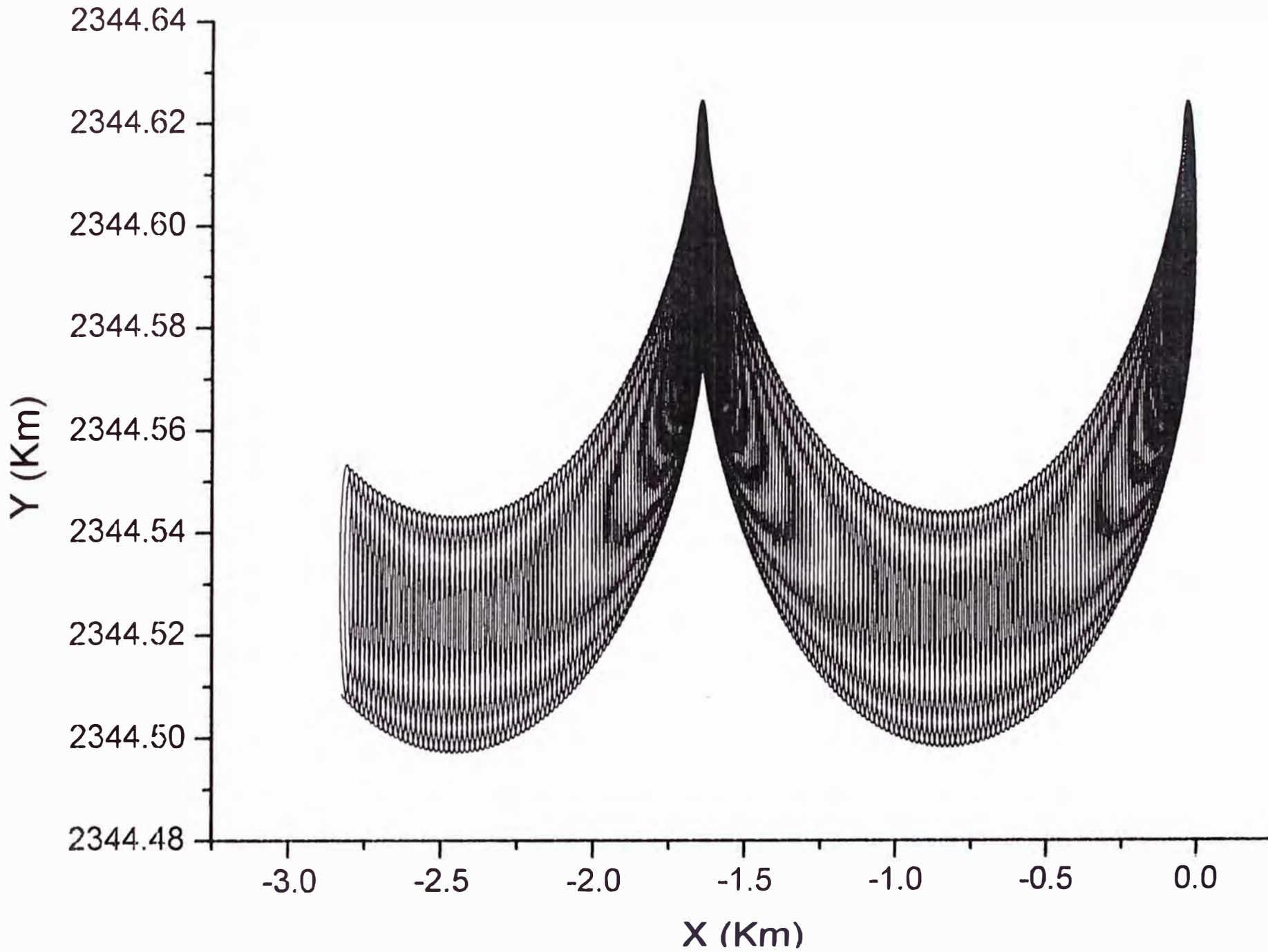
Para 300 días con $c = 6000.55$ Km



Proyección del Vector W sobre el plano XY para 300 días con $c=6000.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 300 días



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 300 días con $c=6000.55\text{Km}$

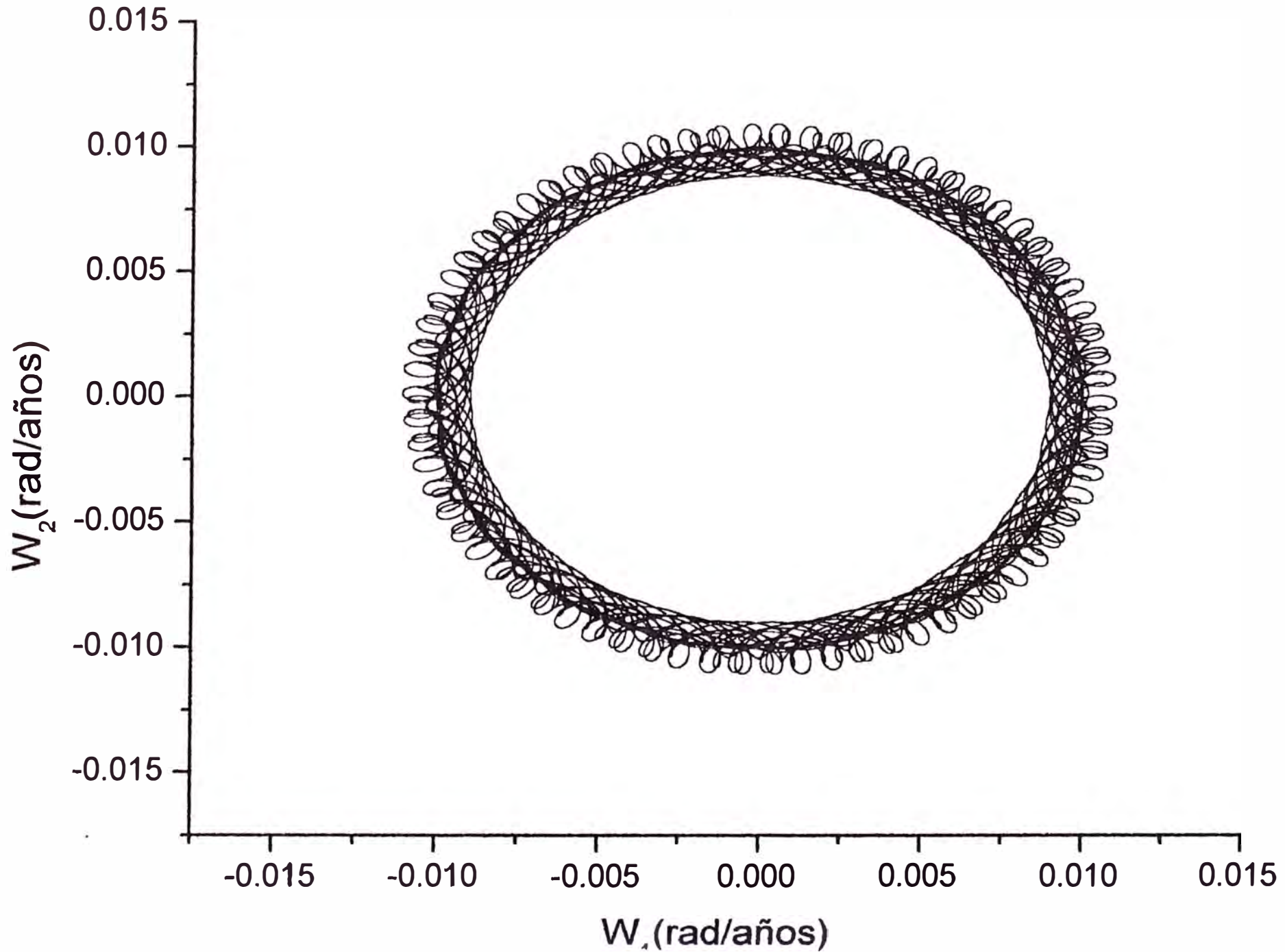


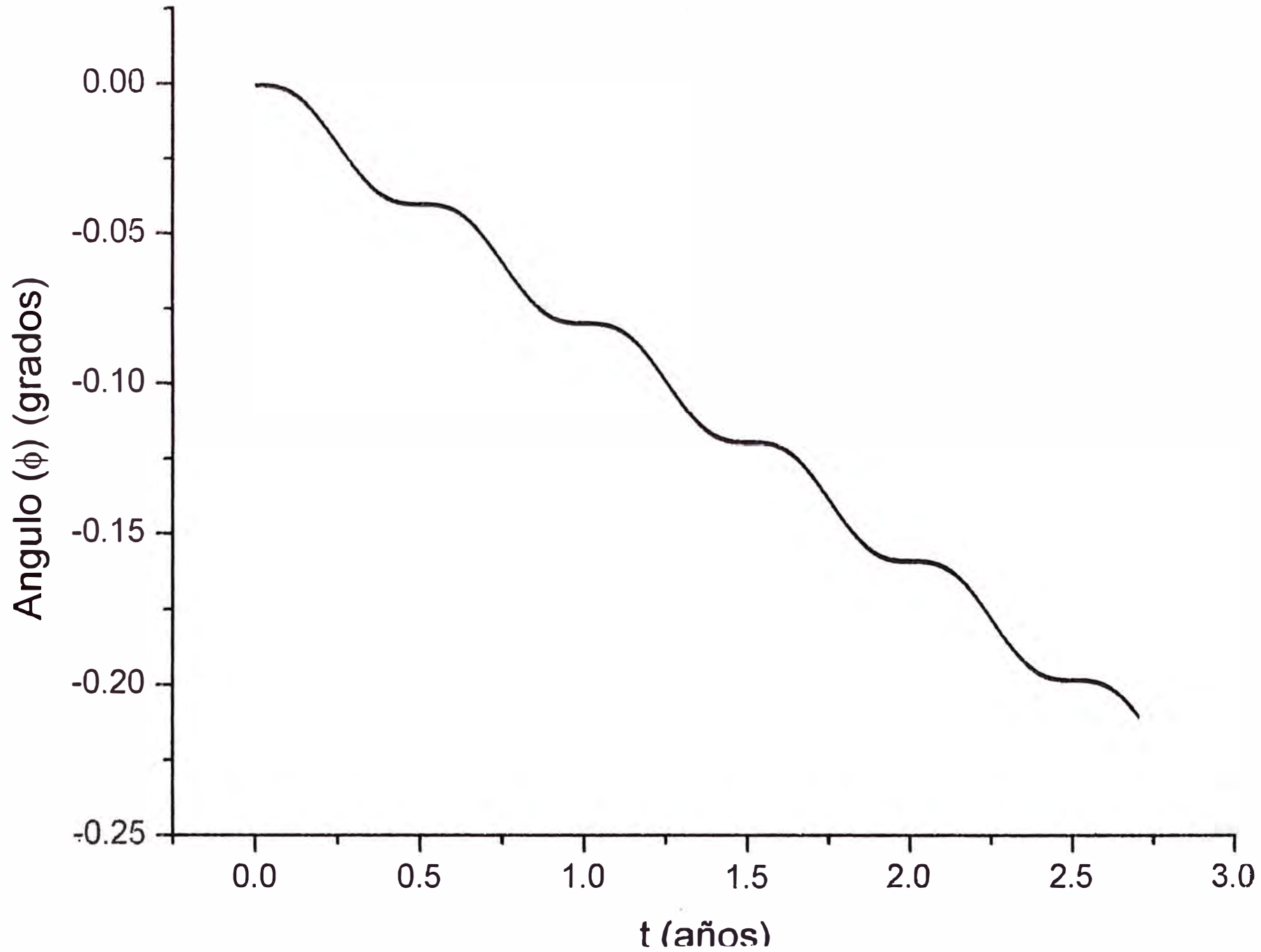
Table 12: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 1000$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	159
Y vs X	160 y 161
W_2 vs W_1	162

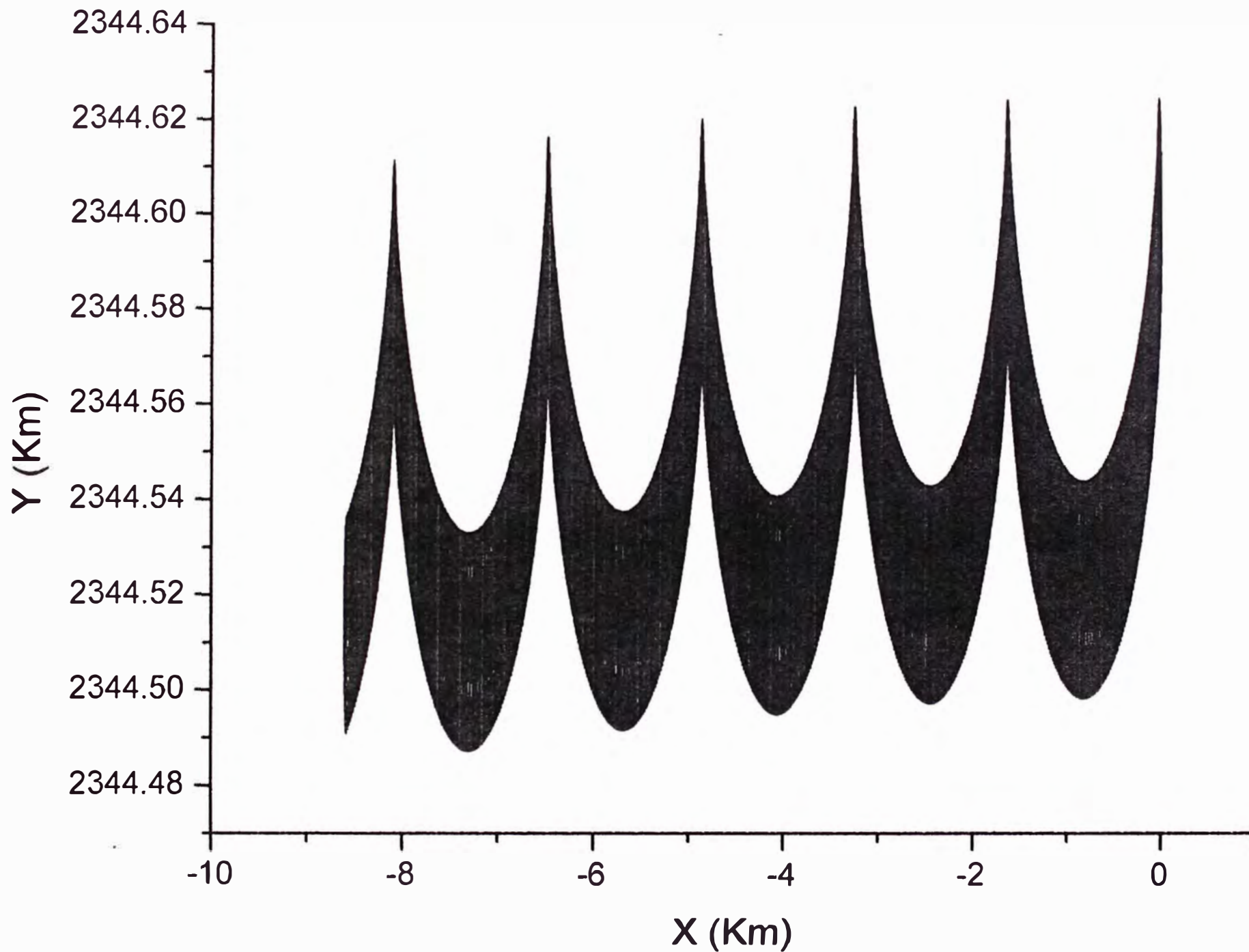
Con relación a los graficos que se mencionan en la tabla anterior podemos comentar lo siguiente:

- a) La grafica de la función $\phi(t)$ continua siendo oscilante y decreciente sin variación sustancial , mostrandose que el ángulo ϕ hasta los 1000 días habra girado 0.25° aproximadamente.
- b) Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY continuan siendo curvas complicadas pero que en promedio disminuye las coordenadas.
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano $X_1 X_2$ continuan siendo curvas muy complicadas limitadas por dos elipses pero aun conservando los rizos.

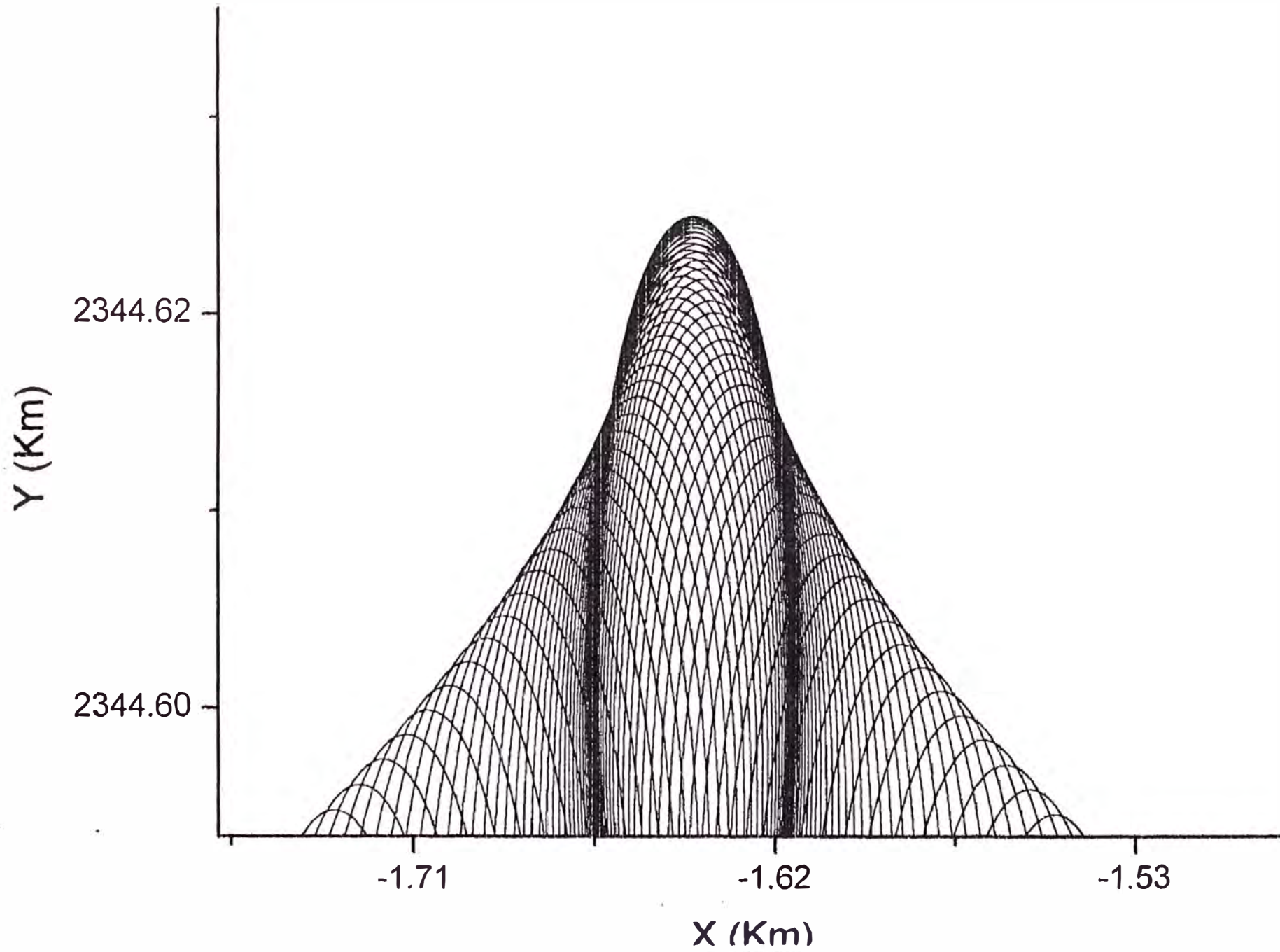
Para 1000 dias con $c=6000.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 1000 días



Anpliacion del grafico anterior



Proyección del Vector W sobre el Plano X_1X_2 para 1000 días con $c=6000.55$ Km

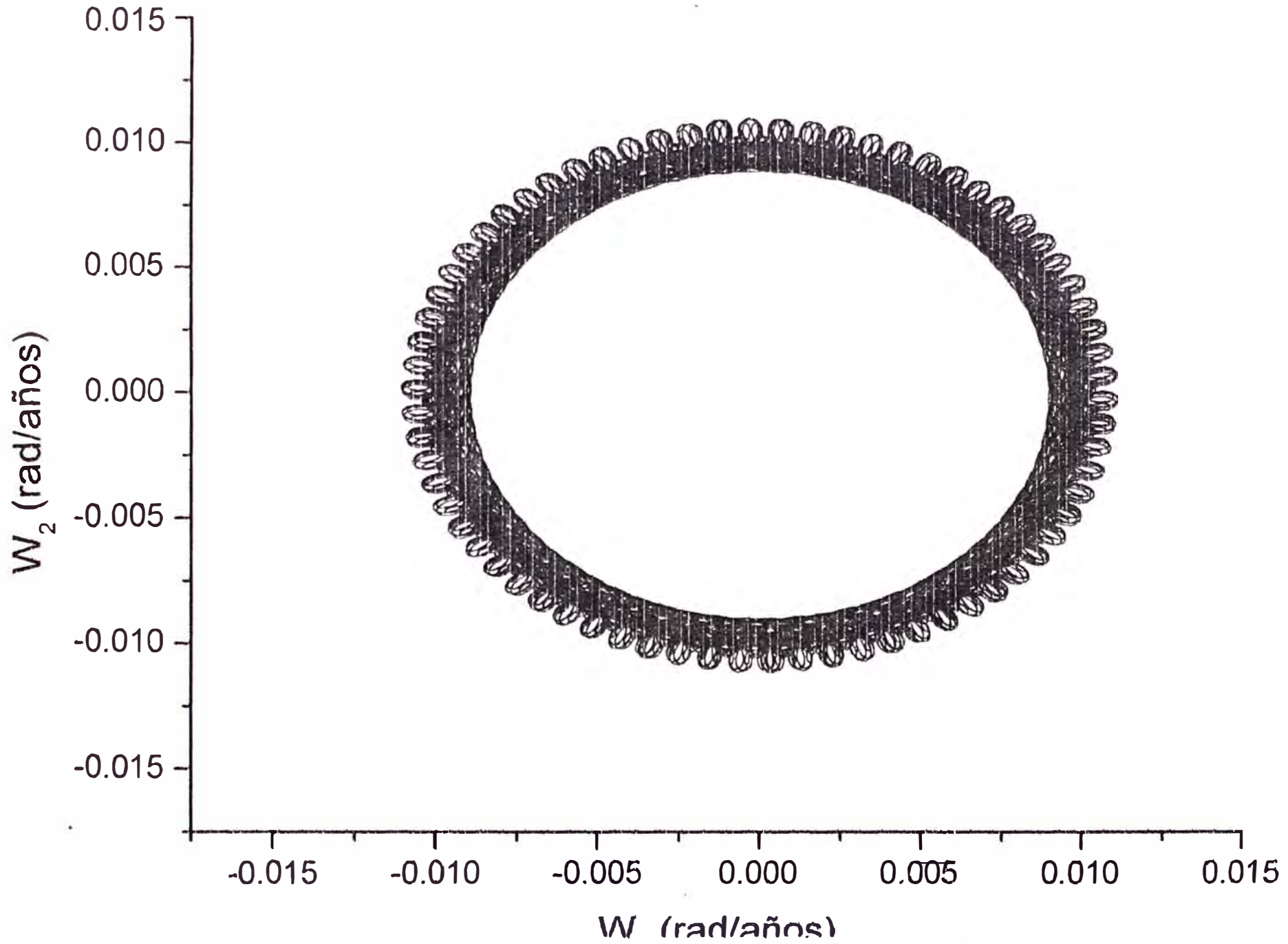


Table 13: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 3000$ días

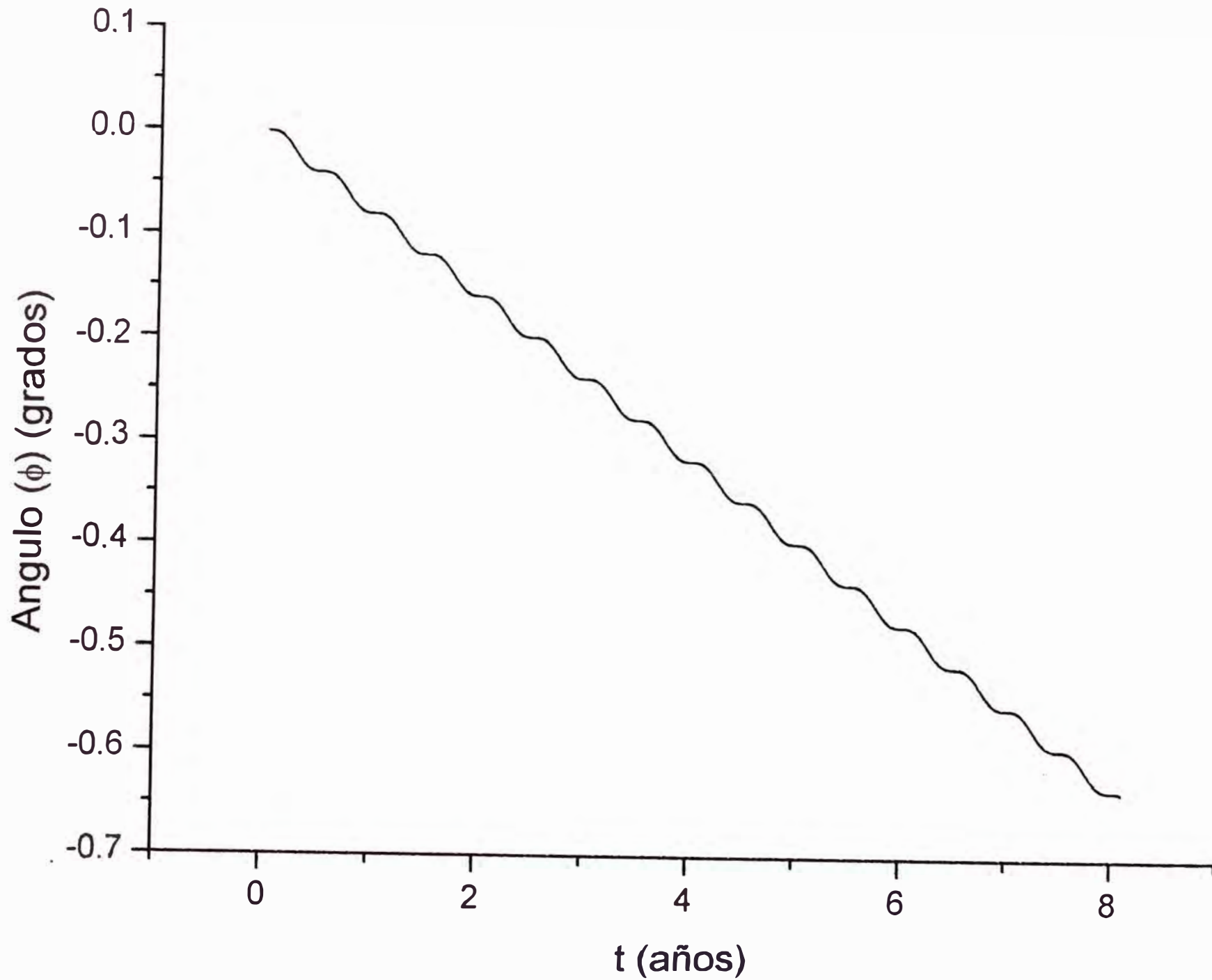
Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	164
$Y vs X$	165

Observaciones:

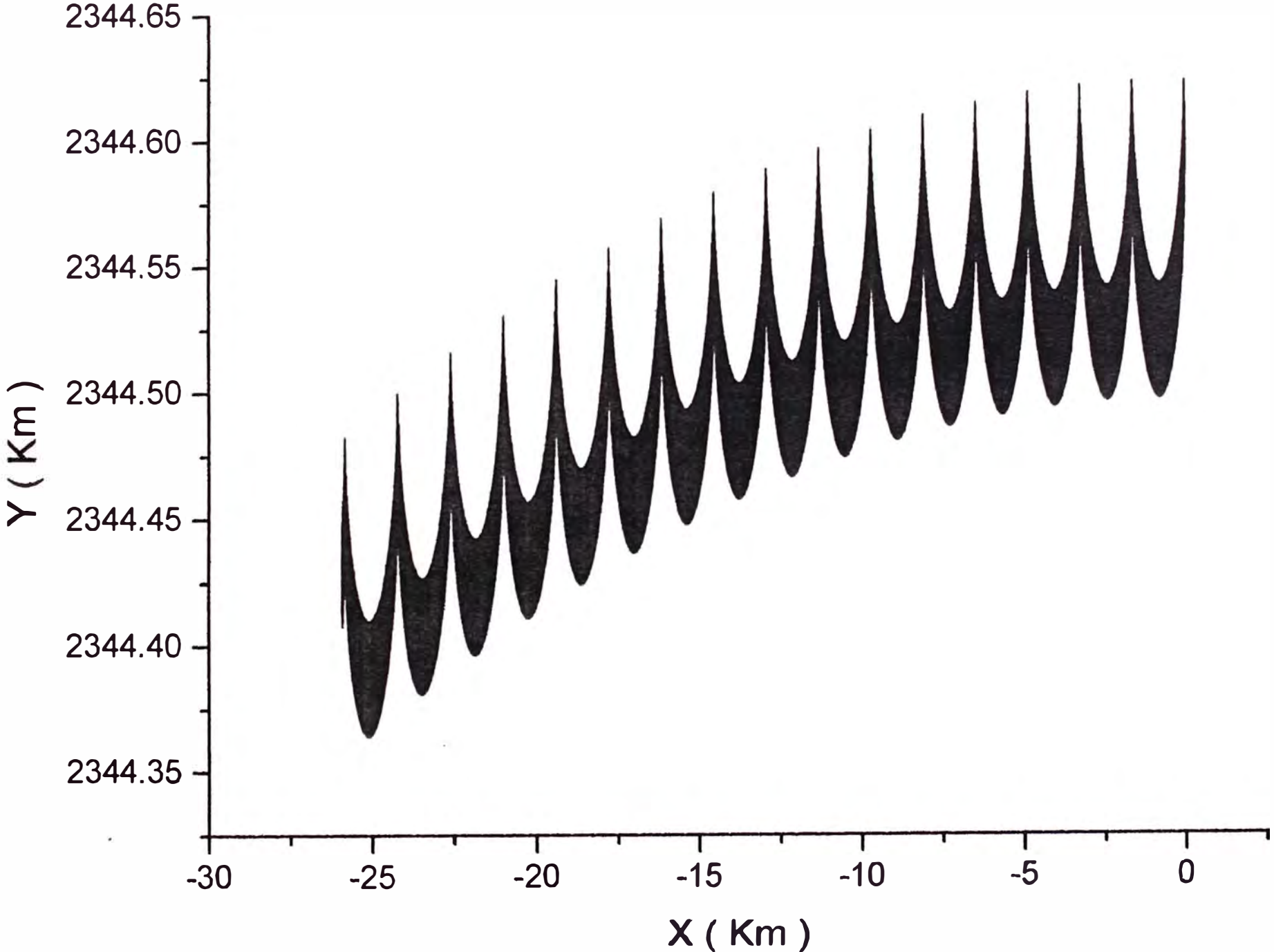
- a) De forma similar a los casos anteriores la grafica de la función $\phi(t)$ continua siendo oscilante y decreciente.
- b) El extremo del eje X_3 sobre el plano XY siguen siendo curvas muy complicadas para describirlas , continuando con las mismas irregularidades pero ya es más evidente el movimiento de precesión del eje X_3 .
- c) Como se mencionó ya es claro que el eje X_3 precesa y que el ángulo ϕ barrido para este tiempo de 3000 días es de 0.65° , por lo tanto podemos extrapolar y hallamos asi una estimación del período de precesión, encontrandose

$$T_P = 4000 \text{ años} \quad (3.41)$$

Para 3000 dias con $c=6000.55$ Km



Proyeccion del Extremo del eje X_3 sobre el plano XY para 3000 dias



3.4 Conclusiones y Observaciones

- a) Se presenta el movimiento de precesión del eje X_3 alrededor de un eje paralelo al eje Z (llamado *Precesión de los Equinoccios*) en este sistema mecánico (formado por una masa puntual fija y un cuerpo elipsoidal). No es necesario la presencia de un tercer cuerpo para que exista el fenómeno de precesión de los equinoccios, como afirman algunos libros, como el texto de Física, autor Alonso-Finn que justifica este movimiento por un torque generado por el Sol y la luna.
- b) Si comparamos los resultados para el caso Tierra-Sol el movimiento del cuerpo rígido, para un intervalo de tiempo $t \in [0, 10]$ días podemos concluir que su movimiento casi no se puede diferenciar del movimiento del cuerpo rígido aislado es decir la interacción con el Sol es casi despreciable, pero a partir del tiempo t mayores a 10 días (ejemplo para $t \in [0, 50]$ días) ya el efecto es apreciable.
- c) Para el radio polar $c = 6000,55$ Km e intervalos de tiempo mayores a 50 días se empiezan a notar la influencia gravitatoria de la estrella sobre el planeta.
- d) Por los resultados que hemos obtenido notamos que si radio polar c disminuye el período de precesión de los equinoccios también disminuye de 80000 años a alrededor de 4300 años es decir si el radio polar " c " disminuye, el fenómeno de precesión de los equinoccios se hace más 'notorio'.
- e) El valor del período de precesión de 80000 años para las dimensiones reales del planeta son consistentes con los valores hallados en algunos libros en forma cualitativa como en los textos de Mecánica de Goldstein y Serbo.
- f) Finalmente mencionamos que los cálculos son consistentes, por que al hallar la energía mecánica del sistema esta permaneció constante.

Apéndice del Capítulo III

Movimiento Tridimensional de un cuerpo Elipsoidal alrededor de una masa puntual fija en el origen de coordenadas

En este apéndice se determinaran las ecuaciones de movimiento del cuerpo Elipsoidal para el caso general. Comenzaremos recordando la energía cinética

$$E_K = \frac{mV_G^2}{2} + \frac{I_1W_1^2}{2} + \frac{I_2W_2^2}{2} + \frac{I_3W_3^2}{2} \quad (3.42)$$

Expresando la energía cinética E_K en función de los ángulos de Euler y V_G en función de las coordenadas esféricas del centro de masa de "m" tendremos .

$$E_K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_G^2 + r^2\dot{\phi}_G^2 \sin^2 \theta_G) + \frac{I_1}{2}(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{I_2}{2}(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (3.43)$$

Pero recordando que $I_1 = I_2 \equiv I$

$$E_K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_G^2 + r^2\dot{\phi}_G^2 \sin^2 \theta_G) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (3.44)$$

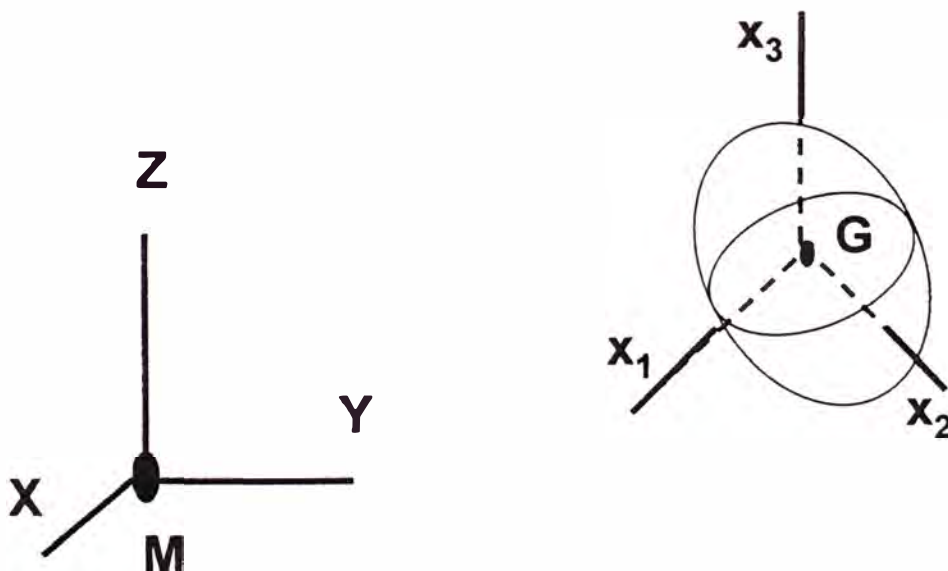


Fig. III

La energía potencial de m la obtenemos usando la ecuación (2.110) y haciendo

$$\vec{r}_M = \vec{0} \quad (3.45)$$

$$\vec{R} = \vec{r}_G \quad (3.46)$$

es

$$E_p = -\frac{GMm}{r_G} - \frac{GM}{2r_G^3}(I - I_3)(3 \cos^2 \gamma_3 - 1) \quad (3.47)$$

donde:

$$\cos \gamma_3 = \cos \theta \cos \theta_G + \sin \theta \sin \theta_G \sin(\phi - \phi_G) \quad (3.48)$$

el lagrangiano es:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}_G^2 + r_G^2 \dot{\theta}_G^2 + r_G^2 \dot{\phi}_G^2 \sin^2 \theta_G) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + \frac{GMm}{r_G} + \frac{GM}{2r_G^3}(I_3 - I)(3 \cos^2 \gamma_3 - 1) \quad (3.49)$$

donde:

$$\cos \gamma_3 = \cos \theta \cos \theta_G + \sin \theta \sin \theta_G \sin(\phi - \phi_G) \quad (3.50)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas generalizadas:

$r_G, \phi_G, \theta_G, \theta, \phi, \psi$. Obtenemos las ecuaciones diferenciales del movimiento :

$$\ddot{\theta}_G = -\frac{\dot{\theta}_G \dot{r}_G}{r_G} + \frac{\dot{\phi}_G^2 \sin 2\theta_G}{2} - \frac{3GM\Omega(I - I_3)}{2mr_G^5} [\sin \theta \cos \theta_G \sin(\phi - \phi_G) - \sin \theta_G \cos \theta] \quad (3.51)$$

$$\ddot{\phi}_G = -\frac{\dot{\theta}_G \dot{\phi}_G \sin 2\theta}{\sin^2 \theta_G} - \frac{2\dot{r}_G \dot{\phi}_G}{r_G} - \frac{3GM\Omega(I - I_3) [\sin \theta \sin \theta_G \cos(\phi - \phi_G)]}{mr_G^5 \sin^2 \theta_G} \quad (3.52)$$

donde

$$\Omega \equiv \cos(\theta) \cos(\theta_G) + \sin(\theta) \sin(\theta_G) \sin(\phi - \phi_G) \quad (3.53)$$

$$\ddot{r}_G = r_G \dot{\theta}_G^2 + r_G \sin^2 \theta_G \dot{\phi}_G^2 + \frac{GM}{r_G^2} + \frac{9GM\Omega^2(I - I_3)}{2mr_G^4} - \frac{3GM(I - I_3)}{2mr_G^4} \quad (3.54)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\phi}^2 \sin 2\theta(I - I_3)}{2I} - \frac{I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta}{I} - \frac{3GM(I - I_3)}{2Ir_G^3} [\sin \theta \sin \theta_G \sin(\phi - \phi_G) + \cos \theta \cos \theta_G] [-\sin \theta \cos \theta_G + \cos \theta \sin \theta_G \sin(\phi - \phi_G)] \quad (3.55)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)} \left[-\frac{3GM(I - I_3)}{r_G^3} \right] \{ \sin \theta \sin \theta_G \sin(\phi - \phi_G) + \cos \theta \cos \theta_G \} [\sin \theta \sin \theta_G \cos(\phi - \phi_G)] - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin 2\theta(I - I_3) - I_3 \ddot{\psi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \quad (3.56)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\phi} \cos \theta \quad (3.57)$$

Al resolver estas ecuaciones numéricamente por el metodo de Runge Kutta de orden 4 con paso $h = 10^{-4}$, comprobamos que todos los calculos anteriores son consistentes ya que se ha calculado la energía mecánica del sistema, siendo esta constante.

4 PRECESION DE LOS EQUINOCCIOS DE LA TIERRA CONSIDERANDO EL SOL Y LA LUNA

4.1 Introducción.

4.2 Ecuaciones diferenciales de Movimiento de la Tierra.

4.3 Resultados Numéricos.

4.4 Conclusiones.

4.1 Introducción

En este capítulo se analiza la precesión de los equinoccios para la Tierra considerando su interacción con el Sol y la Luna. También analizaremos como cambiaría el período de precesión cuando se modifica el valor de las dimensiones del radio polar de la tierra o variando el período de rotación de la Tierra alrededor del sol. Para realizar estos cálculos vamos a considerar el siguiente modelo mecánico:

a) Un sistema formado por:

i) Dos partículas S y L de masas M , m_L que serán el Sol y la Luna respectivamente.

ii) Un cuerpo elipsoidal homogéneo con semieje a, b, c tal que $(a = b > c)$ de masa m que será la Tierra.

b) Sólo consideraremos la interacción gravitatoria en este sistema físico.

c) Las masas satisfacen las relaciones $M \gg m \gg m_L$.

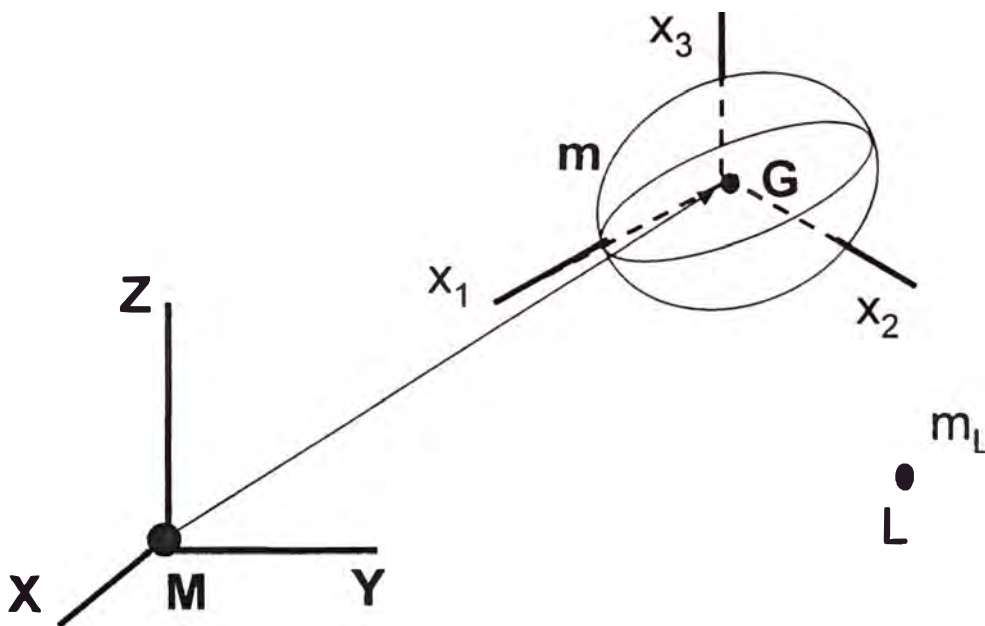


Fig. 4.1

d) Un sistema de referencia inercial XYZ (Ver Fig. 4.1) con origen en el Sol, tal que se supone fijo dicho sistema de ejes con respecto a las estrellas lejanas.

e) La Tierra se mueve alrededor del Sol de tal modo que su centro de masa G tiene un movimiento circular uniforme (con período T).

f) La Tierra efectúa un movimiento general de un cuerpo rígido considerando que el eje de rotación pasa por el centro de masa del cuerpo elipsoidal.

g) El Sol, el centro de masa de la Tierra G y la Luna están en un mismo plano.

h) La partícula L (la Luna) tiene un movimiento circular uniforme con período T_L con

respecto a un sistema de referencia $X_0Y_0Z_0$ (con origen en el centro de masa del elipsoide). Los ejes de este nuevo sistema de referencia son siempre paralelos a los ejes del sistema XYZ (Ver Fig.4.2) que permitirán definir los ángulos de Euler del cuerpo rígido: θ, ϕ, ψ que serán las coordenadas generalizadas en este problema.

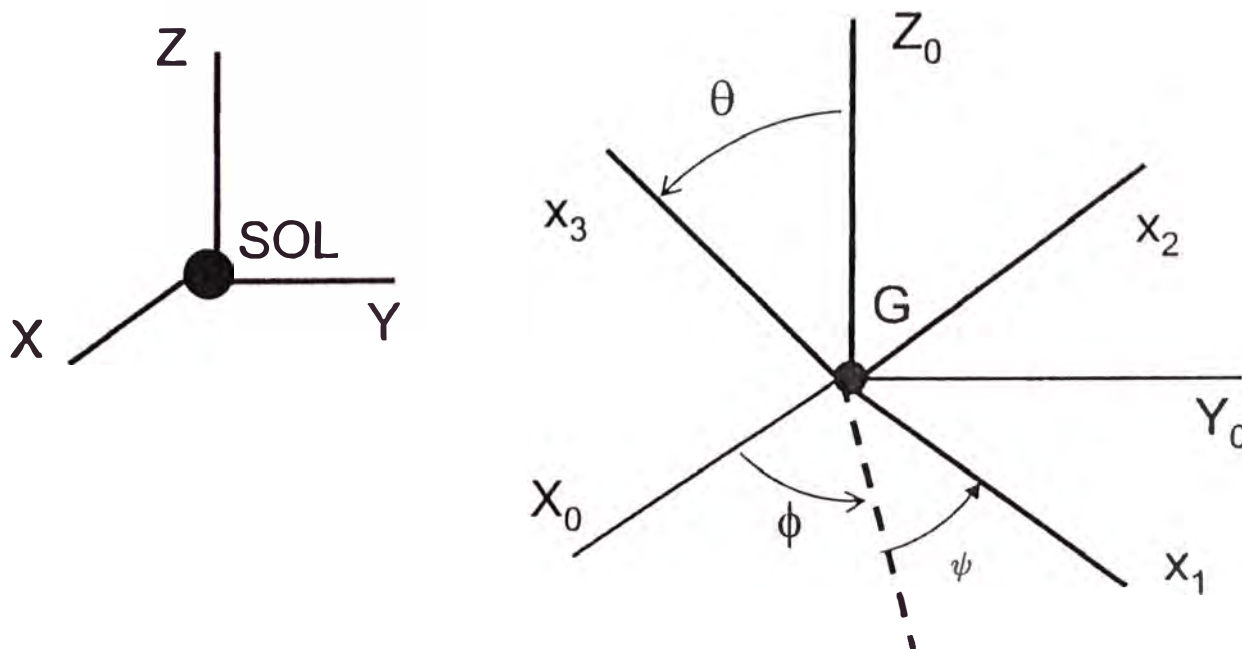


Fig. 4.2

g) La distancia del punto G a la partícula L ($|\vec{r}_G - \vec{r}_L|$) es pequeña comparado con las siguientes distancias (Ver Fig4.3):

-La distancia de la partícula S a la partícula L ($|\vec{r}_L|$).

-La distancia de la partícula S al punto G ($|\vec{r}_G|$).

Es decir:

$$r_G \gg |\vec{r}_L - \vec{r}_G| \quad (4.1)$$

$$r_L \gg |\vec{r}_L - \vec{r}_G| \quad (4.2)$$

Luego

$$r_L \cong r_G \quad (4.3)$$

Como en los capítulos anteriores definimos:

$$I \equiv I_1 = I_2 \quad (4.4)$$

donde I_k son los momentos de inercia de la tierra con respecto a los ejes X_K que se mueven con la tierra

Despues aplicaremos las ecuaciones de Lagrange obteniendo seis ecuaciones diferenciales no lineales de movimiento y lo aplicaremos al caso que nos interesa.

Como en el capítulo anterior estamos solo interesados en el movimiento de precesión de los equinoccios, y no analizamos el movimiento en general del centro del elipsoide y la partícula L que puede moverse en el espacio .

