

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

ESPECIALIDAD DE INGENIERÍA MECATRÓNICA



**DISEÑO DE CONTROLADORES H-INFINITO DE ORDEN
REDUCIDA EN ESTRUCTURAS FLEXIBLES USANDO
ALGORITMOS GENÉTICOS**

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO MECATRÓNICO

RUTH VANESSA CANAHUIRE CABELLO

PROMOCIÓN 2006-1

LIMA - PERÚ

2014

“Dedico este trabajo a mi familia por ser mi principal motivación y fuerza en estos años de formación académica.”

Índice General

Índice de Figuras	VIII
Índice de Tablas	XIII
Lista de Notación, Nomenclatura y Siglas	XIII
PRÓLOGO	1
1 INTRODUCCIÓN	4
1.1 Motivación	4
1.2 Revisión bibliográfica	7
1.3 Objetivos	9
1.4 Alcances y limitaciones	9
1.4.1 Alcances	9
1.4.2 Limitaciones	10
2 ESTRUCTURAS FLEXIBLES	11
2.1 Introducción	11
2.2 Viga <i>Euler-Bernoulli</i>	13
2.3 Montaje de la matriz global de una viga <i>Euler-Bernoulli</i>	17

2.4	Aplicación de las condiciones de contorno	21
2.5	Matriz de amortiguamiento proporcional	22
2.6	Modelo de espacio estados	22
2.7	Comentarios finales	24
3	FUNDAMENTOS DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS	25
3.1	Introducción	25
3.2	Funciones características de los algoritmos genéticos	29
3.3	Algoritmos genéticos para problemas con restricciones no lineales	33
3.4	Interés del uso de los algoritmos genéticos en problemas de control	34
3.5	Comentarios finales	35
4	SÍNTESIS DE CONTROLADORES \mathcal{H}_∞ POR REALIMENTACIÓN DE SALIDA	36
4.1	Introducción al control \mathcal{H}_∞	37
4.1.1	Norma \mathcal{H}_∞	38
4.2	Controlador \mathcal{H}_∞ por realimentación de salida	39
4.3	Funciones de ponderación	42
4.3.1	Introducción	42
4.3.2	Selección de las funciones de ponderación	43
4.3.3	Modelo de estados del sistema con filtros de ponderación	45
4.3.4	Problema de optimización para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞	48
4.4	Desigualdades matriciales lineales para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden completa	50
4.4.1	Breve reseña sobre las LMI	50
4.4.2	Definición de LMI	51
4.4.3	Lema del Limite Real	52

4.4.4	Controlador \mathcal{H}_∞ por realimentación de salida via LMI	55
4.4.5	Adaptación de las matrices del controlador para el caso $D_{22} = 0$	57
4.4.6	Problema de Control \mathcal{H}_∞	61
4.5	Comentarios finales	65
5	SÍNTESIS DE OBTENCIÓN DIRECTA DE CONTROLADORES \mathcal{H}_∞ DE ORDEN REDUCIDA	67
5.1	Introducción	67
5.2	Síntesis de controladores de orden reducida en la forma canónica modal	69
5.3	Estructura de los algoritmos genéticos para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida	74
5.3.1	Algoritmo de solución para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida	75
5.4	Comentarios finales	76
6	RESULTADOS	79
6.1	Diseño de controladores de orden reducida en la forma modal	83
6.1.1	Controladores de orden reducida usando la planta nominal y funciones de ponderación	84
6.1.2	Controladores de orden reducida usando el modelo de la planta "real"	98
6.2	Comentarios finales	106
	CONCLUSIONES	109
	Trabajos futuros	111
	BIBLIOGRAFÍA	113

A	ALGUNOS CONCEPTOS	117
A.1	Complemento de Schur	117
A.2	Estabilidad de Lyapunov	118
A.3	Norma \mathcal{L}_2	119
A.4	Transformación de Congruencia	119
B	COMPARACIONES USANDO EL ALGORITMO SQP	120
B.1	Algoritmo SQP	120
B.2	Ejemplo de aplicación	122
C	ALGUNOS RESULTADOS EXPERIMENTALES	126
C.1	Controladores de orden reducida usando el modelo de la planta nominal y funciones de ponderación	132
C.2	Controladores de orden reducida usando el modelo de la planta "real"	134
C.3	Algunos comentarios	136

Índice de Figuras

2.1	Respuesta en frecuencia del modelo de una viga flexible empotrada-libre: señal de entrada (torque) y señal de salida (desplazamiento). . . .	12
2.2	Elemento finito de una viga	15
2.3	Coordenadas locales y globales de un elemento finito de viga	17
2.4	Viga dividida en dos elementos finitos	19
3.1	Estructura de operación de los GA	27
3.2	Función con múltiples soluciones locales	28
3.3	Proceso de la función cruzamiento (<i>@crossoverscattered</i>).	30
4.1	Representación del problema \mathcal{H}_∞	41
4.2	Características del filtro pasa baja como función de ponderación.	44
4.3	Sistema sin control y filtros de ponderación	45
4.4	Diagrama del sistema aumentado, W_u y W_p son los filtros de ponderación, P es la planta y K el controlador.	46
5.1	Región deseada de los polos del controlador de orden reducida en el plano complejo - controlador en la forma canónica modal.	74
5.2	Proceso de solución usando GA	78

6.1	Distribución de la viga para el proceso de control	79
6.2	Grados de libertad de la viga empotrada-libre con 20 elementos finitos .	80
6.3	Función de respuesta en frecuencia (FRF) del modelo de la planta nominal y del modelo de la planta "real": aceleración - torque.	82
6.4	Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - Planta nominal y funciones de ponderación (filtro pasa baja y filtro pasa alta).	85
6.5	Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	87
6.6	Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	87
6.7	Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	88
6.8	Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6	89
6.9	Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6	90
6.10	Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6	90
6.11	Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8	92

6.12 Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8	92
6.13 Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8	93
6.14 Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, método usando GA y método usando LMI, controlador de orden completa 12×12	94
6.15 Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, método usando GA y método usando LMI, controlador de orden completa 12×12	95
6.16 Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	99
6.17 Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	100
6.18 Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	100
6.19 Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6	102
6.20 Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6	102
6.21 Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6	103

6.22	Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8 .	104
6.23	Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8 .	105
6.24	Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8 .	105
B.1	Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado en la forma modal (algoritmo SQP y algoritmo genético) y no controlado, controlador de orden 4×4 .	124
B.2	Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado en la forma modal (algoritmo SQP y algoritmo genético) y no controlado, controlador de orden 4×4 .	125
C.1	Viga experimental empotrada-libre implementada en el Laboratorio de Mecánica Computacional, en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la UNICAMP.	127
C.2	Distribución de la viga para el proceso de control.	128
C.3	Esquema del montaje experimental de la viga.	128
C.4	Función correlación de la salida de aceleración con respecto a la entrada de perturbación.	129
C.5	Señal de aceleración: obtenido de medición experimental (Modelo experimental) y obtenido del modelo estimado.	130

C.6	Respuesta de frecuencia del modelo de la planta estimada a partir de datos experimentales, modelo de la planta “real” y modelo de la planta nominal.	131
C.7	Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	133
C.8	Respuesta del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	133
C.9	Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	135
C.10	Respuesta del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4	135

Índice de Tablas

5.1	Características de los GA para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida.	75
6.1	Resultados de los 5 controladores diseñados usando la planta nominal y funciones de ponderación vía algoritmos genéticos.	97
6.2	Resultados de los 5 controladores diseñados usando la planta “real” vía algoritmos genéticos.	108
B.1	Resultados de los 5 controladores diseñados usando la planta “real” para el algoritmo SQP y los algoritmos genéticos - método en la forma canónica modal	123

Notación, Nomenclatura y Siglas

Notación

En este trabajo las letras minúsculas en negrilla denotan vectores y las letras mayúsculas en negrilla representan matrices.

Nomenclatura

La nomenclatura usada es:

- I** - Matriz identidad
- \mathbf{A}^T** - Matriz **A** transpuesta
- $\det(\mathbf{A})$** - Determinante de la matriz **A**
- $tr(\mathbf{A})$** - Representa la traza de la matriz **A**
- $\mathbf{A} > \mathbf{0}$** - Matriz **A** es simétrica y positiva definida
- $\|\mathbf{A}\|$** - Norma euclidiana de la matriz **A**
- \mathbf{A}^*** - Transpuesta conjugada compleja de la matriz **A**
- $\lambda_i(\mathbf{A})$** - Autovalor λ_i de la matriz **A**
- $\lambda_{max}(\mathbf{A})$** - Mayor autovalor de la matriz **A**
- j** - Unidad imaginaria $j = \sqrt{-1}$

s	- Variable en el dominio de la transformada de Laplace
ω	- Variable de la frecuencia
\in	- Pertenece
$\sup_{\omega}(g(\omega))$	- Valor supremo de la función $g(\omega)$
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}$	- Conjunto de los números reales, vector de números reales de orden n , matriz de números reales de orden $n \times m$ respectivamente
\mathbb{C}	- Conjunto de los números complejos
$Re(a)$	- Parte real de $a \in \mathbb{C}$
\mathcal{L}_2	- Hace referencia al espacio de Hilbert de funciones integrables cuadráticas en el dominio del tiempo
\mathcal{H}_2	- Representa el sub-espacio \mathcal{L}_2 con funciones analíticas y limitadas en el semi-plano derecho del plano complejo ($Re(s) > 0$)
\mathcal{L}_{∞}	- Hace referencia al espacio de Banach de funciones que son limitados en $j\mathbb{R}$
\mathcal{H}_{∞}	- Representa el sub-espacio \mathcal{L}_{∞} con funciones analíticas y limitadas en el semi-plano derecho del plano complejo ($Re(s) > 0$)
$\ \mathbf{G}(s)\ _{\infty}$	- Norma infinito de la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$, es decir, representa el pico de la respuesta en frecuencia de $\mathbf{G}(s)$
$\ \mathbf{G}(s)\ _2$	- Norma \mathcal{L}_2 de la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$
$\sigma(\mathbf{G}(j\omega))$	- Valores singulares de la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$
$\sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega))$	- Máximo valor singular de la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$

Siglas y Abreviaturas

- ALGA - Método conjunto de los algoritmos genéticos y Lagrangiano Aumentado, del inglés *Augmented Lagrangian - Genetic Algorithms*
- ERA - Algoritmo de Realização de Autosistemas, do inglês *Eigensystem Realisation Algorithm*
- GA - Algoritmos genéticos, del inglés *Genetic Algorithms*
- GDL - Grados de Libertad
- HIFOO - H-Infinity Fixed-Order Optimization
- LMI - Denota desigualdades matriciales lineales, del inglés *Linear Matrix Inequalities*
- LMI-AL - Denota el uso de los métodos conjuntos de las desigualdades matriciales lineales y el Lagrangiano Aumentado, del inglés *Linear Matrix Inequalities - Augmented Lagrangian*
- LPV - Parámetros lineales y variantes en el tiempo del inglés *linear parameter varying*
- KYK - Kalman Yakounobic Popov
- MIMO - Definición para sistemas de más de una entrada y más de una salida, del inglés *Multiple Input Multiple Output*
- SDP - Programación semi-definida, del inglés *Semidefinite Programming*
- SISO - Denotación para sistemas de una entrada y una salida, del inglés *Single Input Single Output*
- SQP - Programación cuadrática secuencial, del inglés *Sequential Quadratic Programming*

Unidades de medición

- [*m*] - Metro - Medida de longitud
- [*N*] - Newton - Medida de fuerza
- [$\frac{N}{m}$] - Newton sobre metro - Medida de rigidez
- [*s*] - Segundo - Medida de tiempo
- [*Hz*] - Hertz - Medida de frecuencia
- [*rad*] - Radian - Medida angular
- [*dB*] - Decibel - Medida de intensidad
- [*V*] - Voltio - Medida de tensión

PRÓLOGO

En la actualidad, existe un enorme interés en el control activo de vibraciones de estructuras flexibles en diversas áreas de la ingeniería. Algunas situaciones de aplicación son los sistemas mecánicos como automóviles y aeronaves. Una forma de abordar el problema de vibración puede ser mediante el uso de controladores activos y pasivos. Debido a la necesidad de adicionar grandes cantidades de masa para la implementación de controladores pasivos surge el interés en la implementación de controladores activos de vibración [24].

El diseño de sistemas de control activo de vibración de estructuras flexibles demanda una atención especial, debido a la orden de los modelos estructurales, generalmente, con un elevado número de grados de libertad. La implementación de controladores de orden completa de estructuras flexibles, puede llevar a la utilización de hardwares avanzados con un alto costo computacional de procesamiento. Para evitar este problema, es recomendado el uso de controladores de orden reducida. Abordajes usando desigualdades matriciales lineales (LMI) pueden ser usadas en el diseño de controladores de orden reducida. Este enfoque presenta buenos resultados de desempeño en términos de minimización de la norma \mathcal{H}_∞ . Aunque, el costo computacional para la obtención de controladores puede ser elevado para sistemas de grandes dimensiones. Este trabajo mostrará un método directo de diseño de con-

troladores de orden reducida para el control de vibración en estructuras flexibles. En este método es formulado un problema de optimización no convexo basado en la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ garantizando la estabilidad del sistema en lazo cerrado. La solución del problema de optimización es obtenida usando algoritmos genéticos, explotando la ventaja de estos en la solución de problemas de optimización no convexos. Finalmente, la formulación es utilizada para el control activo de vibración de una viga de aluminio cantilever donde los resultados y algunos aspectos numéricos son discutidos.

El desarrollo de este trabajo es presentado como se describe a continuación:

El Capítulo I muestra la introducción, la motivación, una revisión bibliográfica de lo desarrollado hasta la actualidad, los objetivos del trabajo, los alcances y las limitaciones.

El Capítulo II presenta una forma de obtener modelos de espacio estado de estructuras flexibles. Es mostrado el método de elementos finitos así como los conceptos de amortiguamiento proporcional e condiciones de contorno para el caso de una viga del tipo Euler-Bernoulli.

El Capítulo III muestra la definición y estructura de los algoritmos genéticos donde son explicados sus elementos, funciones y operadores principales. Son mostradas las ventajas y desventajas de los algoritmos genéticos así como el interés sobre el problema de control \mathcal{H}_∞ de orden reducida.

El Capítulo IV aborda los conceptos y la formulación de la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ de orden completa, incluyendo los conocimientos para el uso de funciones de ponderación, mostrando la formulación matemática para el caso de un sistema en la forma estándar del problema \mathcal{H}_∞ .

El Capítulo V muestra una síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida, basada en la estructura modal de los controladores, formulado a través de un problema de optimización no convexa. Es mostrado también el algoritmo de solución usado vía algoritmos genéticos. Vale resaltar que esta síntesis fue propuesta por primera vez por la autora de este trabajo en [8].

El Capítulo VI muestra los resultados simulados obtenidos de la implementación de los controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida sobre un modelo de una viga de aluminio del tipo Euler-Bernoulli *cantilever*.

Seguidamente, son mostradas las conclusiones obtenidas del análisis de los resultados, las perspectivas futuras y la lista bibliográfica.

Finalmente, son presentados los Apéndices donde son mostrados algunos conceptos adicionales para el mejor entendimiento de este trabajo.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

El problema de control activo de vibraciones en estructuras presenta cierta complejidad asociada con algunas de sus características típicas. Una estructura flexible generalmente presenta picos de resonancia próximos unos a otros, lo que caracteriza una alta densidad de modos de vibración y generalmente con bajo amortiguamiento. Esta alta densidad de modos lleva a la necesidad de uso de modelos de orden alta, para caracterizar el comportamiento de la estructura en una región de frecuencia de interés.

Generalmente, el modelo matemático de una estructura puede ser obtenido a través del método de elementos finitos [15,30] o, a través de métodos de identificación experimental [13, 31], si la estructura se encuentra disponible para mediciones. En ambas situaciones, el modelo obtenido tendrá una forma reducida en relación a la estructura real. Una dificultad adicional es que los modos residuales desconsiderados en el proceso de modelamiento pueden ser excitados caracterizando el fenómeno conocido como *spillover* de control. Este fenómeno puede llevar a que la estructura presente altas amplitudes de vibración como puede ser visto en [33].

En la síntesis de controladores activos para vibración de estructuras flexibles, un criterio usual es la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ [23], que consiste en la atenuación del mayor pico de respuesta en frecuencia del sistema controlado, manteniendo la estabilidad. Particularmente en el caso de problemas de control de vibración, el interés en la reducción del valor pico es asociado a reducir los picos de resonancia del sistema.

El control \mathcal{H}_∞ es interesante por aumentar la capacidad del sistema en rechazar perturbaciones externas, tanto como aumentar su robustez. Una forma de resolver el problema de control \mathcal{H}_∞ es a través de su formulación como un problema de desigualdades matriciales lineales (LMI) [4, 41].

La síntesis \mathcal{H}_∞ usual lleva a la obtención de controladores de orden completa (mismo orden que la planta) [16, 41]. Esta formulación usada en modelos de estructuras flexibles, puede llevar a la obtención de controladores de orden alta. Estos controladores de orden alta pueden presentar dificultades en la implementación práctica del controlador debido a la necesidad del uso de *hardwares* avanzados para evitar posibles problemas de retrasos de tiempo de respuesta del controlador. Para evitar esa dificultad, controladores de menor orden pueden ser usado buscando un desempeño razonable, en términos de atenuación de la vibración, garantizando la estabilidad del sistema controlado [1, 25].

La síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida caracteriza un problema de optimización no convexo. En ese aspecto, algunos autores consiguieron tratar la no convexidad usando una combinación del método Lagrangiano Aumentado y las desigualdades matriciales lineales [1]. Un ejemplo de la utilización de este método para el caso de estructuras flexibles es mostrado en [39]. Esta propuesta puede ser un

método eficaz, mas puede llevar a costos computacionales elevados en modelos de estados de ordenes consideradas elevadas.

Este trabajo mostrará la aplicación de una síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida basada en la estructura modal del controlador. Esta formulación es basada en un problema de optimización no convexa para la obtención directa de los controladores en la forma canónica modal. Este problema de optimización puede ser visto como la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ del sistema en lazo cerrado sujeto a condiciones de estabilidad. En este problema de optimización no convexo, elementos desconocidos de las matrices del controlador son las variables de optimización a ser encontradas. El hecho de colocar las matrices del controlador en la forma canónica modal de espacio estado permite reducir el costo computacional de obtención de los controladores.

La mayor dificultad de este problema de optimización está relacionada con el proceso de búsqueda de las variables incógnitas (por se un problema no convexo). Los algoritmos genéticos (GA) son algoritmos de búsqueda estocásticos basados en la selección natural, donde una de sus ventajas es la robustez y el equilibrio entre la eficiencia y la eficacia. El algoritmo genético es considerado adecuado en los procesos de búsqueda de optimización robusta [18] y su potencial para el diseño de controladores de orden reducida es discutido en este trabajo.

El ejemplo estudiado en este trabajo está basado en el control activo de vibración de una viga de aluminio empotrada en uno de sus extremos. Para este ejemplo son diseñados controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida donde los resultados numéricos obtenidos serán mostrados y discutidos.

1.2. Revisión bibliográfica

Un problema común en el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ está relacionado con la orden de los controladores \mathcal{H}_∞ que generalmente es de la misma orden del modelo de la planta que se desea controlar. Tales controladores son conocidos como controladores de orden completa, y son a veces difíciles de implementarse debido a las limitaciones de *hardware*, pues pueden presentar retrasos de tiempo de respuesta del controlador. Para tratar este problema es recomendable usar controladores de bajo orden que garanticen estabilidad y un desempeño razonable del sistema controlado. Estos controladores pueden ser diseñados por tres formas:

- Reducción del modelo de la planta seguido del diseño del controlador para la obtención del controlador de orden reducida [38].
- Diseño de controladores de orden completa seguido de la reducción del modelo del controlador para la obtención del controlador de orden reducida [47].
- Diseño directo de controladores de orden reducida incluyendo una restricción adicional durante el proceso de diseño [1].

En este último abordaje es realizado el diseño de controladores robustos de orden reducida basado en enfoque de optimización presentado por Apkarian y Tuan en [1], el cual consiste en el uso de los métodos conjuntos del Lagrangiano Aumentado y las desigualdades matriciales lineales.

Sobre estos abordajes existen varios métodos para el diseño de controladores de orden reducida, alguno de ellos son los siguientes:

- Método algebraico de control de covarianza, donde el controlador deseado es

parametrizado en términos de una matriz que representa el límite superior para la covarianza de los estados [25, 26].

- Método de análisis del desempeño robusto. En este abordaje, el problema de síntesis del controlador es formulado como un problema de análisis robusta donde las variables del controlador son los parámetros inciertos [22].
- Método basado en la optimización convexa de las matrices polinomiales y funciones estrictamente positivas reales [20].

Algunas técnicas más actuales de diseño de controladores de orden reducida están basadas en aproximaciones convexas como mostrados en [21], donde es presentado un algoritmo para la aproximación interior convexa por regiones garantizando la estabilidad del sistema mas con posible pérdida de la solución optima. Otro abordaje basada en aproximaciones convexas es usada para problemas con incertezas politópicas como el propuesto en [28], donde son usadas las LMIs obtenidas del lema de Kalman-Yakounobic-Popov (KYP). Otro estudio sobre controladores de orden reducida es mostrado en [45], donde los controladores son diseñados para sistemas con incertezas politópicas incluyendo la ubicación de polos dentro de una región de interés en el plano complejo usando LMIs.

Actualmente existen algunos trabajos basados en algoritmos híbridos para el diseño de controladores de orden reducida. Uno de estos métodos es mostrado en [5] donde es presentada la función HIFOO (*H-Infinity Fixed-Order Optimization*) para diseñar controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida basado en el algoritmo casi-Newton y técnicas de muestreo del gradiente.

El método utilizado en este trabajo fue propuesto por primera vez en [8] y será usado en esta tesis para diseñar controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida. Este enfoque

está dentro de los métodos de obtención directa usando en el proceso de solución los algoritmos genéticos. Esta síntesis es presentada como un problema de optimización basada en la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ del sistema en lazo cerrado sujeto a condiciones de estabilidad. En este problema de optimización no lineal, los elementos desconocidos de las matrices de estado del controlador son las variables de optimización a ser encontradas.

La síntesis usada procura tratar el problema de diseño de controladores de orden alta de forma simple y con un bajo costo computacional. Este enfoque puede evitar problemas relacionados a las limitaciones de *hardwares* y retrasos de tiempo de respuesta del sistema debido a ser controladores de orden menor con respecto a los controladores de orden completa.

1.3. Objetivos

Diseñar controladores H-infinito de orden reducida usando algoritmos genéticos para tratar los problemas surgidos de la implementación de controladores de orden alta en modelos de estructuras flexibles. Este trabajo mostrará la aplicación de una síntesis de los controladores de orden reducida basada en una propuesta de un problema de optimización no lineal resuelta a través de algoritmos genéticos.

1.4. Alcances y limitaciones

1.4.1. Alcances

El problema de la síntesis de controladores de orden reducida está basada en un problema de optimización no convexa. En ese contexto, algunos métodos presen-

tes en la literatura buscan aproximar este problema a un problema de optimización convexa [1, 21, 28]. El propósito de estas aproximaciones es encontrar una solución cercana a la solución global del problema no convexo a través del uso de herramientas disponibles de programación semidefinida (SDP).

Este trabajo muestra la aplicación de un método de diseño de controladores de orden reducida, donde la síntesis del problema de optimización no convexo es resuelta directamente usando algoritmos genéticos [8]. Este método explota las ventajas del uso de los algoritmos genéticos, como un método de solución robusta, sobre problemas no lineales/no convexos. El uso de algoritmos genéticos evitará el uso de largos procesos de linealización del problema de síntesis de controladores de orden reducida, procurando garantizar resultados próximos a la solución global en tiempos de procesamiento razonables. Un ejemplo donde se muestra las características y ventajas del uso de los algoritmos genéticos sobre una síntesis de controladores de orden reducida basada en controladores en la forma canónica controlable pueden ser encontradas en [7].

El abordaje usado en esta tesis será aplicado en un modelo de una viga de aluminio empotrada-libre donde los resultados y algunos aspectos numéricos basados en análisis vibratorios serán discutidos.

1.4.2. Limitaciones

Los resultados presentados en este trabajo para el ejemplo seleccionado serán únicamente simulados. A pesar de esto, el método de diseño usado y propuesto por la autora de esta tesis en [8], fue probado experimentalmente en un banco experimental de una viga de aluminio obteniendo resultados satisfactorios. Algunos de estos resultados experimentales serán presentados en el apéndice de este trabajo.

Capítulo 2

ESTRUCTURAS FLEXIBLES

Este capítulo tiene por objetivo mostrar primeramente algunas características en frecuencia de las estructuras flexibles. Seguido de las herramientas necesarias para la obtención del modelo matemático de una viga del tipo *Euler-Bernoulli* basado en el método de elementos finitos. En ese contexto, es considerando un amortiguamiento proporcional y las condiciones de contorno. Este capítulo puede ser extendido para otros tipos de estructuras flexibles como puede ser placas u otros.

2.1. Introducción

Una estructura es considerada flexible cuando en el proceso de modelo son consideradas sus propiedades elásticas en vez de considerar a la estructura como un cuerpo rígido. El comportamiento dinámico de las estructuras flexibles se caracteriza por presentar picos de resonancia próximos unos a otros con modos poco amortiguados [3]. Estas características se deben a que dichas estructuras son esbeltas y presentan menor rigidez comparadas con las estructuras menos flexibles. Un ejemplo del comportamiento en frecuencia típica de una estructura flexible es mostrado en la Figura 2.1.

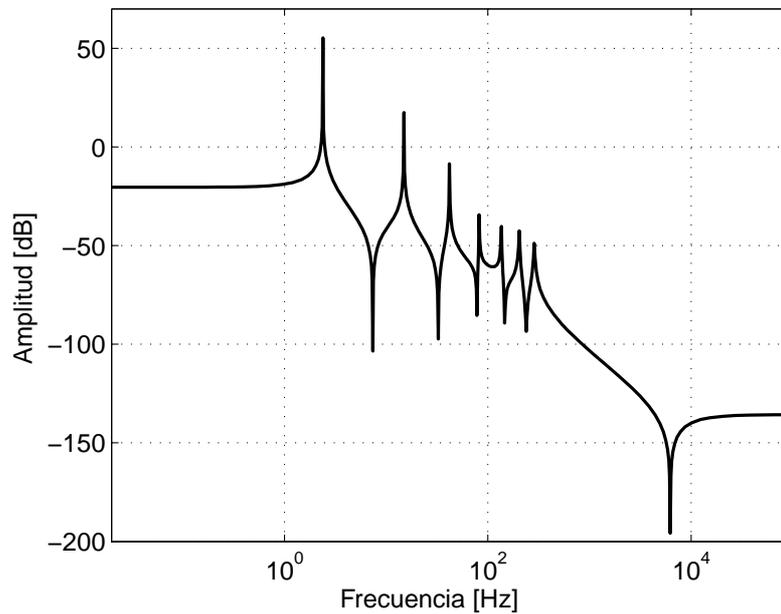


Figura 2.1: Respuesta en frecuencia del modelo de una viga flexible empotrada-libre: señal de entrada (torque) y señal de salida (desplazamiento).

Las estructuras flexibles son ampliamente usadas en varias aplicaciones de ingeniería como son, por ejemplo, antenas de radares, torres mecánicas, sistemas robóticos, estaciones espaciales, etc. Tales estructuras necesitan eventualmente ser controladas para garantizar un comportamiento satisfactorio en términos de minimización de vibraciones indeseables que son algunas veces generadas por fuentes de difícil ubicación o control. Algunas fuentes de vibración pueden ser gradientes térmicos, presión solar, fuerzas aerodinámicas, etc [2].

En los últimos años, métodos de control activo han sido ampliamente desarrollados para suprimir la vibración estructural y mejorar el desempeño de las estructuras flexibles, ejemplos sobre estas abordajes pueden ser encontrados en [16,23,41]. A su vez, métodos de control pasivo pueden ser usados aunque su uso es cada vez menor debido a que a veces es necesario el uso de grandes cantidades de masa para su implementación [24].

