

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



CRITERIOS PARA LA OPTIMIZACIÓN EN EL DISEÑO DE LOS SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN DE AT Y EAT

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ELECTRICISTA

PRESENTADO POR:

JUAN CARLOS QUISPE AGUILAR

**PROMOCIÓN
2005- II**

**LIMA – PERÚ
2011**

**CRITERIOS PARA LA OPTIMIZACIÓN EN EL DISEÑO DE
LOS SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA DE LÍNEAS DE
TRANSMISIÓN DE AT Y EAT**

Agradezco a mis amigos, hermanos, profesores y en especial a mis padres, cuyos aportes y apoyo han influido positivamente en mi crecimiento personal y profesional.

SUMARIO

El aterramiento de las líneas eléctricas de transmisión con respecto a la dispersión de corrientes de rayo se trata usualmente como sistemas de puesta a tierra concentradas, al ser comparadas con los sistemas de puesta a tierra de las subestaciones eléctricas. El comportamiento dinámico de tales sistemas es usualmente analizado tomando en consideración solamente los efectos de ionización del suelo. En tales casos los efectos de propagación de la onda son mayormente despreciados y desestimados por su complejidad. También es cierto que los requerimientos del aterramiento de las líneas eléctricas de transmisión solo se basan en su Resistencia medida en baja frecuencia.

En el presente informe se exponen criterios para el mejor diseño de los sistemas de puesta a tierra con respecto al desempeño transitorio cuando estos son sujetos a frentes rápidos de onda de las corrientes de rayo; como se sabe los efectos de propagación son dominantes al inicio, inclusive en los casos en que el sistema de puesta a tierra sea asumido como concentrado. Tales criterios son obtenidos a partir de modelos analógicos y de simulaciones.

ÍNDICE

PROLOGO	1
CAPÍTULO I	
PLANTEAMIENTO DE INGENIERÍA DEL PROBLEMA	
1.1 Objetivo General	3
1.2 Objetivos específicos	3
1.3 Alcances	3
1.4 Ámbito	3
1.5 Limitaciones del trabajo	3
CAPÍTULO II	
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS CON FUENTES: POTENCIALES CON RETARDO	
2.1 Aspectos generales	5
2.2 Fundamentos del Electromagnetismo	7
2.2.1 Campos electromagnéticos estáticos	7
2.2.2 Campos electromagnéticos variables en el tiempo	7
2.3 Potenciales con retardo en el vacío – aplicación a una carga elemental [2]	12
2.4 Definición de términos	14
CAPÍTULO III	
MODELADO DEL COMPORTAMIENTO TRANSITORIO DE PUESTAS A TIERRA	
3.1 Desarrollo del modelo	17
3.1.1 Consideraciones generales	19
3.1.2 Las ecuaciones de Maxwell en términos del potencial escalar y el potencial vector [3]	19
3.1.3 Influencia de la interfaz entre la suelo y el aire [3]	26
3.1.4 Aplicación del método de los momentos en el análisis de las redes de puesta a tierra [3]	29

3.2	Implementación de un programa computacional	31
3.2.1	Validación de parámetros	32
3.2.2	Verificación de la restricción principal del modelo	35
3.2.3	Valores básicos para las constantes	38
3.2.4	Tecnología del programa	39
3.2.5	Estructura del programa	40

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y REGLAS PARA AMINORAR LOS EFECTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS

4.1	Consideraciones Generales	41
4.2	Efectos de la propagación de ondas en aterramientos concentrados	41
4.3	Comportamiento inductivo y capacitivo	41
4.4	Frecuencia característica para electrodos con comportamiento inductivo	43
4.5	Reglas para mejor desempeño transitorio a altas frecuencias de los Sistemas de PAT	45

CONCLUSIONES	47
---------------------	-----------

ANEXOS	48
---------------	-----------

BIBLIOGRAFÍA	70
---------------------	-----------

PRÓLOGO

Se sabe que el comportamiento dinámico de los sistemas de puesta a tierra (PAT) a grandes impulsos de corriente depende de dos procesos físicos. El primero de ellos es el comportamiento no lineal de la tierra debido a la ionización del suelo en la inmediación del electrodo de puesta a tierra en caso de grandes impulsos de corriente, y el segundo es la propagación de las ondas electromagnéticas a lo largo de los electrodos de aterramiento y del suelo. Comúnmente se asume que el primer proceso es dominante en puestas a tierra concentradas y el segundo en las de mayor extensión.

El aterramiento de las líneas eléctricas es generalmente clasificado como concentrados o de mayor extensión. Por ejemplo, una puesta a tierra de mayor extensión es definida en la referencia [16], “... *como aquella donde el tiempo de viaje del campo electromagnético a lo largo del electrodo de aterramiento es comparable con aquel sobre el largo de la torre misma; lo cual generalmente se refiere a las puestas a tierra con dimensiones físicas que exceden los 20 metros...*”. Sin embargo, si una puesta a tierra es tal que se tienen que tomar en consideración los efectos de la propagación de ondas, entonces se deberían de considerar las dimensiones *eléctricas*, no las *físicas*. Esto significa que las dimensiones físicas del armado de la PAT deberían ser comparadas con la longitud de onda de las perturbaciones electromagnéticas en el suelo, por tanto, una alternativa de definición de las PAT's de mayor extensión podría ser formulada en la siguiente forma: *Un(a) ... PAT de mayor extensión es tal que sus dimensiones físicas son comparables o mas grandes que las longitudes de onda de las perturbaciones electromagnéticas (que las recorren) en el suelo, para la frecuencia más alta considerada en el estudio de transitorios*. La frecuencia más alta considerada en el estudio de transitorios depende del contenido de frecuencias de los impulsos de corriente y tensión; por ejemplo, mayormente se podría asumir que la frecuencia más grande para los impulsos de corriente del primer impacto del rayo está en alrededor de 100 kHz, y para la descarga ascendente, alrededor de 1 MHz [17]. También se sabe que la longitud de onda de las perturbaciones electromagnéticas en el suelo depende de la resistividad y permitividad de este; por tanto,

la clasificación de las puestas a tierra de líneas eléctricas como concentrados o de mayor extensión podría ser diferente en diferentes suelos y para diferentes impulsos de corriente. Generalmente, los requerimientos de diseño para el aterramiento de las líneas eléctricas no toman en cuenta el comportamiento dinámico, sino solamente son basados en la Resistencia medida en baja frecuencia; usualmente se especifica sólo un máximo valor permisible para la resistencia de los aterramientos.

En este informe se proponen simples criterios para lograr un mejor diseño del aterramiento de las líneas de transmisión, con respecto a su comportamiento ante los transitorios cuando estos son alcanzados por frentes rápidos de onda de impulsos de corriente, es decir, con gran contenido de altas frecuencias. En tales casos, la puesta a tierra que generalmente es considerada como concentrada, se comporta como PAT de mayor extensión, presentando picos grandes de tensiones transitorias cerca del punto de descarga durante la subida del impulso de corriente. Los procedimientos propuestos tratan de reducir la magnitud de tales voltajes transitorios excesivos.

En el desarrollo del presente informe, se detalla la teoría de “los potenciales con retardo” (Capítulo II), para explicar como la propagación de las ondas electromagnéticas afecta el comportamiento dinámico de las puestas a tierra; comprender tal proceso es un paso crítico para poder definir los criterios; además, siendo necesario contar con medios que sustenten tales criterios, en el Capítulo III se desarrolla un modelo que simula el comportamiento dinámico de una PAT ante el impacto de un rayo; a partir de los resultados de las simulaciones realizadas sobre este modelo (Capítulo IV), se obtiene el sustento de las reglas y criterios que se proponen.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DE INGENIERÍA DEL PROBLEMA

1.1 Objetivo General

Establecer criterios para la optimización en el diseño de los sistemas de puesta a tierra de líneas eléctricas de transmisión de AT y EAT con respecto a su desempeño ante perturbaciones transitorias de alta frecuencia.

1.2 Objetivos específicos

- i. Desarrollar la teoría electromagnética necesaria que logre explicar el comportamiento dinámico de las puestas a tierra (Capítulo II).
- ii. Desarrollar un modelo que simule el comportamiento dinámico de un sistema de puesta a tierra de una línea eléctrica (Capítulo III).
- iii. Obtener resultados de las simulaciones mediante el modelo desarrollado del impacto de un rayo sobre una PAT (Capítulo IV).

1.3 Alcances

El trabajo está dirigido al diseño de los Sistemas de PAT de las líneas de transmisión, y considera solo el funcionamiento en régimen transitorio.

1.4 Ámbito

Lo analizado en este informe se enmarca en el ámbito de los efectos de la propagación de las ondas electromagnéticas; específicamente, se analiza los excesos de sobretensión causadas por tales efectos, así como la susceptibilidad de los mismos con respecto al suelo. Y se dice excesos de sobretensión pues son comparadas con los que se obtienen cuando solo se consideran un valor constante de resistencia de PAT, como se suele hacer.

1.5 Limitaciones del trabajo

Las limitaciones del trabajo realizado dependen directamente de las limitaciones del modelo matemático que sirven de base para el sustento de los criterios que se proponen. Estas son:

- i.** El trabajo se limita solo a modelos uniformes de subsuelo, pues, el método comúnmente utilizado de las imágenes de Maxwell, no se adapta eficientemente a modelos en múltiples estratos horizontales [18].
- ii.** No se considera la dependencia en frecuencia en los parámetros eléctricos (la permitividad, la conductividad y la permeabilidad); así también se considera que se está en un medio isotrópico.
- iii.** Con respecto a la eficacia del modelo, existe la restricción $|\gamma R| \ll 1$ impuesta al considerar el método de las imágenes modificado; esto limita la frecuencia máxima con la cual puede trabajar el modelo, así como las dimensiones de la PAT.
- iv.** Además el modelo no toma en cuenta el fenómeno de ruptura dieléctrica del suelo por ionización.

CAPÍTULO II

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS CON FUENTES: POTENCIALES CON RETARDO

2.1 Aspectos generales

Si se observa la figura 2.1, se va a demostrar que el potencial en un punto P es:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{\Delta q(t - \tau)}{4\pi\epsilon_0 R'} \quad (2.1)$$

Donde $\tau = R'/c$; es decir, que mientras el potencial es evaluado en el tiempo t , la fuente de campo (la carga de la partícula) es evaluada en un tiempo anterior $t' = t - R'/c$. El tiempo de retardo $\tau = R'/c$, es el tiempo que tarda la señal en viajar desde el lugar $\vec{r}'(t' = t - R'/c)$, hasta el punto de observación del campo, \vec{r} . Para verlo de una manera simple, supongamos un observador en el punto P. Atendiendo a lo establecido en la ecuación (2.1), el observador verá a la partícula en el punto N en el instante t (y no en el punto M, que es donde se encuentra realmente en tal instante), por lo que evaluará el potencial usando la distancia R' , e inclusive tomará el valor de la carga que la partícula tenía en tal posición.

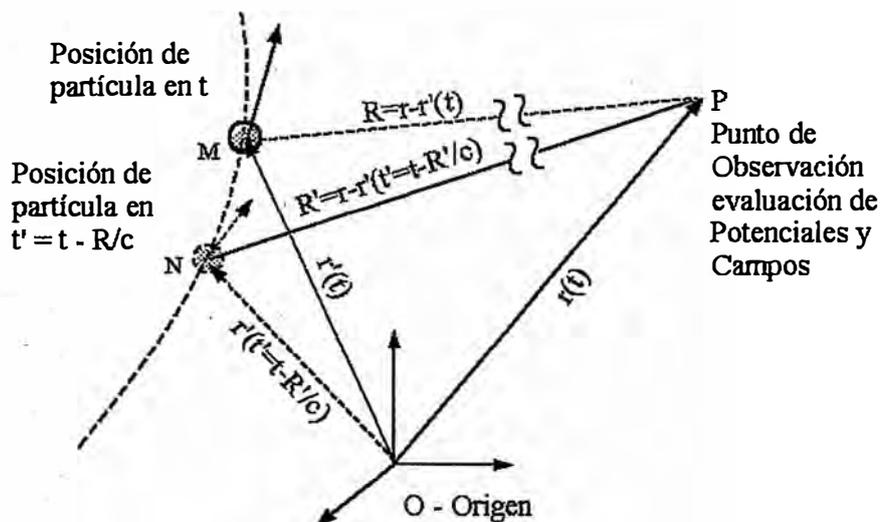


Fig.2.1 Trayectoria de una partícula cargada, origen de coordenadas, punto de observación y vectores posición

Pongamos otra situación que servirá para entender los resultados que se obtienen en el Capítulo III cuando, utilizando el método numérico de momentos, se discretizan los armados de la PAT. En la figura 2.2 aparecen tres partículas cuyas cargas varían con el tiempo; varían de tal manera que producen los potenciales en el punto P, cuya forma de onda se grafican a la derecha de sus respectivos dibujos. Para lograr tales formas de onda de los potenciales en el punto P, se ha supuesto que la señal electromagnética viaja a velocidad infinita.

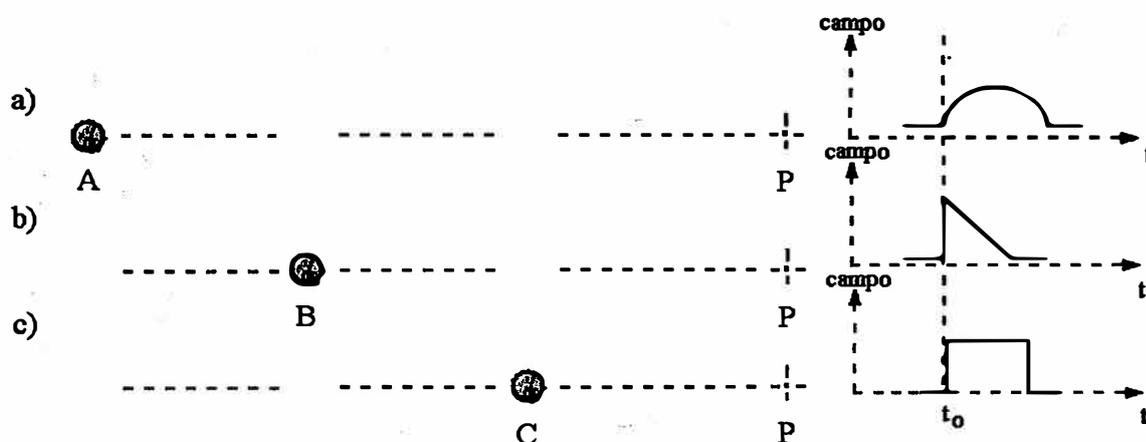


Fig.2.2 Formas de onda de los potenciales generados por tres partículas en el punto P.

En la figura 2.3 se grafica la forma de onda de la contribución simultánea de las 3 partículas de la figura 2.2. Se muestran dos situaciones: el caso ideal, donde la señal viaja a velocidad infinita y para el caso real, donde la señal electromagnética posee un retardo. En el caso real, nótese como la forma de onda de campo que origina la partícula más alejada del punto P (la partícula A) es la que mayor retraso presenta.

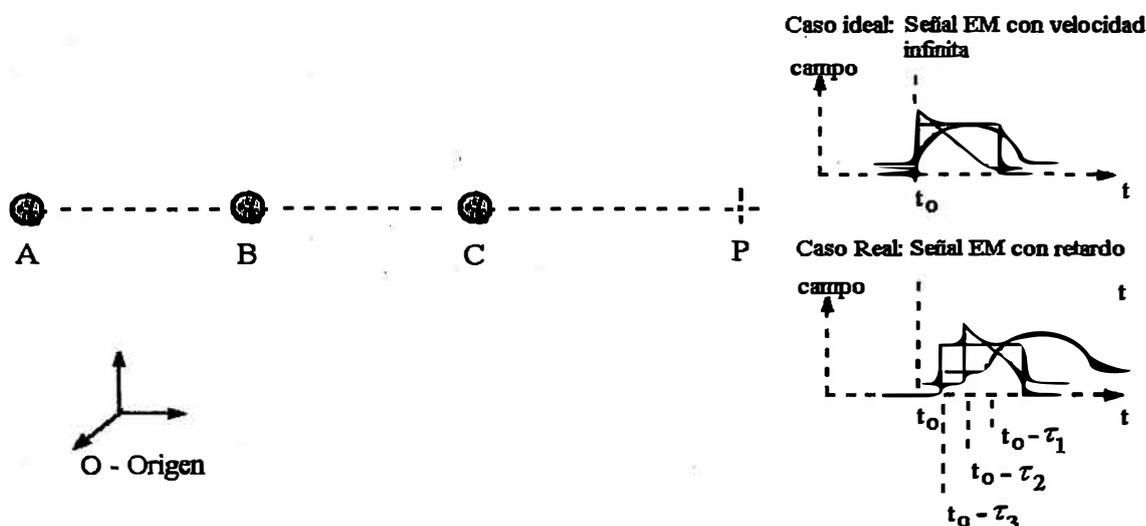


Fig.2.3 Aplicación del fenómeno del retardo de la señal electromagnética.

2.2 Fundamentos del Electromagnetismo

2.2.1 Campos electromagnéticos estáticos

a) Ecuaciones para los campos

En el vacío, para cargas en reposo, el campo eléctrico cumple la Ley de Gauss [1]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

Cuya solución es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (2.3)$$

Para las corrientes estacionarias, el campo magnético cumple (Ley de Ampere):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.4)$$

Cuya solución es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (2.5)$$

b) Los potenciales

A la vez, se definen el potencial escalar y potencial vector como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (2.6)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.7)$$

2.2.2 Campos electromagnéticos variables en el tiempo

a) Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío están constituidas por la ley de Gauss para el campo eléctrico (2.8), la ley de Gauss para el campo magnético (2.9), la ley de Faraday (2.10) y la ley de Ampere (2.11):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.11)$$

b) Los potenciales

De la ley de Faraday y sabiendo que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.12)$$

Luego arreglando términos:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (2.13)$$

Llegamos a:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.14)$$

Que junto con $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, definen al potencial escalar y al potencial vector.

c) Los campos y las fuentes

Observando las ecuaciones de Maxwell que contienen las fuentes (la ley de Gauss y la ley de Ampere),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.15)$$

Hallar los campos directamente a partir de las fuentes se torna muy difícil. Existe otra manera de resolverlas, expresando los campos en función de los potenciales y obteniendo nuevas ecuaciones a resolver en función de estos últimos.

d) Los potenciales y las fuentes

Sustituyendo los campos en función de los potenciales en las ecuaciones anteriores, llegamos a:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.16)$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.17)$$

Entonces, obtenemos 4 ecuaciones diferenciales acopladas, que nos permiten determinar los potenciales a partir de las fuentes.

e) Transformaciones de contraste

Son aquellas transformaciones sobre los potenciales que dejan invariantes a los campos.

Sabemos que el rotacional del gradiente es cero; luego, si en vez del potencial A utilizamos el potencial $A' = A + \nabla f$, obtendremos el mismo campo magnético; pero, se

quiere además obtener el mismo campo eléctrico; luego la función $f(\vec{r}, t)$ ha de imponer alguna condición adicional sobre el potencial escalar. Así:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla V' - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}' \\ &= -\nabla V' - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \nabla f) \\ &= -\nabla \left(V' + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Entonces, los potenciales escalar y vector están definidos salvo una función arbitraria. Los potenciales

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{y} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \quad (2.19)$$

Generan los mismos campos electromagnéticos que V y \vec{A} .

