UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

PROGRAMA ACADEMICO DE INGENIERIA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS

Análisis e Implementación de Procedimientos para Solución de Problemas de Distribución y Localización de Centros de Suministros

TE5I5 PRESENTADA PARA OPTAR EL TITULO DE INGENIERO INDUSTRIAL

ALFREDO JOSÉ CELI PALOMINO

LIMA – PERÚ

1973

INDICE

INTRODUCCION

Considerando la variedad de aplicaciones que en la actualidad se hacen con las computadoras y teniendo en cuenta la necesidad de contar con programas que resuelvan determinados problemas teóricos y/ o prácticos cuyas soluciones ayuden a un mejor comprensión de los temas tratados, este trabajo trata de investigar e implementar Algoritmos Heurísticos aplicados *a* la solución de problemas de localización y distribución de centros de suministros se presentan en el caso del problemas de reparto, para el problema de transportistas.

En lo que respecta a localización de centros de suministros, se tiene varias localidades o clientes que requieran ser abastecidos da algún producto (alimentos, combustibles, personal, etc.) para lo cual debe determinarse la ubicación del depósito o almacén desde donde serán satisfechas las demandas de modo que se minimice una función objetivo que puede ser distancias, costos, etc.
o una combinación de estas.

En lo referente e distribución (clásico problema de transportistas) se conoce las demandas de los clientes, las distancias desde ellos al centro da abastecimiento (depósito) y las distancias entre los clientes. Se trata de encontrar las rutas que debe seguir una flota de vehículos para satisfacer la demanda de todos los clientes y que cumpliendo con las restricciones que tenga el problema minimice distancias, costos o una combinación de ambas optimizando en consecuencia el número de vehículos a usar.

La finalidad de este trabajo es presentar un resumen de la información encontrada que formaría parte de lo que sería el paquete de Sistemas de análisis de Redes (SAR), que puede facilitar a los alumnos que de desarrollan el punto respectivo en los cursos de Investigación de Operaciones a una mejor comprensión de lo tratado.

El término "EURÍSTICO" no es más que la aplicación de sentido común a 1a técnica de programación pare orientar mejor la solución de los problemas y permite en cierto modo la optimización del tiempo de computadora y memoria de la misma, simplificando el proceso de cálculo y sacrificando algunas veces el valor óptimo por la reducción de costos de la solución.

También con este trabajo se trata de incentivar a los alumnos que lleven cursos orientados al campo computacional como por ejemplo: Sistemas de Procesamiento de Información (Cobol). Control de Inventarios en lo que respecta a lotes económicos, puntos de reordenamientos, etc. Planeamiento y Control de la producción en lo referente a predicciones de demanda; Métodos Estadísticos para calcular ajustes de curvas; Investigación de Operaciones en simulación, transporte, etc.; para que desarrollen o implementen programas que permitan formar una "biblioteca" que facilite la función didáctica de la Universidad entre otras cosas.

El contenido de esta tesis en forma general es el siguiente:
E1 capítulo *1* trata de la localización del depósito simple de un conjunto de localidades con demandas determinísticas. Se tiene (como se mencionó antes) una serie de localidades con demandas conocidas y la ubicación de las localidades respecto do un origen de coordenadas dando como base de medidas. Se trata de ubicar la localización del depósito simple desde donde la distribución de productos optimice la función costos ó distancias. Incluyo en este capítulo un programa versión explicado detalladamente que resuelve estos problemas empleando los métodos que también se describen.

E1 segundo capítulo contiene la clasificación del problema de programa ción de Vehículos o problema do Reparto, con explicaciones sucintas de cada subdivisión, donde una de ellas es el problema de transportistas (área que comprende esta tesis).

En el tercer capítulo presento el problema de transportistas y varios algoritmos conocidos que resuelvan este problema. He desarrollado un ejemplo numérico en casi todos los algoritmos programados para indicar la forma de resolver los problemas.

En el cuarto capítulo explico detalladamente el Algoritmo de Clarke y Wright que resuelve el problema de transportistas y con ejemplos numéricos indico el procedimiento de solución.

En el quinto capítulo presento el Algoritmo de Tillman y Cochrane que también resuelve el problema de transportistas y con un ejemplo numérico voy explicando la forma en que éste algoritmo enfoca y resuelve los problemas.

En el capítulo VI muestro el diagrama en grandes bloques del programa Fortran versión DOS que be diseñado para aplicar el algoritmo de Tillman y Cochrane. También indico la forma que tienen que darse los datos y el significado de los repartos que se publican. Las soluciones encontradas para varios problemas corridos en la computadora de la Universidad se presentan como anexos de esta tesis.

Teniendo en cuenta la necesidad e importancia de la aplicación del ritmo de Tillman a un caso práctico, he recurrido e IPSM (Empresa pública de servicios Agropecuarios) que es la entidad encargada de la administración, comercialización y distribución de productos alimenticios radiante la cadena de supermercados Super-Epsa, para desarrollar en el último capítulo da ésta tesis el problema de distribución de dicha empresa. En este capítulo planteo el problema y muestro los resultados los resultados obtenidos usando el programa del algoritmo antes mencionado.

CAPÍTULO I

LOCALIZACIÓN DEL DEPÓSITO SIMPLE DE UN CONJUNTO DE LOCALIDADES CON DEMANDAS DETERMINISTICAS

Existe una gran variedad de problemas en donde se conoce les posibles localizaciones de ciertos puntos de distribución o consumo dadas por condiciones de mercado, precios, etc.; cuyos requerimientos deben satisfacerse desde un terminal simple$_0$ La principal dificultad radica en "donde" debe estar ubicado este terminal simple de modo que pueda ser minimizada ya sea la distancia total recorrida durante el reparto, el costo total de transporte o finalmente une combinación de costos y distancias.

Hay también situaciones por las que un punto que ha sido elegido ceno centro de abastecimientos, debido entre otras cosas a:

- variaciones sustanciales de demanda en favor de ciertos clientes,
- en el caso de ser alquilado el local, piden su desocupación o aumentan el alquiler en forma inconveniente a los intereses de la empresa,
- los costos de transporte sufren alteraciones, etc.;

crean le necesidad de cambiar la ubicación del depósito a fin de conseguir siempre la minimización de factores costos, distancias, tiempos, etc.

1.1 Modelo del problema

E1 modelo consta de un depósito cuya localización en coordenadas cartesianas se define como X_1Y_1. Este depósito debe suministrar algún producto a clientes cuyas coordenadas referidas a un origen determinado cualquiera son X_iY_i , donde i = 1,2,.....n.

Denominando al costo de transporte Cj los productos desde el depósito al cliente j; el costo total de distribución es:

$$H = \sum_{j=1}^{n} C_j \qquad (1.1)$$

Considerando un juego de posibles valores C_j a los cuales podemos determinar algunas alternativas del depósito desde donde deben ser servidos, la solución más adecuada puede obtenerse de la evaluación de la ecuación (1.1) para cada localización.

Si el costo del transporte depende en forma lineal del peso, de los productos y de la distancia recorrida, entonces :

$$C_j = \alpha_{1j} W_j d_j \qquad (1.2)$$

donde :

α_{1j} costo por unidad de peso y por unidad de distancia desde el depósito al cliente j.

W_j peso transportado al cliente j desde el depósito (peso del cliente).

d_j distancia desde el cliente j al depósito.

Si la distancia en línea recta (llamada distancia radial) es la que usamos en la solución de problemas, ésta será :

$$d_j = \left[(X_1 - X_j)^2 + (Y_1 - Y_j)^2 \right]^{1/2} \qquad (1.3)$$

Si α_{1j} depende sólo del cliente que debe ser servido y no de la ubicación del depósito, tenemos :

$$C_j = \alpha_j W_j d_j \qquad (1.4)$$

resultando la función costos

$$H = \sum \alpha_j W_j d_j \qquad (1.5)$$

También en esta ecuación, los parámetros pueden no ser lineales y en ese caso estarían representados por algunas funciones contínuas.

Cuando la velocidad de entrega de productos tiene gran significancia, existe una función que relaciona la cantidad demandada por cualquier cliente j, dependiendo del tiempo de entrega. Esta función es :

$$W_j = W_j^{*} \, e^{-a \frac{t_j}{t_j^{*}}}$$

donde .

W_j cantidad ordenada por el cliente j cuando el tiempo de entrega es t_j .

W^{*} cantidad ordenada con tiempo de entrega t_j^{*} .

t_j^{*} tiempo de entrega de algún competidor.

a factor de proporcionalidad para especificar área de demanda y producto.

Hay otros casos donde el tiempo de entrega al cliente j es proporcional al logaritmo de la distancia de ese cliente ó en forma más general, cualquier función conveniente puede usarse en un caso particular, sujeta a la condición de que la función es contínua.
Por simplicidad debe considerarse que la función de costo total es lineal y se calcula según la ecuación (1.5).