Para la utilización de métodos de control de vibraciones es necesario tener modelos matemáticos que representen tanto cuanto sea posible el comportamiento dinámico de la estructura flexible. El proceso de modelamiento de las estructuras pueden ser realizadas a través de identificación experimental (cuando la estructura está disponible para medición) [13, 31]. O usando el método de elementos finitos [15, 30]. En este trabajo usaremos el método de elementos finitos para obtener el modelo matemático de una viga *Euler-Bernoulli* como se detallará en este Capítulo.

2.2. Viga *Euler-Bernoulli*

La ecuación diferencial para el problema de flexión de una viga *Euler-bernoulli* es la siguiente [30]:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) = q(x, t) \quad (2.1)$$

donde $v(x, t)$ es el desplazamiento transversal de la viga, ρ es la densidad del material de la viga, E es la constante de elasticidad, I el momento de inercia de la viga, es la rigidez de la viga, $q(x, t)$ es la carga de presión externa aplicada en la viga, t es el tiempo y x representa la posición longitudinal de la viga.

Para desarrollar la formulación por elementos finitos es usado el método de Galerkin conocido también como el método de los residuos ponderados. El método de Galerkin usado en la Ecuación 2.1 permitirá calcular las correspondientes ecuaciones matriciales a través de la discretización de la viga usando elementos finitos.

El residuo ponderado promedio de la Ecuación 2.1 puede ser calculado como [30]:

$$\mathcal{I} = \int_0^L \left(\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - q \right) w dx = 0 \quad (2.2)$$

donde L es la longitud total de la viga y w es la función de prueba. La formulación débil presentada en la Ecuación 2.2 puede ser solucionada usando integraciones por partes, donde considerando la discretización de la viga en elementos finitos tenemos que:

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega^e} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dx + \int_{\Omega^e} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_{\Omega^e} q w dx \right] + \left[V w - T \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^L = 0 \quad (2.3)$$

donde:

$$\begin{aligned} V &= EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, & \text{es el esfuerzo cortante} \\ M &= EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & \text{es el momento de flexión} \\ \Omega^e, & & \text{es el dominio de un elemento finito} \\ n, & & \text{es el número de elementos finitos de la viga} \end{aligned}$$

Sobre la formulación presentada en 2.3 son usadas funciones de forma para la interpolación espacial de la deflexión transversal, $v(x, t)$, en términos de variables nodales a lo largo del eje x . En ese contexto, serán considerados elementos de viga de dos nodos ubicados a los extremos, con 2 grados de libertad (GDL) en cada nodo como mostrado en la Figura 2.2. Los grados de libertad de cada nodo son la deflexión vertical, v_i , y la rotación, θ_i .

Debido a que el elemento de viga presenta cuatro variables nodales, será usado una función cúbica para caracterizar la deflexión, $v(x)$, como:

$$v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (2.4)$$



Figura 2.2: Elemento finito de una viga

La rotación, $\theta(x)$, puede ser calculado usando la Ecuación 2.4 como:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (2.5)$$

Utilizando las condiciones de contorno, según la Figura 2.2, en las Ecuaciones 2.4 y 2.5, tenemos:

$$v(0) = c_0 = v_1 \quad (2.6)$$

$$\theta(0) = c_1 = \theta_1 \quad (2.7)$$

$$v(l) = c_0 + c_1l + c_2l^2 + c_3l^3 = v_2 \quad (2.8)$$

$$\theta(l) = c_1 + 2c_2l + 3c_3l^2 = \theta_2 \quad (2.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9) en la expresión de la deflexión, (2.5), se obtiene lo siguiente:

$$v(x) = H_1(x)v_1 + H_2(x)\theta_1 + H_3(x)v_2 + H_4(x)\theta_2 \quad (2.10)$$

donde:

$$H_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$H_2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$H_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$$

$$H_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

Las funciones $H_i(x)$ son conocidas como funciones de forma *Hermitianas* y son aplicadas a la ecuación de Garlekin presentada en (2.3), resultando en las siguientes matrices de rigidez y de masa del elemento de viga respectivamente.

$$\mathbf{K}^e = \int_0^l \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \quad (2.11)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_0^l \rho A \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \quad (2.12)$$

donde A es el área de la sección transversal y además se considera que:

$$\mathbf{B} = \left[\frac{d^2(H_1)}{dx^2} \quad \frac{d^2(H_2)}{dx^2} \quad \frac{d^2(H_3)}{dx^2} \quad \frac{d^2(H_4)}{dx^2} \right] \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H} = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4] \quad (2.14)$$

Asumiendo que la expresión EI es una constante, las matrices de rigidez y masa del elemento de viga mostrado en la Figura 2.2, pueden ser calculados como:

$$\mathbf{K}^e = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 12I & 6Il & -12I & 6Il \\ 6Il & 4Il^2 & -6Il & 2Il^2 \\ -12I & -6Il & 12I & -6Il \\ 6Il & 2Il^2 & -6Il & 4Il^2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{M}^e = \rho Al \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210}l & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}l \\ \frac{11}{210}l & \frac{1}{105}l^2 & \frac{13}{420}l & -\frac{1}{140}l^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420}l & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l \\ -\frac{13}{420}l & -\frac{1}{140}l^2 & -\frac{11}{210}l & \frac{1}{105}l^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.3. Montaje de la matriz global de una viga *Euler-Bernoulli*

Para la obtención de la matriz global de una viga *Euler-Bernoulli* primeramente es necesario saber si el sistema de coordenadas del elemento finito está inclinado en relación al sistema de coordenadas globales como se muestra en la Figura 2.3. En esta situación, las matrices de masa y rigidez necesitan una transformación de coordenadas como mostradas a seguir.

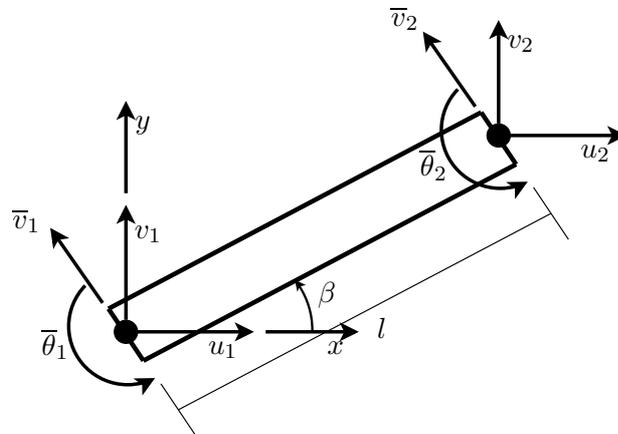


Figura 2.3: Coordenadas locales y globales de un elemento finito de viga

Sea el vector de desplazamiento en las coordenadas locales definido como $\bar{\mathbf{d}} = [\bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_2]^T$ donde no es considerado el desplazamiento en el eje axial de la viga y el vector de desplazamiento de coordenadas globales definido como $\mathbf{d} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T$. Estos vectores de coordenadas están relacionando según la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\text{sen}(\beta) & \text{cos}(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\beta) & \text{cos}(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

donde β representa el ángulo de inclinación entre el sistema local y el sistema global. \mathbf{L} es la matriz de transformación de coordenadas que relaciona el sistema local al sistema global.

Para efectos de entendimiento, la Ecuación (2.17) puede ser escrito nuevamente como:

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{L}\mathbf{d} \quad (2.18)$$

Según la formulación presentada en [12], la energía de deformación de cada elemento del sistema de coordenadas locales puede ser obtenido como:

$$\bar{\mathbf{U}}_e = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{d}} \quad (2.19)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.18) en (2.19), la energía de deformación de cada

elemento de viga puede ser reescrita en el sistema de coordenadas globales como:

$$\mathbf{U}_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{L}^T \overline{\mathbf{K}}_e \mathbf{L} \mathbf{d} \quad (2.20)$$

De la expresión (2.20), la matriz de rigidez global puede ser deducida como:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{L}^T \overline{\mathbf{K}}_e \mathbf{L} \quad (2.21)$$

donde \mathbf{K}_e representa la matriz de rigidez global y $\overline{\mathbf{K}}_e$ representa la matriz de rigidez local.

La matriz de masa de cada elemento finito es independiente del sistema coordenadas utilizado. Por lo tanto, la matriz de masa en el sistema de coordenadas locales es el mismo que en el sistema de coordenadas globales.

Una vez obtenida las matrices de masa y rigidez de cada elemento finito en el sistema de coordenadas globales, se procede a realizar el montaje de las matrices para obtener las matrices de masa y rigidez completa de la viga como se muestra a seguir.

Para este fin, se realizará un ejemplo con dos elementos finitos como se muestra en la Figura 2.4.

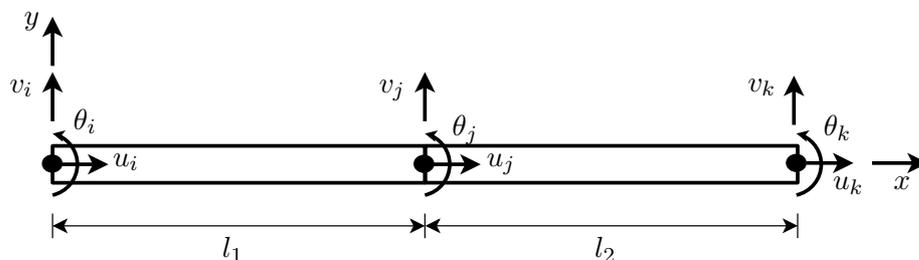


Figura 2.4: Viga dividida en dos elementos finitos

Sea la matriz de masa o rigidez del primer elemento finito en coordenadas glo-

bales formado como:

$$\begin{array}{c}
 u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j \\
 \begin{array}{l}
 u_i \\
 v_i \\
 \theta_i \\
 u_j \\
 v_j \\
 \theta_j
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\
 a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\
 a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}
 \end{bmatrix}
 \end{array} \tag{2.22}$$

y la matriz de masa o rigidez del segundo elemento finito definido como:

$$\begin{array}{c}
 u_j \quad v_j \quad \theta_j \quad u_k \quad v_k \quad \theta_k \\
 \begin{array}{l}
 u_j \\
 v_j \\
 \theta_j \\
 u_k \\
 v_k \\
 \theta_k
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\
 b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\
 b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\
 b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\
 b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\
 b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66}
 \end{bmatrix}
 \end{array} \tag{2.23}$$

Finalmente, el montaje de los dos elementos finitos se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c}
 u_i \\
 v_i \\
 \theta_i \\
 u_j \\
 v_j \\
 \theta_j \\
 u_k \\
 v_k \\
 \theta_k
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 u_i & v_i & \theta_i & & u_j & v_j & \theta_j & u_k & v_k & \theta_k \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} + b_{11} & a_{45} + b_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & \\
 a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} + b_{21} & a_{55} + b_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & \\
 a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} + b_{31} & a_{65} + b_{32} & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & \\
 0 & 0 & 0 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & \\
 0 & 0 & 0 & b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} & \\
 0 & 0 & 0 & b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} &
 \end{bmatrix}
 \quad (2.24)$$

Este proceso de montaje debe ser realizado para todos los elementos de la viga.

2.4. Aplicación de las condiciones de contorno

Los nodos sujetos a condiciones de contorno estructurales como apoyos simples o empotramiento no sufren desplazamientos en los grados de libertad que están bloqueados. Para el caso de una viga *Euler-Bernoulli* empotrada-libre los grados de libertad correspondiente al desplazamiento vertical y rotación del nodo empotrado son nulos y no representan incógnitas del problema. En ese aspecto, las líneas y columnas correspondientes a los grados de libertad nulos deben ser retirados de las matrices de masa y rigidez.

2.5. Matriz de amortiguamiento proporcional

La matriz de amortiguamiento proporcional es muy usado en el análisis modal de sistemas amortecidos debido a su fácil aplicación y análisis. Con la utilización de esta matriz de amortiguamiento los modos de vibración del sistema amortiguado y no amortiguado son los mismos. El amortiguamiento proporcional es definido como:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M} \quad (2.25)$$

donde la matriz \mathbf{C} representa la matriz de amortiguamiento y es proporcional a la matriz de masa \mathbf{M} y rigidez \mathbf{K} a través de los coeficientes α y β . Estos coeficientes proporcionales pueden ser obtenidos a través de correlaciones con los datos experimentales de la estructura [13].

2.6. Modelo de espacio estados

La forma de espacio estados es considerada la mas adecuada desde el punto de vista de control en este caso. Para este propósito, sea la siguiente ecuación de movimiento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (2.26)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento, \mathbf{K} es la matriz de rigidez, \mathbf{f} es el vector de fuerzas externas que actúan en el sistema, \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas y \mathbf{u} es el vector de entrada de control.

Con el fin de transformar la ecuación (2.26) en una forma de primer orden, con-

sidere la siguiente transformación de variable:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

donde \mathbf{x} es usualmente llamado de vector de estados.

A partir de la derivada del vector de estados (2.27) es obtenida la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{H}]\dot{\mathbf{q}} - [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]\mathbf{q} + [\mathbf{M}]^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] & -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{H}] \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\mathbf{M}]^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix}$$

En los problemas de control es interesante analizar el efecto de cada fuerza de entrada individualmente. El vector de fuerzas externas \mathbf{f} puede ser escrito en términos de una base s_i como:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} f_2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} f_n = \sum_i^n s_i f_i \quad (2.28)$$

Para una componente específica i del vector de fuerzas externas, se puede escribir lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} s_i f_i = \mathbf{B} f_i \quad (2.29)$$

De esta expresión se puede definir lo siguiente:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} s_i \quad (2.30)$$

Considerando la Ecuación (2.28), el modelo en espacio estados puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f} \quad (2.31)$$

El vector de salida puede ser representado por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{f} \quad (2.32)$$

2.7. Comentarios finales

Este capítulo mostró algunas características modales relevantes de las estructuras flexibles. Seguidamente fue presentado, la obtención de las matrices de masa y rigidez de una viga *Euler-Bernoulli* en las coordenadas locales y para un sistema de coordenadas globales. Fue mostrado los procedimientos para el montaje de las matrices de masa y rigidez para seguidamente presentar la obtención de la matriz de amortiguamiento proporcional. Finalmente, fue mostrado los pasos para la obtención de los modelos en espacio estados de una estructura flexible. Con este capítulo el modelo de espacio estados de una estructura flexible, y para ser mas específicos de una viga *Euler-Bernoulli*, puede ser obtenido.

Capítulo 3

FUNDAMENTOS DE LOS ALGORITMOS

GENÉTICOS

Este capítulo tiene por objetivo presentar algunas características y modo de trabajo de los algoritmos genéticos. En ese contexto, son mostradas las funciones y operadores básicos necesarios para la implementación de los algoritmos genéticos basados en el entorno del MATLAB. Será mostrada la arquitectura usada para la solución de problemas de optimización no lineal y el interés del uso de los algoritmos genéticos en los problemas de control. Este capítulo es necesario pues permitirá la solución de la síntesis de los controladores de orden reducida que son utilizados en este trabajo.

3.1. Introducción

Los algoritmos genéticos (GA) son una clase de métodos de optimización que son inspirados en procesos biológicos como la selección, herencia, mutación y cruzamiento. Los GA pueden ser usados para resolver problemas de optimización presentando las siguientes ventajas con respecto a otros métodos de búsqueda convencionales [18]:

1. Ellos trabajan con un código para un conjunto de parámetros y no con los valores de los parámetros. Ellos trabajan con las características de los parámetros que pueden ser funciones de adaptación, selección, etc.
2. Ellos no son limitados por restricciones con respecto a continuidad, existencia de derivadas, unimodalidad u otros aspectos.
3. Ellos hacen una búsqueda simultánea sobre una población de puntos y no sobre un único punto.
4. Ellos usan definiciones de transición probabilística y no definiciones determinísticas.

Los GA trabajan simulando el comportamiento de la naturaleza de los individuos. Ellos trabajan con poblaciones de individuos que representan una posible solución para el problema de optimización. Los individuos compiten entre si para producir la próxima población, donde la selección natural depende de cuan buena sea la adaptación del individuo al problema. Los mejores individuos, que tienen los mejores valores de adaptación, son seleccionados y ellos son llamados de *padres*. Estos padres son usados para crear la próxima población formada por hijos élite, hijos cruzamiento e hijos mutación. Las poblaciones son generados hasta que algún criterio de convergencia sea alcanzado.

Una estructura simple de los GA usan tres operadores para crear la próxima generación de la población actual [18]:

1. Selección: Selecciona los padres que contribuyen para la creación de la población de la próxima generación.

2. Cruzamiento: Cruza dos padres para formar los hijos de la próxima generación. La función cruzamiento aumenta la velocidad de convergencia del problema de optimización.
3. Mutación: Aplica alteraciones aleatorias a los padres para formar los hijos. La función mutación genera mayor diversidad a la población aumentando el espacio de búsqueda del GA.

Un diagrama de como los algoritmos genéticos trabajan es mostrado en la Figura 3.1.

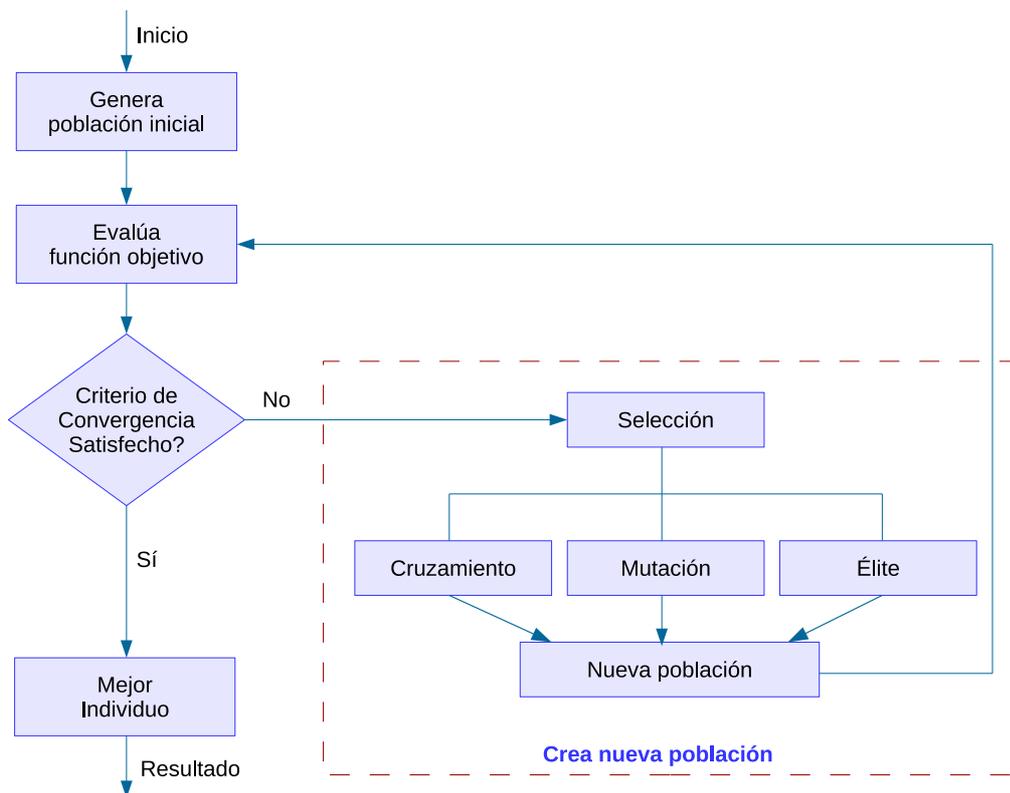


Figura 3.1: Estructura de operación de los GA

La gran ventaja de los GA es su robustez, pudiendo ser utilizado con éxito en una gran variedad de problemas de optimización. Un ejemplo donde los GA tienen ventaja

por su robustez sobre algunos algoritmos de búsqueda convencionales es sobre la función que se muestra en la Figura 3.2. Esta función presenta múltiples soluciones globales, en ese sentido, algunos métodos de optimización basados en gradientes pueden presentar convergencias en puntos de soluciones locales.

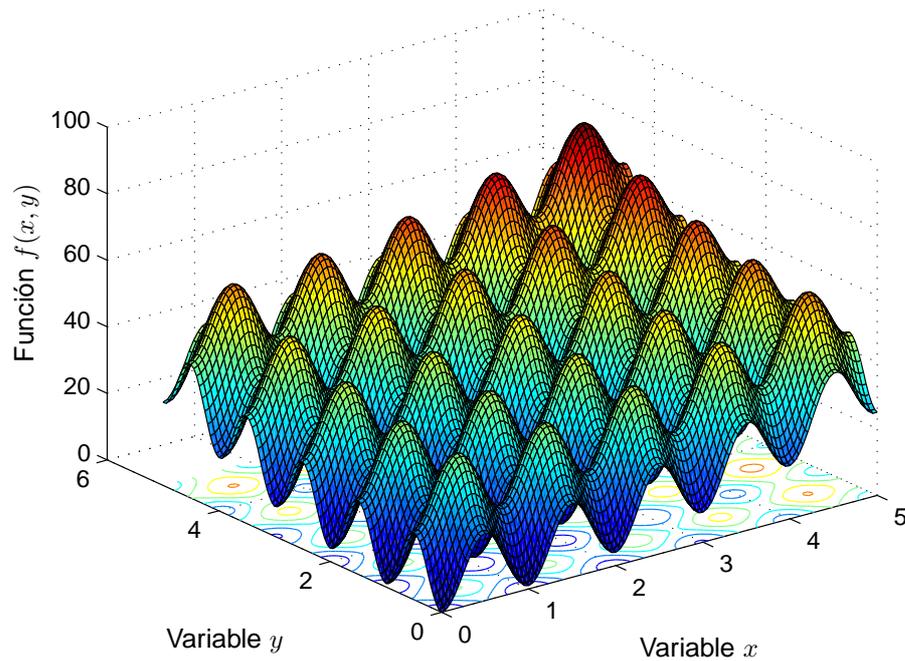


Figura 3.2: Función con múltiples soluciones locales

Los GA no garantizan encontrar la solución global en un problema de optimización, pero ellos pueden encontrar buenas soluciones, cercanas a la solución global, en un tiempo de búsqueda razonable.

Estas características llevan a los GA a ser una herramienta potencialmente útil en el diseño de controladores de orden reducida de este trabajo, una vez que este problema de optimización no-convexo puede ser considerado complejo y difícil de ser resuelto por técnicas convencionales basadas en gradientes.

3.2. Funciones características de los algoritmos genéticos

Este trabajo usa el *toolbox* de los algoritmos genéticos del MATLAB [32] para implementar el algoritmo de solución que minimiza la función objetivo. La función **ga** del MATLAB puede resolver problemas restringidos e irrestringidos, y ofrece opciones de configuración para seleccionar las características del algoritmo, como la población inicial, función selección, función mutación, función cruzamiento, etc.

Las funciones principales que conforman el algoritmo son definidas a seguir.

- **Función selección @selectionstochunif:** Escoge los padres usando un muestreo uniforme estocástica. Esta función crea una línea que es dividida en segmentos de longitud proporcional a los valores de desempeño del individuo en la optimización (valor aptitud). El algoritmo avanza sobre la línea usando pasos de igual tamaño. A cada paso el algoritmo escoge el individuo correspondiente a la sección en que este se sitúa. El primer paso es un número aleatorio uniforme menor que el tamaño del paso padrón.
- **Función de cruzamiento @crossoverscattered:** Es usada para producir los hijos de cruzamiento, que crea un vector binario aleatorio que será asociado a dos individuos (padres) seleccionados para cruzamiento. Estos nuevos individuos, llamados de hijos cruzamiento, reciben los genes del primer padre donde el vector binario es 1 y los genes del segundo padre donde el vector binario es 0. La Figura 3.3 muestra el proceso de la función cruzamiento usada en este trabajo.
- **Función de mutación @mutationgaussian:** Usada para producir los hijos con mutación, esta función realiza una variación en el vector de los padres escogi-

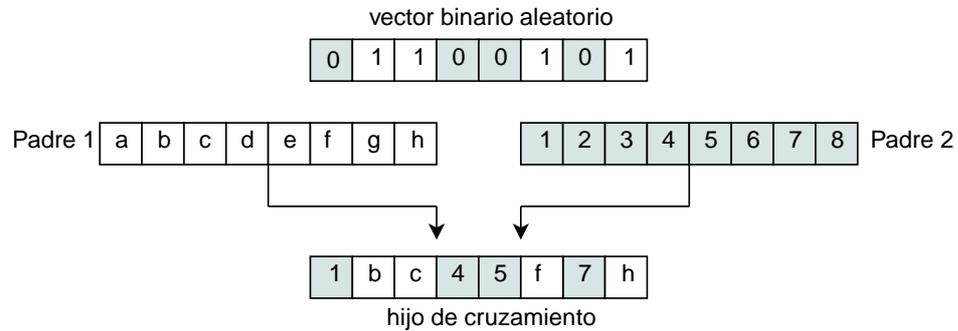


Figura 3.3: Proceso de la función cruzamiento (*@crossoverscattered*).

dos para mutación usando una formulación de distribución *gaussiana*. La formulación de distribución *gaussiana* usada es [11]:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

donde para la función mutación μ es una media de valor 0 y σ es la desviación padrón.

La desviación padrón puede ser definido a través de los parámetros de escala y de encogimiento. El parámetro de escala (*PES*) es responsable por determinar la desviación inicial en la primera generación. Considerando el vector de valores limites (valor mínimo y máximo) de la primera población definido como $v = [v_1 \ v_2]$, la desviación inicial puede ser obtenido como:

$$\sigma_0 = PES.(v_2 - v_1)$$

El parámetro de encogimiento (*PE*) controla la razón con la cual la desviación disminuye. La desviación padrón para las próximas generaciones puede ser cal-

culado como:

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} \left(1 - PE \times \frac{k}{\text{Generaciones}} \right)$$

donde k corresponde a la $k^{\text{ésima}}$ generación.

Al ser escogida la función `@mutationgaussian` como función mutación deben ser especificados juntamente los valores de los parámetros de escala y encogimiento.

- **Hijos élite:** Son los individuos con la mejor adaptación en la poblaciones. Los hijos élite pasan directamente sin modificaciones en los genes. El número de hijos élite considerado en este trabajo es de 2.
- **Criterios de convergencia y parada:** Los GA poseen varios criterios para detener el proceso de búsqueda de la solución factible del problema de optimización. Algunos criterios usados son los siguientes [32] :
 - **Generaciones, *Generations*:** Especifica el máximo número de iteraciones permitidas en el proceso de búsqueda. En este trabajo, el máximo número de generaciones permitidas es de 100.
 - **Límite de tiempo, *TimeLimit*:** Especifica el tiempo máximo en segundos permitido para el proceso de búsqueda del algoritmo antes de abortar. En este trabajo, no es considerado límites de tiempo para el proceso de búsqueda definiéndolo como infinito.
 - **Límite de aptitud, *FitnessLimit*:** El algoritmo se detiene si el mejor valor de aptitud es menor o igual que el valor definido como *FitnessLimit*.
 - **Cambios en generaciones, *StallGenLimit*:** El algoritmo aborta si el cambio promedio de la función aptitud es menor que el valor de la función

tolerancia en un determinado número de generaciones (*StallGenLimit*).

- **Mejoras en un tiempo límite, *StallTimeLimit*:** El algoritmo aborta si no hay mejoras en la función aptitud para un intervalo de tiempo en segundos especificado en el valor de *StallTimeLimit*.
- **Función tolerancia, *TolFun*:** Es el valor que indica que el algoritmo aborta si el cambio en el valor de la función aptitud es menor o igual a dicho valor en un determinado número de generaciones (*StallGenLimit*).
- **Tolerancia en restricciones no lineales, *TolCon*:** Este valor es usado para determinar la factibilidad con respecto a las restricciones no lineales.

Otro aspecto importante en el uso de los GA es la reproducción de los resultados. Los GA es un método estocástico que hace elecciones aleatorias en la creación de cada generación, como en el proceso de selección, cruzamiento y mutación. El *toolbox ga* usa el vector padrón de números pseudo-randómicos del MATLAB para generar la secuencia de números aleatorios [32]. En el caso de que el proyectista desee reproducir algún resultado obtenido, los estados internos del vector padrón, generador de los números aleatorios, deben ser inicializados después de cada ejecución de la función *ga*.

Las funciones explicada previamente caracterizarán el algoritmo de solución para el problema de optimización de la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida.