Las transformaciones de contraste (de gauge) son transformaciones sobre los potenciales que simplifican la determinación de los mismos. Las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.20)$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.21)$$

Pueden simplificarse escogiendo, por ejemplo el contraste de Coulomb (2.22) y el contraste de Lorentz (2.23):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.23)$$

Para nuestro caso, utilizaremos el Contraste de Lorentz.

f) Contraste de Lorentz

Supongamos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = F(\vec{r}, t) \quad (2.24)$$

Reemplazando $V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$ y $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$ en:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 f + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

Ahora, se busca que función $f(\vec{r}, t)$ hace cero la ecuación anterior, así:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -F(\vec{r}, t) \quad (2.26)$$

Entonces, siempre existirán potenciales que satisfagan

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

g) Ecuación de ondas no homogénea

Y con los potenciales que satisfacen la relación anterior, las ecuaciones del ítem 2.3.4 se reducen a:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.28)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.29)$$

Las cuales se encuentran desacopladas para los potenciales. A tales ecuaciones se les suele llamar “ecuaciones de ondas no homogénea”.

h) Potenciales con retardo

En el caso estático, las ecuaciones de ondas no homogénea se reducen a las ecuaciones de Poisson, cuya solución ya se conoce:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d^3\vec{r}' \quad (2.30)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} d^3\vec{r}' \quad (2.31)$$

$$\text{Con } R = |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

Cuando las fuentes varían con el tiempo, las soluciones son:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} d^3\vec{r}' \quad (2.32)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} d^3\vec{r}' \quad (2.33)$$

$$\text{Con } t' = t - \frac{R}{c}$$

Una manera de demostrar que las expresiones anteriores son soluciones de las ecuaciones de ondas no homogéneas, es reemplazándolas en esas ecuaciones. En el Capítulo III se calculan estas soluciones analíticamente.

Empezamos con el gradiente del potencial:

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{R} \vec{\nabla}\rho + \rho \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right] d^3\vec{r}' \quad (2.34)$$

La densidad depende de la posición a través del tiempo retardado:

$$\vec{\nabla}\rho = \dot{\rho} \vec{\nabla}t' = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \vec{\nabla}R = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \frac{\vec{R}}{R} \quad (2.35)$$

Luego el gradiente del potencial es:

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{R}}{R^2} - \rho \frac{\vec{R}}{R^3} \right] d^3\vec{r}' \quad (2.36)$$

La laplaciana es la divergencia del gradiente:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[\frac{\vec{R}}{R^2} \vec{\nabla}\dot{\rho} + \dot{\rho} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{R}}{R^2} \right) \right] - \left[\frac{\vec{R}}{R^3} \vec{\nabla}\rho + \rho \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) \right] \right\} d^3\vec{r}' \quad (2.37)$$

Nuevamente hay que derivar a través del tiempo retardado:

$$\vec{\nabla}\dot{\rho} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \vec{\nabla}R = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \frac{\vec{R}}{R} \quad (2.38)$$

Y usando las relaciones:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R} \right) = \frac{2}{R}; \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^2} \right) = \frac{1}{R^2} \quad (2.39)$$

$$\vec{\nabla}\dot{\rho} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \vec{\nabla}R = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \frac{\vec{R}}{R} \quad (2.40)$$

$$\delta(\vec{R}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) \quad (2.41)$$

La laplaciana del potencial es por lo tanto:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2} \ddot{\rho} - 4\pi\delta(\vec{R}) \right] d^3\vec{r}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r}, t) \quad (2.42)$$

Reordenando llegamos a la ecuación de ondas no homogénea:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r}, t) \quad (2.43)$$

Luego se ha demostrado que efectivamente las soluciones para los potenciales son las siguientes expresiones:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} d^3\vec{r}' \quad (2.44)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} d^3\vec{r}' \quad (2.45)$$

Se denominan potenciales con retardo ya que se calculan en el tiempo retardado

$$t' = t - \frac{R}{c}.$$

2.3 Potenciales con retardo en el vacío – aplicación a una carga elemental [2]

Consideremos, como se muestra en la figura 2.4, el problema de determinar cual es el potencial creado en un punto P por una carga elemental $\Delta q(t)$ situada en r'_0 y encerrada en un pequeño elemento de volumen $\Delta v'$.

Haremos uso de potenciales que cumplan el contraste de Lorenz y, en primer lugar, hallaremos una solución general de la ecuación de onda con la simetría propia del problema; a continuación buscaremos las soluciones particulares compatibles con la existencia de $\Delta q(t)$ en \vec{r}'_0 y con el principio de causalidad.

Simplificaremos esta segunda etapa limitándonos al caso de cargas no relativistas que se mueven en el entorno del origen de coordenadas.

Para puntos, como el P, que no coinciden con la posición de la carga ($R \neq 0$):

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.46)$$

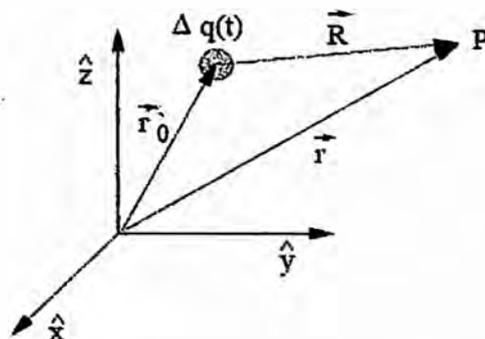


Fig.2.1 Geometría del problema

donde ∇_R opera sobre las componentes de $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$.

Dado que el problema es simétrico alrededor de la posición de $\Delta q(t)$, existirán soluciones del mismo con dicha simetría

$$V = V(R) \Rightarrow \text{para } R \neq 0, \quad \nabla_R^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (RV) \quad (2.47)$$

por lo que, definiendo una nueva función $\Phi = RV$,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.48)$$

la cual admite soluciones del tipo $f_R(t - \frac{R}{c})$ y $f_A(t + \frac{R}{c})$, con $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, donde f_R y

f_A son funciones arbitrarias y derivables. Definiendo $u = t - \frac{R}{c}$ y $w = t + \frac{R}{c}$

$$\frac{\partial f_R}{\partial R} = -\frac{1}{c} \frac{df_R}{du}, \quad \frac{\partial^2 f_R}{\partial R^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f_R}{du^2}, \quad \frac{\partial f_R}{\partial t} = \frac{df_R}{du}, \quad \frac{\partial^2 f_R}{\partial t^2} = \frac{d^2 f_R}{du^2} \quad (2.49)$$

Sustituyendo las equivalencias encontradas en la ecuación anterior se confirma que $f_R(u)$ es solución y por mismo procedimiento se comprueba que $f_A(w)$ también lo es. Así la solución general puede escribirse de la forma

$$\Phi = f_R(t - \frac{R}{c}) + f_A(t + \frac{R}{c}) \quad (2.50)$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{R} f_R(t - \frac{R}{c}) + \frac{1}{R} f_A(t + \frac{R}{c}) = V_R(\vec{r}, t) + V_A(\vec{r}, t) \quad (2.51)$$

V_R recibe el nombre de *potencial con retardo* y V_A el de *potencial en adelante*; si nos quedamos con el término de retardo

$$V_R = \frac{1}{R} f_R(t - \tau(R)), \quad \tau = \frac{R}{c} \quad (2.52)$$

En particular, acercándonos al punto fuente $\vec{R} \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$

$$f_R(t - \tau(R)) \approx f(t) + \dot{f} \tau, \quad \lim_{R \rightarrow 0} f_R(t - \tau) = f_R(t) \quad (2.53)$$

Es decir, la solución para puntos cercanos a la carga es independiente del retraso. Por otra parte, sabemos que la solución correspondiente a cargas estáticas, es

$$V = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.54)$$

Siendo el caso estático una idealización de otro real en el que dichas cargas varían muy

lentamente con el tiempo. En este último caso, admitiremos que

$$V \simeq \frac{\Delta q(t)}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.55)$$

Obviamente, debemos considerar a este potencial como un caso particular del potencial con retardo cuando la variación es muy lenta y el retraso despreciable. Teniendo en cuenta que $t = (t - \tau)_{\tau=0}$, la solución general buscada debe tener la forma

$$V_R(\vec{r}, t) = \frac{\Delta q(t - \tau)}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.56)$$

El potencial en (\vec{r}, t) es el que crean las cargas que había en \vec{r}'_0 un tiempo $\tau = \frac{R}{c}$ anterior a t ; es decir, el tiempo que tarda la luz en llegar desde el elemento de carga hasta P.

De la misma forma se obtendría un potencial adelantado V_A relacionado con las cargas que existirán en \vec{r}'_0 en un instante del futuro, τ posterior a t ; aunque el tema merece una discusión más precisa, diremos en general, que la aceptación del principio de causalidad nos permite prescindir de los potenciales adelantados.

Para una distribución de carga continua, haciendo uso de la notación $\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \equiv [\rho(\vec{r}')]_R$, los potenciales con retardo son

$$V_R(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{R} dv' \quad (2.57)$$

$$\vec{A}_R(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{J}]}{R} dv' \quad (2.58)$$

donde el potencial vector se obtendría de una forma similar a la utilizada para el escalar. Aquí se obtiene una consecuencia importante de estas soluciones: que la información electromagnética de carga y corriente de las fuentes, viaja desde estas hacia el espacio circundante y que, la definición de “propagación de ondas EM” es necesaria para el entendimiento de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell.

2.4 Definición de términos

Dispersión (Scattering)

En física se denomina dispersión al fenómeno de separación de las ondas de distinta frecuencia al atravesar un material. Todos los medios materiales son más o menos dispersivos, y la dispersión afecta a todas las ondas; por ejemplo, a las ondas

sonoras que se desplazan a través de la atmósfera, a las ondas de radio que atraviesan el espacio interestelar o a la luz que atraviesa el agua, el vidrio o el aire.

Mallado matricial

Representación en matrices de la información geométrica del armado de una PAT.

Espectro de frecuencias

Es una medida de la distribución de amplitudes de cada frecuencia. También se llama espectro de frecuencia al gráfico de intensidad frente a frecuencia de una onda particular. Se aplica bastante en el análisis de frecuencias de señales.

Efectos propagativos

Son los efectos causados por la propagación de las ondas electromagnéticas.

Potenciales con retardo o potenciales retardados

Son aquellos potenciales que reciben con retardo la señal electromagnética de las fuentes.

Onda

Es el modo de propagación de una perturbación de alguna propiedad de un medio, por ejemplo, densidad, presión, campo eléctrico o campo magnético, que se propaga a través del espacio transportando energía. Es una perturbación que se propaga desde el punto en que se produjo hacia el medio que rodea ese punto.

Onda electromagnética

Es la forma de propagación de la radiación electromagnética a través del espacio. y sus aspectos teóricos están relacionados con la solución en forma de onda que admiten las ecuaciones de Maxwell.

Radiación electromagnética

Es una combinación de campos eléctricos y magnéticos oscilantes, que se propagan a través del espacio transportando energía de un lugar a otro. A diferencia de otros tipos de onda, como el sonido, que necesitan un medio material para propagarse, la radiación electromagnética se puede propagar en el vacío.

Teorema de Unicidad para campos electromagnéticos

Establece que si una función potencial satisface a la ecuación de Poisson en toda la región y cumple con las condiciones de borde en la superficie de los conductores, esta función es única.

Principio de superposición

Las ondas al encontrarse, nunca se suman, sino lo que se suma son sus efectos. Las ondas siguen su trayectoria y tienden a desaparecer si el medio es difusivo.

Frecuencia característica F_c

Es la frecuencia que limita las características de baja frecuencia y alta frecuencia de una PAT (Ver sección 4.3).

Longitud crítica l_c

Para cada frecuencia característica F_c existe una longitud crítica l_c sobre el cual la impedancia de alta frecuencia es más grande que la de baja frecuencia (Ver sección 4.4).

Perturbaciones electromagnéticas de alta frecuencia

Son aquellas perturbaciones que tienen un alto contenido de grandes valores de frecuencias de las señales que las componen, hablando desde la perspectiva del análisis de Fourier. Como ejemplo se tienen los impulso de corriente del rayo y las que se generan a partir de la explosión de una bomba atómica.

Velocidad infinita de una señal

Se refiere a que la información electromagnética del valor de carga y corriente de las fuentes es igual en cualquier punto del espacio.

CAPÍTULO III

MODELADO DEL COMPORTAMIENTO TRANSITORIO DE PUESTAS A TIERRA

3.1 Desarrollo del modelo

3.1.1 Consideraciones generales

Una de las cuestiones principales que se analizan durante el diseño de puestas a tierra es la magnitud de las sobretensiones que se pueden alcanzar ante el impacto de los rayos, o de cualquier otra perturbación semejante, sobre las mismas.

En la actualidad, las ecuaciones de Maxwell son las que mejor gobiernan el comportamiento de los campos electromagnéticos existentes en cualquier medio material y en cualquier régimen, ya sea estacionario o dinámico; además de su aceptación a nivel universal, son consideradas como leyes en la teoría del electromagnetismo.

Las sobretensiones de interés mencionadas en esta sección, se pueden calcular a partir de las ecuaciones de Maxwell; sin embargo, resolver analíticamente tales ecuaciones, en la mayoría de los casos reales, es muy difícil, debido a que tales ecuaciones son del tipo integro-diferenciales. Ya que las ecuaciones de Maxwell involucran aspectos espacio-temporales, una propuesta metodológica para resolver tales ecuaciones es usar el método por transformadas de Fourier para el análisis en el tiempo, y del método de los momentos para el análisis en el espacio. Tal metodología es la que se describirá en esta sección y es la que se utilizará en este trabajo para calcular los campos EM, y a partir de ellos, las sobretensiones en la PAT; ambos métodos utilizan técnicas que producen considerables simplificaciones, como son, la técnica del tratamiento de coeficientes, para el método de Fourier y, la técnica de residuos pesados para el método de los momentos; además, tales métodos aseguran la unicidad de sus transformadas al basarse en una propiedad matemática de cierto tipo de funciones: *la ortogonalidad*.

Con respecto al método por transformadas de Fourier, el análisis se realiza a nivel de coeficientes (los que aparecen en los desarrollos de las series correspondientes), siendo este tipo de funciones ortogonales entre sí; las ventajas de utilizar esta técnica son:

- i. Los coeficientes de Fourier de una señal que proviene de la derivación o integración de otra, se pueden obtener a partir de los coeficientes de esa señal primaria, multiplicando o dividiendo los mismos por $j\omega$, respectivamente, donde “ j ” es la unidad de término complejo y $\omega = 2\pi f$, es la frecuencia angular asociada a tal coeficiente; así, comúnmente se suelen realizar los siguientes reemplazos: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ y $\int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}$; y se prescinden de las partes que corresponden a las funciones armónicas, las cuales se sobreentienden implícitamente dado el contexto. Luego, con estos reemplazos las ecuaciones integro-diferenciales de Maxwell se convierten en expresiones algebraicas fáciles de manejar.
- ii. El cálculo de los coeficientes es simple; estos se obtienen mediante la transformada directa de Fourier. Asimismo, una vez transformada, procesada y obtenida la expresión algebraica de la ecuación diferencial en el dominio de la frecuencia, llevarla al campo del tiempo es también sencillo, mediante el uso de la transformada inversa de Fourier.

Es importante tener en cuenta que la expresión algebraica resultante en el análisis de la frecuencia es una relación entre coeficientes de Fourier para una frecuencia en general, en el que las funciones armónicas del tipo $e^{\pm j\omega t}$ se sobreentienden y no se ponen en dicha expresión.

Con respecto al aspecto espacial, se divide el armado de electrodos en pequeños segmentos para luego aplicar el método de los momentos; tal método aplica la técnica de residuo pesados; Ahí, se aproxima a la señal como una sumatoria de productos de *funciones base* (también ortogonales entre si, como en el caso del método por transformadas de Fourier, para asegurar la unicidad de las soluciones), con coeficientes, inicialmente desconocidos. Entonces a esta sumatoria se le aplica el producto interno continuo con otras funciones llamadas *funciones peso*, y al resultado se le iguala cero. Se usan tantas funciones base como coeficientes existan en la serie de aproximación, para generar una cantidad igual de ecuaciones a partir de las cuales se pueda encontrar tales coeficientes.

Además las derivadas e integrales son aproximadas mediante *diferencias finitas* [14], dividiendo la zona de análisis en pequeños sub-intervalos (discretización), y en donde

se realizan los reemplazos simbólicos: $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \left\{ \frac{\Delta}{\Delta x_{ii}} \right\}$ y $\int dx \rightarrow \sum_{ii} \int_{ii} dx$.

En el método de los momentos existen varios tipos de funciones base y peso. En este informe se utilizarán como funciones base a funciones pulso, los cuales solo presentan un valor distinto a cero y constante solo a lo largo de uno de los sub-intervalos de la discretización. Para las funciones peso, se ha optado por usar funciones delta de Dirac, los cuales presentan impulsos en solo alguno de los puntos del dominio discretizado; a este tipo de métodos se los llama también métodos de ajuste puntual (allocation methods).

3.1.2 Las ecuaciones de Maxwell en términos del potencial escalar y el potencial vector [3]

Se escriben las ecuaciones de Maxwell en términos del potencial escalar ϕ y el potencial vector A ; el propósito de hacer esto es llegar a una expresión de la forma $[V]=[Z][I]$ ya que los potenciales ϕ y \vec{A} son funciones de $[I]$.

Como primer paso se aplica el método por transformada de Fourier; los diferenciales e integrales con respecto al tiempo serán reemplazados por $j\omega$ o $1/(j\omega)$, respectivamente. Como segundo paso, se utiliza el método de los momentos, para reemplazar los diferenciales e integrales por diferencias y sumatorias, respectivamente. Entonces, se obtiene finalmente un sistema de ecuaciones de tipo algebraico fácil de tratar.

a) Primer paso: Aplicación de la Transformada de Fourier

Para cantidades que varían sinusoidalmente, o para cualquiera de las componentes de la serie de Fourier, las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

De la ecuación (3.4) se deduce que existe un campo vector A , el cual es llamado el potencial vector, tal que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.5)$$

Substituyendo (3.5) en (3.1) resulta $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + j\omega \vec{A}) = \vec{0}$. Esto significa que existe una función escalar ϕ , la cual es llamada el potencial escalar, tal que $E + j\omega \vec{A} = -\vec{\nabla}\phi$ o sino:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - j\omega\vec{A} \quad (3.6)$$

Se puede demostrar que 2 juegos de campos (ϕ, \vec{A}) y (ϕ', \vec{A}') producen el mismo campo eléctrico y la misma inducción magnética cuando estos campos son calculados a partir de estos potenciales usando las ecuaciones (3.5) y (3.6). Estos distintos juegos de potenciales están relacionados por:

$$\phi' = \phi - j\omega f; \text{ y } \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f \quad (3.7)$$

Donde f es una función escalar arbitraria. de esa infinidad de posibilidades, se selecciona una f que haga posible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c^2} j\omega\vec{\phi}' \quad (3.8)$$

Pues esa relación permite el desacople de las ecuaciones de onda no homogénea para los potenciales (Anexo A.2). A tal relación se le conoce como el Contraste de Lorentz (Anexo A.1).

La densidad de corriente consiste en una densidad de corriente de fuente, conducida solo por elementos metálicos dispersores de las PAT, y de una densidad de corriente de conducción debido a la conductividad del suelo que rodea al elemento metálico:

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_c = \vec{J}_s + \sigma\vec{E} \quad (3.9)$$

La carga es la acumulación de corriente integrada en el tiempo:

$$\rho_c = \frac{-1}{j\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c \quad (3.10)$$

Además, en medios materiales lineales, existe una relación entre el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico, y también entre la inducción magnética y el campo magnético:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon\vec{E} \\ \vec{B} &= \mu\vec{H} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Las cantidades ϵ y μ son llamados la permitividad y la permeabilidad, respectivamente.

Insertando las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11) en la ley de Gauus (3.3):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_s + \rho_c = \rho_s + \frac{-1}{j\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon\vec{E}) = \rho_s + \frac{-1}{j\omega} \vec{\nabla} \cdot (\sigma\vec{E})$$

Resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_{ef}} \quad (3.12)$$

Cuando nosotros hacemos esta sustitución en la ecuación (3.2) “Ley de Ampere” y usamos la ecuación (3.8), logramos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}_s + \frac{j\omega}{c^2} \vec{E} \quad (3.13)$$

Donde:

$$\epsilon_{ef} = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \quad (3.14)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_{ef}}} \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.12) y (3.13) permiten trabajar solamente con cargas y corrientes tipo fuente. Este resultado es importante, ya que solo se tendrá que trabajar con cargas y corrientes fuente, sin considerar a las corrientes de conducción, reemplazando ϵ por ϵ_{ef} .