1.2 METODOS DE SOLUCION.-

Si consideramos que tenemos sólo dos clientes, el depósito debe estar ubicado en la línea recta que une a éstos clientes y en un punto proporcional a los pesos.
Si las demandas de los clientes son iguales y α_j para todos ellos es también igual, el problema trata de minimizar la suma de las distancias radiales.
Tomando ahora un ejemplo con tres clientes; si los puntos forman un triángulo cuyos ángulos son menores que 120°, entonces la ubica

ción óptima del depósito es aquella desde donde se pueden trazar rectas a los vértices del triángulo y que forman ángulos de 120° (Fig. 1.1). Si el triángulo resultante de unir con rectas los clientes tiene un ángulo mayor que 120°, la ubicación del depósito deberá ser el vértice que tiene éste ángulo (Fig. 1.2).

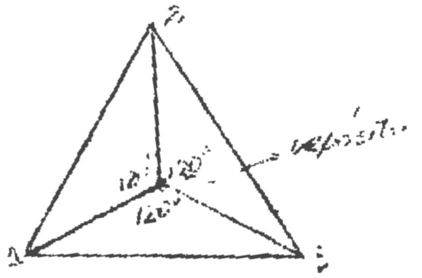


Fig. 1.1

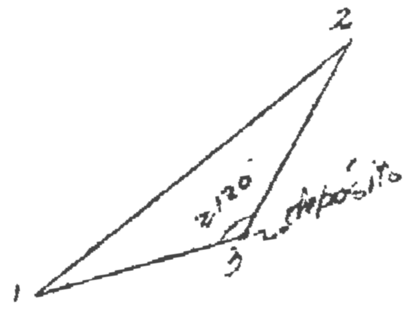


Fig. 1.2

En el caso de cuatro clientes, el punto que proporciona la mínima suma de las distancias radiales es la intersección de las diagonales del cuadrilátero formado como se muestra en la figura (1.3) y si la distribución de los clientes no permite la formación de un cuadrilátero convexo, la posición óptima del depósito coincide con el cliente interno (punto 2 de la Fig. 1.4).

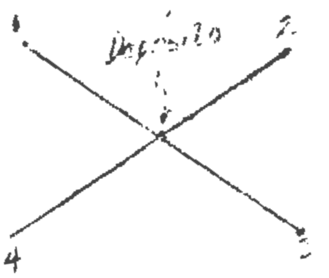


Fig. 1.3

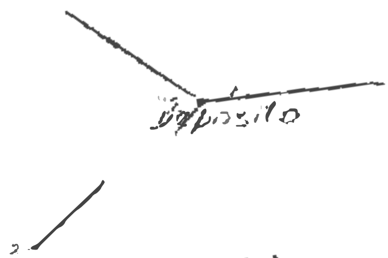


Fig. 1.4

La evidencia de estos resultados se basa en simples relaciones geométricas. Si en las Fig. 1.3 y 1.4 se toma cualquier ubicación diferente a la mostrada para el depósito; puede demostrarse geométricamente que la distancia total de esta nueva ubicación es mayor que la suma de las distancias mostradas como ejemplo.

Obviamente; para problemas con un gran número de clientes con demandas diferentes, la solución es mucho más compleja y es necesario recurrir a otros métodos.

1.2.1 METODO DEL CENTRO DE GRAVEDAD.-

Este método se ha usado por algún tiempo; su aplicación es muy simple pues considera al centro de gravedad de los clientes como el lugar donde debe estar ubicado el depósito de distribución.

Las cocordenadas del centro de gravedad se encuentran por:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{\sum W_J X_J}{\sum W_J} \\ \bar{Y}_1 &= \frac{\sum W_J Y_J}{\sum W_J} \end{aligned}\right\rangle \qquad (1.6)$$

Un método alternativo que también se ha usado emplea el centro de gravedad ponderado; por ejemplo, ponderado respecto al costo de transporte. Este método ensaya diferentes porcentajes de transporte a diversos clientes, siendo para ése caso las coordenadas del depósito :

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum n_J W_J X_J}{\sum n_J W_J} \quad \text{y} \quad \bar{Y}_1 = \frac{\sum n_J W_J Y_J}{\sum n_J W_J}$$

donde n_j es el costo por unidad de peso (ó cantidad). Este método usa frecuentemente n_j como un valor fijo debido principalmente a la simpleza de cálculos que requiere. Vergin y Rogers han demostrado que el centro de gravedad no necesariamente es la solución óptima de la función costos mostrada en la ecuación (1.5). Si hacemos la derivada parcial de la ecuación (1.5) respecto a la coordenada del depósito X_1, igual a cero; resolviendo ésta derivada tendremos :

$$X_1^* = \frac{\sum \alpha_j W_j X_j / d_j}{\sum \alpha_j W_j / d_j} \qquad (1.7)$$

donde X_1^* es el valor mejorado para las coordenadas del depósito. Vergin y Rogers muestran que cuando los pesos requeridos por todos los clientes son iguales ($W_j = W$) la ecuación (1.7) puede simplificarse a :

$$X_1^* = \sum M_j X_j$$

donde :

$$M_j = \frac{\prod_{k \neq j}^{n} d_k}{\sum_{\ell=2}^{n} \left(\prod_{k \neq \ell}^{n} d_k \right)}$$

siendo d_k la distancia del depósito al cliente k ($k = 2,3 \ldots, n$) y $\prod d_k$ el producto de los d_k.

Si consideramos ahora que

$$\sum_{j=2} M_j = 1 \qquad (1.8)$$

entonces X_1^* es el promedio ponderado de todas las coordenadas X . También para el caso especial que

$$M_j = \frac{1}{n} \text{ , para todo } j \qquad (1.9)$$

entonces : $$X_1^* = \bar{X}_1 = \sum_{j=2}^{n} X_j / n \qquad (1.10)$$

Existe una diferencia entre la ubicación óptima del depósito y la respuesta que resulta del método del centro de gravedad. La demostración de ésta diferencia se aprecia en el siguiente ejemplo :

Consideremos que dos clientes P_2 y P_3 tienen demandas W_2 y W_3 respectivamente y la distancia entre ellos es D (Fig. 1.5).

Fig. 1.5

Si localizamos el depósito a una distancia X medida a partir de P_2, el momento del sistema con respecto al depósito es :

$$H = W_2 X + W_3 (D-X)$$

ó: $$H = (W_2 - W_3)X + W_3 D \qquad (1.11)$$

Diferenciando con respecto a X :

$$\frac{dH}{dX} = (W_2 - W_3)$$

Si asumimos que $W_2 > W_3$; entonces, X debe ser lo más pequeño posible para minimizar H, ó sea $X = 0$, por lo que el depósito podría colocarse en la localidad P_2. Analogamente si $W_2 < W_3$, el depósito podría estar en P_3 y si $W_2 = W_3$, cualquier punto entre ambos clientos daría el mismo resultado.

Calculando el centro de gravedad del sistema, éste sería :

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum W_J X_J}{\sum W_J} = \frac{W_3 D}{W_2 + W_3}$$

aquí, las medidas X son hechas desde P_2 y asimismo $X_2 = 0$.

El momento $H_{\bar{X}_1}$ resulta de reemplazar X por $\bar{X}_1$ de la ecuación (1.11).

$$H_{\bar{X}_1} = (W_2 - W_3)\frac{W_3 D}{(W_2 + W_3)} + W_3 D$$

$$= \frac{2W_2 W_3 D}{W_2 + W_3} \qquad (1.12)$$

para mostrar que el centro de gravedad no necesariamente es la mejor ubicación para el depósito; los siguientes tres casos son examinados para calcular en cada uno el error involucrado.

<u>CASO 1</u> : $W_2 > W_3$

Como se ha expresado; la función de costos se minimiza cuando el depósito se encuentra en P_2 y el momento del sis temos es

$$H_1 = W_3 \cdot D \qquad (1.13)$$

Calculando la relación entre el momento de inercia del sistema (ecuación 1.12) y el momento mínimo cuando el depósito está en P_2 :

$$\frac{H_{X_1}}{H_1} = \frac{2\, W_2 W_3 D}{(W_2 + W_3) W_3 D}$$

$$= \frac{2W_2}{W_2 + W_3} \qquad (1.14)$$

valor que es mayor que 1.

CASO 2 : $W_2 = W_3$

Como se dijo anteriormente, cualquier punto entre P_2 y P_3 minimiza la función costos. Dividiendo (1.12) entre (1.13)

$$\frac{H_{X_1}}{H_1} = \frac{2W_2}{W_2 + W_3} = 1$$

Entonces, cuando $W_2 = W_3$, el centro de gravedad corresponde al mínimo valor de la función objetivo.