3.3. Algoritmos genéticos para problemas con restricciones no lineales

Sea el problema de optimización padrón definido como:

$$\text{P: } \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (c_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m) \\ \quad \quad \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \quad (h_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = m + 1, \dots, mt) \\ \quad \quad \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \quad \quad \quad \mathbf{A}_{\text{eq}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_{\text{eq}} \\ \quad \quad \quad \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

donde $f(\mathbf{x})$ es la función objetivo a ser minimizada (función aptitud), $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ representa m restricciones de igualdad no lineales y $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ son restricciones de desigualdad no lineales (mt es el número total de restricciones no lineales).

El *toolbox* de los algoritmos genéticos del MATLAB usa el método Lagrangiano Aumentado para resolver el problema de optimización no-lineal con restricciones lineales, no-lineales y con limitaciones de contorno en las variables. Este método conjunto de los algoritmos genéticos y el Lagrangiano Aumentado es denotado por las siglas ALGA. En este abordaje, las limitaciones de contorno en las variables y las restricciones lineales son tratadas separadamente de las restricciones no-lineales. El problema es formulado de forma que la función Lagrangiana Aumentada es compuesta por la combinación de la función objetivo y la función de restricción no-lineal usando los multiplicadores de Lagrange y los parámetros de penalidad como se muestra a se-

guir [9, 10, 32]:

$$\Phi_c(\mathbf{x}, \lambda, s, \rho) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=m+1}^{mt} \lambda_i s_i \log(s_i - h_i(\mathbf{x})) + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^m c_i^2(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

donde λ_i es el multiplicador de Lagrange, s_i es un valor de la variación no negativo y ρ es el parámetro de penalidad.

La función Lagrangiana Aumentada (3.2) es minimizada utilizando los GA de forma que las restricciones lineales y los límites de contorno sea satisfechas. Si los criterios de convergencia no son alcanzados, los multiplicadores de Lagrange y los parámetros de penalidad deben ser actualizados siguiendo la formulación presentada en [10].

3.4. Interés del uso de los algoritmos genéticos en problemas de control

Los algoritmos genéticos son una herramienta atractiva en problemas de control cuando estos son basados en la solución de problemas de optimización no convexos. Su uso puede evitar largos procedimientos de aproximaciones convexas ofreciendo mayor robustez para encontrar la solución óptima en situaciones donde existen múltiples soluciones locales. Los algoritmos genéticos no garantizan encontrar la solución global del problema de optimización no convexa, mas ellos permiten encontrar soluciones próximas a la solución global en espacios de búsqueda complejos.

Debido a su robustez en algunos casos pueden ser usados para encontrar el punto de partida en problemas de optimización considerados complejos (alta densidad de puntos locales) y complementados con métodos convencionales basados en

gradientes para encontrar la solución global del problema.

Ejemplos en el área de control donde puede verse el uso de los algoritmos genéticos son en la síntesis de controladores de orden reducida [7], formulaciones basadas en ecuaciones de *Riccati* [14], formulaciones complejas con incertidumbres politópicas [29], controladores PID [19], entre otros. El uso de los algoritmos genéticos permite, dentro del problema de control, formular problemas de optimización incluyendo de forma simple restricciones lineales y no lineales para caracterizar el comportamiento del controlador de una forma deseada tanto en el dominio del tiempo como en la frecuencia. En este trabajo, estas características convierten a los algoritmos genéticos en una opción atractiva para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida.

3.5. Comentarios finales

Este capítulo mostró el funcionamiento, las características, ventajas y desventajas de los algoritmos genéticos. Fueron detallados los conceptos necesarios para la implementación y utilización de los algoritmos genéticos basados en el entorno del MATLAB. Fueron mostradas las funciones principales (selección, cruzamiento, mutación, etc) y criterios de convergencia y parada para la implementación del algoritmo de solución de la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida. Seguidamente fueron presentadas las características de operación de los GA para la solución de problemas no lineales/no convexos. Finalmente, fue explicado el potencial de los algoritmos genéticos para el problema de control de orden reducida mencionando algunos ejemplos existentes en la literatura donde los GA fueron aplicados con éxito.

Capítulo 4

SÍNTESIS DE CONTROLADORES \mathcal{H}_∞ POR REALIMENTACIÓN DE SALIDA

Este Capítulo contiene una breve introducción al problema \mathcal{H}_∞ presentando algunas características de la síntesis del problema \mathcal{H}_∞ . En esta introducción es mencionada algunos abordajes mas usados para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ y es presentada la formulación matemática de la norma \mathcal{H}_∞ . Seguidamente, es presentada la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ por realimentación de salida, donde es mostrado el problema de optimización \mathcal{H}_∞ óptimo para la obtención de controladores dinámicos \mathcal{H}_∞ . A continuación, son mostrados los conceptos de funciones de ponderación, donde es explicado la importancia de la inclusión de las funciones de ponderación en la síntesis del problema \mathcal{H}_∞ . Sobre ese foco, son mostrados las formulaciones matemáticas de las funciones de ponderación usadas y el problema de optimización para la obtención de controladores \mathcal{H}_∞ considerando las informaciones de las funciones de ponderación. Finalmente, es mostrado la síntesis de controladores de orden completa usando LMI.

4.1. Introducción al control \mathcal{H}_∞

La síntesis del problema \mathcal{H}_∞ estándar conlleva a la obtención de controladores con el mismo orden que la planta. Estos controladores son conocidos como controladores de orden completa. En el caso del control activo de estructuras flexibles puede ser usado un modelo reducido de la planta, pues son modelos en general de orden alta. Esto implicaría en el uso de funciones de ponderación para evitar posibles problemas de inestabilidad del sistema controlado.

Formulado por primera vez por Zames en [46] la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ puede ser tratada como un problema de optimización en el dominio de la frecuencia. La síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ busca minimizar el mayor pico de respuesta en frecuencia de la planta y puede ser utilizado cuando los niveles de desempeño y estabilidad con respecto a perturbaciones externas deben ser garantizados [43].

Métodos para resolver el problema de controladores \mathcal{H}_∞ fueron desarrollados en las últimas décadas, por ejemplo, los métodos basados en desigualdades matriciales lineales (LMI), lo cual convierte la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ de orden completa en un problema de optimización convexa [4].

Otro abordaje usado para la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ es el trabajo propuesto por Gahinet y Apkarian en [16], donde la síntesis de control \mathcal{H}_∞ es escrito como un problema de optimización con restricciones en la forma de LMIs usando el *Lema de la Proyección* y el *Lema del Límite Real*. Otro trabajo basado en LMIs es el propuesto por Scherer en [41], donde son realizadas transformaciones de variables y de congruencias en la síntesis del problema conjunto \mathcal{H}_∞ y \mathcal{H}_2 .

4.1.1. Norma \mathcal{H}_∞

La síntesis \mathcal{H}_∞ consiste en reducir la norma infinito de la función de transferencia de la salida de desempeño con respecto a las entradas externas, lo que representa en la minimización del mayor pico de respuesta en frecuencia del sistema en lazo cerrado. En el caso de sistemas multivariables (MIMO), la respuesta en frecuencia se refiere al diagrama de valores singulares, y en el caso de sistemas de una única entrada y única salida (SISO) se refiere al diagrama de Bode [43, 47].

La norma \mathcal{H}_∞ de la función de transferencia $G(s)$ (SISO) puede ser calculada en el dominio de la frecuencia como [47]:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|$$

e la norma \mathcal{H}_∞ de la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$ (MIMO) es calculada como [47]:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega))$$

donde s representa la variable en el dominio de Laplace, j representa la unidad imaginaria, ω es la variable de la frecuencia, $\sigma(\mathbf{G}(j\omega))$ es el valor singular de la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$, y $\sup_\omega(\cdot)$ representa el correspondiente valor supremo. $\sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega))$ es definido como [43]:

$$\sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega)) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega))}$$

donde $\lambda_{max}(\cdot)$ representa el máximo autovalor y \mathbf{G}^* es la transpuesta conjugada de la matriz \mathbf{G} .

4.2. Controlador \mathcal{H}_∞ por realimentación de salida

Considere la planta lineal de orden n con un número de entradas exógenas n_w , número de entradas de control n_u , número de salidas de desempeño n_z y número de salidas medidas n_y , dada como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \quad (4.3)$$

con $\mathbf{D}_{22} = 0$ sin pérdida de generalidad desde que los resultados pueden ser extendidos para el caso general [37]. $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{w} \in \mathfrak{R}^{n_w}$ es el vector de entradas exógenas, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^{n_z}$ es el vector de la salida de desempeño, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^{n_u}$ es el vector de entrada de control y $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^{n_y}$ es el vector de las salidas medidas. La matriz de transferencia de \mathbf{w} para \mathbf{z} del modelo de la planta mostrado en las Ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) es definido como:

$$\mathbf{P}_{zw}(s) = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}$$

donde \mathbf{I} representa la matriz identidad.

Considere el controlador dinámico lineal de orden n dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y} \quad (4.5)$$

y la correspondiente función de transferencia

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c$$

Así, la señal de control por realimentación de salida es dado como:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(s)$$

Del modelo en espacio estados de la planta, Ecuaciones (4.1),(4.2) y (4.3), y del controlador, Ecuaciones (4.4) y (4.5), el sistema en lazo cerrado de w para z puede ser representado, según el esquema presentado en la Figura 4.1, como:

$$\dot{\mathbf{x}}_{cl} = \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{B}_{cl}w \quad (4.6)$$

$$z = \mathbf{C}_{cl}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}w \quad (4.7)$$

donde:

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{cl} = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c], \quad \mathbf{D}_{cl} = [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21}]$$

con $\dot{\mathbf{x}}_{cl} = [\dot{\mathbf{x}}^T \quad \dot{\mathbf{x}}_c^T]^T$, y T representa transposición.

La matriz de transferencia en lazo cerrado de w para z es definida como:

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{C}_{cl}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1}\mathbf{B}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}$$

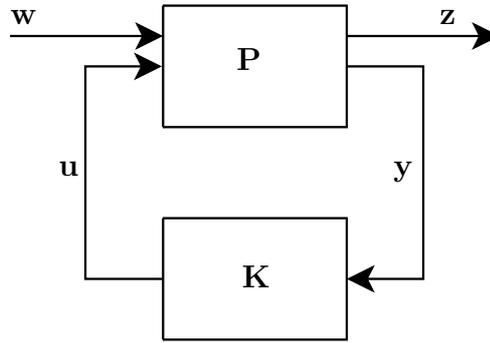


Figura 4.1: Representación del problema \mathcal{H}_∞

El control \mathcal{H}_∞ óptimo busca encontrar un controlador $\mathbf{K}(s)$ (que estabilice el sistema) de forma que $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$ sea minimizada [47], i.e., busca minimizar, tanto cuanto sea posible, el pico de respuesta en frecuencia entre la entrada exógena w y la salida de desempeño z .

El diseño de control \mathcal{H}_∞ sub-óptimo [47] busca encontrar un controlador $\mathbf{K}(s)$ que estabilice el sistema, se existe alguno, de forma que, para un escalar $\gamma \in \mathfrak{R}$,

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (4.8)$$

donde $\gamma > 0$.

En busca del controlador óptimo $\mathbf{K}(s)$, γ es minimizado hasta que la condición de la Ecuación (4.8) no sea satisfecha o un lazo cerrado no estable sea obtenido. O sea, el controlador $\mathbf{K}(s)$ es óptimo si el siguiente problema de optimización es resuelto para $\gamma > 0$ [47]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{K}(s)} \quad & \gamma \\ \text{sujeto a} \quad & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma \end{aligned} \quad (4.9)$$

con $\mathbf{T}_{zw}(s)$ estable.

Este problema de optimización es frecuentemente usado para obtener el contro-

lador de orden completa (controlador con el mismo orden que la planta). Eso puede ser resuelto usando las formulaciones basadas en ecuaciones de *Riccati* o abordajes por LMI [4, 43].

4.3. Funciones de ponderación

4.3.1. Introducción

Las funciones de ponderación, también llamadas de filtros de ponderación, tienen como objetivo imponer pesos para ciertas regiones de frecuencias para las señales de entrada o salida del sistema durante la fase de diseño del controlador.

Cuando colocadas en la entrada de la planta, las funciones de ponderación garantizan una composición espectral específica, disminuyendo el conservadurismo del proyecto, pues la información sobre el comportamiento en frecuencia de las entradas pasa a ser considerado en el proceso de diseño del controlador.

Las funciones de ponderación aplicadas en la salida de la planta tienen como objetivo que el sistema en lazo cerrado presente un comportamiento predeterminado, osea, hace que la función de transferencia de la salida de desempeño con respecto a la entrada exógena tenga una composición espectral definida.

La aplicación de las funciones de ponderación en la entrada y en la salida de la planta en el diseño \mathcal{H}_∞ tiene la ventaja de priorizar y ponderar la minimización de las salidas de desempeño con respecto a las entradas exógenas, convirtiéndose en una herramienta importante en el caso de las estructuras flexibles, donde el modelo matemático es obtenido comúnmente a través del truncamiento de su composición espectral. La utilización de funciones de ponderación busca que los modos desconsiderados en el modelamiento no sean excitados, lo que se conoce como el fenómeno

de *Spillover* de control [2, 33]. Resáltase que las funciones de ponderación deben ser consideradas únicamente en el proceso de síntesis del controlador, mas no son implementados físicamente, pues son apenas una forma de caracterizar el comportamiento espectral del controlador en una región deseada.

4.3.2. Selección de las funciones de ponderación

La selección de las funciones ponderadoras para un problema específico requiere un buen ajuste. En este trabajo son usadas funciones de ponderación con las siguientes características en el dominio de Laplace [47]:

- Filtro pasa baja \mathbf{W}_p : utilizado en la salida de la planta para priorizar la minimización de la señal de desempeño en la baja frecuencia, puede ser caracterizado como:

$$\mathbf{W}_p = A \times \left(\frac{s / \sqrt[k]{M_p} + w_c}{s + w_c \sqrt[k]{\epsilon_p}} \right)^k \quad (4.10)$$

- Filtro pasa alta \mathbf{W}_u : utilizado en la entrada de control de la planta para priorizar la minimización de la señal de control en la alta frecuencia (para evitar el fenómeno de *spillover*), puede ser caracterizado como:

$$\mathbf{W}_u = A \times \left(\frac{s + w_c / \sqrt[k]{M_u}}{\sqrt[k]{\epsilon_u} s + w_c} \right)^k \quad (4.11)$$

donde M_p y M_u representan las ganancias de paso, ϵ_p y ϵ_u representan las ganancias de atenuación, w_c la frecuencia de cruzamiento para una ganancia unitaria, A es la amplitud del filtro y k la orden del filtro. La Figura 4.2 muestra estas especificaciones para el caso de un filtro pasa baja.

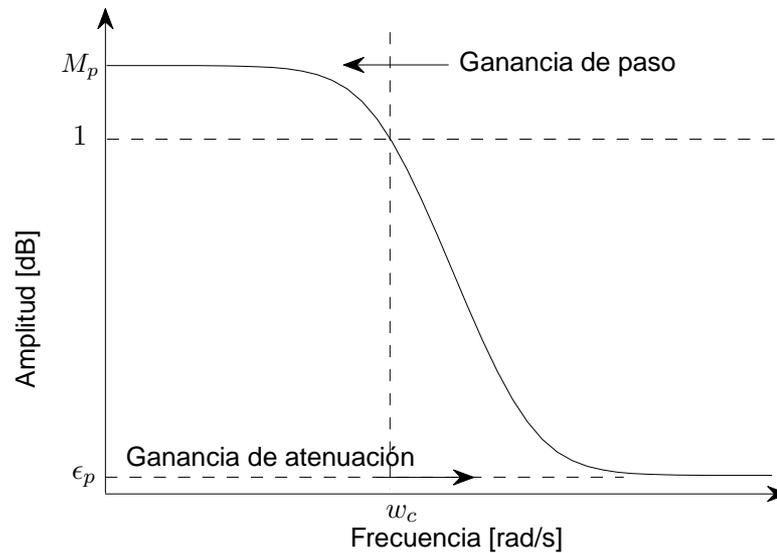


Figura 4.2: Características del filtro pasa baja como función de ponderación.

La elección de las especificaciones de cada función de ponderación depende de las características de la planta. Estas características dependen de las regiones de frecuencia de interés para la atenuación de la perturbación y de las ganancias de cada filtro para la ponderación de cada una de las salidas de desempeño (ver Figura 4.3). Para el caso ilustrado en la Figura 4.3, el filtro W_p asegura una ponderación grande en la región de baja frecuencia, buscando una atenuación de las amplitudes en esta región. El filtro W_u tiene una ganancia pequeña en la baja frecuencia, permitiendo que el esfuerzo de control sea mayor, pues este es considerado usualmente uno de las señales de desempeño del problema de optimización, y tiene una ponderación grande en la región de alta frecuencia, donde la señal de control debe ser pequeño para no excitar los modos de mayor frecuencia. En la siguiente sección, es explicado con mayor detalle como las funciones de ponderación son consideradas en la síntesis del controlador.

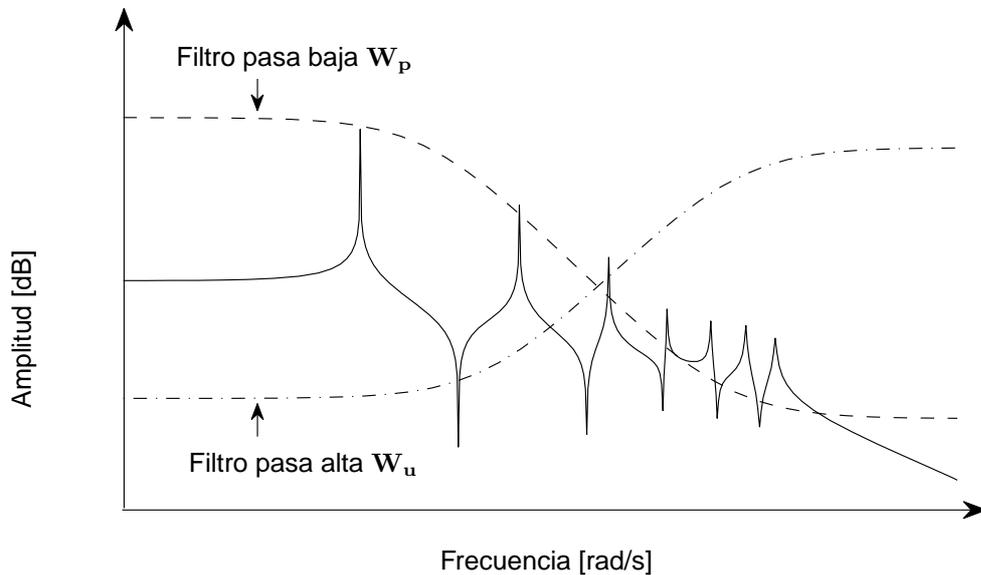


Figura 4.3: Sistema sin control y filtros de ponderación

4.3.3. Modelo de estados del sistema con filtros de ponderación

Son incluidos en el proceso de diseño \mathcal{H}_∞ filtros de ponderación, como se muestra en la Figura 4.4.

Los filtros de ponderación mostrados en la Figura 4.4 presentan las siguientes especificaciones:

- W_p : Filtro que especifica una ganancia alta en la región de frecuencia de interés (generalmente baja frecuencia para el caso de estructuras flexibles) para la atenuación de vibraciones del sistema. Es generalmente un filtro pasa baja cuyo objetivo es la minimización de los efectos de las señales de perturbación en la región de frecuencia en que se desea atenuar la vibración, lo que significa una mayor ponderación para el control de las salidas de desempeño en la región;
- W_u : Filtro que especifica una ganancia alta para el esfuerzo de control fuera de la región donde se desea controlar. Es generalmente un filtro pasa alta cuyo

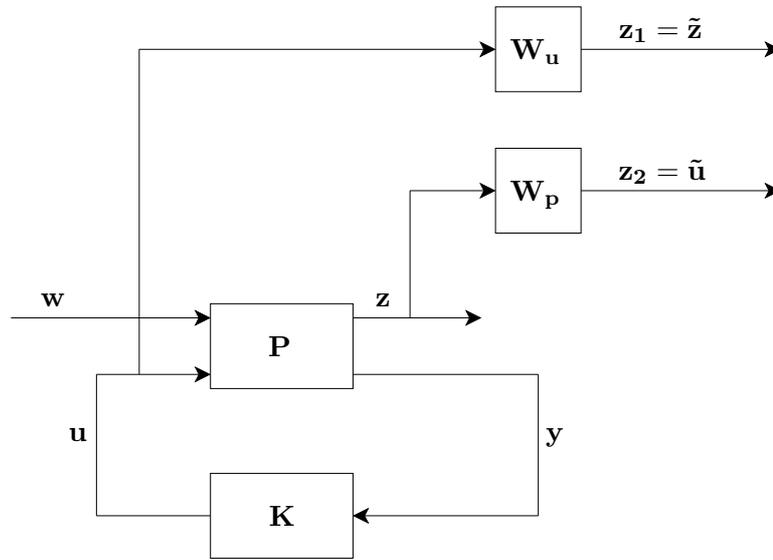


Figura 4.4: Diagrama del sistema aumentado, W_u y W_p son los filtros de ponderación, P es la planta y K el controlador.

objetivo es la eliminación de la señal de control en la región de frecuencia donde no se desea excitación por el controlador evitando el fenómeno de *Spillover* de control.

Considerando esta información se presenta a continuación los modelos de espacio estado de cada bloque como sigue:

- Modelo de espacio estados del sistema en lazo abierto P :

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (4.12)$$

$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \quad (4.13)$$

$$\tilde{y} = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \quad (4.14)$$

donde w es la señal de perturbación.

- Modelo de espacio estados del filtro W_p :

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{z} \quad (4.15)$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{D}_p \mathbf{z} \quad (4.16)$$

- Modelo de espacio estados del filtro W_u :

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \mathbf{u} \quad (4.17)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{D}_u \mathbf{u} \quad (4.18)$$

Del modelo de estados de P , W_p y W_u se obtiene el sistema en lazo abierto aumentado en la forma adecuada al diseño \mathcal{H}_∞ como se muestra:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_u \\ \dot{\mathbf{x}}_p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_p \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_a} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_p \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{a1}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_p \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{a2}} \mathbf{u} \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{a1}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a11}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a12}} \mathbf{u} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{a2}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a21}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a22}} \mathbf{u} \quad (4.21)$$

donde $\tilde{\mathbf{z}}$ y $\tilde{\mathbf{u}}$ son las componentes del nuevo vector de desempeño aumentado. La señal $\tilde{\mathbf{z}}$ es la señal de la salida del sistema en lazo abierto después de pasar por el

filtro pasa baja para priorizar la reducción de los efectos de la perturbación w sobre la señal de salida z en la baja frecuencia. \tilde{u} es la señal en la entrada del sistema en lazo abierto después de pasar por el filtro pasa alta y es incluido en el vector de desempeño para evitar el fenómeno de *Spillover* de control (eliminar los componentes de la señal de control en la alta frecuencia).

Del sistema en lazo abierto presentado en (4.19), (4.20) y (4.21), se tiene el problema de optimización usado para la obtención de los controladores como es presentado a seguir.

4.3.4. Problema de optimización para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞

Reescribiendo las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.21) y considerando el vector de estados aumentado $x_a = [x \ x_u \ x_p]^T$ y el vector de desempeño aumentado $z_a = [\tilde{z} \ \tilde{u}]^T$ se tiene

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_{a1} w + B_{a2} u \quad (4.22)$$

$$z_a = C_{a1} x_a + D_{a11} w + D_{a12} u \quad (4.23)$$

$$y = C_{a2} x_a + D_{a21} w \quad (4.24)$$

Con el controlador lineal K por realimentación de salida presentado en las Ecuaciones (4.4) y (4.5) y el sistema aumentado presentado en las Ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24), considerando $D_{a22} = D_{22} = 0$ sin pérdida de generalidad, pues las matrices del controlador pueden ser reajustadas cuando la matriz $D_{a22} \neq 0$ conforme mostrado en [6, 37], el sistema en lazo cerrado puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_{a2}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_{a2} & \mathbf{B}_{a2}\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_{a2} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a1} + \mathbf{B}_{a2}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{a21} \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} w \quad (4.25)$$

$$z_a = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a1} + \mathbf{D}_{a21}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_{a1} & \mathbf{D}_{a12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{a11} + \mathbf{D}_{a12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} w \quad (4.26)$$

Con esto, las matrices en lazo cerrado del sistema (4.25) y (4.26) pueden ser reescritas como,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_{a2}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_{a2} & \mathbf{B}_{a2}\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_{a2} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a1} + \mathbf{B}_{a2}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{a21} \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a1} + \mathbf{D}_{a21}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_{a1} & \mathbf{D}_{a12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{a11} + \mathbf{D}_{a12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con la matriz de transferencia definida como:

$$\mathbf{T}_{z_a w}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}} \quad (4.27)$$

Esta matriz de transferencia (4.27) es usada en el problema (4.9) de la siguiente forma:

Encontrar un controlador $\mathbf{K}(s)$, para $\gamma > 0$, de forma que

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{sujeto a} \quad & \|\mathbf{T}_{zaw}\|_{\infty} < \gamma \end{aligned} \tag{4.28}$$

con $\mathbf{T}_{zw}(s)$ estable.

La solución de este problema de optimización permite obtener el controlador \mathcal{H}_{∞} de orden completa considerando las características en frecuencia impuestas por las funciones de ponderación, osea, el controlador obtenido buscará minimizar los efectos de las entradas de perturbación en la baja frecuencia sin presentar componentes espectrales en alta frecuencia en la salida del controlador.

4.4. Desigualdades matriciales lineales para el diseño de controladores \mathcal{H}_{∞} de orden completa

Los problemas de optimización presentados en (4.9) y (4.28) (problemas con similar característica de solución) usados para el diseño de controladores de orden completa pueden ser solucionado usando una herramienta matemática conocida como desigualdades matriciales lineales (LMI) del inglés *Linear Matrix Inequalities*. En esta sección se mostrará la transformación del problema de optimización presentado en (4.9) en un problema de optimización convexa con restricciones en la forma de LMI. En ese contexto, será presentado una breve explicación sobre las LMI a seguir.

4.4.1. Breve reseña sobre las LMI

La primera presentación de las desigualdades matriciales lineales de sistemas dinámicos fue realizada por Lyapunov en 1890 para definir lo que se conoce como

la teoría de Lyapunov. Él demostró que la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es estable si y solamente si existe una matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ de modo que para $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ se tiene

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (4.29)$$

El desarrollo de las LMIs como herramienta para problemas en ingeniería de control tuvo todo un proceso de estudio y búsqueda de técnicas de solución. Por cerca de 1940 Lur'e, Postnikov, junto con otros investigadores aplicaron por primera vez los métodos de Lyapunov para problemas de estabilidad, obteniendo LMIs que fueron resueltas analíticamente, con una gran limitación para sistemas de orden mayor. Para tratar esa limitación, en 1960 Yakubovich, Popov y Kalman, usando lo que se conoce como el *Lema Real Positivo*, propusieron soluciones gráficas, lo que derivó en el famoso criterio de Popov. Posteriormente en torno de 1970 se descubrió que las LMIs presentadas en el *Lema Real Positivo*, podían también, ser resueltas por ciertas ecuaciones de Ricatti (ARE). A partir de eso, las LMIs derivadas de la teoría de control pasaron a ser tratadas como problemas de optimización convexa [4]. En la actualidad, existen programas computacionales especializados en la solución de problemas de optimización basadas en LMIs [40, 44].

4.4.2. Definición de LMI

Una desigualdad matricial lineal es una restricción convexa de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{x}_n \mathbf{F}_n > \mathbf{0} \quad (4.30)$$

donde, el conjunto

$$\{\mathbf{x} : \mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}\} \quad (4.31)$$

es un conjunto convexo. En este caso, $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^n$ son las variables de optimización, $\mathbf{F}_i \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ son matrices simétricas conocidas. Note que si $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ significa que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ debe ser definida positiva para todo \mathbf{x} , osea, $\mathbf{p}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{p} > \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Si un problema de control puede ser formulado en la forma de LMIs y generar un problema de optimización convexa, se garantiza encontrar una solución si existiera alguna.