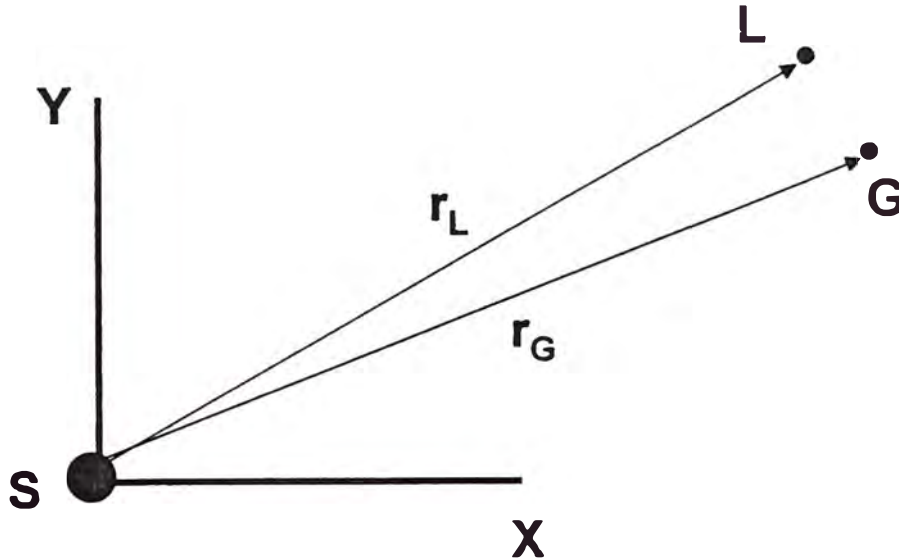


Fig. 4.3

Si se estudiaría el caso general tendríamos 9 grados de libertad (3 coordenadas esféricas para la partícula L, 3 coordenadas esféricas para el punto G y los 3 ángulos de Euler) obteniendo 9 complicadas ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Esta investigación se deja para un trabajo posterior.

4.2 Ecuaciones diferenciales de Movimiento de la Tierra

La energía potencial del sistema mecánico es:

$$E_P = E_{P,L} + E_{P,G} + E_{P,LG} \quad (4.5)$$

donde:

- $E_{P,L}$: Es la energía potencial de la Luna partícula L debido a la interacción gravitatoria con el Sol partícula S.

- $E_{P,G}$: Es la energía potencial de la tierra de masa m debido a la interacción gravitatoria

con el sol.

$-E_{P_{LG}}$: Es la energía potencial debido a la interacción gravitatoria entre la Luna y la Tierra.

Tenemos que estas energías están dados por las ecuaciones:

$$E_{P,L} = -\frac{GMm_L}{r_L} \quad (4.6)$$

$$E_{P,G} = -\frac{GMm}{r_G} + \frac{GM}{2r_G^3}(I - I_3)(1 - 3\cos^2\gamma_3) \quad (4.7)$$

$$E_{P_{LG}} = -\frac{Gm m_L}{|\vec{r}_L - \vec{r}_G|} + \frac{Gm_L}{2|\vec{r}_L - \vec{r}_G|^3}(I - I_3)(1 - 3\cos^2\gamma_3^*) \quad (4.8)$$

En las dos últimas ecuaciones los segundos términos son energías de potencial de Mac Cullagh. Recordando la demostración de la ecuación (2.74) donde los ángulos γ_3 , γ_3^* son los ángulos formados por \vec{e}_G con \vec{e}_3 y \vec{u} con \vec{e}_3 respectivamente, (Ver Fig. 4.4) donde:

$$\vec{u} = \frac{\vec{LG}}{|\vec{LG}|} \quad (4.9)$$

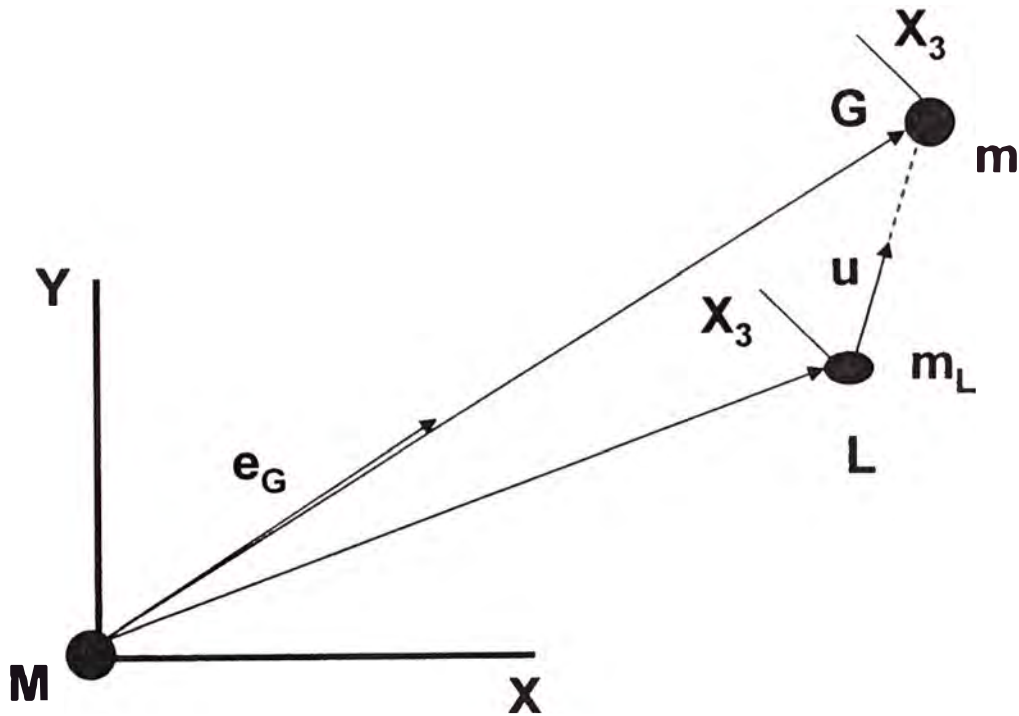


Fig. 4.4

Teniendo en cuenta que la trayectoria de la partícula L y del punto G están en el plano XY (Ver Fig. 4.5) tenemos

$$\vec{u} = -\cos\alpha \vec{i} - \sin\alpha \vec{j} \quad (4.10)$$

en la cual

$$\alpha = \frac{2\pi}{T_L} t \quad (4.11)$$

donde T_L es el período de revolución de la partícula L alrededor del cuerpo elipsoidal.

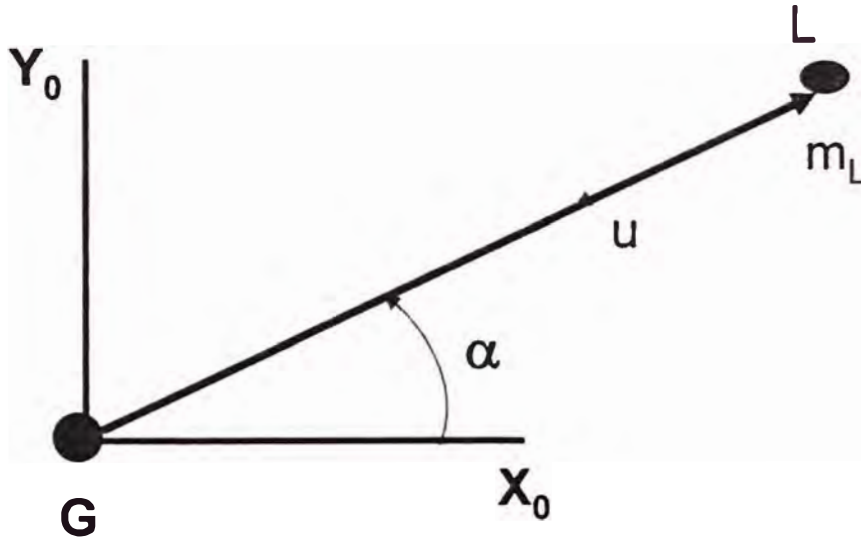


Fig. 4.5

Luego de la ecuación (2.124) y (4.10)

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{u} = -\cos\alpha \sin\phi \sin\theta + \sin\alpha \cos\phi \sin\theta \quad (4.12)$$

y como

$$\cos\gamma_3^* = \vec{e}_3 \cdot \vec{u} \quad (4.13)$$

obtenemos :

$$\cos\gamma_3^* = -\cos\alpha \sin\phi \sin\theta + \sin\alpha \cos\phi \sin\theta \quad (4.14)$$

también recordamos (Ver pag.90)

$$\cos\gamma_3 = \sin\theta \sin(\phi - \phi_G) \quad (4.15)$$

De (4.6) (4.7) y (4.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} E_P &= -\frac{GMm_L}{r_L} - \frac{GMm}{r_G} + \frac{GM}{2r_G^3}(I - I_3)(1 - 3\cos^2\gamma_3) \\ &- \frac{Gmm_L}{|\vec{r}_L - \vec{r}_G|} + \frac{Gm_L}{2|\vec{r}_L - \vec{r}_G|^3}(I - I_3)(1 - 3\cos^2\gamma_3^*) \end{aligned} \quad (4.16)$$

La energía cinética del sistema es :

$$E_K = \frac{mV_G^2}{2} + \frac{m_L V_L^2}{2} + \frac{I_1 W_1^2}{2} + \frac{I_2 W_2^2}{2} + \frac{I_3 W_3^2}{2} \quad (4.17)$$

Donde V_G y V_L son los modulos de la velocidad de la Tierra y de la Luna respecto al sistema de referencia XYZ.

Se demuestra en el apéndice IV (pag 265) que :

$$V_L = V_G \left[1 + 2 \left(\frac{V'_L}{V_G} \right) \cos(\gamma) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.18)$$

Donde V'_L es la velocidad de la Luna respecto del sistema $X_0Y_0Z_0$. Luego el lagrangiano del sistema es :

$$\begin{aligned} L = & \frac{m V_G^2}{2} + \frac{m_L}{2} (V_G^2 + 2V_G V'_L \cos \gamma) + \frac{I_1 W_1^2}{2} + \frac{I_2 W_2^2}{2} + \frac{I_3 W_3^2}{2} \\ & + \frac{G M m_L}{r_L} + \frac{G M m}{r_G} - \frac{G M}{2r_G^3} (I - I_3)(1 - 3 \cos^2 \gamma_3) \\ & + \frac{G m m_L}{|\vec{r}_L - \vec{r}_G|} - \frac{G m_L}{2|\vec{r}_L - \vec{r}_G|^3} (I - I_3)(1 - 3 \cos^2 \gamma_3^*) \end{aligned} \quad (4.19)$$

expresando los W_k en función de los ángulos de Euler la función de lagrange.

$$\begin{aligned} L = & \frac{m V_G^2}{2} + \frac{m_L}{2} (V_G^2 + 2V_G V'_L \cos \gamma) + \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \\ & + \frac{G M m_L}{r_L} + \frac{G M m}{r_G} - \frac{G M}{2r_G^3} (I - I_3)(1 - 3 \cos^2 \gamma_3) \\ & + \frac{G m m_L}{|\vec{r}_L - \vec{r}_G|} - \frac{G m_L}{2|\vec{r}_L - \vec{r}_G|^3} (I - I_3)(1 - 3 \cos^2 \gamma_3^*) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Recordemos que V_G , V'_L son constantes y $\gamma = \gamma(t)$, observamos que las coordenadas generalizadas son: θ , ϕ , ψ . Entonces además de las distancias, la velocidad del punto G son constantes en nuestro modelo. Aplicando las ecuaciones de lagrange se puede demostrar

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \frac{\dot{\phi}^2 \operatorname{sen} 2\theta (I - I_3)}{2I} - \frac{I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta}{I} \\ & + \frac{3G(I - I_3) \operatorname{sen}(2\theta)}{2I} \left[\frac{M \operatorname{sen}^2(\phi - \phi_G)}{r_G^3} - \frac{m_l \operatorname{sen}^2(\alpha - \phi)}{|\vec{r}_L - \vec{r}_G|^3} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \frac{1}{(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)} \left\{ -\dot{\phi} \dot{\theta} \sin 2\theta (I - I_3) - I_3 \ddot{\psi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \right. \\ & \left. 3G(I - I_3) \operatorname{sen}^2 \theta \left[\frac{M \operatorname{sen}(\phi - \phi_G) \cos(\phi - \phi_G)}{r_G^3} - \frac{m_l \operatorname{sen}(\alpha - \phi) \cos(\alpha - \phi)}{|\vec{r}_L - \vec{r}_G|^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\phi} \cos \theta \quad (4.23)$$

Las ecuaciones (4.21) y (4.22) se pueden transformar de tal modo que sean factores en las ecuaciones diferenciales de movimiento los períodos de revolución del elipsoide alrededor de la partícula S es (T) y de la partícula L alrededor del elipsoide (T_L). Para obtener estas nuevas ecuaciones se consideran las relaciones (obtenidas de la fisica elemental):

$$\frac{G M}{r_G^3} = \frac{4\pi}{T^2} \quad (4.24)$$

$$\frac{GM}{|r_L - r_G|^3} = \frac{4\pi}{T_L^2} \quad (4.25)$$

obteniendo entonces:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\phi}^2 \text{sen}2\theta(I - I_3)}{2I} - \frac{I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \text{sen}\theta}{I} + \frac{6\pi^2(I - I_3) \text{sen}(2\theta) \text{sen}^2(\phi - \phi_G)}{IT^2} - \frac{6\pi^2(I - I_3) \text{sen}(2\theta) \text{sen}^2(\alpha - \phi)}{IT_L^2} \quad (4.26)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{(I \text{sen}^2 \theta + I_3 \text{cos}^2 \theta)} \left\{ -\dot{\phi} \dot{\theta} \text{sen} 2\theta(I - I_3) - I_3 \ddot{\psi} \text{cos} \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \text{sen} \theta \right. \\ \left. + \frac{12\pi^2(I - I_3) \text{sen}^2 \theta \text{sen}(\phi - \phi_G) \text{cos}(\phi - \phi_G)}{T^2} \right. \\ \left. - \frac{12\pi^2(I - I_3) \text{sen}^2 \theta \text{sen}(\alpha - \phi) \text{cos}(\alpha - \phi)}{T_L^2} \right\} \quad (4.27)$$

Con las siguientes definiciones:

$$X_1 \equiv \theta \quad (4.28)$$

$$X_2 \equiv \phi \quad (4.29)$$

$$X_3 \equiv \psi \quad (4.30)$$

$$X_4 \equiv \dot{\theta} \quad (4.31)$$

$$X_5 \equiv \dot{\phi} \quad (4.32)$$

$$X_6 \equiv \dot{\psi} \quad (4.33)$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (4.23), (4.26) y (4.27) de segundo orden se transforman a las ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{X}_1 = X_4 \quad (4.34)$$

$$\dot{X}_2 = X_5 \quad (4.35)$$

$$\dot{X}_3 = X_6 \quad (4.36)$$

$$\dot{X}_4 = \frac{X_5^2(I - I_3) \text{sen}2X_1}{2I} - \frac{I_3 X_5 X_6 \text{sen}X_1}{I} + \frac{6\pi^2(I - I_3) \text{sen}2X_1 \text{sen}^2(X_2 - \phi_G)}{IT^2} - \frac{6\pi^2(I - I_3) \text{sen}2X_1 \text{sen}^2(\alpha - X_2)}{IT_L^2} \quad (4.37)$$

$$\dot{X}_5 = \frac{1}{(I \text{sen}^2 X_1 + I_3 \text{cos}^2 X_1)} \left\{ -X_5 X_4 \text{sen} 2X_1(I - I_3) - I_3 \dot{X}_6 \text{cos} X_1 + I_3 X_6 X_4 \text{sen} X_1 \right. \\ \left. + \frac{12\pi^2(I - I_3) \text{sen}^2 X_1 \text{sen}(X_2 - \phi_G) \text{cos}(X_2 - \phi_G)}{T^2} \right. \\ \left. - \frac{12\pi^2(I - I_3) \text{sen}^2 X_1 \text{sen}(\alpha - X_2) \text{cos}(\alpha - X_2)}{T_L^2} \right\} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
\dot{X}_6 = & \frac{X_5 X_4 (I \operatorname{sen}^2 X_1 + I_3 \cos^2 X_1)}{I \operatorname{sen} X_1} - \frac{\cos X_1}{I \operatorname{sen}^2 X_1} \{ -X_5 X_4 \operatorname{sen} 2X_1 (I - I_3) + I_3 X_6 X_4 \operatorname{sen} X_1 \\
& + \frac{12\pi^2 (I - I_3) \operatorname{sen}^2 X_1 \operatorname{sen}(X_2 - \phi_G) \cos(X_2 - \phi_G)}{T^2} \\
& - \frac{12\pi^2 (I - I_3) \operatorname{sen}^2 X_1 \operatorname{sen}(\alpha - X_2) \cos(\alpha - X_2)}{T_L^2} \} \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se resuelven numéricamente con el método de Runge Kutta de orden 4 con paso $h = 10^{-5}$.

Los valores de "a" , "c" (que determinan los momentos de inercia de I e I_3) y las ecuaciones diferenciales anteriores serán resueltas teniendo en cuenta las siguientes condiciones iniciales :

$$X_{01} = 23\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{rad} = 23^\circ \quad (4.40)$$

$$X_{02} = 0 \quad (4.41)$$

$$X_{03} = 0 \quad (4.42)$$

$$X_{04} = -0.01 \text{ rad/año} \quad (4.43)$$

$$X_{05} = -0.001 \text{ rad/año} \quad (4.44)$$

$$X_{06} = 2261.9 \text{ rad/año} = 360^\circ/\text{año} \quad (4.45)$$

$$T_L = 28 \text{ días} \quad (4.46)$$

$$T = 1 \text{ año} \quad (4.47)$$

Luego se va ha tener en cuenta diferentes valores para "c" pero considerando las mismas condiciones iniciales .

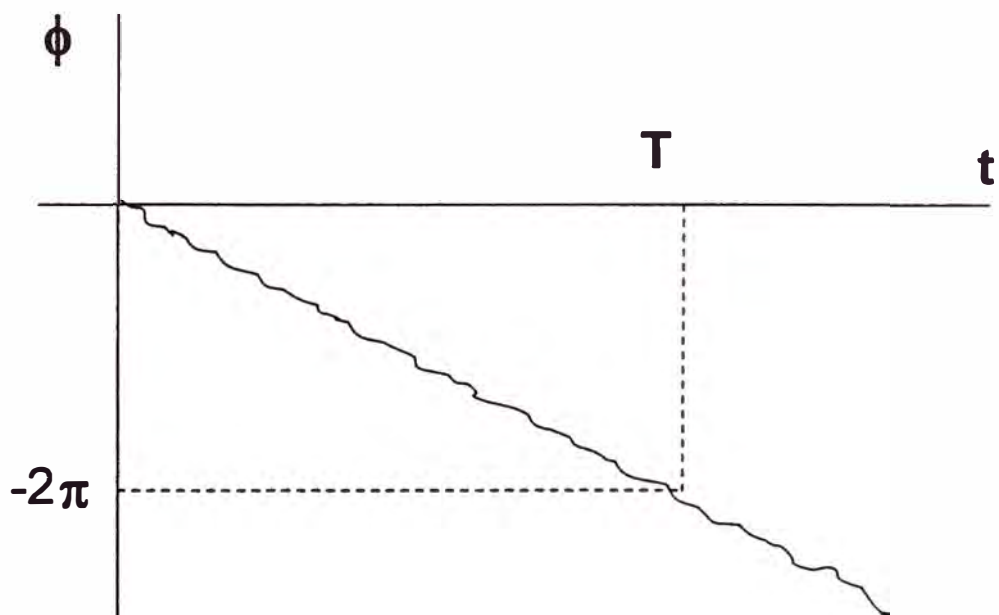


Fig. 4.6

Al resolver las ecuaciones diferenciales anteriormente mostradas se han obtenido los gráficos para las funciones : $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$ asi como los gráficos de la proyección de un punto "p" ubicado en el eje X_3 sobre el plano X_0Y_0 , la proyección del vector velocidad angular \vec{W} sobre el plano X_0Y_0 (W_y versus W_x) y la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 (W_2 versus W_1).

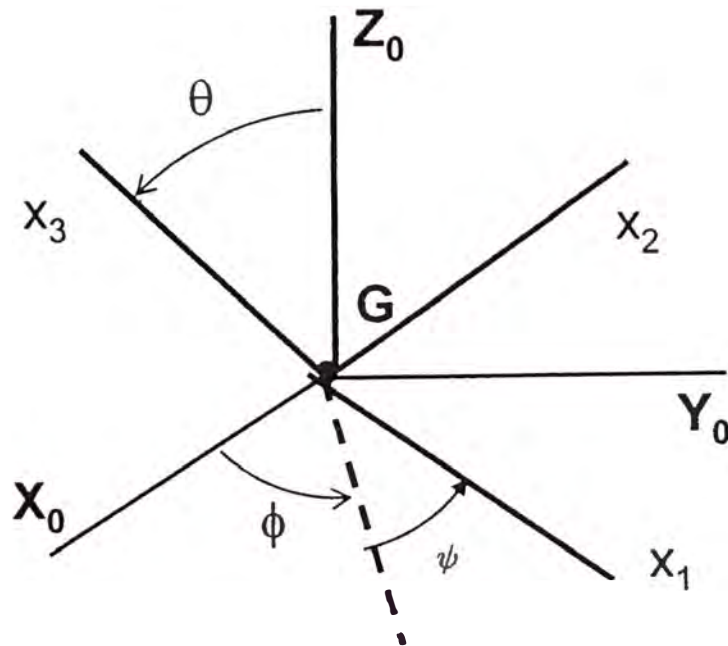


Fig. 4.7

Como es evidente de la gráfica de la función $\phi(t)$ se deduce el movimiento de precesión de los equinoccios para la tierra y el criterio del cálculo del período T_P es igual al usado en el capítulo III (pag 97) De la grafica de la función $\phi(t)$ que en todos los casos se tiene una curva (casi una recta) de la forma que se muestra en la figura (4.6). De estas graficas $\phi(t)$, se extrapola el valor de $\phi = 2\pi$ calculandose asi aproximadamente el período de precesión de los equinoccios de donde deducimos que el eje X_3 rota alrededor de un eje paralelo al eje Z_0 ver figura (4.7) es decir el eje X_3 reliza un movimiento de precesión llamado también precesión de los equinoccios . Llamaremos T_P al tiempo que tarda en dar una vuelta el eje X_3 alrededor del eje Z_0 .

4.3 Resultados Numéricos

Las gráficas más importantes que se muestran se presentan agrupadas de acuerdo al valor del radio polar "c" y al intervalo de tiempo (medido en días).

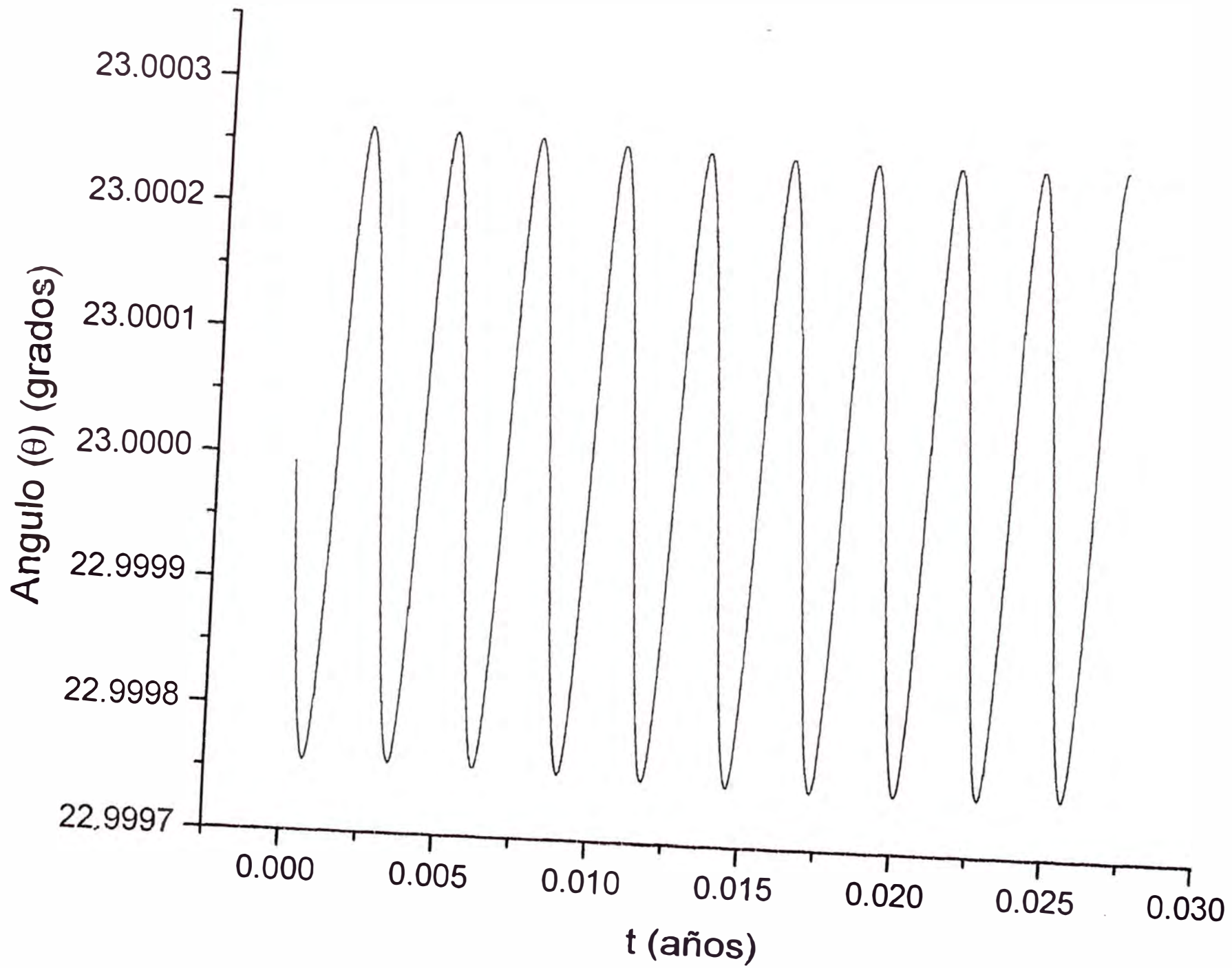
I. PRIMER CASO . Considerando el radio polar $C = 6355.55$ Km , se muestran las tablas con sus respectivos graficos para diversos intervalos de días donde se mencionan la página en donde están las graficas respectivas. Luego se mencionan las más importantes observaciones de los gráficos.

Table 1: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 10$ días

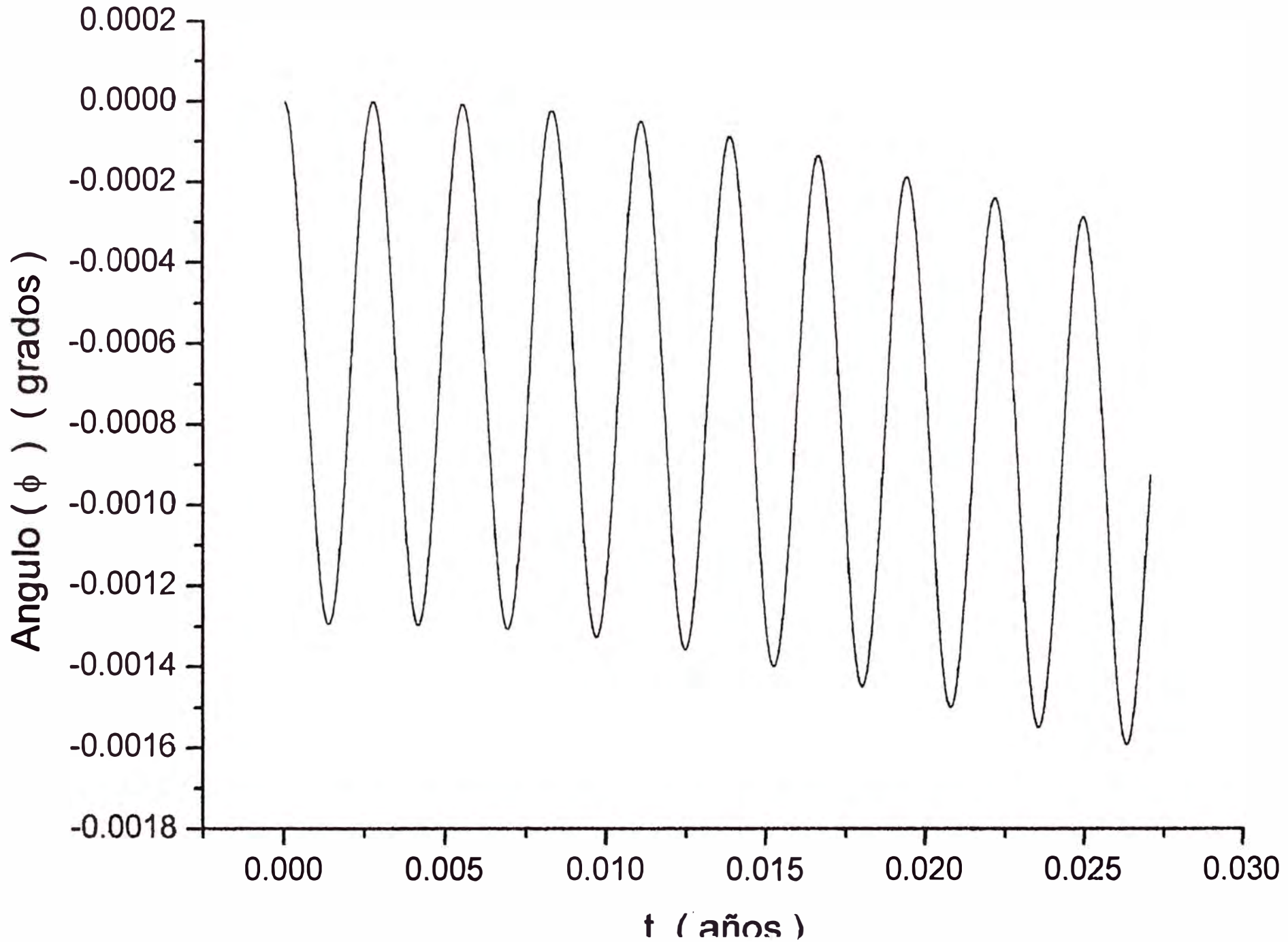
Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	180
$\phi(t)$	181
$\psi(t)$	182
$\dot{\theta}(t)$	183
$\dot{\phi}(t)$	184
$\dot{\psi}(t)$	185
W_y vs W_x	186
Y vs X	187
W_2 vs W_1	188

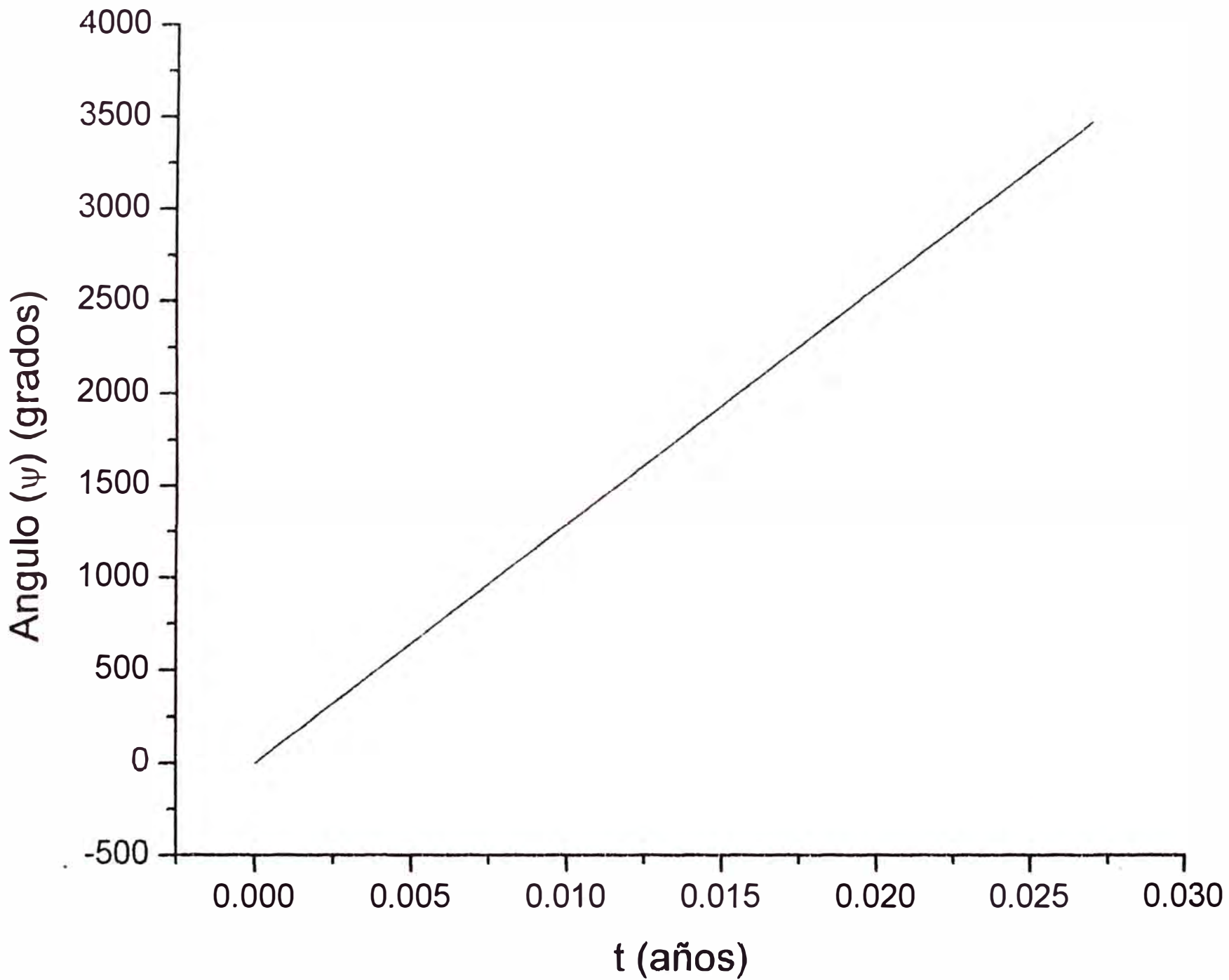
Observaciones:

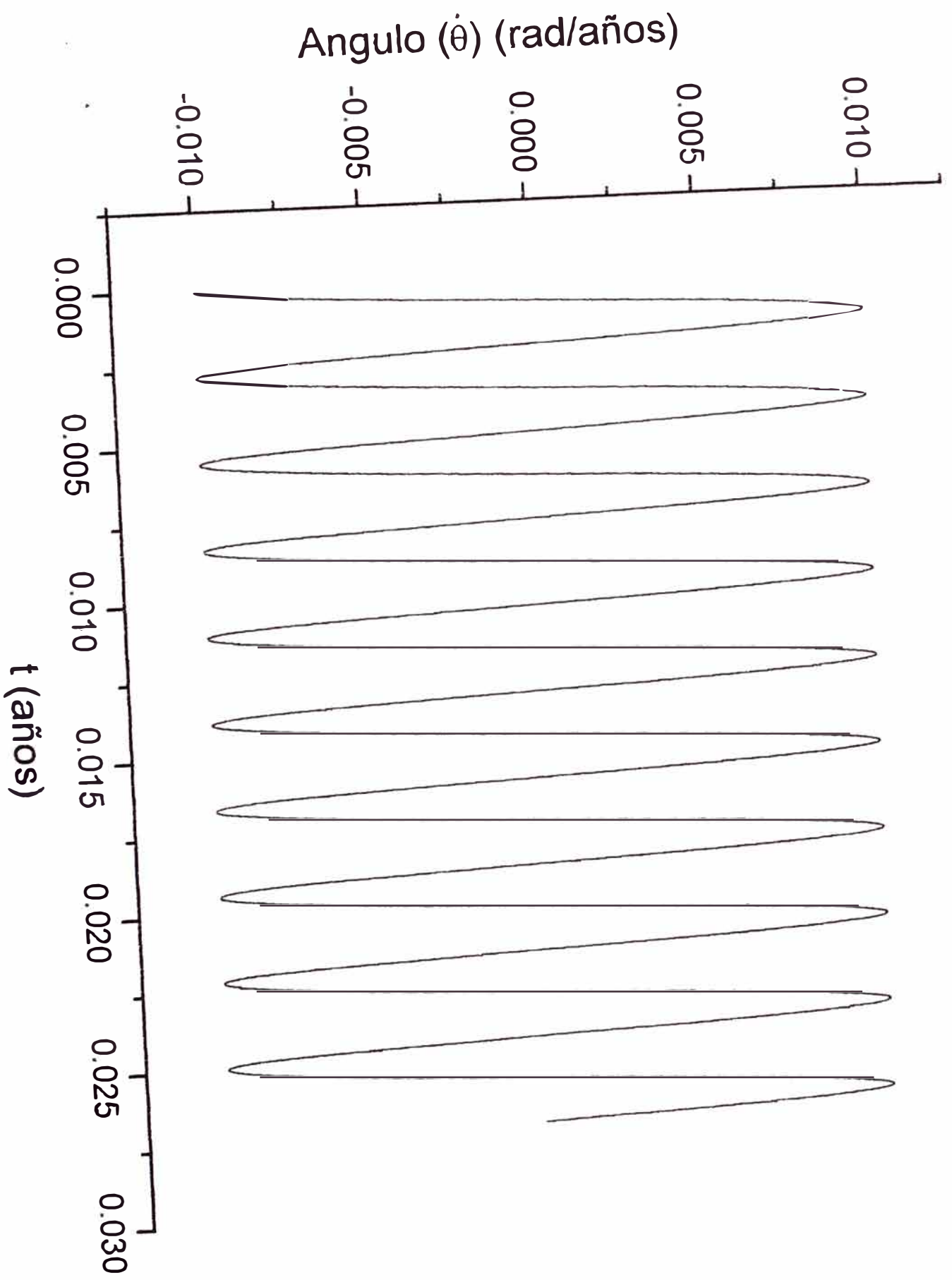
- Las gráficas de las funciones $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ parecen ser periódicas.
- La gráfica de $\phi(t)$ nos muestra que siendo una función lineal decreciente oscilante y podemos afirmar que el comportamiento del cuerpo rígido es semejante el caso aislado.
- La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es una circunferencia.
- El extremo del eje X_3 sobre el plano XY es una elipse que desplaza su centro conforme transcurre el tiempo.
- El grafico mas interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 en el cual sólo se observa una curva ondulante que ocupa cada vez más superficie , que mas adelante se mostrara que sera cerrada y permitira determinar el período de precesión de dicho vector.
- La gráfica de $\phi(t)$ nos muestra que sigue siendo una función lineal decreciente oscilante y podemos afirmar que el comportamiento del cuerpo rígido es semejante el caso aislado.

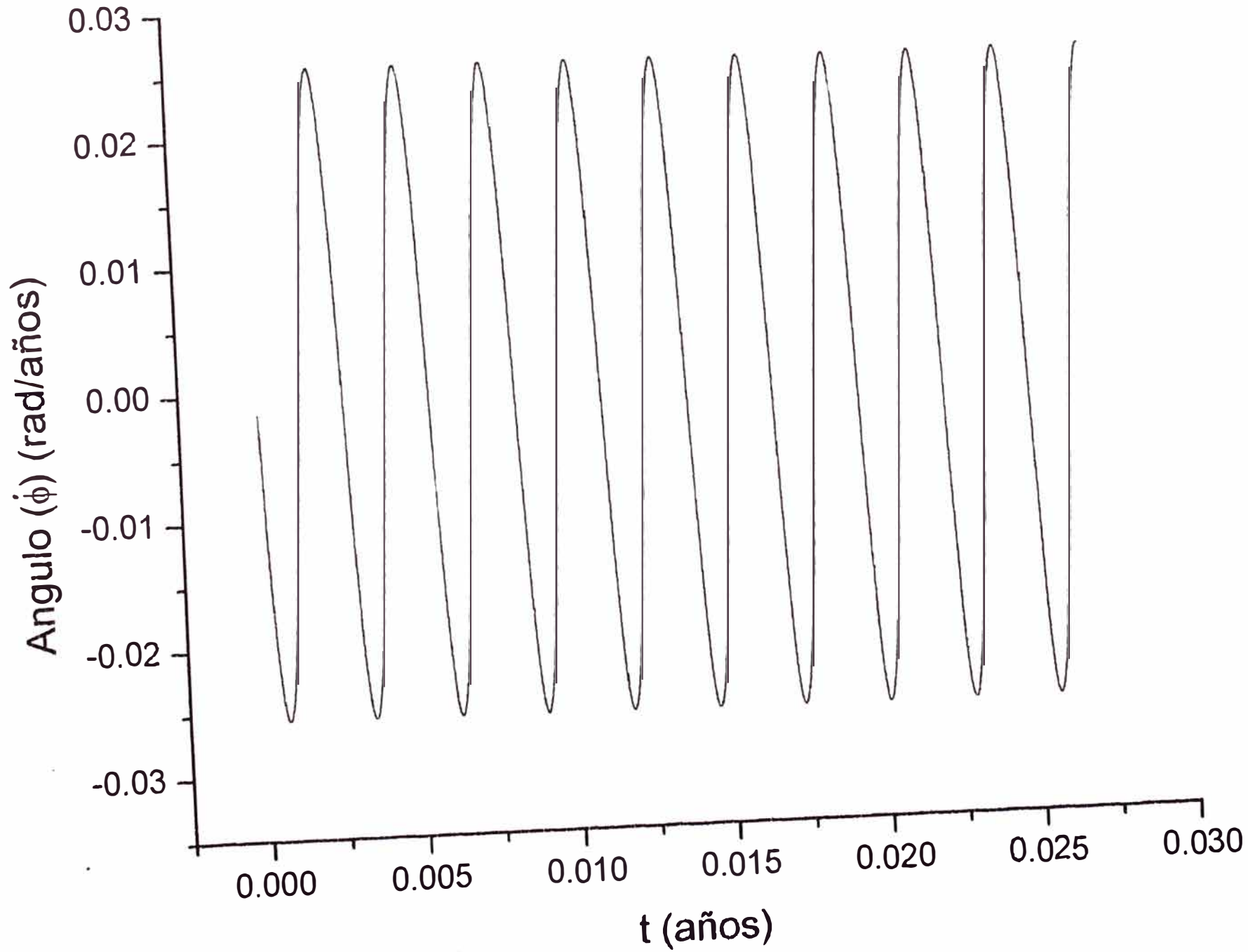


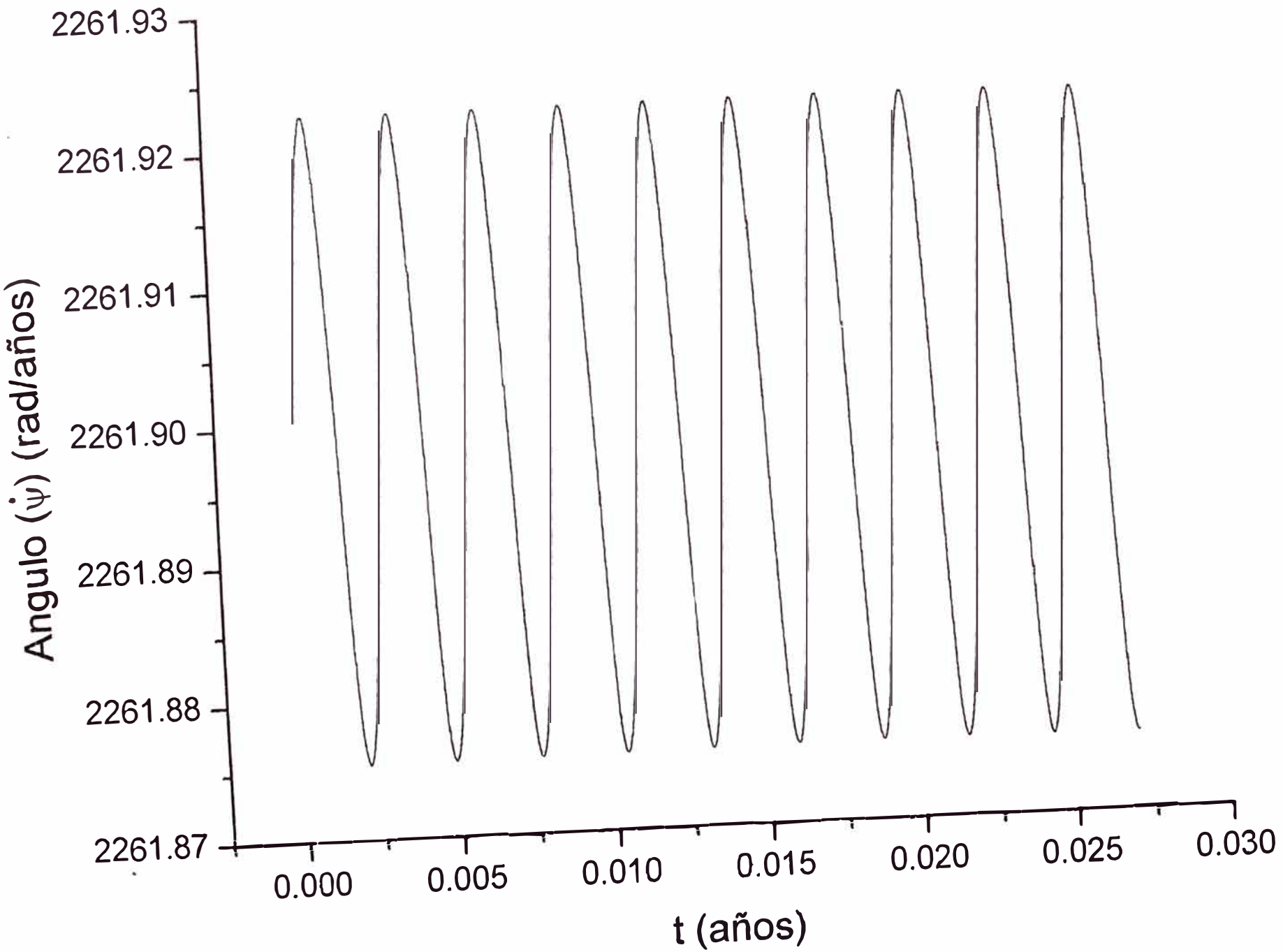
Para 10 dias con $c = 6355.55$ Km



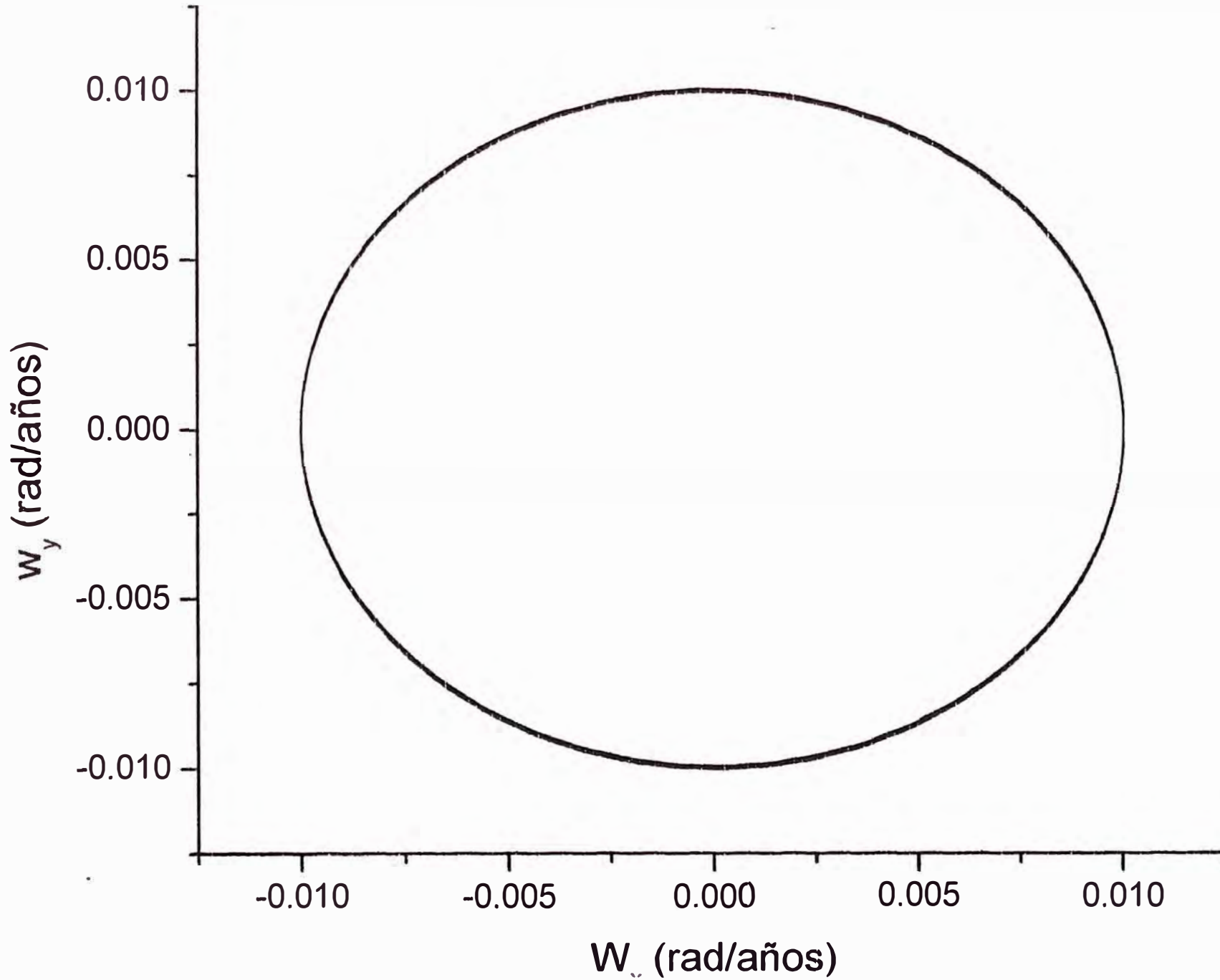




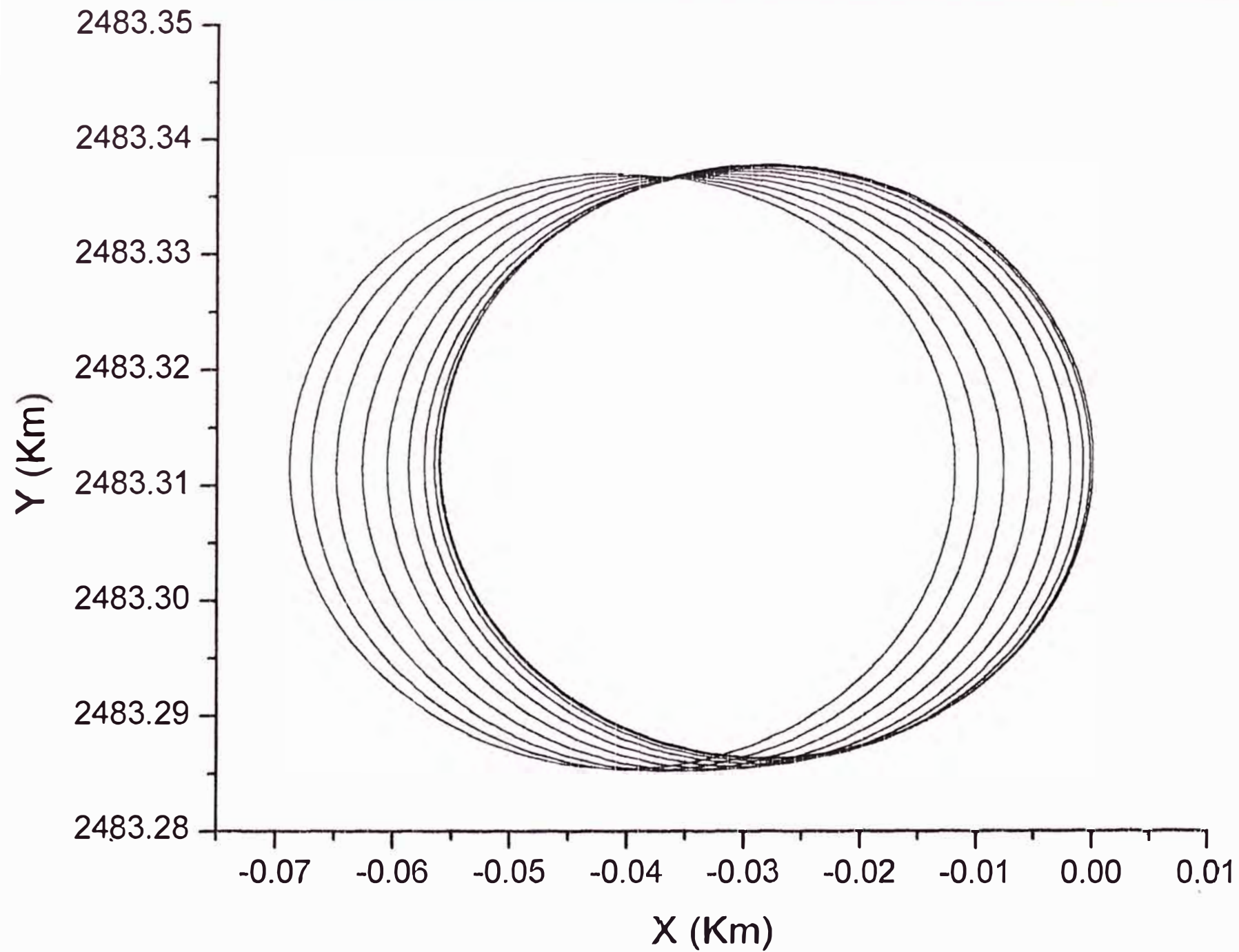




Proyección del Vector Velocidad Angular sobre el plano XY



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY



Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 10 días con $c = 6355.55$ Km