CASO 3 : $W_2 < W_3$

En forma similar al caso 1, el resultado obtenido es

$$\frac{H_{X_1}}{H_1} = \frac{2W_3}{W_2 + W_3} > 1$$

para ilustrar el error involucrado en la selección del centro de gravedad como ubicación del depósito tomemos el siguiente ejemplo : $W_2 = 4$ y $W_3 = 2$. Reemplazando éstos valores en la ecuación (1.14) obtenemos : $H_{X_1} / H_1 = 8/6$; por tanto, si se elige como ubicación del depósito el centro de grave dad, el error respecto del óptimo es 33.3 por ciento.

1.2.2 ANALOGIA MECANICA.-

El problema de ubicación del depósito también ha sido resuelto usando una analogía mecánica del tipo mostrado en la Fig. 1.6. Sobre una mesa se coloca un mapa con agujeros en la ubicación que corresponde a los clientes. Se pasan unas pitas que sostienen pesos proporcionales a las demandas de los clientes y en el otro extremo se unen a una pequeña argolla. Si la argolla se lleva a un lado y se suelta, los pesos (que representan las demandas de los clientes) hacen que la argolla se estabilice en el punto donde la energía potencial del sistema sea mínima y por la analogía considerada, éste punto representa la posición en que los costos de transporte minimizen la función objetivo, ó sea, significará la ubicación del depósito del sistema. Este método es simple y práctico y su principal ventaja (como dijo Shea en su artículo) es que "la analogía tiene un impacto visual que permite a la gente ver y entender lo que está sucediendo; esto es simple para satisfacer los propósitos del modelo de distribución con medios que la gente pueda ensayar inmediatamente afuera, con cualquiera

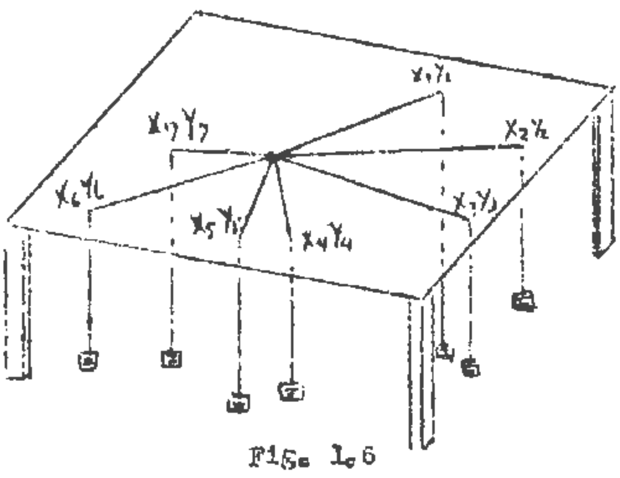


Fig. 1.6

de las ideas que tengan ó que podrían ocurrírseles y más importante, que es un excelente método para despertar el interés de la gente".

El método tiene también sus desventajas y entre las mas saltantes podemos citar :

- debido a la fricción entre las pitas y los agujeros, la posición final de la argolla puede ser indeterminada cuando el número de clientes sea demasiado grande.
- para problemas que requieran mas de un terminal, el peligro de suboptimalidad puede ser muy pronunciado.
- como lo indicaron Burshall y otros, la analogía no distingue entre pueblos, países, etc ó sea, no considera α_{1j} de la ecuación (1.2); además, si las relaciones de entrega dependen sólo de la ubicación de los clientes como se asumió para X_j en la ecuación (1.5), los pesos usados pueden ajustarse a representar $\alpha_j W_j$ y no W_j.
- el método no evalúa la función costos y esto quizás representa su mayor desventaja.

1.2.3 METODO NUMERICO ANALITICO.-

El método numérico analítico es el equivalente matemático de la analogía mecánica. Además, éste método puede usarse con funciones costos y permite incorporar diferentes porcentajes de transporte para clientes individuales en el caso que fuera necesario.

Tomando por conveniencia la ecuación (1.5) :

$$R = \sum \alpha_j W_j d_j$$

podemos minimizarla derivándola parcialmente con respecto a las coordenadas X_1 a Y_1 del depósito e igualando éstas derivadas a cero

$$\frac{\partial H}{\partial X_1} - \sum \alpha_j W_j (X_1 - X_j)/d_j = 0$$

y
$$\frac{\partial H}{\partial Y_1} = \sum \alpha_j W_j (Y_1 - Y_j)/d_j = 0$$

Estas ecuaciones pueden resolverse con respecto a X_1 e Y_1 obteniendo soluciones que pueden estimar la probable ubicación del depósito. Estas soluciones son:

$$X_1^* = \frac{\sum \alpha_J W_J X_J / d_J}{\sum \alpha_J W_J / d_J} \qquad (1.15)$$

$$Y_1^* = \frac{\sum \alpha_J W_J Y_J / d_J}{\sum \alpha_J W_J / d_J} \qquad (1.16)$$

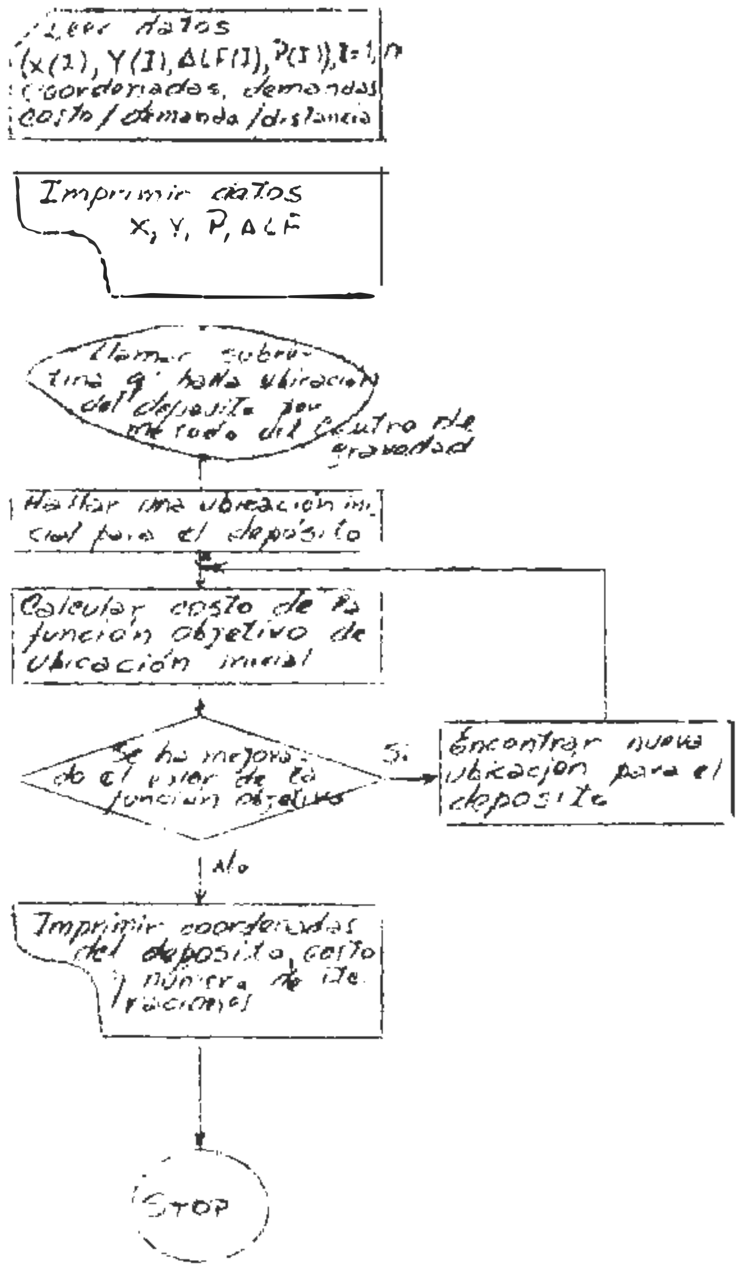
Usando los valores mejorados X_1^* e Y_1^*, las distancias d_j a cada cliente son recalculadas y el método continúa hasta que no más mejoras puedan hacerse.