4.4.3. Lema del Limite Real

El *Lema del Limite Real* (ver [42, 47]) es importante en el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ pues permite convertir el problema de minimización de la norma \mathcal{H}_∞ en un problema de optimización convexa en la forma de LMIs. Para la presentación del lema se define el siguiente sistema padrón lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w} \quad (4.33)$$

La matriz de transferencia entre la entrada y la salida es definida como:

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{z}(s)}{\mathbf{w}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

El *Lema del Limite Real* es definido como sigue:

Lema. La desigualdad $\|\mathbf{T}(s)\|_\infty < \gamma$ es satisfecha si y solamente si existiese una matriz simétrica $\mathbf{\Gamma}$ de modo que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.34)$$

Este Lema puede ser probado como descrito a seguir.

Es posible escribir, de la definición de norma \mathcal{H}_∞ , que

$$\|\mathbf{T}(s)\|_\infty^2 = \lambda_{max}(\mathbf{T}^*(j\omega)\mathbf{T}(j\omega))$$

o aún,

$$\|\mathbf{T}(s)\|_\infty^2 = \max \frac{\mathbf{w}^*(j\omega)\mathbf{T}^*(j\omega)\mathbf{T}(j\omega)\mathbf{w}(j\omega)}{\mathbf{w}(j\omega)^*\mathbf{w}(j\omega)} = \max \frac{\mathbf{z}^*(j\omega)\mathbf{z}(j\omega)}{\mathbf{w}(j\omega)^*\mathbf{w}(j\omega)} \geq \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2}$$

Recordando que $\|\mathbf{T}(s)\|_\infty < \gamma$ y usando la definición de norma \mathcal{L}_2 (ver Apéndice A). Luego,

$$\frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} < \gamma^2 \Rightarrow \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) < 0 \quad (4.35)$$

Del criterio de estabilidad de Lyapunov (ver Apéndice A) se escribe que

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} < 0 \quad (4.36)$$

Combinando (4.35) y (4.36) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} < 0 \quad (4.37)$$

Substituyendo las Ecuaciones (4.32) y (4.33) en (4.37) se tiene

$$(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bw})^T \mathbf{Qx} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bw}) + (\mathbf{Cx} + \mathbf{Dw})^T (\mathbf{Cx} + \mathbf{Dw}) - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} < \mathbf{0}$$

que puede ser escrita matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{QA} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{QB} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & -\gamma^2 \mathbf{I} + \mathbf{D}^T \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Y que lleva a la siguiente condición matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{QA} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{QB} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & -\gamma^2 \mathbf{I} + \mathbf{D}^T \mathbf{D} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

o también

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{QA} & \mathbf{QB} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}] < \mathbf{0} \quad (4.38)$$

Multiplicando (4.38) por γ^{-1} se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \mathbf{QA} & \gamma^{-1} \mathbf{QB} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \gamma^{-1} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \gamma^{-1} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}] < \mathbf{0} \quad (4.39)$$

Substituyendo $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Q} \gamma^{-1}$ y aplicando el complemento de Schur en (4.39) se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.40)$$

para mas detalle con el uso de complemento de Schur ver Apéndice A.

4.4.4. Controlador \mathcal{H}_∞ por realimentación de salida via LMI

En esta sección es formulado el problema de minimizar la norma \mathcal{H}_∞ sujeto a restricciones en la forma de LMI para la planta **P** presentado en las Ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) usando un controlador dinámico de orden completa por realimentación de salida.

Para efectos de un mejor entendimiento se escribe nuevamente las ecuaciones de la planta **P** como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \quad (4.43)$$

Y el controlador lineal dinámico **K** dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y} \quad (4.45)$$

Con base en el sistema de la Figura 4.1 es posible obtener el sistema controlado conforme sigue.

Substituyendo (4.43) en (4.45) se tiene

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c(\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u})$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}_c\mathbf{D}_{22})\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}$$

y aislando u se tiene

$$u = (I - D_c D_{22})^{-1} C_c x_c + (I - D_c D_{22})^{-1} D_c C_2 x + (I - D_c D_{22})^{-1} D_c D_{21} w$$

$$u = N C_c x_c + N D_c C_2 x + N D_c D_{21} w \quad (4.46)$$

con $N = (I - D_c D_{22})^{-1}$.

Substituyendo (4.46) en la Ecuación (4.41) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B_1 w + B_2 (N C_c x_c + N D_c C_2 x + N D_c D_{21} w) \\ &= (A + B_2 N D_c C_2) x + B_2 N C_c x_c + (B_1 + B_2 N D_c D_{21}) w \end{aligned} \quad (4.47)$$

De la misma forma la Ecuación (4.42) puede ser reescrita como:

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} (N C_c x_c + N D_c C_2 x + N D_c D_{21} w)$$

o también

$$z = (C_1 + D_{12} N D_c C_2) x + D_{12} N C_c x_c + (D_{11} + D_{12} N D_c D_{21}) w \quad (4.48)$$

Substituyendo (4.43) y (4.46) en (4.44) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c (C_2 x + D_{21} w + D_{22} u) \\ \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c C_2 x + B_c D_{21} w + B_c D_{22} (N C_c x_c + N D_c C_2 x + N D_c D_{21} w) \\ \dot{x}_c &= (B_c C_2 + B_c D_{22} N D_c C_2) x + (A_c + B_c D_{22} N C_c) x_c + \dots \\ &\dots + (B_c D_{21} + B_c D_{22} N D_c D_{21}) w \end{aligned} \quad (4.49)$$

Las Ecuaciones (4.47), (4.48) y (4.49) pueden ser agrupadas matricialmente, caracterizando la representación general del sistema controlado, o sistema en lazo cerrado, como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 N D_c C_2 & B_2 N C_c \\ B_c C_2 + B_c D_{22} N D_c C_2 & A_c + B_c D_{22} N C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 N D_c D_{21} \\ B_c D_{21} + B_c D_{22} N D_c D_{21} \end{bmatrix} w$$

$$z = [C_1 + D_{12} N D_c C_2 \quad D_{12} N C_c] \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + [D_{11} + D_{12} N D_c D_{21}] w$$
(4.50)

Finalmente, las matrices del sistema en lazo cerrado son:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + B_2 N D_c C_2 & B_2 N C_c \\ B_c C_2 + B_c D_{22} N D_c C_2 & A_c + B_c D_{22} N C_c \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 N D_c D_{21} \\ B_c D_{21} + B_c D_{22} N D_c D_{21} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\tilde{C} = [C_1 + D_{12} N D_c C_2 \quad D_{12} N C_c] \quad (4.53)$$

$$\tilde{D} = D_{11} + D_{12} N D_c D_{21} \quad (4.54)$$

4.4.5. Adaptación de las matrices del controlador para el caso $D_{22} = 0$

Es mas simple matemáticamente y computacionalmente diseñar el controlador con $D_{22} = 0$ y después corregirlo para el caso de $D_{22} \neq 0$.

Sea el sistema en lazo cerrado considerando $D_{22} = 0$ como se muestra:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix} w \quad (4.55)$$

$$z = [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c] \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + [D_{11} + D_{12} D_c D_{21}] w \quad (4.56)$$

con las matrices en lazo cerrado descritas como:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\tilde{C} = [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c] \quad (4.59)$$

$$\tilde{D} = D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \quad (4.60)$$

Es posible hacer un reajuste del controlador diseñado, para casos $D_{22} \neq 0$, conforme descrito a seguir.

Considere el sistema \hat{P} dado por

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (4.61)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (4.62)$$

$$\hat{y} = C_2 x + D_{21} w \quad (4.63)$$

Considere el controlador $\hat{\mathbf{K}}$ correspondiente al caso $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \hat{\mathbf{y}} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c \hat{\mathbf{y}} \quad (4.65)$$

Comparando el sistema \mathbf{P} con el sistema $\hat{\mathbf{P}}$ se verifica que

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}$$

o también

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{D}_{22} \mathbf{u} \quad (4.66)$$

Substituyendo la Ecuación (4.66) en (4.64) y (4.65) del controlador se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c (\mathbf{y} - \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}) \quad (4.67)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c (\mathbf{y} - \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}) \quad (4.68)$$

Aislando \mathbf{u} en la Ecuación (4.68) se tiene

$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22}) \mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{y}$$

o aún

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{y} \quad (4.69)$$

Substituyendo (4.69) en la Ecuación (4.67) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c &= \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{y} - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}}_c &= \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{y} - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} [(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{y}] \\ \dot{\mathbf{x}}_c &= [\hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c] \mathbf{x}_c + [\hat{\mathbf{B}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c] \mathbf{y} \quad (4.70)\end{aligned}$$

Consecuentemente, las matrices de estado del controlador para el caso de $\mathbf{D}_{22} \neq 0$, en función de las matrices del controlador $\hat{\mathbf{K}}$, pueden ser escritas de (4.69) y (4.70) como:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c &= \hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c \\ \mathbf{B}_c &= \hat{\mathbf{B}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{C}_c &= (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c \\ \mathbf{D}_c &= (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c\end{aligned}$$

Es considerado en este trabajo, para efectos de solución del problema de optimización (4.9), que la matriz $\mathbf{D}_c = 0$. Esto corresponde al caso de controladores propios. Por lo tanto, las matrices del controlador para este caso son:

$$\mathbf{A}_c = \hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} \hat{\mathbf{C}}_c \quad (4.71)$$

$$\mathbf{B}_c = \hat{\mathbf{B}}_c \quad (4.72)$$

$$\mathbf{C}_c = \hat{\mathbf{C}}_c \quad (4.73)$$

$$\mathbf{D}_c = 0 \quad (4.74)$$

4.4.6. Problema de Control \mathcal{H}_∞

Sea un sistema controlado (lazo cerrado) descrito por la siguiente ecuación:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{w} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{w} \quad (4.76)$$

donde las matrices $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ y $\tilde{\mathbf{D}}$ dependen de las matrices de la planta y de las matrices del controlador, como fue mostrado en la sección anterior.

El problema de control \mathcal{H}_∞ consiste en determinar el controlador que minimiza la norma \mathcal{H}_∞ del sistema en lazo cerrado, osea, el controlador \mathbf{K} que resuelve el problema de optimización presentado en (4.9) (sin filtros de ponderación) o (4.28) (con filtros de ponderación). Usando el *Lema del Limite Real* y con auxilio del complemento de Schur, el problema de optimización es descrito como:

$$\begin{aligned} & \min \quad \mu \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ & \tilde{\mathbf{P}} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.77)$$

El problema de optimización (4.77) presenta términos no lineales en su formulación, como es el caso del término $\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}$, haciendo imposible el uso de las LMIs. Aunque, este problema puede ser linealizado usando transformaciones de variables para eliminar los términos no lineales, como es detallado a seguir.

La matriz $\tilde{\mathbf{P}}$ simétrica puede ser escrita como:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}$$

donde las matrices \mathbf{X} , \mathbf{Y} , $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ son simétricas.

Se verifica lo siguiente:

$$\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{XY} + \mathbf{U}^T\mathbf{V} & \mathbf{XV}^T + \mathbf{U}^T\hat{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{UY} + \hat{\mathbf{X}}\mathbf{V} & \mathbf{UV}^T + \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{-1}\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{YX} + \mathbf{V}^T\mathbf{U} & \mathbf{YU}^T + \mathbf{V}^T\hat{\mathbf{X}} \\ \mathbf{VX} + \hat{\mathbf{Y}}\mathbf{U} & \mathbf{VU}^T + \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Se define la matriz de transformación Ξ dada por

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Es posible aplicar la siguiente transformación de congruencia (ver Apéndice A) en la matriz $\tilde{\mathbf{P}}$, es decir,

$$\tilde{\mathbf{P}} > \mathbf{0} \Rightarrow \Xi^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi > \mathbf{0}$$

y substituyendo los valores de las respectivas matrices se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.78)$$

Realizando una transformación de congruencia en la restricción (4.77) del problema \mathcal{H}_∞ se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Xi^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

llegando a la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} \Xi^T (\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}}) \Xi & \Xi^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \Xi^T \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} \Xi & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.79)$$

Los términos de la desigualdad (4.79) pueden ser reescritos a través de variables auxiliares para eliminar aquellas que causan no linealidades. Para este fin son usadas las matrices en lazo cerrado mostradas en (4.57), (4.58), (4.59) y (4.60). Los términos son reescritos conforme se presenta a seguir.

1. Término $\tilde{\mathbf{C}} \Xi$

$$\tilde{\mathbf{C}} \Xi = [(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \mathbf{V} \quad \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2]$$

$$\tilde{\mathbf{C}} \Xi = [\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} \quad \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2]$$

con

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{C}_c \mathbf{V}, \quad \text{o también} \quad \mathbf{C}_c = (\mathbf{F} - \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}) \mathbf{V}^{-1} \quad (4.80)$$

2. Término $\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi$

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi = [\mathbf{B}_1^T + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_2^T \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T (\mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{X} + \mathbf{B}_c^T \mathbf{U})]$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\boldsymbol{\Xi}} = [\mathbf{B}_1^T + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_2^T \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{L}^T]$$

con

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{X} + \mathbf{B}_c^T \mathbf{U}, \quad \text{o también} \quad \mathbf{B}_c = (\mathbf{U}^T)^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{X}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c) \quad (4.81)$$

3. Término $\boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Xi}$

$$\boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_c \mathbf{V} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{M} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{con: } \mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_c \mathbf{V}$$

o aún,

$$\mathbf{A}_c = (\mathbf{U}^T)^{-1} (\mathbf{M} - \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_2 \mathbf{F} - \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}) \mathbf{V}^{-1} \quad (4.82)$$

Substituyendo los términos con los respectivos cambios de variable en la expresión (4.79), se obtiene la nueva matriz de restricción linealizada como se muestra en (4.84).

Finalmente, el problema de la síntesis del controlador \mathcal{H}_∞ de orden completa se transforma en el siguiente problema de optimización convexa.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \mu \\ &\text{sujeto a } \quad (4.84) \quad (4.83) \\ &\quad (4.78) \end{aligned}$$

con las variables de optimización μ , X , Y , F , L y M , que permiten obtener las matrices A_c , B_c , C_c del controlador conforme (4.80), (4.81) y (4.82).

4.5. Comentarios finales

Este Capítulo tuvo por finalidad presentar la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ de orden completa con la inclusión de funciones de ponderación como un problema de optimización en el dominio de la frecuencia. La síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ incluyendo las funciones de ponderación buscan minimizar el mayor pico de la respuesta en frecuencia del sistema controlado en una región de frecuencia de interés evitando el fenómeno de *Spillover* de control. El problema de optimización presentado en (4.28) fue basado en el problema \mathcal{H}_∞ óptimo, donde se resalta que el abordaje del control \mathcal{H}_∞ es para sistemas por realimentación de salida. Finalmente, es mostrada la transformación de la síntesis del problema de control \mathcal{H}_∞ , problemas de optimización (4.9) o (4.28), en un problema de optimización convexa via LMI para la obtención de controladores de orden completa. La síntesis presentada en este Capítulo es usada en el próximo Capítulo para presentar un método de diseño de obtención directa de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida.

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{YA}^T + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 + \mathbf{M}^T & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} & \mathbf{YC}_1^T + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_{12}^T \\
\mathbf{M} + \mathbf{A}^T + \mathbf{C}_2^T\mathbf{D}_c^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{L}^T & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} & \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2^T\mathbf{D}_c^T\mathbf{D}_{12}^T \\
\mathbf{B}_1^T + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{D}_c^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{B}_1^T\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{L}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{D}_c^T\mathbf{D}_{12}^T \\
\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} & -\mu\mathbf{I}
\end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.84) \quad \mathfrak{S}$$

Capítulo 5

SÍNTESIS DE OBTENCIÓN DIRECTA DE CONTROLADORES \mathcal{H}_∞ DE ORDEN REDUCIDA

En este Capítulo es presentada primeramente, una introducción sobre algunos problemas que pueden surgir en la implementación de controladores de orden completa de estructuras flexibles. Sobre ese foco, es mencionado un abordaje usado y existente en la literatura para diseñar controladores de orden menor. Seguidamente, es presentado un método de diseño de obtención directa de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida. La síntesis está basada en un problema de optimización de controladores \mathcal{H}_∞ presentada en el Capítulo 2 donde es incluida la información sobre el orden del controlador deseado. Finalmente, es presentado un abordaje usando algoritmos genéticos para la solución del problema de optimización propuesto.

5.1. Introducción

El diseño de controladores de orden completa usado en modelos de plantas de orden elevada lleva a la obtención de controladores de orden elevada. Este abordaje puede producir atrasos en el funcionamiento físico de los controladores llevando al uso de *hardwares* más complejos. Para tratar este problema es sugerido el uso de

controladores de orden reducida (orden k). Estos controladores son de orden menor que del modelo de la planta, $k < n$, y pueden llevar a un menor costo de *hardware* y menores tiempos de procesamiento.

La síntesis de controladores de orden reducida es caracterizada por ser un problema de optimización no convexa. En ese contexto, existen abordajes que aproximan el problema no convexo a un problema de optimización convexa. Un abordaje, según esa línea, es el método de diseño de controladores de orden reducida propuesta por Apkarian y Tuan en [1] y es basado en la combinación del método Lagrangiano Aumentado y las LMI. El método busca resolver el problema de optimización basado en la minimización de la función objetivo representado por la norma \mathcal{H}_∞ del sistema controlado sujeta a tres restricciones en la forma de LMI y una restricción no convexa de inversión matricial. En la solución de este problema de optimización, la restricción no convexa es incluida en la función Lagrangiana Aumentada. Las restricciones en la forma de LMI son mantenidas explícitas, explotando las ventajas de las herramientas computacionales de programación semi-definida. La función Lagrangiana Aumentada es sucesivamente minimizada sujeta a restricciones LMI, envolviendo actualizaciones de los parámetros de penalidad y multiplicadores de Lagrange como es discutido en [1, 39]. Una explicación mas detallada sobre esta formulación de los métodos conjuntos de las LMI y el Lagrangiano Aumentado puede ser encontrado en [1].

En este trabajo es presentada con mas detalle una síntesis de obtención directa de controladores de orden reducida basadas en la solución del problema de optimización mostrado en la Ecuación (4.9). Esta síntesis considera que los controladores están en la forma canónica modal. Este método reduce el número de variables desconocidas debido a la estructura predeterminada de los controladores. El controlador

lineal mostrado en (4.5) puede ser de orden $k \leq n$, donde cada elemento de las matrices del controlador es una variable de optimización a ser encontrada.

El método presentado en este trabajo está basado en la solución directa del problema de optimización no convexo usando algoritmos genéticos. En ese contexto, no hay necesidad de realizar transformaciones o aproximaciones de la síntesis propuesta a un problema de optimización convexo. Vale resaltar que este método de diseño fue propuesto por primera vez por la autora de esta tesis en [8] y será explicado con más detalle a continuación.

5.2. Síntesis de controladores de orden reducida en la forma canónica modal

El diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida puede estar basado en la solución del problema de optimización presentado en la Ecuación (4.9). El controlador lineal presentado en (4.5) puede ser de orden reducida $k < n$ donde cada elemento de las matrices del controlador es una variable de optimización a ser encontrada.

Este enfoque es basado en la obtención de controladores de orden reducida en la forma canónica modal [17, 27]. El controlador será obtenido considerando directamente sus características en frecuencia y amortiguamiento como se explica a seguir.

Para definir de forma simple las variables de optimización, la forma canónica modal en espacio estados del controlador puede ser obtenido usando la siguiente transformación:

$$\mathbf{x}_c = \Phi \mathbf{x}_M,$$

donde Φ representa la matrix de transformación modal que relaciona el vector original

de espacio estados \mathbf{x}_c con el vector modal de espacio estados \mathbf{x}_M . Usando esta transformación en la Ecuación (4.5), el controlador $\mathbf{K}(s)$ puede ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_M \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M \\ \mathbf{C}_M & \mathbf{D}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_M \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M \\ \mathbf{C}_M & \mathbf{D}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}\mathbf{A}_c\Phi & \Phi^{-1}\mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c\Phi & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

La matriz de transformación modal, Φ , contiene los autovalores de la matriz \mathbf{A}_c y puede ser calculado resolviendo el problema de autovalor, $\mathbf{A}_c\Phi = \Phi\Lambda$, donde Λ es la matriz diagonal compuesta por los autovalores de \mathbf{A}_c . Con estas consideraciones, el controlador será obtenido considerando directamente sus características en frecuencia y amortiguamiento como explicado a seguir.

La matriz de estados \mathbf{A}_c del controlador lineal $\mathbf{K}(s)$ descrito en (4.5) puede ser presentado como un bloque matricial diagonal, también conocido como forma canónica diagonal de Jordan [27,36]. El controlador puede presentar pares de polos, para un factor de amortiguamiento ξ_i y una frecuencia natural no amortecida w_{ni} con respecto al modo de vibrar i del controlador, definidos como:

$$s_{1,2;i} = -\xi_i w_{ni} \pm j w_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (5.3)$$

Cuando $0 < \xi_i < 1$ los polos $s_{1,2;i}$ representan pares complejos conjugados, ya cuando $\xi_i \geq 1$ representan pares de polos reales obtenidos como:

$$s_{1,2;i} = -\xi_i w_{ni} \pm w_{ni} \sqrt{\xi_i^2 - 1} \quad (5.4)$$

Siguiendo la forma modal del controlador, la matriz \mathbf{A}_M es caracterizada en forma diagonal como:

$$\mathbf{A}_M = \text{diag}(\mathbf{A}_{m1}, \mathbf{A}_{m2}, \mathbf{A}_{m3}, \dots, \mathbf{A}_{ml}, \lambda_{q1}, \lambda_{q2}, \lambda_{q3}, \dots, \lambda_{qr})$$

donde l es el número de pares de polos complejos conjugados del controlador. r es el número de polos reales del controlador. \mathbf{A}_{mi} es una matriz de orden 2×2 caracterizada por un par de polos complejos conjugados presentado en (5.3). λ_{qr} es un autovalor real ($\xi_i \geq 1$) del controlador obtenido de (5.4). La matriz \mathbf{A}_{mi} es dada por:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\xi_i w_{ni} & w_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \\ -w_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} & -\xi_i w_{ni} \end{bmatrix}_i \quad (5.5)$$

Usando (5.5) las matrices en espacio estado del controlador de orden k pueden ser escritas como:

$$\mathbf{A}_M = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m3} & \cdots & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{ml} & & & & & & \\ \hline & & & & & \lambda_{q1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \\ & & & & & \mathbf{0} & \lambda_{q2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_{q3} & \cdots & \mathbf{0} & \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_{qr} & \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_M = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,j} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,j} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \cdots & \beta_{3,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{k-1,1} & \beta_{k-1,2} & \cdots & \beta_{k-1,j} \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \cdots & \beta_{k,j} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_M = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} & \cdots & c_{1,k} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & \cdots & c_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} & c_{i,3} & c_{i,4} & c_{i,5} & \cdots & c_{i,k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{i,1} & d_{i,2} & \cdots & d_{i,j} \end{bmatrix}$$

donde j e i son los números de señales de entrada y de salida del controlador respectivamente. La orden del controlador es $k = 2l + r$.

Debido a que la matriz de estados del controlador \mathbf{A}_M presenta una forma matricial diagonal permite la reducción del número de variables desconocidas en el diseño del controlador de orden reducida.

Considerando el esquema del sistema en lazo cerrado según mostrado en la Figura 4.1 para la planta \mathbf{P} y el controlador de orden reducida \mathbf{K} el sistema en lazo cerrado $\mathbf{T}_{zw}(\mathbf{P}, \mathbf{K})$ puede ser reescrito en la forma compacta [47] como:

$$\mathbf{T}_{zw}(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{B}_{cl} \\ \hline \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} \end{array} \right] \quad (5.6)$$

Para el proceso de síntesis del controlador \mathcal{H}_∞ , será considerada la estructura en la forma canónica modal para el controlador de orden reducida, \mathbf{K} , en el sistema

en lazo cerrado presentado en la Ecuación (5.6).

El problema de optimización para la obtención de los controladores de orden reducida en la forma canónica modal puede ser escrito usando el problema \mathcal{H}_∞ óptimo presentado en (4.9) como:

$$\begin{aligned} \min_{\xi_p, w_n^p, \beta_{k,j}, c_{i,k}, d_{i,j}} \quad & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty \\ \text{sujeto a} \quad & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_M))) < \epsilon_1 \\ & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{c1}))) < \epsilon_2 \\ & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \|\mathbf{P}_{zw}\|_\infty \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde p representa el número total de polos del controlador. Este problema de optimización es resuelto usando los algoritmos genéticos.

Una ventaja de este método es que permite limitar el comportamiento del controlador en una región de frecuencia deseada y permite restringir el factor de amortiguamiento de forma simple incluyendo las siguientes restricciones:

$$\xi_o < \xi_p < \xi_f \quad (5.8)$$

$$w_{no} < w_n^p < w_{nf} \quad (5.9)$$

donde ξ_o es el factor de amortiguamiento mínimo deseado, ξ_f el factor de amortiguamiento máximo deseado, w_{no} la frecuencia natural mínima deseada y w_{nf} la frecuencia natural máxima deseada. La inclusión de estas restricciones dentro del problema de optimización permite, implícitamente, ubicar los polos del controlador dentro de una región de interés como se muestra en la Figura 5.1.

Estas restricciones permiten priorizar directamente la minimización de la norma

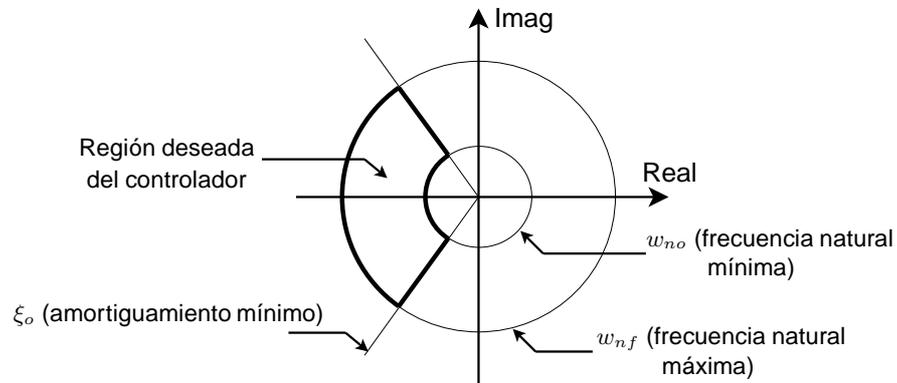


Figura 5.1: Región deseada de los polos del controlador de orden reducida en el plano complejo - controlador en la forma canónica modal.

\mathcal{H}_∞ del sistema controlado en una región de frecuencia deseada.

5.3. Estructura de los algoritmos genéticos para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida

Este trabajo usa el *toolbox* de MATLAB a través de la función **ga** [32] para implementar el algoritmo genético que resolverá la síntesis mostrada en (5.7). La función **ga** del MATLAB puede resolver problemas de optimización restringidos como irrestrictos y ofrece opciones de configuración para seleccionar las características del algoritmo como son la población inicial, función selección, función mutación, función cruzamiento, etc.

El problema de optimización presentada en (5.7) es resuelta usando **ga**. Las características del algoritmo de solución para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida es mostrado en la Tabla 5.1.

Con esta estructura para los GA, el problema de optimización para minimizar la norma \mathcal{H}_∞ del sistema en lazo cerrado con las restricciones especificadas puede ser

Tabla 5.1: Características de los GA para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida.

Elementos de ga	Representación
Función Aptitud	$\ \mathbf{T}_{zw}\ _\infty$
Función restricción	$\text{máx}(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_M))) < 0$ $\text{máx}(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{cl}))) < 0$ $\xi_o < \xi_p < \xi_f$ $w_{no} < w_n^p < w_{nf}$
Individuos	$[\xi_p, w_n^p, \beta_{k,j}, c_{i,k}, d_{i,j}]$
Función selección	@selectionstochunif
Función cruzamiento	@crossoverscattered
Función mutación	[@mutationgaussian] [1] [1]
Número de hijos élite	2

resuelto usando el siguiente algoritmo.