Sustituyendo las ecuaciones (3.5) y (3.6) en (3.12) y (3.13) y adicionalmente usando las ecuaciones (3.7) y (3.8) para las simplificaciones, llegamos a las siguientes expresiones (Anexo A.2):

$$\nabla^2 \phi' + \frac{\omega^2}{c_{ef}^2} \phi' = -\frac{\rho_{source}}{\epsilon_{ef}} \quad (3.16)$$

$$\nabla^2 \vec{A}' + \frac{\omega^2}{c_{ef}^2} \vec{A}' = -\mu \vec{J}_{source} \quad (3.17)$$

Las cuales son conocidas como ecuaciones de onda no homogénea de Helmholtz (El primado en los potenciales indica que los mismos satisfacen las condición de contraste de Lorentz). Cuyas soluciones son (Anexo A.3):

$$\phi'(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{1}{\epsilon_{ef}} \rho_s(\vec{r}') \frac{e^{-\gamma|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (3.18)$$

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \int_{V'} \mu \vec{J}_s(\vec{r}') \frac{e^{-\gamma|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (3.19)$$

Donde:

$$\gamma = \frac{j\omega}{c} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_{ef}} \quad (3.20)$$

es la constante de propagación. V' es el volumen sobre el cual las cargas y corrientes fuentes existen.

b) Segundo paso: Aplicación del método de los momentos para alambres radiantes en medios disipadores homogéneos

En su forma más simple, el Método de Momentos es aplicado a alambres dispersores; es una técnica general y puede ser aplicado a cualquier tipo de geometría que pueda radiar ondas electromagnéticas. Muchos sistemas de aterramiento consisten de varillas, contrapesos de espirales o mallas y pueden ser modelados como estructuras de alambre.

Para que sea posible resolver las ecuaciones (3.5), (3.6), (3.18) y (3.19), considerando adicionalmente también $B = \nabla \times A'$ y $E = -\nabla\phi' - j\omega A'$, el armado de electrodos de la PAT es dividido en pequeños segmentos; aquí se asume que el radio del alambre es mucho menor (10 veces menor) que la longitud del respectivo segmento; a tal condición llamaremos “el supuesto del alambre delgado”. De esta manera se puede, aprovechando la simetría radial en los elementos de segmento, modelar la corriente que fluye a través de la estructura del alambre y las cargas eléctricas sobre la superficie del alambre como concentradas en el eje de este alambre; esto se hace así para simplificar las ecuaciones; llamaremos a esto “el supuesto de las cargas concentradas”. Teniendo en cuenta que aún no se modela la corriente como concentrada en el eje, cuando el punto de observación, donde nosotros queremos calcular los campos, es sobre la superficie del alambre dispersor, se utilizan las condiciones de frontera. Estas condiciones establecen que la componente tangencial del campo eléctrico es continua a través de la frontera entre dos medios eléctricamente diferentes. Debido a que asumimos que el alambre es un perfecto conductor, entonces el campo eléctrico dentro de este alambre es nulo y que solo tiene una componente normal justo fuera de la frontera de la superficie del conductor perfecto. Ya que hemos llegado a ecuaciones que solo dependen de cargas y corrientes fuente, entonces, el campo eléctrico de la ecuación (3.6) vendría a ser el campo dispersado, al cual denotaremos por \vec{E}^s ; Entonces, el campo eléctrico exterior sobre la superficie de la frontera consiste la suma de en un campo eléctrico \vec{E}^i incidente a la estructura y el campo

\vec{E}^s dispersado por esta estructura.

La situación se puede entender mejor si se observa la figura 3.1 en donde se ha esquematiza el principio de superposición.

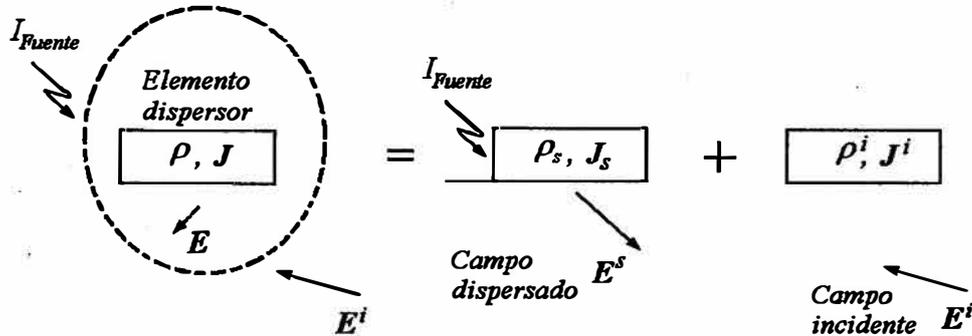


Fig.3.1 Descomposición de la situación real utilizando el principio de superposición

La condición de frontera establece que el campo total eléctrico tiene solo componente normal:

$$(\vec{E}^s + \vec{E}^i) \times \vec{n} = 0 \quad (3.21)$$

Donde \vec{n} es un vector normal unitario a la superficie del perfecto conductor. Cuando se aplica esta condición de frontera, además de “el supuesto del alambre delgado” y de “el supuesto de las cargas concentradas”, a las ecuaciones (3.5), (3.6), (3.18) y (3.19) (utilizando adicionalmente las relaciones $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$ y $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi' - j\omega \vec{A}'$), ellos son transformados en:

$$\begin{aligned} -E_t^i &= -\frac{\partial \phi'}{\partial t} - j\omega A_t' & (3.22) \\ \phi'(\vec{r}) &= \int_{axis} \frac{1}{\epsilon_{ef}} \rho_s(l) \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \\ \vec{A}'(\vec{r}) &= \int_{axis} \mu I_s(l) \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \\ \rho_s &= -\frac{1}{j\omega} \frac{dI_s}{dl} \end{aligned}$$

Donde “ l ” es la variable de longitud a lo largo del eje y “ R ” es la distancia desde el punto fuente sobre el eje al punto de campo o de observación sobre la superficie del alambre. Para cumplir con “el supuesto de las cargas concentradas”, se ha trasladado todas las cargas de la superficie y la corriente dentro del conductor, hacia el eje del alambre sobre el cual se las ha concentrado; y, el punto de observación que inicialmente se ubicaba en el

centro del eje, se le ha trasladado hacia la superficie de la frontera del alambre (Sección B.1.2 de [2]).

Las ecuaciones (3.22) son ecuaciones integro-diferenciales los cuales son resueltas mediante el Método de Momentos (Anexo B de [2]). Las integrales son aproximados mediante sumatorias de integrales sobre pequeños segmentos, donde ρ_s y I_s se toman como constantes en cada segmento (Anexo A.4). Las derivadas son aproximadas por diferencias finitas (las cuales aplican aproximación usando series de Taylor) sobre los mismos intervalos que los usados en la integración. La figura 3.2 ilustra la división del eje del alambre en N pequeños segmentos y define la notación. El m-ésimo segmento es identificado por su punto de inicio, m^- , su punto medio, m y su punto de fin m^+ . El intervalo Δl_m denota el segmento con extremos m^- y m^+ . Los intervalos Δl_{m^-} y Δl_{m^+} denotan los segmentos movidos una media longitud de segmento hacia atrás y hacia adelante a lo largo del eje l del alambre dispersor. Estas aproximaciones resultan:

$$-E_l^i \approx -j\omega A_l^i(n) - \frac{\phi'(n^+) - \phi'(n^-)}{\Delta l_m} \quad (3.23)$$

$$\bar{A}^i(n) = \mu \sum_m \bar{I}_s(m) \int_{\Delta l_m} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \quad (3.24)$$

$$\phi'(n^+) \approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \sum_m \rho_s(m^+) \int_{\Delta l_{m^+}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \quad (3.25)$$

$$\phi'(n^-) \approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \sum_m \rho_s(m^-) \int_{\Delta l_{m^-}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \quad (3.26)$$

$$\rho_s(m^+) = -\frac{1}{j\omega} \frac{I_s(m+1) - I_s(m)}{\Delta l_{m^+}} \quad (3.27)$$

$$\rho_s(m^-) = -\frac{1}{j\omega} \frac{I_s(m) - I_s(m-1)}{\Delta l_{m^-}} \quad (3.28)$$

Los ρ_s 's están dados en términos de I_s 's por las ecuaciones (3.27) y (3.28). Esto significa que la ecuación (3.23) puede ser escrito solamente en términos de las corrientes I_s . Así, existe una relación entre el campo eléctrico E_l^i incidente sobre el segmento de alambre y las corrientes I_s que producen el campo eléctrico. Nosotros podemos arreglar las N ecuaciones (23) como:

$$[V] = [Z][I_s] \quad (3.29)$$

Donde:

$$[I_s] = \begin{bmatrix} I_s(1) \\ I_s(2) \\ \vdots \\ I_s(N) \end{bmatrix} ; [V] = \begin{bmatrix} \vec{E}^i(1) \cdot \overline{\Delta l}_1 \\ \vec{E}^i(2) \cdot \overline{\Delta l}_2 \\ \vdots \\ \vec{E}^i(N) \cdot \overline{\Delta l}_N \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

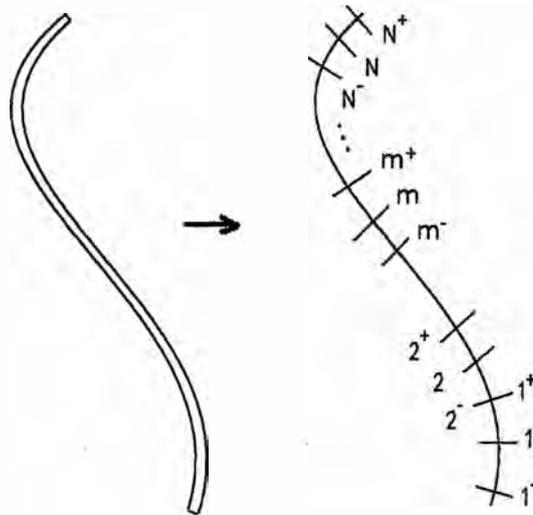


Fig.3.2 División del alambre en pequeños segmentos: definición de la notación

Para calcular los elementos de la matriz de impedancias $[Z]$ debemos analizar las ecuaciones de (3.23) a (3.28) y agrupar adecuadamente (Anexo A.4); por cuestiones de simplificación definimos el término:

$$\psi(n, m) = \frac{1}{\Delta l_m} \int_{\Delta l_m^-}^{\Delta l_m^+} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \quad (3.31)$$

Donde

$$R = |\vec{r}(n) - \vec{r}'(m)| \quad (3.32)$$

El vector potencial en “ n ” debido a $I_s(n)$ es

$$\vec{A} = \mu I_s(m) \overline{\Delta l}_m \psi(n, m) \quad (3.33)$$

Los potenciales escalares en n^+ y n^- debido a las cargas (3.32) son, de acuerdo a (3.25) y (3.26),

$$\phi'(n^+) \approx \frac{1}{j\omega\epsilon_{ef}} \left[I_s(n)\psi(n^+, m^+) - I_s(n)\psi(n^+, m^-) \right] \quad (3.34)$$

$$\phi'(n^-) \approx \frac{1}{j\omega\epsilon_{ef}} \left[I_s(n)\psi(n^-, m^+) - I_s(n)\psi(n^-, m^-) \right]$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.34) y (3.33) en (3.23) y definiendo la impedancia como:

$$Z_{nm} = \frac{\vec{E}^i(n)\overline{\Delta l}_n}{I_s(n)} \quad (3.35)$$

Entonces, luego de algunos cálculos se obtiene:

$$Z_{nm} = j\omega\mu\overline{\Delta l}_n \cdot \overline{\Delta l}_m \psi(n, m) + \frac{1}{j\omega\epsilon_{ef}} \left[\psi(n^+, m^+) - \psi(n^+, m^-) - \psi(n^-, m^+) + \psi(n^-, m^-) \right] \quad (3.36)$$

Vemos que la impedancia del segmento “n” debido al segmento “m” consiste en 5 términos (se presentan pequeñas modificaciones a esta expresión en el anexo A.4). El primer término es la influencia del potencial vector magnético sobre el campo eléctrico y los últimos cuatro términos representan la influencia de el potencial escalar sobre el mismo campo.

3.1.3 Influencia de la interfaz entre el suelo y el aire [3]

Un importante problema es la situación donde la antena transmisora o receptora esta en la vecindad de la superficie terrestre. Este problema es resuelto por el matemático Arnold Sommerfeld (también conocido por su modelo atómico) en 1947 en su libro sobre ecuaciones parciales diferenciales. La solución de Sommerfeld involucra integrales complicadas que deben ser resueltas usando análisis complejos. Se derivará una solución aproximada. El método es conocido como la teoría de imágenes modificada.

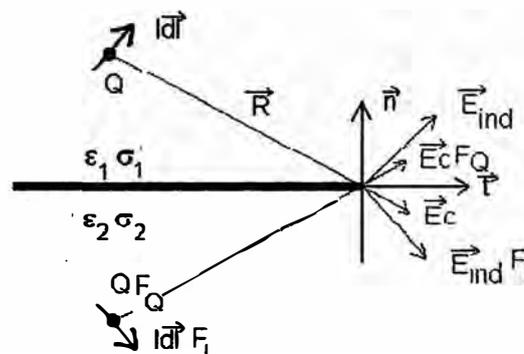


Fig.3.3 Método de imágenes modificado

Considerando el espacio hecho de 2 mitades caracterizados por las propiedades electromagnéticas (ϵ_{ef1}, μ_1) para la mitad superior y (ϵ_{ef2}, μ_2) para la mitad inferior. La

situación es esbozada en la figura 3.3. Un carga elemental y un dipolo elemental existen solo en una de los medios (medio 1). Ahora se probará que en la mitad de espacio del dipolo se puede calcular aproximadamente haciendo una reflexión tipo espejo al dipolo con respecto al plano de interfaz entre los dos medios, y multiplicando la corriente y las cargas del dipolo con factores F_I y F_Q respectivamente. Entonces, el plano de la interfaz puede ser imaginariamente retirado y considerarse como si todo es espacio estuviera lleno del medio 1. A continuación se calculan los factores F_I y F_Q .

El campo eléctrico en cualquier punto del plano de interfaz es una suma vectorial de las componentes coulombianas \vec{E}_C , debido a la carga Q y a la componente rotacional E_{ind} , debido a la corriente $I dl$. F_{I1} y F_{Q1} representa los coeficientes de imagen complejos por los que la corriente y carga imagen deben ser multiplicados para calcular el campo eléctrico en el medio 1. Los elementos fuente originales en el medio 1 permanecen sin cambios y todo el espacio es llenado por el medio 1. F_{I2} y F_{Q2} representan los coeficientes complejos de imagen que deben ser multiplicados a la corriente y a la carga para obtener el campo eléctrico en el medio 2. Los elementos fuentes originales permanecen sin cambios y la reflexión tipo espejo no se realiza. Ahora el espacio entero se llena con el medio 2.

El método de las imágenes modificado realiza las siguientes simplificaciones a las ecuaciones (3.18) y (3.19) para la carga elemental y el elemento de corriente que aparecen en la figura 3.2:

$$\phi'(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{\epsilon_{ef}} \rho_s(\vec{r}') \frac{e^{-\gamma|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \rightarrow \phi'(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_{ef}} \frac{Q}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.37)$$

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \int_V \mu \vec{J}_s(\vec{r}') \frac{e^{-\gamma|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \mu \frac{I d\vec{l}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.38)$$

Nótese que aquí se ha realizado la siguiente simplificación:

$$e^{-\gamma|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1 \quad (3.39)$$

Esta restricción es la principal hipótesis que se deberá verificar cuando se requiera aplicar el modelo que se está desarrollando.

La condición de continuidad en el plano de la interfaz para la componente normal de la densidad de la corriente $\vec{J} = \varepsilon \vec{E} + \partial \vec{D} / \partial t = \sigma_{ef} \vec{E}$ con $\sigma_{ef} = j\omega \varepsilon_{ef} = \sigma + j\omega \varepsilon$, establece que:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ef1}}{4\pi} \left[(1 - F_{Q1}) \frac{Q}{\varepsilon_{ef1}} \frac{\vec{R} \cdot \vec{n}}{R^3} + j\omega \mu_1 (1 - F_{I1}) I \frac{\vec{dl} \cdot \vec{n}}{R} \right] = \\ = \frac{\sigma_{ef2}}{4\pi} \left[F_{Q2} \frac{Q}{\varepsilon_{ef2}} \frac{\vec{R} \cdot \vec{n}}{R^3} + j\omega \mu_2 F_{I2} I \frac{\vec{dl} \cdot \vec{n}}{R} \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

La condición de continuidad para las componentes tangenciales del campo eléctrico total en el plano de la interfase, establece que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \left[(1 + F_{Q1}) \frac{Q}{\varepsilon_{ef1}} \frac{\vec{R} \cdot \vec{t}}{R^3} + j\omega \mu_1 (1 + F_{I1}) I \frac{\vec{dl} \cdot \vec{t}}{R} \right] = \\ = \frac{1}{4\pi} \left[F_{Q2} \frac{Q}{\varepsilon_{ef2}} \frac{\vec{R} \cdot \vec{t}}{R^3} + j\omega \mu_2 F_{I2} I \frac{\vec{dl} \cdot \vec{t}}{R} \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Donde n y t son los vectores unitarios normal y tangencial en el plano de la interfaz respectivamente. \vec{R} es el vector distancia desde la fuente al punto de observación sobre el plano de la interfaz. En los cálculos de las fuentes imagen, factor de retardo y de atenuación $e^{-\gamma R}$ han sido despreciados, como se ha establecido en la ecuación (3.39). Esto significa que el método de imágenes modificado es un método aproximado y que puede ser usado solo si:

$$|\gamma R| \ll 1 \quad (3.42)$$

$$F_{Q1} = F_{I1} = \frac{\varepsilon_{ef1} - \varepsilon_{ef2}}{\varepsilon_{ef1} + \varepsilon_{ef2}} = F \quad (3.43)$$

$$F_{Q2} = \frac{2\varepsilon_{ef2}}{\varepsilon_{ef1} + \varepsilon_{ef2}} \quad (3.44)$$

$$F_{I2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{2\varepsilon_{ef1}}{\varepsilon_{ef1} + \varepsilon_{ef2}} \quad (3.45)$$

La impedancia mutua entre los segmentos n y m dado en la ecuación (3.35) toma la forma:

$$\begin{aligned}
Z_{mm} = & j\omega\mu_1\overline{\Delta l}_n \cdot \overline{\Delta l}_m \psi(n, m) + \\
& j\omega\mu_1 F \overline{\Delta l}_n \cdot \overline{\Delta l}_{m_1} \psi(n, m_1) + \\
& \frac{1}{j\omega\epsilon_{ej1}} \left[\psi(n^+, m^+) - \psi(n^+, m^-) - \psi(n^-, m^+) + \psi(n^-, m^-) \right] + \\
& \frac{F}{j\omega\epsilon_{ej1}} \left[\psi(n^+, m_1^+) - \psi(n^+, m_1^-) - \psi(n^-, m_1^+) + \psi(n^-, m_1^-) \right]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

En la ecuación anterior, el índice “ m_1 ” denota a las corrientes y cargas que han sido obtenidas a través de la reflexión tipo espejo con respecto al plano de interfaz. El factor F es dado por la ecuación (3.43).

3.1.4 Aplicación del método de los momentos en el análisis de las redes de puesta a tierra [3]

El método de los momentos puede ser usado para analizar la efectividad de los sistemas de aterramiento cuando un rayo los impacta. Considérese un sistema de aterramiento el cual se ha dividido en N pequeños segmentos. Un rayo que impacta en el sistema puede ser modelado por una fuente de corriente. Tal fuente es ubicado en el k -avo segmento como se muestra en la figura 4.

Cuando una impedancia externa está presente en el sistema de aterramiento como por ejemplo los pararrayos o transformadores de aislamiento, ellos pueden ser incluidos en el modelo simplemente adicionándolos en el correspondiente elemento de la diagonal de la matriz de Impedancias Z .