1.2.3.1 **ALGORITMO.-**

El algoritmo consiste de los siguientes pasos:

1) Suponer una ubicación inicial para el depósito
2) Calcular los costos de acuerdo a la ecuación (1.5).
3) Determinar la función costos usando las coordenadas mejoradas de la localización del depósito. Si produce beneficio respecto al costo anterior, se va al paso 4; sino, concluye el problema.
4) Con las ecuaciones (1.15) y (1.16), determinar la nueva posible ubicación del depósito hasta que no más mejoras puedan hacerse

1.3 DIAGRAMA EN GRANDES BLOQUES DEL PROGRAMA FORTRAN APLICANDO AMBOS METODOS.-



1.4 EQUIVALENCIAS DE VARIABLES DEL PROGRAMA CON VARIABLES DE LA FORMULACION.-

Variable de la Formulación	Variable del programa	Descripción
H	COSTO	Función objetivo
α_i	ALF (I)	costo por unidad de peso por unidad de distancia desde el depósito al cliente j
x_i	X(I)	abcisa del cliente i
y_i	Y(I)	coordenada del cliente
w_i	P(I)	demanda del cliente i
d_i	D(I)	distancia radial desde el origen al cliente i
x_o	XX	abcisa de la nueva posición del depósito
y_o	YY	coordenada de la nueva posición del depósito

1.5 IDENTIFICACION DE VARIABLES DEL PROGRAMA.-

T	variable para lectura.
Z	variable para impresión
IVE(I)	vector blancos
IVEC(I)	vector lleno con rayas (-) para impresión
COS	variable que permite la comparación de la función objetivo para determinar si hay ó no mejora en la solución.
M	contador del número de iteraciones hasta hallar la solución

SW
SWX
SWY
SUMWX
SUMWY
SUMWD
COSA

variables que permiten almacenar datos de sumatorias

1.6 PROGRAMA PRINCIPAL.-

1.6.1 LECTURA DE DATOS.-

- La primera tarjeta de datos indica el número de puntos demanda.

```
  READ(T,1) N
1 FORMAT(I3)
```

- La segunda, tercera, cuarta y quinta tarjetas, llevan información de abscisas, coordenadas, demandas de cada cliente y coeficientes de peso por distancia de cada cliente.

```
  READ(T,2)(X(I),I=1,N)
  READ(T,2)(Y(I),I=1,N)
  READ(T,2)(ALF(I),I=1,N)
2 FORMAT(16F5.2)
  READ(T,4)(P(I),I= 1,N)
4 FORMAT(16F5.0)
```

Ejemplo:

X,Y,ALF : 5.20   4.15   1.55   6.00 ,etc

P : 150.   600.   85.   330. ,etc

1.6.2 PUBLICACION DE REPORTES.- Los reportes que publica este programa, son:

a) Una tabla con los datos del problema

Cliente num.	Co-ordenadas X	Co-ordenadas Y	Demanda clientes	Costo unitario
1	0.20	5.60	15.	2.

2	2.70	0.90	13.	1.
3	6.10	4.30	10.	8. 5
4	7.10	7.90	20.	4.

etc

b) Las coordenadas del depósito halladas por el método del centro de gravedad.

Ejemplo :

LA UBICACION DEL DEPOSITO POR EL METODO
DEL CENTRO DE GRAVEDAD ES:

X = 5.60
Y = 4,51

c) Las coordenadas del depósito halladas por el método numérico analítico.

Ejemplo :

LA UBICACION DEL DEPOSITO POR EL METODO
NUMERICO ANALITICI ES:

X = 5.58
Y = 4.53

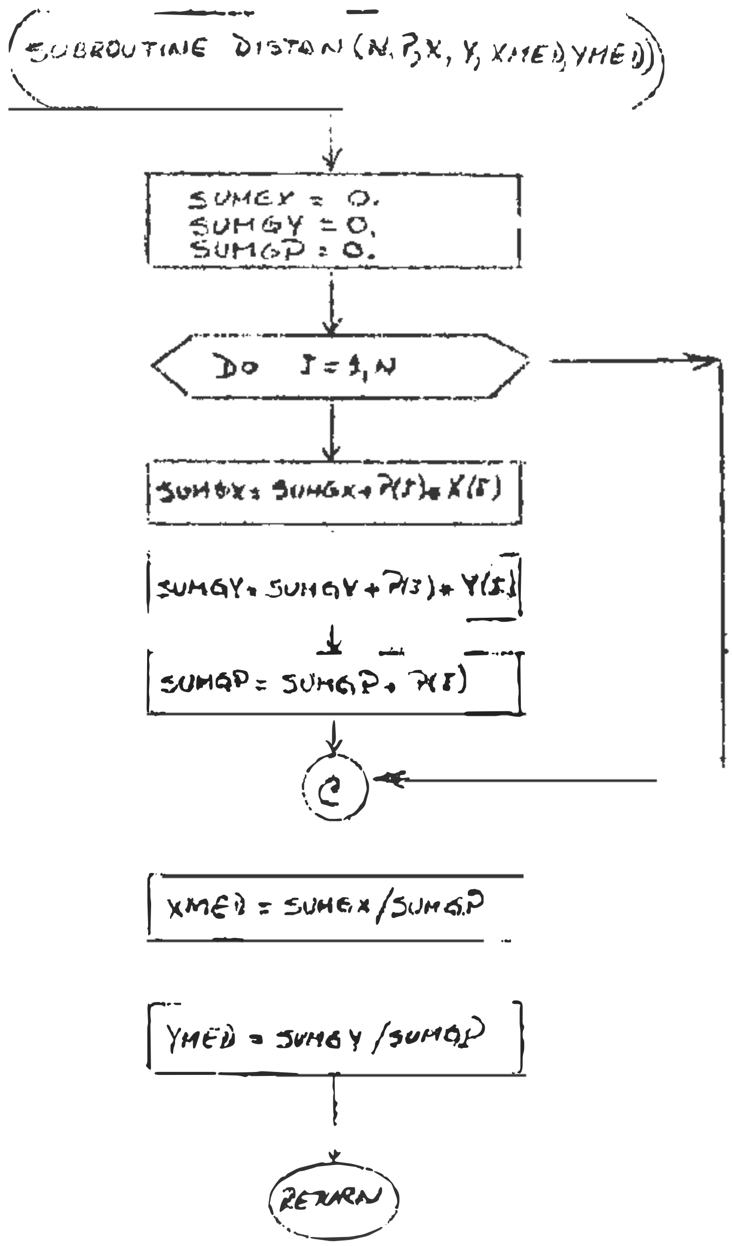
d) El costo total de entrega (valor de la función objetivo) y el número de iteraciones realizadas para llegar a este valor.

Ejemplo:

EL COSTO DE ENTREGA ES 100.35
EL NUMERO DE ITERACIONES HA SIDO 15

1.7 SUBRUTINAS.-

La única subrutina que tiene este programa, se llama DISTAN que es usada para calcular las coordenadas del depósito por el método del centro de gravedad, siendo su diagrama de flujo :



El programa Fortran (versión Watfor) y varios problemas resueltos con este programa se encuentran en los anexos de esta tésis.

CAPITULO II

REVISION DE LA LITERATURA.- PROGRAMACION DE VEHICULOS

2.1 INTRODUCCION.- El problema de programación de vehículos, fue originalmente planteado por Dantsig y Ramser y se puede formular como sigue: Un grupo de clientes, cada uno con su ubicación conocida y las exigencias de ciertos (requerimientos) productos, deben ser suministrados desde un terminal simple por medio de vehículos de capacidad conocida. El problema es el de diseñar las rutas desde este punto, sujetas a las siguientes restricciones:

A) Se debe satisfacer los requerimientos de todos los clientes.

B) No se debe violar la capacidad de los vehículos, es decir, la carga total asignada a cada uno, no debe exceder su capacidad por capacidad se entiende una cantidad multi-dimensional que representa el peso, volúmen, etc. disponible en el vehículo.

C) El tiempo total (alternativamente la distancia) debe calcularse para cada vehículo a fin de que complete su ruta y no debe exceder algún valor predeterminado; esto es una condición de contrato, normalmente.

D) Hay un tiempo más temprano y más tardío dentro del cual un cliente acepta un suministro y no se puede violar.

El objetivo de una solución se puede establecer en términos generales como aquel de minimizar el costo total de las entregas, es decir, la suma de los costos asociados con el tamaño de la flota y el costo de las rutas de entrega. Se puede así formular varios problemas asociados.

(i) Si la flota consiste de un vehículo simple que tiene una capacidad suficientemente grande de tal manera que se pue den ignorar las restricciones y si en adición se ignoran las restricciones (c) y (d), encuéntrese la ruta más corta para visitar a todos los clientes. El problema se reduce al clásico problema del agente viajero.

(ii) Si se ignoran las restricciones (c) y (d), encuéntrese el número más pequeño de vehículos que se necesitarán. Este problema del tamaño de la flota se asemeja mucho al problema de la mochila.

(iii) para un número dado de vehículos compatible con las restricciones, diseñar la ruta de vehículo de tal manera que la distancia total de las rutas sea minimizada. Este es el problema normalmente conocido como el problema de Transportistas y la mayoría de Literatura que existe sobre programación de vehículos, trata de estudiar profundamente éste problema y es al que nos dedicaremos.

(iv) Si la ubicación de todos los clientes y sus exigencias son conocidas, digamos para todos los días de la semana y suponiendo que en la semana sucesiva se presente la misma forma de demanda; encuentre el tamaño relativo de la flota y el tamaño de la flota que debe ser alquilada ó fletada de modo que se minimice los costos de entrega.

Los problemas de planear las jornadas de entrega son muy comunes. Todas las operaciones de entrega de productos a/ó de los clientes comprenden éstos problemas. La colección del correo de las casillas ó de operación de los servicios de ómnibus escolares, son ejemplos familiares de entregas en reverso; además, algunos problemas de programación de trabajo en máquinas tienen exactamente la misma estructura matemática y pueden ser en consecuencia tratadas de la misma forma.