5.3.1. Algoritmo de solución para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida

El algoritmo de solución usando GA mostrado en la Figura 5.2 puede ser resumido como sigue:

1. El modelo de la planta es determinado;
2. El orden fijo k del controlador a ser diseñado es definido. El número de variables de optimización desconocidos ($nvar$) es calculado como:

$$nvar = \eta(k, n_u, n_y) = n_k(n_y + n_u + 1) + n_u n_y \quad (5.10)$$

donde n_u es el número de entradas de control de la planta y n_y es el número de salidas medidas de la planta;

3. Las funciones de ponderación, \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_u , son diseñados y el modelo de la planta aumentada es formado;

4. Definición de los parámetros del GA como la población inicial (Pop_o), la cual contiene los valores iniciales de las variables de optimización desconocidas del controlador, número de generaciones, porcentaje de cruzamiento, criterios de convergencia, etc;
5. El contador de iteraciones es inicializado, $gen = 1$;
6. La función aptitud, $\|\mathbf{T}_{zw}\|_{\infty}$, es evaluada para esta iteración;
7. El problema de optimización presentado en la Ecuación (5.7) es resuelto usando GA;
8. Si el criterio de convergencia es satisfecho y las condiciones de desempeño y estabilidad del sistema controlado es logrado, el controlador de orden reducida es obtenido; Si no la siguiente población es creada formada por hijos élite, hijos cruzamiento e hijos mutación, $gen = gen + 1$, y regresar al paso 6.

Con la implementación computacional de este algoritmo los controladores \mathcal{H}_{∞} de orden reducida pueden ser diseñados.

5.4. Comentarios finales

Este Capítulo presentó una alternativa de síntesis de controladores \mathcal{H}_{∞} de orden reducida. Los controladores son obtenidos directamente de la solución de un problema de optimización no convexa usando algoritmos genéticos. La síntesis es caracterizada por considerar directamente en la formulación una estructura matricial específica del controlador (forma canónica modal). Una característica de esta síntesis es que permite al proyectista ubicar los polos del controlador de forma simple en una región deseada reduciendo el espacio de búsqueda del controlador de solución

óptima. El abordaje mostrado es una alternativa cuando se desea implementar controladores de bajo costo computacional o en situaciones donde existen limitaciones de *hardwares*.

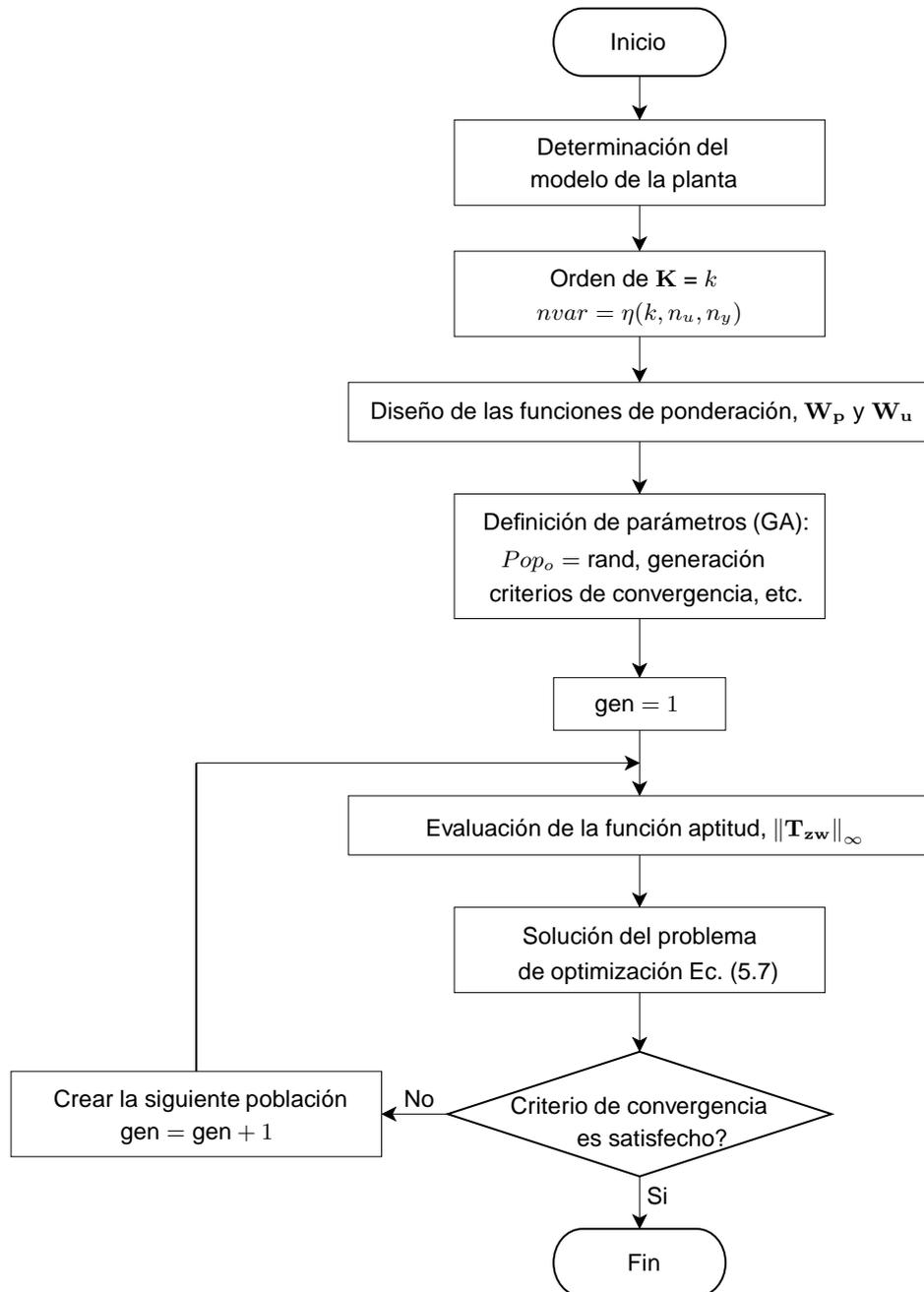


Figura 5.2: Proceso de solución usando GA

Capítulo 6

RESULTADOS

Considere la siguiente viga flexible empotrada-libre como mostrada en la Figura 6.1, con módulo de elasticidad $E = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, altura de la sección transversal $b = 0,032 \text{ m}$, base de la sección transversal: $a = 0,003 \text{ m}$, densidad $\rho = 2880 \text{ Kg/m}^3$ y amortiguamiento proporcional viscoso $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}$, con $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 10^{-5}$. \mathbf{K} es la matriz de rigidez y \mathbf{M} es la matriz de masa.

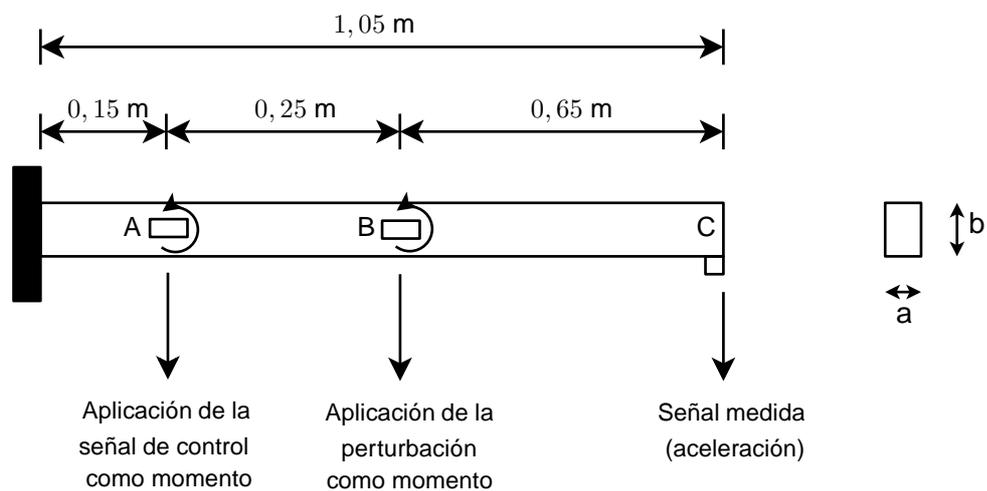


Figura 6.1: Distribución de la viga para el proceso de control

La viga presenta apenas el movimiento de flexión y es controlada a través de la aplicación de un momento en el punto A. Una perturbación es aplicado en el punto B

en la forma de momento. En el extremo de la viga es colocado un sensor para medir la aceleración del punto C. Para el proceso de síntesis y análisis no fueron considerados los efectos de acoplamiento de los actuadores.

El objetivo es minimizar la vibración en el extremo de la viga en términos de aceleración vertical. La aceleración en el extremo de la viga puede ser considerado como señal de desempeño.

Para la obtención del modelo matemático, la viga es discretizada en 21 elementos finitos de *Euler-Bernoulli* y 22 nodos, con dos grados de libertad (GDL) en cada nodo, como mostrado en la Figura 6.2. Los grados de libertad de la viga son numerados en orden como indicado en la Figura 6.2.

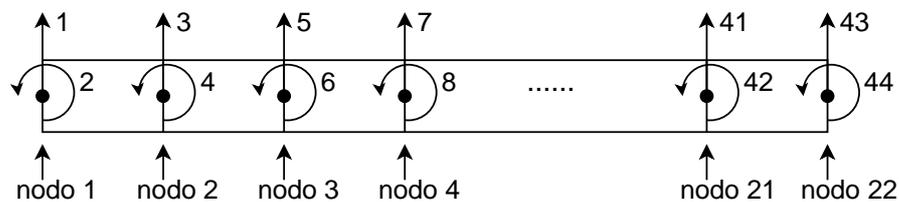


Figura 6.2: Grados de libertad de la viga empotrada-libre con 20 elementos finitos

En este ejemplo, el nodo 1 está empotrado, por lo tanto los grados de libertad 1 e 2 son nulos. El modelo de espacio estados de la viga es construido considerando apenas los grados de libertad de 3 a 44.

De acuerdo con la posición de los nodos, la perturbación es aplicada en el nodo 6 (GDL 12), la señal de control es aplicada en el nodo 4 (GDL 8) de la viga y la señal de aceleración vertical será medida en el nodo 22.

Con estas consideraciones, el modelo de espacio estados de la viga tiene 84 estados. El modelo de la planta de 42 GDL es obtenido a través del método de elementos finitos como fue presentado en el Capítulo 2.

Para el proceso de diseño de los controladores son usados los dos modelos siguientes:

- Modelo de la planta “real”: es el modelo asumido para representar a la planta considerando algunas incertidumbres dinámicas. En este ejemplo es usado para representar la planta con un número finito y suficiente de modos para caracterizar el comportamiento de la planta en una región de interés.
- Modelo de la planta nominal: es el modelo reducido asumido para representar a la planta sin considerar las incertidumbres dinámicas. En este ejemplo es usado para representar la planta con un número reducido de modos (menor que el número de modos de la planta “real”) para ser usado en el proceso de diseño de los controladores.

Considerando que el rango de frecuencia de interés es de 0 a 1000 Hz, el modelo de la planta es truncado en siete modos de vibrar. Este modelo de 14 estados es considerado aquí como la planta “real”. El modelo de la planta “real” truncado en sus tres primeros modos de vibrar es considerado como el modelo de la planta nominal y es utilizado en el proceso de diseño del controlador. Los modelos reducidos de la planta fueron obtenidos realizando una transformación diagonal modal en las matrices de espacio estados de la planta y ordenando la matriz de estado de forma ascendente en relación a las magnitudes de los autovalores. Finalmente, sobre este modelo modal de la planta son eliminadas las componentes modales del vector de estados correspondientes a los modos localizados fuera de la región de frecuencia de interés para la obtención del modelo reducido.

La respuesta en frecuencia del modelo de la planta “real” y el modelo de la planta nominal de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la

perturbación externa son presentados en la Figura 6.3.

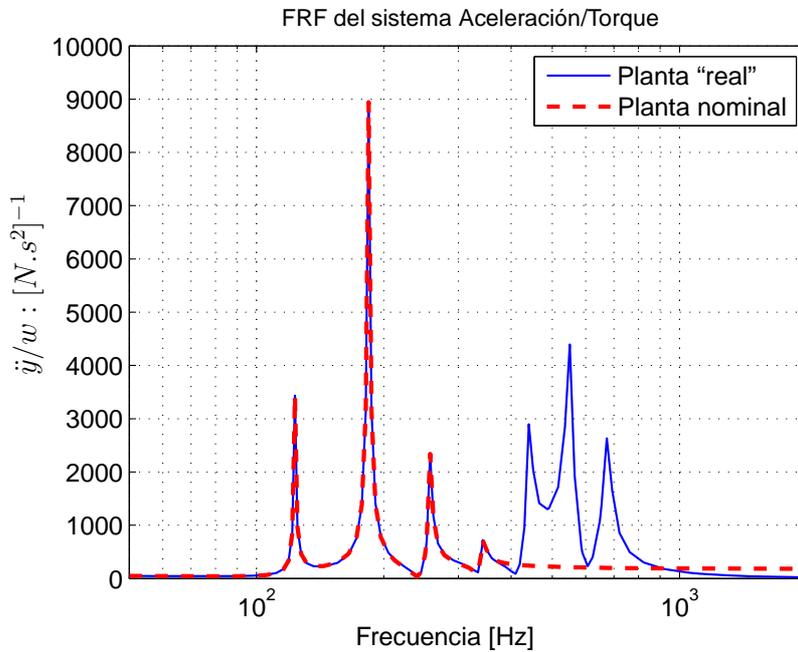


Figura 6.3: Función de respuesta en frecuencia (FRF) del modelo de la planta nominal y del modelo de la planta "real": aceleración - torque.

Para evaluar el desempeño del sistema controlado en la región de interés fue aplicado una señal de perturbación externa en la forma de una barrida senoidal de amplitud 0,1 N y media cero, iniciando en 0,1 Hz y terminando en 1000 Hz, en un tiempo de barrida de 50 segundos con una frecuencia de muestreo de 10 kHz.

Los controladores de orden reducida son diseñados como fue explicado en el Capítulo 5 y las variables que caracterizan el algoritmo de búsqueda son definidas como se muestra a seguir.

6.1. Diseño de controladores de orden reducida en la forma modal

El problema de optimización presentado en la Ecuación (5.7), para el método de controladores en la forma canónica modal, es resuelto usando la función *ga* del Matlab considerando los parámetros $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$.

Las opciones de configuración padrón de la función *ga* fueron usadas con los siguientes cambios en los valores: Número máximo de generaciones permitidas (Generation=100), Tamaño de la población (PopulationSize=60), Tolerancia de la función objetivo (TolFun=1e-8), tolerancia de las restricciones (TolCon=1e-8), población inicial (InitialPopulation=aleatorio). Los otros parámetros fueron mantenidos con los valores por defecto como mostrados en [32], estas informaciones caracterizan el algoritmo de solución para el problema de optimización de los controladores de orden reducida presentados en este trabajo. Estos parámetros fueron escogidos a través de varias pruebas, donde los parámetros presentados fueron los adecuados para la obtención de los 5 controladores de orden reducida diseñados.

En el diseño de los controladores fueron considerados los siguientes límites para los modos del controlador:

$$0 < \xi < 5$$

$$0,1 \text{ Hz} < \omega_n < 350 \text{ Hz}$$

Con esas configuraciones del algoritmo, controladores de orden reducida de orden 4, 6, 8, 10 y 12 fueron diseñados.

los controladores de orden reducida son diseñados usando los modelos reales y nominales de la planta, como mostrados en las siguientes secciones.

6.1.1. Controladores de orden reducida usando la planta nominal y funciones de ponderación

En esta sección, el modelo nominal de la planta y funciones de ponderación son utilizados en el diseño de controladores de orden reducida. El modelo nominal es usado para la obtención de los controladores de orden reducida en la forma canónica modal según explicado en el Capítulo 5. Los controladores son obtenidos usando algoritmos genéticos y son probados en la planta “real” donde el siguiente par de funciones de ponderación de orden 3 fueron usados para evitar el fenómeno de *spillover* de control:

- Características del filtro pasa baja:
 - Ganancia de paso $M_p = 21$ dB,
 - Ganancia de atenuación $\epsilon_p = -14,7$ dB,
 - Frecuencia de corte $\omega_c = 600$ rad/s,
 - Amplitud del filtro $A = 1000$ y
 - Orden del filtro $k = 3$.

- Características del filtro pasa alta:
 - Ganancia de paso $M_p = 25,7$ dB,
 - Ganancia de atenuación $\epsilon_p = -22,5$ dB,
 - Frecuencia de corte $\omega_c = 4500$ rad/s,
 - Amplitud del filtro $A = 1000$ y

- Orden del filtro $k = 3$.

Con estas características las funciones de transferencia de los filtros de ponderación son obtenidas según mostrados en (4.10) y (4.11). El diagrama de respuesta en frecuencia del modelo de la planta nominal y el par de funciones de ponderación pueden ser vistos en la Figura 6.4.

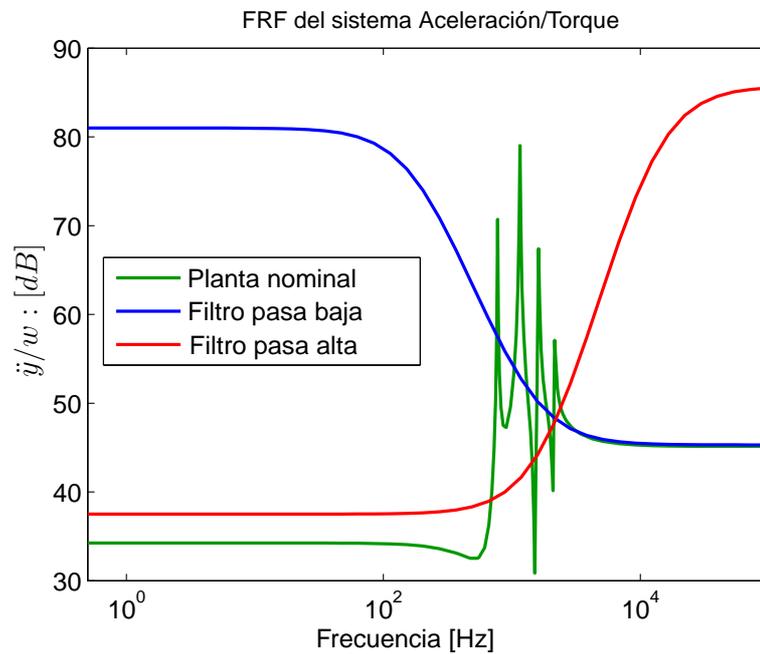


Figura 6.4: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - Planta nominal y funciones de ponderación (filtro pasa baja y filtro pasa alta).

Resaltase que, como la señal de excitación es formada por una barrida senoidal lineal, existe una relación directa entre el vector de tiempo y el vector de la frecuencia de excitación. En ese sentido, los gráficos de la respuesta temporal de la señal medida serán expresadas en relación al vector de la frecuencia de excitación de la viga.

Con estas consideraciones los controladores diseñados son presentados en las subsecciones siguientes.

Controlador de orden reducida 4×4

El controlador obtenido usando el método en la forma canónica modal, vía algoritmos genéticos, de orden 4×4 es:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -66,44 & 739,4 & 0 & 0 \\ -739,4 & -66,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -344,7 & 706,9 \\ 0 & 0 & -706,9 & -344,7 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0,6505 \\ 0,3001 \\ 0,2672 \\ 4,857 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0,6246 & 1,311 & 0,9507 & -0,2827 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0$$

La norma \mathcal{H}_∞ de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa en la forma de torque del sistema controlado y no controlado son $5006 [N.s^2]^{-1}$ y $8944 [N.s^2]^{-1}$, respectivamente, como mostrado en la Figura 6.5.

En la Figura 6.6 es mostrada la aceleración vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. En esta figura se puede ver que el controlador logró reducir en un 68,07 % el mayor pico de respuesta de aceleración del sistema no controlado.

Para el proceso de análisis será mostrado también el desplazamiento vertical del extremo de la viga del sistema con y sin control. Este resultado es mostrado en la Figura 6.7, donde se observa que el controlador logró una reducción del mayor pico de desplazamiento vertical del sistema no controlado del 72,50 %.

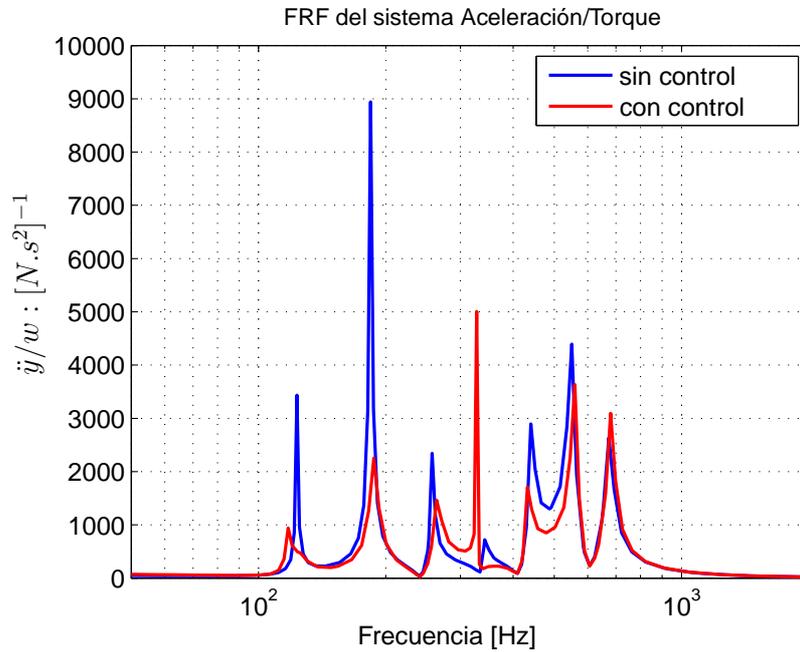


Figura 6.5: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4 .

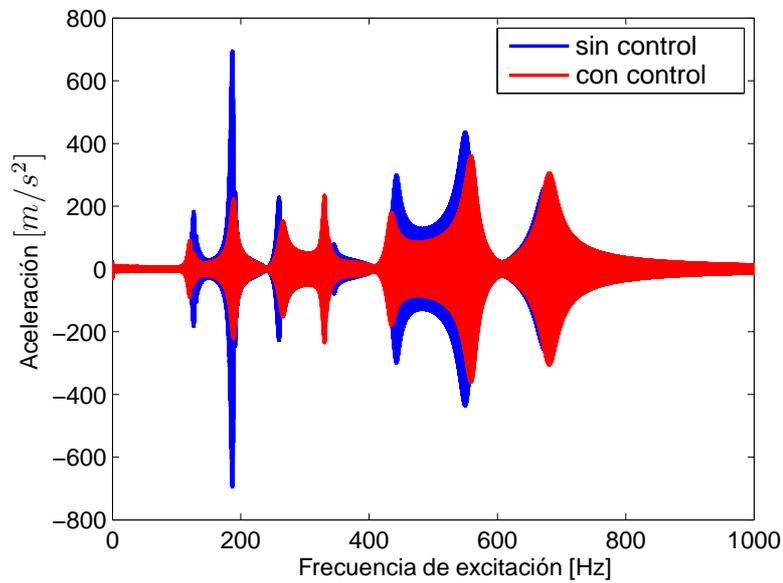


Figura 6.6: Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4

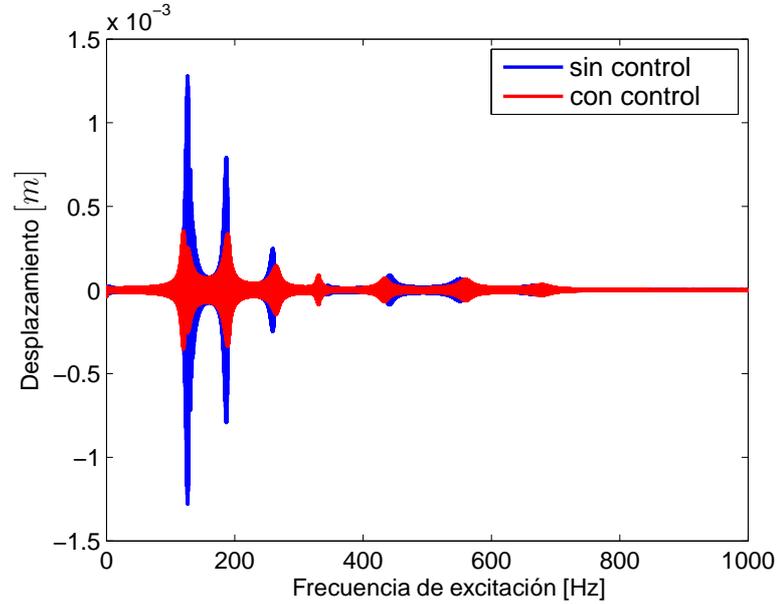


Figura 6.7: Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4

Controlador de orden reducida 6×6

El controlador obtenido usando el método en la forma canónica modal, vía algoritmos genéticos, de orden 6×6 es:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -664,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -614,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -159 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28,65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -194,1 & 763,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -763,6 & -194,1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1,299 \\ -1,597 \\ 1,479 \\ 0,9506 \\ 1,244 \\ 3,418 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} -0,2861 & 2,273 & -0,1877 & 0,1334 & 1,383 & 0,408 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0$$

La norma \mathcal{H}_∞ de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa en la forma de torque del sistema controlado es $5566 [N.s^2]^{-1}$, como mostrado en la Figura 6.8.

En la Figura 6.9 es mostrada la aceleración vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. En esta figura se puede ver que el controlador logró reducir en un 73,48 % el mayor pico de respuesta de aceleración del sistema no controlado.

La Figura 6.10 muestra el desplazamiento vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. El sistema controlado logró una reducción del mayor pico de respuesta de desplazamiento del 76,33 % con respecto al sistema no controlado.

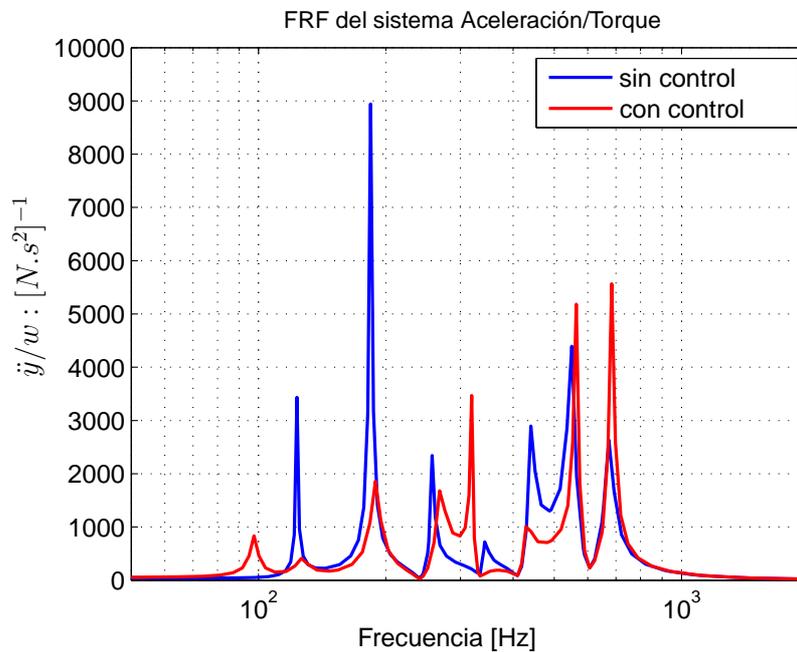


Figura 6.8: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6 .