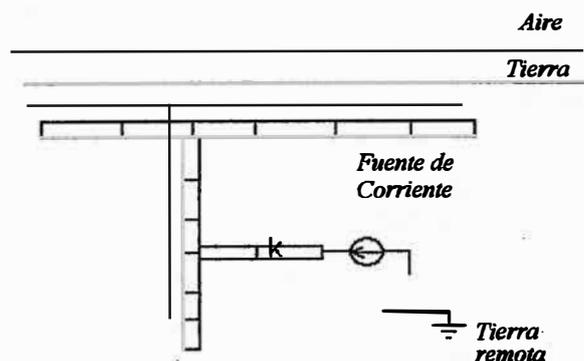


Fig.3.4 Red de puesta a tierra conectada a una fuente de corriente

Es posible también contar con una conductividad real del metal del sistema de aterramiento. En lugar de asumir que posee una conductividad infinita, podemos, modificando ligeramente el método, considerar electrodos con una conductividad real. Sin embargo, para la mayoría de aplicaciones no es necesario tomar una conductividad real dentro de las consideraciones.

Debido a que el sistema de aterramiento es excitado con una fuente de corriente en el k-avo elemento, se puede escribir la siguiente ecuación en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{1,k-1} & Z_{1,k} & Z_{1,k+1} & Z_{1N} \\ Z_{k-1,1} & & Z_{k-1,k-1} & Z_{k-1,k} & Z_{k-1,k+1} & Z_{k-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Z_{k+1,1} & Z_{k+1,2} & Z_{k+1,k-1} & Z_{k+1,k} & Z_{k+1,k+1} & Z_{k+1,N} \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N,k-1} & Z_{Nk} & Z_{N,k+1} & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_{k-1} \\ I_k \\ I_{k+1} \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{exc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

En esta ecuación, I_{exc} es la amplitud de la corriente de excitación senoidales en el k-avo elemento, y I_i , $i = 1, \dots, N$ es la amplitud de la corriente senoidal del i-avo segmento. El miembro derecho de la ecuación (3.47) es un vector con cantidades conocidas, y la mayoría de ceros que aparecen se debe a que se ha asumido que el campo eléctrico incidente E^i es nulo en todo el espacio. A la vez, los elementos de la matriz de impedancias son también conocidos. Aplicando una simple inversión matricial, se logra calcular el vector de corrientes inicialmente desconocidos.

Cuando la corriente de cada segmento es conocida, el potencial escalar en un punto arbitrario dentro de la tierra puede ser calculado usando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \phi'(\vec{r}) \approx & \frac{1}{\epsilon_{ef}} \sum_m \sigma_s(m) \int_{\Delta_m^+} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \\ & + \frac{F}{\epsilon_{ef}} \sum_{m_l} \sigma_s(m_l) \int_{\Delta_{m_l}^+} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \end{aligned} \quad (3.48)$$

Este potencial escalar puede ser usado como la definición del voltaje entre el punto r y la tierra remota. Teóricamente el concepto de “voltaje” no existe en electromagnetismo excepto en DC. Existen dos definiciones para el voltaje entre el punto 1 y el punto 2:

$$V_{12} = \phi_2 - \phi_1 \quad (3.49)$$

$$V_{12} = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.50)$$

La definición de voltaje usando diferencias de potencial escalar como en la ecuación (3.44) es preferida a la de la ecuación (3.50), el cual es dependiente del camino que conecta al punto 1 con el punto 2. Al calcular el voltaje entre 1 y 2, la diferencia en voltaje es igual a:

$$V_{12}^{\text{Caminol}} - V_{12}^{\text{Caminol2}} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.51)$$

Donde S es la superficie limitada por los dos diferentes caminos. Por lo tanto el voltaje en un punto cualquiera deberá ser calculado usando la primera definición, la ecuación (3.49). Frecuentemente es útil calcular el voltaje en un punto sobre el electrodo de aterramiento. Debido a que la ecuación (3.48) puede ser solamente usado para potenciales en puntos dentro del medio con permitividad efectiva ϵ_{ef} , la ecuación debería ser aplicado a puntos que estén situados sobre la superficie entre el electrodo de aterramiento y la tierra.

El método de momentos trabaja en el dominio de la frecuencia. Esto significa que la data de entrada y de salida deben ser pre- y post-procesadas para calcular el comportamiento transitorio de, por ejemplo, el voltaje en un punto sobre un electrodo de aterramiento. Por ejemplo, la transformada de Fourier puede ser aplicado para obtener las componentes en frecuencia de la corriente de rayo. Para cada frecuencia, el vector corriente de la ecuación (3.47) y el potencial de la ecuación (3.48) tienen que ser calculados. En (3.47), se usa la componente de Fourier de la corriente de rayo. Después todas las componentes en frecuencia del voltaje en un punto son reunidas para mediante la transformada inversa de Fourier trasladar la señal al dominio del tiempo. Esto nos da el voltaje transitorio. La impedancia transitoria del sistema de aterramiento puede ser calculado dividiendo el voltaje transitorio en el punto de inyección de corriente entre la corriente de rayo:

$$Z(t) = \frac{v(t)}{i(t)} \quad (3.52)$$

Otra importante cantidad que también se puede calcular mediante la técnica MoM descrita es el voltaje de paso en el suelo del terreno sobre el sistema de aterramiento.

3.2 Implementación de un programa computacional

Una mejor manera de tratar las relaciones anteriormente encontradas es a través de la utilización de un programa computacional. Para este informe, se ha utilizado el lenguaje de programación del Matlab 6.5 Release 13 para la implementación de tal programa. Pero antes de describir la estructura del mismo, debemos verificar 2 aspectos: primero, que los parámetros utilizados en el programa, tanto físicos como temporales y de frecuencia, estén

dentro del rango de valores reales; y segundo, que las restricciones impuestas por el modelo desarrollado sean cumplidas por estos parámetros validados.

3.2.1 Validación de parámetros

a) Casos de simulación

CASO 1: Es el que se establece en la sección 4.2 del siguiente capítulo, en el que se trata de probar que una varilla vertical de 3m de longitud, considerado como concentrada, puede tener comportamiento de PAT extendida. Aquí se usan las formas de onda 0.2/50, 0.5/50, 1/50 y 5/50 $\mu s / \mu s$ para el modelamiento de rayo. Además se consideran una resistividad del suelo $\rho = 10\Omega - m$ y una permitividad relativa igual a 10.

CASO 2: Es el que se establece en la sección 4.5, en el que se busca de entre 4 distintos armados, el que mejor desempeño tiene como PAT en su función de limitar las sobretensiones causados por el fenómeno de potenciales con retardo. Aquí se usa la forma de onda 0.25-us/100-us. Además se consideran una resistividad del suelo $\rho = 200\Omega - m$ y una permitividad relativa igual a 10.

b) Validación de las formas de onda de rayo utilizadas

El IEC Standard 1312-1 [10] sugiere el uso de las formas de onda de rayo 10-us/350-us para el primer impacto, y el 0.25-us/100-us para el impacto de retorno de rayo. Como se puede observar, las formas de onda de rayos utilizados en el caso 1 y el caso 2, anteriormente descritos, están en el orden en que recomienda la norma.

c) De la frecuencia máxima contenida a considerar

En el análisis en el dominio de la frecuencia, para calcular la transformada inversa de Fourier, se integra a lo largo de todo el eje de frecuencia $\langle -\infty, +\infty \rangle$. Dada la limitada capacidad del computador, se procede a truncar tal dominio a zonas manejables. Luego, resulta necesario para ello establecer un criterio para realizar tal truncamiento. En este caso, y dada el comportamiento decreciente del espectro de frecuencias de las formas de onda utilizadas, se procede a integrar hasta donde la forma espectral de la señal decaiga hasta un 10% del valor máximo del mismo. Esto se esquematiza en la figura 3.5 para la forma de onda 0.2-us/50-us. Ahí, se encuentra que tal frecuencia vale 138.69 kHz. Sin embargo, para el programa se tomará 2.5 MHz, que es mucho mayor, ya que en PAT's con comportamiento inductivo, la forma de onda del voltaje presenta un frente de onda con mayor crecimiento que el correspondiente rayo, el cual requiere un mayor dominio del espectro de frecuencias a considerar. Se procede de la manera similar para las demás formas de onda y se obtiene la tabla 3.1

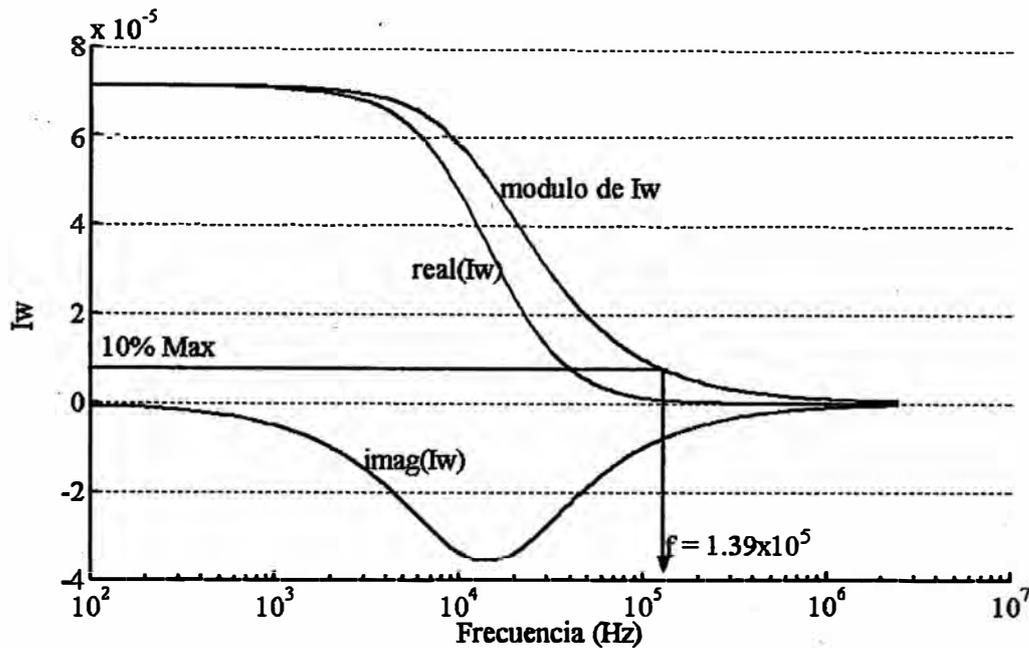


Fig.3.5 Espectro de frecuencias contenidas de la forma de onda 0.2-us/50-us.

Tabla N° 2.1 Frecuencias máximas a considerar en la integración numérica

Forma de Onda (us/us)	CASO 1				CASO 2
	0.2/50	0.5/50	1/50	5/50	0.25/100
Frec. Máx. (Hz)	138,690.00	138,500.00	142,800.00	164,540.00	71,595.00

d) De la longitud mínima de los armados - la longitud crítica

Para poder hacer un uso pertinente del modelo desarrollado, se debe asegurar que se está analizando una situación en donde aparecen los efectos de la propagación de ondas, y que según la teoría vista en el Capítulo II, sería lo mismo asegurar que aparezcan sobretensiones por potenciales con retardo; como se verá, para que tal tipo de sobretensiones existan, las dimensiones de los armados de la PAT deberán ser mayor que una longitud determinada, a la cual se le llamará longitud crítica. En los siguientes párrafos se muestra como hallar tal longitud.

De Ecuación 3.18 se sabe que el potencial eléctrico en régimen dinámico se puede expresar como:

$$\phi'(\vec{r}, t) = \int_{V'} \frac{1}{\epsilon_{ef}} \frac{\rho_s(\vec{r}', t')}{4\pi R} d^3\vec{r}' \quad (3.53)$$

Donde $t' = t - \frac{R}{c}$. Luego, para una frecuencia $f = \omega / 2\pi$ en particular,

$$\rho(r', t') = \rho_s(r') e^{j\omega t'} = \rho_s(r') e^{j\omega t} e^{-j\omega R/c} \quad (3.54)$$

Entonces:

$$\phi'(\vec{r}, t) = e^{j\omega t} \int_{V'} \frac{1}{\epsilon_{ef}} \frac{\rho_s(\vec{r}') e^{-j\omega R/c}}{4\pi R} d^3\vec{r}' \quad (3.55)$$

Que, comparándola con la ecuación (3.18), encontramos que $\gamma = j\omega/c = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_{ef}}$, donde ϵ_{ef} está definida por la ecuación (3.14). El retardo R/c podría quedar despreciable el punto de observación (punto campo) se halla muy cerca del recinto de integración, y de esta manera no se produciría las sobretensiones por efecto de potenciales con retardo. Aún así, todavía queda el hecho de que el retardo será diferente para distintos puntos fuente.

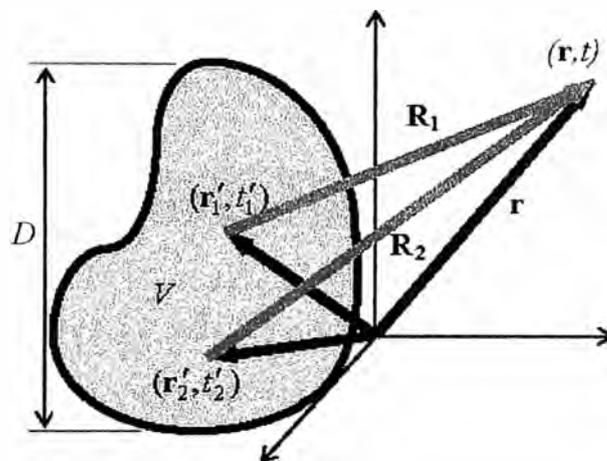


Fig.3.6 Explicación de la longitud crítica

En la figura 3.6: $\Delta t_1 = R_1/c \neq \Delta t_2 = R_2/c$. Si consideramos $\gamma = \alpha + j\beta$, esta diferencia de retardo se traduce en una diferencia de fase $\beta|R_1 - R_2|$, que, en general, producirá interferencia, lo cual podrá causar sobretensiones de tipo de potencial con retardo. Para que tal efecto suceda, la separación entre los punto fuente mas alejados debe ser lo suficientemente grande como para que $\beta|R_1 - R_2| \gg 10\%(2\pi)$, siendo 2π una revolución completa de fase. Si “D” es la máxima dimensión de la red de PAT, entonces para una frecuencia angular “ ω ” en particular:

$$\beta D \gg 10\%(2\pi) \Rightarrow D \gg 10\%\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = 10\%(\lambda) \quad (3.56)$$

Es decir, que la longitud máxima “D” deberá ser mayor que el 10% de la longitud de onda correspondiente a frecuencia angular “ ω ” analizada. De todas las longitudes de onda de las frecuencias contenidas en una forma de onda, la longitud de onda que será usada para la comparación será la mínima de entre ellas, el cual corresponde a la frecuencia máxima contenida. Según la tabla 3.1, esta frecuencia máxima vale 164,540 Hz

(la mayor de entre las 4 que allí aparecen) para el caso 1, y 71,595 Hz para el caso 2. Teniendo en cuenta que [6]:

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi}{\beta_{\max}}, \quad \beta_{\max} = \omega_{\max} \sqrt{\mu\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega_{\max} \epsilon} \right)^2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (3.57)$$

Encontramos los valores que se consignan en la siguiente tabla, en donde se considera que la permitividad dieléctrica del suelo es igual a $10\epsilon_0$, y la permeabilidad magnética igual a la del vacío.

Tabla N° 2.2 Longitudes críticas para los casos descritos en la sub-sección 3.2.1

Forma de Onda (us/us)	CASO 1				CASO 2
	0.2/50	0.5/50	1/50	5/50	0.25/100
Frec. Máx. (Hz)	138,690.00	138,500.00	142,800.00	164,540.00	71,595.00
Resistividad del suelo (Ω -m)	10	10	10	10	200
λ_{\min} o long. típica (m)	26.83	26.85	26.44	24.64	166.47
longitud crítica $lc, 10\% \lambda_{\min}$ (m)	2.68	2.69	2.64	2.46	16.65

Para el Caso 1, las dimensión del electrodo de la PAT que allí se prueba y que es 3 m, está alrededor de la longitud crítica correspondiente para este caso y que vale $10\% \lambda_{\min} = 2.46$ m; y para el Caso 2 también las dimensiones de los armados que son 22, 11, 9 y 6 m para los 4 tipos de armados que allí se analizan, están alrededor de $10\% \lambda_{\min} = 16.6$ m. Luego, en ambos casos sucederán sobretensiones por potenciales con retardo.

3.2.2 Verificación de la restricción principal del modelo

En el método de imágenes modificado, se realiza la siguiente simplificación (subsección 3.1.3):

$$e^{-\gamma|R|} \approx 1 \quad (3.58)$$

Esto impone una restricción en la magnitud de los parámetros; tal restricción se verificará en este apartado. Ya que γ depende de la frecuencia, se tendrá que comprobar la restricción (3.58) para cada frecuencia de las ondas que componen, según Fourier, el impulso de corriente de rayo. Aquí se evaluará tal restricción de una manera indirecta, calculando el error $1 - e^{-|\gamma R|}$. Pero no todos estos errores $1 - e^{-|\gamma R|}$, una para cada frecuencia, que se calculan a lo largo del dominio de la frecuencia, tienen la misma

importancia para exigirles esa restricción, ya que a valores mayores de la frecuencia, menores son las amplitudes del espectro de las señales, y con ello, menor la importancia de tal error. Entonces una manera más adecuada de calcular el error que se comete en hacer tal aproximación sería evaluando en forma conjunta todos esos errores mediante la siguiente expresión:

$$\text{error}(\%) = \frac{\int_0^{\omega_{\max}} |I(\omega)|(1 - e^{-rR})d\omega}{\int_0^{\omega_{\max}} |I(\omega)|d\omega} \quad (3.59)$$

Donde $|I(\omega)|$ vendría a ser como una especie de peso de importancia para el error $1 - e^{-rR}$.

Sin embargo, aún queda decidir que valor se le dará a la variable "R" que aparece en la formula anterior, pues asignarle la longitud máxima del armado no sería muy representativo, por dos razones:

- iii. Ello supone que cuando se calcula el potencial en el extremo, el valor total del potencial en ese punto se debe enteramente a la contribución del entero de la varilla, lo cual no es cierto, ya que se va a demostrar que solo el 61% de la longitud contribuye al 90% del valor total del potencial.
- iv. También supondría que solo es necesario calcular potenciales en los extremos del armado para evaluar tal restricción, cuando se sabe que existe potencial a lo largo de toda la varilla, y que por lo tanto la evaluación debería considerar el total de la longitud de la misma.

Atendiendo a la primera observación, calculamos el potencial en el extremo de una varilla suponiendo una carga lineal constante e invariable en el tiempo igual a $\rho = 4\pi\epsilon_0$, así:

$$\phi(x=0) = \int_{r_0}^{R_{\max}} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 R} dl = \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \quad (3.60)$$

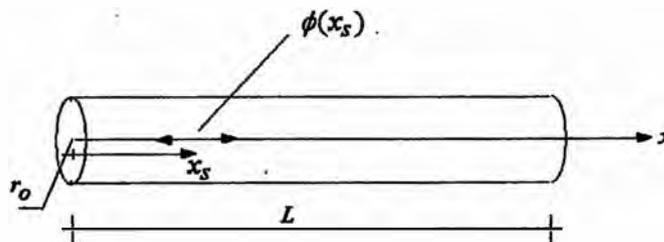


Fig.3.7 Geometría de la situación y notación utilizada

Así, buscamos el valor de x para el cual se logra el 90% de la valor de la integral anterior:

$$\ln\left(\frac{l_{red}}{r_o}\right) = 0.9 \ln\left(\frac{L}{r_o}\right) \Rightarrow l_{red} = L^{0.9} r_o^{0.1} \quad (3.61)$$

Donde " L " es la longitud del electrodo y l_{red} es la longitud buscada, a la cual llamaremos "*longitud reducida*". Como $r_o = 0.007$, entonces $r_o^{0.1} = 0.6088$, luego

$$l_{red} = 0.6088 L^{0.9} \quad (3.62)$$

Es decir, que si se integra hasta por lo menos hasta el 61% de la longitud del electrodo, se logra obtener el 90% del valor correcto del potencial.