2.2 CLASIFICACION DEL PROBLEMA Y DEF CION.-

El problema de entrega puede ser tratado generalmente como uno de determinación de ruta ó rutas de una flota de vehículos para que una función objetivo (recorrido total, costo total, etc.) sea optimizada sujeta a las restricciones rutas ó camiones) que presente el sistema.

La Fig. 2.1 muestra la clasificación general del problema de reparto en tres distintos problemas tipo ; el problema de reparto del terminal simple, el problema de reparto multi-terminal y el problema generalizado de transportistas. El problema de reparto del terminal simple puede a su vez ser clasificado en cuatro tipos de problemas ; el problema del agente viajero, el problema de ruta simple de reparto ó problema de transportistas, el problema de flota heterogénea y el problema del portador común. Cada problema tipo descrito anteriormente se define a continuación.

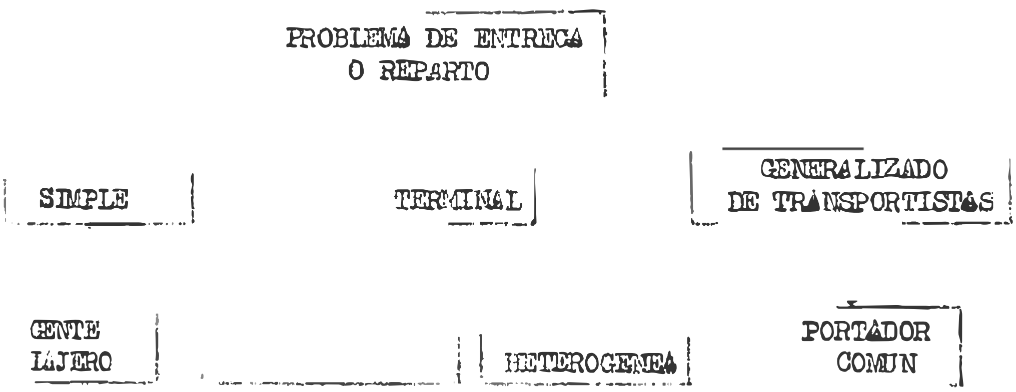


Fig. 2.1

2.2.1 TERMINAL SIMPLE.-

Este problema consiste en que algunos tipos de suministros son homogéneos y deben embarcarse a sus clientes cuyas demandas se asumen conocidas y los suministros se entregan en vehículos de reparto de capacidad conocida. El problema es determinar la ruta ó rutas desde el terminal simple que minimice el costo total ó distancia total sujeto a las restricciones del sistema.

2.2.1.a PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO.-

Este, es el más simple problema de reparto y el primero ensayado en Investigación de Operaciones para encontrar una solución óptima.

El clásico problema del agente viajero es aquel en que un distribuidor de suministros sale de su puesto base, visita todos los puntos destino (donde tiene que repartir algún producto) solamente una vez y retorna a su puesto base. El problema consiste en determinar el orden de las visitas para que la distancia total sea mínima. Si una restricción adicional fuera que el distribuidor de suministros debe retornar a su base antes de que t $(t < n)$ ciudades hayan sido visitadas (n es el número total de puntos destino), el problema sufre variaciones que pueden ser tratadas en el siguiente problema tipo.

2.2.1.b RUTA SIMPLE DEL PROBLEMA DE REPARTO.- PROBLEMA DE TRANSPORTISTAS.-

Actualmente, es una modificación del clásico problema del agente viajero. En este problema, la solución consiste de un ciclo de rutas hechas por uno ó más camiones de la misma ó diferente capacidad, que deben satisfacer las demandas de un número variado de puntos dispersos geograficamente (P_1, P_2, ..., P_n).

El propósito de ésta solución es optimizar la función objetivo (sea carga total, distancia total, etc.) sujeto a cualquier restricción que presente el sistema. La ruta simple originada puede ser un viaje simple ó un número de viajes cualquiera, dependiendo de si hay restricciones de enlazamientos por limitación ó capacidades de camiones.

Los ejemplos de este tipo de problemas son numerosos: reparto de leche a tiendas minoristas, reparto de gasolina a las estaciones de servicio, reparto de diarios, reparto de pescado, etc.

Muchas variaciones de este problema son posibles dependiendo de las características (condiciones) que pueda tener el sistema, tal como, tiempo muerto debido a paradas obligadas, etc.

2.2.1.c FLOTA HETEROGENEA.-

En este caso, los camiones tienen diferentes capacidades y características operacionales y hay un número de camiones de cada tipo aprovechable.

Tenemos n puntos demanda ($P_1, \ldots, P_n$) y

q_i cantidad de mercaderías demandadas.

El problema consiste en programar las demandas para ser repartidas desde el terminal a cada punto demanda de modo que se minimice el costo de transporte y sean satisfechas todas las restricciones del sistema. La operación se asume que se extiende a un período de tiempo tal que Q_{is} representa la demanda total de cada uno de los puntos para este período de tiempo.

Además, se asume que la relación de las cantida - des demandadas Q_{is} a la capacidad de los camiones es tal, que se necesitan muchos envíos para que sean satisfechas éstas demandas.

2.2.1.d **PORTADOR COMUN.-**

En éste problema hay una ó más restriciones de camiones con límite de número de entregas que pue - den ser hechas en un viaje simple tal que, una solución posible para el problema debe especificar algunos viajes para cada vehículo desde el terminal central, para satisfacer la demanda.

Existen n puntos demanda (P_1, ... ,P_n)

q_i cantidad demandada en cada punto y se asume conocida.

Los camiones disponibles pueden tener las mismas ó diferentes capacidades pero la suma de las cantidades demandadas de los n puntos, es más grande que la capacidad de cualquier camión de modo que se requieren algunos viajes para satisfacer las demandas. Cada punto demanda es visitado sólo una vez; sin embargo, no puede aparecer mas que en una ruta. El objetivo nuevamente es, determinar las rutas tales que la función objetivo representando costos ó distancias totales se optimiza sujeta a las restricciones de camiones y rutas impuestas por el sistema.

2.2.2 **TERMINAL MULTIPLE.-**

Este problema puede considerarse como una generalización del problema de reparto del portador común. La diferencia es que ahora existen dos ó más terminales desde donde se satisface la demanda.

Las características del problema (restricciones de camiones, rutas, demanda) son las mismas que las del portador común. Ahora el problema consiste en determinar la ruta con respecto a la función objetivo (costos, rutas, camiones, etc.) para emplear los terminales apropiados de modo de satisfacer toda la demanda considerando las restricciones impuestas por el sistema.

2.2.3 PROBLEMA GENERALIZADO DE TRANSPORTISTAS.-

Este problema es una extensión ó generalización del problema de terminal múltiple. El problema consiste de n terminales donde cada uno tiene un número dado de camiones con capacidades conocidas.

Cada terminal es un receptor a la vez que un despachador para cada uno de los otros terminales. Entonces, los terminales mencionados aquí son diferentes a los definidos para terminales simples y múltiples.

El problema consiste en determinar las rutas de entrega, tales que las distancias totales recorridas sean mínimas y el número de camiones usados también, para satisfacer la demanda.

Como restricciones podemos tener, la máxima distancia que puede recorrer un camión en una ruta dada; también se asume que un embarque puede ser transportado sólo por un camión de un solo viaje.

La formulación empleada para éste problema puede hacerse en programación lineal 0-1.

CAPITULO III

FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION DE VEHICULOS

(TRANSPORTISTAS)

EL PROBLEMA DE TRANSPORTISTAS.- En la forma presentada anteriormente ó en una forma un poco modificada ha sido estudiada y formulada como una programación 0-1 por Balinski y Quandt y por Garvin, Grandall, John y Spellman, pero los dos grupos de autores dan soluciones y formulaciones completamente diferentes.

El problema considerado por Balinski y Quandt incluye sólo las restricciones del tipo (a) y (b) del ítem (2.1).