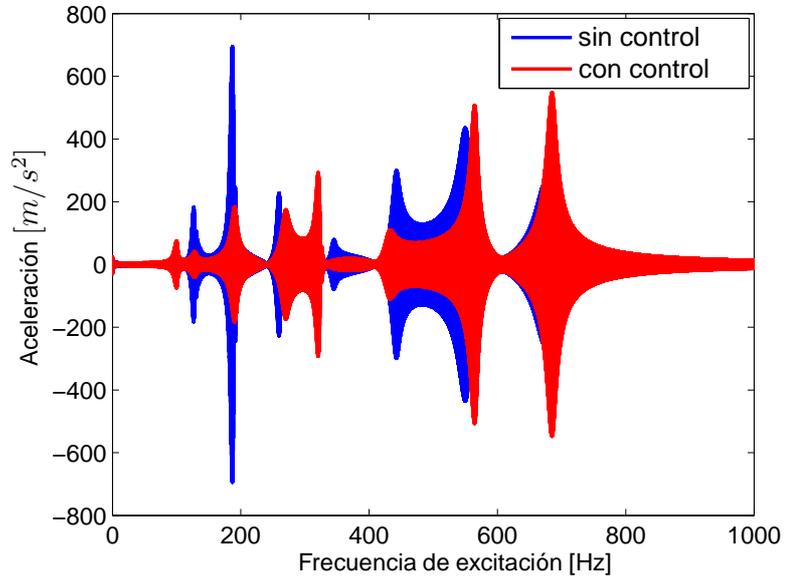


Figura 6.9: Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6

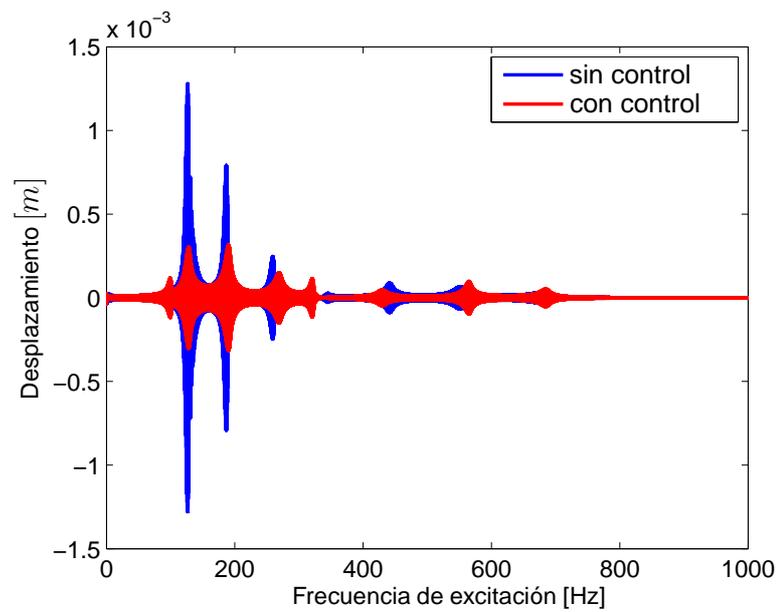


Figura 6.10: Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6

Controlador de orden reducida 8×8

El controlador de orden reducida obtenido, vía algoritmos genéticos, de orden 8×8 es:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -157,1 & 1247 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1247 & -157,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -186,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -54,86 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -90,06 & 140,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -140,8 & -90,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -603,4 & 658,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -658,4 & -603,4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1,302 & 1,796 & -0,836 & 0,4383 & 0,6447 & -0,2912 & 0,5385 & 2,077 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0,1638 & -0,4891 & 0,926 & 0,4182 & 0,7932 & 1,351 & 2,823 & -0,641 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = 0$$

La norma \mathcal{H}_∞ de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa en la forma de torque del sistema controlado es $5080 [N.s^2]^{-1}$, como mostrado en la Figura 6.11.

En la Figura 6.12 es mostrada la aceleración vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. En esta figura se puede ver que el controlador logró reducir en un 84,19 % el mayor pico de respuesta de aceleración del sistema no controlado.

La Figura 6.13 muestra el desplazamiento vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. El sistema controlado logró una reducción del mayor pico de respuesta de desplazamiento del 68,13 % con respecto

al sistema no controlado.

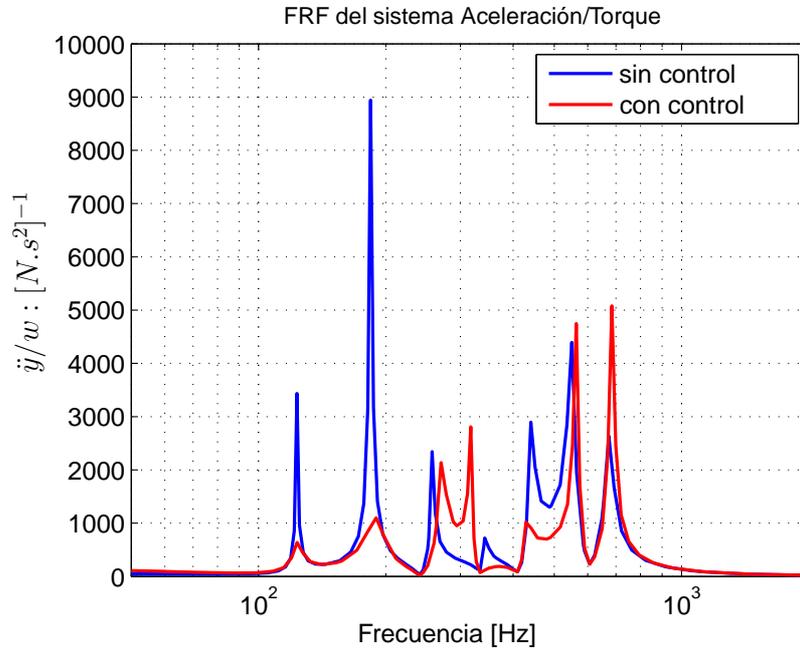


Figura 6.11: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8 .

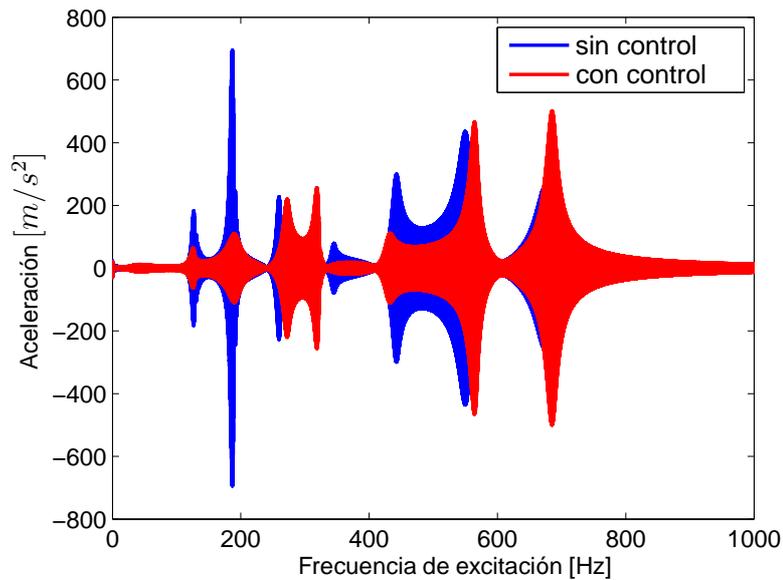


Figura 6.12: Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8

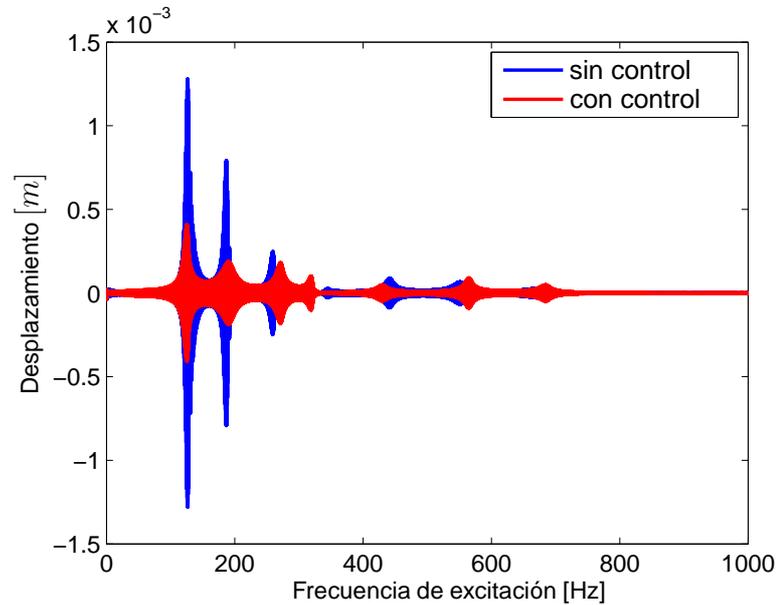


Figura 6.13: Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8

Un resumen de los principales resultados obtenidos de los 5 controladores diseñados son mostrados en la Tabla 6.1. En esta tabla son presentados principalmente la reducción de la norma \mathcal{H}_∞ del sistema controlado con respecto al sistema no controlado en términos de aceleración en relación a la entrada de perturbación, cuanto fue la reducción respectiva del segundo pico de resonancia (mayor pico de la planta real) para el sistema controlado y el porcentaje de reducción de la magnitud del mayor pico de aceleración. Además es mostrado el tiempo computacional de obtención de cada uno de los controladores diseñados (tiempo de solución del problema de optimización vía GA).

Para efectos de comparación será diseñado además un controlador de orden completa (orden 12×12) vía LMI. Estos resultados son importantes en este trabajo pues permite comparar los resultados obtenidos usando el método de controladores usando algoritmos genéticos con un método más tradicional basado en la estructura

de las desigualdades matriciales lineales (LMI) como fue explicado en el Capítulo 4. Las respuestas de aceleración del extremo de la viga de ambos métodos son mostrados en la Figura 6.14 y las respuestas de desplazamiento son mostrados en la Figura 6.15.

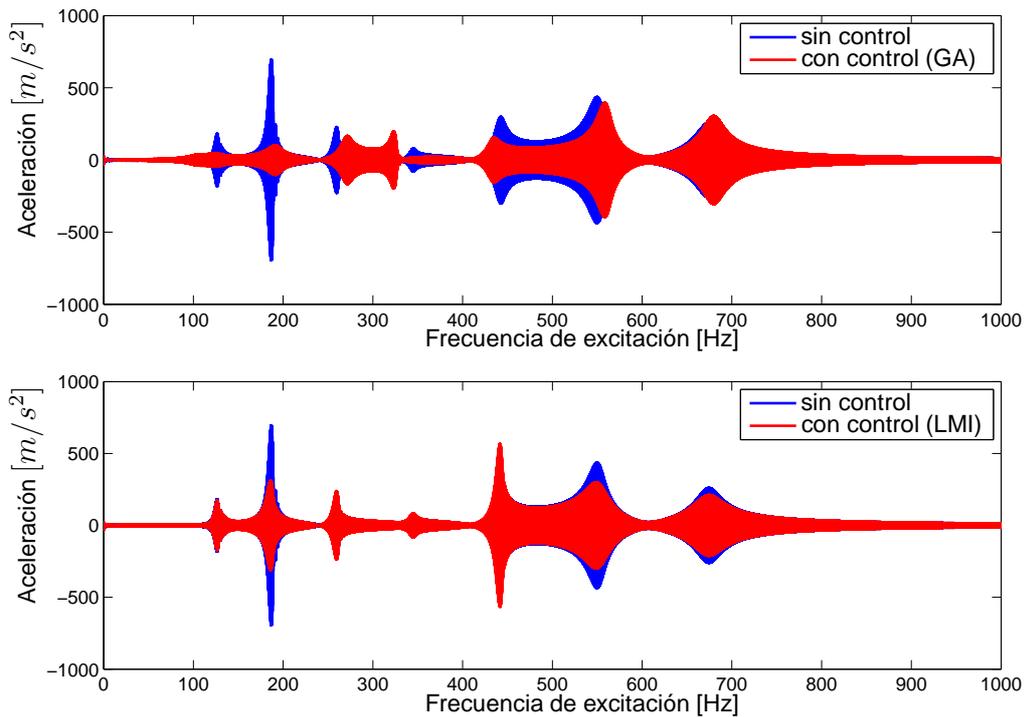


Figura 6.14: Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, método usando GA y método usando LMI, controlador de orden completa 12×12

Algunos comentarios

Según la Tabla 6.1 se puede observar que el método de diseño de controladores de orden reducida presentada en este trabajo fue capaz de diseñar 4 controladores de orden reducida y un controlador de orden completa (orden 12) logrando minimizar el mayor pico de resonancia de la planta garantizando la estabilidad del sistema controlado. Se observa además que la mayor minimización de la norma \mathcal{H}_∞ del sistema controlado fue obtenido por el controlador de orden 12. Analizando la minimización

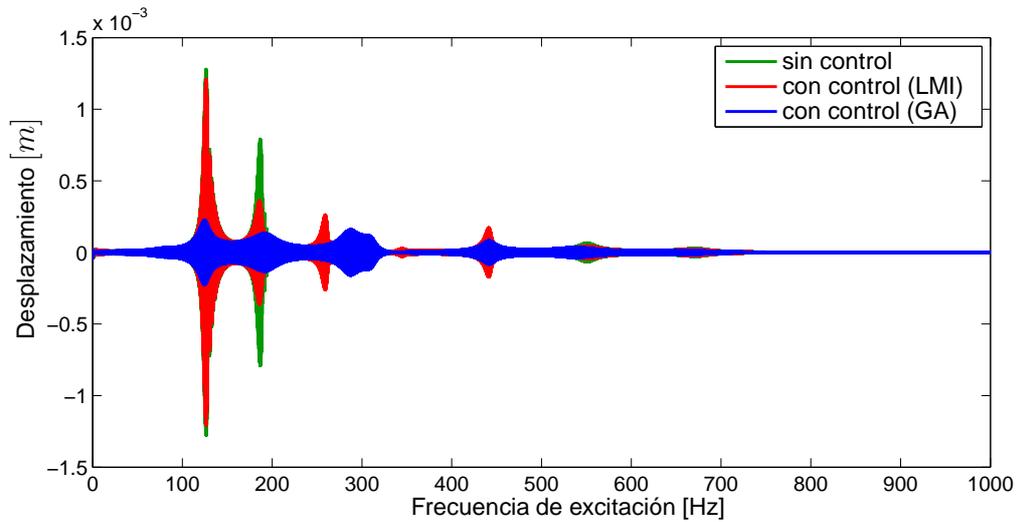


Figura 6.15: Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, método usando GA y método usando LMI, controlador de orden completa 12×12

del mayor pico de respuesta en frecuencia del sistema no controlado (segundo pico de resonancia), se puede ver que el controlador de orden 12 también obtuvo la mayor reducción de este pico. Adicionalmente se observa que los tiempos computacionales de obtención de los cinco controladores son aceptables permitiendo al diseñador flexibilidad y rapidez en el ajuste adecuado de las funciones de ponderación. Vale resaltar que, para el diseño de los 5 controladores fueron usados los mismos pares de funciones de ponderación. Esto permite una reducción de tiempo en el proceso de diseño y obtención de las funciones de ponderación adecuadas.

A nivel de análisis fueron mostrados los gráficos de desplazamiento del extremo de la viga para los controladores diseñados. En estos gráficos se puede ver con más claridad que los controladores de orden reducida lograron minimizar las amplitudes de vibración de los mayores picos de respuesta del sistema sin control.

Por otro lado, para el controlador de orden 12, por ser un controlador de orden completa, se trata de un problema de optimización convexa. Para la obtención de este

controlador puede ser usado algún paquete de programación semi-definida (SDP). En ese contexto, el método de diseño vía GA fue comparado con un método de obtención de controladores de orden completa vía LMI tal como se explicó en el Capítulo 4. Para este ejemplo se usaron los paquetes *Yalmip* y *Sedumi* para la solución del problema de optimización vía LMI [40, 44]. A partir de esta solución, en la Figura 6.14 puede ser observado que la mayor minimización del segundo pico de resonancia fue obtenido por el método de diseño vía GA. Además de eso, se puede notar que el método usando GA presentó incrementos en algunos picos de resonancia. Este fenómeno puede ser debido a que la información del mayor pico es la única que se llevo en consideración en la función objetivo.

Tabla 6.1: Resultados de los 5 controladores diseñados usando la planta nominal y funciones de ponderación vía algoritmos genéticos.

Orden del controlador	Método de la forma canónica modal (GA)				
	Norma infinito $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty} [N.s^2]^{-1}$	Reducción de $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty} [N.s^2]^{-1}$	Reducción del mayor pico $[N.s^2]^{-1}$	Reducción % del mayor pico (aceler.)	Tiempo computacional [s]
12 × 12	3998	4947	7919	85,30	1422
10 × 10	5500	3444	6967	71,83	746
8 × 8	5080	3864	7844	84,19	351
6 × 6	5566	3378	7084	73,48	681
4 × 4	5006	3938	6690	68,07	732

6.1.2. Controladores de orden reducida usando el modelo de la planta “real”

En esta sección el modelo de la planta “real” es usado directamente en el proceso de diseño de los controladores de orden reducida. En este abordaje de solución no fue necesaria la inclusión de las funciones de ponderación, una vez que fueron considerados todos los modos del modelo de la planta “real” en el proceso de diseño.

De la misma forma que en la sección anterior serán mostrados tres controladores con mas detalle a través de resultados gráficos y el resumen total de los cinco controladores será mostrado mediante una tabla. Los controladores diseñados son presentados en las secciones siguientes.

Controladores de orden reducida 4×4

El controlador de orden reducida vía algoritmos genéticos, de orden 4×4 es

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -145,9 & 952,6 & 0 & 0 \\ -952,6 & -145,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1284 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -400,6 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -0,6813 \\ 1,412 \\ 0,9559 \\ 2,712 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 2,388 & 0,1901 & 0,5934 & 0,4577 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0$$

La norma \mathcal{H}_∞ de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa en la forma de torque del sistema controlado es $2590 [N.s^2]^{-1}$, como mostrado en la Figura 6.16.

En la Figura 6.17 es mostrada la aceleración vertical del extremo de la viga sujeto

a la señal de perturbación externa, con y sin control. En esta figura se puede ver que el controlador logró reducir en un 64,74 % el mayor pico de respuesta de aceleración del sistema no controlado.

La Figura 6.18 muestra el desplazamiento vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. El sistema controlado logró una reducción del mayor pico de respuesta de desplazamiento del 78,05 % con respecto al sistema no controlado.

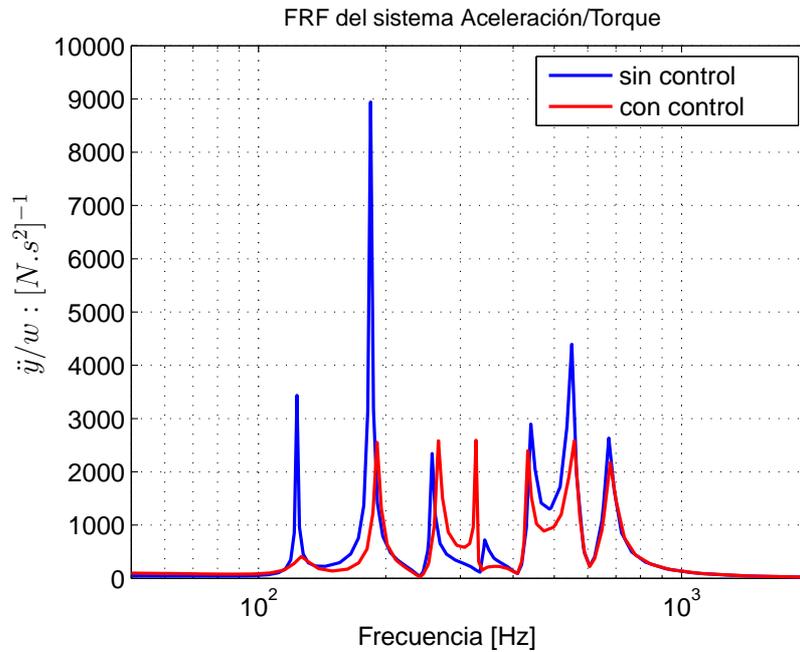


Figura 6.16: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4 .

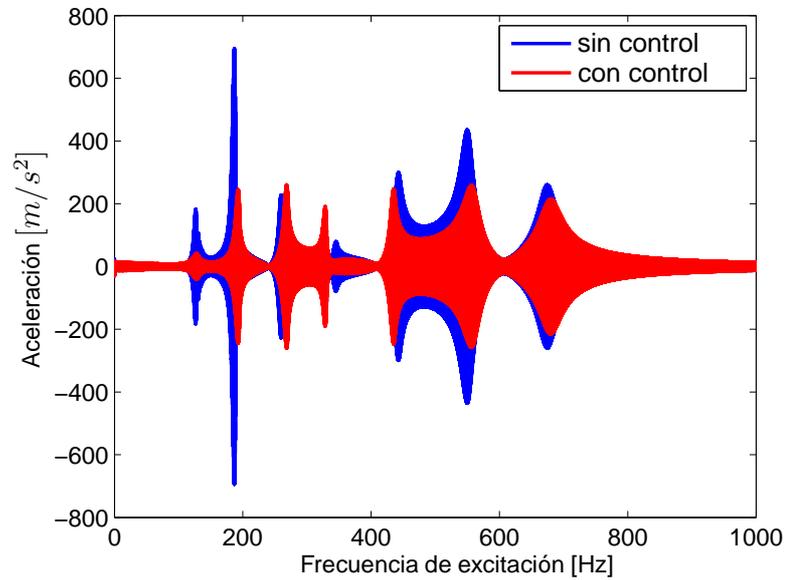


Figura 6.17: Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4

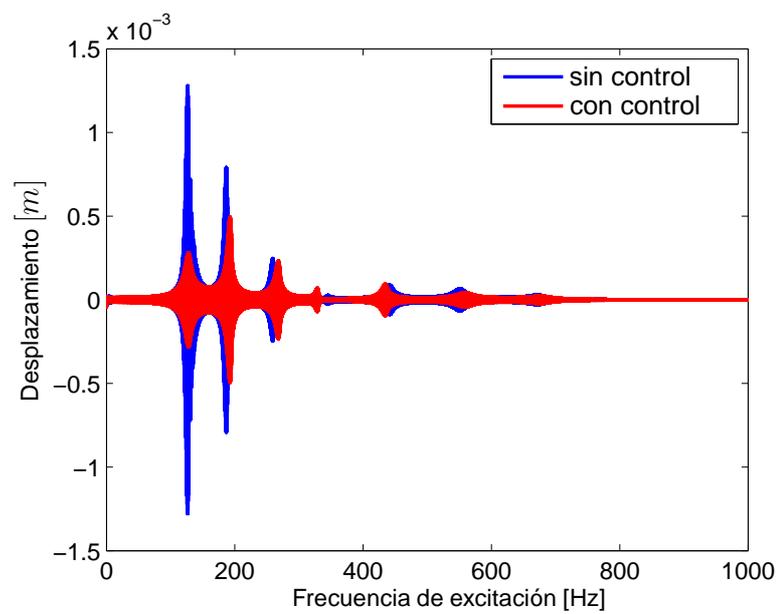


Figura 6.18: Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4

Controlador de orden reducida 6×6

El controlador obtenido usando el método en la forma canónica modal, vía algoritmos genéticos, de orden 6×6 es:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -181,8 & 981,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -981,1 & -181,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2786 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -167,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -666,3 & 694,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -694,4 & -666,3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -0,07074 \\ 1,603 \\ 0,2724 \\ 1,292 \\ 2,467 \\ 1,245 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 3,565 & 0,08168 & 2,414 & 0,7169 & -0,9775 & 1,487 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0$$

La norma \mathcal{H}_∞ de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa en la forma de torque del sistema controlado es $2507 [N.s^2]^{-1}$, como mostrado en la Figura 6.19.

En la Figura 6.20 es mostrada la aceleración vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. En esta figura se puede ver que el controlador logró reducir en un 79,47 % el mayor pico de respuesta de aceleración del sistema no controlado.

La Figura 6.21 muestra el desplazamiento vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. El sistema controlado logró una reducción del mayor pico de respuesta de desplazamiento del 85,69 % con respecto al sistema no controlado.

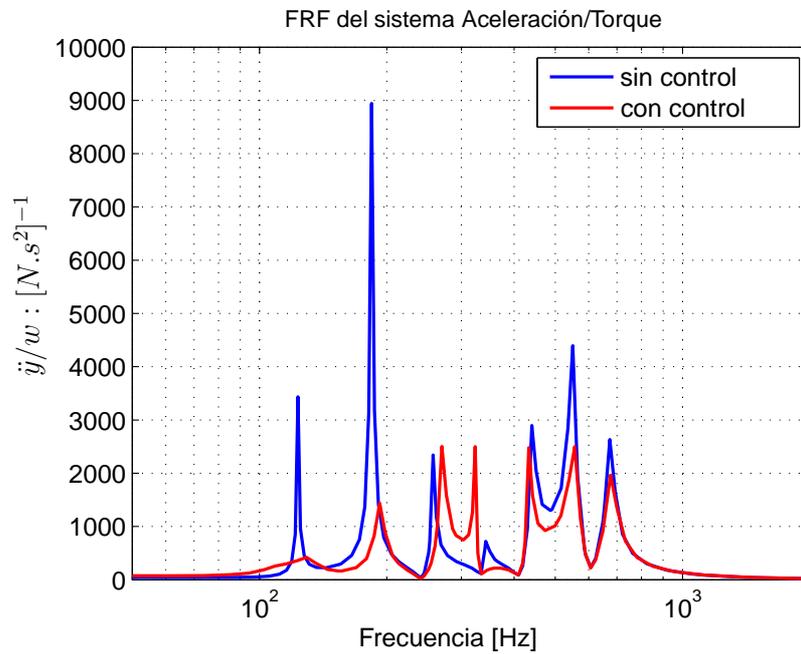


Figura 6.19: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6 .

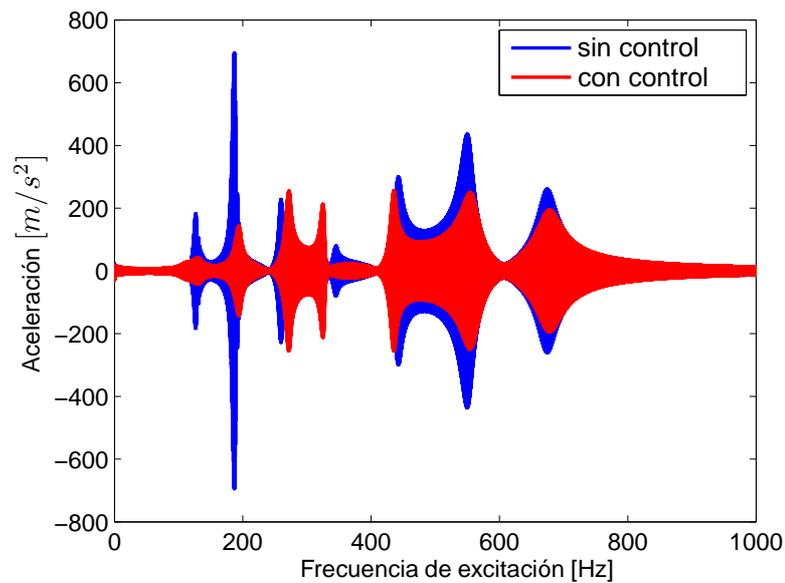


Figura 6.20: Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6

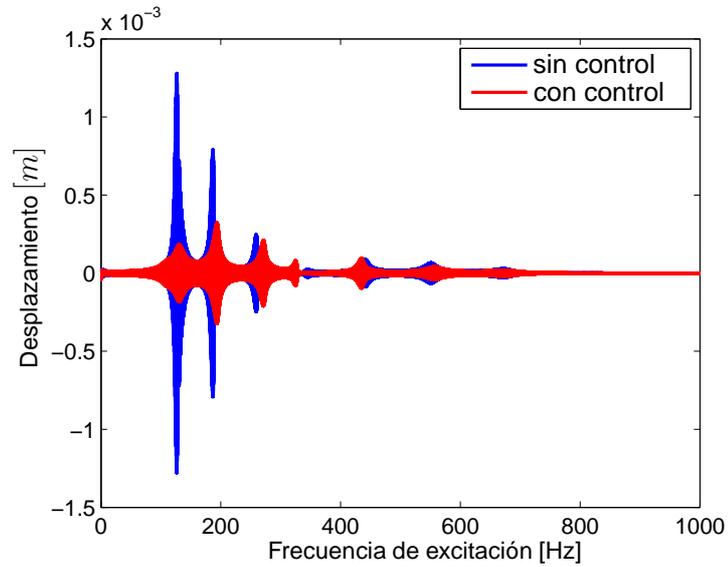


Figura 6.21: Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 6×6

Controlador de orden reducida 8×8

El controlador de orden reducida obtenido, vía algoritmos genéticos, de orden 8×8 es:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -5092 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -326,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2453 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -284,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1158 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -252,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -266,9 & 1001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1001 & -266,9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0,5739 & 0,3667 & 0,5736 & 0,3463 & 0,8496 & 0,1389 & 3,281 & 0,3774 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} -0,4048 & 1,069 & 0,5449 & 2,574 & 0,8683 & -0,0391 & -0,4244 & -0,8735 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0$$

La norma \mathcal{H}_∞ de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa en la forma de torque del sistema controlado es $2698 [N.s^2]^{-1}$, como mostrado en la Figura 6.22.