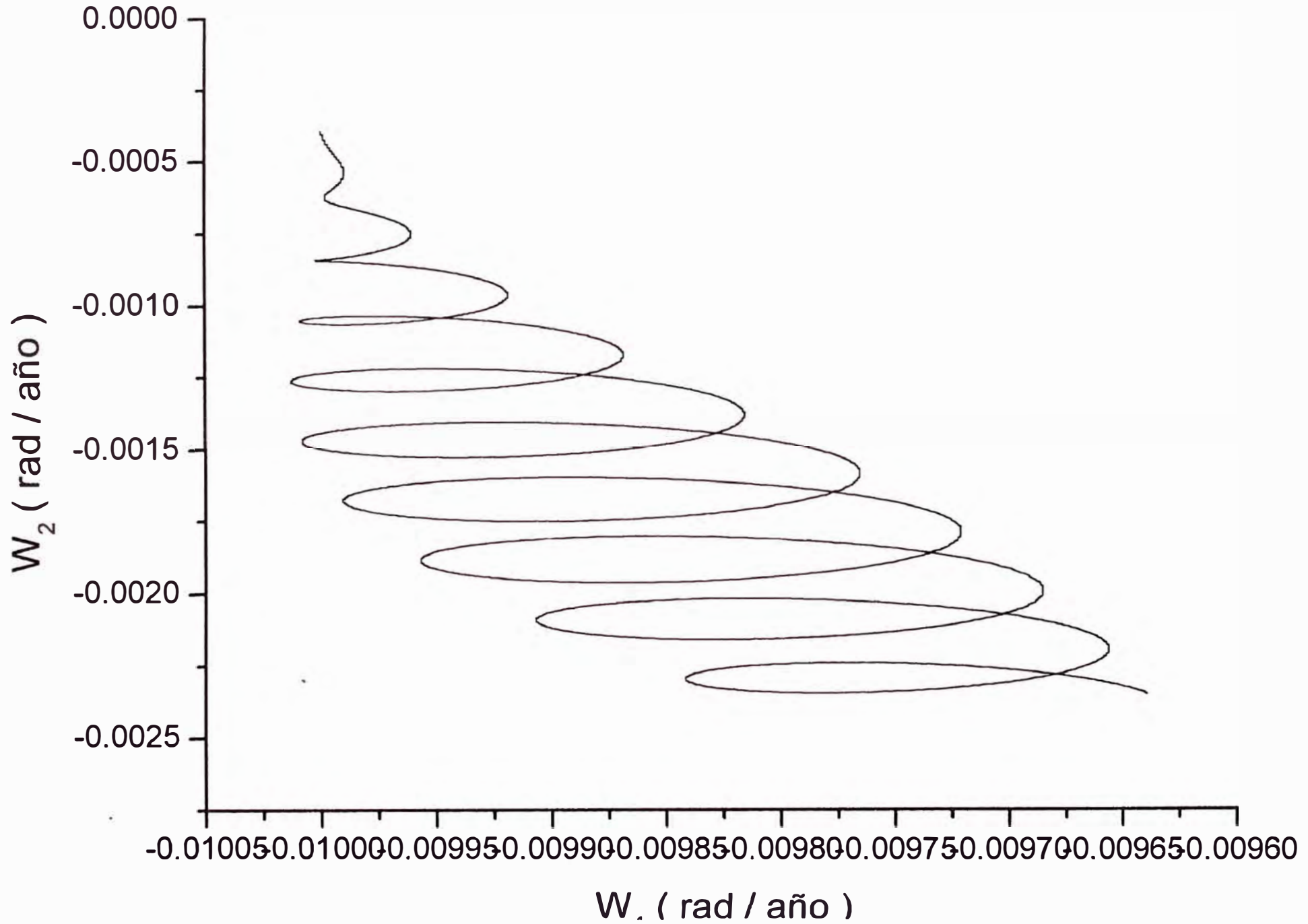
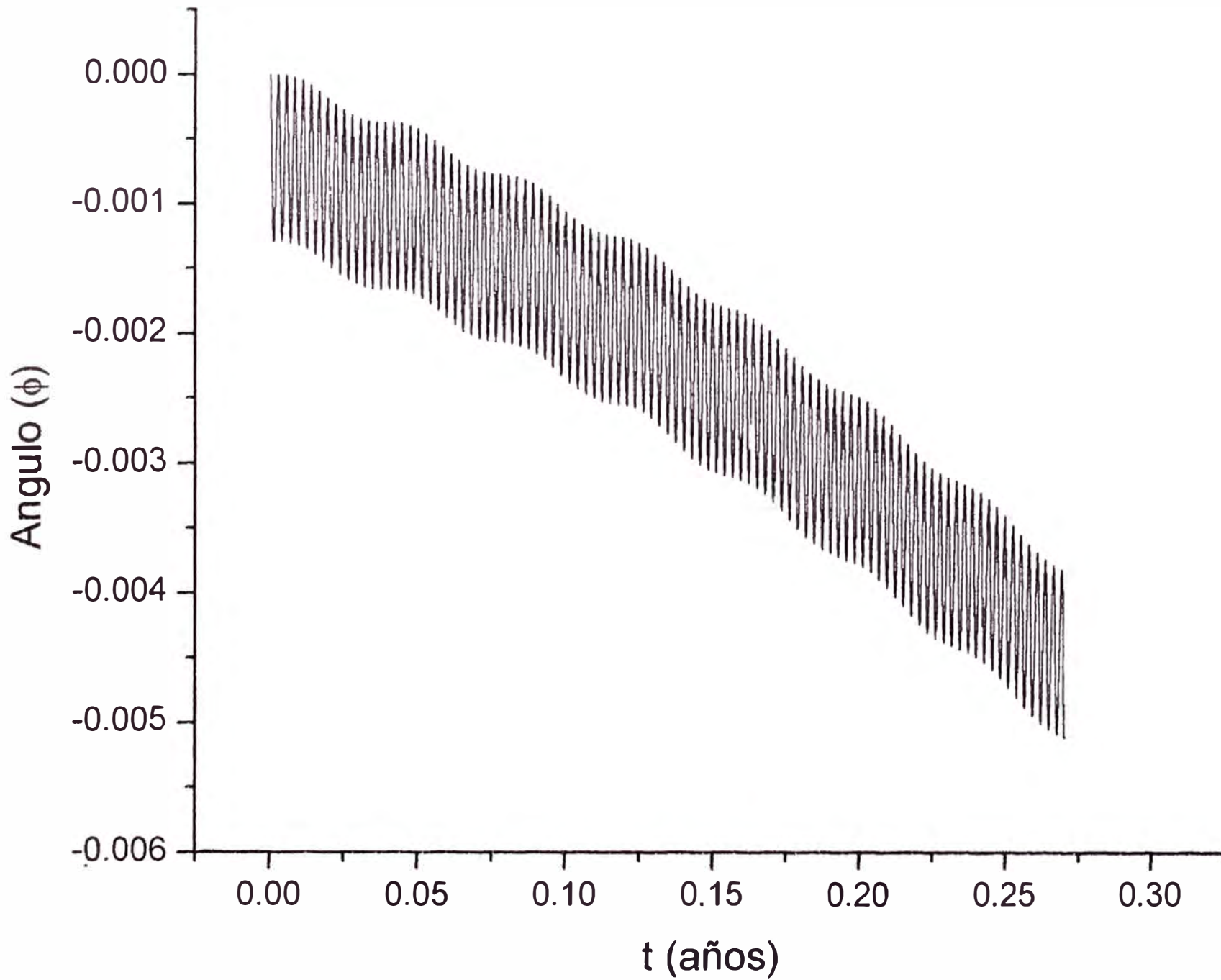


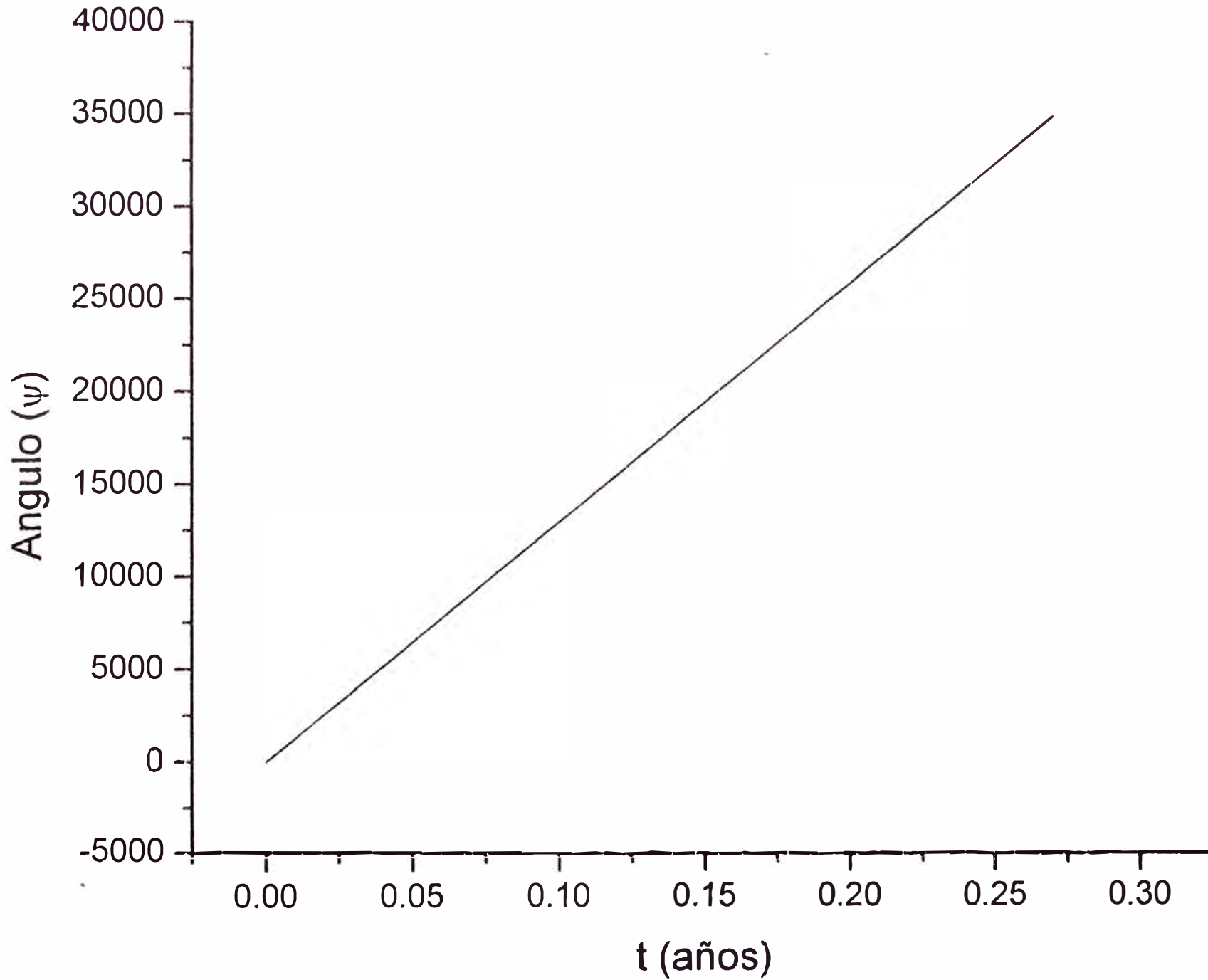
Table 2: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 100$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	190
$\psi(t)$	191
W_y vs W_x	192
Y vs X	193
W_2 vs W_1	194

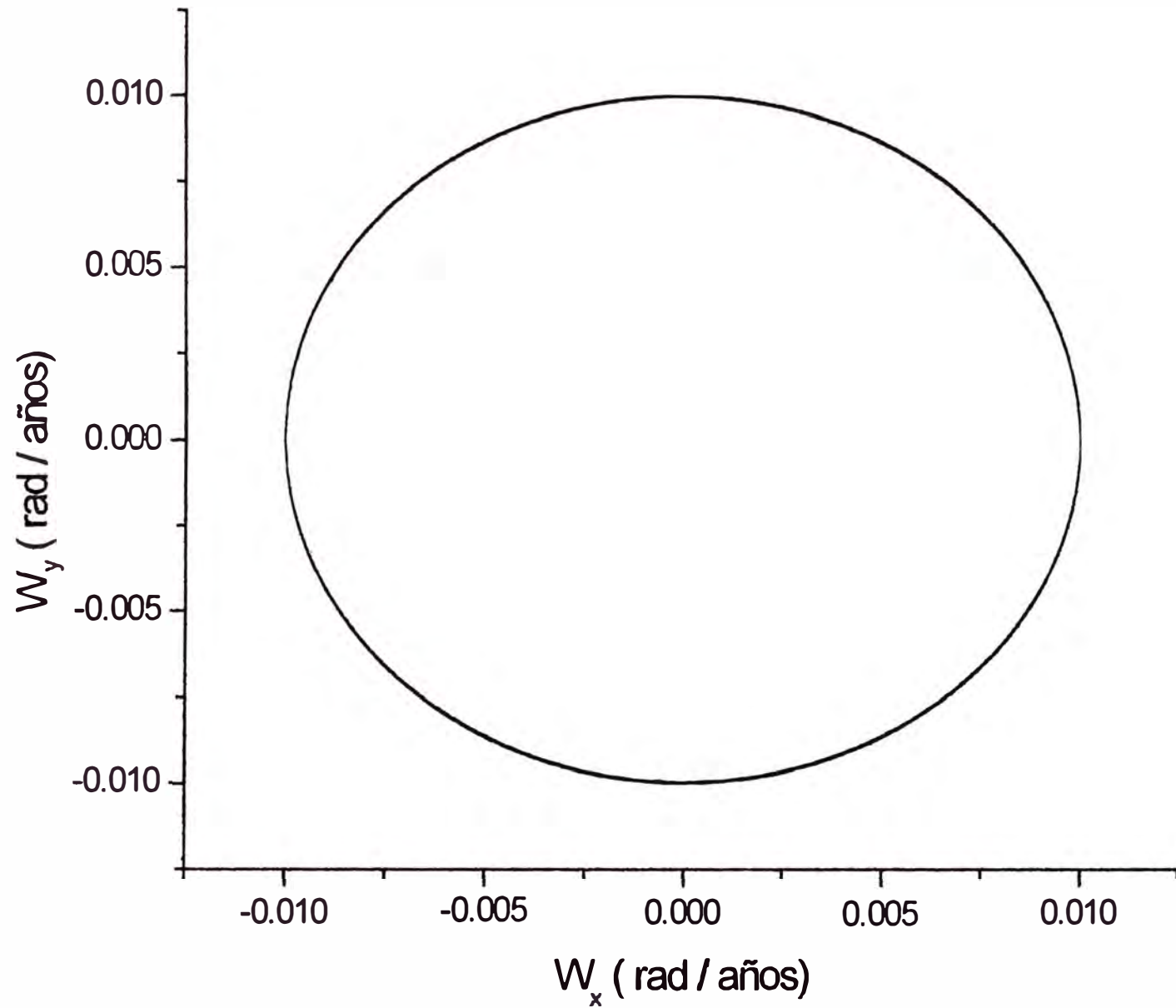
Observaciones:

- a) La grafica de $\phi(t)$ nos muestra que sigue siendo una función lineal decreciente.
- b) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY no sufre cambios sustanciales sigue siendo una circunferencia que lentamente desplaza su centro.
- c) Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY es una elipse que se desplaza y es más evidente para el caso de 10 días.
- d) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 en el cual sólo se observa que es arco de circunferencia perturbada con unos rizos.

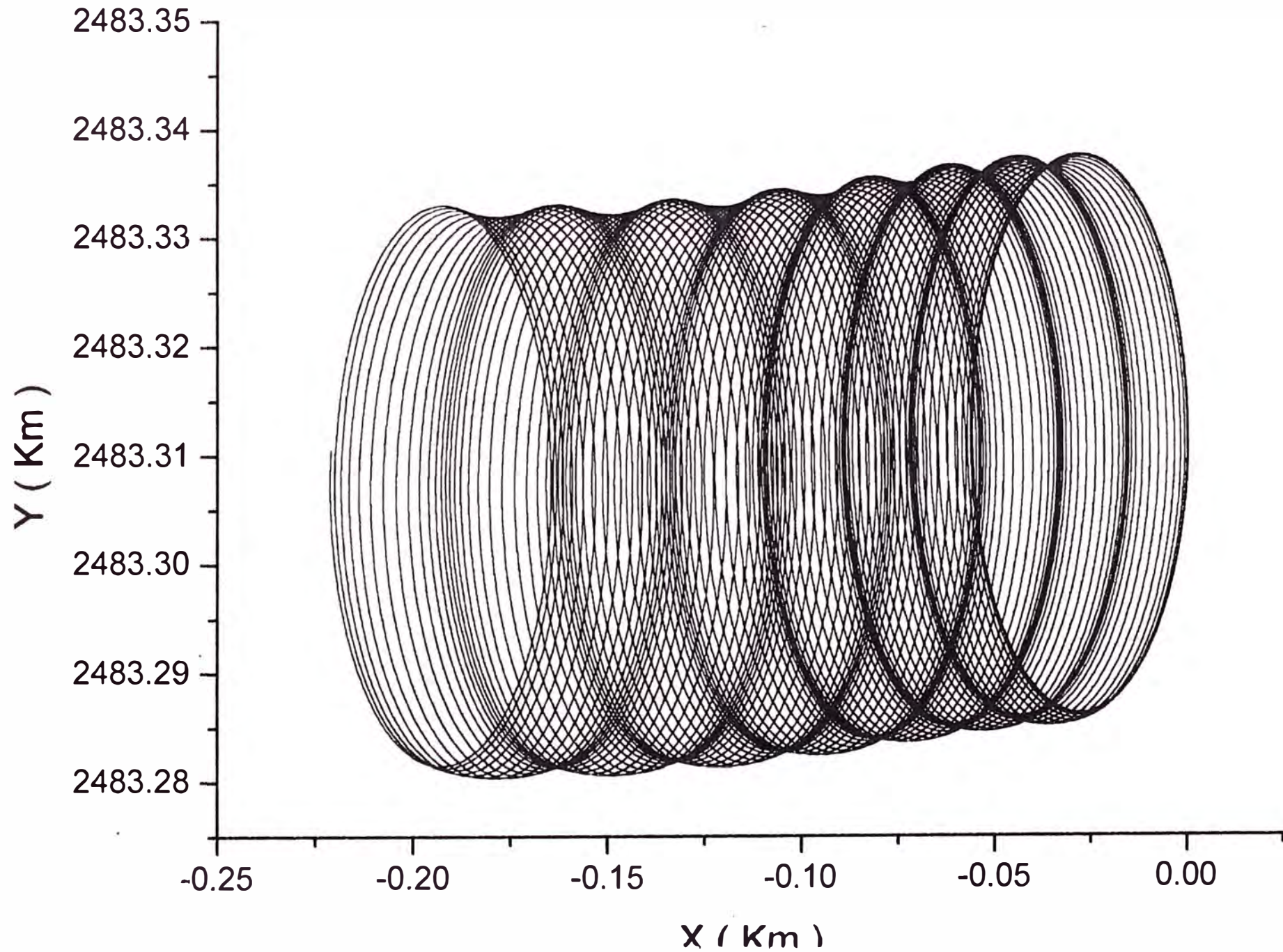




Proyección del Vector W sobre el plano XY para 100 días con $c= 6355.55$ Km



Proyección del extremo del eje X_3 sobre el plano XY para 100 días con $c = 6355.55$ Km



Proyección del vector W sobre el plano X_1X_2 para 100 días con $c = 6355.55$ Km

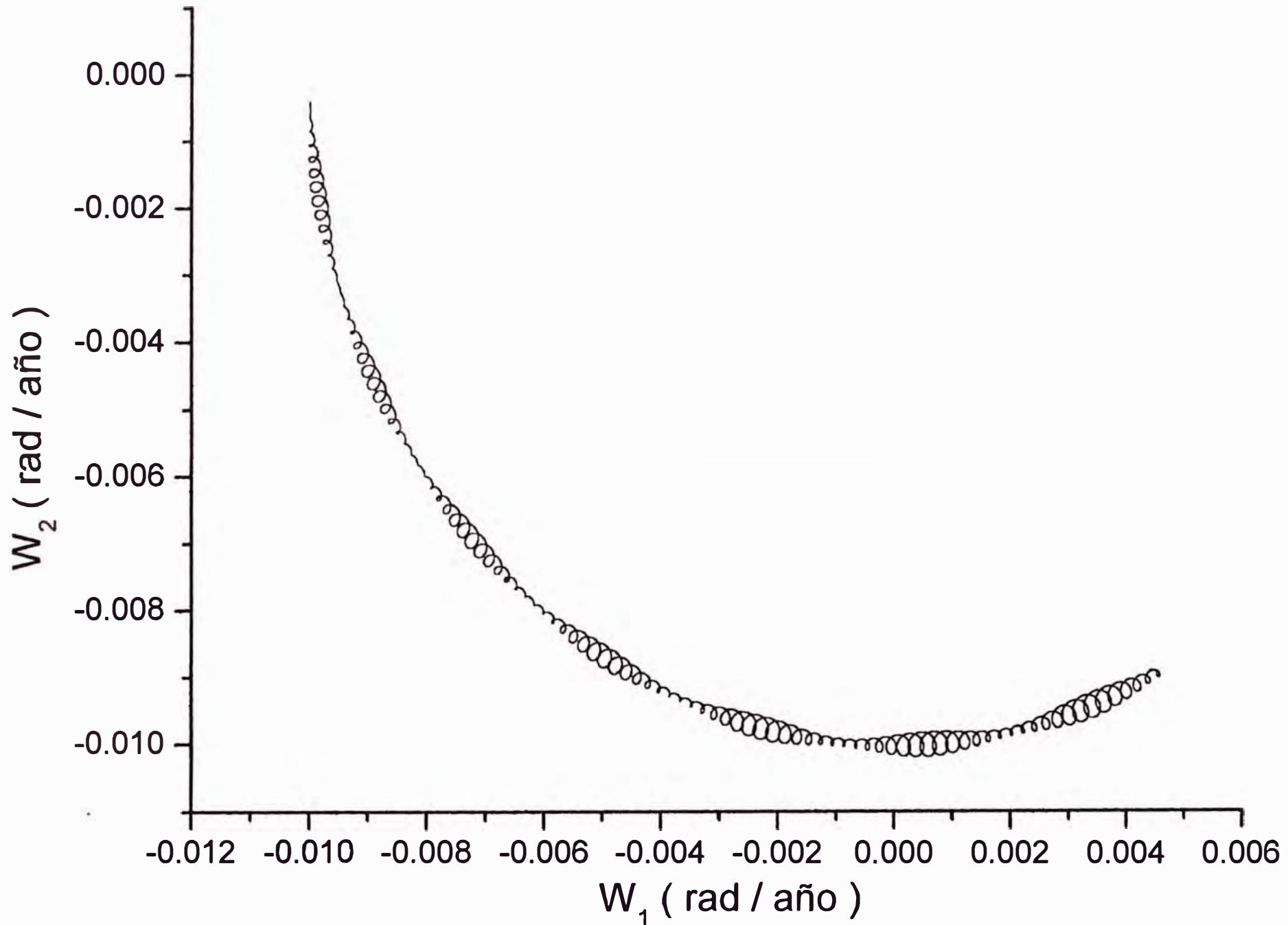


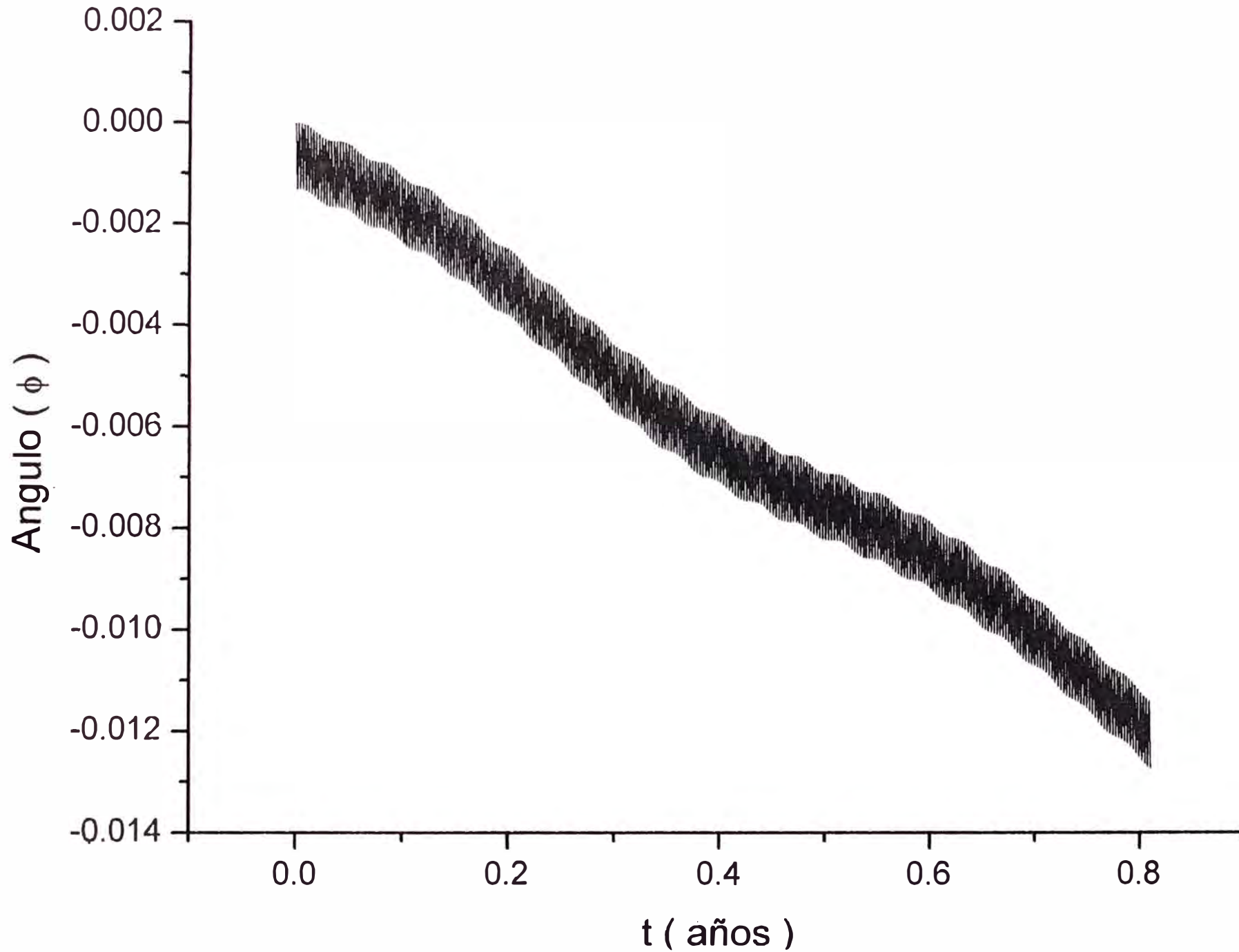
Table 3: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 300$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	196 y 197
W_y vs W_x	198
Y vs X	199 y 200
W_2 vs W_1	201

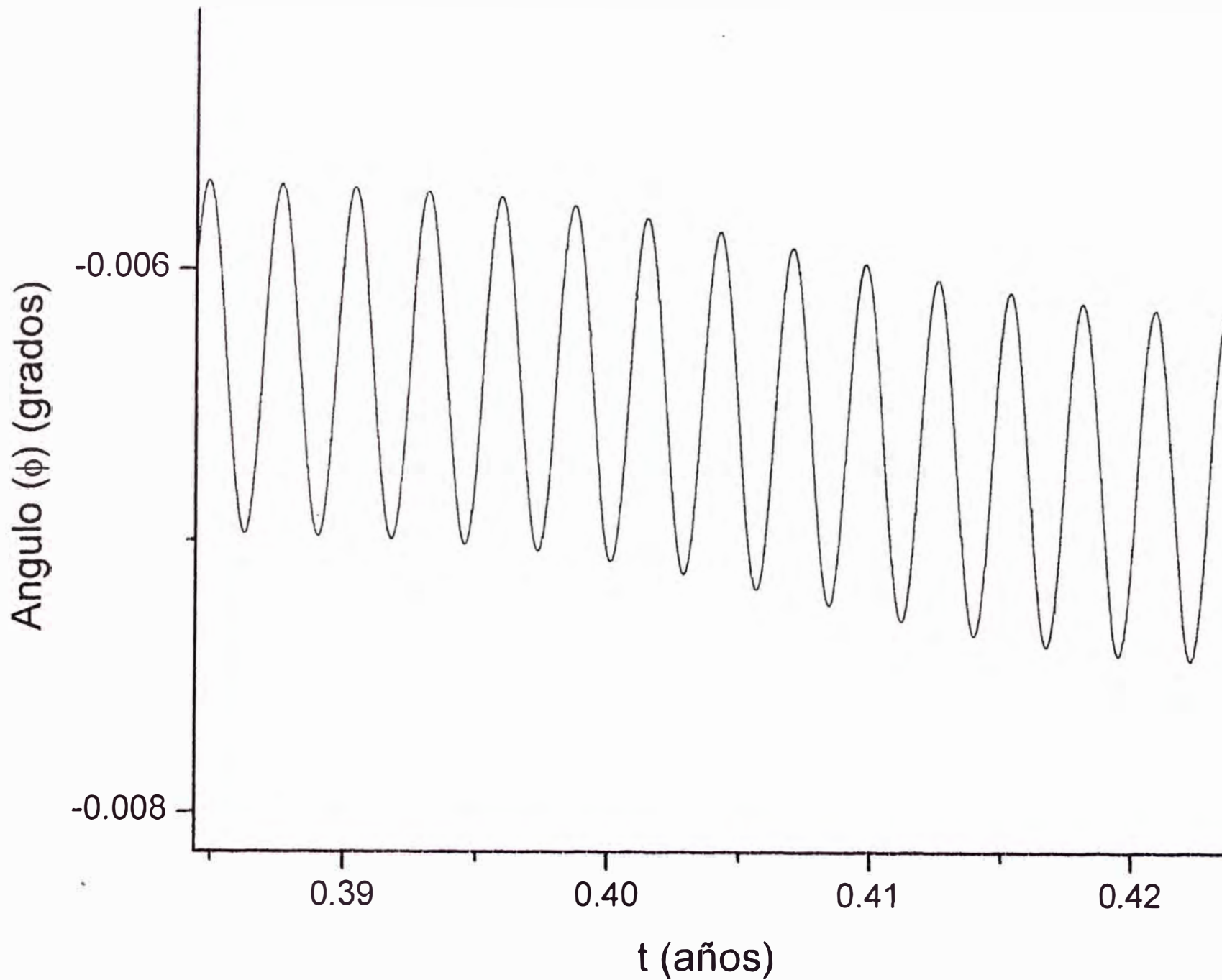
Observaciones:

- a) La gráfica de $\phi(t)$ nos muestra que sigue siendo una función lineal decreciente y oscilante.
- b) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY es casi una circunferencia.
- c) Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY es una elipse cuyo centro se desplaza en una curva ondulada.
- d) El gráfico más interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano $X_1 X_2$ en el cual sólo se observa una curva que es casi una circunferencia que tiende a cerrarse con pequeños rizos.

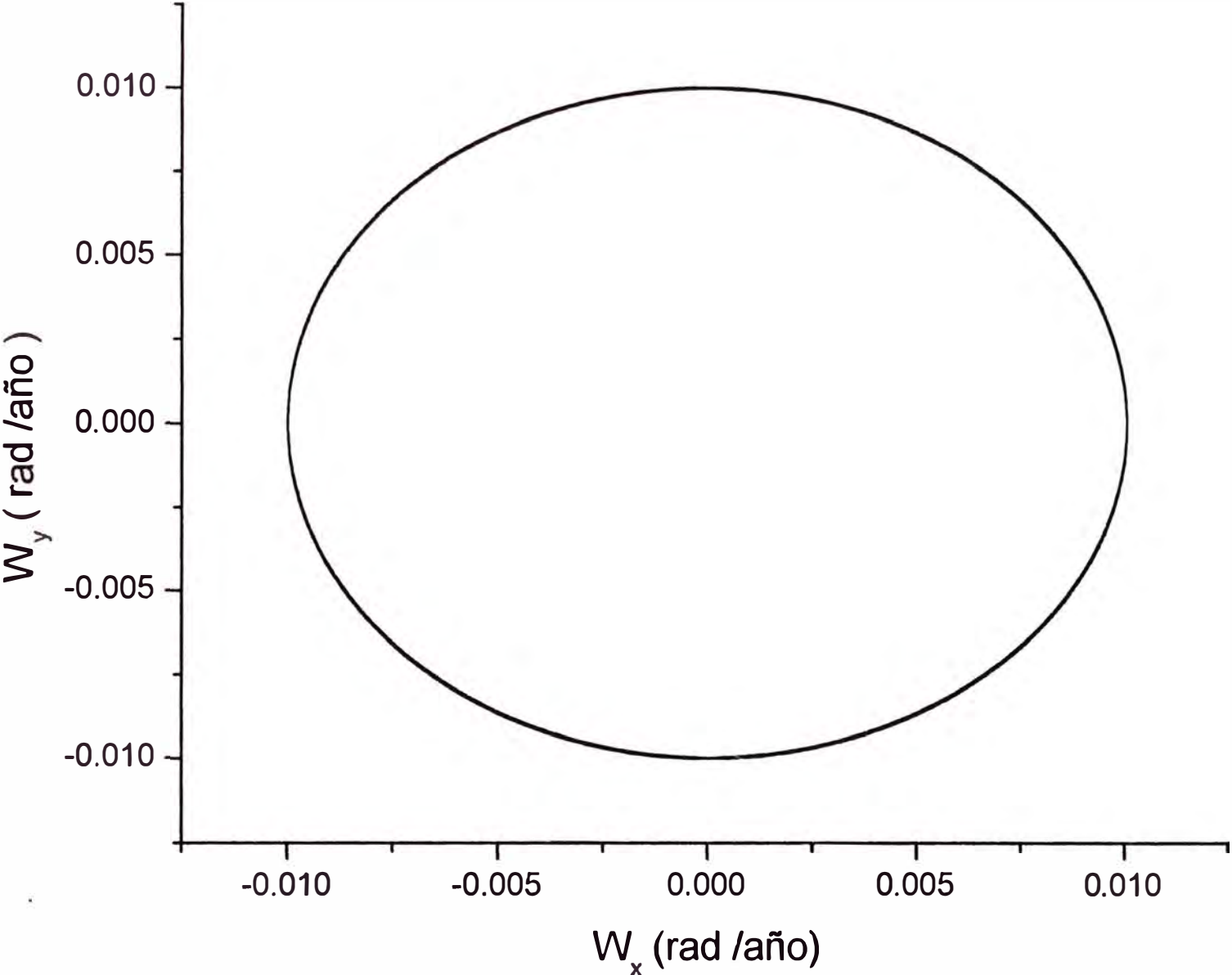
Para 300 dias con $c = 6355.55$ Km



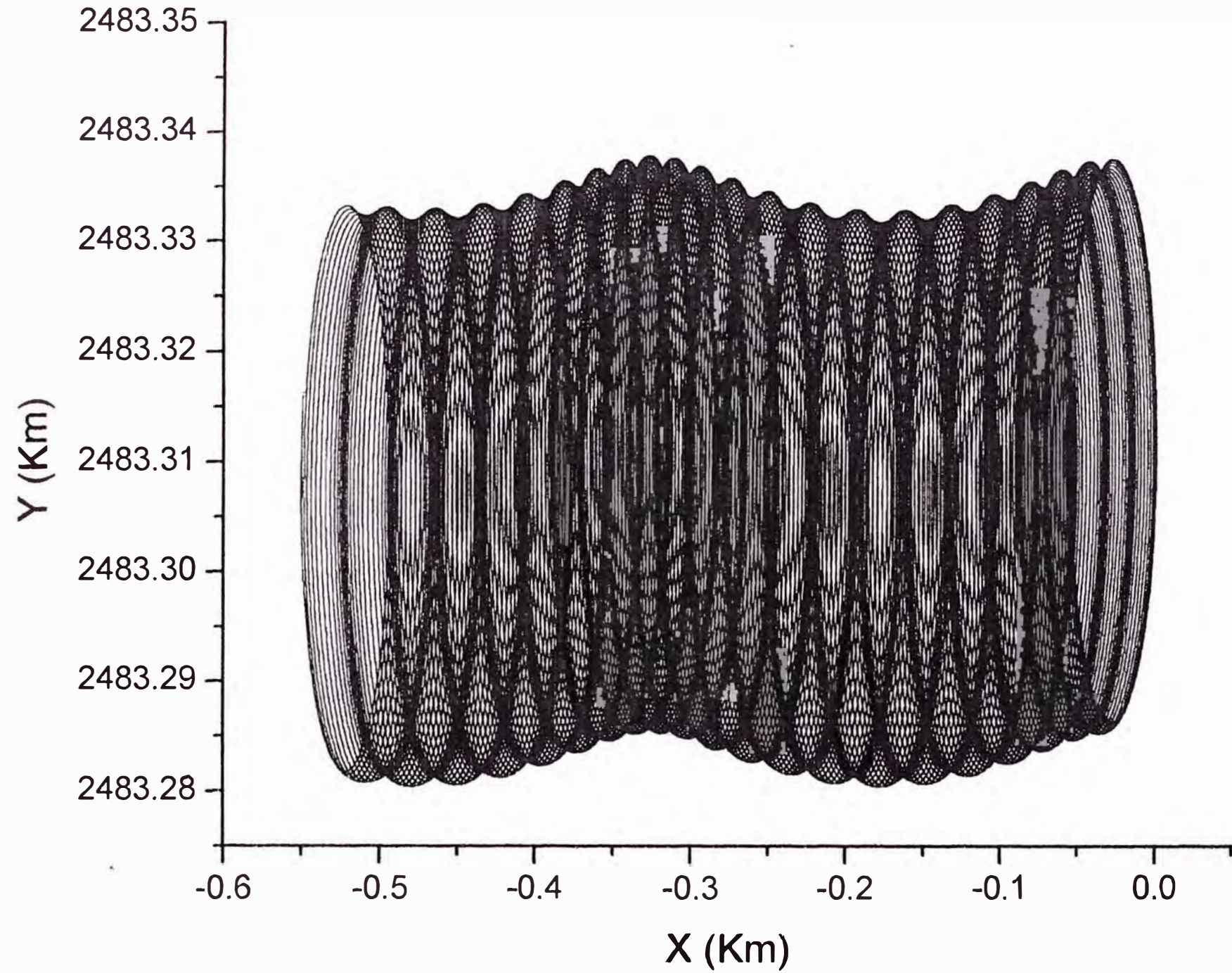
Ampliación del grafico anterior



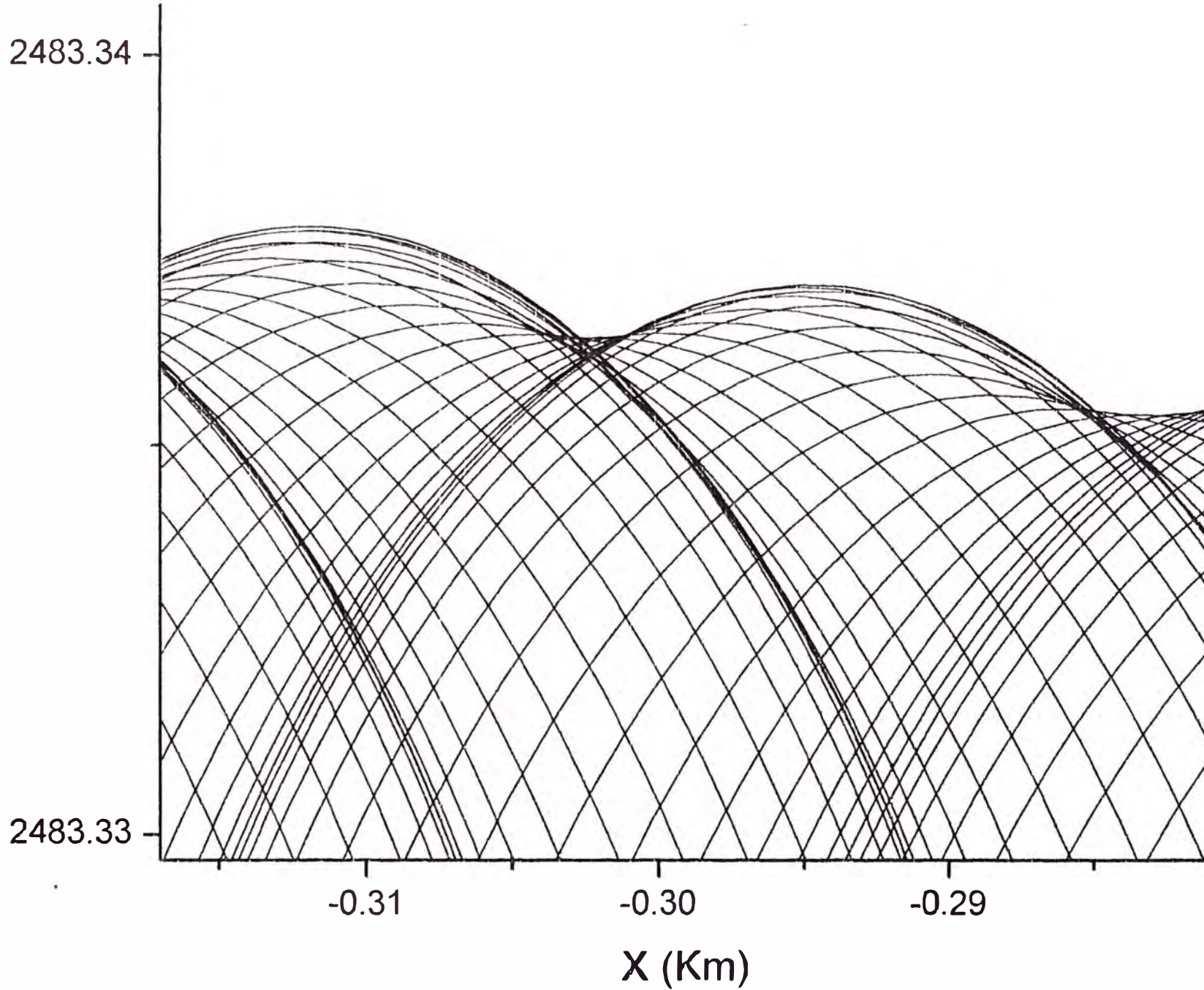
Proyección del Vector W sobre el plano XY para 300 días con $c= 6355.55$ Km