Ellos definen una actividad i ($i = 1, 2, \ldots m$), como una ruta potencial sobre la que tiene que operar un vehículo, siendo m el número total de rutas simples posibles. Encuéntrese una matriz de número δ_{ij} determinando si ó no el cliente j está en la actividad y dependiendo de si $\delta_{ij} = 1$ (en cuyo caso el cliente j esté incluído en la actividad i) ó $\delta_{ij} = 0$ (cuando no está). Si el costo de cada actividad se conoce (digamos C_i), entonces su formulación se convierte en :

$$\text{Minimizar :} \quad z = \sum_{i=1}^{m} x_i c_i \qquad (3.1)$$

donde $x_i = 1$ cuando la actividad ha sido escogida y $x_i = 0$ cuando no, sujeto a :

$$\sum_{i=1} \delta_{ij} x_i = 1 \quad \text{para todo } j = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.2)$$

La restricción (3.2) expresa el hecho de que un cliente está siendo suministrado por un vehículo. Esta formulación tiene un número de limitaciones reales. En primer lugar, el número de rutas simples factibles en un problema puede ser un número muy grande. Si por ejemplo, el número promedio de clientes servidos por un vehículo simple es h, el número de variables sería del orden de :

$$m = O\left[\sum_{i=1}^{h} \binom{n}{i}\right] \qquad (3.3)$$

representando todas las agrupaciones posibles de n clientes en 1,2, etc. . En segundo lugar, el cálculo de todas las rutas posibles no es un problema fácil si se van a resolver por enumeración de todas las composiciones posibles de rutas simples factibles para un número dado de clientes. Si n es el máximo número de clientes que puede servir un vehículo; entonces, el número de composiciones de rutas que se pueden enumerar a fin de calcular todas las rutas simples posibles, estará dado por :

$$\sum_{i=1}^{n'} \binom{n}{i}$$

un número que puede ser mucho menor (ya que $n' \geq h$) que el número dado por la ecuación (3.3). Sinembargo, el cálculo del costo de una actividad requiere la solución de un pequeño problema de agente viajero para los clientes incluídos en ésa actividad.

La formulación de Garvin, Grandall, John y Spellman, es la siguiente:

Sean:

q_k : demanda del cliente k

Q : capacidad del vehículo

c_{ij} : costos ó distancias de i a j

y_{ijk} : cantidad embarcada de i a j destinada para k (el subíndice $\mathring{1}$ indica el almacén)

Uno tiene entonces las siguientes restricciones :

$$\sum_{i} y_{ijk} = \sum_{r} y_{jrk} \quad \text{para todo } j,k \quad j \neq k \} \quad (3.4)$$

donde r es un cliente arbitrario.

La restricción (3.4) expresa el hecho de que no hay acumulación de material en j destinado para cualquier otro cliente k. También

$$\sum_{i}\sum_{j} y_{ijk} = q_k \quad \text{para todo } k \qquad (3.5)$$

$$\sum_{k}\sum_{j} y_{\phi jk} = \sum_{k} q_k \qquad (3.6)$$

Las restricciones (3.5) y (3.6) dicen respectivamente que lo que se ha acumulado en el punto k es igual a la demanda de k y lo que sale del almacén es igual a la demanda total.

Sea una variable $x_{ij} = 1$ ó 0 dependiendo de, si un vehículo visita al cliente j desde i ó no. Entonces :

$$\sum_{i} x_{ij} = \sum_{r} x_{jr} = 1 \quad \text{para todo } j \qquad (3.7)$$

es decir, solamente un vehículo entra ó sale de j ; y

$$\sum_{k} y_{ijk} \leq x_{ij} Q \quad \text{para todo } i, j \ (i \neq j) \qquad (3.8)$$

es decir, la capacidad de los vehículos no debe ser violada.

El objetivo es entonces minimizar el costo ó la distancia total viajada, ó sea :

$$\text{Minimizar } H = \sum_{i}\sum_{j} c_{ij} x_{ij} \qquad (3.9)$$

Esta formulación requiere $n(n-1)$ y $n(n-1)$ variables 0-1, asi como $2n + 1$ restricciones siendo esto naturalmente impráctico para un problema que tenga sólo 12 clientes ó algo parecido.

Las diversas formulaciones para resolver el problema del transportista se muestra a continuación.

3.1 PROGRAMACION DINAMICA.-

La formulación de programación dinámica dada para el problema del agente viajero, se puede generalizar facilmente para aplicarse al problema de Transportistas como sigue : sea C(S) el costo de la ruta óptima a través de los clientes del conjunto S que empieza y finaliza en el terminal. Si S designa a todos los clientes que se van a atender, entonces lo que se requiere es el mínimo de la cantidad

$$H = \sum_{J=1}^{p} C(S_J) \qquad (3.10)$$

sobre todas las particiones factibles $S_j (J = 1,2,\ldots\ldots p)$ del conjunto S.

Sea $f_k(U)$ igual al costo mínimo que se logra usando k vehículos y suministrando a un subconjunto U del conjunto S de clientes.

Entonces:

$$f_k(U) = \min_{U^* \subseteq U} \left[f_{k-1}(U - U^*) + C(U^*) \right] \qquad (3.11)$$

La ecuación (3.11) plantea simplemente que la mejor forma de suministrar a un sub-conjunto U de los clientes usando k vehículos, es la más barata de las mejores fórmulas de suministrar a un sub-conjunto más pequeño $U-U^*$ de clientes con k-1 vehículos y suministrando a los restantes U^* clientes con otro vehículo; lo más barato aquí significa lo que cuesta menos de todas las formas posibles en que se pueden escoger los U^* clientes para formar la ruta extra.

La lista de sub-conjunto para optimizar U^* en la ecuación (3.11) será ubicado en la partición óptima de S_1, S_2......S_p (es decir de los clientes o de las rutas 1, 2....p) que minimiza h de la ecuación (3.10).

Una comparación de la solución de la programación dinámica con el método 0-1 programado por Balinski y Quandt, nos muestra grandes similitudes. En efecto ambos métodos requieren el cálculo de todas las rutas factibles y evaluar sus costos.

Ellos difieren solamente en el método de determinar qué valores estarán en la solución final. De este modo, las objecciones practicadas presentadas con respecto a la formulación de Balinski y Quandt son igualmente aplicables a la formulación de programación dinámica para este problema.

3.2 ALGORITMO BASADO EN LOS METODOS DE SOLUCION DEL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO.- Si los n clientes y el terminal de un problema de programación de vehículos se considera como un problema del agente viajero con (n+1) localidades, la solución es una ruta que pasa a través de todos los clientes y el terminal (visitando a cada cliente solamente una vez). En el problema del transportista, si las rutas individuales de los vehículos se combinan en una ruta simple, esta ruta visitará el terminal tantas veces como rutas haya. El problema del transportista, en consecuencia, se puede formular como un problema del agente viajero eliminando el terminal real y reemplazándolo por n terminales artificiales, todos ubicados en la misma posición, donde n es el número de vehículos en la flota.

El viajar de un terminal artificial a otro, está prohibido, ponien do la distancia entre ellos igual a infinito, como se muestra en la matriz de costos de la figura (3.1) y se busca entonces ahora la solución a esta matriz de costo, sujeto a las restricciones de capacidad de los vehículos.

El número de terminales artificiales n es igual al número de vehículos empleados en la solución final y se puede escoger en varias formas. En cualquier caso, n tiene su límite inferior determinado por la capacidad de vehículo, a saber

$$N \geq \sum_{i=1}^{n} q_i / Q \qquad (3.12)$$

donde q_i es la demanda del cliente i y Q es la capacidad del vehículo.

El problema se puede resolver ahora para varios valores de N y se escoge la mejor solución. Usualmente no se requiere más de N valores para la solución final empezando por el valor más bajo posible determinado por la ecuación (3.12) y aumentándolo 1 cada vez

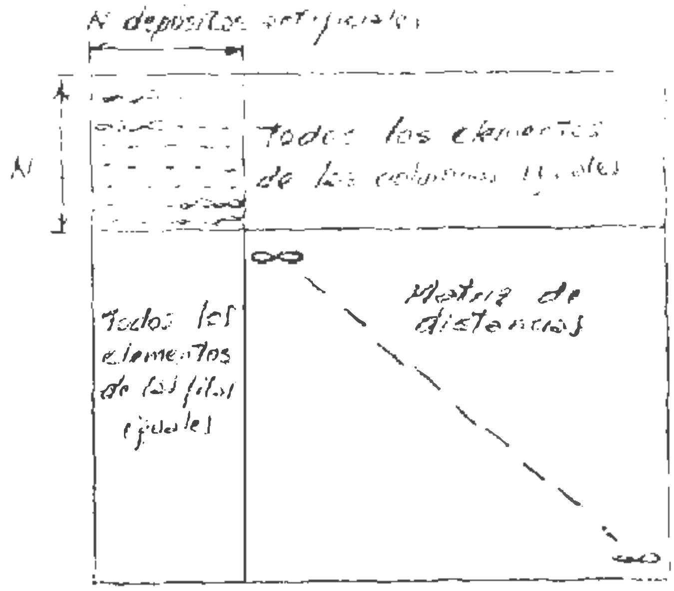


Fig. 3.1 Matriz para la programación de vehículos.

3.2.1 EJEMPLO NUMERICO.-

Sea $C = 22$ ton. la capacidad de camiones (existe un número infinito de éstos.)

La matriz de distancias y las demandas se muestran a continuación. No existe ninguna restricción adicional.