Atendiendo la segunda observación, se encuentra que la expresión que calcula el potencial en cualquier punto de la varilla es:

$$\phi(x) = \ln\left(\frac{(L-x)x}{r_o^2}\right) \quad (3.63)$$

Graficamos tal función en la figura 3.8 para $L = 20$ m.

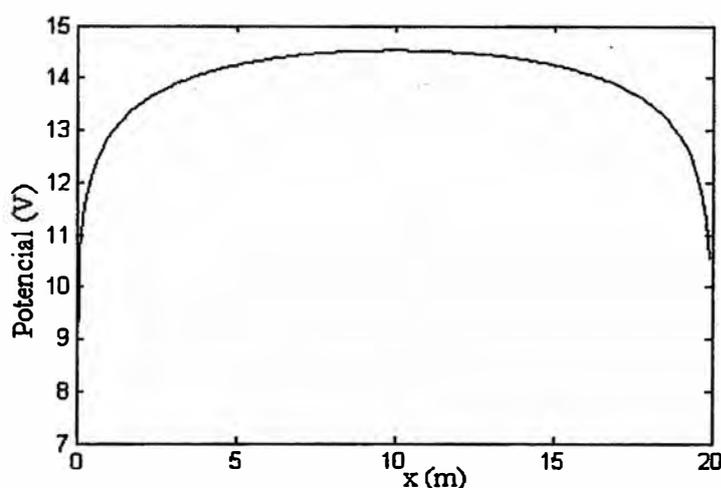


Fig.3.8 Potencial a lo largo de la varilla de 20 m de longitud

Por razones de simplificación, solo se tomará en cuenta la primera observación; aunque el error que se obtenga de esa manera no será tan real, al menos nos dará una idea del máximo error que se llegaría a cometer cuando se utiliza el presente modelo que se desarrolla aquí. Además, observando la figura anterior, nos damos cuenta de que podemos suponer que el error que se comete por usar el método de imágenes modificado, tiene la misma importancia en cualquier punto de la varilla, pues los valores de potencial se parecen a lo largo del mismo. Se resumen los cálculos en las tablas 3.3 y 3.4. Los casos de las tablas se describen al inicio de esta subsección, y los tipos de armados de la tabla 3.4 son los que se grafican en la figura 4.7 (a) del Capítulo IV.

Tabla N° 2.3 Error máximo y longitud reducida para el electrodo de 3-m del Caso 1

Forma de Onda (us/us)	CASO 1			
	0.2/50	0.5/50	1/50	5/50
Frec. Máx. (Hz)	138,690.00	138,500.00	142,800.00	164,540.00
Longitud típica (m)	26.83	26.85	26.44	24.64
Longitud crítica l_c (m)	2.68	2.69	2.64	2.46
Longitud característica L (m)	3	3	3	3
Long. Reducida (m)	1.64	1.64	1.64	1.64
Error máximo	22.9%	22.94%	23.23%	24.65%

Tabla N° 2.4 Error máximo y longitud reducida para el Caso 2

Tipo de armado	CASO 2			
	A	B	C	D
Forma de Onda (us/us)	0.25/100	0.25/100	0.25/100	0.25/100
Frec. Máx. (Hz)	71,595.00	71,595.00	71,595.00	71,595.00
Longitud típica (m)	166.47	166.47	166.47	166.47
Longitud crítica l_c (m)	16.65	16.65	16.65	16.65
Longitud característica L (m)	22	11	9	6
Long. Reducida (m)	9.83	9.83	8.21	5.70
Error máximo	22.10%	22.10%	18.92%	13.66%

Téngase en cuenta que estos valores de errores máximos se refieren a la eficacia del método de imágenes modificado, y no tienen que ver directamente con el desempeño de modelo de PAT en general. El método de imágenes modificado calcula las contribuciones de las cargas y corrientes imagen, el cual es una pequeña fracción de la contribución principal, y por lo tanto los errores presentados en las tablas anteriores no se deberían tomar como decisivos.

3.2.3 Valores básicos para las constantes

Una manera de poder tratar con los valores de los parámetros con que se trabajan en las simulaciones, es definiendo valores básicos sobre los cuales se pueden obtener esos parámetros como múltiplos de los estos. Así para el presente trabajo se utilizarán los siguientes valores:

Valor básico de tiempo: $dts = 0.1 \text{ us}$

Valor básico de longitud de segmento: $dls = 3/40 \text{ m}$

Valor básico de variación de frecuencia: $df_s = 100 \text{ Hz}$

Valor máximo de frecuencia: $W_{\max} = 2.5 \text{ MHz}$

Valor máximo de tiempo : $T_{\max} = 5 \text{ us}$

3.2.4 Tecnología del programa

a) Mallado para métodos de discretización de dominios espaciales

A fin de poder aplicar el programa a cualquier geometría de armado de electrodos de PAT, se ha utilizado la convención de mallado que se utilizan en las técnicas de métodos de resolución de ecuaciones diferenciales por segmentación de dominio. Tales métodos establecen un orden preestablecido de la información geométrica del mallado de la red de la PAT en matrices.

b) Integración numérica por cuadratura

Para mejorar la exactitud en la integración numérica, se utiliza la integración por cuadratura de Gauss-Jordan. Esto permite que no se tenga que segmentar demasiado a la red de PAT para alcanzar alguna precisión establecida; lo cual deriva en una disminución del tiempo de ejecución del programa.

c) Integración numérica para calcular la transformada inversa de Fourier

L. Grcev calcula la transformada inversa de Fourier utilizando la transformada rápida de Fourier FFT [6]. El inconveniente de trabajar de esa manera es que:

- i. Se tiene que considerar la misma cantidad de elementos tanto para el dominio de la frecuencia como para la del tiempo; esto resta flexibilidad al modelo, pues cuando se requiere calcular el potencial para tiempos mayores que en la primera corrida, se tiene que correr el programa otra vez.
- ii. El hecho de considerar que todos los sub-intervalos, tanto en frecuencia como en tiempo, para la aplicación de la FFT tengan que ser iguales y teniendo en cuenta que el espectro de señales de la corriente de rayo posee zonas de inflexión con pendiente muy pronunciadas, es necesario escoger un " $d\omega$ " pequeño para el muestreo en la frecuencia. Ello produce una enorme cantidad de frecuencias a considerar en la FFT, lo cual se traduce a un tiempo grande para la ejecución del programa.

En este trabajo se usa integración numérica para calcular tal transformada inversa junto a la aplicación de una técnica que hace que la cantidad de frecuencias a considerar esté alrededor de 100, tal como se describe en el siguiente ítem. En este caso, " $d\omega$ " es variable.

d) Técnicas utilizadas para reducir el tiempo de procesamiento

- i. Con respecto a la determinación de los valores de frecuencia para la integración numérica, se basa en hacer que el error, que se comete por integrar a base de rectángulos en vez de trapecios, sea menor a un valor especificado. De esta manera se calculan pocos componentes del espectro de frecuencias de los potenciales.
- ii. Con respecto al cálculo de los ψ 's de la ecuación (3.36), se realiza en 2 procesos: uno calculando los parámetros que solo dependan de la geometría del armado; el segundo, en base a esos parámetros geométricos obtenidos, se calculan las componentes en frecuencia de las señales de interés.

3.2.5 Estructura del programa

Habiendo verificado que el modelo es pertinente para trabajar en los casos que se analizan en este informe(subsección 3.2.1 y secciones 4.2 y 4.5), se describe a continuación su estructura. Para el calculo del potencial eléctrico en la PAT, se procede en dos pasos. El primero utiliza el programa Matlab “patlw.m” para obtener las componentes del espectro en frecuencia de las corrientes de los elementos de longitud de la malla. Como segundo paso, se utiliza el programa “patphit.m” para el cálculo del potencial eléctrico, en función del tiempo, en todos los elementos de longitud en el que el procedimiento de mallado ha dividido a la red de PAT. Esto se esquematiza en la figura 3.9.

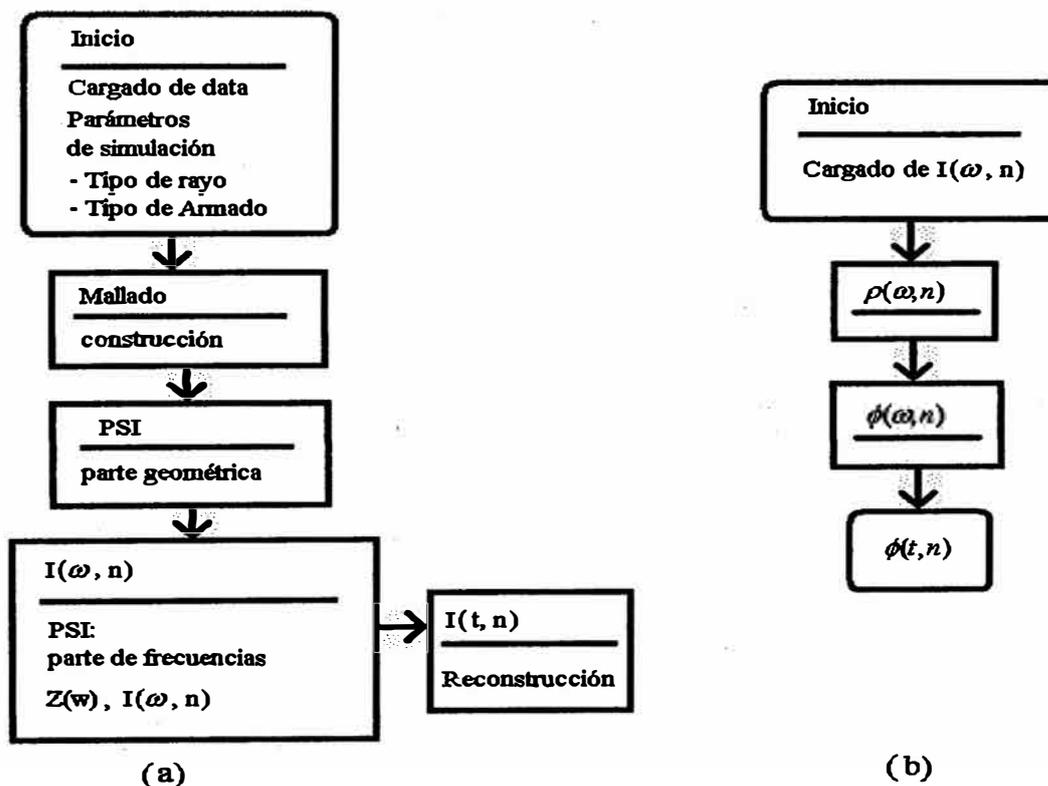


Fig.3.9 Diagramas de Flujo para los programas - Matlab (a) patlw.m (b) patphit.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y REGLAS PARA AMINORAR LOS EFECTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS

4.1 Consideraciones Generales

Para la obtención de los resultados presentados en este capítulo, se han utilizado los programas `patlw.m` y `patphit.m` (Anexo C) implementados en lenguaje Matlab. Tales programas calculan la característica de impedancia de la PAT, la sobretensión en el punto de descarga, entre otros. Los resultados que se presentan a continuación son contrastados con los de la referencia [4].

4.2 Efectos de la propagación de ondas en aterramientos concentrados

La Fig. 4.1 muestra el módulo de la impedancia, y el respectivo ángulo, de una PAT, que consiste de un electrodo vertical de 3m de longitud en un suelo de resistividad igual a $10 \Omega \cdot m$ y permitividad relativa igual a 10. Tales electrodos son siempre clasificados como aterramientos concentrados. Sin embargo, se ve claramente en la figura 4.1, que debido a los efectos de la propagación de ondas, la impedancia del aterramiento es dependiente de la frecuencia más arriba de los 200 kHz. Cuando se usa como excitación un impulso de corriente que tiene contenido de frecuencias menores que 200 kHz, la respuesta no incluye los efectos de la propagación, tal como un impulso de corriente de doble exponencial con un valor de pico de 1 A con un tiempo máximo de 5 μs y un tiempo a un valor mitad de pico igual a 50 μs como se indica en la figura 4.2.

Sin embargo, impulsos con frente de onda de corta duración tienen contenidos de altas frecuencias y los efectos de propagación resultan en un excesivo pico de voltaje transitorio, tal como los impulsos con 1 μs , 0.5 μs y 0.2 μs de tiempo de subida al valor máximo valor del impulso (figura 4.2).

4.3 Comportamiento inductivo y capacitivo

La figura 4.3 nos muestra la típica dependencia a la frecuencia de los sistemas de puesta a tierra. La figura muestra la razón entre el módulo de la impedancia y su resistencia de baja frecuencia. Se pueden distinguir dos rangos: el rango de baja frecuencia (BF),

donde la impedancia es casi constante, es decir independiente de la frecuencia, y el rango de alta frecuencia (AF), donde la impedancia es cambiante con la frecuencia. La frecuencia que limita estas dos características distintas es conocida como la frecuencia característica F_c [17]. Tal frecuencia característica F_c podría estar en el rango de los kHz hasta el rango de lo MHz, dependiendo de la resistividad del terreno, la longitud del electrodo y la localización del punto de descarga. La frecuencia característica F_c es grande para pequeñas dimensiones del electrodo, grandes valores de resistividad del terreno y para un punto de descarga localizado en la parte central del electrodo.

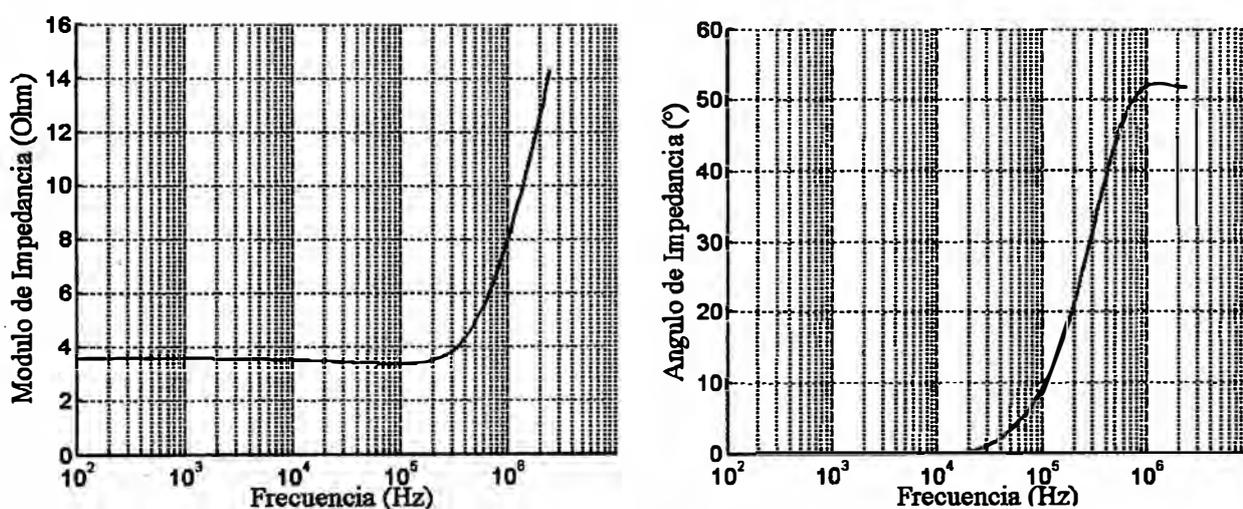


Fig.4.1 Módulo y ángulo de la impedancia de una varilla vertical de 3m usada como PAT.

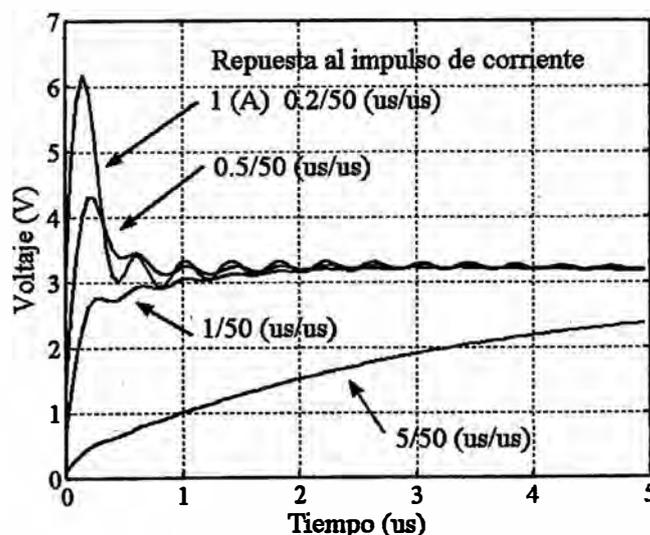


Fig.4.2 Voltaje transitorio en el punto de descarga como respuesta al impulso de corriente

El comportamiento capacitivo es altamente recomendado pues la impedancia a AF es mas pequeña que el valor de la resistencia de la PAT a BF. Sin embargo, tal

comportamiento capacitivo es típico de electrodos con pequeñas dimensiones en suelos de alta resistividad, y para otros casos el comportamiento de los PAT's es siempre inductivo.

La Fig. 4.4 nos da las regiones de comportamiento inductivo y capacitivo de un electrodo de PAT en función de su longitud característica y la resistividad del suelo [4]. Aquí se define *longitud característica* del electrodo de PAT como la distancia desde el punto de descarga (el punto en el que ingresa la corriente de rayo al electrodo) al punto mas distante de este electrodo. Aunque los electrodos verticales son mas efectivos para PAT que los horizontales, la Fig. 4.4 es aproximadamente aplicable para ambos, electrodos horizontales y verticales[4].

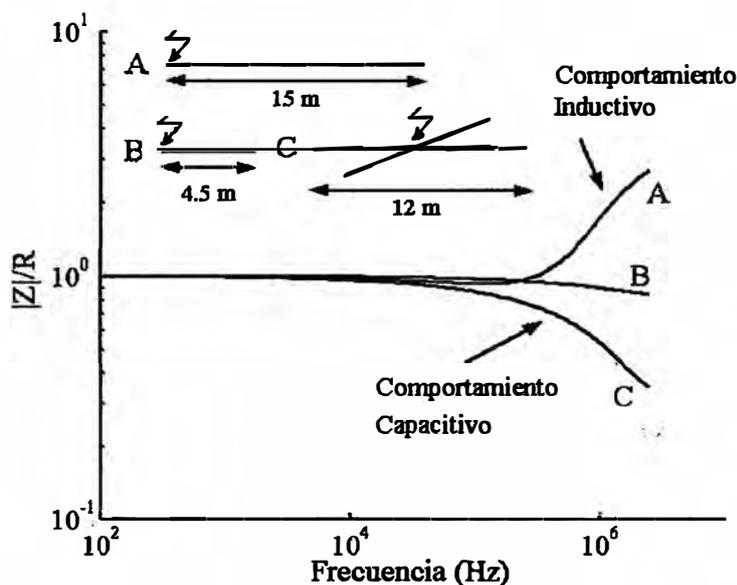


Fig.4.3 Dependencia a la frecuencia de un electrodo de puesta a tierra

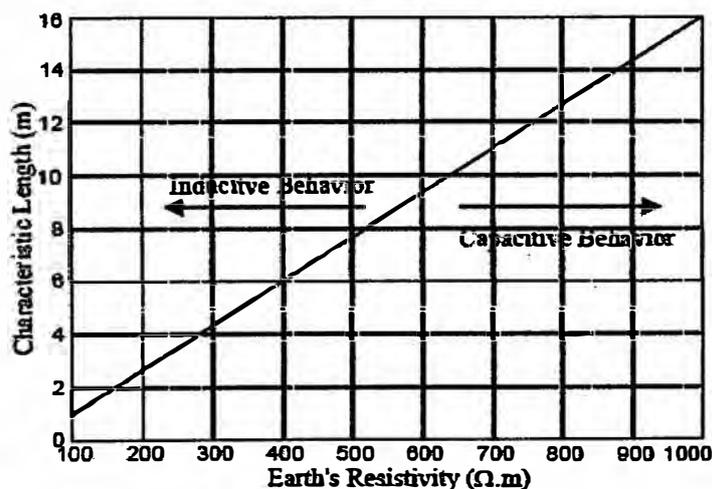


Fig.4.4 Regiones del comportamiento capacitivo y inductivo de los electrodos de PAT

4.4 Frecuencia característica para electrodos con comportamiento inductivo

Si electrodos con comportamiento inductivo son usados, entonces la frecuencia característica F_c debería ser del más alto valor posible. La frecuencia característica F_c es

mas grande para pequeñas dimensiones del electrodo y grandes valores de resistividad del suelo y para puntos de descarga cerca de la parte central del electrodo.