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 300 dias



Ampliacion del grafico anterior



Proyección del vector W sobre el plano X_1X_2 para 300 días con $c = 6355.55$ Km

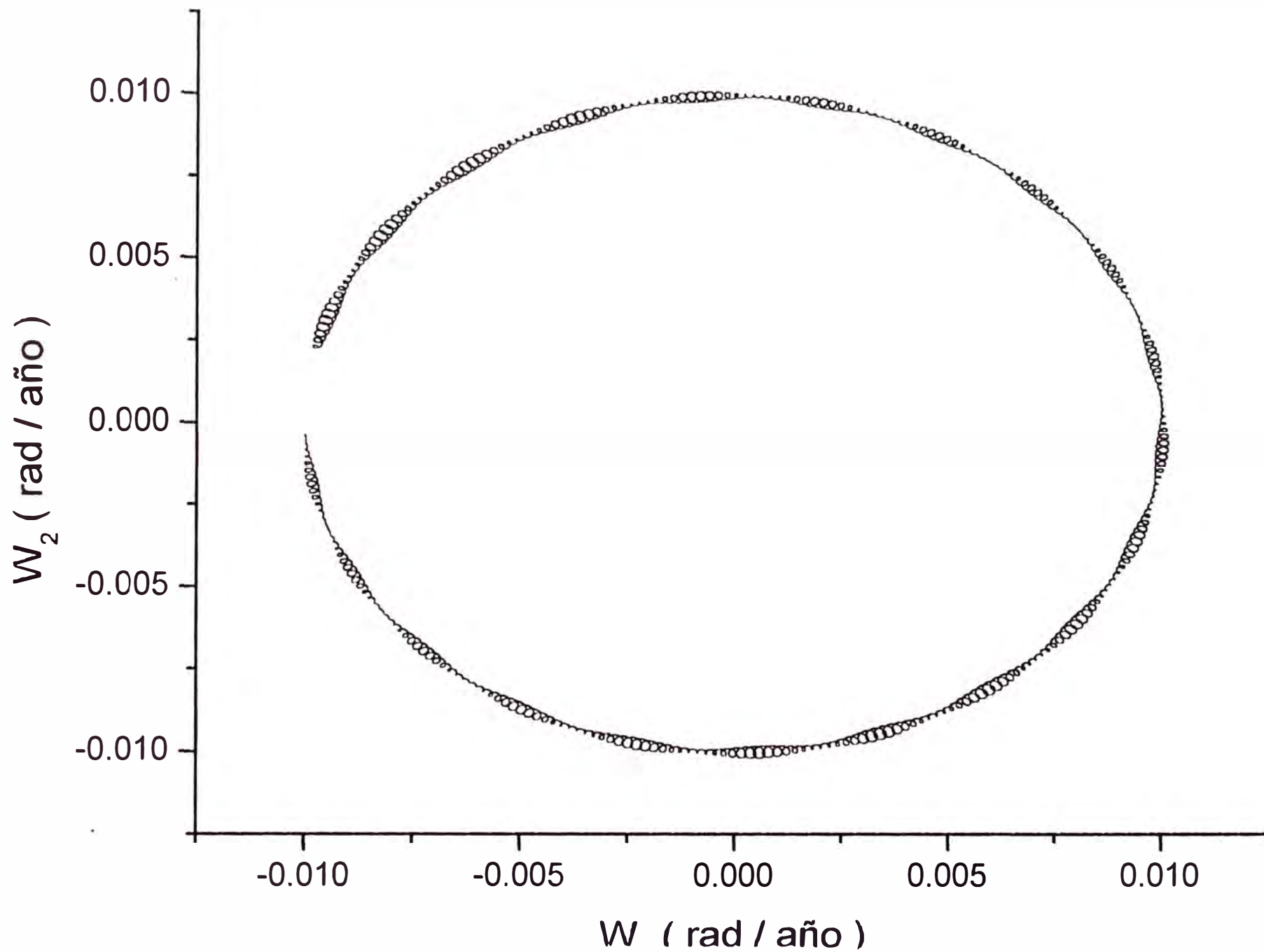


Table 4: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 500$ días

Gráfico	Pagina
W_2 vs W_1	203

Observaciones:

En la proyección del vector \vec{W} sobre el plano $X_1 X_2$ se observa una curva ya cerrada con pequeñas perturbaciones , pudiendose estimar ya el período de precesión de dicho vector

Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 500 días con $c = 6355.55$ Km

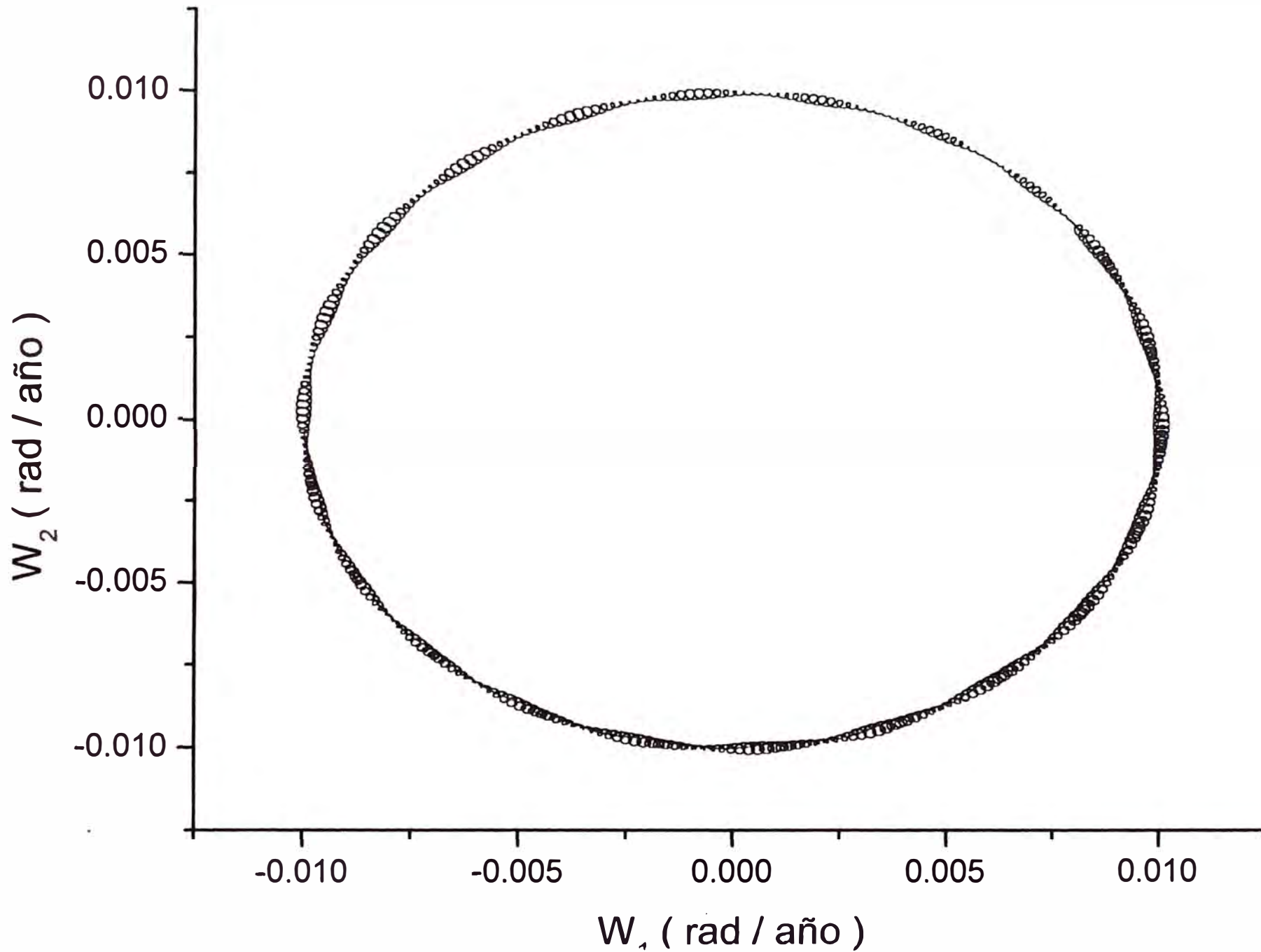


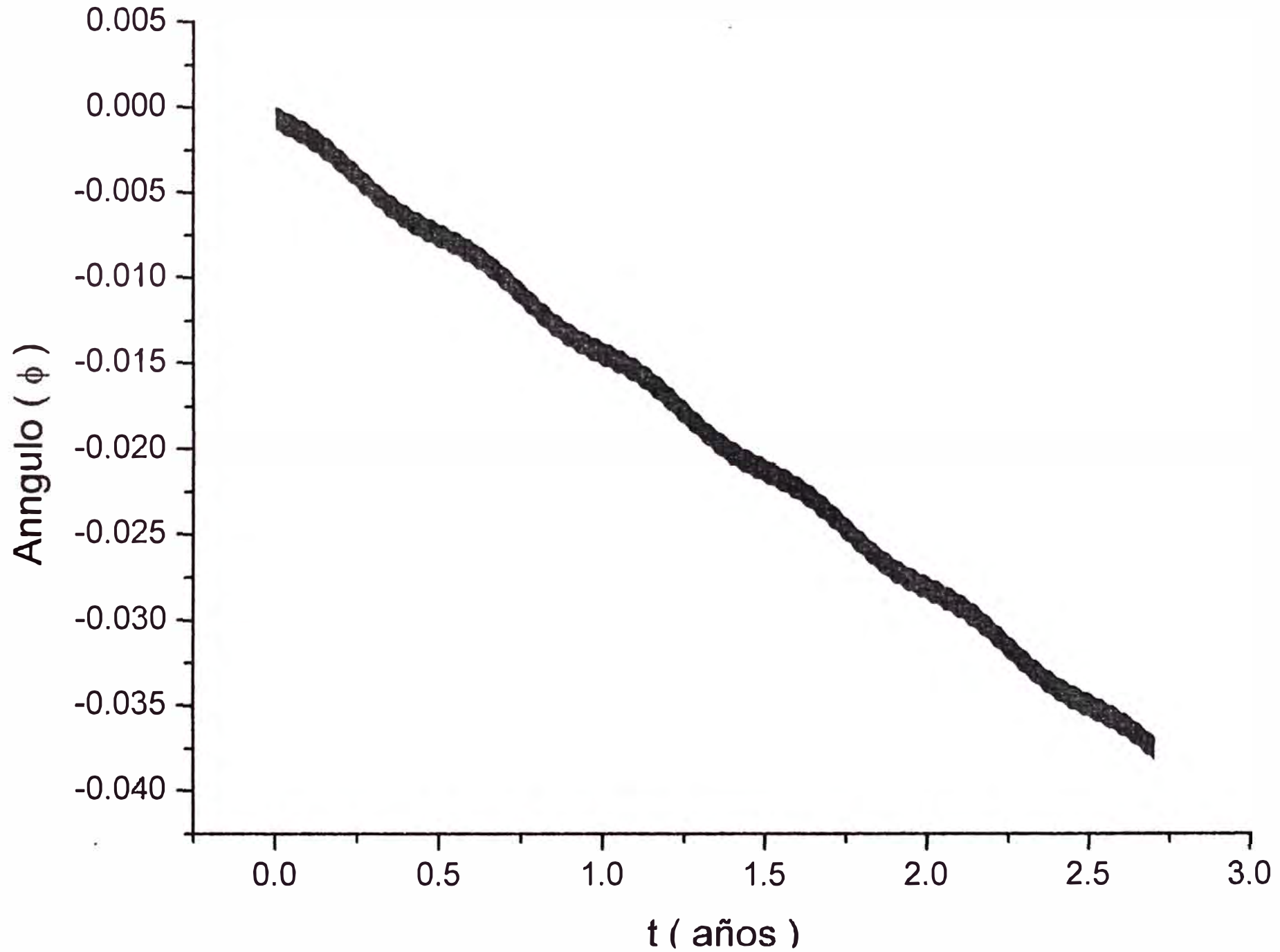
Table 5: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 1000$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	205
W_y vs W_x	207
W_2 vs W_1	208

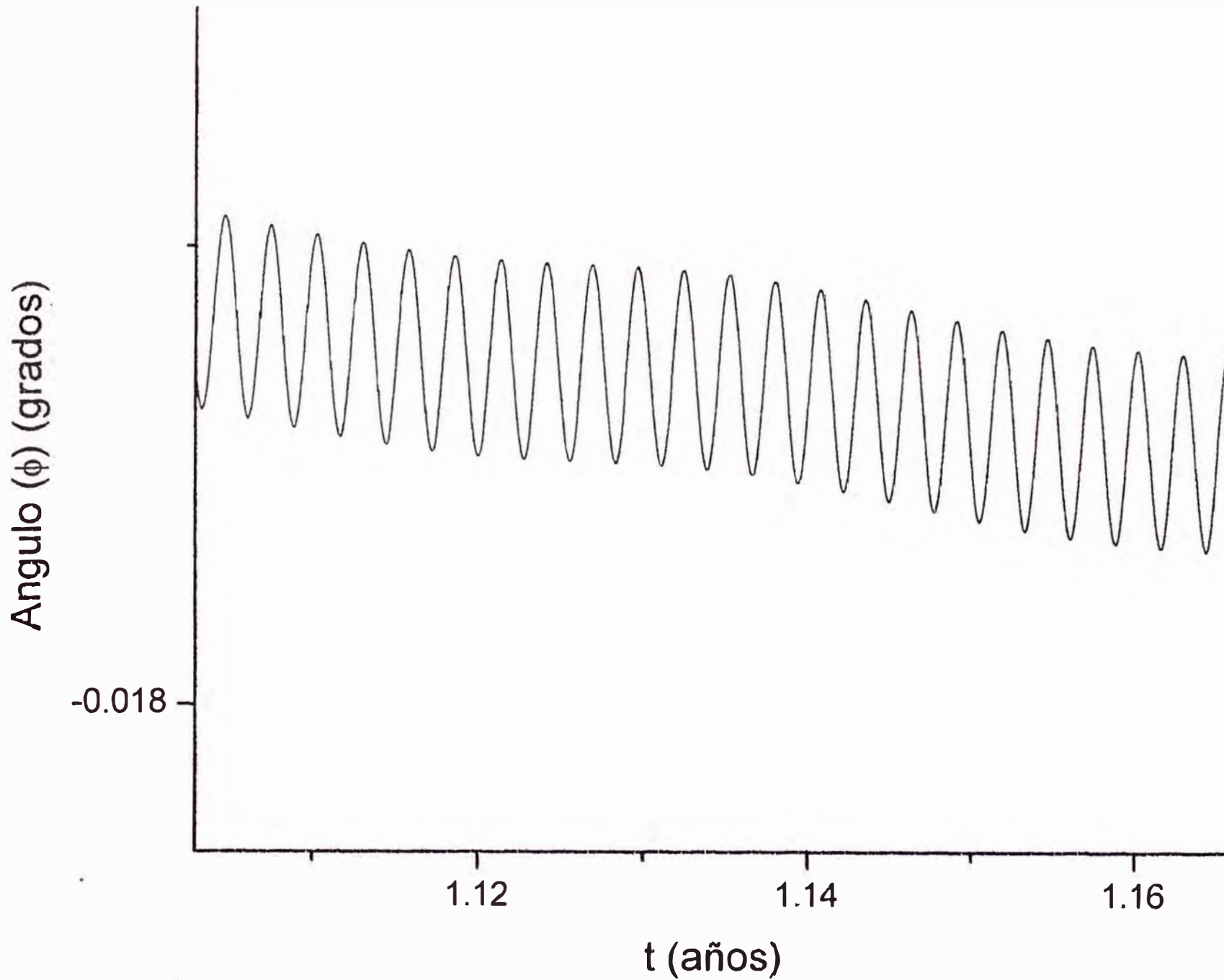
Observaciones:

- a) La gráfica de $\phi(t)$ nos muestra que sigue siendo una función lineal y decreciente.
- b) Se comprueba que la proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY continua siendo una curva limitada por dos elipses.
- c) El gráfico de la proyección del vector \vec{W} sobre el plano $X_1 X_2$ en el cual se observa una curva que continua siendo cerrada con pequeñas perturbaciones, la proyección esta limitada por dos elipses.

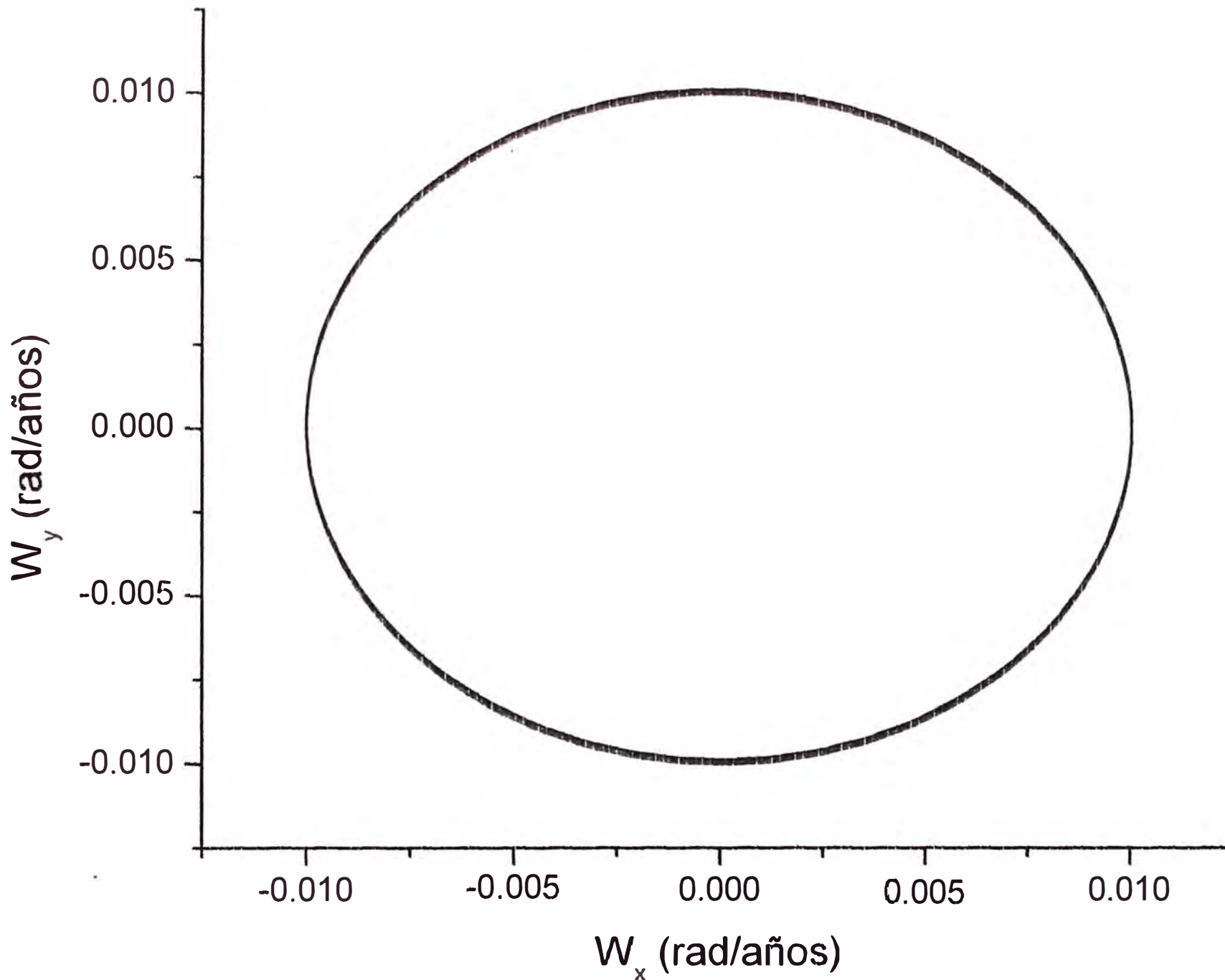
Para 1000 dias con $c = 6355.55$ Km



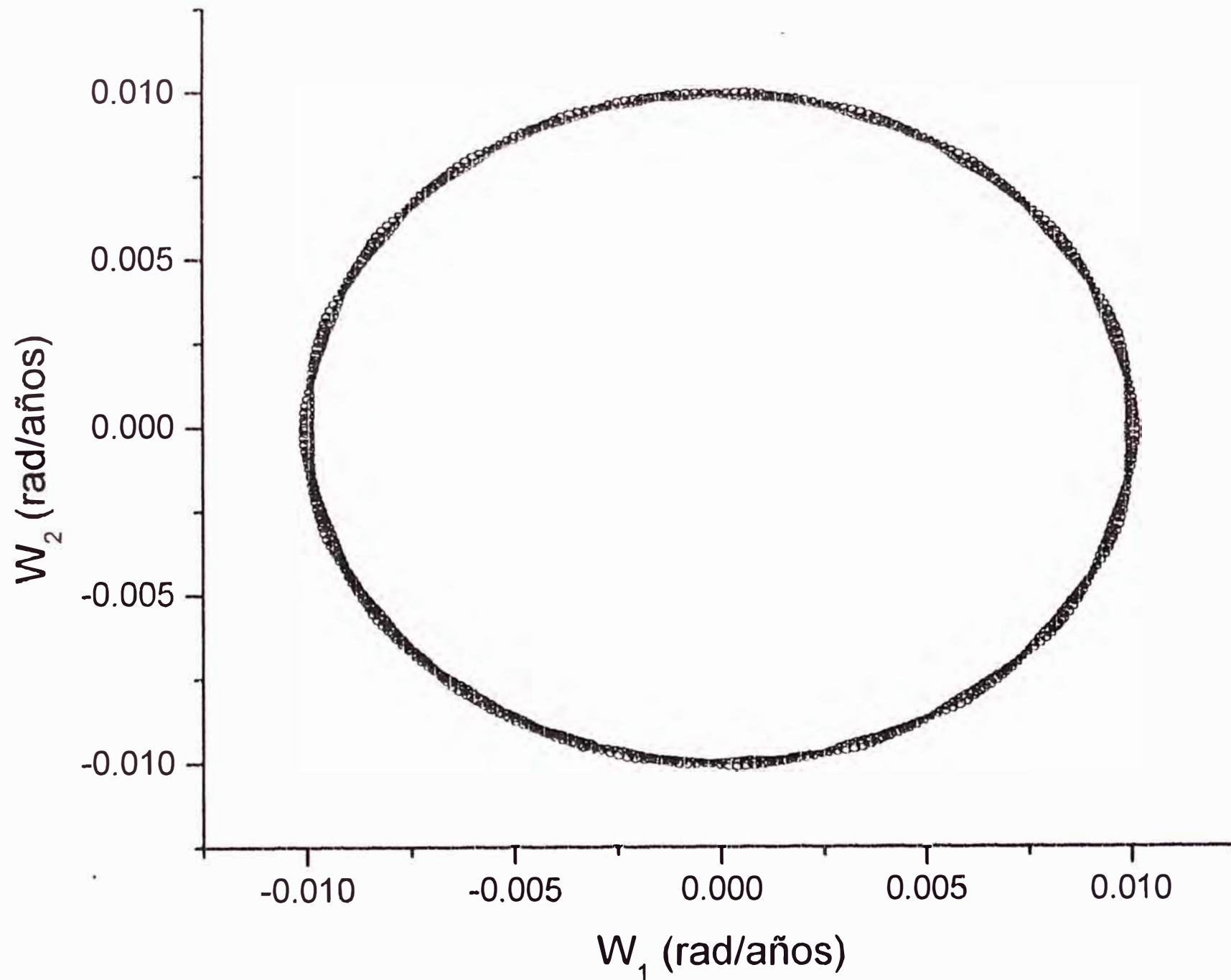
Ampliacion del grafico anterior



Proyeccion del Vector W sobre el plano XY para 1000 dias



Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 1000 días



Ampliación de la Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 1000 días

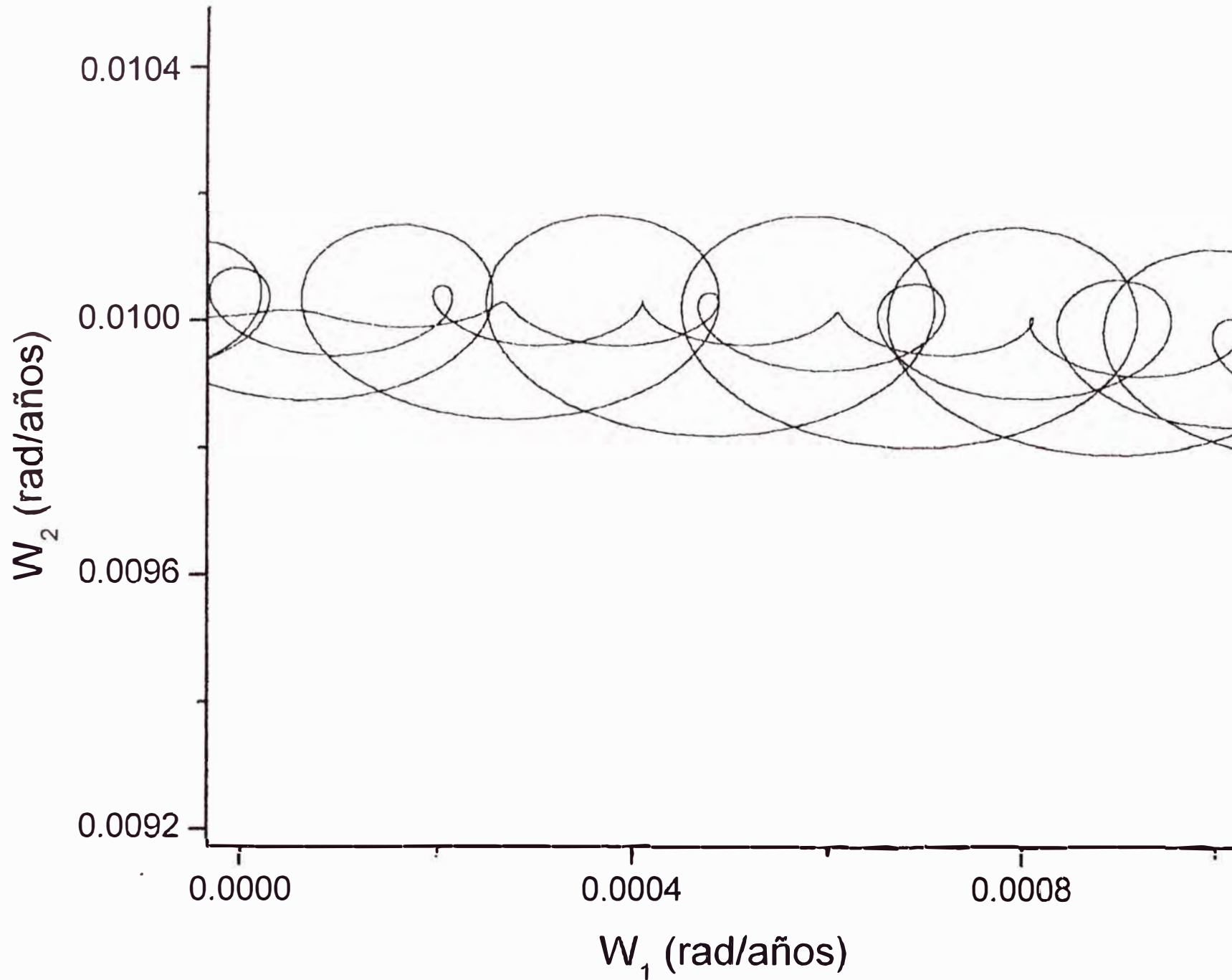


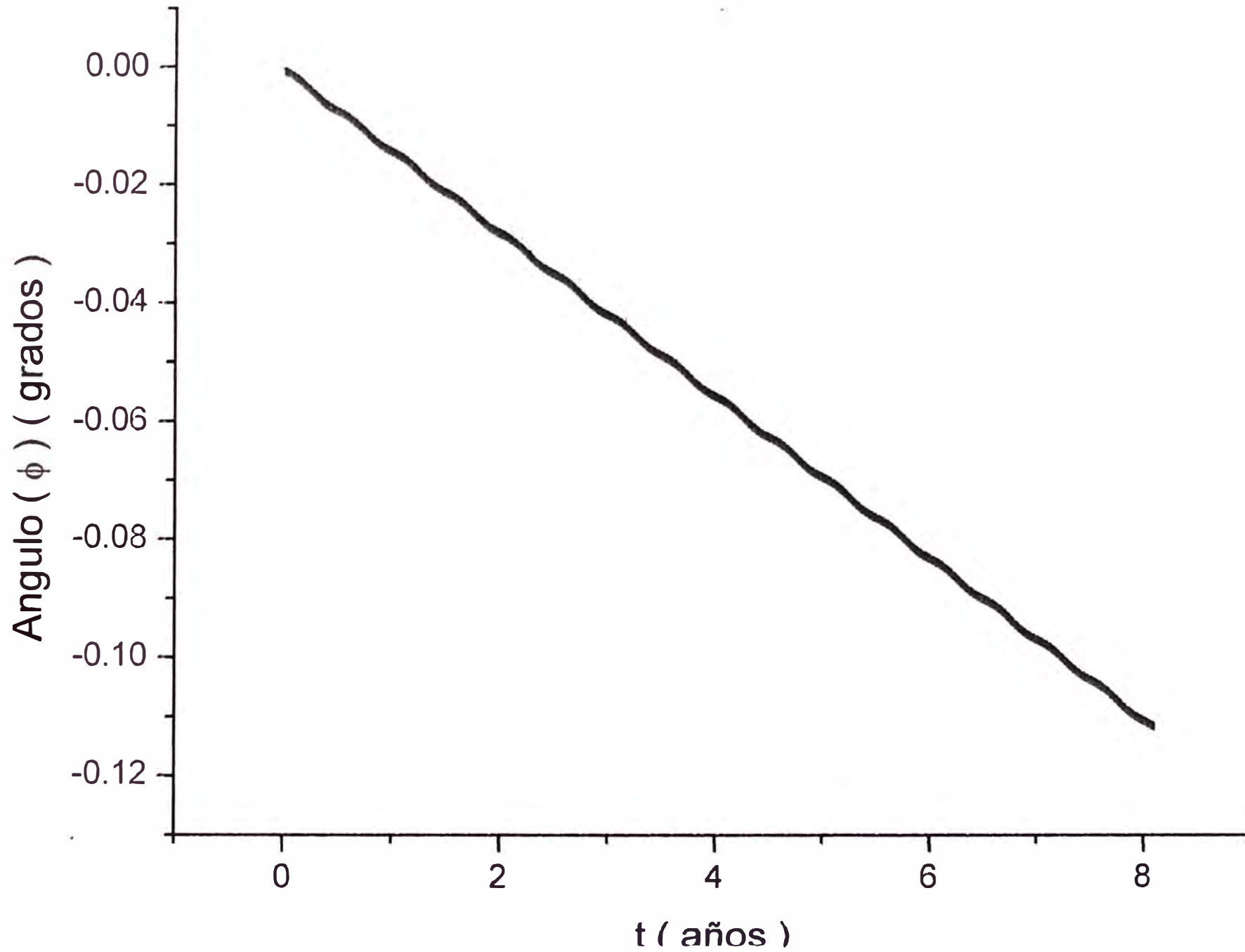
Table 6: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 3000$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	211
Y vs X	212
W_2 vs W_1	214

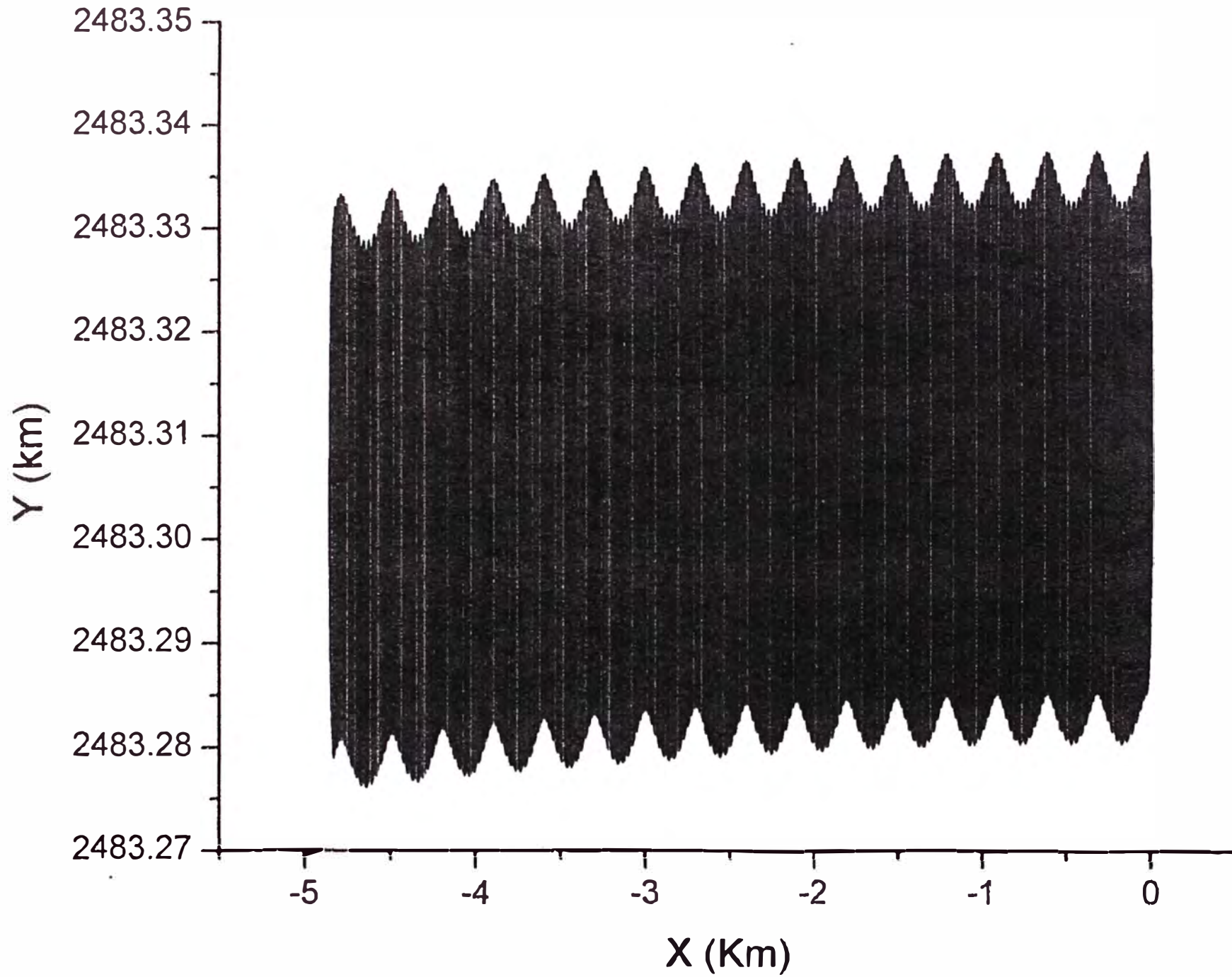
Observaciones:

- a) La gráfica de $\phi(t)$ nos muestra que sigue siendo una función casi lineal y decreciente, que nos permitira estimar el período de precesión. Obteniendose aproximadamente un período de 26180 años.
- b) La proyección del eje X_3 ya nos muestra el movimiento de precesión de los equinoccios.
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 ya nos muestra que la curva llena una region anular elíptica.

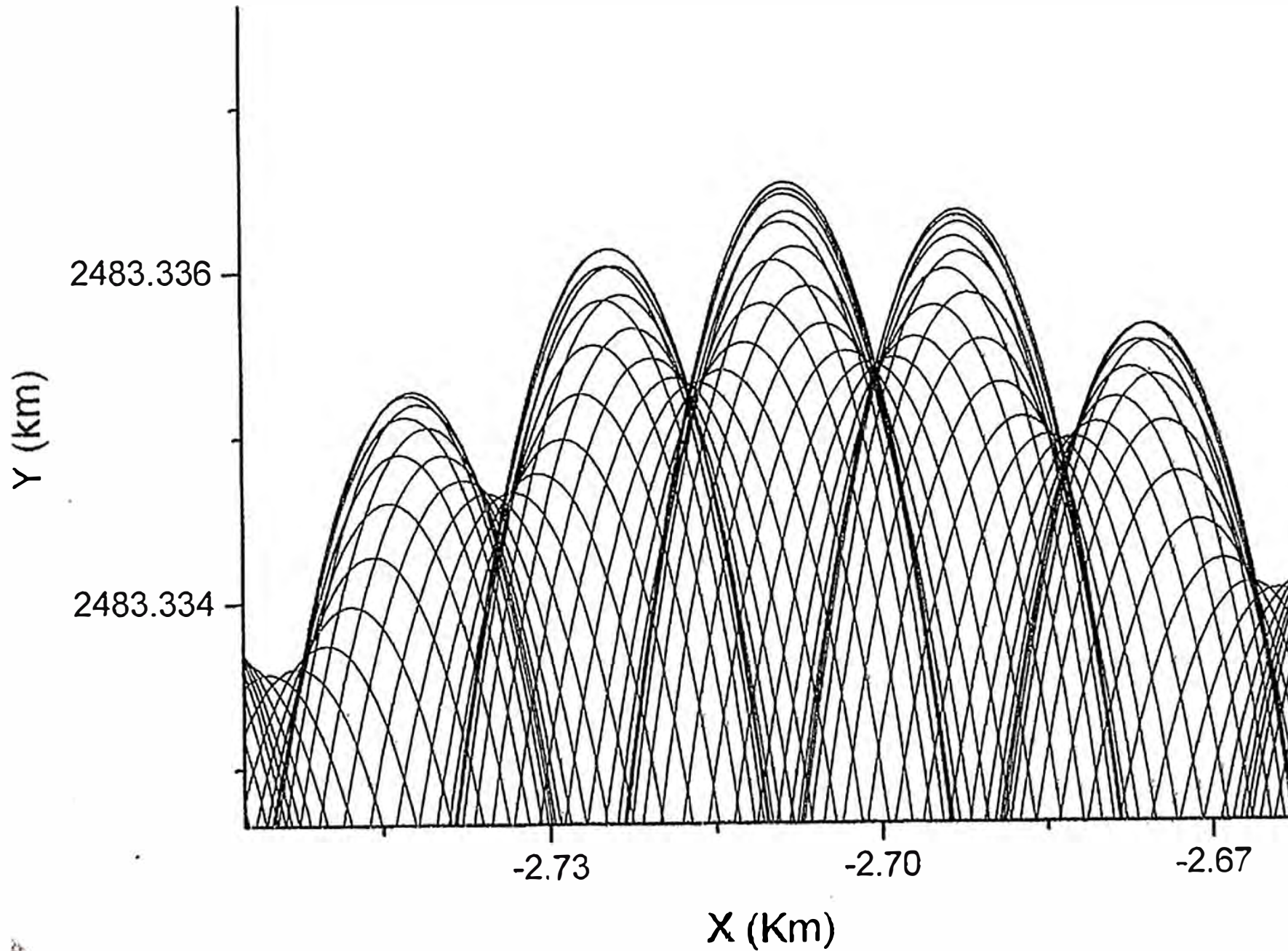
Para 3000 dias con $c = 6355.55$ Km



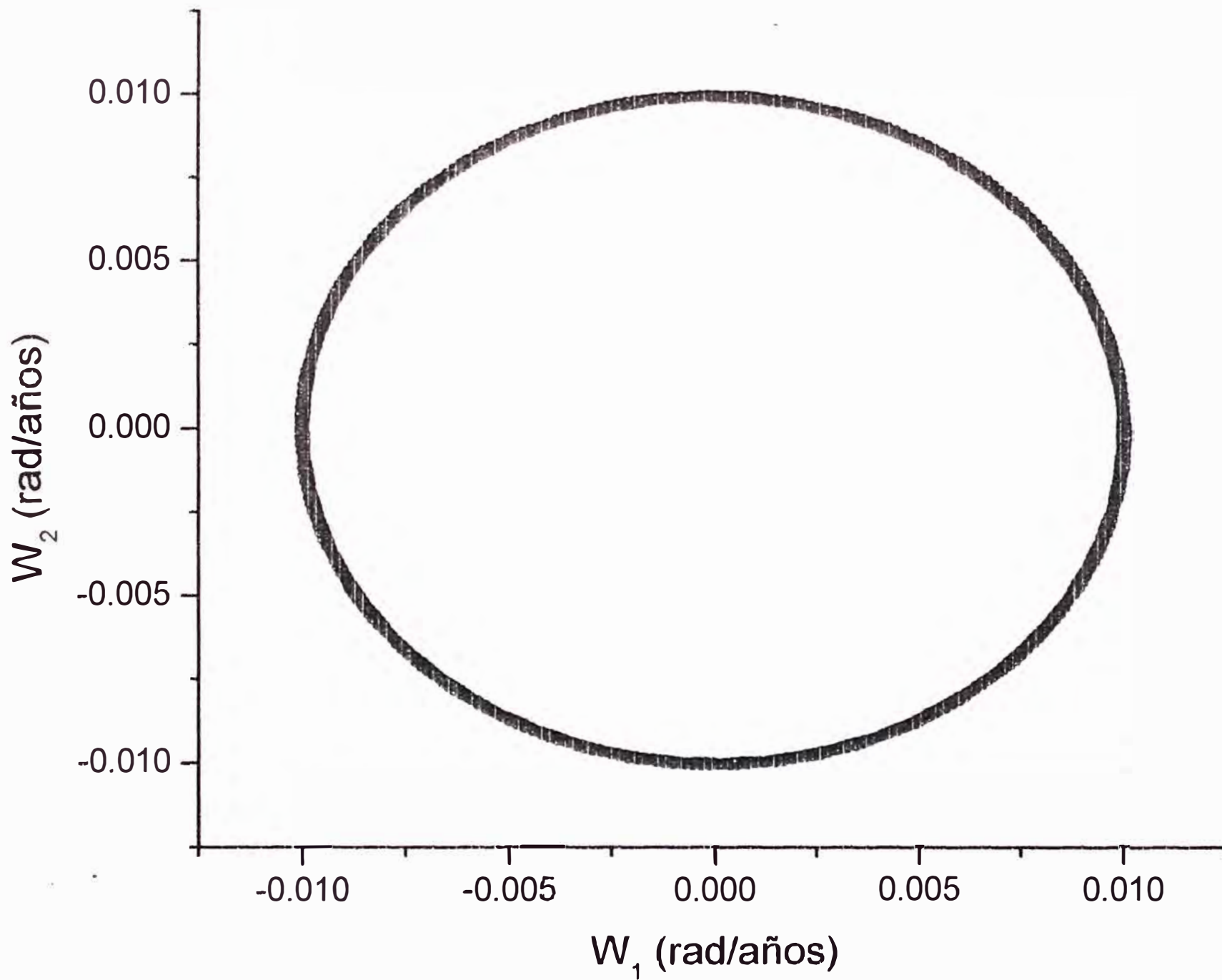
Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 3000 días



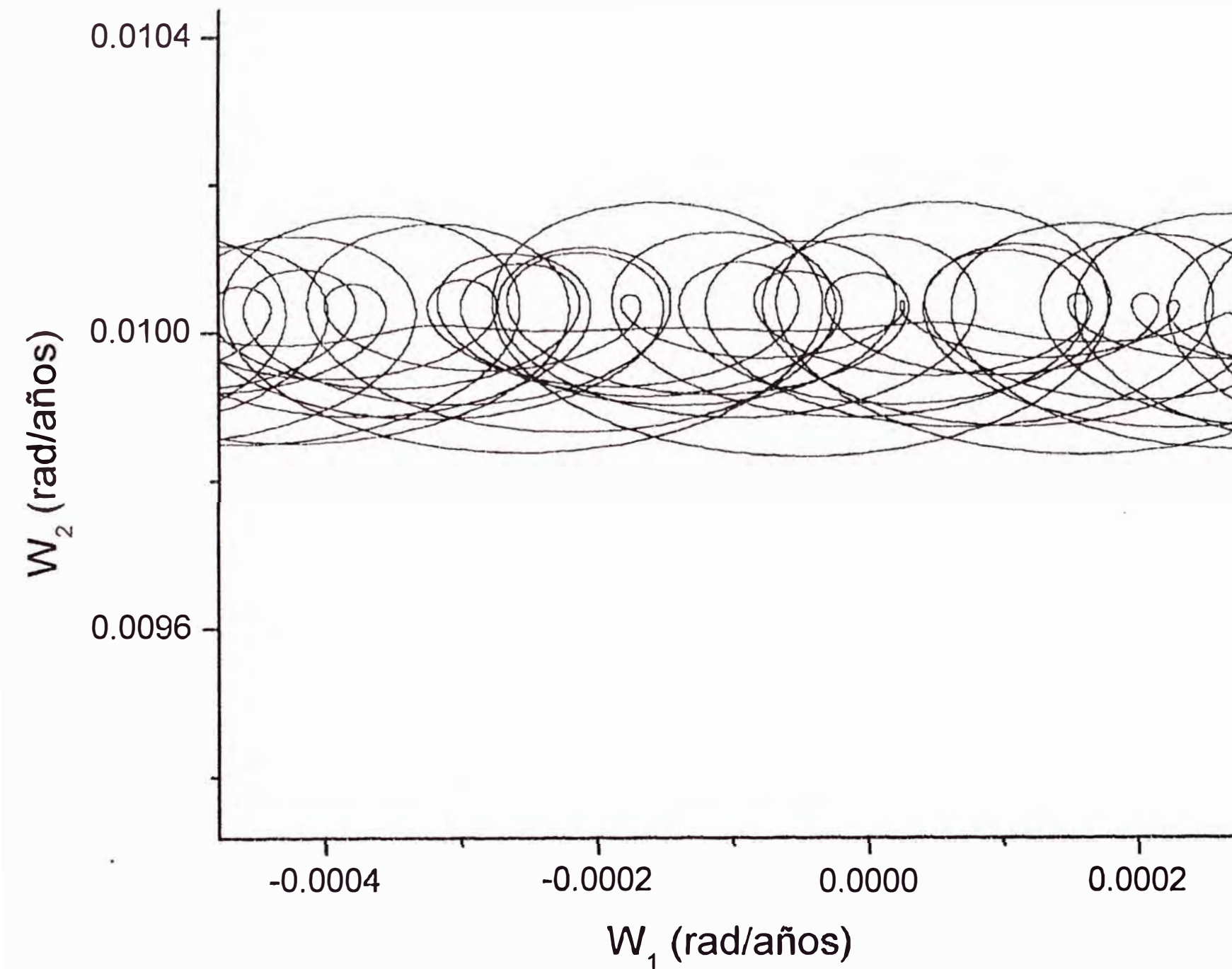
Ampliación de la Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 3000 días



Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 3000 días



Ampliación de la Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 3000 días



II. SEGUNDO CASO.

Considerando ahora el radio polar $C = 6000.55$ Km , se muestran las tablas con sus respectivos gráficos para diversos intervalos de días donde se mencionan la página en donde están las gráficas respectivas. A continuación se menciona las observaciones más importantes.