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	15	10	13	8	16	9
2	15	∞	12	14	20	18	20
3	10	12	∞	13	11	20	15
4	13	14	13	∞	10	15	11
5	8	20	11	10	∞	12	2
6	16	18	20	15	12	∞	10
7	9	20	15	11	2	10	∞

Demanda
$Q(2) = 10$
$Q(3) = 12$
$Q(4) = 8$
$Q(5) = 6$
$Q(6) = 7$
$Q(7) = 9$

Solución.-

Lo primero que tenemos que hacer es reducir la matriz de distancias para lo cual, buscamos el menor elemento de cada fila (siempre y cuando sea mayor que cero), que debe ser restado de los demás elementos de la misma fila para conseguir que por lo menos exista un cero por fila. Luego de reducidas las filas, hacemos lo mismo con las columnas

	1	2	3	4	5	6	7	
1	∞	7	2	5	0	8	1	8
2	3	∞	0	2	8	6	8	12
3	0	2	∞	3	1	10	5	10
4	3	4	3	∞	0	5	1	10
5	6	18	9	8	∞	10	0	2
6	6	8	10	5	2	∞	0	10
7	7	18	13	9	0	8	∞	2
		2		2		5		

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	2	3	0^{1}	3	1
2	3	∞	0^{2}	0^{1}	8	2	8
3	0^{3}	0^{2}	∞	1	1	5	5
4	3	2	3	∞	0^{0}	0^{2}	1
5	6	16	9	6	∞	5	0^{5}
6	6	6	10	3	2	∞	0^{2}
7	7	16	13	7	0^{3}	3	∞

$R = 23$

Una vez que tenemos la matriz reducida, elegimos la celda que tenga el mayor rechazo. Se llama rechazo al valor resultante de tomar cualquier celda con valor cero, buscar los menores valores de la fila y columna que contienen el cero y sumar éstos valores (en el ejemplo los rechazos están colocados en la parte superior derecha de cada celda).

El mayor rechazo es 5 correspondiente al enlace (5,7) que origina la ruta $P_1 - P_5 - P_7 - P_1$ con una capacidad de 15 ton. Anulamos la fila 5 y la columna 7 y hacemos la celda (7,5) igual a infinito para evitar formar algún "loop".

	1	2	3	4	5	6	
1	∞	5	2	3	0	3	
2	3	∞	0	0	8	2	
3	0	0	∞	1	1	5	
4	3	2	3	∞	0	0	
6	6	6	10	3	2	∞	2
7	7	16	13	7	∞	3	3

$R = 6$

Cada vez que se borran fila y columna del mayor rechazo, se tiene que reducir la matriz restante si es que se puede; si no, se continua buscando los rechazos para determinar el mayor.

	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	2	3	0^{2}	3
2	3	∞	0^{2}	0^{1}	8	2
3	0^{3}	0^{2}	∞	1	1	5
4	3	2	3	∞	0^{0}	0^{2}
6	4	4	8	1	0^{1}	∞
7	4	12	10	4	∞	0^{4}

El mayor rechazo de esta matriz es 4 correspondiente al enlace (7,6), siendo ahora la ruta $P_1 - P_5 - P_7 - P_6 - P_1$ con una capacidad de 22 ton. Como no puede enviarse nada mas en este camion al haberse satisfecho su capacidad, se ha encontrado la primera ruta.

Cuando se satisface la capacidad del camión en estudio ó las demandas restantes no permiten agregar ninguna otra demanda en la ruta generada, se anulan las filas y columnas de los puntos que conforman la ruta y con los puntos restantes se arma otra matriz tomando en ésta las distancias de la matriz original y se resuelve como si se tratara de un nuevo problema.

Procedemos con la matriz restante a reducir filas y columnas teniendo en cuenta que los rechazos que se eligen, deben ser de enlaces que no estén unidos al orígen. Por este motivo es que tomamos el rechazo 1 del enlace (2,4).

	1	2	3	4	
1	∞	15	10	13	10
2	15	∞	12	14	12
3	10	12	∞	13	10
4	13	14	13	∞	13

	1	2	3	4
1	∞	5	0	3
2	3	∞	0	2
3	0	2	∞	3
4	0	1	0	∞
		1		2

	1	2	3	4
1	∞	4	0^1	1
2	3	∞	0^0	0^1
3	0^1	1	∞	1
4	0^0	0^1	0^0	∞

R = 48

En el caso que hayan varios rechazos iguales (los mayores) puede seguirse varios criterios para romper el empate; uno de ellos es el de tomar el primer enlace que encontremos comenzando por las filas.

La ruta formada al considerar el enlace (2,4) es : $P_1 - P_2 - P_4 - P_1$ con una capacidad de 18 ton.. Puesto que el punto que falta ser asignado (P_3) tiene una demanda de 12 ton que de agregarse a la ruta sobrepasaría la capacidad del camión.

La segunda ruta queda conformada como se expresó antes. Anulando los puntos de esta ruta, queda sólo el enlace (1,3) que generan la tercera ruta $P_1 - P_3 - P_1$ con una capacidad de 12 ton.

	1	3	
1	∞	10	10
3	10	∞	10

	1	–
1	∞	0
3	0	∞

El resumen de rutas y cargas, se muestra a continuación

Rutas finales	Distancia	Carga
$P_1 - P_5 - P_7 - P_6 - P_1$	36	22
$P_1 - P_2 - P_4 - P_1$	42	18
$P_1 - P_3 - P_1$	20	12
	Distancia total: 98	

3.3 ENFOQUE DE RAMIFICACION Y ACOTACION (BRANCH AND BOUND).-

Un algoritmo de ramificación y acotación para la solución del problema del agente viajero, fue descrito por Little y otros y nuestra discusión se restringe a las modificaciones que son necesarias para acomodar las varias restricciones del problema del transportista.

Después de que cada paso hacia adelante del árbol de búsqueda que se ha realizado se debe chequear que no se ha violado ninguna de las restricciones. Si todas las restricciones presentadas en la introducción de esta parte existen, el orden en el cual se chequean para factibilizar, es muy importante; este orden depende de qué restricción es la más restrictiva. Si se viola alguna de las restricciones, debe tomarse un paso atrás y se ramifica hacia un nuevo nudo.

En cada paso hacia adelante es importante verificar que no solamente el enlace de entrada no viola las restricciones pero también que la otra parte del problema no se vuelve claramente infactible. Por ejemplo, si dos enlaces escogidos primero enlazan a un cliente con dos terminales artificiales cerrando así una ruta con solamente un cliente atendido , los siguientes vehículos no podrán suministrar a los siguientes clientes debido a la insuficiencia de capacidad, pero ésto no se puede descubrir hasta que se ha tomado un número grande de pasos hacia adelante, entonces se evita una gran cantidad de búsqueda innecesaria si la parte no resuelta del problema se chequea por factibilidad. Esta prueba puede ser muy difícil de incrementar en cada paso hacia adelante pero se puede diseñar algún procedimiento simple que permita determinar si los vehículos restantes pueden atender a los clientes, resultando todo esto en un ahorro sustancial en el tiempo y esfuerzo de cálculo. Otra complicación que hace que este método sea menos eficiente en la solución del problema del agente viajero se debe a las reglas heurísticas que determina hasta que nudo se ramificará la próxima vez. En el problema del agente viajero ramificamos hacia el nudo con la penalidad mayor y esto tiene mucho éxito en limitar el tamaño del árbol que se necesita buscar. En el problema de programación de vehículos ó transportistas lo que parece ser un enlace deseable puede que viole una restricción y nos haga seguir con ramificaciones innecesarias. Entonces otra forma de escoger el próximo nudo para hacer las ramificaciones y que se hace necesario, nos puede causar mucha dificultad en la satisfacción de las restricciones. La eficiencia computacional del algoritmo de ramificación y acotación para resolver el problema de transportistas se muestra en la tabla (3.2).

3.3.1 EJEMPLO NUMERICO

Sea C=22 ton. la capacidad de camiones (existe un número infinito de estos)

La matriz de distancias y las demandas se muestran a continua ción (no hay restricciones adicionales).

	1	2	3	4	5	6	7	
1	∞	15	10	13	8	16	9	(8)
2	15	∞	12	14	20	18	20	(12)
3	10	12	∞	13	11	20	15	(10)
4	13	14	13	∞	10	15	11	(10)
5	8	20	11	10	∞	12	2	(2)
6	16	18	20	15	12	∞	10	(10)
7	9	20	15	11	2	10	∞	(2)
		(2)		(5)		(2)		

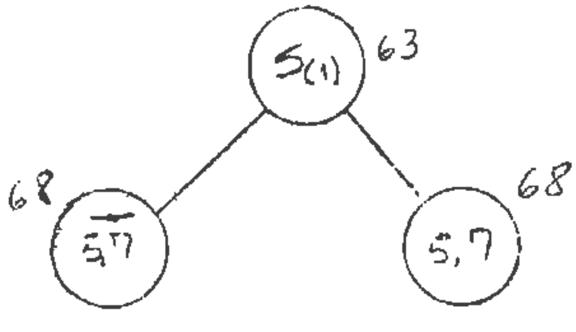
Demanda (Ton)
Q(2) = 10
Q(3) = 12
Q(4) = 8
Q(5) = 6
Q(6) = 7
Q(7) = 9

Solución.-

Comenzamos la solución del problema, reduciendo la matriz de distancias ó costos según sea el caso.