Para cada frecuencia característica F_c existe una longitud crítica l_c sobre el cual la impedancia de AF es mas grande que la de BF [2]. La siguiente fórmula, basado en algo similar en [17], es deducido de los resultados de la simulación de la referencia [4].

$$l_c = 0.6 * (\rho / F_c)^{0.43} \quad (4.1)$$

Donde ρ está en $\Omega \cdot m$ y F_c , en MHz. Es ventajoso usar electrodos con una longitud característica menor que la longitud crítica, $l < l_c$.

En la mayoría de los casos la frecuencia característica F_c podría ser asumida alrededor de 0,1 MHz para impactos directos y 1 MHz para impactos de retorno [17].

La relación (4.1) es ilustrada en la Fig. 4.6. Aunque la relación (4.1) es derivado para electrodos horizontales [4], es también válido para electrodos verticales.

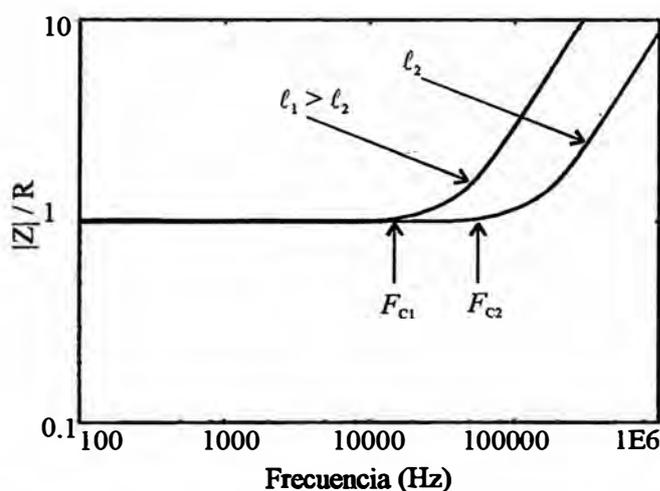


Fig.4.5 – Frecuencia característica de los Electrodo para distintas longitudes.

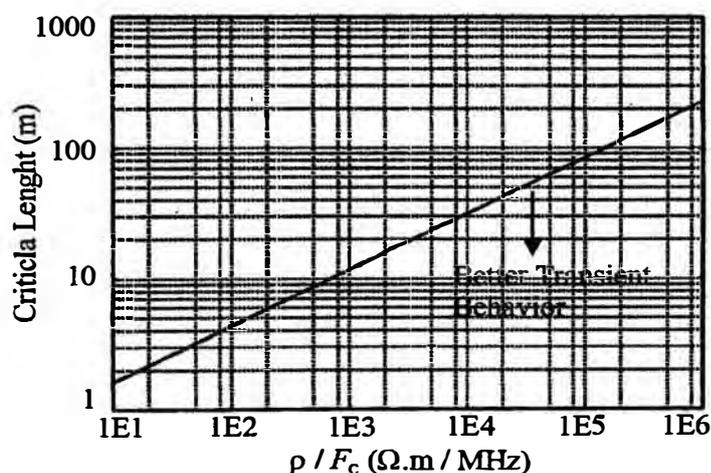


Fig.4.6 – Longitud crítica de electrodos con comportamiento inductivo

4.5 Reglas para mejor desempeño transitorio a altas frecuencias de los sistemas de PAT

Los sistemas de PAT de las líneas de transmisión podrían ser construidos con diferentes elementos, tales como la parte metálica de las estructuras, enterrada en el suelo o en cimentaciones de concreto, y cualquier electrodo suplemental de PAT, tales como varillas, contrapesos anillos horizontales o cualquier combinación de estos. Se define la *dimensión característica* de la red de PAT como la distancia desde el punto de entrada de la descarga del rayo a la distancia mas alejada del aterramiento.

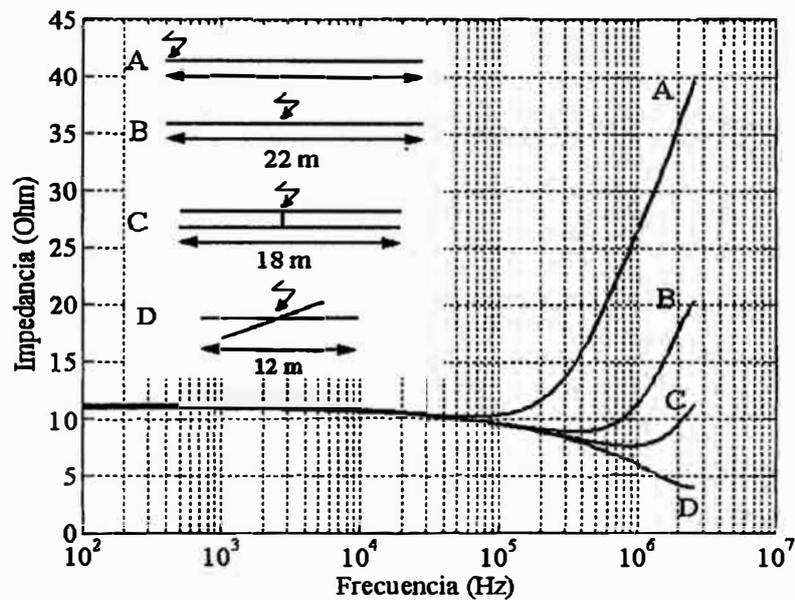
La regla básica es mantener la *dimensión característica* del sistema de PAT tan pequeña como sea posible, construyendo el sistema de tantos electrodos de dimensiones cortas como se necesite para cumplir con los requerimientos de valor de resistencia de la PAT. La primera opción es usar pequeños electrodos para lograr un comportamiento capacitivo (Fig. 4.4). Si no es posible, entonces los electrodos con comportamiento inductivo deberían ser tal que sus longitudes estén por debajo de la longitud crítica (Ec. (1) o Fig. 4.6).

La aplicación de estos criterios conduce a las conocidas reglas de que los electrodos de PAT deben ser conectados siempre a su punto medio y nunca a un extremo. También en general, las PAT's deberían tener tantas rutas como sea posible para la corriente desde y cerca del punto de descarga.

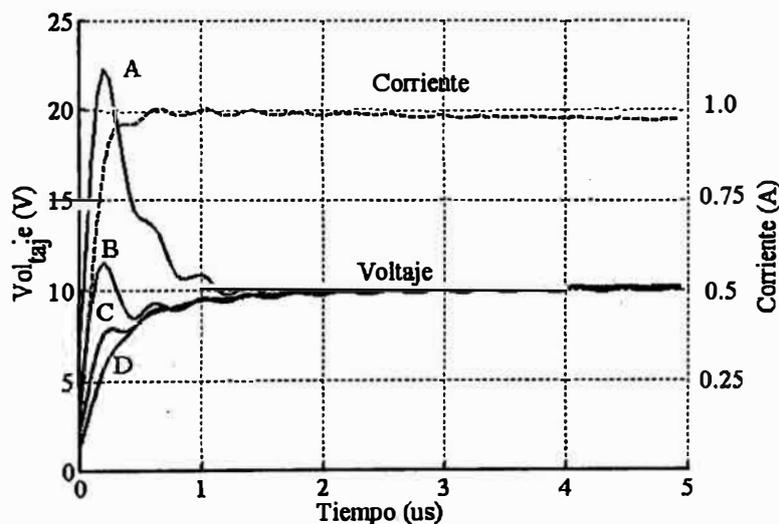
Todas las reglas podrían ser de hecho reducidas en la siguiente: *El desempeño a altas frecuencias y a transitorios es mejorado cuando se disminuye la longitud y se multiplica los caminos de la corriente desde el punto de descarga de la PAT.*

La aplicación de estas reglas es ilustrada en la Fig. 4.7. El caso A tiene el punto de descarga en un extremo y el caso B lo tiene en el centro para una varilla de cobre de 22 m y de 1.4 cm de diámetro enterrado a 0.5 m de profundidad. En el caso C son dos varillas paralelas de 18 m cada una, separadas por una distancia de 0.5 m, conectadas por el centro por una alambre de 0.5 m. En el caso D es un armado en estrella de cuatro brazos con 6 m por de longitud por cada brazo. La resistividad del suelo es $\rho = 200 \Omega \cdot m$ y $\epsilon_r = 10$. La corriente inyectada es el impulso de rayo $T1/T2 = 0.25/100 \mu s$ [18]. Para obtener una resistencia de baja frecuencia $R = 15 \Omega$, se usa un alambre horizontal de 22 m de longitud. Sin embargo, la peor elección para el comportamiento transitorio es conectar el alambre por un extremo (Fig. 4.7 Case A). La conexión en el punto medio (Fig. 4.7 Case B) mejora significativamente el comportamiento bajando el voltaje transitorio. En el caso C de la Fig.

4.7 se ilustra una posibilidad para permitir adicionales rutas para la corriente de descarga. Esto también reduce la longitud entre el punto de alimentación y el punto más alejado de la PAT. En el caso D, donde las longitudes de los electrodos son más pequeñas que la longitud crítica l_c (4.1), se remueve el pico del transitorio completamente. Sin embargo, el mejor desempeño transitorio es logrado en sacrificio a un mayor costo por requerir más cantidad de longitud de alambre: 37.5 m en el caso C y 27 m en el caso D, frente a los 22 m en los casos A y B.



a) Dominio de la frecuencia



b) Dominio del tiempo

Fig.4.7 (a) Características de impedancias de los armados (b) sobretensiones generadas por el fenómeno de propagación.

CONCLUSIONES

1. Se ha reproducido con iniciativas propias en el análisis matemático los cálculos que corresponden a la propagación de un transitorio de corriente de rayo en la estructura de la puesta a tierra de una línea eléctrica.
2. Se ha mostrado que la clasificación de las PAT de las líneas eléctricas en concentrada o de mayor extensión depende no solo en sus dimensiones físicas sino también de la resistividad del suelo y del contenido de frecuencias de la corriente de impulso del rayo. En los casos de frentes de onda rápidos, los efectos propagativos son más importantes en los primeros instantes resultando picos excesivos de voltajes transitorios.
3. Los procedimientos de diseño para la reducción de tales picos de voltaje son resumidos en pocas simples reglas:
 - a) El primero de ellos es mantener la dimensión característica de los sistemas de PAT (la distancia del punto de llegada del rayo al electrodo al punto mas alejado de este) tan pequeños como sean posibles, construyendo el sistema con muchos “cortos” electrodos necesarios para cumplir los requerimientos de baja resistencia de la PAT.
 - b) Los electrodos “cortos” deberían tener un comportamiento capacitivo, y si no es posible, su longitud característica debería ser menor que la longitud crítica. El informe define criterios para el comportamiento capacitivo/inductivo y para la longitud crítica de los electrodo de PAT.

Estas reglas han sido sustentadas mediante el análisis a los resultados de las simulaciones realizadas sobre modelo matemático desarrollado en el presente informe.

ANEXOS

ANEXO A CÁLCULOS MATEMÁTICOS

ANEXO A.1 CONTRASTE DE LORENTZ

Definamos:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

Tal que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A}' &= \nabla \times (\vec{A} + \nabla f) \\ &= \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \vec{A} + \vec{0} \\ &= \vec{B}\end{aligned}$$

Es decir:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}'$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla \phi - j\omega \vec{A} \\ &= -\nabla \phi - j\omega (\vec{A}' - \nabla f) \\ &= -\nabla (\phi - j\omega f) - j\omega \vec{A}'\end{aligned}$$

Si definimos

$$\phi' = \phi - j\omega f$$

Entonces

$$\vec{E} = -\nabla \phi' - j\omega \vec{A}'$$

Luego tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \nabla f \\ \phi' &= \phi - j\omega f\end{aligned}$$

Es decir que existen una infinidad de potenciales A' y ϕ' que generarán los mismos campos que \vec{A} y ϕ , una para cada f que se determine, siendo \vec{A} y ϕ un caso particular cuando $f = 0$; de esa infinidad de posibilidades, se selecciona una f que haga posible:

$$\nabla \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c_{ef}^2} j\omega \phi'$$

Pues esa relación permite el desacople de las ecuaciones de onda para los potenciales como se verá en el Anexo A.2. A tal relación se le conoce como el *Contraste de Lorentz*.

ANEXO A.2 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES IN-HOMOGÉNEAS DE HELMHOLTZ

a) Ecuación diferencial para ϕ' :

Se parte de las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

De la ley de Gauss para medios materiales (tercera ecuación):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho = \rho_{source} + \rho_{cond}$$

Tomando en cuenta que:

$$\rho_{cond} = -\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \vec{j}_{cond}; \quad \vec{j}_{cond} = \sigma \vec{E}; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Reemplazando términos:

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \rho_{source} + \left(-\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \vec{j}_{cond}\right) = \rho_{source} + \left(-\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \sigma \vec{E}\right)$$

Reordenando términos, llegamos a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{source}}{\epsilon_{ef}}; \quad \text{con } \epsilon_{ef} = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$$

Teniendo en consideración que $\vec{E} = -\nabla \phi' - j\omega \vec{A}'$ (ver parte A de esta sección):

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi' - j\omega \vec{A}') = \frac{\rho_{source}}{\epsilon_{ef}}$$

$$\nabla^2 \phi' + j\omega \nabla \cdot \vec{A}' = -\frac{\rho_{source}}{\epsilon_{ef}}$$

Y del contraste de Lorentz: $\nabla \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c_{ef}^2} j\omega \phi'$ llegamos a:

$$\nabla^2 \phi' + \frac{\omega^2}{c_{ef}^2} \phi' = -\frac{\rho_{source}}{\epsilon_{ef}} \quad (*)$$

b) Ecuación diferencial para \vec{A}' :

Ahora haremos lo mismo para \vec{A}' , para ello partiremos de la ecuación (2) teniendo en cuenta:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} ; \vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \epsilon_{ef} = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \quad \epsilon_{ef} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_{ef}}} ; \nabla \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c_{ef}^2} j\omega \phi' ; \vec{J} = \vec{J}_{source} + \vec{J}_{cond}$$

Así multiplicando la ecuación (2) por μ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega \vec{D} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J}_{source} + \mu \vec{J}_{cond} + j\omega \mu (\epsilon \vec{E}) \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J}_{source} + \mu \sigma \vec{E} + j\omega \mu \epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J}_{source} + j\omega \mu \left(\frac{\sigma}{j\omega} + \epsilon \right) \vec{E} \end{aligned}$$

Pero:

$$\mu \left(\frac{\sigma}{j\omega} + \epsilon \right) = \mu \epsilon_{ef} = \frac{1}{c_{ef}}$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J}_{source} + \frac{j\omega}{c_{ef}} \vec{E} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J}_{source} + \frac{j\omega}{c_{ef}} (-\nabla \phi' - j\omega \vec{A}') \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{A}') &= \mu \vec{J}_{source} - \nabla \left(\frac{j\omega}{c_{ef}} \phi' \right) - \frac{j\omega}{c_{ef}} \cdot j\omega \vec{A}' \\ \nabla (\nabla \cdot \vec{A}') - \nabla^2 \vec{A}' &= \mu \vec{J}_{source} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}') + \frac{\omega^2}{c_{ef}^2} \vec{A}' \end{aligned}$$

Reordenando tenemos:

$$\nabla^2 \vec{A}' + \frac{\omega^2}{c_{ef}^2} \vec{A}' = -\mu \vec{J}_{source} \quad (**)$$

ANEXO A.3 RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE HELMHOLTZ CON FUENTE

Las ecuaciones diferenciales de Helmholtz con fuente son:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi' + \frac{\omega^2}{c_{ef}^2} \phi' &= -\frac{\rho_{source}}{\epsilon_{ef}} \\ \nabla^2 \vec{A}' + \frac{\omega^2}{c_{ef}^2} \vec{A}' &= -\mu \vec{J}_{source} \end{aligned}$$

Resolveremos la primera ecuación, Así:

$$(\nabla^2 + k^2)\vec{A}'(\vec{r}) = -\mu\vec{J}_{source}(\vec{r})$$

Donde

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{ef}^2} \quad \text{y} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Y para el espacio físico: $x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z$

Así, la condición sobre la función de Green sería:

$$L(\vec{r})G(\vec{r}; \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Notar que la función de delta – Dirac tridimensional es simplemente:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2')\delta(x_3 - x_3')$$

Para obtener la función de Green de espacio libre, se deberá usar el método de la transformada de Fourier.

Como se está calculando la componente de libre espacio de la función de Green, se usará la variable $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, con lo cual la función de Green para espacios libres dependerá solo de la distancia relativa entre el punto de campo y el punto de la fuente y no de las posiciones absolutas. Recordemos el par de transformadas de Fourier que se va a usar:

$$\hat{U}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{R})e^{-j\vec{q}\cdot\vec{R}} d\vec{R}$$

$$u(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(\vec{q})e^{j\vec{q}\cdot\vec{R}} d\vec{q}$$

Donde: $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$

Usando la propiedad de la transformada:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\vec{R})\right) = -q_i^2 \mathfrak{F}(u(\vec{R})) = -q_i^2 \hat{U}(\vec{q})$$

Llegamos a:

$$(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - k^2)\hat{G}(\vec{q}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}$$

Ahora, si hacemos $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q^2$, entonces:

$$\hat{G}(\vec{q}) = -\frac{1}{(2\pi)^3(q^2 - k^2)}$$

Como se trata del espacio físico usual, se usa la transformada inversa de Fourier:

$$G(\vec{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\vec{q}\cdot\vec{R}}}{(q^2 - k^2)} d\vec{q}$$

Esta integral es una integral de Fourier isotrópica pues depende de la magnitud de \vec{q} , que es q , sin inportar la dirección de \vec{q} . Barton (Elements of Green's Functions and Propagation, Oxford Science Press, 1989) da el resultado general para integrales de Fourier isotrópicas en tres dimensiones como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(q) e^{j\vec{q}\cdot\vec{R}} d\vec{q} = \frac{4\pi}{R} \int_0^{+\infty} q f(q) \text{sen}(\vec{q}\cdot\vec{R}) dq$$

Donde R es la magnitud de \vec{R} . Utilizando este resultado, en la transformada inversa:

$$G(\vec{R}) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{R} \int_0^{+\infty} \frac{q}{(q^2 - k^2)} \text{sen}(qR) dq$$

Y siendo esta integral par:

$$G(\vec{R}) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{(q^2 - k^2)} \text{sen}(qR) dq$$

Esta integral puede ser evaluada por una integración de contornos. Primero, le término *sen* es escrito en términos de exponenciales complejos:

$$\text{sen}(qR) = \frac{e^{jqR} - e^{-jqR}}{2j}$$

Entonces escribimos la integral como:

$$G(\vec{R}) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2R \cdot 2j} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q e^{jqR}}{(q-k)(q+k)} dq - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q e^{-jqR}}{(q-k)(q+k)} dq \right\}$$

$$= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4jR} \{I_1 - I_2\}$$

La primera integral será evaluada considerando un contorno en el plano complejo q . Como el denominador del integrando tiene polos en el eje real, introducimos una pequeña parte imaginaria para desviar los polos de la parte real del eje q ,

$$I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q e^{jqR}}{(q - [k + j\epsilon])(q + [k + j\epsilon])} dq$$

Recordando las propiedades de la teoría de Integración por residuos (Libro "Variable Compleja" de Murray R. Spiegel [15]):

$$\oint_{C_1} f(Z) dZ = \oint_{C_2} f(Z) dZ$$

$$\oint_C f(Z) dZ = 2\pi j a_{-1}$$

Donde a_{-1} es un residuo, y C_1, C_2 y C son caminos concéntricos en un plano complejo.