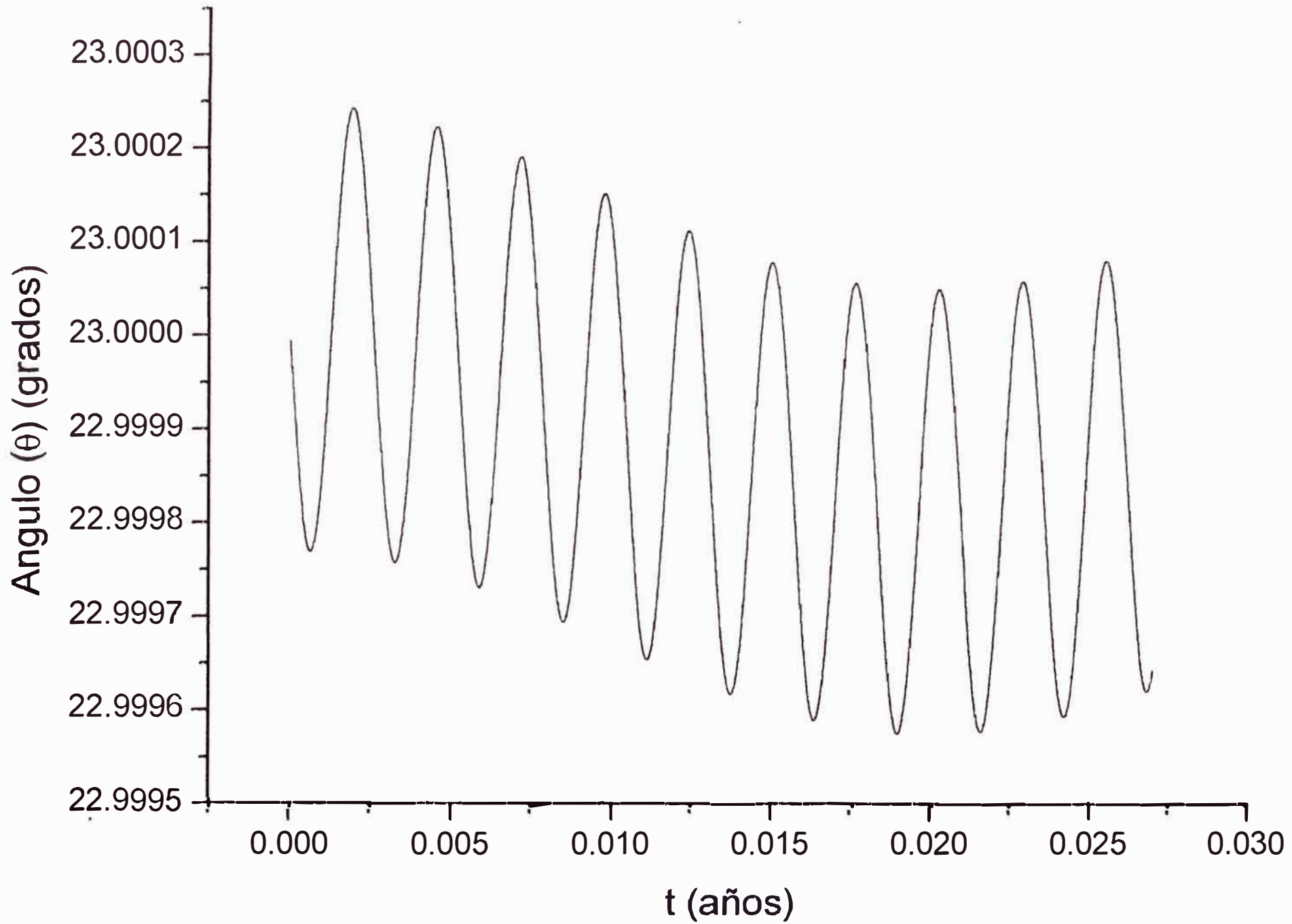
Table 7: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 10$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	217
$\phi(t)$	218
$\psi(t)$	219
$\dot{\theta}(t)$	220
$\dot{\phi}(t)$	221
$\dot{\psi}(t)$	222
W_y vs W_x	223
Y vs X	224
W_2 vs W_1	225

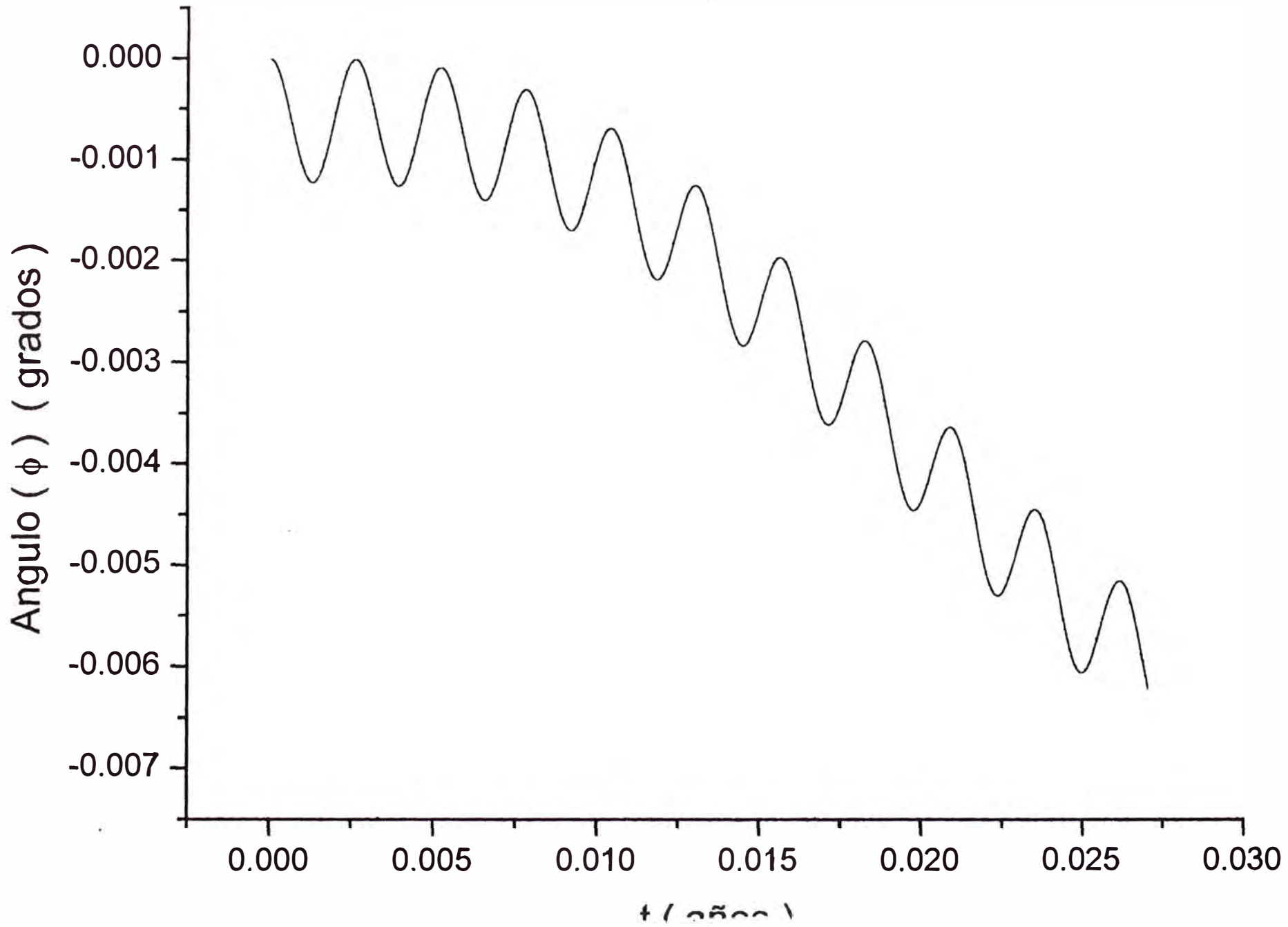
Observaciones:

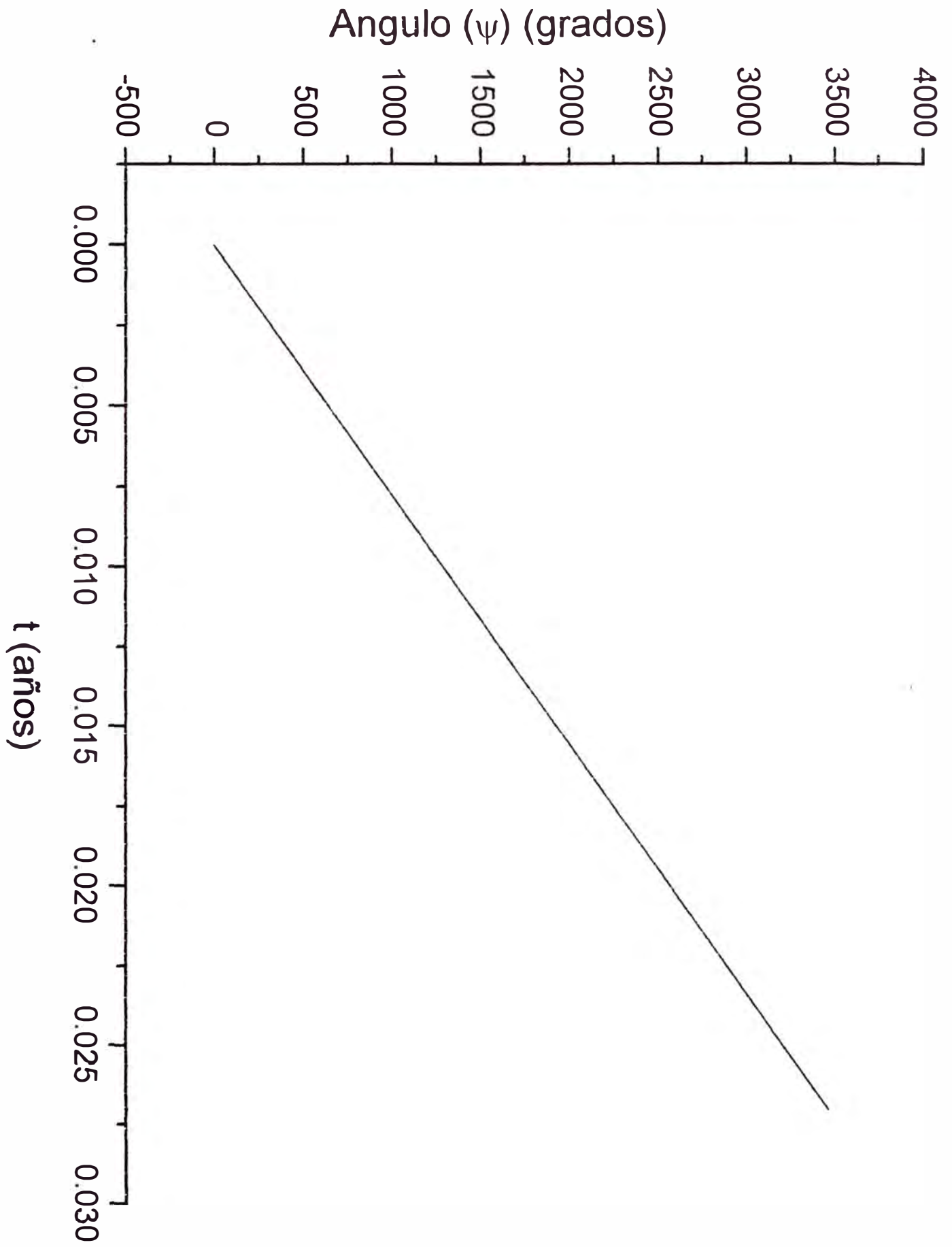
- Las gráficas de las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ son curvas oscilantes, no pudiéndose decir si son periódicas.
- La grafica de $\phi(t)$ nos muestra que sigue siendo una función decreciente y oscilante con valor negativo.
- La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY parecen ser circunferencias que empiezan a desplazar su centro.
- Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY son elipses que se empiezan a desplazar de tal modo que su centro hace una curva circular.
- La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una curva formada por rizos.

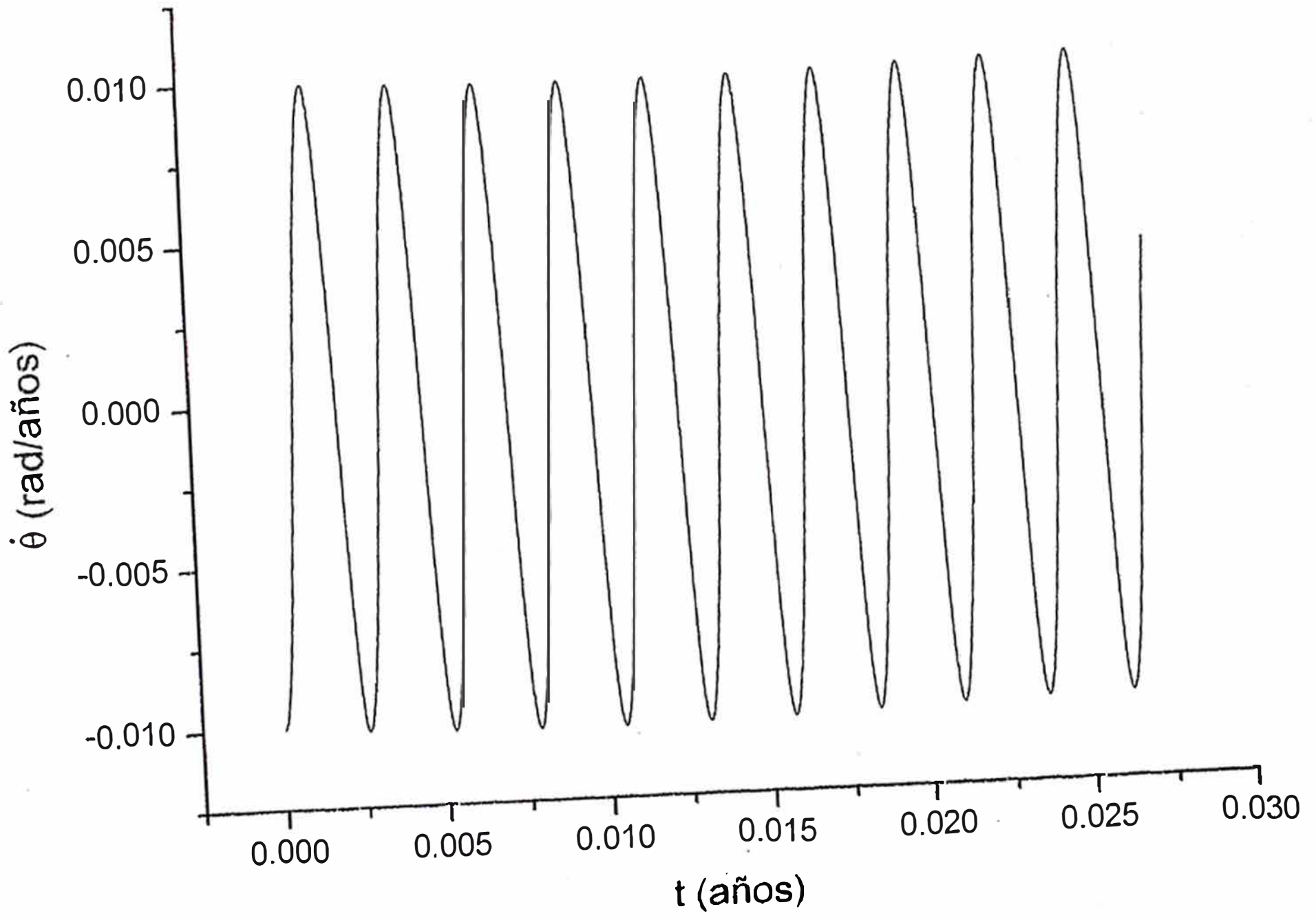
Para 10 dias con $c=6000.55$ Km



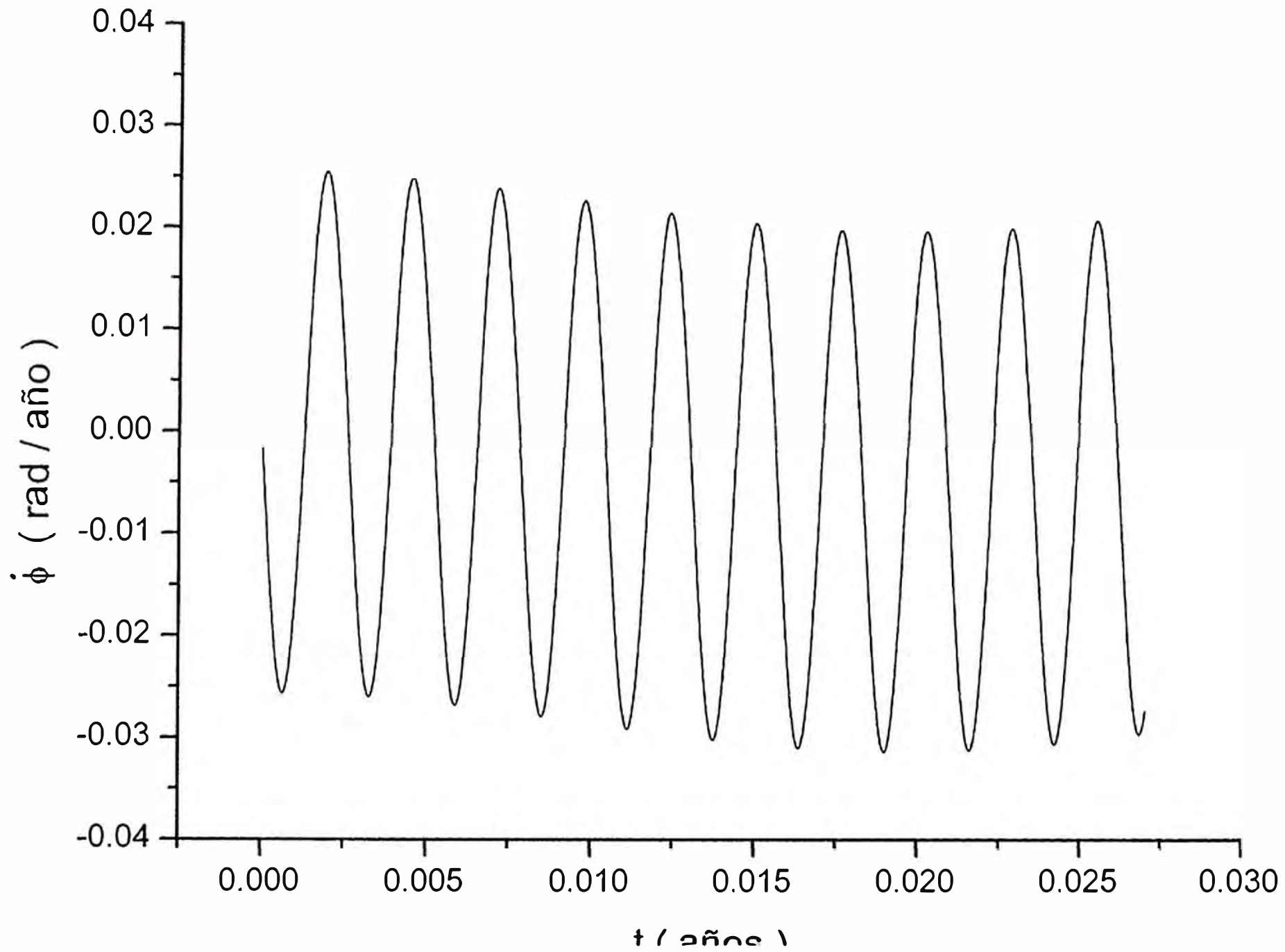
Para 10 dias con $c = 6000.55$ Km

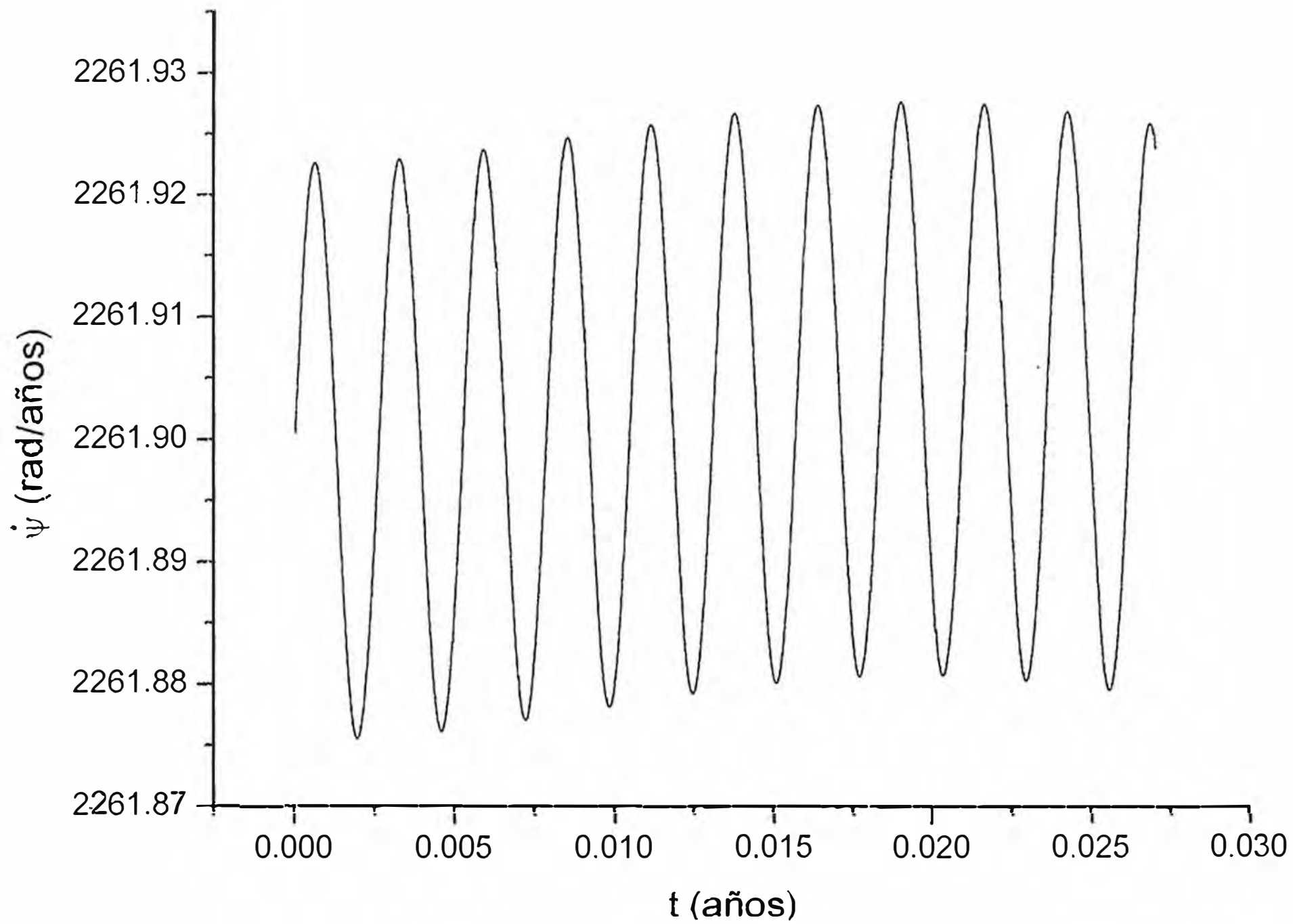




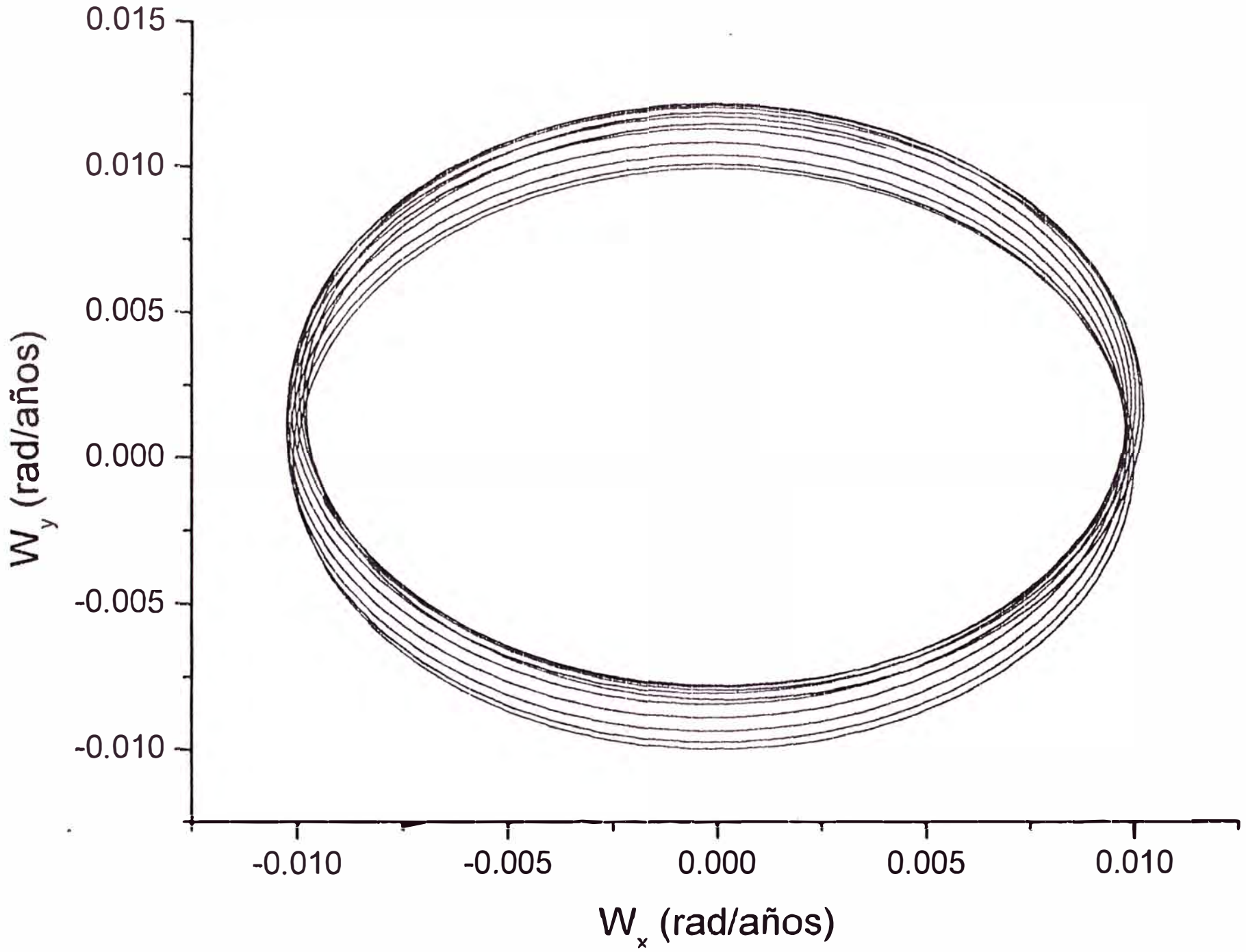


Para 10 dias con $c = 6000.55$ Km

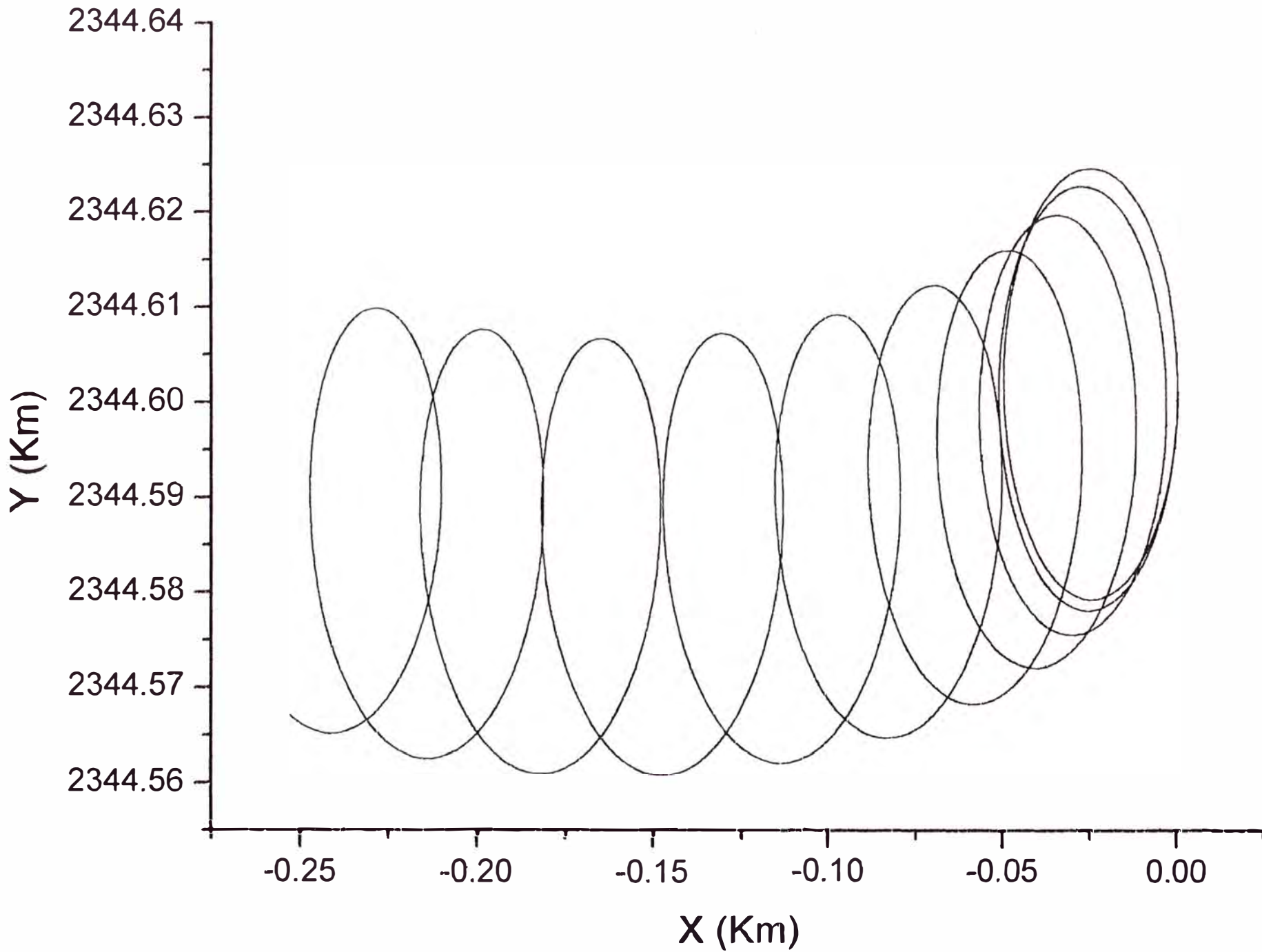




Proyeccion del Vector W sobre el plano XY para 10 dias con $c=6000.55$ Km



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 10 dias



Proyeccion del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 10 dias con $c=6000.55$ Km

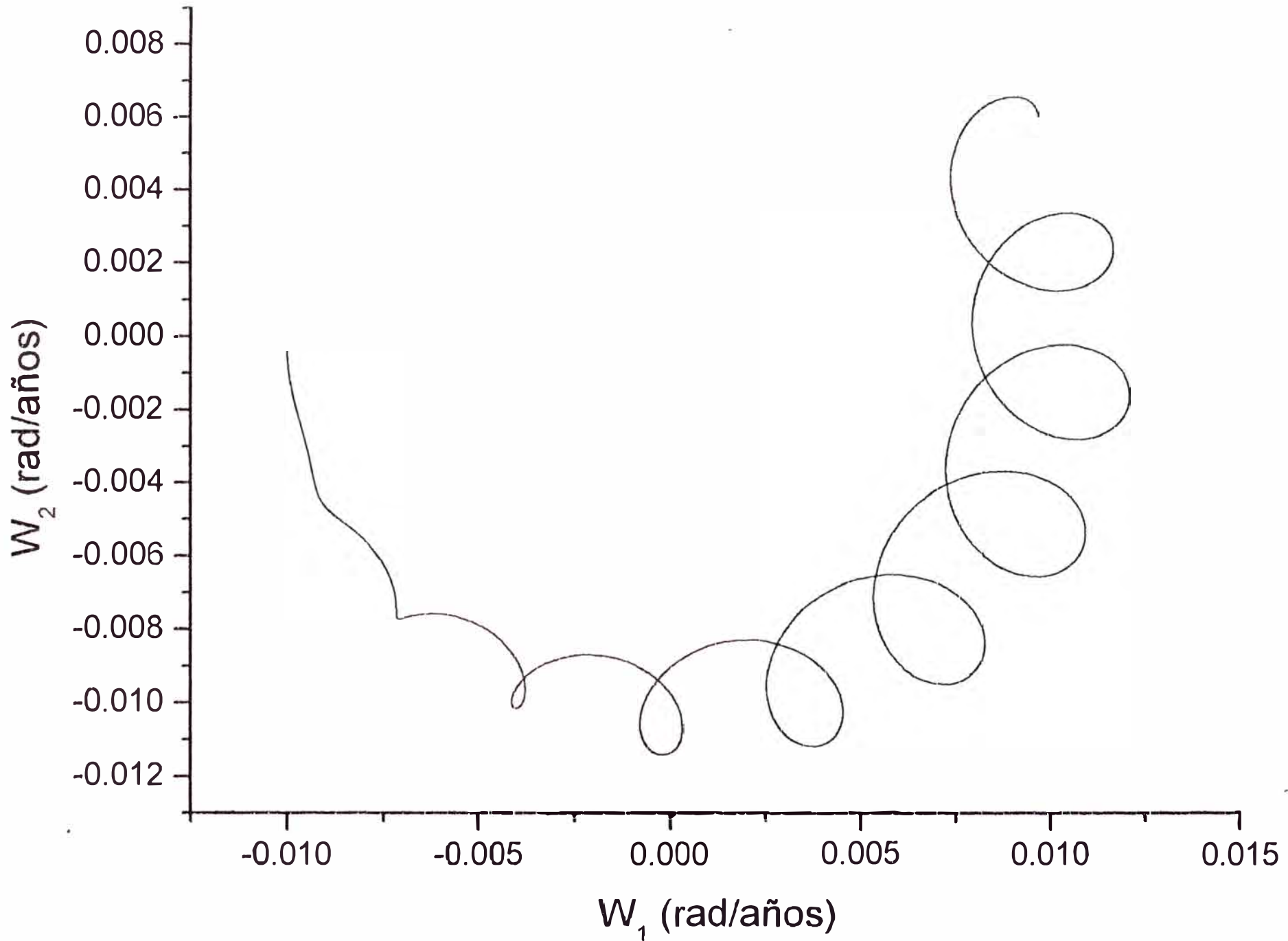


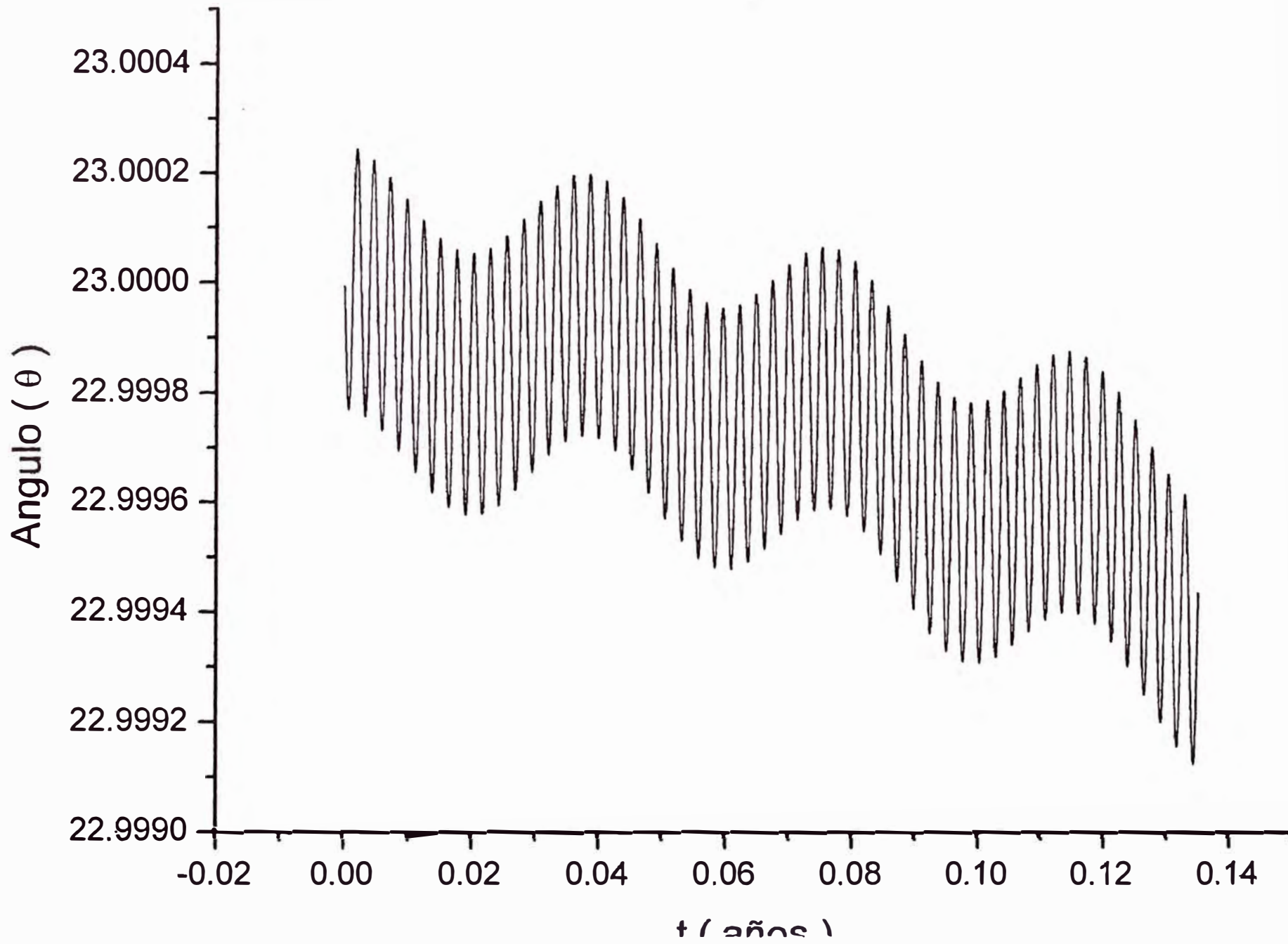
Table 8: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 50$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	227
$\phi(t)$	228
$\psi(t)$	229
$\dot{\theta}(t)$	230
$\dot{\phi}(t)$	231
$\dot{\psi}(t)$	232
W_y vs W_x	233
Y vs X	234
W_2 vs W_1	235

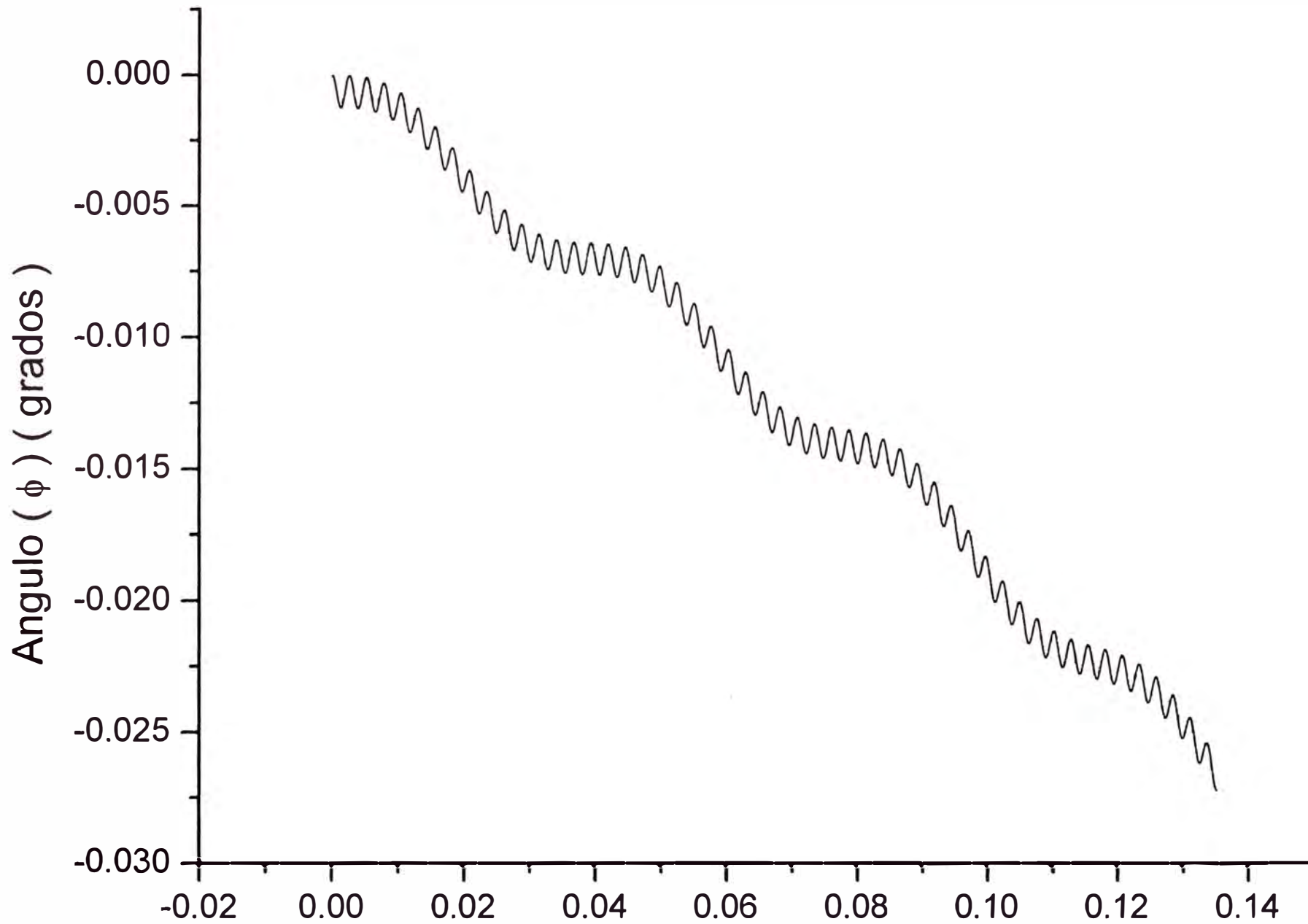
Observaciones:

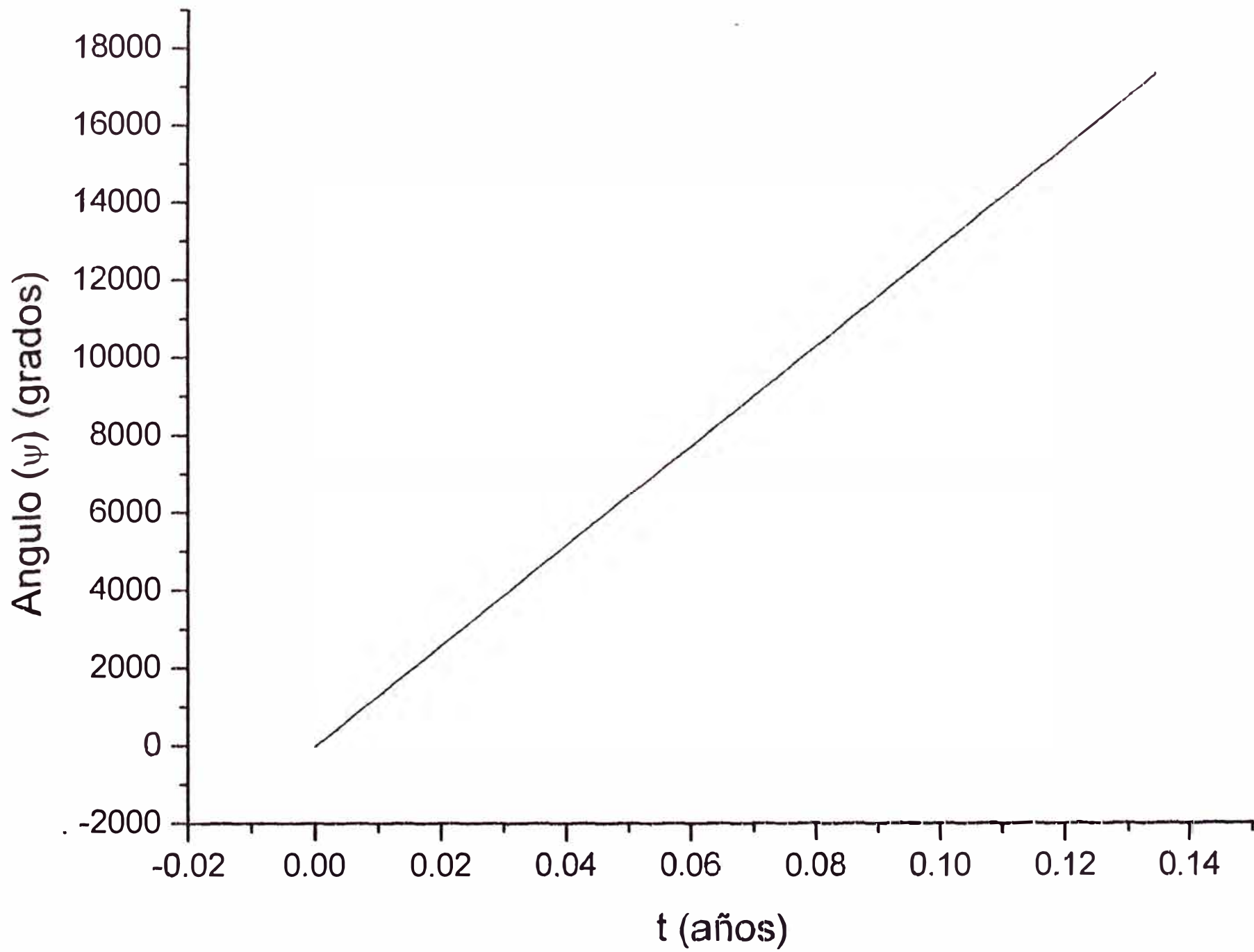
- a) Las gráficas de las funciones $\theta(t)$, y $\phi(t)$, ya se notan claramente que son oscilantes y decrecientes.
- b) Las gráficas de las funciones $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ parecen ser periódicas.
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY tiene un mayor desplazamiento que el gráfico anterior.
- d) Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY es una curva oscilante con tendencia creciente en el eje Y y el eje X.
- e) El gráfico más interesante que mostramos es la proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 en el cual se observa una curva cerrada con fuertes perturbaciones .