En la Figura 6.23 es mostrada la aceleración vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. En esta figura se puede ver que el controlador logró reducir en un 72,83 % el mayor pico de respuesta de aceleración del sistema no controlado.

La Figura 6.24 muestra el desplazamiento vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. El sistema controlado logró una reducción del mayor pico de respuesta de desplazamiento del 71,40 % con respecto al sistema no controlado.

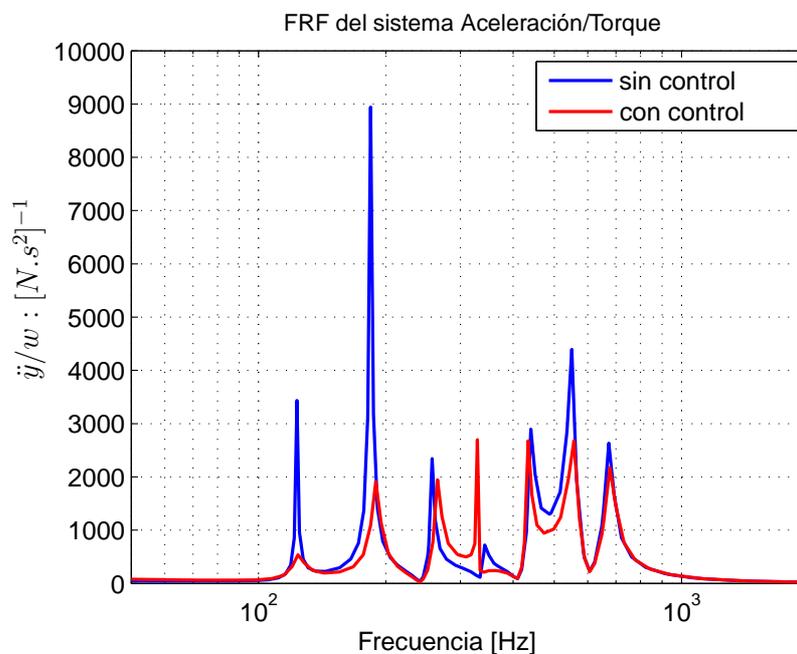


Figura 6.22: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8 .

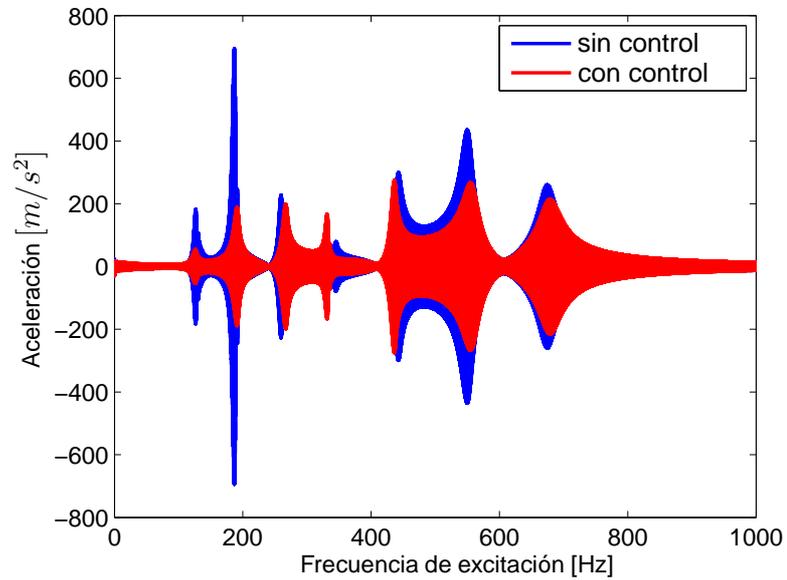


Figura 6.23: Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8

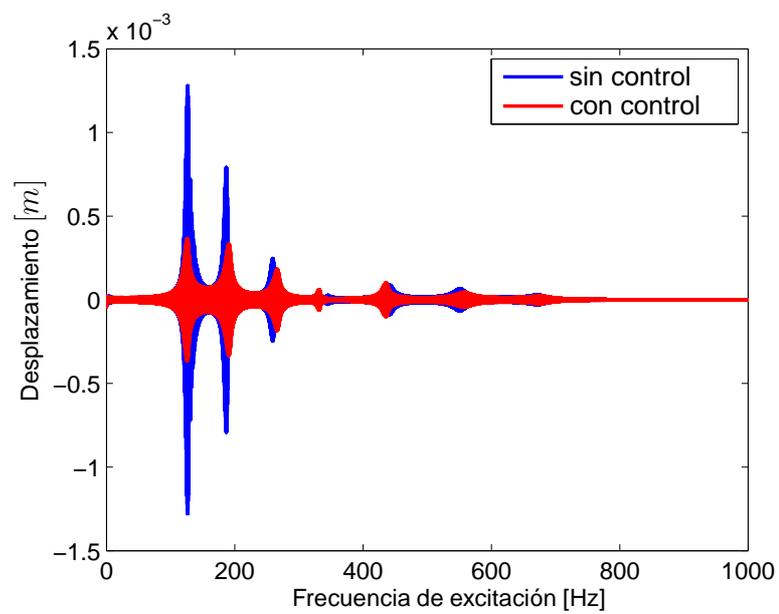


Figura 6.24: Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 8×8

Un resumen de los principales resultados obtenidos de los 5 controladores diseñados son mostrados en la Tabla 6.2 con las mismas características que en la Sección anterior.

Algunos comentarios

El método en la forma modal usando algoritmos genéticos logró diseñar 4 controladores de orden reducida y un controlador de orden completa sin utilizar funciones de ponderación consiguiendo minimizar el mayor pico de respuesta en frecuencia del sistema en términos de aceleración y desplazamiento. Los GA lograron diseñar controladores de forma a obtener un desempeño razonable en un corto tiempo de procesamiento. En este caso fue el controlador de orden 10 el que obtuvo la mayor minimización del mayor pico de resonancia de la planta (en términos de aceleración y con respecto a la entrada de perturbación). En este enfoque, los controladores lograron una mayor minimización de la norma \mathcal{H}_∞ que en el caso donde se usa la planta nominal y funciones de ponderación para los controladores de orden 10 y 6. De la misma manera que en la Sección anterior, algunos de los controladores diseñados presentaron un aumento de amplitudes en algunos picos de resonancia de la planta. Este problema puede ser tratado en trabajos futuros a través de la formulación de un problema de optimización multiobjetivo, aumentando la robustez de los controladores.

6.2. Comentarios finales

Este capítulo presentó la implementación de un método de diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida y aplicada a un modelo de una viga de aluminio empotrada libre. El modelo matemático de la viga fue obtenido usando el método de elementos

finitos considerando un amortiguamiento proporcional tal como fue mostrado en el Capítulo 2. El método fue capaz de diseñar 4 controladores de orden reducida y un controlador de orden completa usando el modelo de la planta nominal y funciones de ponderación y 4 controladores de orden reducida y un controlador de orden completa usando únicamente el modelo de la planta “real”. Estos resultados presentaron una buena minimización de la norma \mathcal{H}_∞ en un corto tiempo de procesamiento.

Este Capítulo también mostró una comparación entre el método de la forma modal usando algoritmos genéticos y un método de diseño de controladores de orden completa vía LMI. En esta comparación también se pudo ver que la solución obtenida por los algoritmos genéticos fue mejor en la minimización del segundo pico de resonancia y cercanos a los resultados del método usando LMI para el resto de los picos de resonancia. Una comparación y análisis mas detallada sobre el potencial de los GA en el diseño de controladores de orden reducida es mostrada en el Apéndice B, donde se presenta una comparación con el método de programación secuencial cuadrática SQP.

Finalmente, en el Apéndice C es presentado algunos resultados de la implementación experimental de este método de diseño de controladores de orden reducida en la forma canónica modal usando algoritmos genéticos. Estos resultados fueron trabajados y presentados en [8] por la autora de esta tesis y solo alguno de ellos serán mostrados en este trabajo para comprobar la valides de este método de diseño.

Tabla 6.2: Resultados de los 5 controladores diseñados usando la planta “real” vía algoritmos genéticos.

Orden del controlador	Método de la forma canónica modal (GA)				
	Norma infinito $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty} [N.s^2]^{-1}$	Reducción de $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty} [N.s^2]^{-1}$	Reducción del mayor pico $[N.s^2]^{-1}$	Reducción % del mayor pico (aceler.)	Tiempo computacional [s]
12 × 12	3126	5818	7643	81, 33	1051
10 × 10	2812	6123	8197	89, 21	1033
8 × 8	2698	6246	7032	72, 83	875
6 × 6	2507	6436	7507	79, 47	792
4 × 4	2590	6354	6391	64, 74	532

CONCLUSIONES

La idea principal de este trabajo fue la implementación del método para el diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida en la forma modal. Para la síntesis de los controladores se presentó un problema de optimización no convexo para garantizar la estabilidad y un desempeño razonable del sistema. Seguidamente, se mostró un enfoque de solución basado en la estructura de los algoritmos genéticos para la solución del problema de optimización no convexa. El proyecto explota las ventajas de los algoritmos genéticos en la solución de problemas de optimización no convexos.

El método del controlador de orden reducida mostrado se aplicó al control activo de vibraciones del modelo de una viga de aluminio empotrada libre. El objetivo en este proyecto fue minimizar la vibración en el extremo de la viga en términos de la aceleración vertical sujeto a perturbaciones externas garantizando la estabilidad del sistema controlado. Según los resultados obtenidos concluimos lo siguiente:

1. En este ejemplo el diseño e implementación de los diez controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida en la forma modal consiguieron un buen desempeño, en términos de la minimización de la norma \mathcal{H}_∞ , garantizando la estabilidad del sistema controlado. El método fue capaz de diseñar controladores usando el modelo de la planta nominal con funciones de ponderación, así como, usando únicamente el modelo de la planta "real". Para este ejemplo en específico fue la solución

usando la planta “real” el que obtuvo la mayor minimización de la norma \mathcal{H}_∞ del sistema controlado.

2. Analizando únicamente la reducción del segundo pico de resonancia (mayor pico del sistema sin control), la solución usando el modelo de la planta nominal y funciones de ponderación obtuvieron una mayor minimización del pico de respuesta en frecuencia para los controladores de orden 4, 8 y 12. La solución usando el modelo de la planta “real” obtuvo la mayor minimización del pico de respuesta en frecuencia para los controladores de orden 6 y 10. El hecho de que la solución usando la planta “real” obtuviera la mayor minimización de la norma \mathcal{H}_∞ únicamente en 2 controladores, puede ser debido a que en este caso el controlador tiene la necesidad de minimizar los 7 picos de resonancia, en lugar de 3 picos de resonancia (empleado en el caso de usar la planta nominal y funciones de ponderación).
3. El método de diseño de controladores en la forma canónica modal impone límites para algunas de las características modales (frecuencia natural y factor de amortiguamiento) del controlador. Esta consideración procura reducir el espacio de búsqueda de los controladores factible para un espacio más cercano al deseado (minimización en baja frecuencia) permitiendo al diseñador ubicar los polos del controlador en una región deseada de forma implícita.
4. Debido a las características de los algoritmos genéticos, no necesariamente los controladores obtenidos representan soluciones globales del problema de optimización del diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida, estos pueden haber sido soluciones locales razonables para un tiempo de procesamiento razonable.

5. Para el proceso del análisis y comparación del desempeño de los algoritmos genéticos en el problema de control de orden reducida usado, fue implementado el algoritmo SQP (Programación Cuadrática Secuencial). Los algoritmos genéticos mostraron tener una mayor flexibilidad en la elección del punto de partida y consiguieron mejores resultados, en términos de la minimización de la función objetivo, comparado al algoritmo SQP tal como fue mostrado en el Apéndice B. El algoritmo SQP presentó problemas de factibilidad en la obtención de algunos controladores de orden reducida para el ejemplo estudiado.
6. El método de diseño utilizado en este trabajo fue probado experimentalmente obteniendo resultados satisfactorios. Algunos de estos resultados presentados en [8] son mostrados en el Apéndice C.
7. Los algoritmos genéticos mostraron tener un buen potencial en la solución del diseño de controladores \mathcal{H}_∞ de orden reducida. En el área de diseño de control, basado en la solución de problemas de optimización, el estudio y el uso de algoritmos genéticos pueden ser una solución alternativa atractiva.

El método usado demostró ser una alternativa de diseño que puede ser explotada alternativamente para algunas formulaciones clásicas basadas en abordajes de *Riccati* y LMI, particularmente posibilitando la inclusión de restricciones no lineales.

Trabajos futuros

La síntesis mostrada para el diseño de controladores de orden reducida en la forma modal presentó aumentos de amplitud en los picos en algunos modos de resonancia de la planta. Este problema se puede corregir en trabajos futuros, incluyendo

la información de los picos más significativos en la función objetivo del problema de optimización utilizado. Este nuevo enfoque conduciría a la propuesta de un problema de optimización multi-objetivo para la síntesis de controladores de orden reducida aumentando la robustez de la síntesis de diseño utilizada.

Sobre el enfoque del problema de controladores de orden reducida pueden ser fácilmente incluidas nuevas restricciones para formular nuevas síntesis como, por ejemplo, para el diseño de controladores de orden reducida en sistemas con incertidumbres del tipo politópicas. Una inclusión y análisis adecuadas de las restricciones en el problema de controladores de orden reducida, puede ser realizada en trabajos futuros.

Siguiendo la línea del estudio e inclusión de nuevas restricciones, pueden ser incluidas dentro del problema de diseño de controladores de orden reducida restricciones de forma a ubicar los polos del sistema controlado en una región deseada. Para este propósito, deben ser considerados y analizados los efectos de las características modales del controlador (frecuencias naturales y factor de amortiguamiento) sobre el sistema en lazo cerrado. Sobre este análisis, deben ser formuladas las nuevas restricciones basadas en las variables modales desconocidas del controlador (frecuencias naturales y factor de amortiguamiento) para la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado.

Bibliografía

- [1] Apkarian, P., Tuan, H. D., Noll, D., “Fixed-order H-infinity Control Design via a Partially Augmented Lagrangian Method”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 13, pp. 1137-1148, 2003.
- [2] Balas, M. J., “Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3)522-535, 1982.
- [3] Balas G. J., “Robustness and Performance Trade-offs in Control Design for Flexible Structures”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 2, No. 4, pp. 352-361, 1994.
- [4] Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., Balakrishnan, V., “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Vol. 15, 1994.
- [5] Burke, J. V., Henrion, D., Lewis, A. S., Overton M. L., “HIFOO - A MATLAB Package for Fixed-Order Controller Design and H_∞ Optimization”, 5th IFAC Symp. Robust Control Design, Toulouse, France, 2006.
- [6] Canahuire, R. V. C., “Controle H-infinito de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle”, Tesis de Maestría, FEM-UNICAMP, Brasil, 2009.
- [7] Canahuire, R. V. C., Serpa, A. L., “A direct minimization method to reduced order H-infinity controller design: a genetic algorithm approach”, *ABCM Symposium Series in Mechatronic*, Vol. 5, pp. 245-251, Brasil, 2012.
- [8] Canahuire, R. V. C., “Projeto de controladores H-infinito de ordem reduzida e compensação de saturação em estruturas flexíveis”, Tesis de Doctorado, FEM-UNICAMP, Brasil, 2014.
- [9] Conn, A. R., Gould, N. I., Toint, PH. L., “A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization with General Constraints and Simple Bounds”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 28, No. 2, pp. 545-572, 1991.
- [10] Conn, A. R., Gould, N. I., Toint, PH. L., “A Globally Convergent Augmented Lagrangian Barrier Algorithm for Optimization with General Inequality Constraints and Simple Bounds”, Vol. 66, No. 217, pp. 261-288, 1997.

- [11] Dekking, F.M., Kraaikamp, C., Lopuhaa, H.P., Meester, L.E. 'A Modern Introduction to Probability and Statistics', Springer, 2005.
- [12] Desai, C. S., Abel, J. F., "Introduction To The Finite Element Method: A Numerical Method For Engineering Analysis", New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1971.
- [13] Ewins, D. J., "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press Ltd., 1984.
- [14] Farag, A., Werner, H., "A Riccati Genetic Algorithms Approach to Fixed-Structure Controller Synthesis", Proceedings of American Control Conference, Vol. 3, pp. 2799-2804, 2004.
- [15] Friswell, M. I., Mottershead, J. E., "Finite Element Model Updating in Structural Dynamics", Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [16] Gahinet, P., Apkarian, P., "A Linear Matrix Inequality Approach to H-infinity Control", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 4, No. 4, pp. 421-448, 1994.
- [17] Gawronski, W. K., "Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures", Springer, 2004.
- [18] Goldberg, D., "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", Addison Wesley, 1989.
- [19] Guohan, L., "Tuning PID controller using adaptive genetic algorithms", 5th International Conference on Computer Science and Education (ICCSE), pp. 519-523, 2010.
- [20] Henrion, D., Louembet, C., "LMI optimization for fixed order \mathcal{H}_∞ controller design", Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, pp. 4646-4651, 2003.
- [21] Henrion, D., Louembet, C., "Convex inner approximations of nonconvex semi-algebraic sets applied to fixed-order controller design", International Journal of Control, Vol. 85, pp. 1083-1092, 2012.
- [22] Hol, C., Scherer, C., "Fixed order \mathcal{H}_∞ synthesis: computing optimal values by robust performance analysis", Proceedings of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts, Vol.4, pp.3285-3290, 2012.
- [23] Hu, Y. R., Ng, A., "Active robust vibration control of flexible structures", Journal of Sound and Vibration, Vol. 288, No. 1-2, pp. 43-56, 2005.

- [24] Hurlebaus, S., Gaul, L., "Smart structure dynamics", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, No. 2, pp. 255-281, 2006.
- [25] Iwasaki, T., Skelton, R. E., "An unified Approach to fixed order controller design via linear matrix inequalities", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 59-75, 1995.
- [26] Iwasaki, T., Skelton, R. E., "All fixed order \mathcal{H}_∞ controller: observer-based structure and covariance bounds", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 3, pp. 512-516, 1995.
- [27] Kailath, T., "Linear Systems", Prentice-Hall, 1980.
- [28] Khatibi, H., Karimi, A., Longchamp, R., "Fixed-Order Controller Design for Systems with Polytopic Uncertainty Using LMIs", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, No. 1, pp. 428-434, 2008.
- [29] Khatibi, H., Karimi, A., "An Alternative to the Youla Parameterization for H infinity Controller Design", *European Control Conference*, Budapest, 2009.
- [30] Kwon, Y. W., Bang, H., "The Finite Element Method using Matlab", CRC Press, 1997.
- [31] Lew, J. S., Juang, J. N., Longman, R. W., "Comparison of several identification methods for flexible structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167, No. 3, pp. 461-480, 1993.
- [32] MathWorks, "Global Optimization Toolbox", The MathWorks, Inc, 2010.
- [33] Meirovitch, L., Baruh, H., "Effect of damping on observation spillover instability", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 35, No. 1, pp. 31-44, 1981.
- [34] Nocedal, N., Wright, S. J., "Numerical Optimization", Springer, 2006.
- [35] Ogata K., "Discrete-Time Control Systems", Prentice-Hall, 1995.
- [36] Ogata K., "Ingeniería de Control Moderna", Prentice-Hall, 2003.
- [37] Sánchez-Peña, R. S., Sznajder, M., "Robust Systems: Theory and Applications", John Wiley & Sons, 1998.
- [38] Sarracini, Jr. F., Serpa, A. L., "Reduced Model in H-infinity Vibration Control Using Linear Matrix Inequalities", *XI International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - XI DINAME*, 2005.
- [39] Sarracini, Jr. F., "Síntese de Controladores de Ordem Reduzida com Aplicação no Controle Ativo de Estruturas Flexíveis", *Tesis de Maestría, FEM-UNICAMP, Brasil*, 2006.

- [40] SeDuMi 1.0x: "A Matlab toolbox for Optimization over Symmetric Cones", McMaster University, 1998.
- [41] Scherer, C., Gahinet, P., Chilali, M., "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 7, pp. 896-911, 1997.
- [42] Skelton R. E., Iwasaki T., Grigoriadis K., "An unified Algebraic Approach to Linear Control Design", Taylor and Francis, 1998.
- [43] Skogestad, S., Postlethwaite, I., "Multivariable Feedback Control - Analysis and Design", John Wiley & Sons, 2005.
- [44] Yalmip: "A Matlab toolbox for rapid prototyping of optimization problems", Institute fur Automatik - Automatic Control Laboratory.
- [45] Yang, F., Gani, M., Henrion, D., "Fixed-Order Robust \mathcal{H}_∞ Controller Design with Regional Pole Assignment", IEEE Transactions on Automatic Control", Vol. 52, No. 10, pp. 1959-1963, 2007.
- [46] Zames, G., "Feedback of Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Semi-Norms, and Approximate Inverses", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 26, No. 2, pp. 301-320, 1981.
- [47] Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K., "Robust and Optimal Control", Prentice Hall, 1996.

Apéndice A

ALGUNOS CONCEPTOS

A.1. Complemento de Schur

Sea la matriz simétrica \mathbf{X} como se muestra:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

con $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T \in \Re^{n \times n}$. Si $\det(\mathbf{M}) \neq 0$, entonces se dice que la matriz $\mathbf{S} - \mathbf{N}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$ es el complemento de Schur de \mathbf{X} con respecto a \mathbf{M} . De la misma forma si $\det(\mathbf{S}) \neq 0$, entonces se dice que la matriz $\mathbf{M} - \mathbf{N} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{N}^T$ es el complemento de Schur de \mathbf{X} con respecto a \mathbf{S} .

El complemento de Schur [4] es una herramienta bastante útil ya que, para ciertos casos, permite convertir formas no lineales en LMIs, como se muestra a seguir:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

puede ser representado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{U}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{U}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

A.2. Estabilidad de Lyapunov

El criterio de estabilidad de Lyapunov es bastante general y es usado tanto para sistemas lineales como para sistemas no lineales.

En el caso de un sistema lineal, el criterio de estabilidad de Lyapunov establece que un sistema en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es estable si posee una función de Lyapunov $V(\mathbf{x}, t)$ positiva definida y que la derivada de esta función debe ser negativa definida [36], es decir,

1. $V(\mathbf{x}, t) > \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ e } \forall t$
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ e } \forall t$

En este caso, es usual considerar la función de Lyapunov en la forma cuadrática

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Pi} > \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{\Pi}$ es una matriz simétrica.

Se verifica que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A}) \mathbf{x} < \mathbf{0} \end{aligned}$$

que corresponde a la siguiente condición para la estabilidad del sistema

$$\mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A} < \mathbf{0}$$

A.3. Norma \mathcal{L}_2

Sea una señal $x(t)$. La norma \mathcal{L}_2 es definida como:

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} x'(t)x(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(jw)X(jw)dw},$$

donde se utiliza el teorema de Parseval [43] para relacionar esta norma en los dominios del tiempo t y de la frecuencia w .

A.4. Transformación de Congruencia

Dos matrices simétricas \mathbf{X} y \mathbf{Y} son congruentes si existe una matriz $\mathbf{\Pi}$ no singular tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{\Pi}^T \mathbf{X} \mathbf{\Pi}$. Si \mathbf{X} y \mathbf{Y} son congruentes, entonces $\mathbf{Y} > \mathbf{0}$ si y solamente si $\mathbf{X} > \mathbf{0}$.

Apéndice B

COMPARACIONES USANDO EL ALGORITMO SQP

B.1. Algoritmo SQP

El algoritmo de SQP (Programación cuadrática secuencial [34]) puede ser utilizado para resolver problemas de optimización no lineales y es basada en la resolución de una secuencia de subproblemas de optimización de programación cuadrática. En este enfoque, la función objetivo se sustituye por una aproximación cuadrática y las restricciones son reemplazadas por aproximaciones lineales, que constituyen una generalización del método de Quasi-Newton para la minimización sin restricciones [34]). El algoritmo SQP puede ser utilizado para resolver el siguiente problema de optimización no lineal:

$$P1: \begin{cases} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a:} & c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, l \\ & h_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = l + 1, \dots, m \end{cases}$$

En la solución del problema de optimización (P1) la idea principal es representar el problema como una aproximación de un problema de programación cuadrática

basado en la aproximación cuadrática de la siguiente función Lagrangiana.

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i c_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=l+1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

donde λ_i representa el $i^{\text{ésimo}}$ multiplicador de Lagrange.

Con esta consideración el problema cuadrático puede ser expresado linealizando las restricciones como se muestra a seguir.

$$\text{P2:} \begin{cases} \text{minimizar} & \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k \\ \text{sujeto a:} & c_i(\mathbf{x}_k) + \nabla c_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k = 0, \quad i = 1, \dots, l \\ & h_i(\mathbf{x}_k) + \nabla h_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k \leq 0, \quad i = l + 1, \dots, m \end{cases}$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$ representa la aproximación de la matriz Hessiana de la función Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \lambda)$ evaluada para \mathbf{x}_k ($k^{\text{ésima}}$ iteración) y λ_i , y \mathbf{d}_k es la dirección de corrección del punto \mathbf{x}_k .

El problema de optimización (P2) es resuelto mediante los siguientes pasos:

1. Escoger un punto de partida \mathbf{x}_0 y un multiplicador de Lagrange λ_0 . Hacer $k = 0$.
2. Calcular las funciones $f(\mathbf{x}_k)$, $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$, $c_i(\mathbf{x}_k)$, $\nabla c_i(\mathbf{x}_k)$, $h_i(\mathbf{x}_k)$ y $\nabla h_i(\mathbf{x}_k)$.
Resolver el problema de programación cuadrática (P2) para obtener el vector \mathbf{d}_k y \mathbf{x}_k .
3. Se realiza una búsqueda línea unidimensional para determinar el tamaño de paso α_k , en la dirección \mathbf{d}_k tal que $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ es un punto que contribuye a la disminución de la función objetivo.
4. Determinar el próximo punto $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ y verificar los criterios de convergencia.

5. Si los criterios de convergencia están satisfechos luego \mathbf{x}_{k+1} es la solución óptima, si no:
 - a) La matriz de aproximación de la Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$ se actualiza usando la formulación BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno [34]), que es la formulación estándar utilizada en MATLAB.
 - b) Hacer $k = k + 1$ y regresar al paso 2.

B.2. Ejemplo de aplicación

Esta sección muestra los resultados de usar el algoritmo de solución SQP para el modelo teórico de la viga empotrada libre presentada en el capítulo 6. El algoritmo se utilizó para diseñar controladores de orden 12, 10, 8, 6 y 4, resolviendo el problema de optimización presentado en (5.7), para obtener los controladores de orden reducida en la forma canónica modal.

El método SQP fue implementado utilizando la función *fmincon* de MATLAB con las siguientes características: Algoritmo SQP (Algorithm=sqp), tolerancia de la función objetivo (TolFun=1e-8), tolerancia de las restricciones (TolCon=1e-8) y número máximo de iteraciones (maxiter=100). Los valores de los parámetros se eligieron para permitir la comparación con los resultados obtenidos usando algoritmos genéticos.

El algoritmo SQP mostró sensibilidad en la solución de este problema de optimización. Cuando el punto de partida es el origen ($\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$) el algoritmo SQP no logró minimizar la función objetivo para una dirección viable de descenso terminando el proceso de búsqueda rápidamente sin éxito (número de iteraciones realizadas = 1). En esta situación los algoritmos genéticos si consiguen encontrar una solución factible.

Los resultados de usar el algoritmo SQP para el diseño de controladores de

orden reducida en la forma canónica modal se muestran en la Tabla B.1.