Tomamos un contorno equivalente en la mitad superior del plano complejo debido al comportamiento del numerador del integrando mientras q se hace más grande. Usando la teoría de integración por residuos, obtenemos:

$$I_1 = 2\pi j \sum_{\substack{\text{Res} \\ \text{Im}g > 0}} \frac{q e^{jqR}}{(q - [k + j\varepsilon])(q + [k + j\varepsilon])}$$

$$= \pi j e^{j(k + j\varepsilon)R}$$

Tomando el límite cuando ε tiende a cero tenemos:

$$I_1 = \pi j e^{jkR}$$

De la misma manera, para I_2 , tomamos un contorno en la mitad inferior del plano y obtenemos:

$$I_2 = -\pi j e^{jkR}$$

Luego, la función de Green buscada es

$$G(\vec{R}) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4jR} \{ \pi j e^{jkR} + \pi j e^{jkR} \}$$

$$= -\frac{1}{4\pi R} e^{jkR}$$

Usando la fórmula para la solución de la ecuación diferencial de Helmholtz con fuentes

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') f(x') dx' \text{ llegamos a:}$$

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \int_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

$$= \int_{V'} \left(-\frac{1}{4\pi R} e^{jkR} \right) (-\mu \vec{J}_s(\vec{r}')) d^3 \vec{r}'$$

Finalmente reordenando llegamos a:

$$\vec{A}^*(\vec{r}) = \int_{V'} \mu \vec{J}_s(\vec{r}') \frac{1}{4\pi R} e^{jkR} d^3 \vec{r}'$$

De la misma forma procedemos para hallar la solución de la ecuación diferencial para $\phi^*(\vec{r})$.

ANEXO A.4 DISCRETIZACIÓN MOM DE ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES

Recogemos las ecuaciones del sub-sección 3.1.2 del informe:

$$-E_j^i \approx -j\omega A_j^i(n) - \frac{\phi'(n^+) - \phi'(n^-)}{\Delta l_m}$$

$$\bar{A}^i(n) = \mu \sum_m \bar{I}_s(m) \int_{\Delta l_m} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl$$

$$\phi'(n^+) \approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \sum_m \rho_s(m^+) \int_{\Delta l_{m^+}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl$$

$$\phi'(n^-) \approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \sum_m \rho_s(m^-) \int_{\Delta l_{m^-}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl$$

$$\rho_s(m^+) = -\frac{1}{j\omega} \frac{I_s(m+1) - I_s(m)}{\Delta l_{m^+}}$$

$$\rho_s(m^-) = -\frac{1}{j\omega} \frac{I_s(m) - I_s(m-1)}{\Delta l_{m^-}}$$

Ahora:

$$\phi'(n^+) - \phi'(n^-) \approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \sum_m [\rho_s(m^+) \int_{\Delta l_{m^+}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl - \rho_s(m^-) \int_{\Delta l_{m^-}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl]$$

Y ahora reemplazando las formulas de $\rho_s(m^+)$ y $\rho_s(m^-)$:

$$\phi'(n^+) - \phi'(n^-) \approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \sum_m \left[-\frac{1}{j\omega} \frac{I_s(m+1) - I_s(m)}{\Delta l_{m^+}} \int_{\Delta l_{m^+}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl + \frac{1}{j\omega} \frac{I_s(m) - I_s(m-1)}{\Delta l_{m^-}} \int_{\Delta l_{m^-}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl \right]$$

Reordenando la anterior expresión:

$$\phi'(n^+) - \phi'(n^-) \approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \frac{1}{j\omega} \sum_m [-I_s(m+1)\psi(n^+, m^+) + I_s(m)\psi(n^+, m^+) + \dots$$

$$\dots + I_s(m)\psi(n^-, m^-) - I_s(m-1)\psi(n^-, m^-)]$$

$$\phi'(n^+) - \phi'(n^-) \approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \frac{1}{j\omega} [S]$$

Donde:

$$\psi(n^+, m^+) = \frac{1}{\Delta l_{m^+}} \int_{\Delta l_{m^+}} \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} dl$$

$$R = |\vec{r}(n^+) - \vec{r}(m^+)|$$

Ahora analizamos S:

$$\begin{aligned} S &= \sum_m [-I_s(m+1)\psi(n^+, m^+) + I_s(m)\psi(n^+, m^+) + I_s(m)\psi(n^-, m^-) - I_s(m-1)\psi(n^-, m^-)] \\ &= -\sum_{m=1}^N I_s(m+1)\psi(n^+, m^+) + \sum_{m=1}^N I_s(m)\psi(n^+, m^+) + \sum_{m=1}^N I_s(m)\psi(n^-, m^-) - \sum_{m=1}^N I_s(m-1)\psi(n^-, m^-) \end{aligned}$$

Ahora realizamos un cambio de variables en los subíndices de la sumatoria:

$$S = -\sum_{m=2}^{N+1} I_s(m)\psi(n^+, m^-) + \sum_{m=1}^N I_s(m)\psi(n^+, m^+) + \sum_{m=1}^N I_s(m)\psi(n^-, m^-) - \sum_{m=0}^{N-1} I_s(m)\psi(n^-, m^+)$$

Completando índices en la primera y última sumatoria:

$$\begin{aligned} S &= -\sum_{m=1}^N I_s(m)\psi(n^+, m^-) + \sum_{m=1}^N I_s(m)\psi(n^+, m^+) + \sum_{m=1}^N I_s(m)\psi(n^-, m^-) - \sum_{m=0}^{N-1} I_s(m)\psi(n^-, m^+) \\ &\quad - I_s(N+1)\psi(n^+, N^+) + I_s(1)\psi(n^+, 1^-) + I_s(N)\psi(n^-, N^+) - I_s(0)\psi(n^-, 1^-) \end{aligned}$$

Donde usamos aproximaciones para (aproximación por series de Taylor de 1er orden):

$$\begin{aligned} I_s(0) &= I_s(1) - \Delta I_s(1) = I_s(1) - [I_s(2) - I_s(1)] \\ &= 2I_s(1) + I_s(2) \end{aligned}$$

Y considerando que en los extremos los conductores de PAT, por donde no ingresa el rayo, la componente de la corriente correspondiente a la fuente, I_s , es cero (teoría de antenas). Así:

$$I_s(N+1) = 0$$

Con lo cual llegamos a:

$$\begin{aligned} &\phi'(n^+) - \phi'(n^-) \approx \\ &\approx \frac{1}{\epsilon_{ef}} \frac{1}{j\omega} \left\{ \sum_{m=1}^N I_s(m) [\psi(n^+, m^+) - \psi(n^+, m^-) - \psi(n^-, m^+) + \psi(n^-, m^-)] + [A] \right\} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} A &= +I_s(N)[0+0+\psi(n^-, m=N^-)+0] \\ &+ I_s(N-1)[0+0+0+0] \\ &+ I_s(2)[0+0+0+\psi(n^-, "1^-")] \\ &+ I_s(1)[0+\psi(n^+, 1^-)+0-2\psi(n^-, 1^-)] \end{aligned}$$

Tener cuidado con los ψ 's, cuyos índices están entre comillas, a la hora de implementar un programa. Ya que en el tercer renglón cuando $m=2$, $\psi(n^-, "1^-")$ se calcula para $m=1^-$ (o sea para un valor pasado de m).

Cabe mencionar que la siguiente expresión calculada (sub-sección 3.1.2 del presente informe), para Z_{mm} :

$$Z_{mm} = j\omega\mu\vec{\Delta l}_n \cdot \vec{\Delta l}_m \psi(n, m) + \frac{1}{j\omega\epsilon_0} [\psi(n^+, m^+) - \psi(n^+, m^-) - \psi(n^-, m^+) + \psi(n^-, m^-)]$$

Tendrá que ser modificada, agregando a los valores de ψ , correspondientemente, los términos encontrados anteriormente en la expresión A. Los cambios se producen para valores de $m = \{N, N-1, 2, 1\}$ es decir para los elementos de longitud cerca a los extremos; a su vez, la modificaciones solo se realizan sobre los ψ 's que tienen que ver con la contribución eléctrica de las cargas al campo eléctrico.

ANEXO B FUNCIONES DE GREEN

Antes de pasar a resolver las ecuaciones de Helmholtz, debemos saber en que consisten las funciones de Green.

Las Funciones de Green juegan un rol importante en la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias y parciales, y son el componente clave para el desarrollo de los métodos de ecuaciones integrales de contorno.

Considérese la ecuación diferencial lineal escrita en la forma general:

$$L(x)u(x) = f(x) \quad (\text{B.1})$$

Donde $L(x)$ es un operador lineal, diferencial auto adjunto, $u(x)$ es la función desconocida, y $f(x)$ es el término conocido no-homogéneo. Para una descripción del concepto de operadores diferenciales auto-adjuntos y no auto-adjuntos, por ejemplo, tomar como referencia el texto sobre estos temas por Morse y Feshbach. Operacionalmente hablando, se puede escribir la solución de la ecuación (A.3.2.1) como:

$$u(x) = L^{-1}(x)f(x) \quad (\text{B.2})$$

Donde L^{-1} es la inversa del operador diferencial L . Como L es un operador diferencial, es razonable esperar que su inversa sea un operador de integración. Se espera entonces que las propiedades usuales de inversas se cumplan aquí:

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I \quad (\text{B.3})$$

Donde I es el operador identidad. Más específicamente, se define el operador inversa como:

$$L^{-1}f = \int G(x, x')f(x')dx' \quad (\text{B.4})$$

Donde el núcleo $G(x; x')$ es la *función de Green* asociada al operador L . Notar que $G(x; x')$ es una función de dos puntos el cual depende tanto de x como de x' . Para completar la idea del operador inversa de L , se introduce la función delta Dirac como el operador identidad I . Recordando las propiedades de la función delta Dirac $\delta(x)$ son:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x')f(x')dx' = f(x) \quad (\text{B.5})$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x')dx' = 1$$

Ahora, escribamos la solución de la ecuación (B.1) en términos de la función de Green como:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x; x') f(x') dx' \quad (\text{B.6})$$

Y veamos que condición debe cumplir $G(x; x')$ para que esta solución sea veraz:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= L \int_{-\infty}^{+\infty} G(x; x') f(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} LG(x; x') f(x') dx' \end{aligned}$$

Sabemos que $L(x)u(x) = f(x)$ y observando la ecuación (B.5), la función de Green deberá satisfacer la siguiente condición:

$$L(x)G(x; x') = \delta(x - x') \quad (\text{B.7})$$

Si es así, entonces regresando a la deducción anterior:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= L \int_{-\infty}^{+\infty} G(x; x') f(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} LG(x; x') f(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') f(x') dx' \\ &= f(x) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Nótese que se ha usado la linealidad del operador diferencial e inversa. Aquí lo que se debe resaltar, es la ecuación (B.7), que hace posible la veracidad de la ecuación (B.6), la cual es la solución (B.1).

La ecuación (B.7) es la base para encontrar las funciones de Green, asociados a los operadores diferenciales de una ecuación específica, necesarias para resolver ecuaciones diferenciales.

La función de Green hallada en la ecuación (B.7), es llamada la función de Green de espacios libres, a parte existe otro tipo de funciones de Green, llamadas funciones de Green dependientes del entorno, que toman en cuenta las condiciones de frontera, que son tratadas en los métodos de elementos de frontera (Boundary Element Methods).

ANEXO C
CÓDIGO MATLAB DEL PROGRAMA "PatIw.m"

```

%% UNI - PERU : CALCULO DEL POTENCIAL POR CAIDA DE RAYO EN UN PTO DE
UNA PAT - 2010 -

```

```

%% By QUISPE AGUILAR JUAN CARLOS <jucaquar@yahoo.com>

```

```

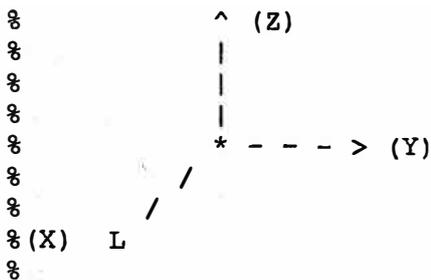
%% NOTAS: (ZPATPR, Z para ubicarlo al ultimo de la lista, PR Potenciales
Retardados

```

```

%% CONSTRUCCION DE LA MALLA %%

```



```

LLL='===== SETEO DE DATOS DE ENTRADA ===== ' ;

```

```

%% parametros basicos del Armado de PAT
r=0.007;

```

```

% Parametros de los medios: terreno y aire
mu1 = 4*pi*(1e-7); % mu_r =1 mu0 =
eo = 8.854*(1e-12);
er = 10;

```

```

etot = er*eo;
rho = 200; % resistividad del suelo
sigma = 1/rho; % rho = 70;

```

```

% Tipo de Armado
Armado = 'H';

```

```

if Armado == 'V'
    rho = 10; % resistividad del suelo
    sigma = 1/rho; % rho = 70;
end

```

```

if Armado == 'H'
    rho = 200; % resistividad del suelo
    sigma = 1/rho; % rho = 70;
end

```

```

disp(['sigma = ', num2str(sigma)])

```

```

%sigma = _____ 0;
%
% _____
% (SIGMA)

```

```

% Parametros del rayo I(t) = Io(exp(-a*t)-exp(-b*t))
Io = 1.005; %1.217; %42.6; %36.5; %38.5; %37;

```

```

% TIPO DE RAYO
% tipo_rayo = 'R0p25_100';

```

```

% tipo_rayo = 'R0p2_50';
% tipo_rayo = 'R0p5_50';
% tipo_rayo = 'R1_50';
% tipo_rayo = 'R0p2_50';

```

```

disp(['Tipo de rayo = ',tipo_rayo])

[a,b] = tiporayom(tipo_rayo);

%Valores standarizados aqui
dts = 0.1*1e-6; % 1 decima de Us
dfs = 0.1*(1000); % 100 Hz
dws = 2*pi*dfs;
dls = (3/40);
%dls = (3/200);
%
_ (dls

%%--- Constantes temporales      %% ( /2)
Tmax = 5*1e-6;
Mtime = 100;
%Constantes Frecuenciles %para la fcn //formaIw//
Wmax = 2*pi*2.5*1e+6;
Winflx = 6000; %

%Precision en la integracion inversa de fourier
erelw = 0.04; % Error relativo de integracion = (Area triangular-
A_rectangular)/Area rectangular
erelt = 0.04;

%Calculo de PARAMETROS _____ (PARAM
dt = (1/2)*dts;
%dt = Tmax/Mtime;
Mtime = Tmax/dt;
dw = 1*dws;

LLL='===== PRE- P R O C E S A M I E N T O ===== ';
LLL=' --- Construcion de la malla --- ';
%%--- Armados predefinidos -----

pause

[NODO,N,NN,LL] = armadosexo(Armado,dls);

%% INDICES de los ELEMENTOS
patron_nodal=[1 3 2];
inc=zeros(1,size(patron_nodal,2)); % [0 0 0]
inc_i = 2; % dentro de los segmentos
inc_ad = 1; % Por cambio de segmento
iElem=zeros(N,size(patron_nodal,2));
n = 1;
for s = 1:size(NN,2)
    for e = 1:NN(s)
        iElem(n,:) = patron_nodal+inc;      %%---->iELm
        inc=inc+inc_i;
        n = n+1;
    end
    inc=inc+inc_ad;
end

% Vector columna que lleva informacion "esExtremo".
esExtr = zeros(N,1); % esExtremo del wire. +1: entrante -1:saliente 0:
elemento interior
n = 1; % tecnica de la informacion anterior
for s = 1:size(NN,2)

```

```

    esExtr(n) = 1;
    n = n + NN(s)-1;
    esExtr(n) = -1;
    n = n+1;
end

%%% Elementos de Longitud %%%
DL=zeros(N,3);
DL_b=zeros(N,3);
DL_f=zeros(N,3);
for n = 1:N
    e = esExtr(n);
    DL(n,:) = NODO(iElem(n,2),:)-NODO(iElem(n,1),:);
    if e == 1 % Extremo entrante
        DL_b(n,:) = 2*(NODO(iElem(n,2)-1,:)-NODO(iElem(n,1),:));
        DL_f(n,:) = NODO(iElem(n,2)+1,:)-NODO(iElem(n,1)+1,:);
    elseif e == -1 % Extremo saliente
        DL_b(n,:) = NODO(iElem(n,2)-1,:)-NODO(iElem(n,1)-1,:);
        DL_f(n,:) = 2*(NODO(iElem(n,2),:)-NODO(iElem(n,1)+1,:));
    else % Elemento interno
        DL_b(n,:) = NODO(iElem(n,2)-1,:)-NODO(iElem(n,1)-1,:);
        DL_f(n,:) = NODO(iElem(n,2)+1,:)-NODO(iElem(n,1)+1,:);
    end
end

%%% Indices de los elementos de los extremos %%%
Nextremos = zeros(size(NN,2),4); %El cuatro es por hacer una aprox Taylor
de 2do grado
base = 0;
for s = 1:size(NN,2) %%% <---- [] Nextremos, indices de orden de los
elementos extremos de cada parte
    Nextremos(s,:) = [base+1 base+2 base+NN(s)-1 base+NN(s)];
    base = base+NN(s);
end

%pause

%%$$$$$^^^| I N I C I O D E P R O C E S A M I E N T O
|^|^|^&&&&&&&&&
%% ===== DOMINIO DEL ESPACIO =====%%
%%Calculo de factores que solo dependen de parametros geometricos
% * - - - > (q) : Quadrature
% |
% |
% v
% (f) : Componentes de PSI

%__ Parametros de integracion numerica
mapeoX_xi='L3';
[wq,pq]=quadraturep2(8,'GAUSS',1);
nQ = size(wq,1);
R1 = zeros(N,N*nQ);
R2 = zeros(N,N*nQ);
R3 = zeros(N,N*nQ);
R4 = zeros(N,N*nQ);
R5 = zeros(N,N*nQ);
R1I = zeros(N,N*nQ);
R2I = zeros(N,N*nQ);
R3I = zeros(N,N*nQ);
R4I = zeros(N,N*nQ);

```

```

R5I = zeros(N,N*nQ);
semiPSI = zeros(5*N,N*nQ);
semiPSII = zeros(5*N,N*nQ);      % -----
----->
for n =1:N
    rnbo = NODO(iElem(n,1),:); %+dr; % r(n-)  %%----->iELm
    rno  = NODO(iElem(n,3),:); %+dr; % r(n)   %%----->iELm
    rnfo = NODO(iElem(n,2),:); %+dr; % r(n+)  %%----->iELm
    dLn = DL(n,:);      % pues  dln-,dln,dln+ = dln;
    nf = 5*(n-1)+1;
    if rem(n,40) == 0
        disp([num2str(toc),' s      ',num2str(n),' th component of
PSI(n,:) _ii_espacial obtained']) % show the progress time
    end

    for m=1:N
        dLmb = DL_b(m,:); % dl1 = dl(m-)
        dLmf = DL_f(m,:); % dl3 = dl(m+)
        dLm  = DL(m,:);   % dl2 = dl(m)

        %% __Hayando un vector ortogonal Usando Producto vectorial
        % Y asi poder usar la tecnica relexion mas adelante
        %pero primero determinar si hay paralelismo

        DR = [dLn(2)*dLm(3)-dLn(3)*dLm(2)  dLn(3)*dLm(1)-dLn(1)*dLm(3)
dLn(1)*dLm(2)-dLn(2)*dLm(1)];
        if norm(DR) == 0 %si existe paralelismo ( se dererian evaluar a
los tres: DR, DRb y DRf
            DRb = [-dLmb(2)+dLmb(3) dLmb(1)-dLmb(3) dLmb(2)-dLmb(1)];
            DR  = [-dLm(2)+dLm(3) dLm(1)-dLm(3) dLm(2)-dLm(1)];
            DRf = [-dLmf(2)+dLmf(3) dLmf(1)-dLmf(3) dLmf(2)-dLmf(1)];
        else % y cuando no existe paralelismo se aplica el producto
vectorial
            DRb = [dLn(2)*dLmb(3)-dLn(3)*dLmb(2)      dLn(3)*dLmb(1)-
dLn(1)*dLmb(3) dLn(1)*dLmb(2)-dLn(2)*dLmb(1)];
            DRf = [dLn(2)*dLmf(3)-dLn(3)*dLmf(2)      dLn(3)*dLmf(1)-
dLn(1)*dLmf(3) dLn(1)*dLmf(2)-dLn(2)*dLmf(1)];
        end

        DRb = [0 0 -1]; % //////////////////////////////////////// ===== <
T >
        DR = [0 0 -1];
        DRf = [0 0 -1];

        drmb = r*DRb/norm(DRb);
        drm  = r*DR/norm(DR);
        drmf = r*DRf/norm(DRf);
        rnb = rnbo+drmb; % r(n-)  %%----->iELm
        rn  = rno+drm;  % r(n)   %%----->iELm
        rnf = rnfo+drmf; % r(n+)  %%----->iELm
        %AQUI HACER EL INTERCAMBIO EN CASO DE LOS BRAZOS 3 Y 5

        dLmI = [dLm(1) dLm(2) -dLm(3)]; % dl2_imagen = dlmI(m)
        dLmIb = [dLmb(1) dLmb(2) -dLmb(3)];
        dLmIf = [dLmf(1) dLmf(2) -dLmf(3)];

        inv_dl = [1*(dLn*dLm')/norm(dLm)  1/norm(dLmf)  1/norm(dLmb)
1/norm(dLmf) 1/norm(dLmb)]'/(4*pi);