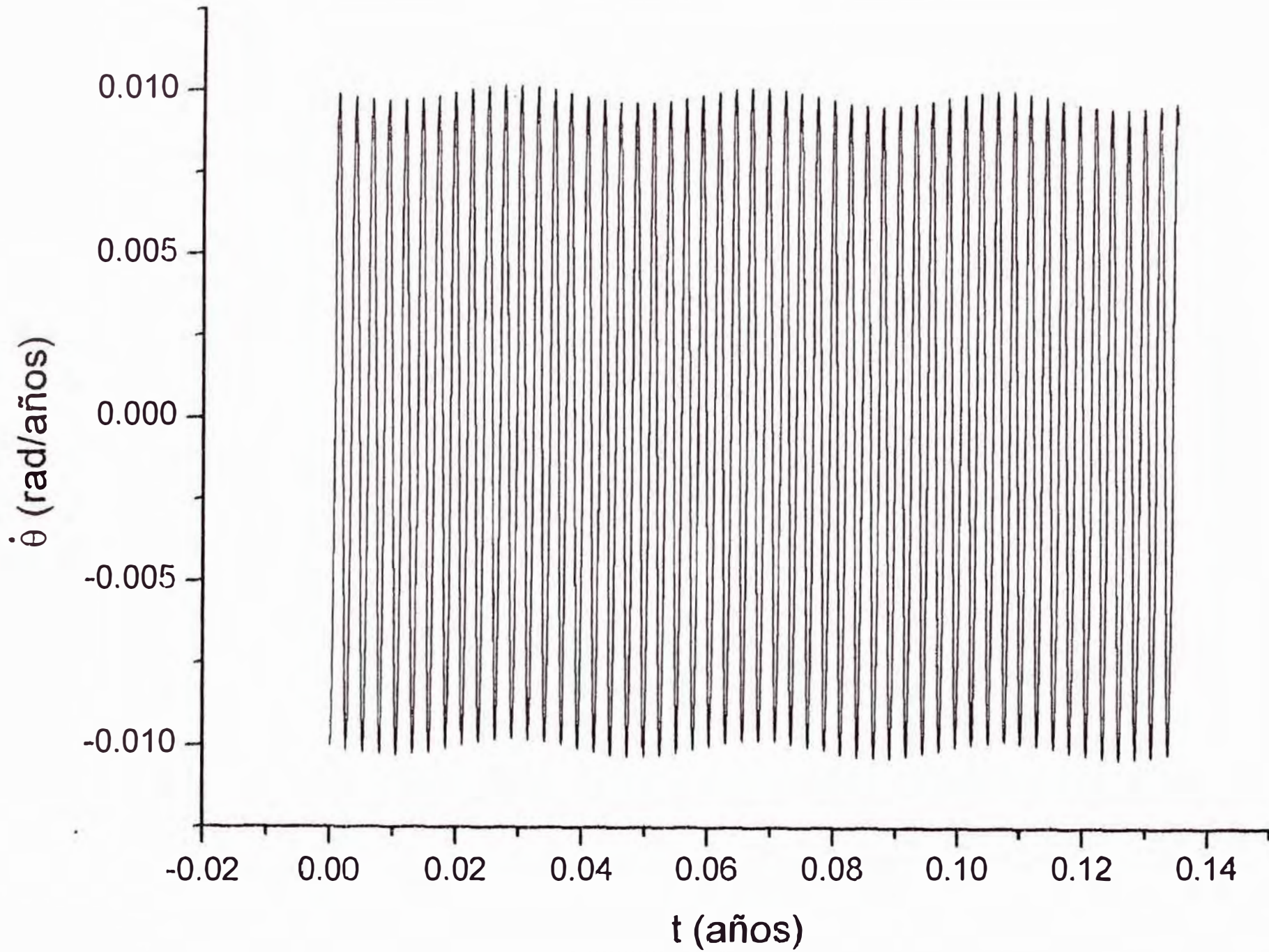
Para 50 dias con $c = 6000.55$ Km

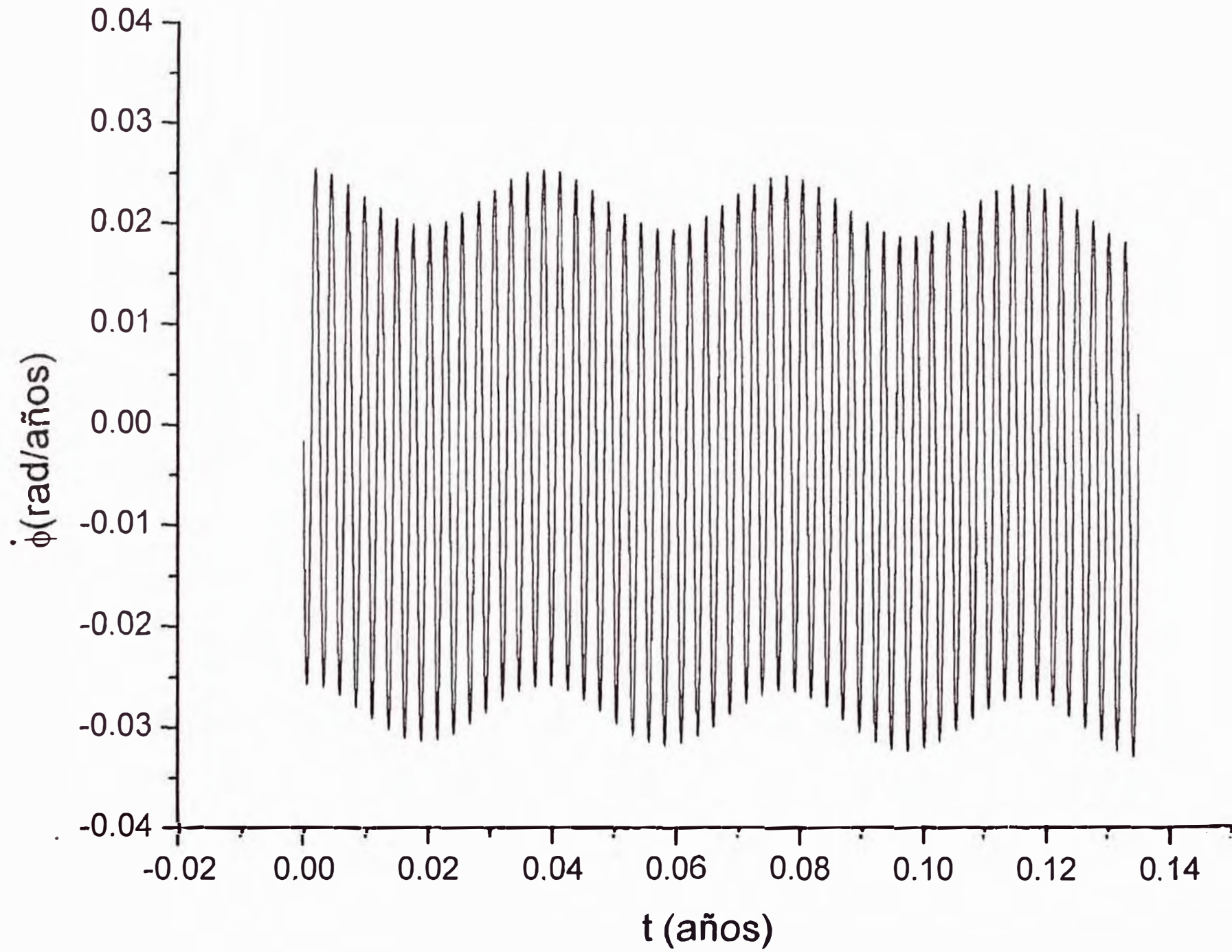


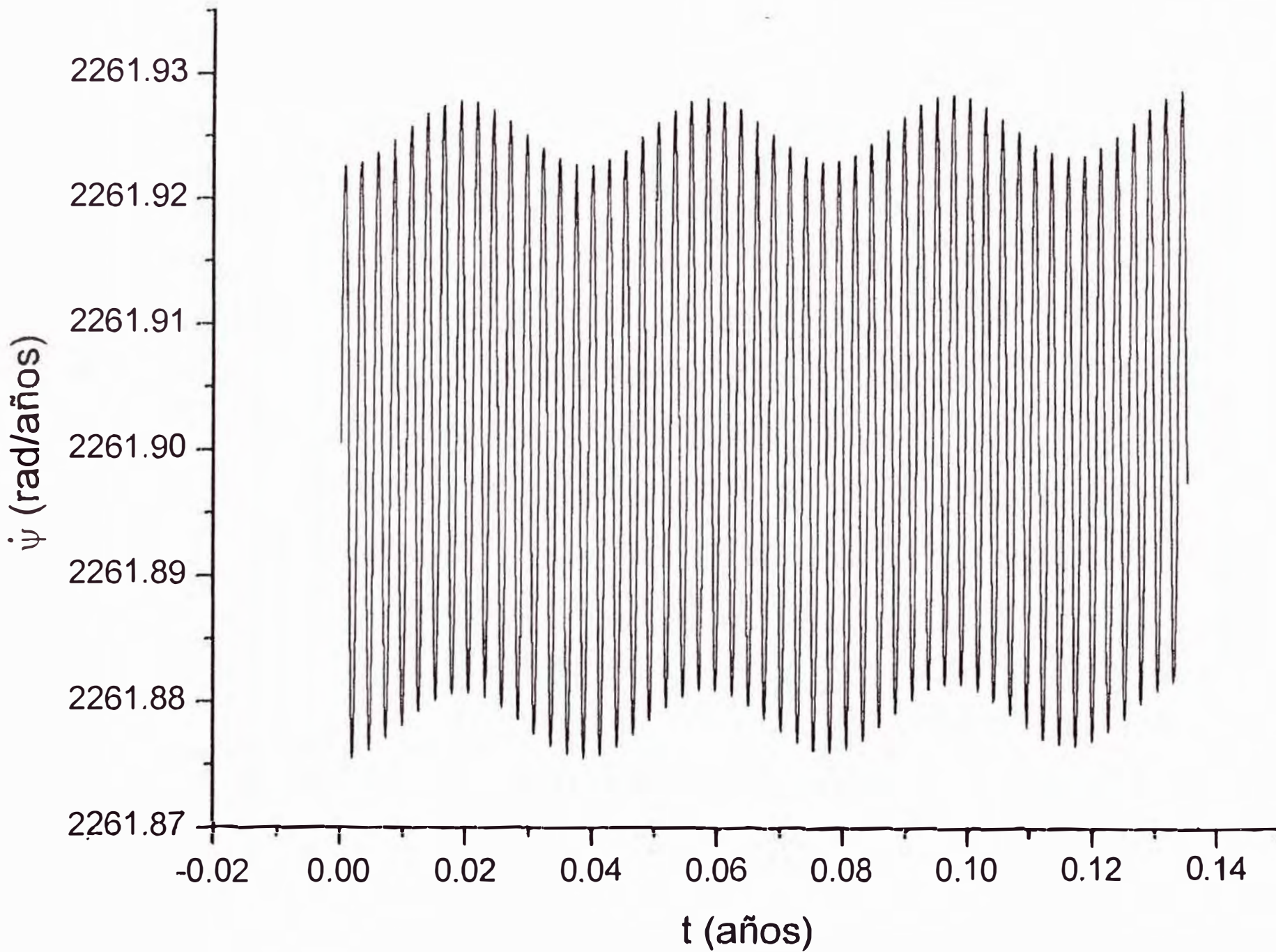
Para 50 dias con $c = 6000.55$ Km



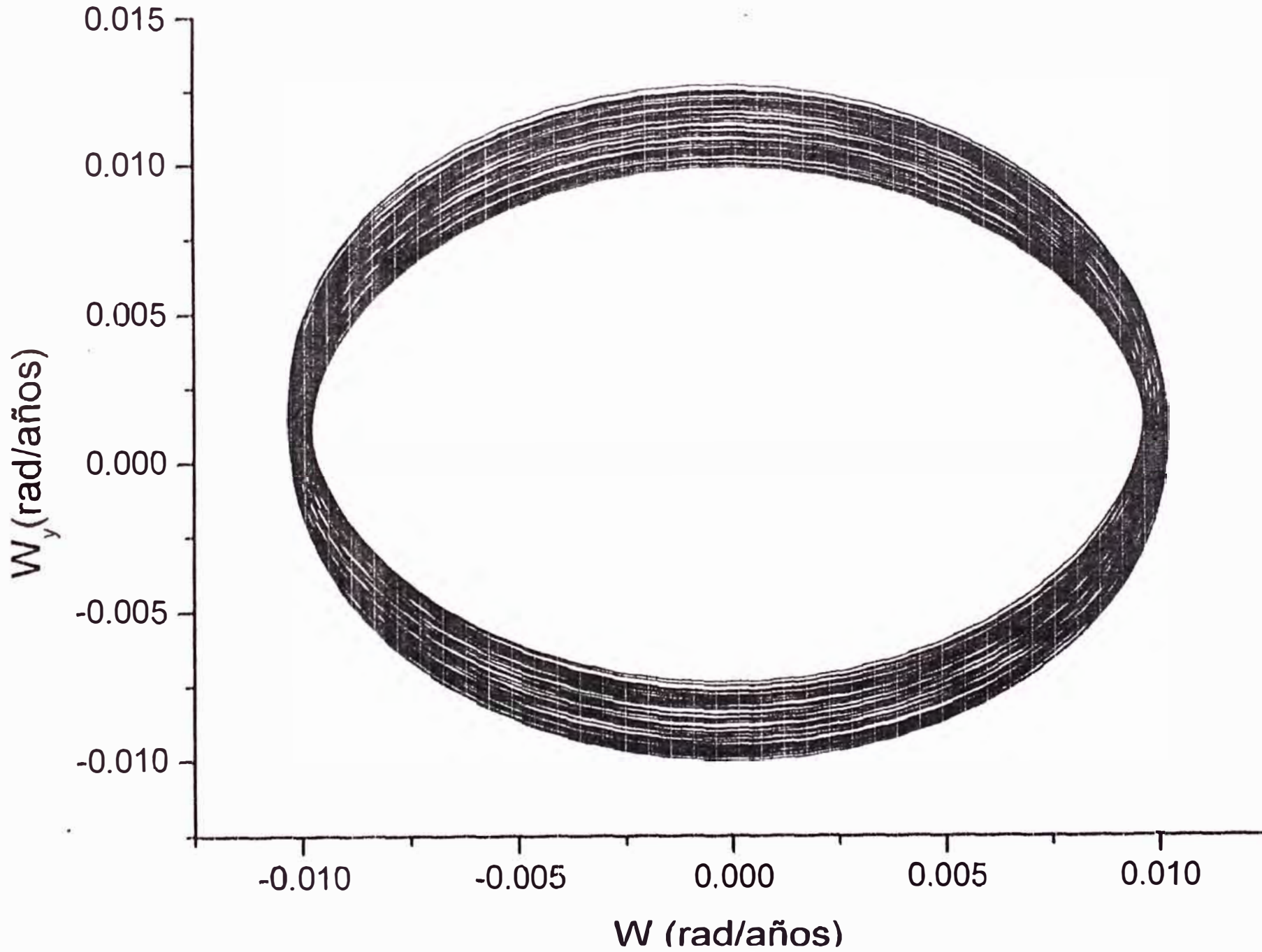




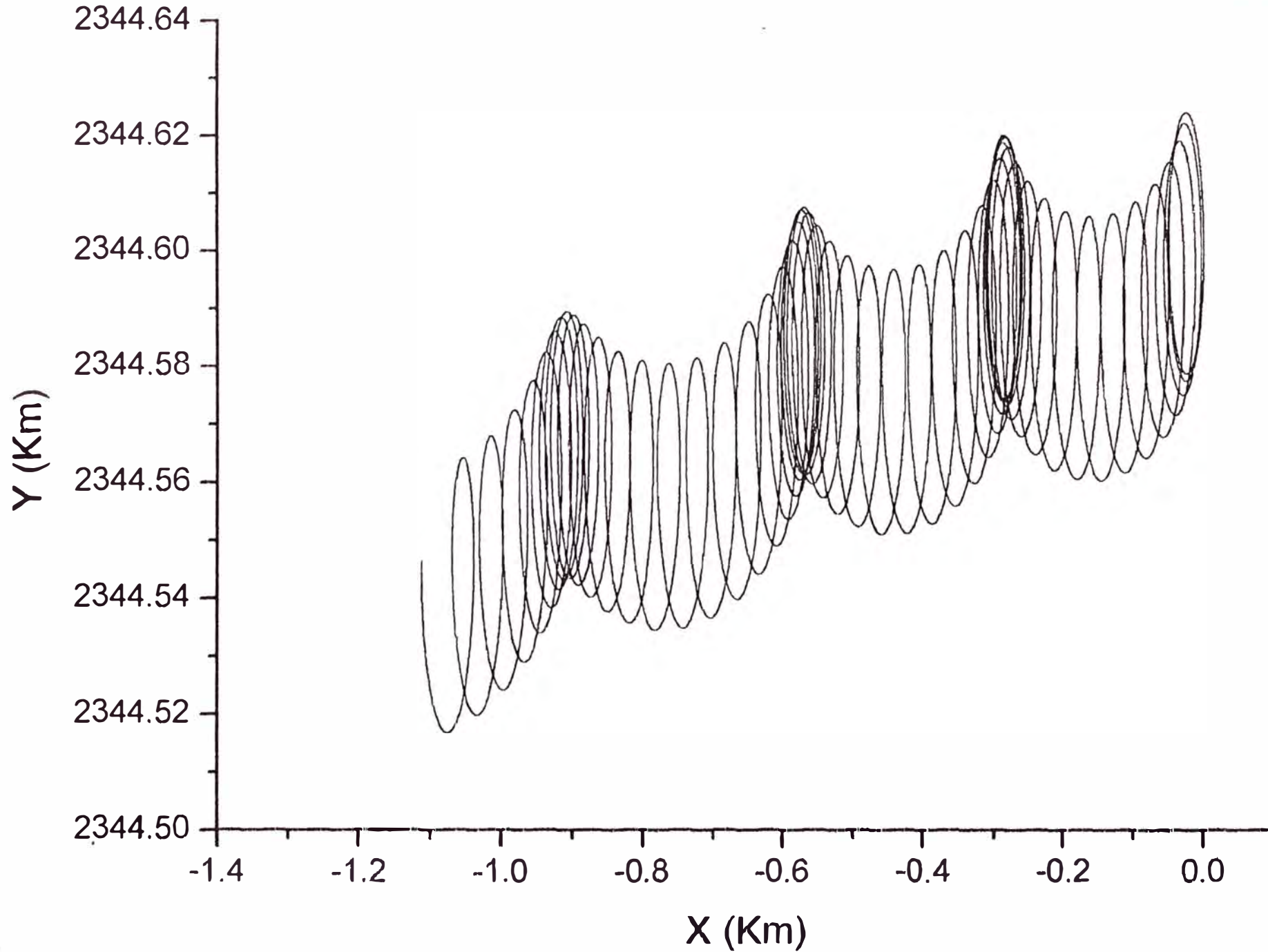




Proyección del Vector W sobre el plano XY para 50 días con $c=6000.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 50 días



Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 50 días con $c=6000.55$ Km

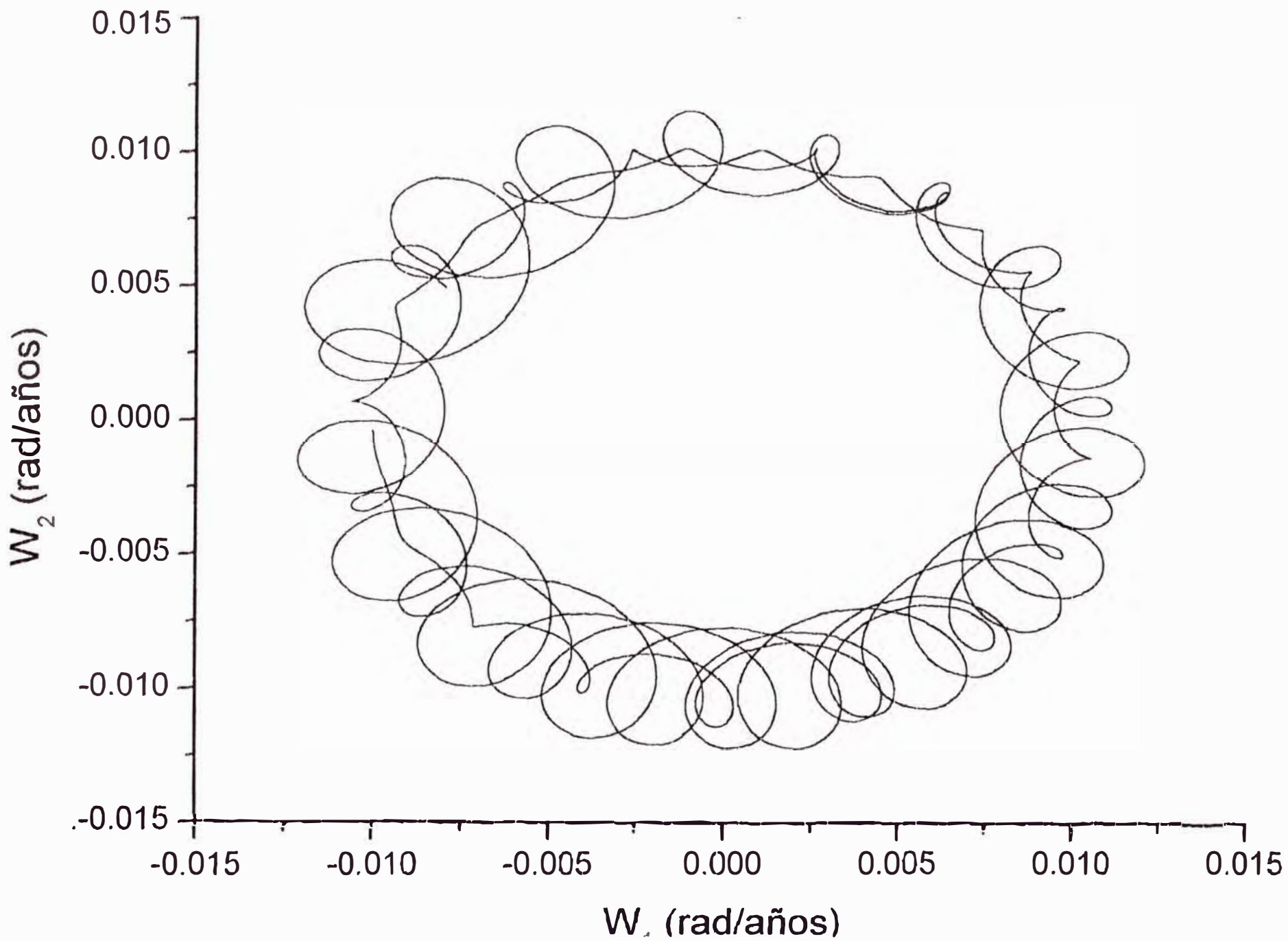


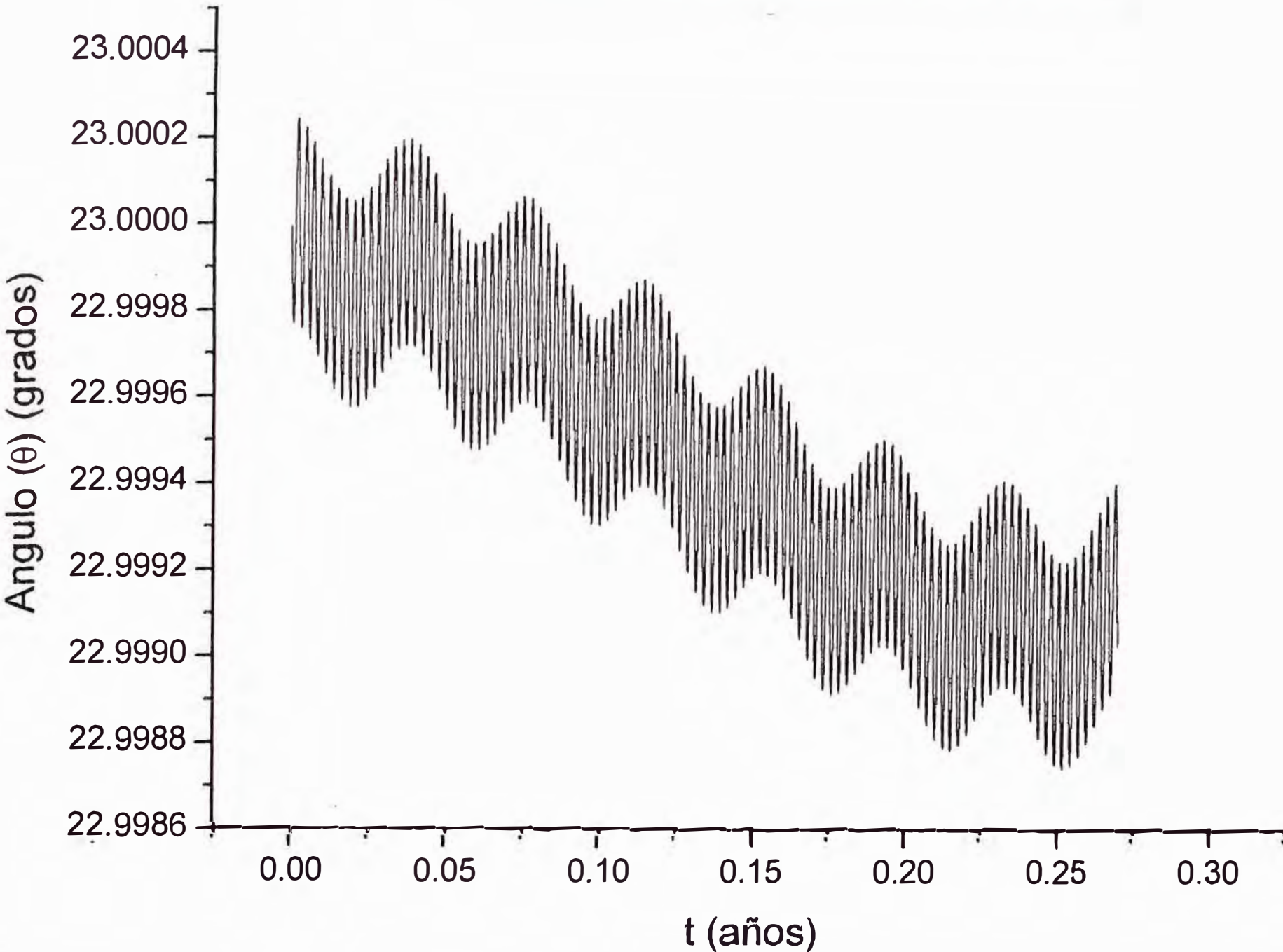
Table 9: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 100$ días

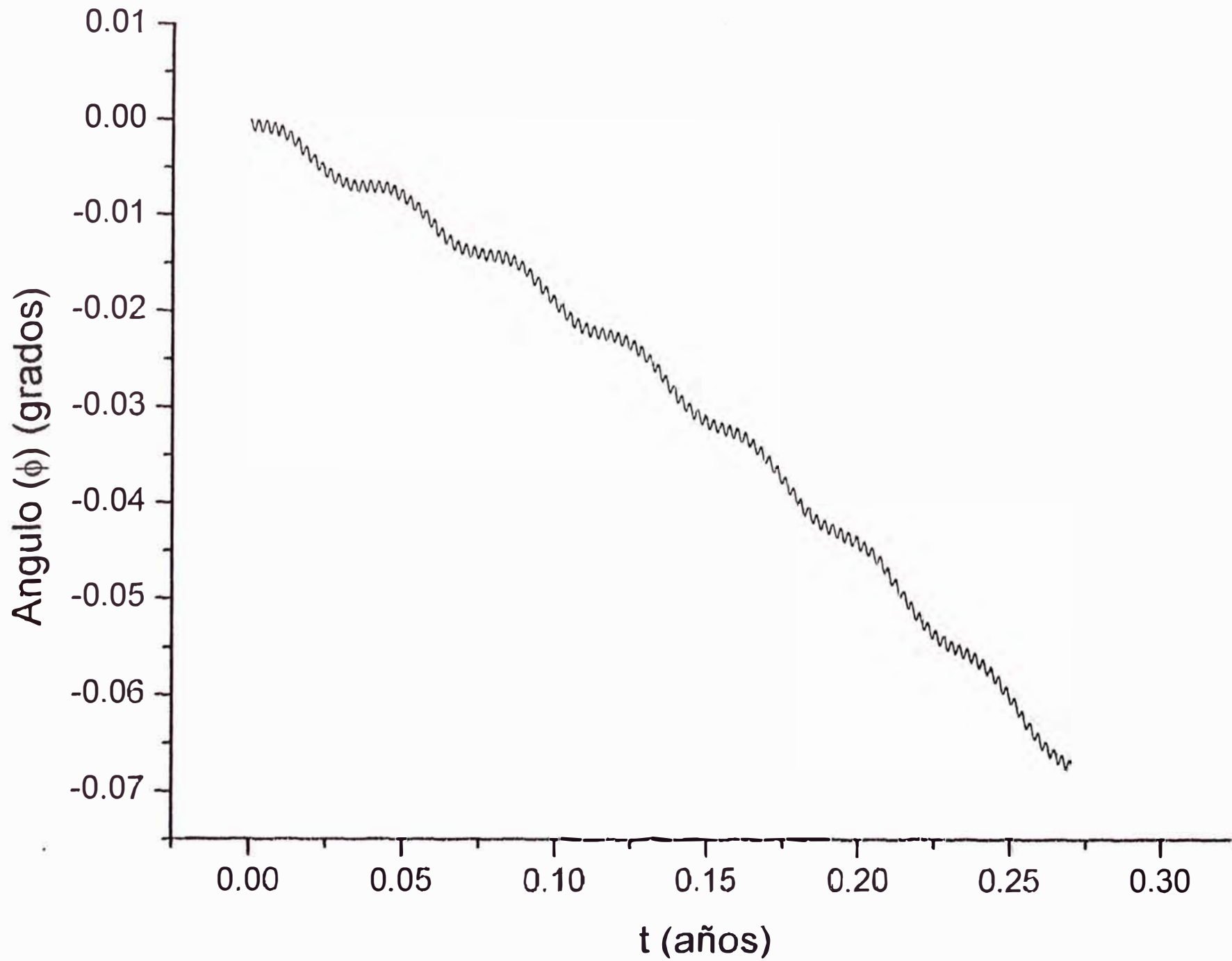
Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	237
$\phi(t)$	238
$\psi(t)$	239
$\dot{\theta}(t)$	240
$\dot{\phi}(t)$	241
$\dot{\psi}(t)$	242
W_y vs W_x	243
Y vs X	244
W_2 vs W_1	245

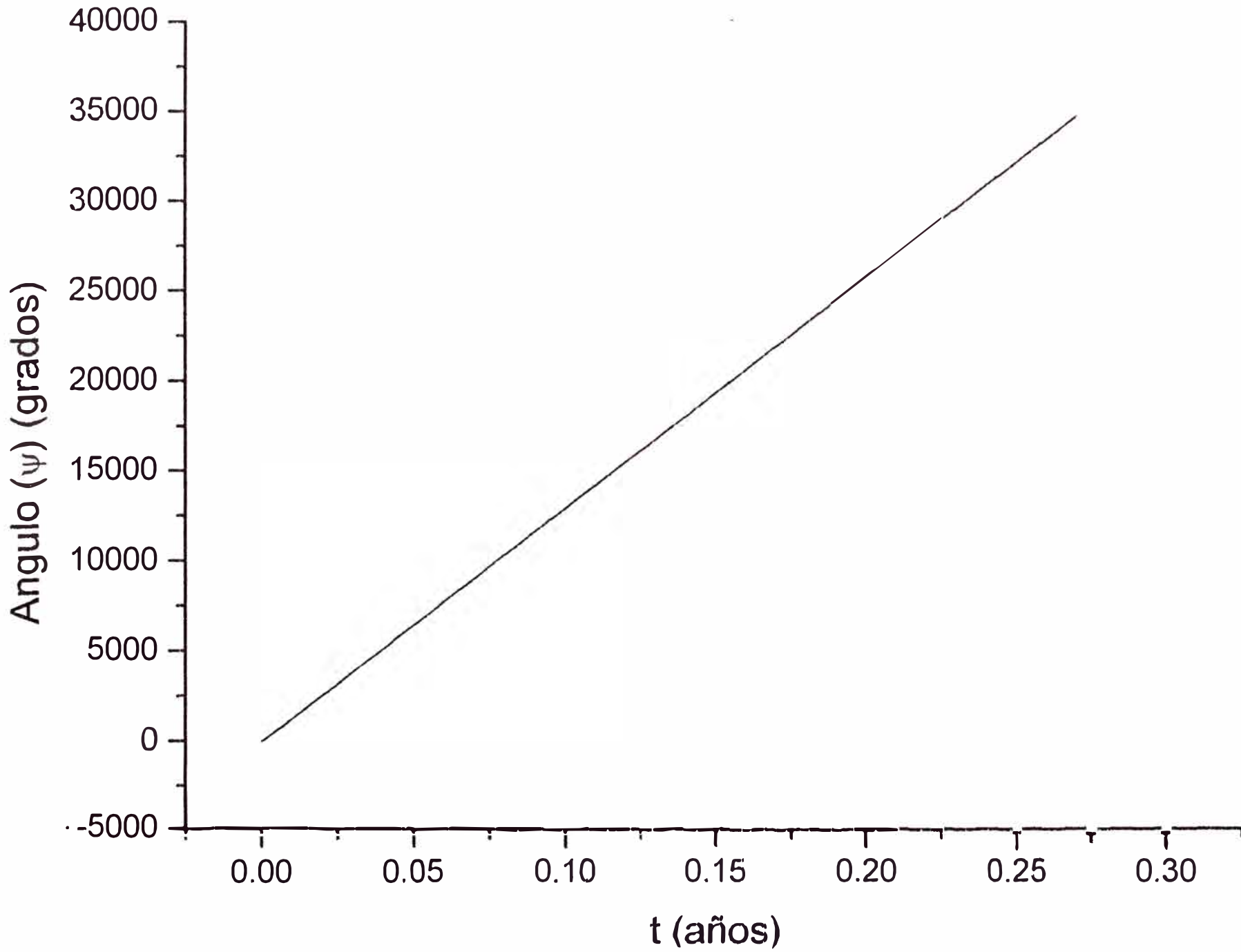
Observaciones:

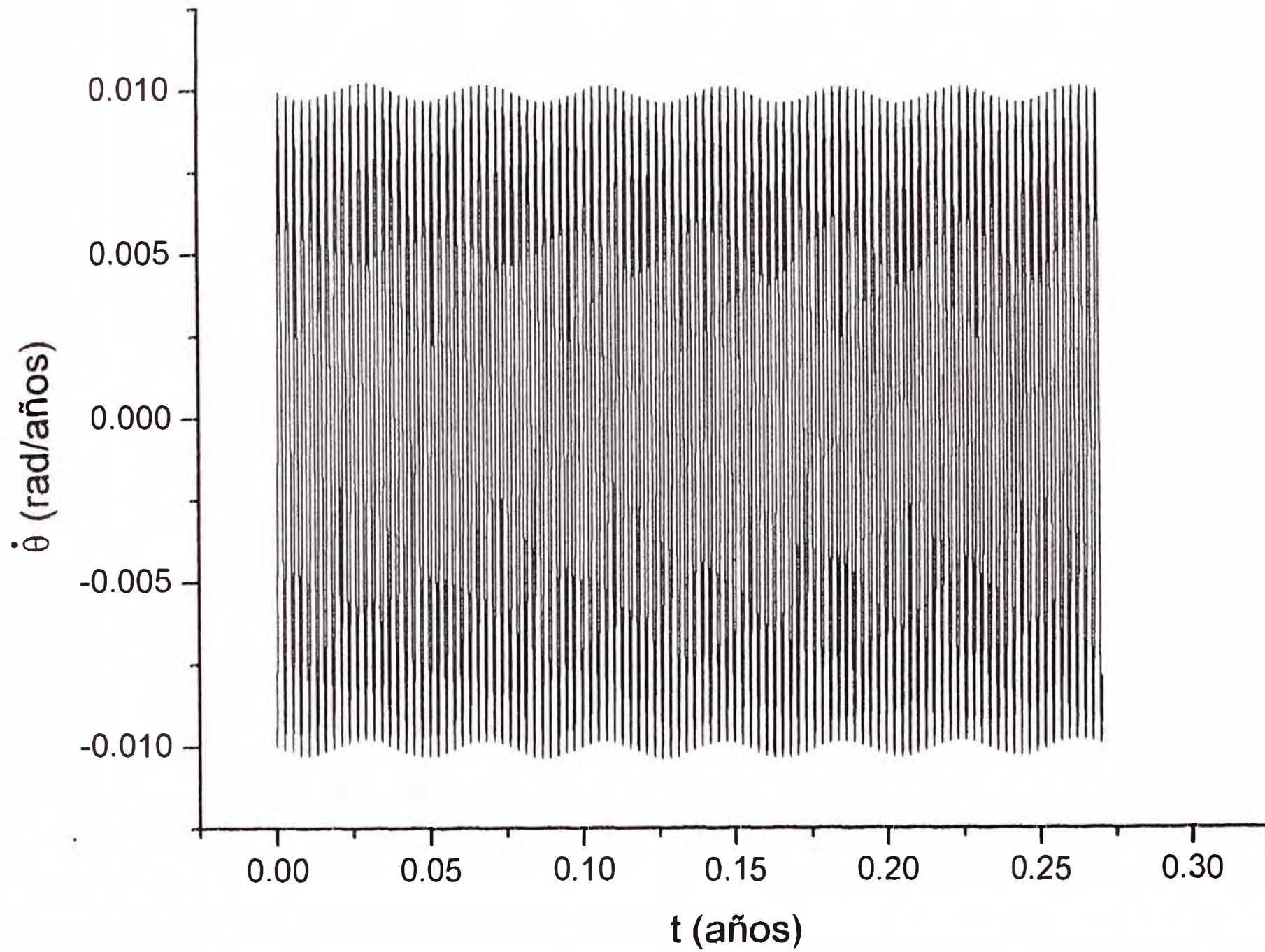
- a) Las gráficas de las funciones $\theta(t)$ y $\phi(t)$, continúan siendo oscilantes y decrecientes.
- b) Las gráficas de las funciones $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ continúan siendo periódicas.
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY , es una curva que está limitada por dos elipses.
- d) El extremo del eje X_3 sobre el plano XY sigue manteniendo la tendencia del caso anterior para 50 días.
- e) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una curva complicada pero limitada entre dos elipses.

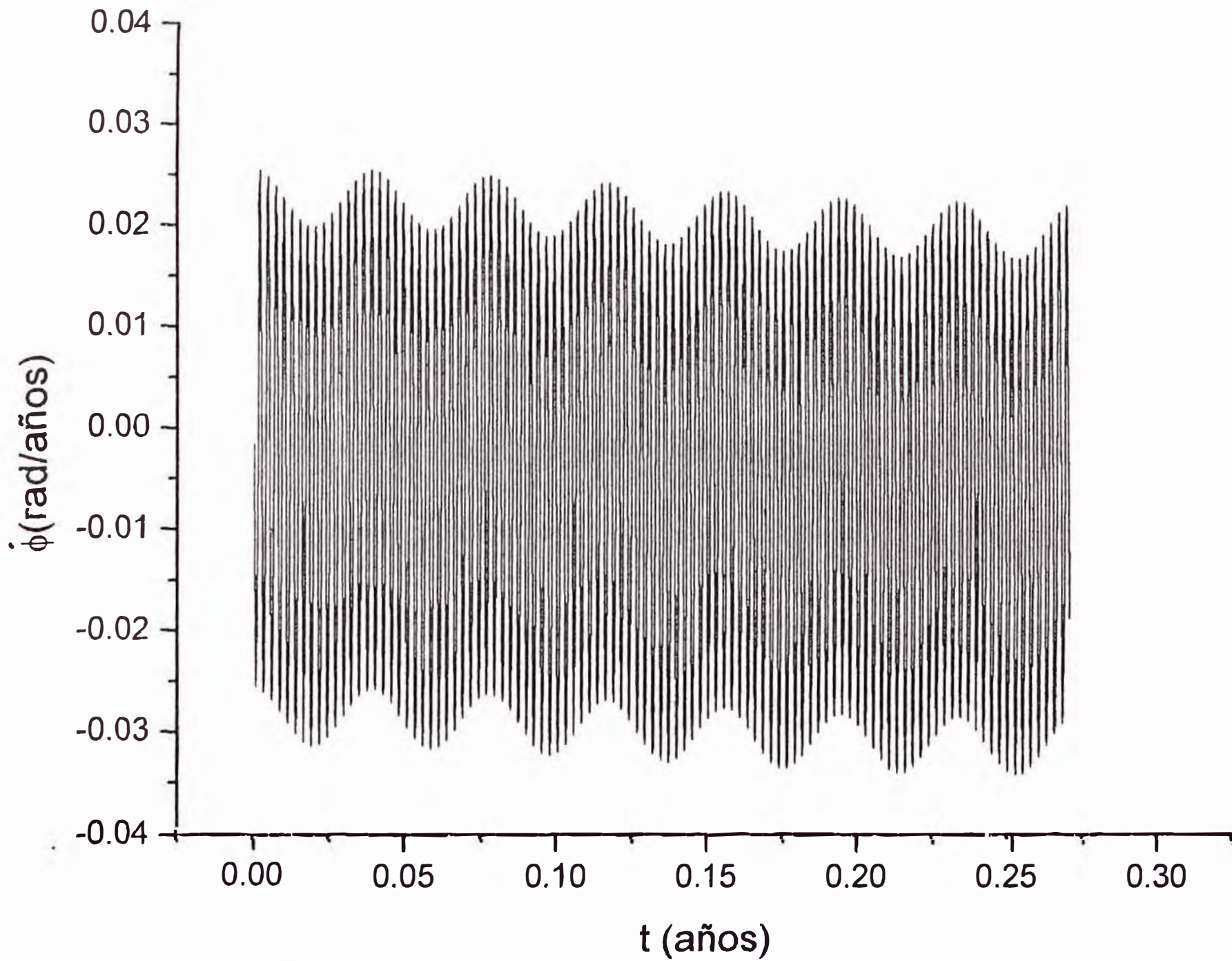
Para 100 días con $c=6000.55$ Km

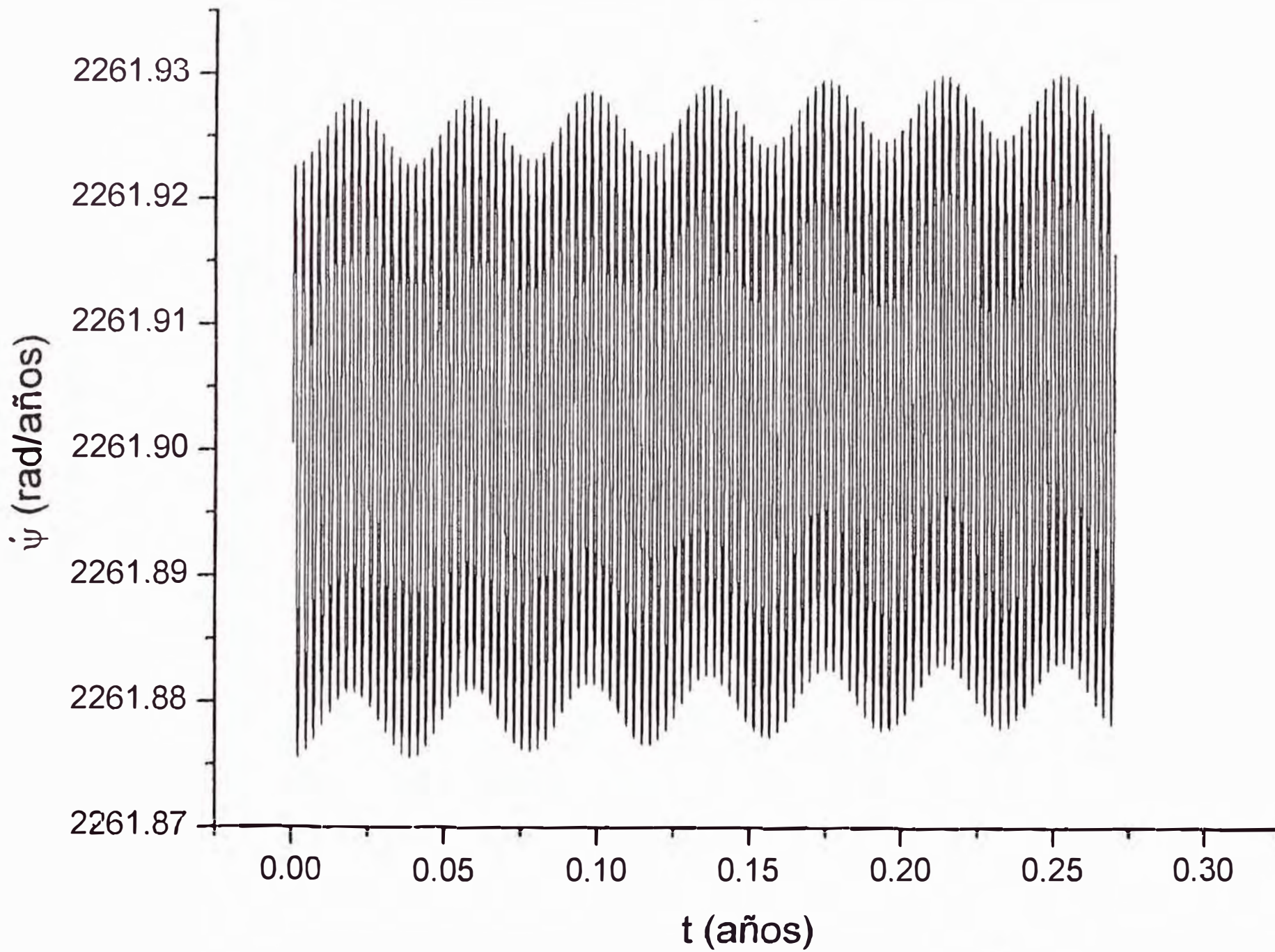




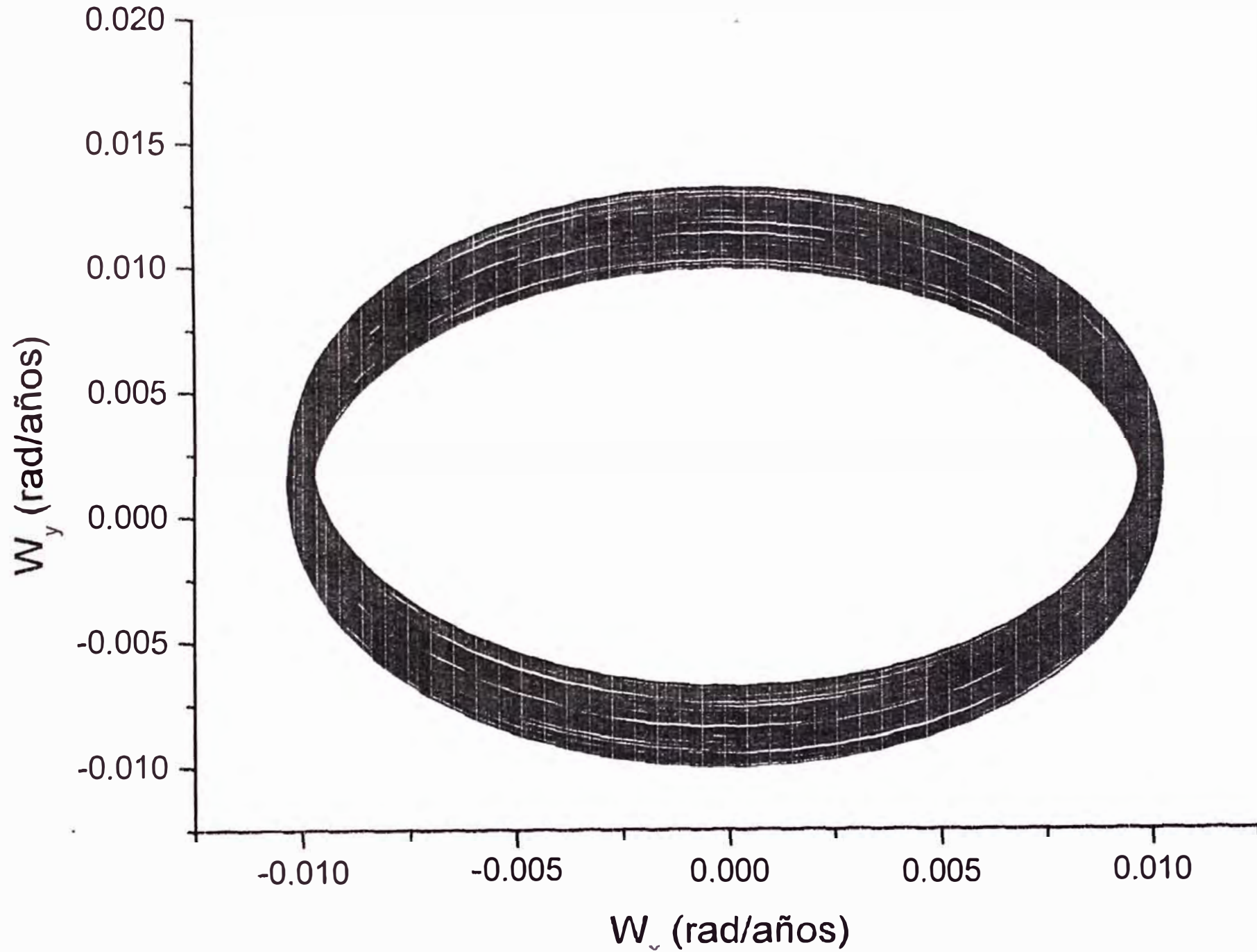




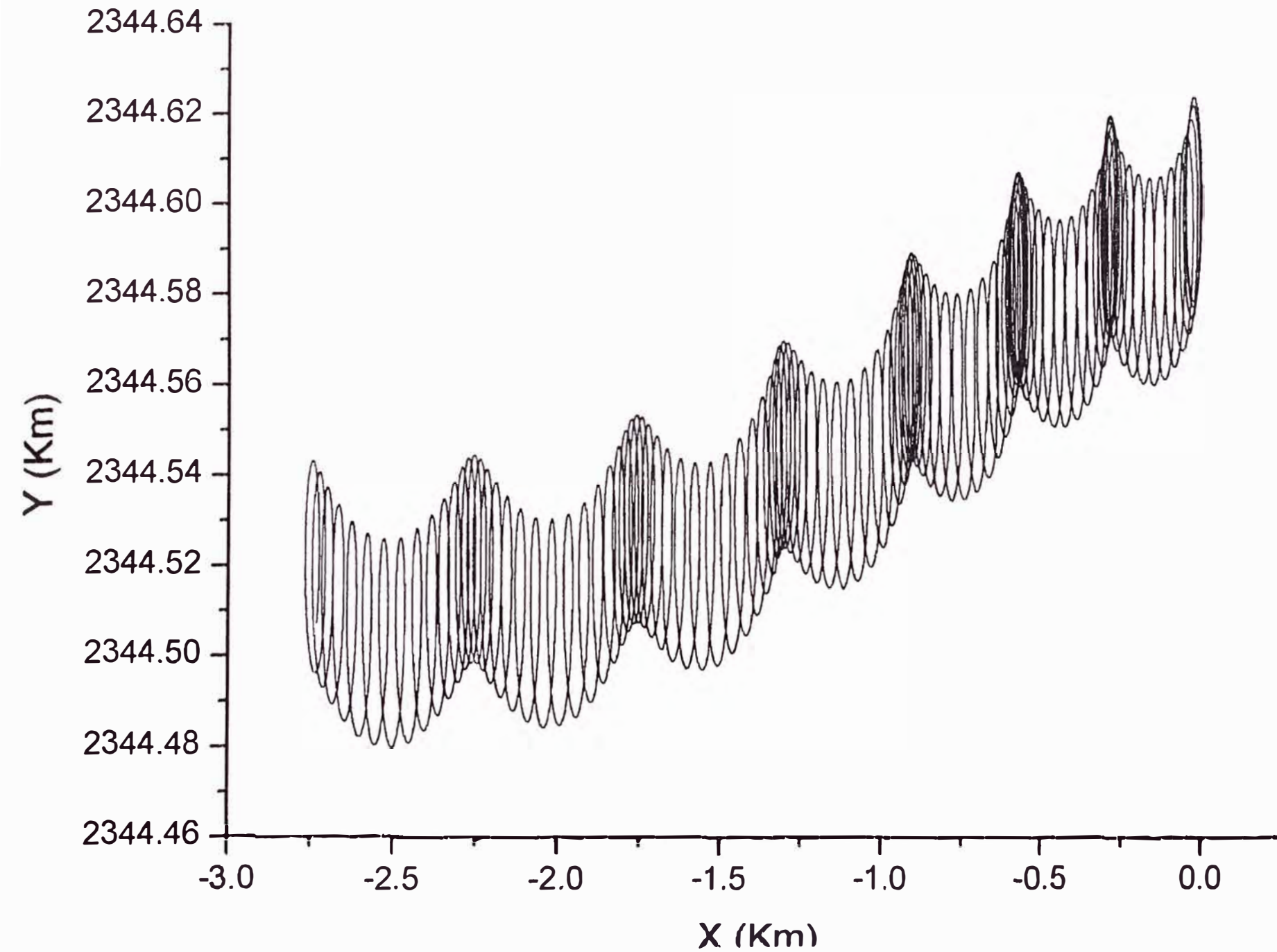




Proyección del Vector W sobre el plano XY para 100 días con $c=6000.55$ Km



Proyeccion del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 100 dias



Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 100 días con $c=6000.55$ Km