Tabla B.1: Resultados de los 5 controladores diseñados usando la planta “real” para el algoritmo SQP y los algoritmos genéticos - método en la forma canónica modal

Orden del controlador	Algoritmo SQP		Algoritmos genéticos	
	Solución factible?	Reducción de la $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty} [N.s^2]^{-1}$	Solución factible?	Reducción de la $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty} [N.s^2]^{-1}$
12 × 12	si	2831	sí	7643
10 × 10	no	—	sí	8197
8 × 8	no	—	sí	7032
6 × 6	sí	2788	sí	7507
4 × 4	sí	2877	sí	6391

Los resultados presentados en las tabla B.1 se obtuvieron directamente utilizando el modelo de la planta “real” para un punto de partida del controlador elegido aleatoriamente en un intervalo de -5 a 5. Puede verse en la Tabla B.1 que el algoritmo SQP sólo pudo encontrar controladores factibles en controladores de orden 4, 6 y 12. En el caso de los controladores de orden 8 y 10 el algoritmo SQP no logró encontrar soluciones factibles, es decir, los controladores obtenidos no lograron estabilizar el sistema en lazo cerrado.

La Figura B.1 muestra la respuesta temporal de la aceleración vertical del extremo de la viga sometida a la perturbación externa para el sistema con y sin control (controlador en la forma modal de orden 4 × 4). La respuesta del desplazamiento del extremo de la viga para este controlador es mostrado en la Figura B.2. En esta última figura se puede observar más claramente la minimización de la amplitud de vibración del extremo de la viga a nivel de desplazamiento.

Se puede concluir que para este ejemplo los algoritmos genéticos lograron soluciones factibles y mejores (mayor minimización de la norma \mathcal{H}_{∞} garantizando estabilidad del sistema controlado) que la obtenida con el algoritmo SQP. El algoritmo SQP

presentó algunos problemas de convergencia terminando el proceso de búsqueda rápidamente debido a que no encontraba direcciones de búsqueda factibles. En este ejemplo los GA mostraron mayor robustez en el proceso de búsqueda de la solución factible.

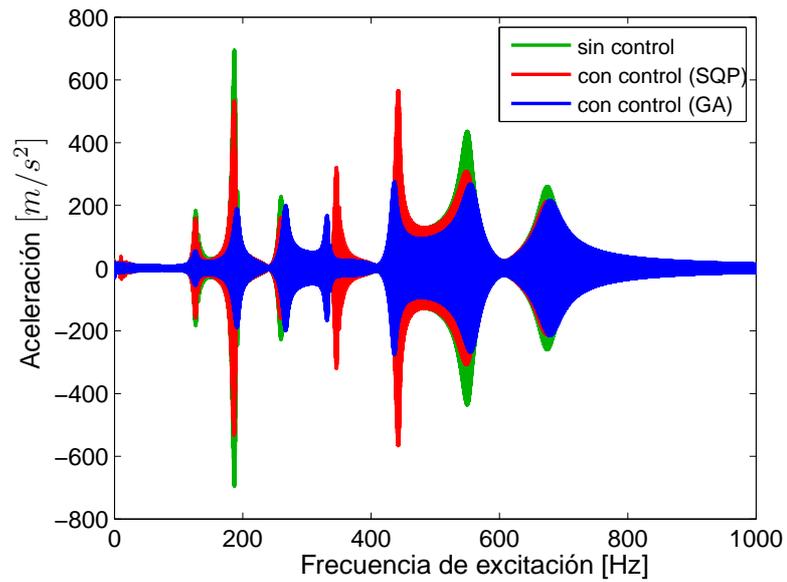


Figura B.1: Aceleración del extremo de la viga - sistema controlado en la forma modal (algoritmo SQP y algoritmo genético) y no controlado, controlador de orden 4×4

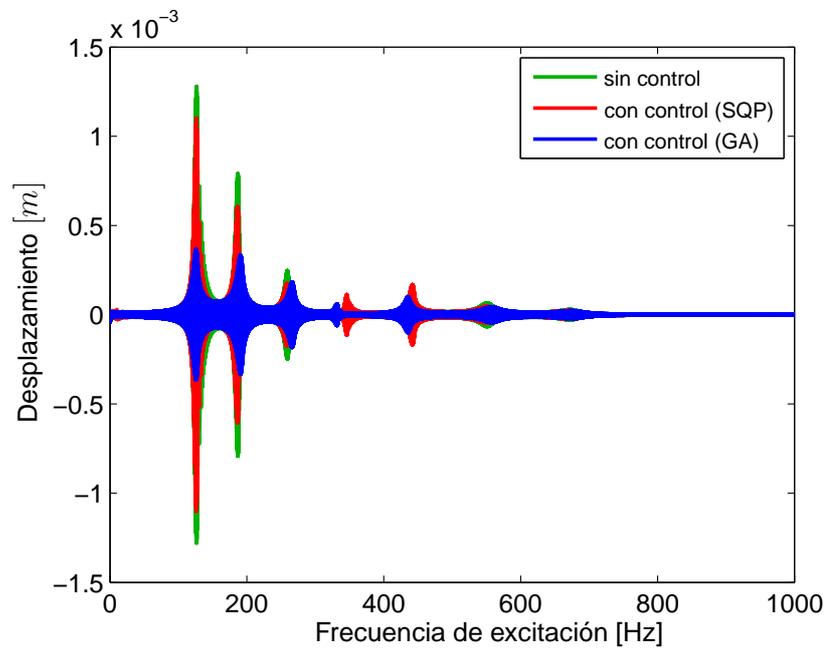


Figura B.2: Desplazamiento del extremo de la viga - sistema controlado en la forma modal (algoritmo SQP y algoritmo genético) y no controlado, controlador de orden 4×4

Apéndice C

ALGUNOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

A continuación se mostraran algunos resultados experimentales retirados del trabajo de la autora de esta tesis en [8]. El banco experimental montado es mostrado en la Figura C.1. El método de diseño de controladores de orden reducida vía GA fue probado en esta viga de aluminio empotrada libre, donde el esquema de la viga experimental es mostrado en la Figura C.2, con módulo de elasticidad $E = 70 \text{ GPa}$ y densidad $\rho = 2880 \text{ Kg/m}^3$, altura de la sección transversal $b = 0,032 \text{ m}$ y base de la sección transversal $a = 0,003 \text{ m}$.

La viga es controlada mediante la aplicación de un momento en el punto A. Una perturbación se aplica en el punto B en la forma de momento. En el punto C de la viga se coloca un sensor para la medición de la aceleración.

Para la generación del momento en el punto A se colocó un actuador piezoeléctrico. Para la generación del momento en el punto B se utilizó un par de actuadores piezoeléctricos. Para medir la señal en el punto C se utilizó un acelerómetro. Para el proceso de síntesis y análisis no se consideraron los efectos de acoplamiento de los actuadores piezoeléctricos.

Para el proceso de aplicación de los momentos en los puntos A y B fueron usados dos amplificadores de potencia dedicados a los actuadores piezoeléctrico. Para la



Figura C.1: Viga experimental empotrada-libre implementada en el Laboratorio de Mecánica Computacional, en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la UNICAMP.

medición de la señal en el punto C se utilizó un acondicionador de señal con el fin de evitar problemas de *aliasing* de la señal enviada por el acelerómetro. El esquema electrónico de la colocación de estos componentes se muestra en la Figura C.3.

Para el proceso de adquisición y control de los datos fue utilizado un computador con placa Dspace modelo DS1104.

De acuerdo con el montaje de la viga mostrada en la figura C.3 una señal de excitación fue aplicada en los puntos de entrada A y B individualmente. Para cada entrada se midió la respuesta de la aceleración del punto C. La señal de excitación utilizada fue en la forma de una barrida senoidal de 0 a 4000 Hz en un tiempo de barrida de 10 segundos, la amplitud máxima de 0,1 V y una media cero.

Una vez adquiridas las señales en el punto C, el modelo de la viga es obtenido a través del algoritmo de realización de autosistemas (ERA) presentado en [31], donde

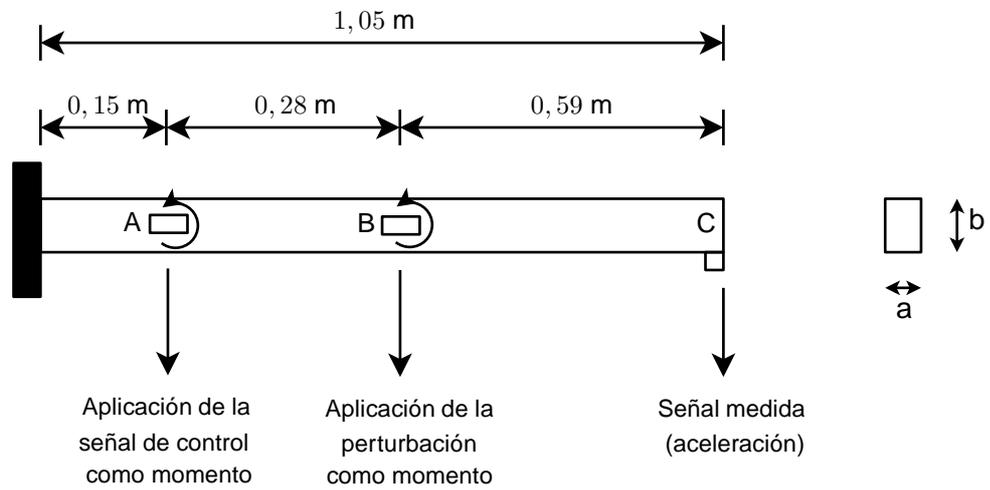


Figura C.2: Distribución de la viga para el proceso de control

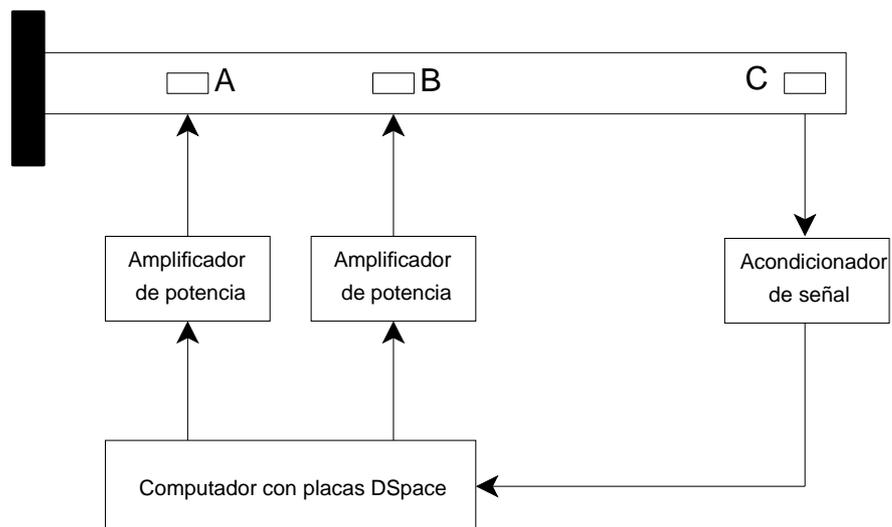


Figura C.3: Esquema del montaje experimental de la viga

el modelo discreto obtenido es transformado en un modelo continuo usando la función *d2c* del MATLAB. El modelo estimado de la viga obtenido utilizando el algoritmo ERA es de orden de 50×50 . La elección del orden del modelo estimado se hizo considerando los picos de resonancia más altos de la viga. Los modelos obtenidos de orden mayores a 50×50 no mostraron grandes picos de resonancia a tomarse en cuenta en el proceso de diseño. Para la verificación de la validez de las señales adquiridas en la región de interés es mostrada la función de coherencia o correlación de la salida de aceleración en el punto C con respecto a la entrada de perturbación en el punto B. Esta función es mostrada en la Figura C.4 y se puede verificar que en la región de interés no hay mucha incidencia del ruido de medición sobre la señal medida (sobre todo en la alta frecuencia).

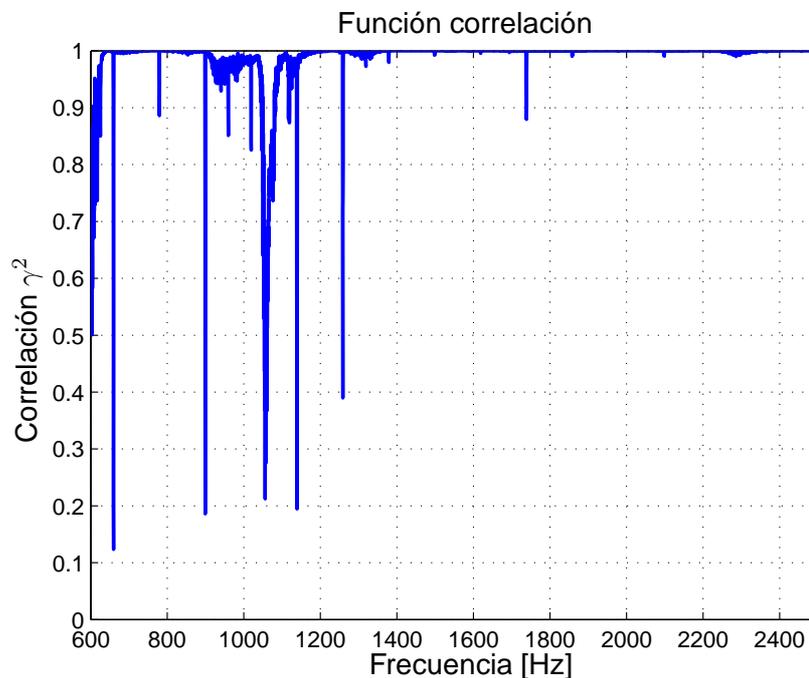


Figura C.4: Función correlación de la salida de aceleración con respecto a la entrada de perturbación

Adicionalmente, son mostrados en la Figura C.5 la señal de aceleración adquirida

de forma experimental (usada para el proceso de estimación del modelo de la viga) y la señal de aceleración obtenida del modelo estimado de orden 50×50 usando el algoritmo ERA. En esta figura se puede observar que el modelo estimado se aproxima bastante al modelo real de la viga de aluminio empotrada-libre.

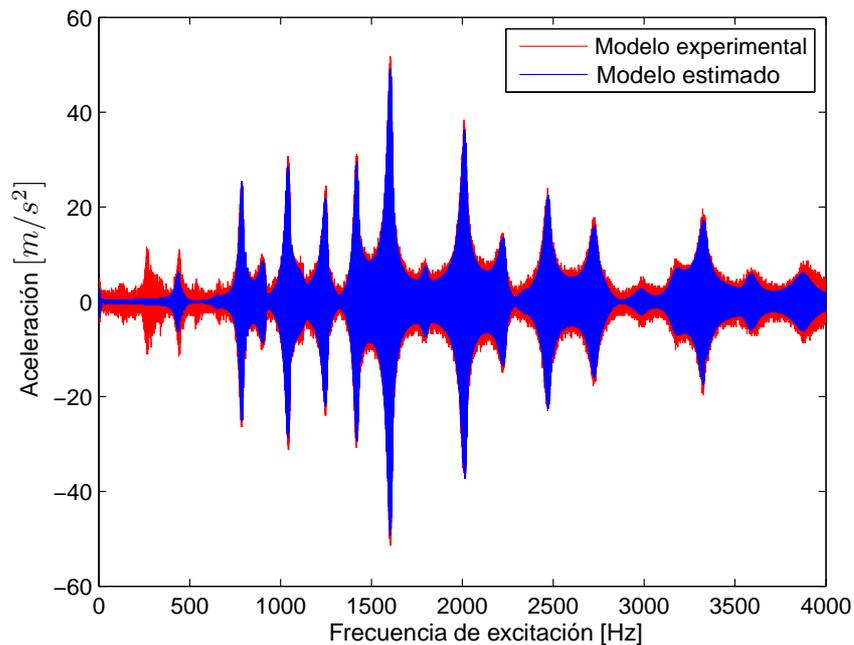


Figura C.5: Señal de aceleración: obtenido de medición experimental (Modelo experimental) y obtenido del modelo estimado

Para el proceso de diseño de los controladores de orden reducida el modelo obtenido fue truncado en 10 y 6 modos de vibrar para los modelos de la planta “real” y nominal respectivamente. El diagrama de respuesta en frecuencia de los modelos de la planta “real” y nominal son mostrados en la Figura C.6.

Para evaluar el desempeño del sistema controlado en la región de interés, una señal de perturbación externa es aplicada en forma de una barrida senoidal de amplitud 1 V y media cero, a partir de 1 Hz y terminando en 2500 Hz, en un tiempo de barrida de 10 segundos con una frecuencia de muestreo de 20 kHz.

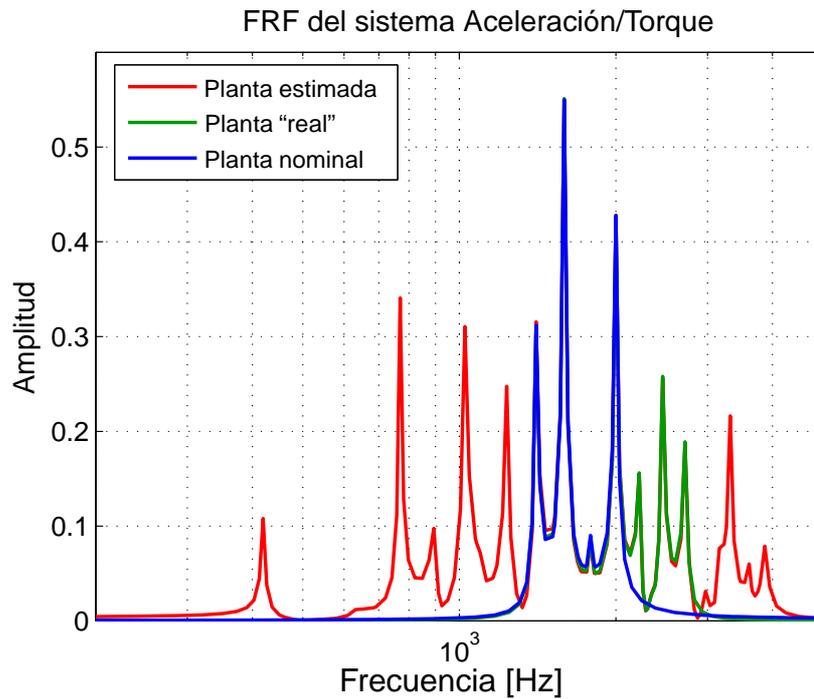


Figura C.6: Respuesta de frecuencia del modelo de la planta estimada a partir de datos experimentales, modelo de la planta "real" y modelo de la planta nominal.

Con el fin de limitar el espacio de búsqueda del controlador son definidos las características modales del controlador como sigue:

$$0 < \xi < 5$$

$$80 \text{ Hz} < w_n < 2000 \text{ Hz}$$

Basado en estas configuraciones del algoritmo fueron diseñados controladores de orden reducida donde algunos resultados son presentados a seguir. Para realizar la implementación práctica mediante la placa dSPACE, los controladores obtenidos fueron discretizados. En el proceso de discretización de los controladores fue usado el método de discretización de Tustin o transformación bilineal [35] usando la función *c2d* del MATLAB a una frecuencia de muestreo de 20 kHz.

C.1. Controladores de orden reducida usando el modelo de la planta nominal y funciones de ponderación

Usando el siguiente par de funciones de ponderación para evitar el fenómeno de *spillover*, será mostrado los resultados para un controlador de orden 4.

$$\mathbf{W}_p = \frac{0,01603s + 31550}{s + 4111}, \quad \mathbf{W}_u = \frac{1,778s + 6255}{s + 5,575 \times 10^4}.$$

Las matrices de estado del controlador de orden 4 son:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -1,747 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -183,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -441,3 & 9787 \\ 0 & 0 & -9787 & -441,3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 7,499 \\ 37,78 \\ -11 \\ 95,54 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 18,06 & 33,86 & 92,13 & -11,17 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = 0.$$

La norma \mathcal{H}_∞ de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa en la forma de torque del sistema controlado y no controlado son $514,5 [m.s^2/V]$ y $366 [m.s^2/V]$, respectivamente, como mostrado en la Figura C.7.

En la Figura C.8 es mostrada la aceleración vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. En esta figura se puede ver que la amplitud del mayor pico de respuesta temporal del sistema no controlado tuvo una reducción del 58,63 % con respecto al sistema controlado.

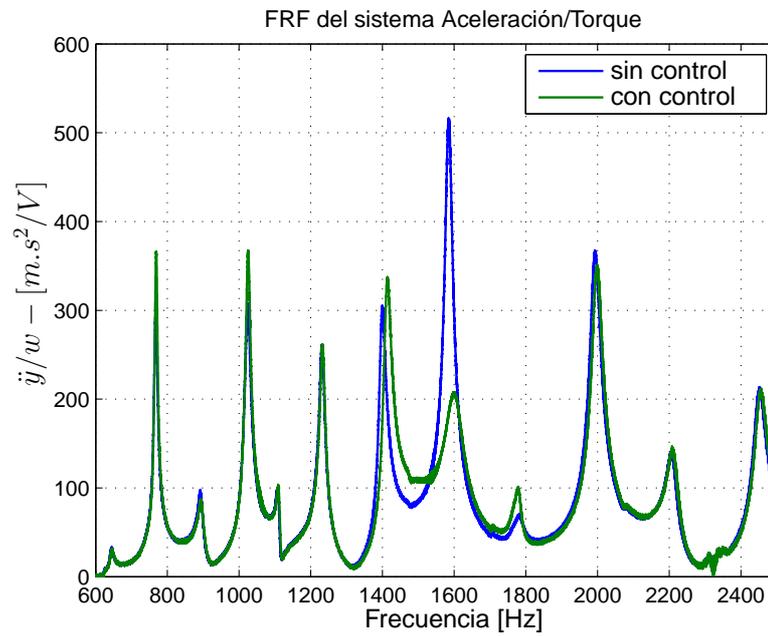


Figura C.7: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4 .

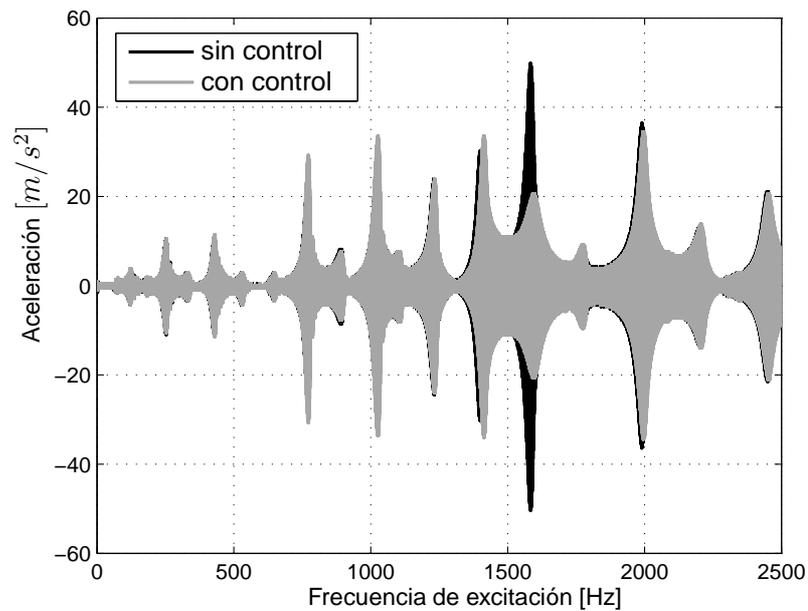


Figura C.8: Respuesta del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4

C.2. Controladores de orden reducida usando el modelo de la planta “real”

En este caso no es necesario el uso de las funciones de ponderación, pues se usa directamente el modelo de la planta “real”. Con esta consideración será mostrado a seguir los resultados para un controlador de orden 4.

Las matrices de estado del controlador de orden 4 son:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -3973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -813,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -630,2 & 9793 \\ 0 & 0 & -9793 & -630,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 33,53 \\ 31,03 \\ 2,735 \\ 102,3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 7,499 & 29,63 & 95,68 & 19,42 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = 0.$$

La norma \mathcal{H}_∞ de la señal de aceleración vertical del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa en la forma de torque del sistema controlado es $363 [N.s^2]^{-1}$, como mostrado en la Figura C.9.

En la Figura C.10 es mostrada la aceleración vertical del extremo de la viga sujeto a la señal de perturbación externa, con y sin control. En esta figura se puede ver que la amplitud del mayor pico de respuesta temporal del sistema no controlado tuvo una reducción del 51,89 % con respecto al sistema controlado.

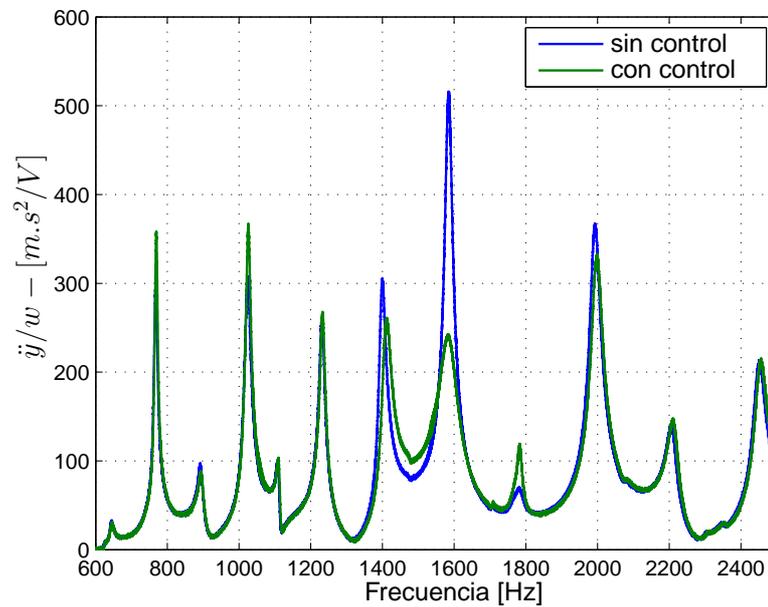


Figura C.9: Respuesta en frecuencia de la aceleración del extremo de la viga con respecto a la perturbación externa - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4 .

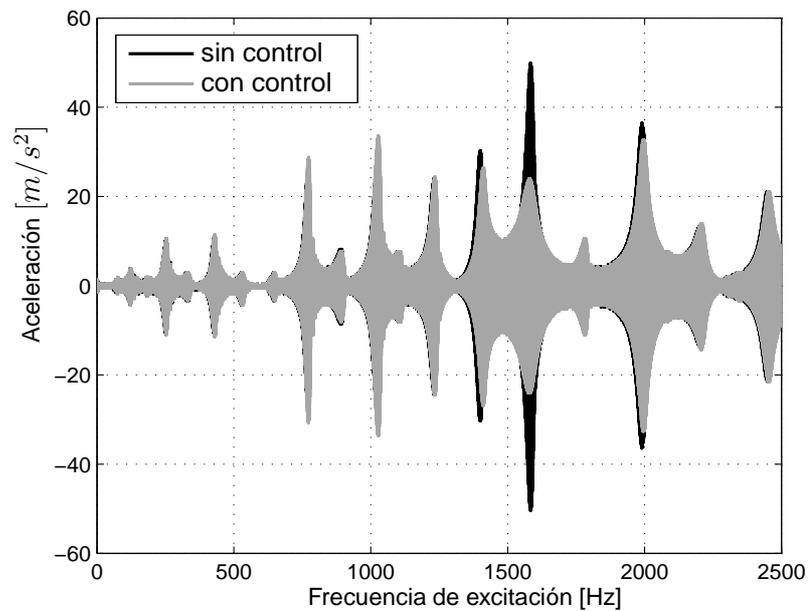


Figura C.10: Respuesta del extremo de la viga - sistema controlado y no controlado, controlador de orden 4×4

C.3. Algunos comentarios

El método utilizado en este trabajo, para el diseño de controladores de orden reducida, consiguió una buena minimización de la norma \mathcal{H}_∞ garantizando estabilidad del sistema controlado. El método logró diseñar controladores usando tanto el modelo de la planta nominal con funciones de ponderación como el modelo de la planta "real" únicamente, logrando reducir hasta en un 58,63% la amplitud del mayor pico de respuesta temporal. Con estos resultados se puede verificar que el método de diseño de controladores de orden reducida usado en este trabajo es factible para implementaciones experimentales. Más detalle sobre esta implementación experimental puede ser encontrado en [8], donde son mostrados y discutidos los resultados para 8 controladores diseñados.