```

```

        inv_dII = [1*(dLn*dLmI')/norm(dLm) 1/norm(dLmIf) 1/norm(dLmIb)
1/norm(dLmIf) 1/norm(dLmIb)]'/(4*pi);

        %inv_dl = [0 1/norm(dLmf) 1/norm(dLmb) 1/norm(dLmf)
1/norm(dLmb)]'/(4*pi);
        %inv_dII = [0 1/norm(dLmIf) 1/norm(dLmIb) 1/norm(dLmIf)
1/norm(dLmIb)]'/(4*pi);

        GRIDm = NODO(iElem(m,:),:); %las coordenadas de los extremos de
dl(m) %%----->iELm

        e = esExtr(m);

        %% | Se setea aqui a cero pues sino
crearia un indice negativo
        if e == 1 %%----->iELm v
            GRIDmb = NODO(iElem(m, :)-[0 1 1],:) - [NODO(iElem(m,1)+1,:)-
NODO(iElem(m,1),:);0 0 0;0 0 0]; %la '_b' significa backward; las
coordenadas de los extremos de dl(m-)
        else
            GRIDmb = NODO(iElem(m, :)-[1 1 1],:); %%----->iELm
        end

        if e == -1 %%----->iELm
            GRIDmf = NODO(iElem(m, :)+[1 0 1],:) + [0 0
0;NODO(iElem(m,2),:)-NODO(iElem(m,2)-1,:);0 0 0]; % F(n+1) = F(n) +
DeltaF(n)
        else
            GRIDmf = NODO(iElem(m, :)+[1 1 1],:); %%----->iELm
        end

        %AQUI HACER EL INTERCAMBIO EN CASO DE LOS BRAZOS 3 Y 5

        for q=1:size(wq,1)
            pqt = pq(q,:); %% =====> ??? Lagrange ->x
Convertir a 3D
            wqt = wq(q);
            [Nq,dNdxiq]=lagrange_basis_p(mapeoX_xi,pqt,1); % para mapeo
de [-1 0 +1] (quadra..) a Ptos de GRID(m)
            dXdxi_q=dNdxiq'*GRIDm;
            dXdxi_f_q=dNdxiq'*GRIDmf; %la '_f' significa forward
            dXdxi_b_q=dNdxiq'*GRIDmb; %la '_b' significa backward

            rmq = Nq'*GRIDm; % r(m) , mapeo de pqt en [-1 0 +1] a
PQT en GRIDm,
            rmfq = Nq'*GRIDmf; % r(m+)
            rmbq = Nq'*GRIDmb; % r(m-)

            mq = (m-1)*nQ+q; %reemplaza la idea de usar la matriz
intermedia iElem
            R1(n,mq) = norm(rn-rmq);
            R2(n,mq) = norm(rnf-rmfq);
            R3(n,mq) = norm(rnf-rmbq);
            R4(n,mq) = norm(rnb-rmfq);
            R5(n,mq) = norm(rnb-rmbq);

            rmqI = [rmq(1) rmq(2) -rmq(3)]; %-----
            rmfqI = [rmfq(1) rmfq(2) -rmfq(3)];
            rmbqI = [rmbq(1) rmbq(2) -rmbq(3)];

```

```

R1I(n,mq) = norm(rn-rmqI);
R2I(n,mq) = norm(rnf-rmfqI);
R3I(n,mq) = norm(rnf-rmbqI);
R4I(n,mq) = norm(rnb-rmfqI);
R5I(n,mq) = norm(rnb-rmbqI);

DET_b = norm(dXdxi_b_q); % ----> Toman en cuenta el cambio de
variables, de X a xi(q)
DET_m = norm(dXdxi_q); %
DET_f = norm(dXdxi_f_q); %

WQt = wqt;
semiPSI(nf:nf+4,mq) = [DET_m/R1(n,mq); DET_f/R2(n,mq);
DET_b/R3(n,mq); DET_f/R4(n,mq); DET_b/R5(n,mq)]*WQt;
semiPSII(nf:nf+4,mq) = [DET_m/R1I(n,mq); DET_f/R2I(n,mq);
DET_b/R3I(n,mq); DET_f/R4I(n,mq); DET_b/R5I(n,mq)]*WQt;

semiPSI(nf:nf+4,mq) = semiPSI(nf:nf+4,mq).*inv_dl;
semiPSII(nf:nf+4,mq) = semiPSII(nf:nf+4,mq).*inv_dII; % la
segunda 'I' se refiere a 'Imagen'

end %end of quadrature Loop
end %End of Current Loop - Columnas
end %End of Voltage Loop - filas

LLL = '%%& ===== D O M I N I O D E L A F R E C U E N C I A
%%&&';
disp([num2str(toc),'s INICIA FREQUENCY Domain']);
[Mw,IwS] = formaIw(Wmax,Winflx,dw,Io,a,b,erelw); %-----//FUNCTION//:
OBTENCION DE LOS PTOS "w"
M = size(Mw,2);
Iw = zeros(N,M-1); %Nro de filas -> segmentos de la línea y Columnas->
tiempo y frecuencia
IwN = zeros(N,M-1); % numero de col. M-1, porque no contiene la comp. de
freq cero.
Vwo = zeros(N,1);
VwoN = zeros(N,1);
Z = zeros(N,N);
ZN = zeros(N,N); % (2)
Zold = ones(N,N);
ZNold = ones(N,N);

for k=1:(M-1) % 1:(M-1) % componentes en frecuencia de It, NOTA: la
comp. de freq. cero se calcula mas adelante k
w = Mw(k+1);
ec1=etot+sigma/(li*w); %etot = er * eo ; P: positive
ec1N=etot-sigma/(li*w); %N = NEgative
gP = li*w*sqrt(mul*ec1); %*100; % gamma, es el coeficiente de
propagacion complejo
gN = -li*w*sqrt(mul*ec1N); %*100;

F = (ec1-eo)/(ec1+eo); % cambiando signo -----
FN = (ec1N-eo)/(ec1N+eo);
%F = 0;
%FN = 0;

%

```

((F

```

if rem(k,20) == 0
    disp([num2str(toc), 's          ', num2str(k), 'th component of Iw
obtained']) % show the progress time
end
%Coeficientes:
K = [-(w^2)*mul*ec1 1 -1 -1 1]/(1i*w*ec1);
KN = [-(w^2)*mul*ec1N 1 -1 -1 1]/(1i*(-w)*ec1N); %< < 4 > >
KPP = [K F*K];
KNN = [KN F*KN];
PSI = zeros(10*N,N);
PSIN = zeros(10*N,N);

for n=1:N
    nf = 5*(n-1)+1;
    np = 10*(n-1)+1;
    for m = 1:N % Uso de P por usar artificio de la reflexion
        %suma por cuadratura al estilo matriz, pues aqui no se
requiere
        %un for q = ... porque gP es independiente de "q"
        mqi = (m-1)*nQ+1;mqf=(m-1)*nQ+nQ;
        semiPSIyI = [semiPSI(nf:nf+4,mqi:mqf);
semiPSII(nf:nf+4,mqi:mqf)];

        RRP = exp(-gP*(
[R1(n,mqi:mqf);R2(n,mqi:mqf);R3(n,mqi:mqf);R4(n,mqi:mqf);R5(n,mqi:mqf)]
));
        RRP = [RRP; exp(-gP*(
[R1I(n,mqi:mqf);R2I(n,mqi:mqf);R3I(n,mqi:mqf);R4I(n,mqi:mqf);R5I(n,mqi:mq
f)]) )];
        RRN = exp(-gN*(
[R1(n,mqi:mqf);R2(n,mqi:mqf);R3(n,mqi:mqf);R4(n,mqi:mqf);R5(n,mqi:mqf)]
));
        RRN = [RRN; exp(-gN*(
[R1I(n,mqi:mqf);R2I(n,mqi:mqf);R3I(n,mqi:mqf);R4I(n,mqi:mqf);R5I(n,mqi:mq
f)]) )];

        PSI(np:np+9,m) = sum((RRP.*semiPSIyI)');
        PSIN(np:np+9,m) = sum((RRN.*semiPSIyI)');
    end
end

PSIOld = PSI; %PSI(n,m) = [RR1(n,m) ; RR2(n,m) ; RR3.....
;RR1I(n,m); RR2I(n,m) .. ]
PSINOld = PSIN;

%Correccion del efecto ANTENA- Consideracion de valores iniciales por
extremidad (calidad de ser extremo)
dibb = 0;
if dibb == 1 %'B1'

    for n =1:N % Correccion todas las filas pero algunas columnas
        np = 10*(n-1)+1;
        for s = 1:size(NN,2) % niveles fuentes m's, solo se corrigen en
algunos m's
            mInd = Nextremos(s,:); %----
            m = mInd(1);
            PSI(np:np+9,m) = PSIOld(np:np+9,m).*[1; 1; 0; 1; -1; 1; 1;
0; 1; -1];

```

```

PSIN(np:np+9,m) = PSINold(np:np+9,m).*[1; 1; 0; 1; -1; 1; 1;
0; 1; -1];
m = mInd(2);
PSI(np+4,m) = PSIOld(np+4,m)+PSIOld(np+4,m-1);
PSI(np+9,m) = PSIOld(np+9,m)+PSIOld(np+9,m-1);
PSIN(np+4,m) = PSINold(np+4,m)+PSINold(np+4,m-1);
PSIN(np+9,m) = PSINold(np+9,m)+PSINold(np+9,m-1);
m = mInd(3);
PSI(np+1,m) = PSIOld(np+1,m) + PSIOld(np+1,m+1);
PSI(np+6,m) = PSIOld(np+6,m) + PSIOld(np+6,m+1);
PSIN(np+1,m) = PSINold(np+1,m) + PSINold(np+1,m+1);
PSIN(np+6,m) = PSINold(np+6,m) + PSINold(np+6,m+1);
m = mInd(4);
PSI(np:np+9,m) = PSIOld(np:np+9,m).*[1; -1; 1; 0; 1; 1; -1;
1; 0; 1];
PSIN(np:np+9,m) = PSINold(np:np+9,m).*[1; -1; 1; 0; 1; 1; -
1; 1; 0; 1];
end %---- m
end %End of Voltage Loop - filas --- n

end

dibb = 0;
if dibb == 1 % ='B2'

for n =1:N % Correccion todas las filas pero algunas columnas
np = 10*(n-1)+1;
for s = 1:size(NN,2) % niveles fuentes m's, solo se corrigen en
algunos m's
mInd = Nextremos(s,:); %-----%-----
%-----%-----
m = mInd(1);
PSI(np:np+9,m) = PSIOld(np:np+9,m).*[1; 1; -1; 1; 0; 1; 1;
-1; 1; 0];
PSIN(np:np+9,m) = PSINold(np:np+9,m).*[1; 1; -1; 1; 0; 1;
1; -1; 1; 0];
m = mInd(2);
PSI(np+2,m) = PSIOld(np+2,m)+PSIOld(np+2,m-1);
PSI(np+7,m) = PSIOld(np+7,m)+PSIOld(np+7,m-1);
PSIN(np+2,m) = PSINold(np+2,m)+PSINold(np+2,m-1);
PSIN(np+7,m) = PSINold(np+7,m)+PSINold(np+7,m-1);
m = mInd(3);
PSI(np+3,m) = PSIOld(np+3,m) + PSIOld(np+3,m+1);
PSI(np+8,m) = PSIOld(np+8,m) + PSIOld(np+8,m+1);
PSIN(np+3,m) = PSINold(np+3,m) + PSINold(np+3,m+1);
PSIN(np+8,m) = PSINold(np+8,m) + PSINold(np+8,m+1);
m = mInd(4);
PSI(np:np+9,m) = PSIOld(np:np+9,m).*[1; 0; 1; -1; 1; 1; 0;
1; -1; 1];
PSIN(np:np+9,m) = PSINold(np:np+9,m).*[1; 0; 1; -1; 1; 1; 0;
1; -1; 1];
end %---- m
end %End of Voltage Loop - filas --- n

end

dibb = 1;
if dibb == 1 % ='B2' % Con I(N+1) = 0

```

```

for n = 1:N % Correccion todas las filas pero algunas columnas
    np = 10*(n-1)+1;
    for s = 1:size(NN,2) % niveles fuentes m's, solo se corrigen en
algunos m's
        mInd = Nextremos(s,:); %-----%-----
        %-----%-----
        m = mInd(1);
        PSI(np:np+9,m) = PSIOld(np:np+9,m).*[1; 1; 0; 1; -1; 1; 1;
0; 1; -1];
        PSIN(np:np+9,m) = PSINOld(np:np+9,m).*[1; 1; 0; 1; -1; 1; 1;
0; 1; -1];
        m = mInd(2);
        PSI(np+4,m) = PSIOld(np+4,m)+PSIOld(np+4,m-1);
        PSI(np+9,m) = PSIOld(np+9,m)+PSIOld(np+9,m-1);
        PSIN(np+4,m) = PSINOld(np+4,m)+PSINOld(np+4,m-1);
        PSIN(np+9,m) = PSINOld(np+9,m)+PSINOld(np+9,m-1);
        %m = mInd(3);
        %PSI(np+1,m) = PSIOld(np+1,m) + PSIOld(np+1,m+1);
        %PSI(np+6,m) = PSIOld(np+6,m) + PSIOld(np+6,m+1);
        %PSIN(np+1,m) = PSINOld(np+1,m) + PSINOld(np+1,m+1);
        %PSIN(np+6,m) = PSINOld(np+6,m) + PSINOld(np+6,m+1);
        m = mInd(4);
        PSI(np:np+9,m) = PSIOld(np:np+9,m).*[1; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 1;
0; 1];
        PSIN(np:np+9,m) = PSINOld(np:np+9,m).*[1; 1; 1; 0; 1; 1; 1;
1; 0; 1];
    end %---- m
end %End of Voltage Loop - filas --- n

end

for n = 1:N
    np = 10*(n-1)+1;
    for m = 1:N % <----- no reflex
        tempPSI
PSI(np:np+9,m);% ( KPP
        tempPSIN = PSIN(np:np+9,m);
        Z(n,m) = KPP*tempPSI;
        ZN(n,m) = KNN*tempPSIN;
    end
end

Iwk = Io*(1/(a+li*w)-1/(b+li*w));
IwkN= Io*(1/(a-li*w)-1/(b-li*w));
Zm = Z;
ZmN = ZN;
Vwo = zeros(N,1);
VwoN = zeros(N,1);
switch Armado
    case 'A'
        origI = Nextremos(1,1);
        Vwo(origI) = Iwk;
        VwoN(origI) = IwkN;

    case 'B1'
        origI = [ Nextremos(1,4) Nextremos(2,1)];
        Vwo(origI) = [-(1/2)*Iwk (1/2)*Iwk];
        VwoN(origI) = [-(1/2)*IwkN (1/2)*IwkN];

    case 'B'
        origI = [ Nextremos(1,1) Nextremos(2,1)];

```


BIBLIOGRAFÍA

- [1] Andrés Cantanero, “Electromagnetismo”, <http://www.uv.es/cantarer/em/r8.pdf> - 2005 Bernardo García Olmedo, “Fundamentos de Electromagnetismo”, Universidad de Granada - 2006
- [2] P. Jacqmaer y J.L. Driesen, “Modelling of Grounding Systems with the Method of Moments”, IEEE, Student Member – Ghent, Belgium 2006
- [3] Leonid Grcev, “Improved Design of Power Transmission Line Grounding Arrangements for Better Protection Against Effects of Lightning”, University “St. Kiril i Metodij” – 1998
- [4] Leonid Grcev, “Wire Antenna Model for Transient Analysis of Simple Grounding Systems, Part I: The Vertical Grounding electrode”, University “St. Kiril i Metodij” – 1998
- [5] Leonid Grcev and Vesna Arnautovski, “Grounding Systems Modeling for High Frequencies and Transients: Some Fundamental Considerations”, IEEE Tech Conference – Bologna, Italy 2003
- [6] Leonid Grcev, “Computer Analysis of Transient Voltages in Large Grounding Systems”, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL 11, No. 2, April 1996
- [7] D. Poljak and V. Doric, “Wire Antenna Model for Transient Analysis of Simple Grounding Systems, Part II: The Horizontal Grounding Electrode”, Department of electronics, University of Split - Split, Croatia, 2006
- [8] Karol Aniserowicz, “Comparison of Different Numerical Methods for Solving Boundary-Value Problems in Electromagnetics”, IEEE Transaction on Education VOL. 47, No. 2, May 2004
- [9] IEC International Standard 1312-1, “Protection Against Lightning Electromagnetic Impulse. Part 1: General Principles”, - Geneva, Switzerland: IEC, 1995
- [10] IEEE Standard 142-2007, “IEEE Recommended Practice for Grounding of Industrial and Commercial Power Systems”, THE GREEN BOOK – 2007
- [11] Justo Yanque, “Alta tensión y Técnicas de Pruebas de laboratorio”, Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias– Perú, 2004

- [12] Ticse Torres Royer, “Simulación de radiación electromagnética usando el método de los momentos”, Universidad Nacional de Ingeniería - Perú, 2008
<http://compinformatidf.files.wordpress.com/2009/12/topicos.pdf>
- [13] P. A. Tassi, y C. R. Engelberger “Introducción al Método de Diferencias Finitas”, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Santa Fe
http://elasticidad.esmartstudent.com/diferencias_finitas.pdf
- [14] Murray R. Spiegel, “Variable Compleja”, Serie SCHAUM – México, 1998
- [15] P. Chowdhuri, “*Electromagnetic Transients in Power Systems*”, John Wiley & Sons, Inc., - New York, 1996
- [16] C. Gary, “The Impedance of Horizontally Buried Conductors”, Proceedings of the First International Symposium: Lightning and Mountains, Chamonix–Mont-Blanc – Francia, 1994, Paper A6.2 pp. 148-151
- [17] L. Grcev, “Improved Earthing System Design Practices for Reduction of Transient Voltages”, 1998 CIGRE Sesión – International Conference on Large High Voltage Electric Systems, (Paper 36-302) – Paris, Francia Agosto 1998.
- [18] José Manuel Aller, Tesis Doctoral “Diseño de Sistemas Complejos de Puesta a Tierra en Terrenos con Estratos Múltiples y con Consideración de su Comportamiento en Régimen Transitorio”, Universidad Politécnica de Madrid – Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales – Diciembre 1993
http://prof.usb.ve/jaller/Tesis_Doctoral/5_Regimen_Transitorio.pdf