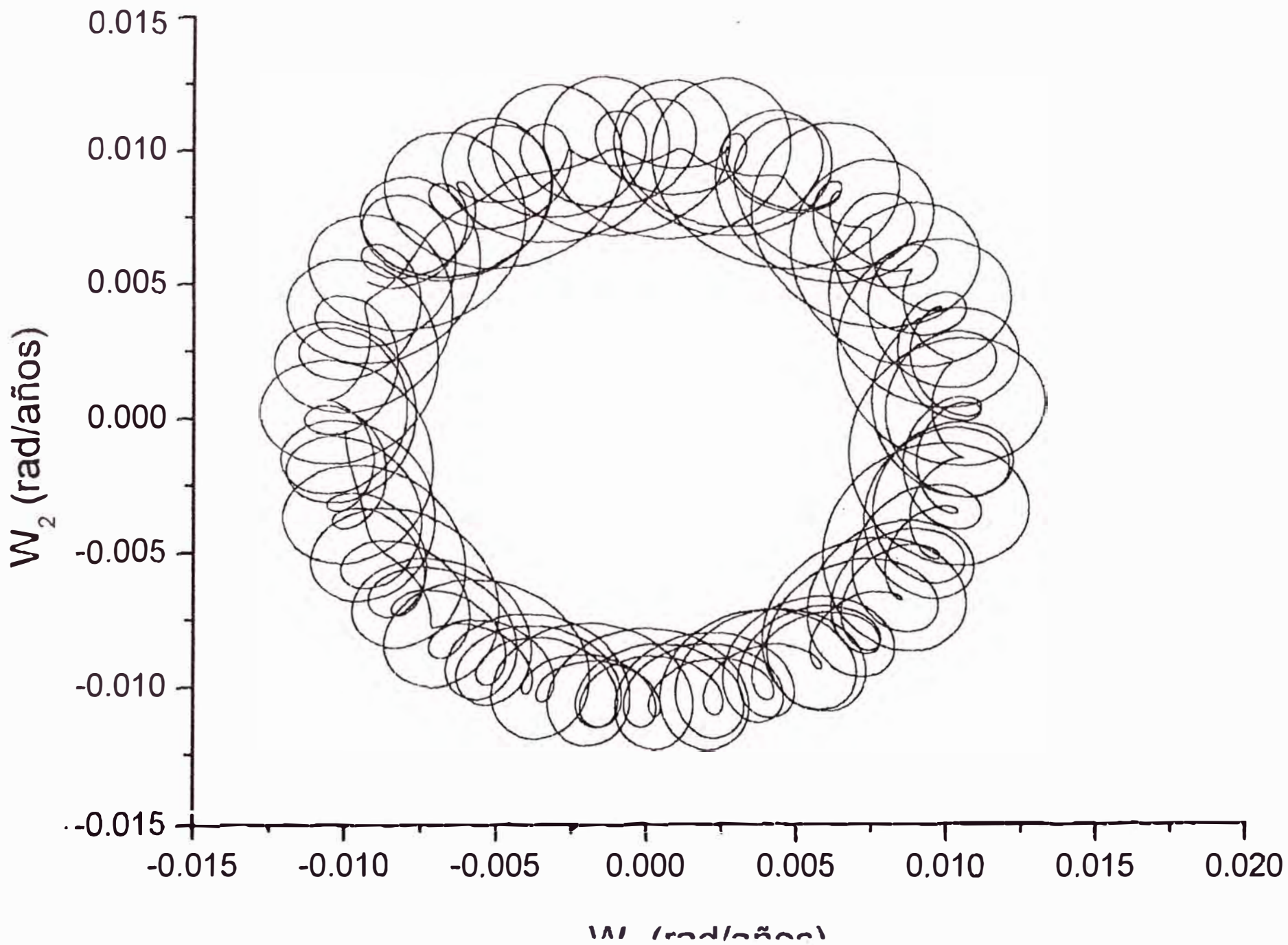


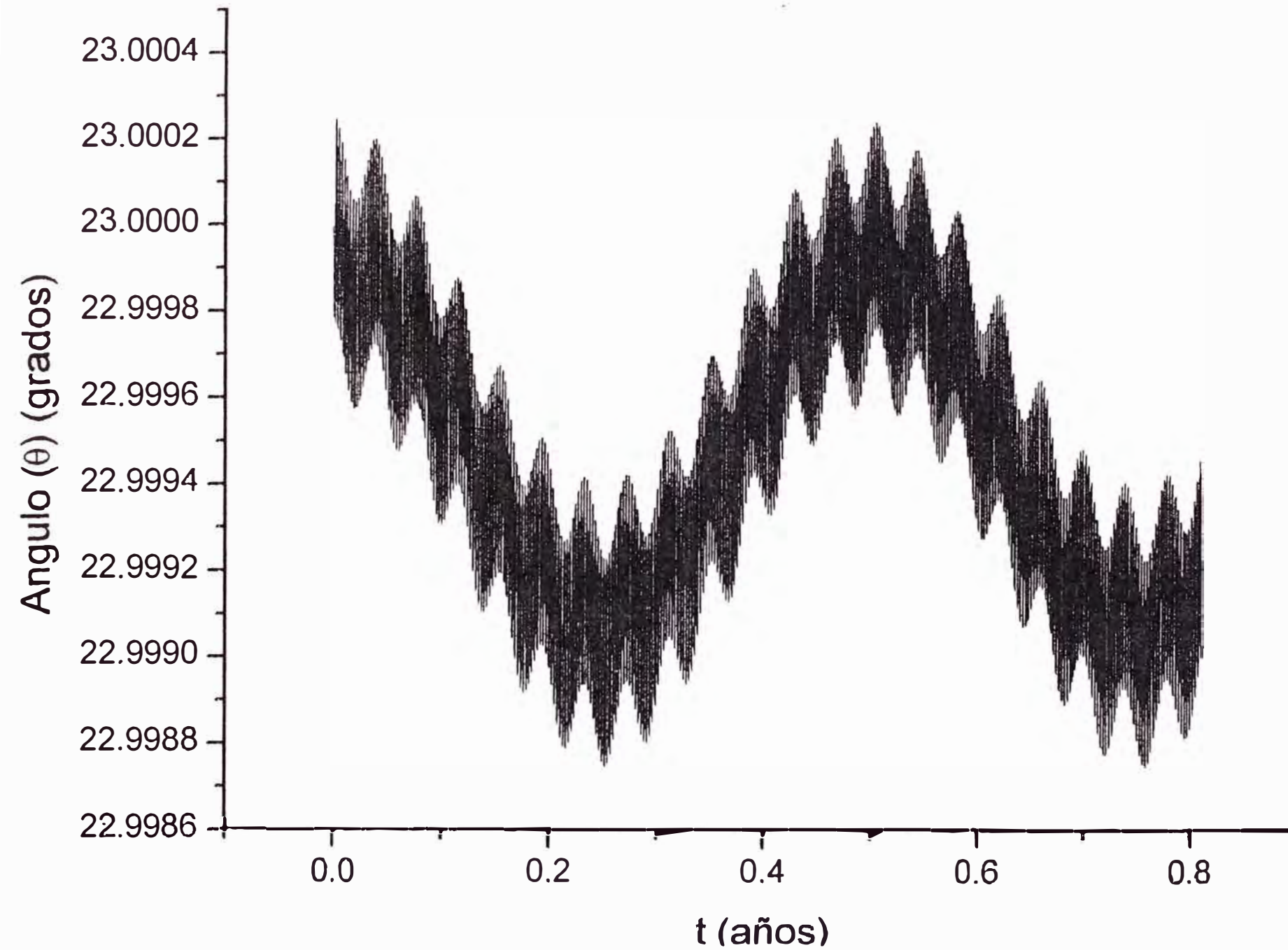
Table 10: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 300$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	247
$\phi(t)$	248
$\psi(t)$	249
W_y vs W_x	250
Y vs X	251
W_2 vs W_1	252

Observaciones:

- a) Observamos que la gráfica de la función $\theta(t)$, es periódica pero tipo modulada.
- b) Hay que resaltar que la gráfica de $\phi(t)$ sigue siendo una función decreciente.
- c) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano XY esta dentro de una region limitada por dos elipses.
- d) Se comprueba que el extremo del eje X_3 sobre el plano XY sigue siendo una curva oscilante pero en promedio decreciente.
- e) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una curva limitada por dos elipses.

Para 300 días con $c=6000.55$ Km

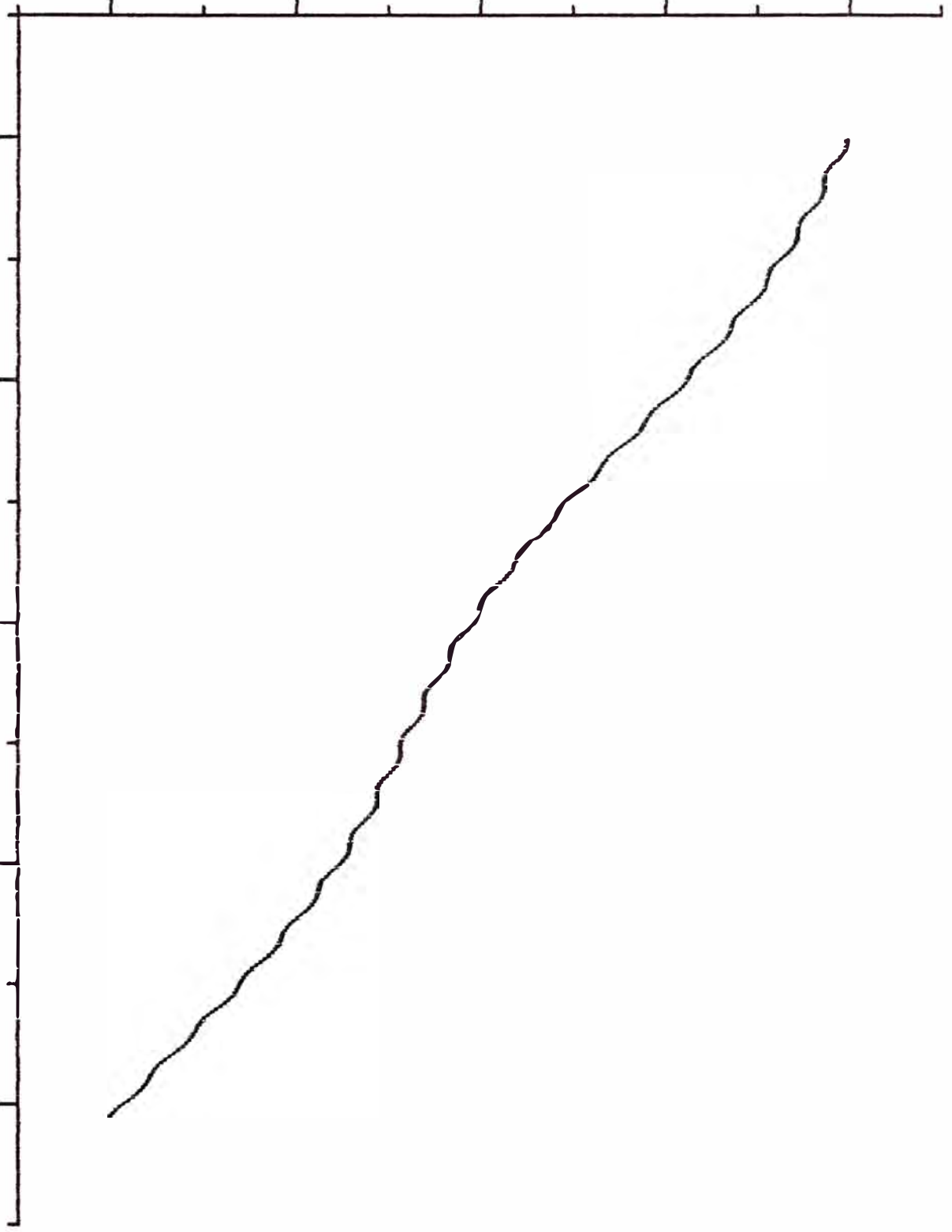


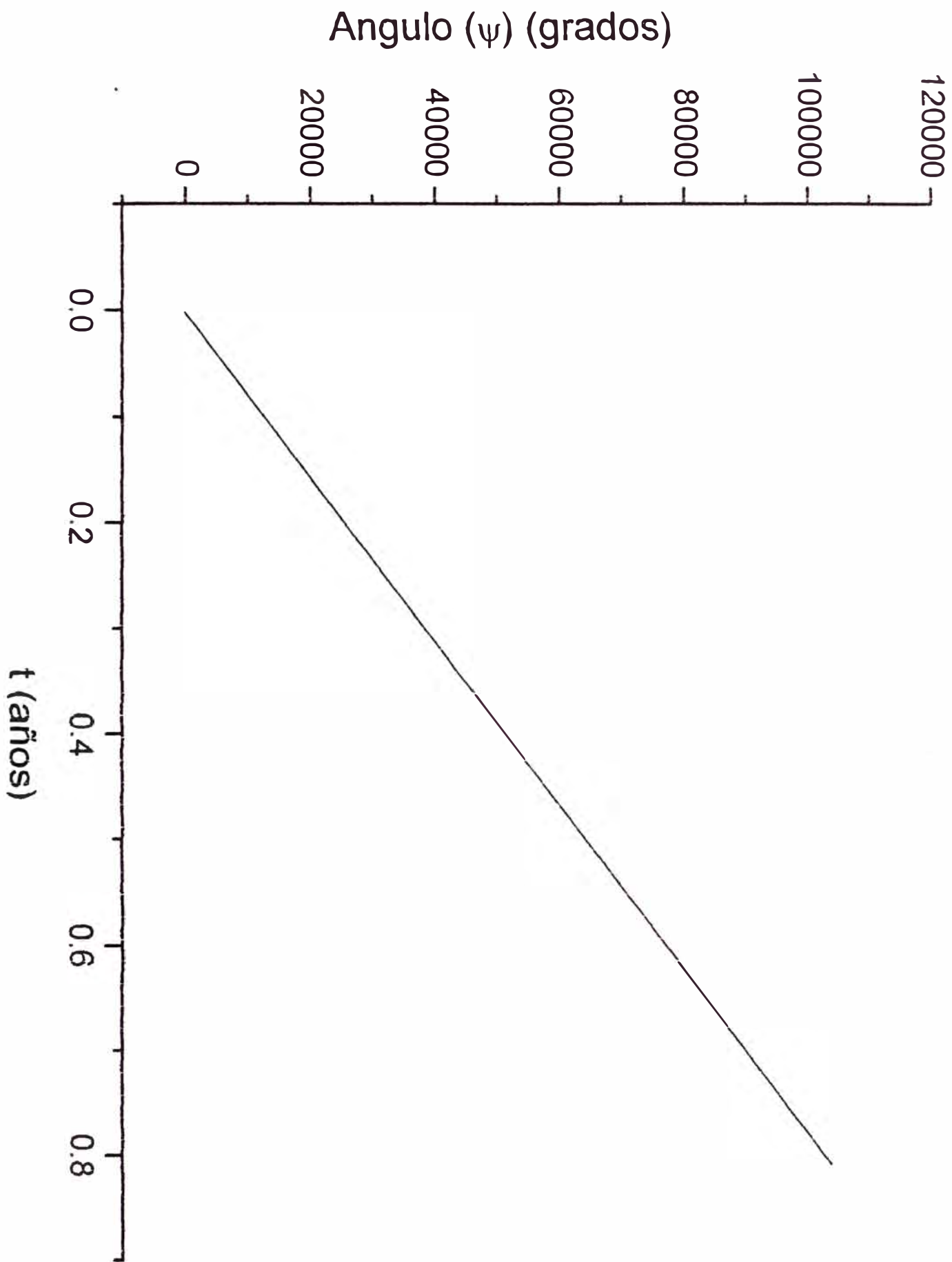
Angulo (ϕ) (grados)

0.00
-0.05
-0.10
-0.15
-0.20

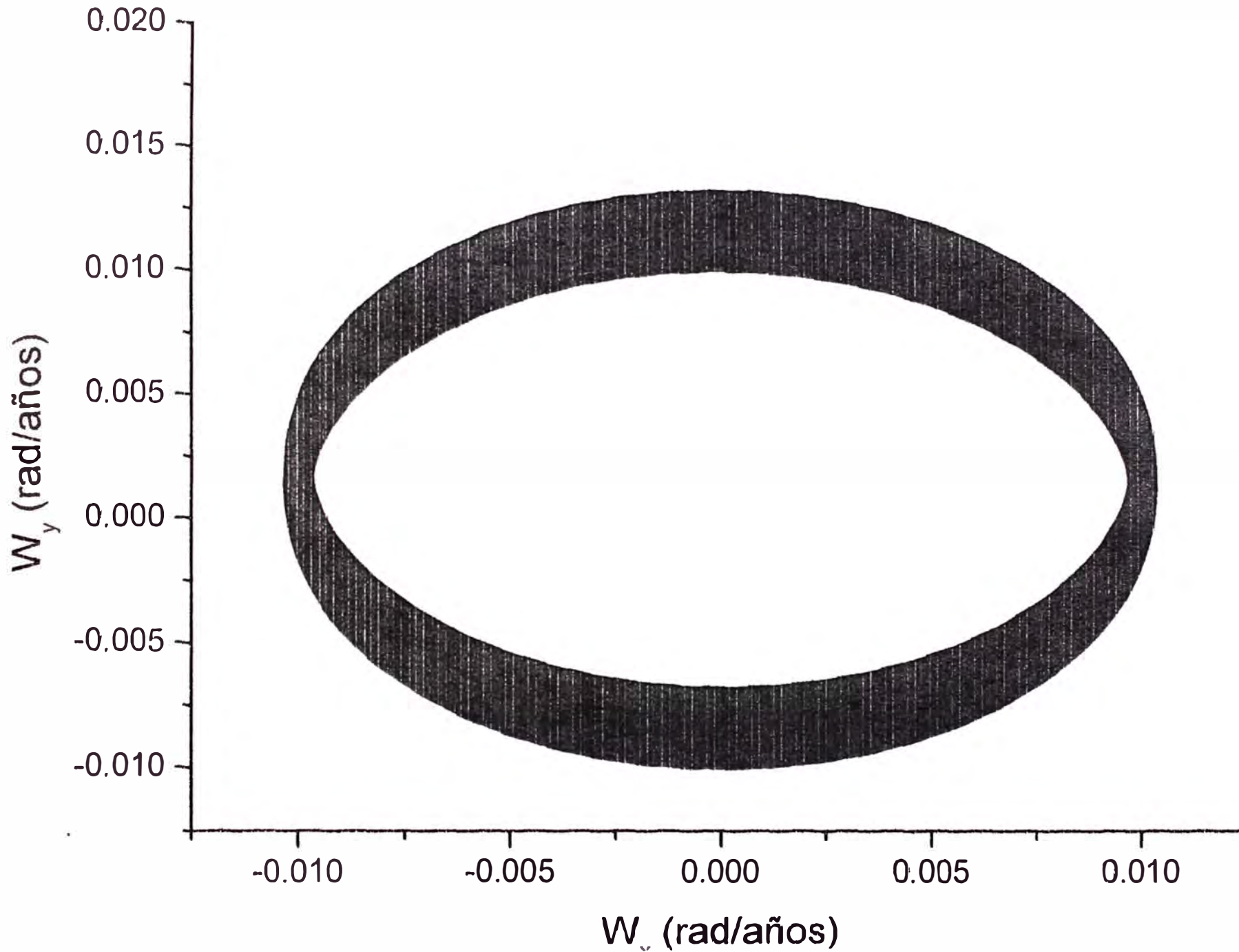
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8

t (años)

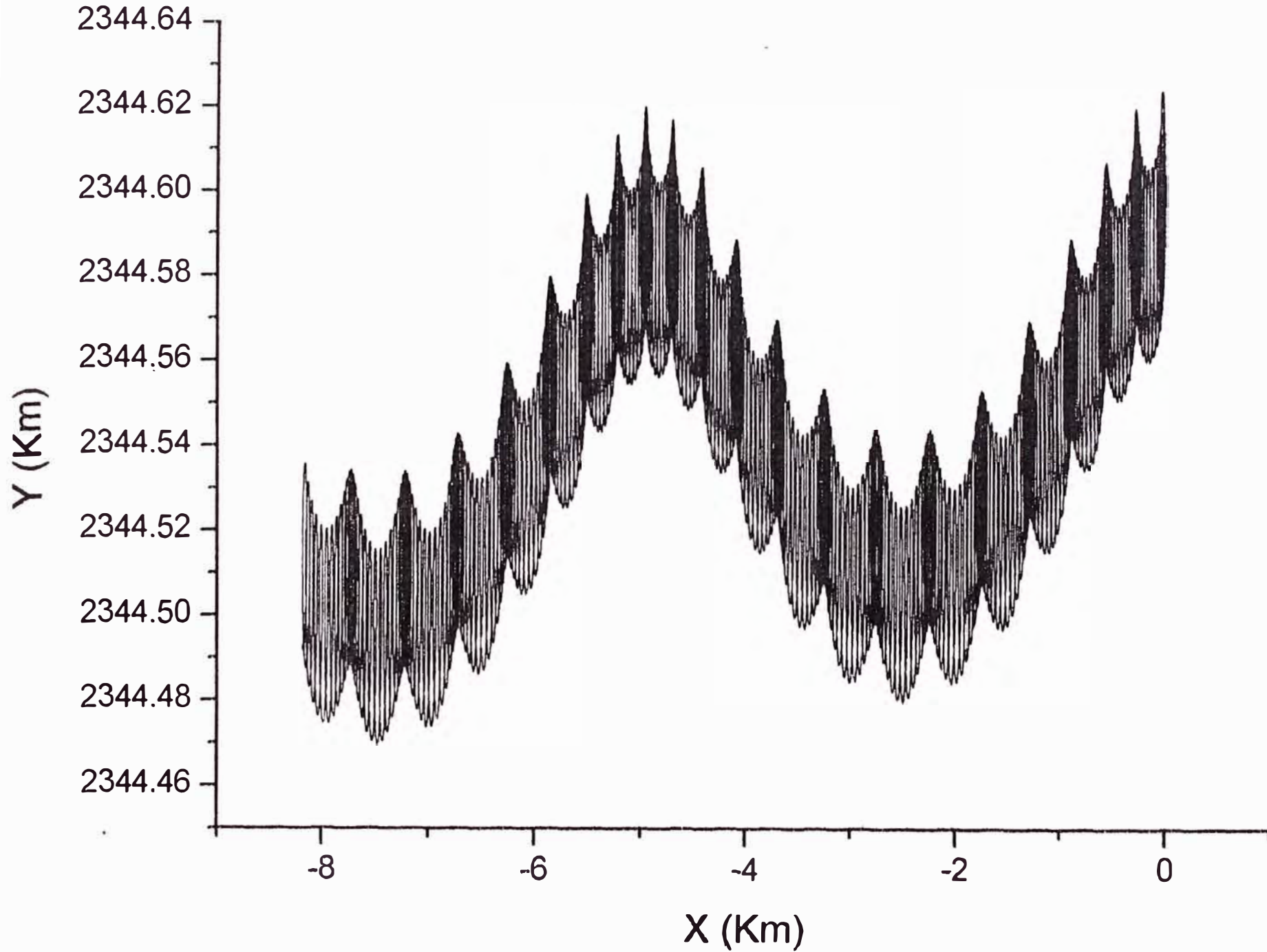




Proyección del Vector W sobre el plano XY para 300 días con $c=6000.55$ Km



Proyección del Extremo del Eje X_3 sobre el plano XY para 300 días



Proyección del Vector W sobre el plano X_1X_2 para 300 días con $c=6000.55$ Km

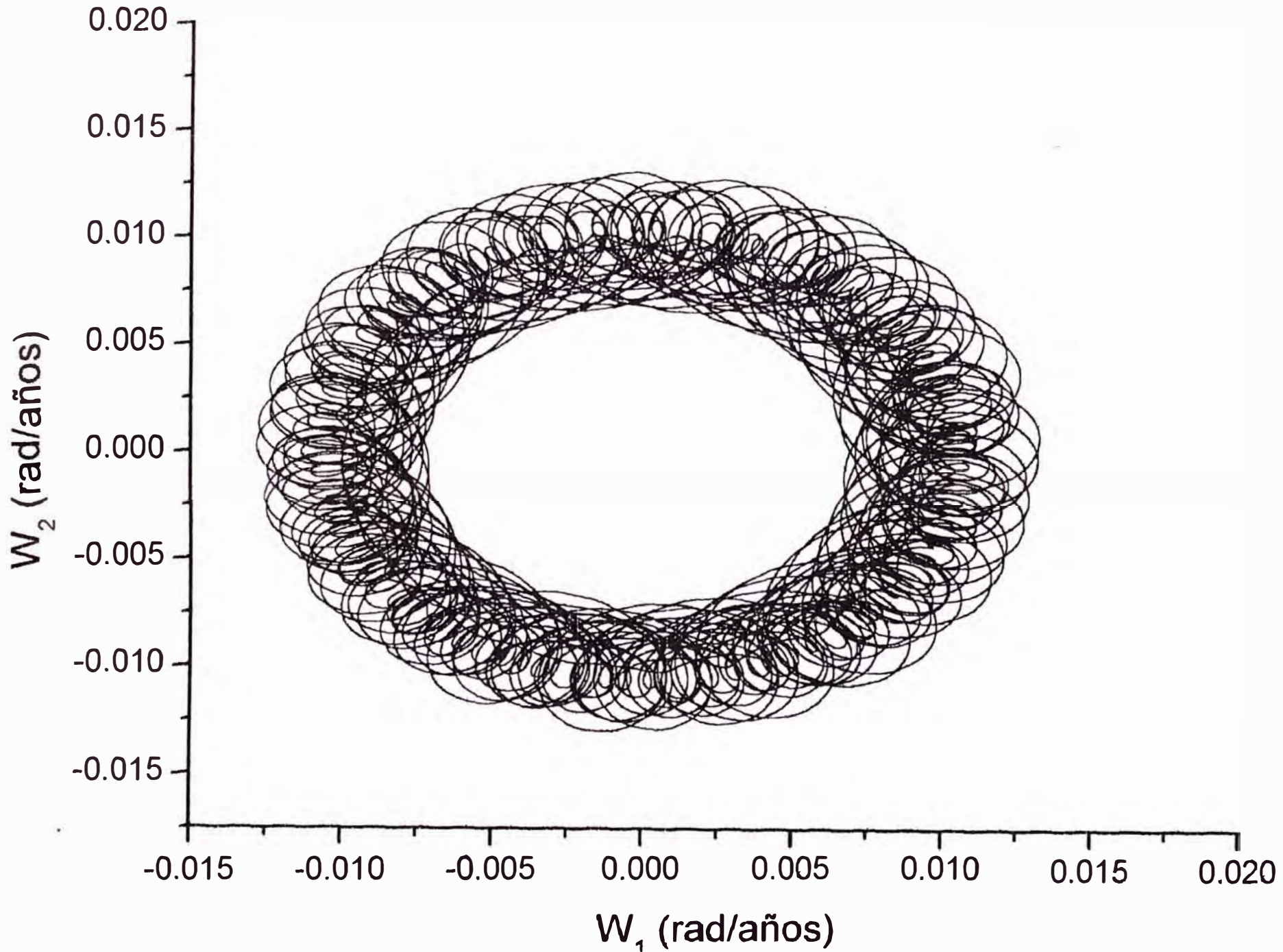


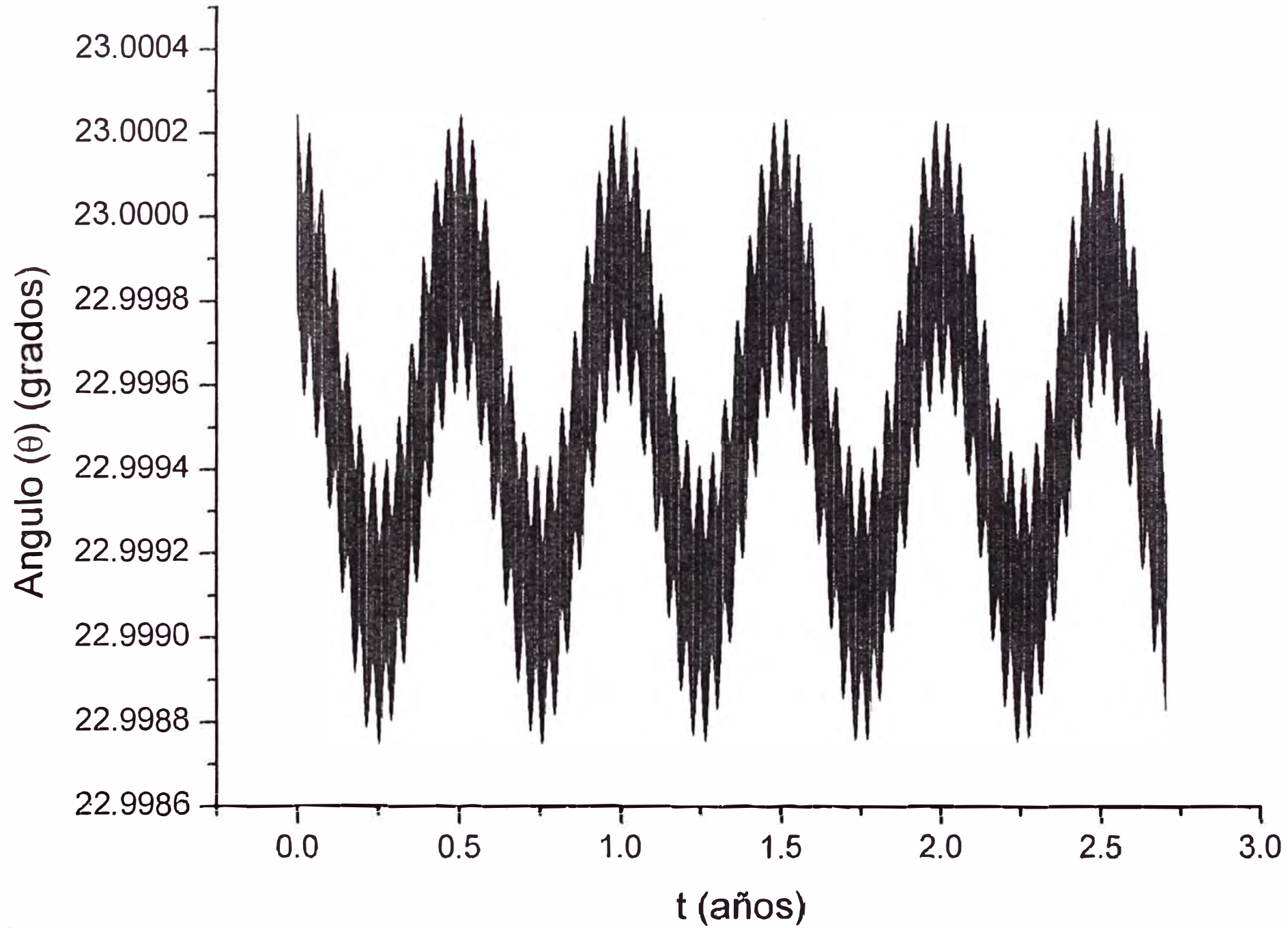
Table 11: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 1000$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\theta(t)$	254 y 255
$\phi(t)$	256
Y vs X	257
W_2 vs W_1	258

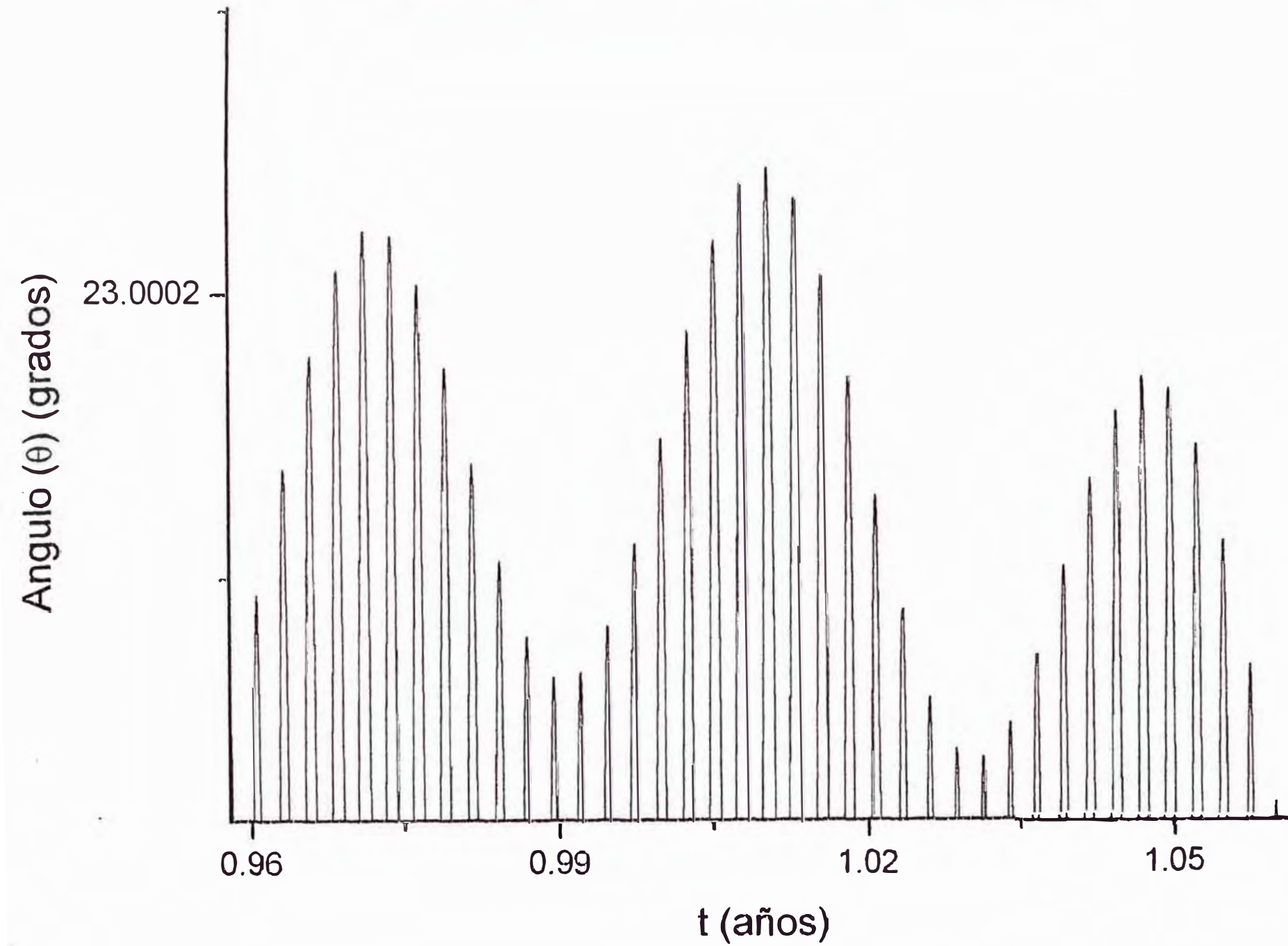
Observaciones:

- a) La gráfica de las función $\theta(t)$, continuan siendo oscilantes acercandose a una grafica modulada.
- b) La gráfica de $\phi(t)$ sigue siendo una función decreciente y oscilante.
- c) Del gráfico del extremo del eje X_3 sobre el plano XY podemos apreciar el fenómeno de la precesión de los equinoccios.
- d) La proyección del vector \vec{W} sobre el plano X_1X_2 es una curva con perturbaciones encerrada en una región eliptica.

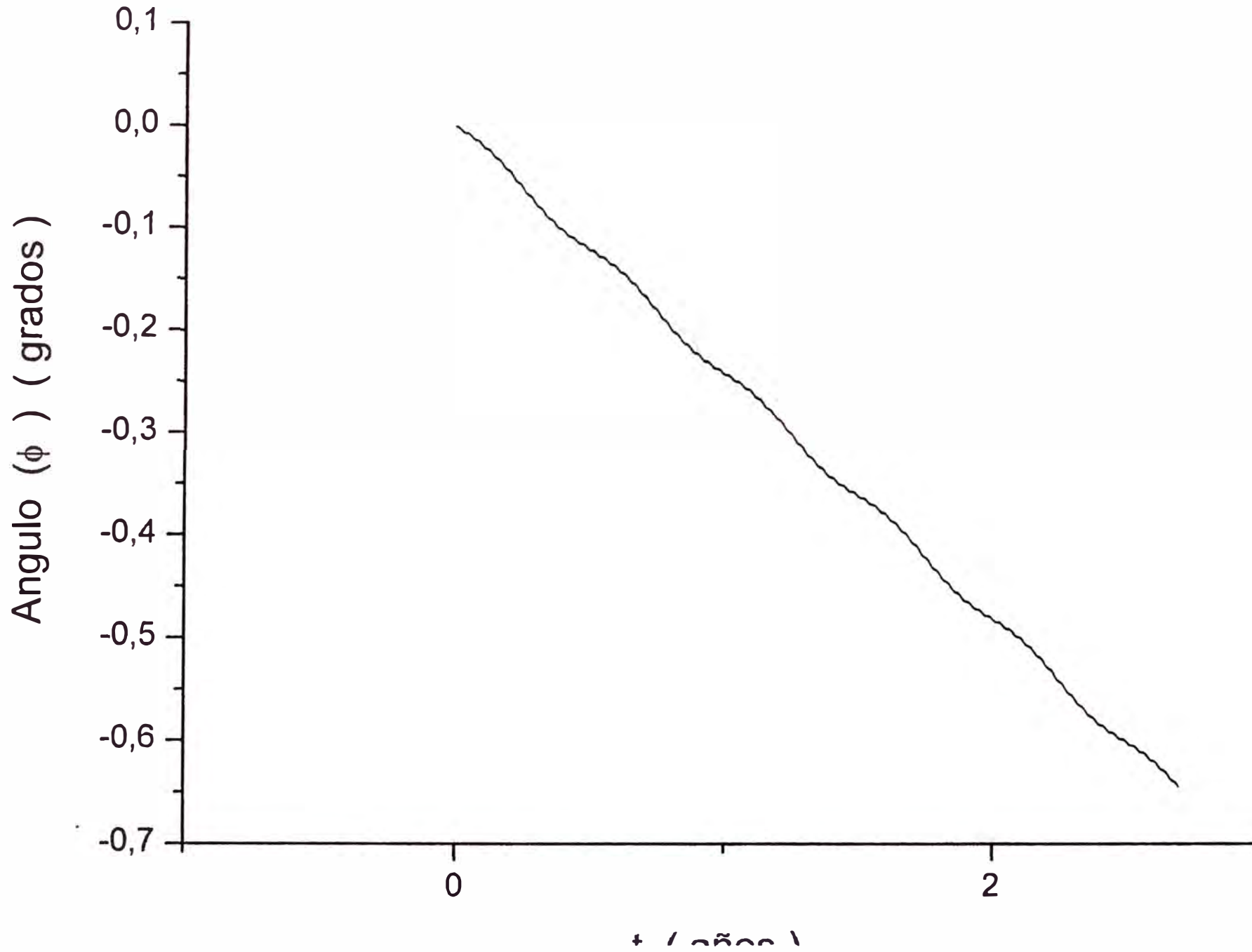
Para 1000 dias con $c=6000.55$ Km



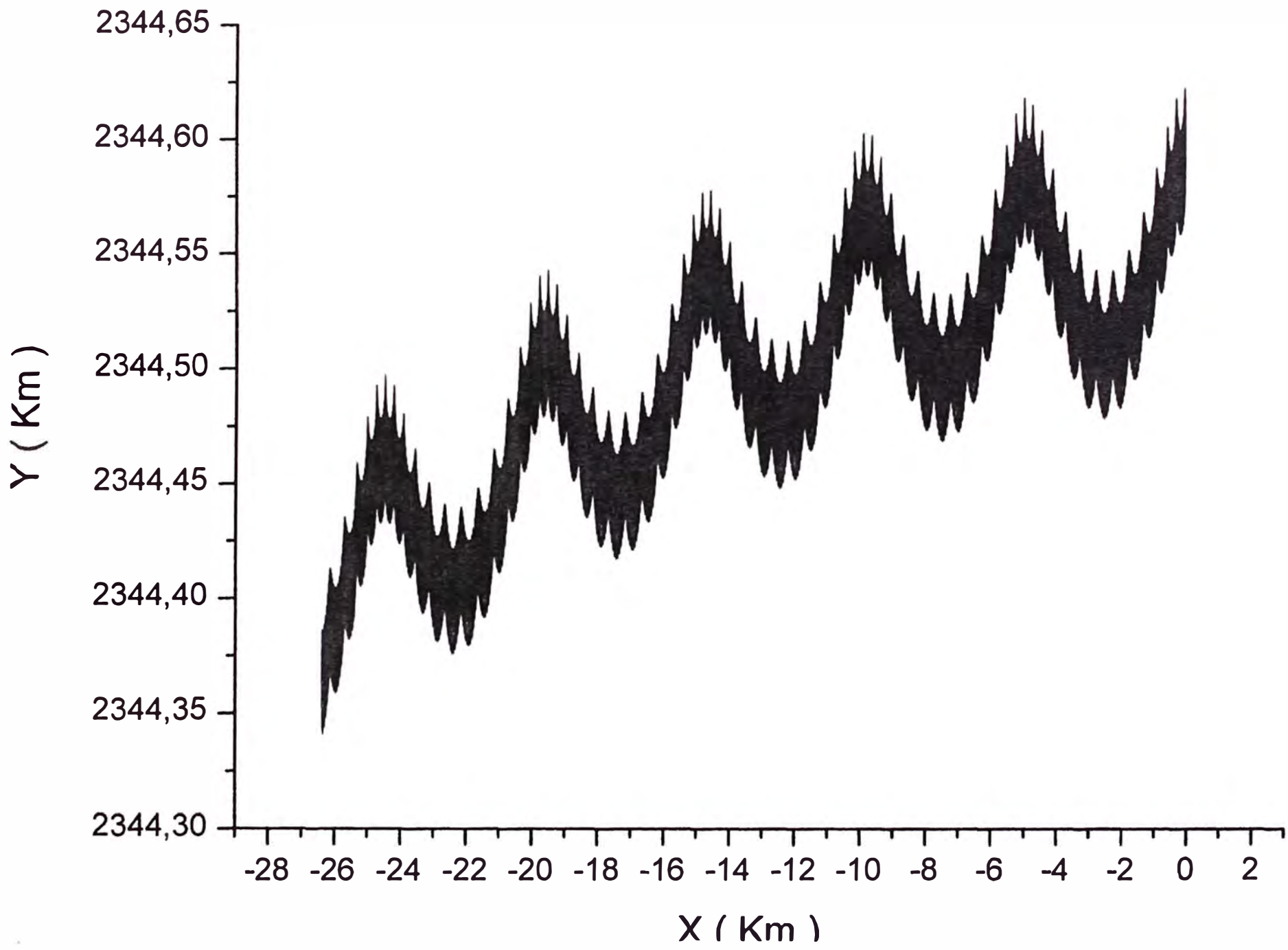
Ampliacion del grafico anterior



Para 1000 dias con $c = 6000.55$ Km



oyeccion del extremo del eje X_3 sobre el plano XY para 1000 dias con $c = 6000.55$ Km



Proyección del vector W sobre el plano X_1X_2 para 1000 días con $c=6000.55$ Km

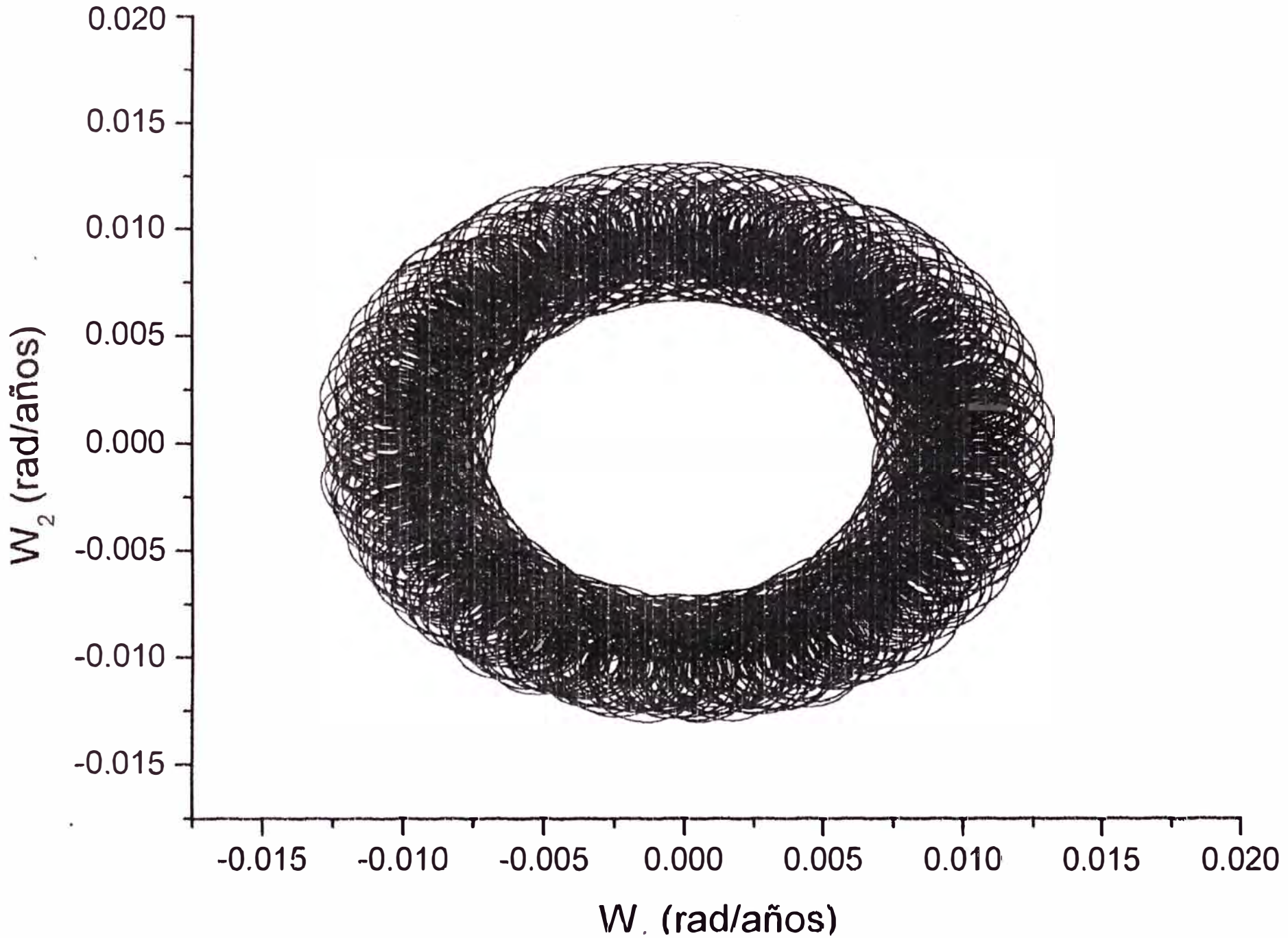


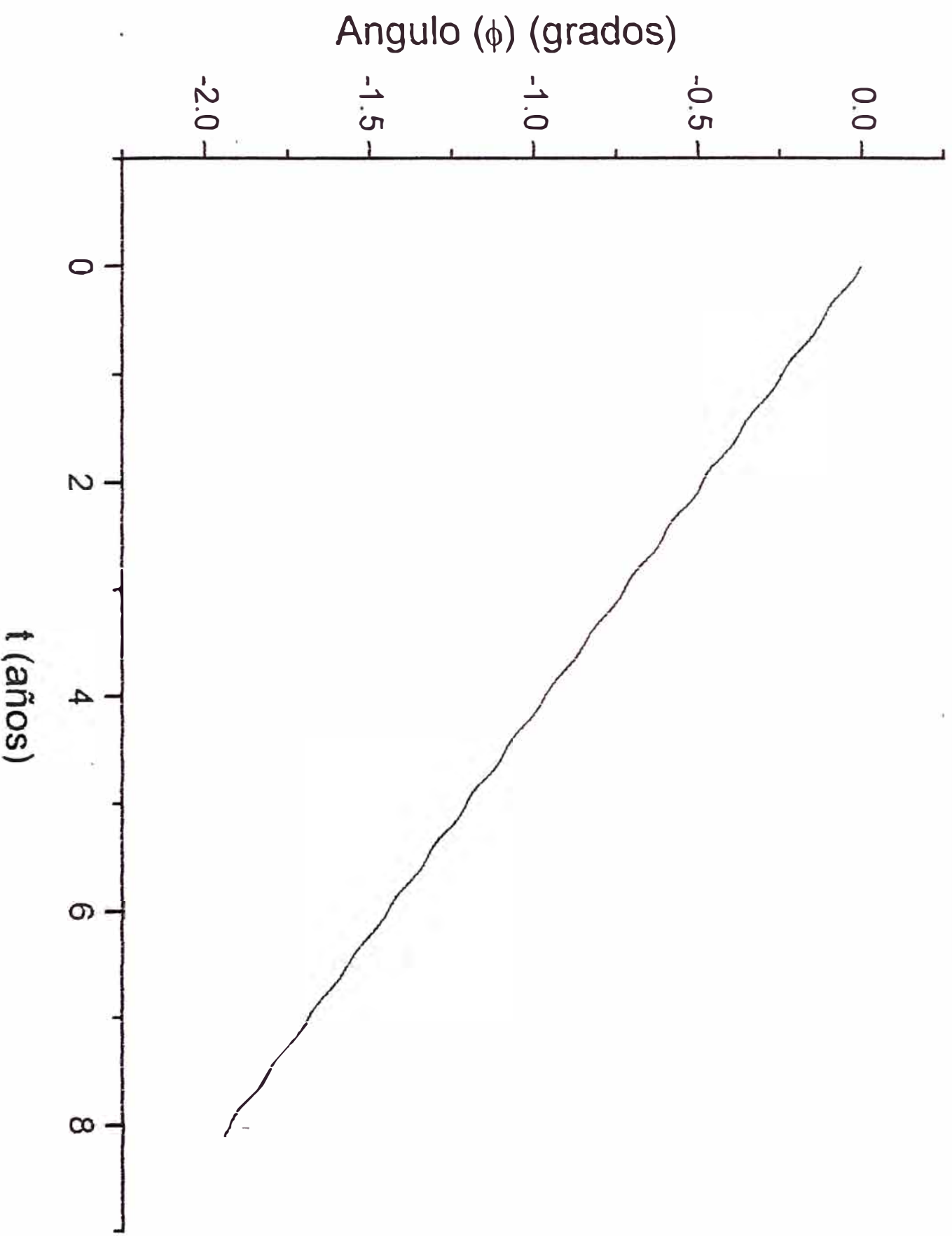
Table 12: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $0 < t < 3000$ días

Función ó Graficos	Pagina
$\phi(t)$	260
$Y vs X$	261

Observaciones:

- a) La tendencia del gráfico del extremo del eje X_3 sobre el plano XY es la misma notandose claramente ya el fenómeno de la precesión de los equinoccios.
- b) La gráfica de $\phi(t)$ nos muestra que sigue siendo una función lineal decreciente observando que para tiempos muy grandes es a una recta pudiendose asi determinar el período de precesión , obteniendose un valor aproximado de alrededor $T_{Precesión} = 1520$ años .

Para 3000 dias con $c=6000.55$ Km



Proyección del extremo del eje X_3 sobre el plano XY para 3000 días con $c = 6000.55$ Km

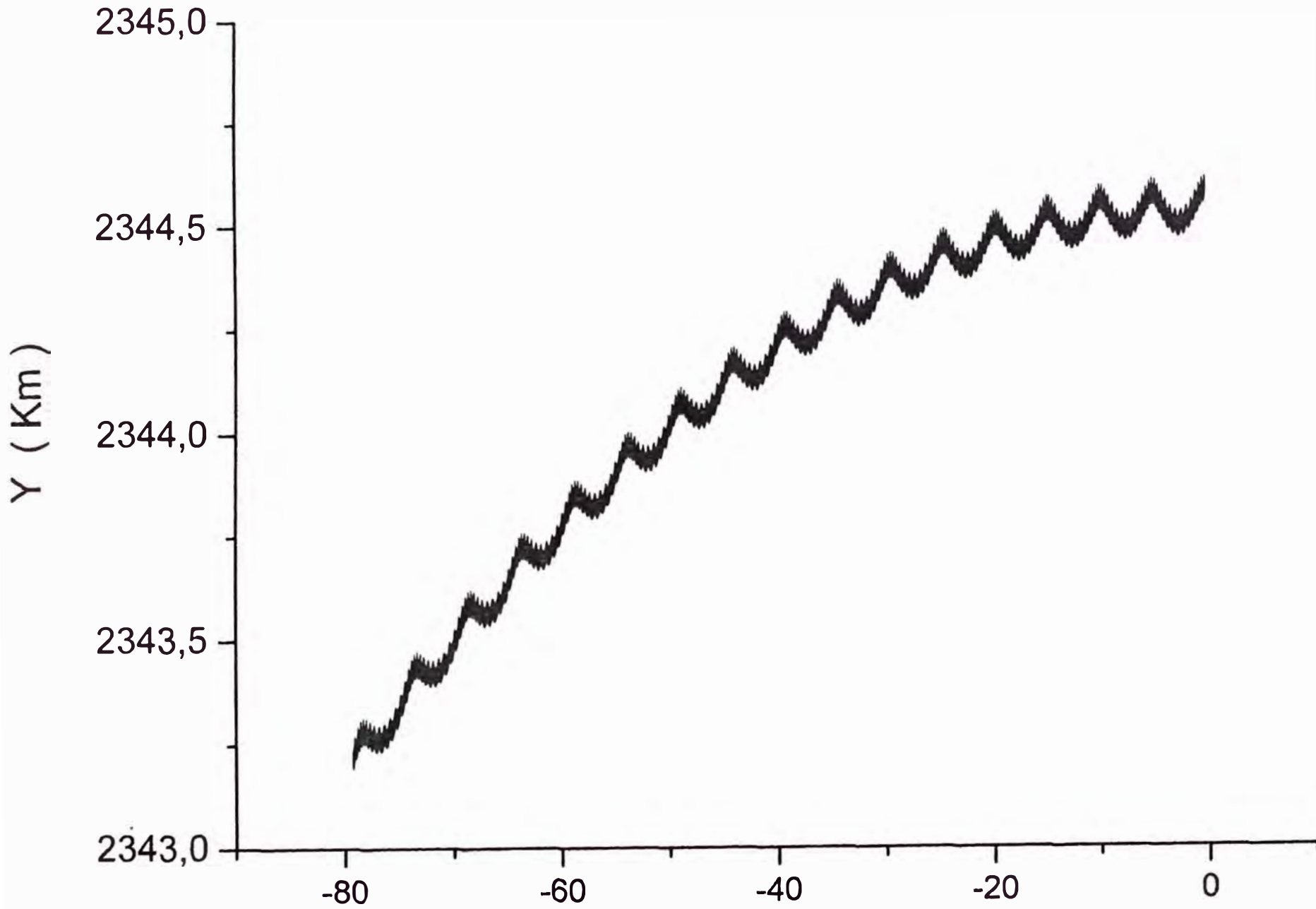


Table 13: Otros valores del período de precesión para diferentes valores del radio polar "c"

Radio polar c (Km)	$T_{Precesión}(\text{años})$
6355.55	26181
6350.55	21167
6345.55	15285
6325.55	10794
6285.55	6064
6205.55	3200
6200.55	3145
6000.55	1520
5800.55	994
5600.55	750
5400.55	607
5200.55	512

Con relación a los resultados que se muestran en la presente tabla podemos comentar lo siguiente:

- Se observa que cuando el radio polar tiende a acercarse al radio ecuatorial el período de precesión tiende a ser muy grande.
- Se comprueba que para una esfera homogénea no presentaría el fenómeno de precesión que equivale a decir que su período sea infinito.
- De los resultados anteriores también notamos que cuando el radio polar disminuye el período de precesión decrece rápidamente llegando a valores menores de 1000 años.
- Si existiese un planeta con un radio polar $c < 5800$ Km el fenómeno de precesión de los equinoccios afectaría notablemente el clima.
- Para un radio polar menor de 6000 Km ya no es necesario usar la extrapolación en el gráfico $\phi(t)$ para determinar el valor del período de precesión $T_{precesión}$.
- Al simular este movimiento de la precesión de los equinoccios se varia en algunos casos los valores de $\psi, \phi, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ obtenemos los mismos resultados, esto significa que el movimiento es determinado por las condiciones iniciales $\theta = 23^\circ$, $\dot{\psi}(0) = \frac{360^\circ}{\text{año}}$

Table 14: Valores del período de Precesión en función del período de revolución T de la Tierra

Período de Revolución (T = 1 año)	Período de Precesión (años)
T	26181
0.84 T	22901
0.66T	18574
0.55 T	15090
0.50 T	13190
0.33 T	7215
0.20 T	2945
0.10 T	780
0.05 T	198

Con relación a los resultados que se muestran en la tabla anterior podemos comentar lo siguiente:

- a) Los resultados han sido obtenidos considerando que la tierra es acercada al sol y por lo tanto esto trae como consecuencia la disminución del período de rotación T alrededor del sol.
- b) Notamos que cuanto mas cerca se encuentre la tierra del sol el período de precesión disminuye.
- c) Es evidente que si la tierra se encontrase mas lejos del sol de lo que se encuentra ahora el período de precesión aumentaria, seria mayor de 26000 años.

4.4 Conclusiones

- 1) Notamos que para pequeñas variaciones de las dimensiones del semieje "c" el período de precesión disminuye bruscamente de 26181 años para un radio polar de 6355.55 Km a 21167 años para un radio de 6350.55 Km.
- 2) El cambio del período de precesión es más suave cuando disminuimos el período de revolución alrededor del sol
- 3) Para pequeños intervalos de tiempo menores que un día el movimiento de la Tierra es parecido al movimiento que presenta la tierra para el caso cuando esta aislado
- 4) Este modelo , a pesar ser muy "tosco" , es suficiente para simular el movimiento de precesión de los equinoccios , donde los resultados son obtenidos con errores menores de 1000 años con relación al valor conocido para el período de precesión y podemos afirmar además que estos cálculos son consistentes ya que al hallar la energía del sistema tiene valor constante (obtenidos con los valores de las coordenadas generalizadas).
- 5) Podemos finalmente concluir que el período de precesión de los equinoccios disminuye por la existencia de la Luna que resulta ser de aproximadamente 80000 años a 26000 años. Este tiempo sería modificado si cambia las dimensiones de la Tierra o cambia también algunos de los parámetros de la órbita de ella . Como es evidente si disminuye el período de precesión sería fatal para la vida ya que habría cambios dramáticos en el clima de la Tierra.

Apéndice del Capítulo IV - A

Demostración de la Ecuación 4.18

Demostraremos que la velocidad de la Luna V_L , (considerada como una partícula) alrededor del Sol es aproximadamente igual a la velocidad del centro de masa (punto G) de la Tierra alrededor del Sol por un factor que depende del tiempo. Para demostrar la relación (4.18) consideremos dos sistemas de referencia. El Sistema de Referencia inercial con origen en el Sol XYZ y otro $X'Y'Z'$ (Ver Figura A.1) no inercial con origen en el punto G. Este sistema se mueve de tal modo que se cumple: el eje X // al eje X' y el eje Y // al eje Y' .

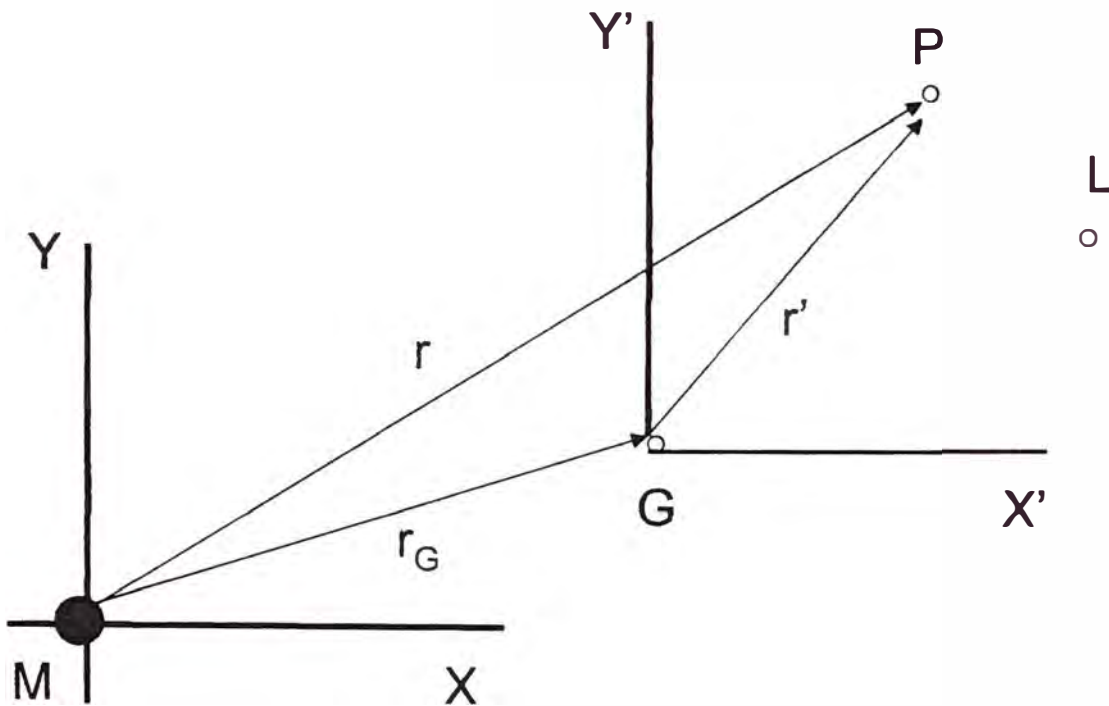


Fig. A.1

De la figura A.1 podemos afirmar que para cualquier partícula P los vectores posición \vec{r} , \vec{r}' con respecto a los sistemas de referencia XYZ , $X'Y'Z'$ respectivamente cumplen:

$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}' \quad (4.48)$$

de la ecuación anterior se tiene la relación que cumple con la velocidad de P respecto a los sistemas XYZ , e $X'Y'Z'$ (Ver Fig.A1):

$$\vec{V} = \vec{V}_G + \vec{V}' \quad (4.49)$$

Si P es la Luna tenemos

$$\vec{V}_L = \vec{V}'_L + \vec{V}_G \quad (1.50)$$

Donde \vec{V}_L y \vec{V}_L' son las velocidades de la Luna respecto al Sol y Tierra respectivamente. De esta ultima ecuación obtenemos fácilmente:

$$V_L^2 = |\vec{V}_L'|^2 + |\vec{V}_G|^2 + 2\vec{V}_L' \cdot \vec{V}_G \quad (4.51)$$

Que equivale a :

$$V_L = \sqrt{|\vec{V}_L'|^2 + |\vec{V}_G|^2 + 2\vec{V}_L' \cdot \vec{V}_G} \quad (4.52)$$

o bien

$$V_L = \sqrt{|\vec{V}_L'|^2 + |\vec{V}_G|^2 + 2V_L' V_G \cos \gamma} \quad (4.53)$$

donde γ es el ángulo formado por los vectores \vec{V}_L' y \vec{V}_G . Se demostrará que este ángulo depende del tiempo mediante la relación:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{V}_G \cdot \vec{V}_L'}{|\vec{V}_G| |\vec{V}_L'|} \quad (4.54)$$

Para calcular el producto interno $\vec{V}_L' \cdot \vec{V}_G$ consideramos el vector posición del punto G con respecto al sistema de referencia inercial XYZ de la forma (Ver Fig.A2).

$$\vec{r}_G = r_G (\cos \phi_T \vec{i} + \sin \phi_T \vec{j}) \quad (4.55)$$

Donde $|\vec{r}_G|$ es la distancia de la Tierra al Sol.

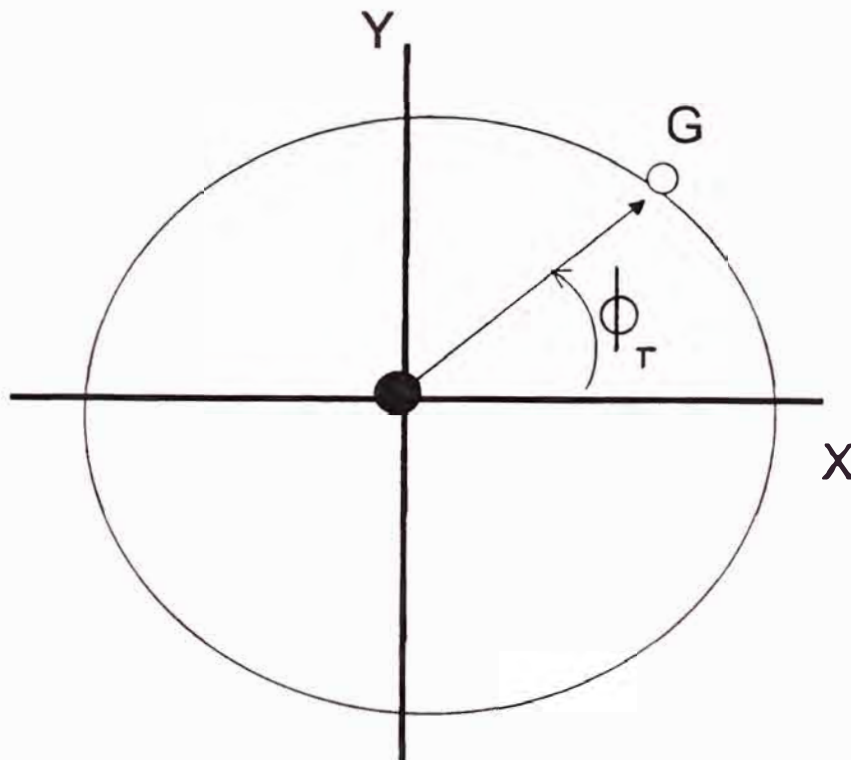


Fig. A.2

es evidente que

$$\phi_T = \frac{2\pi}{T} \quad (4.56)$$

luego

$$\vec{r}_G = r_G \left(\cos \frac{2\pi}{T} t \vec{i} + \text{sen} \frac{2\pi}{T} t \vec{j} \right) \quad (4.57)$$

por lo tanto la velocidad del punto G

$$\vec{V}_G = \frac{2\pi r_G}{T} \left(-\text{sen} \frac{2\pi}{T} t \vec{i} + \cos \frac{2\pi}{T} t \vec{j} \right) \quad (4.58)$$

Por otra parte el movimiento de la Luna con respecto al sistema $X'Y'Z'$ está definido por el vector posición (Ver Fig.A3):

$$\vec{r}'_L = r'_L \left(\cos \frac{2\pi}{T_L} t \vec{i} + \text{sen} \frac{2\pi}{T_L} t \vec{j} \right) \quad (4.59)$$

Donde $|\vec{r}'_L| = r'_L$ es la distancia de la Luna a la Tierra.

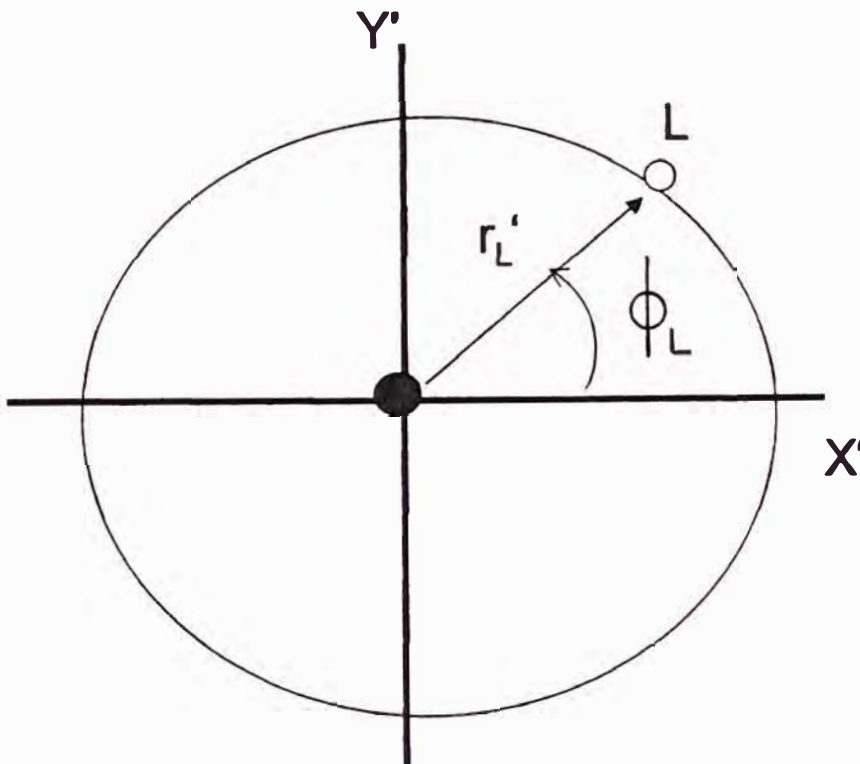


Fig. A.3

luego la velocidad es:

$$\vec{V}'_L = \frac{2\pi r'_L}{T_L} \left(-\text{sen} \frac{2\pi}{T_L} t \vec{i} + \cos \frac{2\pi}{T_L} t \vec{j} \right) \quad (4.60)$$

Luego con (4.58) y (4.60) obtenemos:

$$\vec{V}_G \cdot \vec{V}'_L = \frac{4\pi^2 r_G r'_L}{TT_L} \left[\text{sen} \frac{2\pi t}{T} \text{sen} \frac{2\pi t}{T_L} + \cos \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi t}{T_L} \right] \quad (4.61)$$

que se puede expresar como:

$$\vec{V}_G \cdot \vec{V}'_L = \frac{4\pi^2 r_G r'_L}{TT_L} \cos 2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_L} \right) t \quad (4.62)$$

Ademas sabemos que en módulo la velocidad del centro de masa de la tierra cumple:

$$|\vec{V}_G| = \frac{2\pi}{T} r_G \quad (4.63)$$

y el módulo la velocidad de la Luna con respecto a la Tierra:

$$|\vec{V}'_L| = \frac{2\pi}{T_L} r'_L \quad (4.64)$$

reemplazando (4.58), (4.60), (4.63) y (4.64) en (4.54) obtenemos :

$$\cos \gamma = \cos 2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_L} \right) t \quad (4.65)$$

es decir $\gamma = \gamma(t)$. Por otra parte la expresión (4.53) se puede expresar como:

$$V_L = V_G \sqrt{1 + \left(\frac{V'_L}{V_G} \right)^2 + 2 \left(\frac{V'_L}{V_G} \right) \cos \gamma(t)} \quad (4.66)$$

Haciendo los calculos de V'_L y V_G se tiene que $V'_L = 1,019 \text{ Km/s}$ y $V_G = 29,7 \text{ Km/s}$ luego

$$\left(\frac{V'_L}{V_G} \right)^2 \ll 1 \quad (4.67)$$

Asi pues de (4.66) y (4.67) obtenemos

$$V_L = V_G \left[1 + 2 \left(\frac{V'_L}{V_G} \right) \cos(\gamma) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.68)$$

Usando este resultado en la energía cinética del sistema :

$$E_K = \frac{mV_G^2}{2} + \frac{m_L V_L^2}{2} \quad (4.69)$$

se tiene que

$$E_K = \frac{mV_G^2}{2} + \frac{m_L}{2} V_G^2 \left[1 + 2 \left(\frac{V'_L}{V_G} \right) \cos(\gamma(t)) \right] \quad (4.70)$$

Que era lo que queriamos demostrar .

Apéndice del Capítulo IV - B

Justificación de la Ecuación 2.31

Con relación a la determinación del potencial gravitatorio de Mac Cullag se trunco la serie de los polinomios de Legendre

$$Ep_i = \frac{-GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} m_i P_n(\cos \gamma_i) \left(\frac{x_i}{r}\right)^n, \quad (4.71)$$

ya que al desarrollar la serie se obtuvo:

$$Ep_i = \frac{-Gm_i M}{r} \left[P_0(\cos \gamma_i) \left(\frac{x_i}{r}\right)^0 + P_1(\cos \gamma_i) \left(\frac{x_i}{r}\right) + P_2(\cos \gamma_i) \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + \dots \right] \quad (4.72)$$

Teniendo presente que la distancia media de la tierra al sol es r

$$r = 1500X10^8 m \quad (4.73)$$

La distancia media de la tierra a la Luna

$$r_2 = 3.84X10^8 m \quad (4.74)$$

La distancia del centro de masa G de la Tierra X_i a la partícula m_i

$$X_i < 0.064X10^8 m \quad (4.75)$$

como

$$P_{nMAX}(\cos \gamma_i) = 1 \quad (4.76)$$

tenemos :

$$\frac{X_i}{r_i} \cong 10^{-4} \quad (4.77)$$

Observamos que el orden de aproximación de la energía potencial gravitatoria se puede expresar como

$$Ep_i = \frac{-Gm_i M}{r} [1 + 10^{-4} + 10^{-8} + 10^{-12} + 10^{-16} + \dots] \quad (4.78)$$

como

$$10^{-12} \ll 1 \quad (4.79)$$

Entonces

$$Ep_i = \frac{-Gm_i M}{r} [1 + 10^{-4} + 10^{-8}] \quad (4.80)$$

Apéndice del Capítulo IV - C

Debido a la gran cantidad de datos que son necesarios para la obtención de las graficas $\phi(t)$ y $Y vs X$ se ha creído conveniente agregar graficas adicionales que muestra la precesión de los equinoccios para un tiempo de 12000 años con radios polares proximos a 6355.55 Km

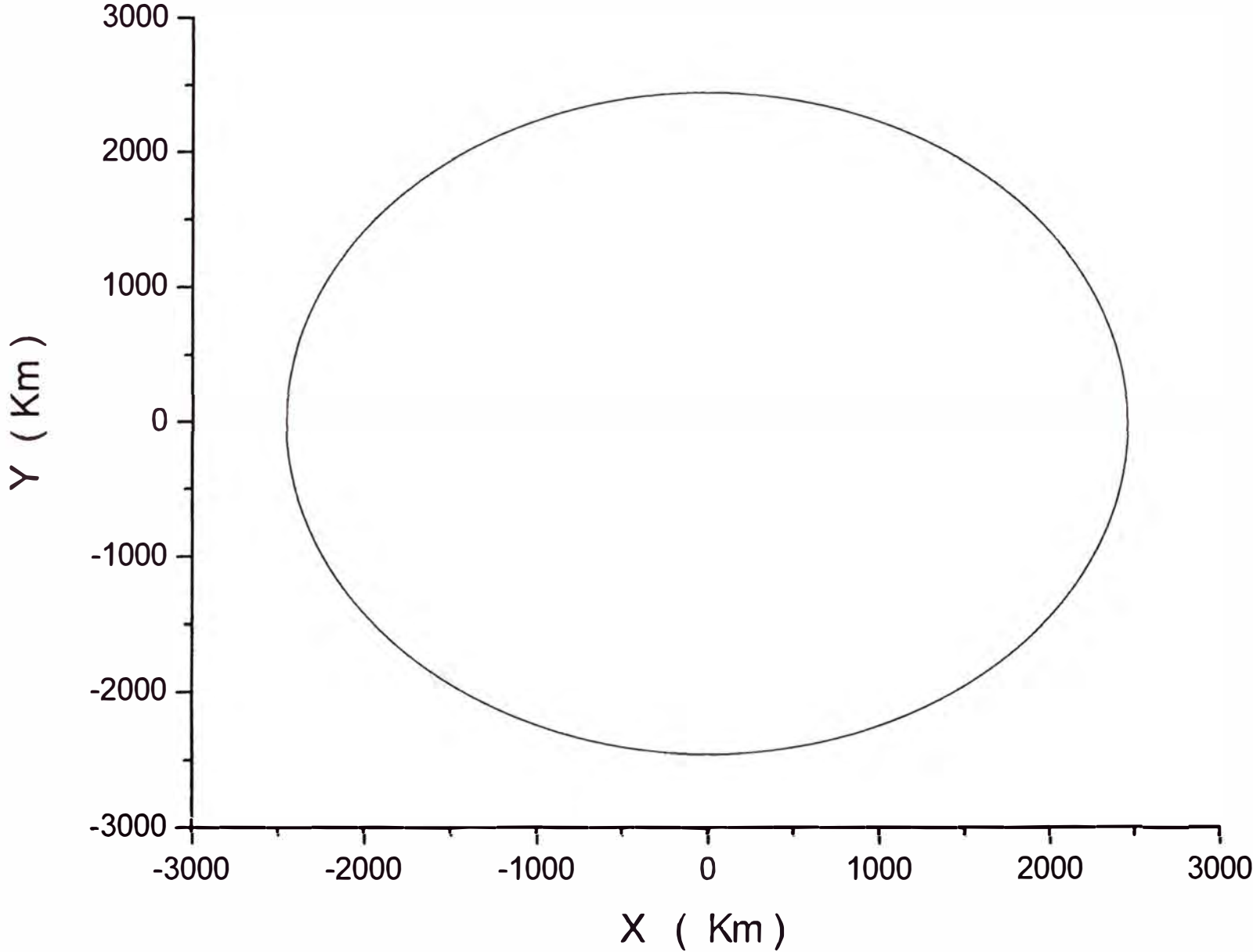
Table 1: Graficos obtenidos para el intervalo de tiempo $t < 12000$ años

Función ó Graficos	Radio Polar Km	Pagina
$Y vs X$	6285.55	271
$Y vs X$	6345.55	272
$\phi(t)$	6345.55	273
$Y vs X$	6350.55	274
$\phi(t)W_1$	6350.55	275

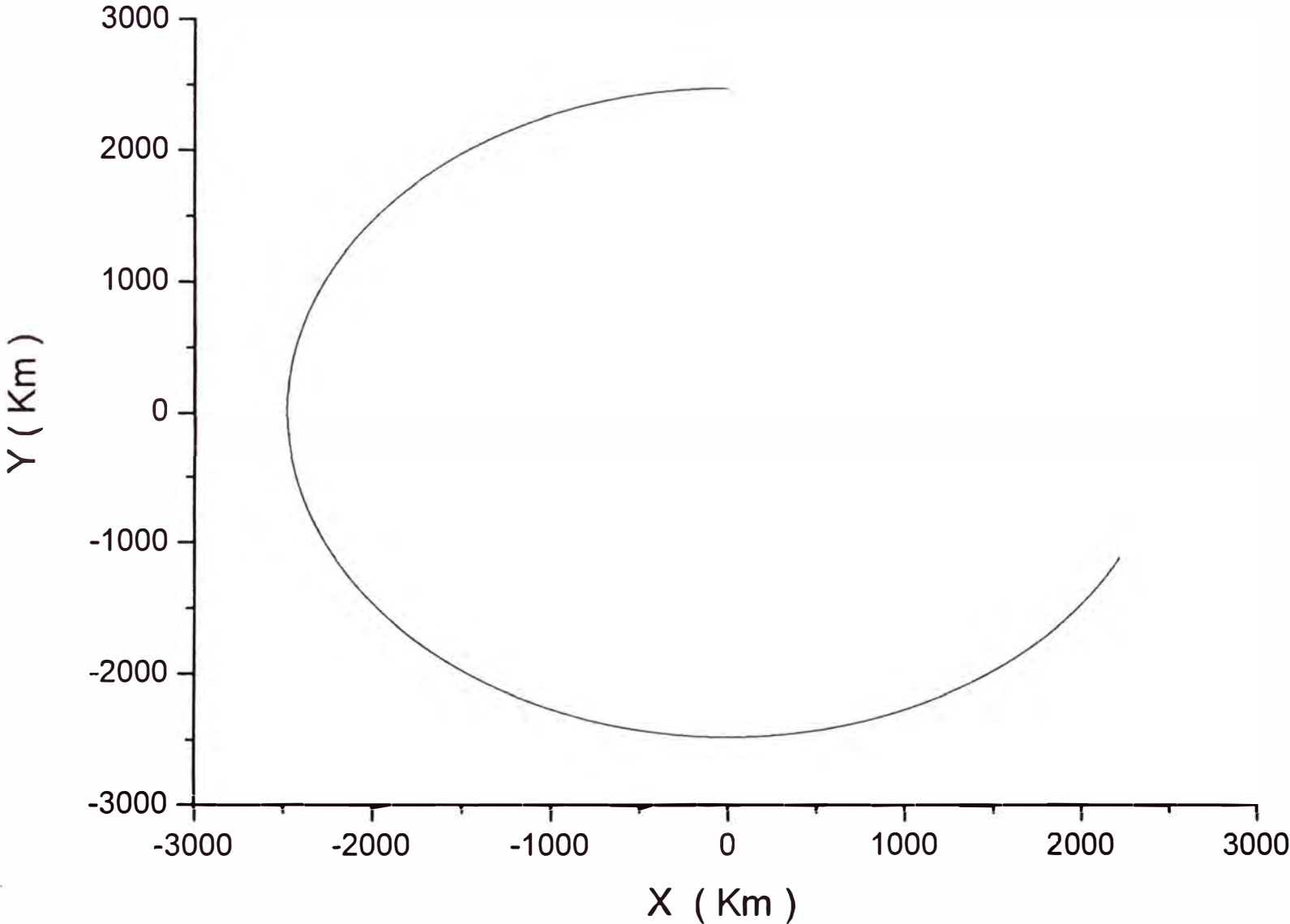
Observación

De las graficas mostradas en especial de la proyección del extremo del eje X_3 sobre el plano XY podemos afirmar que el eje X_3 precesa alrededor del eje Z , es decir se manifiesta el fenomeno de precesión de los equinoccios

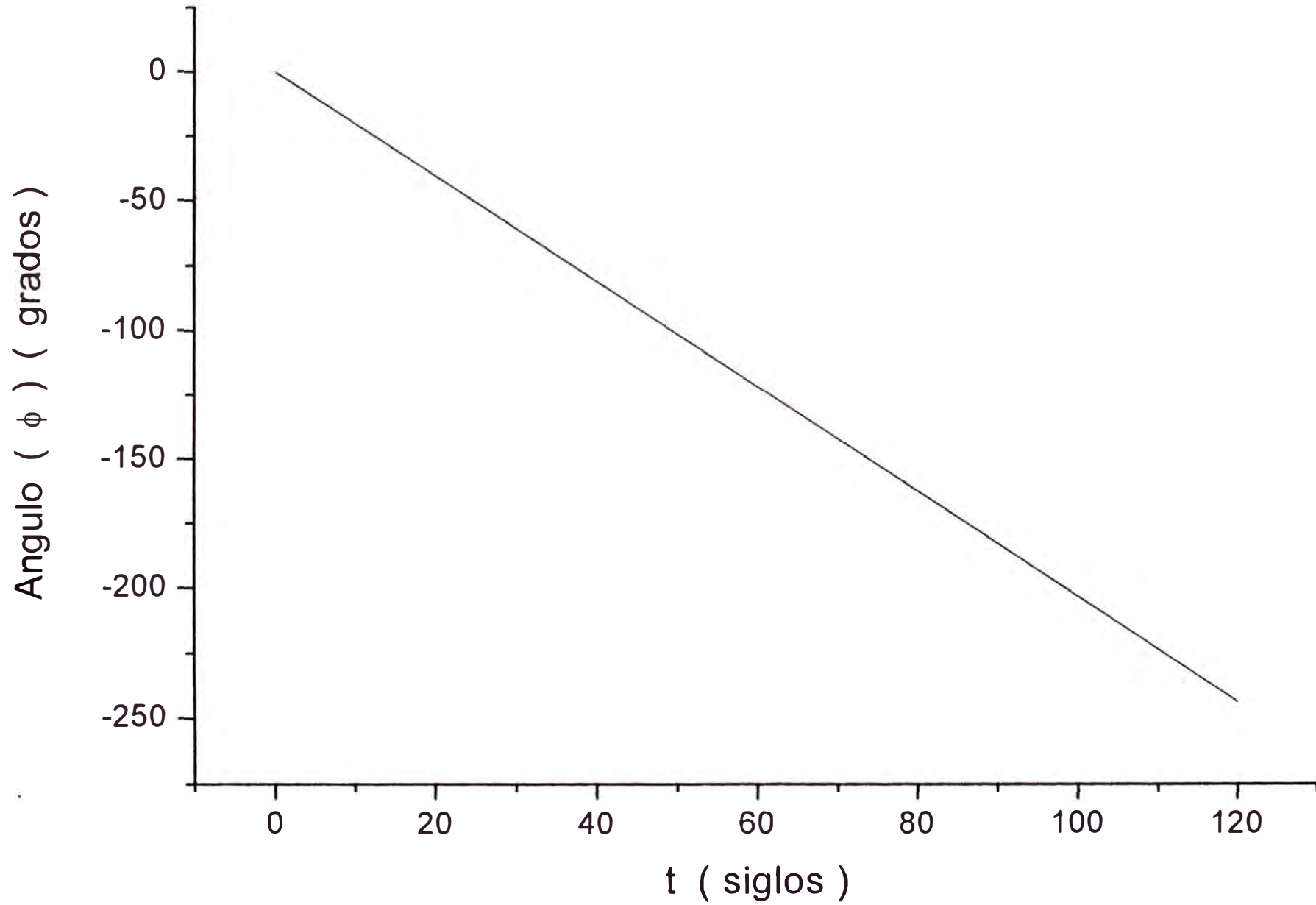
Proyeccion del extremo del eje X_3 sobre el plano XY para 12000 años con $c = 6285.55$ Km



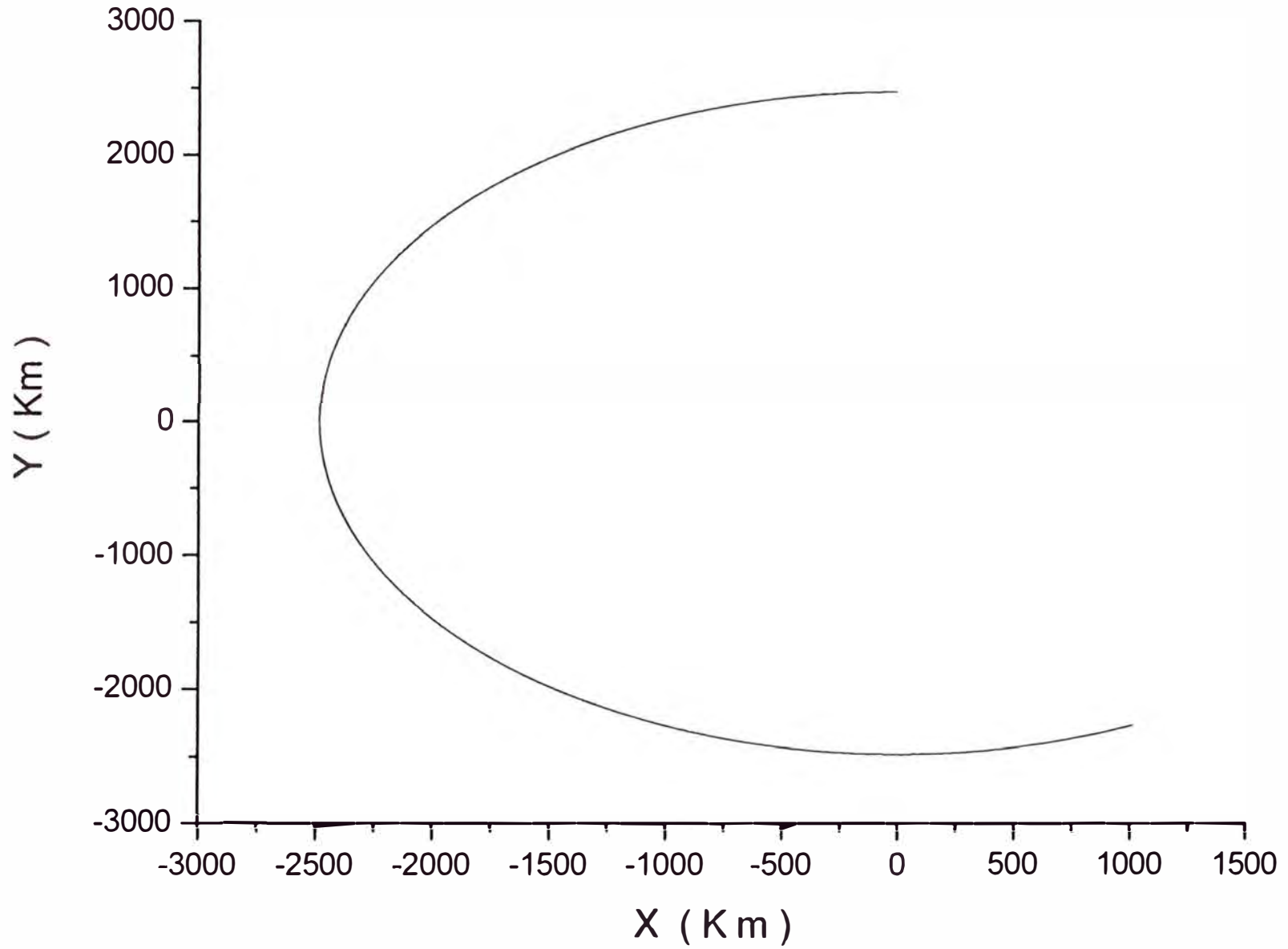
Proyeccion del extremo del eje X_3 sobre el plano XY para 12000 años con $c= 6345.55$ Km



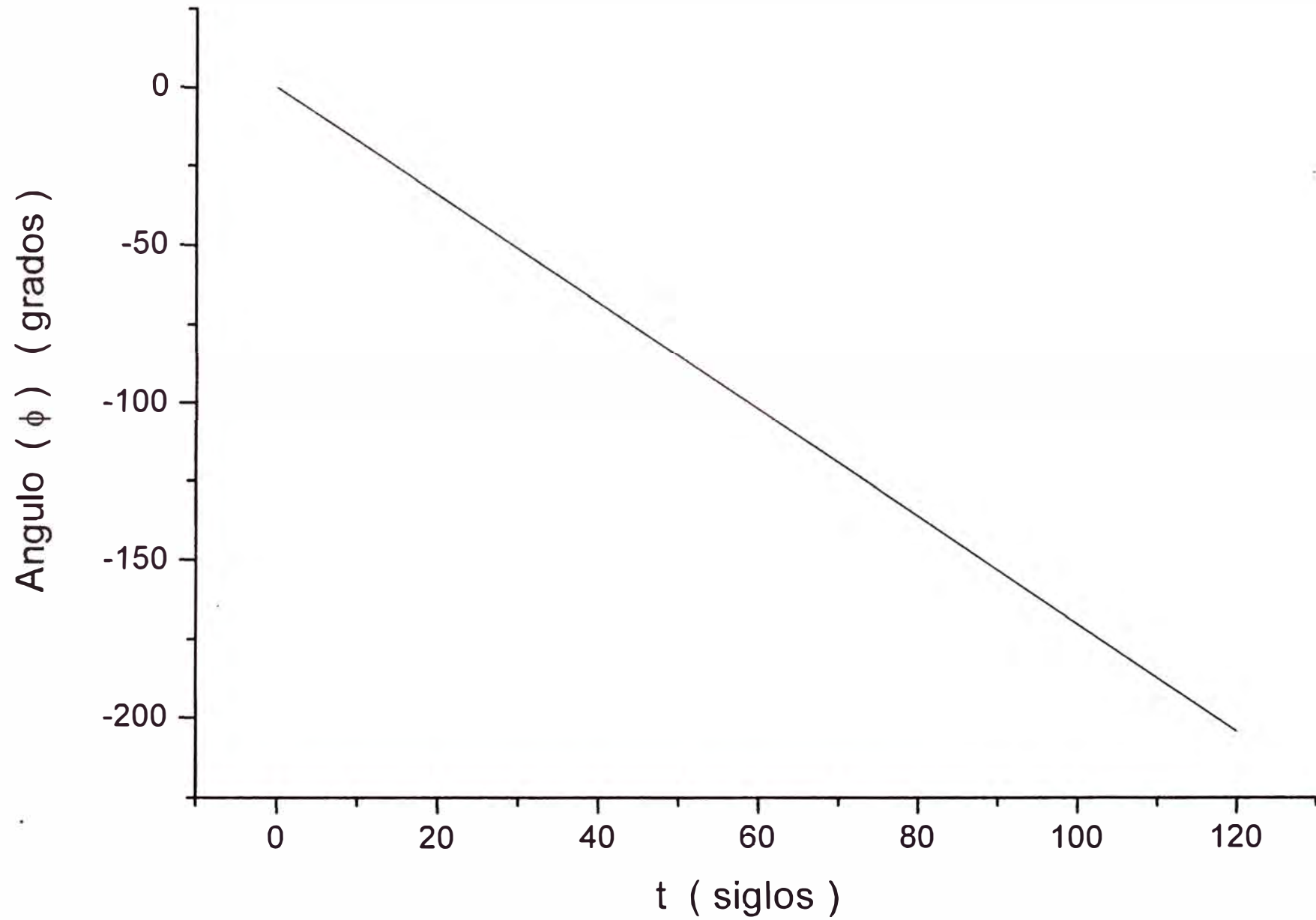
Para 12000 años con $c = 6345.55$ Km



Proyeccion del extremo del eje X_3 sobre el plano XY con $c = 6350.55$ Km para 12000 años



Para 12000 años con $c = 6350.55$ Km



Bibliografía

- G.L.Kotkin V.G. Serbo , “Problemas de Mecánica Clásica ”, editorial Mir pags. 250 - 253 , 1980.
- Herbert Goldstein , “Mecánica Clásica”, editorial reverté , pags. 285 -293 , 1994 .
- Leonard Meirovitch , “Methods of Analytical Dynamics ”, editorial McGraw-Hill , pags. 98 - 117 , 1970 .
- S.W. Mc Cuskey ” Introduction to Celestial Mechanics ”,editorial Addison Wesley Publishing Company inc . pags. 163 - 168 , 1965 .
- Marcelo Alonso , “Mecanica ”,editorial Fondo Educativo Interamericano , pags. 314 - 319 , 1976 .
- James Binney and Scott Tremaine , “Galactic Dinamics ”,editorial Princenton Univesity Press , pags. 62- 68 , 1987 .
- Spiegel Murray ” Mecanica Teorica ”,editorial McGraw - Hill pags. 265 - 268 , 1970