La idea consiste en elegir el enlace que proporcione el mayor rechazo y hacer la ramificación de la posible ruta que contenga al enlace descrito ó que no lo contenga. Cuando la ruta en estudio no pueda satisfacer más puntos demanda por las restricciones del problema, queda conformada una ruta y con los puntos no considerados, se forma otra matriz más pequeña que la originaría la que se resuelve como si se tratara de un problema nuevo, pero tomando los datos originales de la matriz de distancias inicial.

El árbol formado inicialmente es:



puesto que la matriz reducida, elegimos el mayor rechazo que es 5 y que corresponde a (5,7). El nudo que tiene una rayita encima del enlace, representa el conjunto de las soluciones en donde no se considera el enlace (5,7) y la rama derecha (la que no tiene ninguna raya encima), es el conjunto de soluciones en donde interviene el enlace mencionado.

Los límites de las ramas izquierdas del árbol se forman agregando al límite del enlace ó rama anterior, el mayor de los rechazos encontrados (a cada celda que tiene valor cero se le encuentran los valores mínimos de la fila y columna respectiva y se suman, encontrándose así los rechazos). Los límites de las ramas que aparecen a la derecha, se encuentran de la siguiente manera, una vez elegido el máximo rechazo de la matriz en estudio, se anulan las filas y las columnas de la celda que permite ésta rechazo y se ve la posibilidad de reducir la matriz que queda; el valor resultante de reducir esa matriz (puede ser cero en el caso que la matriz tenga por lo menos un cero en todas las filas y columnas), se agrega al límite de la rama anterior y se obtiene de este modo el límite del conjunto de soluciones que contienen el enlace seleccionado.

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	7	2	5	0	8	1
2	3	∞	0	2	8	6	8
3	0	2	∞	3	1	10	5
4	3	4	3	∞	0	5	1
5	6	18	9	8	∞	10	0
6	6	8	10	5	2	∞	0
7	7	18	13	9	0	8	∞
		(2)		(2)		(5)	

$\boxed{R=54}$

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	2	3	0^1	3	1
2	3	∞	0^2	0^1	8	1	8
3	0^3	0^2	∞	1	1	5	5
4	3	2	3	∞	0^0	0^1	1
5	6	16	9	6	∞	5	0^5
6	6	6	10	3	2	∞	0^2
7	7	16	13	7	0^3	3	∞

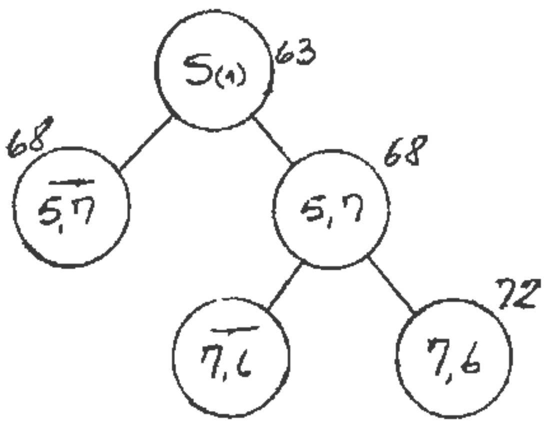
$\boxed{R=63}$

Hay que recordar que la ramificación se hace a partir del nudo que tenga el menor límite.

En el ejemplo que se está desarrollando, como ambos límites son iguales, elegimos cualquiera de ellos digamos la rama derecha. La ruta tentativa es $P_1 - P_7 - P_5 - P_1$ con una capacidad de 18 ton..

Enseguida, anulamos las filas y columnas 5 y 7 respectivamente y hacemos la distancia (5,7) igual a cero para evitar considerar otra ruta que tenga sentido inverso a las que se van obteniendo. Vamos si podemos o no reducir la matriz resultante y buscamos la celda con el mayor rechazo. Este valor es 4 correspondiente a (7,6), formándose la ruta $P_1 - P_6 - P_7 - P_5 - P_1$ que tiene una capacidad de 22 ton. ó sea, la capacidad de los camiones y esta ruta queda establecida como se ha expresado anteriormente.

Las ramificaciones habidas hasta el momento en que se ha encontrado una ruta solución se muestra a continuación.



	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	2	3	0^2	3
2	3	∞	0^2	0^1	8	2
3	0^3	0^2	∞	1	1	5
4	3	2	3	∞	0^0	0^0
6	4	4	8	1	0^1	∞
7	4	13	10	4	∞	0^4

R=68

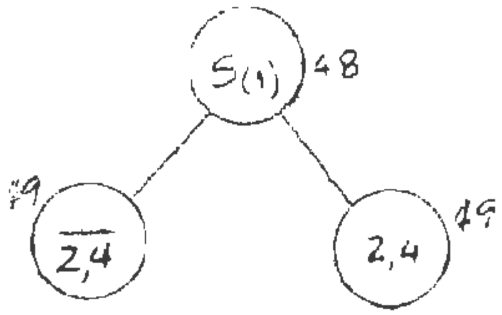
Cuando se ha encontrado una ruta, se anulan las filas y columnas de los puntos que la conforman y se continúa resolviendo el problema pero tomando las distancias de la matríz inicial de distancias.

	1	2	3	4	
1	∞	15	10	13	(10)
2	15	∞	12	14	(12)
3	10	12	∞	13	(10)
4	13	14	13	∞	(13)

	1	2	3	4	
1	∞	5	0	3	
2	3	∞	0	2	
3	0	2	∞	3	
4	0	1	0	∞	
		(1)		(2)	R=45

	1	2	3	4	
1	∞	4	0^{1}	1	
2	3	∞	0^{0}	0^{1}	
3	0^{1}	1	∞	1	
4	0^{0}	0^{1}	0^{0}	∞	
					R=48

Considerando que tenemos N depósitos artificiales (P_1) - el siguiente mayor rechazo debe ser calculado sin tener en cuenta aquellos en donde participe el orígen ó depósito. Es por esa razón que escogemos el enlace (2,4), aunque hubiéramos podido tomar el (4,2) ya que tienen el mismo rechazo. Esta ruta se conforma como $P_1 - P_2 - P_4 - P_1$ que tiene una capacidad de 18 ton. y cuyo árbol se muestra a continuación



Puesto que el punto restante P_3 tiene una demanda de 13 - ton. que de incluirse en la ruta, sobrepasaría la capaci - dad de los camiones; la segunda ruta queda definida como se mostró antes y la tercera ruta sería $P_1 - P_3 - P_1$
El resumen de rutas, distancias recorridas y cargas se de- talla en el siguiente cuadro.

R U T A S	Distancia	Carga
$P_1 - P_6 - P_7 - P_5 - P_1$	36	22
$P_1 - P_2 - P_4 - P_1$	42	18
$P_1 - P_3 - P_1$	20	12
	Distancia total: 98	

3.4 <u>EL METODO R-OPTIMO.-</u>

El principio de optimalidad R, considerando el problema del trans portista como uno de agente viajero, consta de una matriz de cos- tos de la figura (3.1), podemos empezar con una ruta aleatoria a generar una ruta óptima -2, óptima -3 u óptima r.
Así, si se va a producir una ruta óptima 3 a partir de una ruta

aleatoria, la operación física consiste en reemplazar 3 enlaces por otro grupo de 3 enlaces que genere un costo total menor. En el problema de transportistas sin embargo, uno tiene que hacer una prueba ulterior en cada etapa para asegurarse que un nuevo grupo de enlaces no forma rutas no factibles. Asi, en el problema de programación de vehículos, uno puede empezar con una ruta inicial que se hace de dos rutas factibles y progresivamente mejorarla hasta que es óptimo 3 manteniendo la factibilidad a través de todas las transformaciones.

La ruta factible inicial se puede obtener en una variedad de formas.

Una ruta que es simple factible, por ejemplo, se hace de rutas que continnen un cliente cada una. Otras, con las que uno puede empezar el algoritmo óptimo-3, puede ser obtenido por uno de los métodos aproximados que se describen posteriormente (tal como el método de Clarke y Wright de los ahorros, ó método de Hayes)

Con la matriz de costos mostrada en la fig. 3.1 uno podría obtener una ruta óptima -3 con el mismo número de vehículos de la ruta inicial. Si, sin embargo reemplazamos el bloque de la esquina superior izquierda N X N un conjunto infinito en la matriz de costos por otra conteniendo ceros, el mismo algoritmo produce una ruta óptimo-3 y al mismo tiempo automáticamente reduce el número de rutas, de vehículos y esto nos lleva a un ahorro en términos de la distancia viajada. Ambas versiones del algoritmo son útiles en diferentes circunstancias dependiendo de los objetivos. Vale la pena mencionar aquí que la solución del problema de transportistas que minimiza la distancia total recorrida, no necesariamente use el mínimo número de vehículos requeridos para atender a los clientes.

Como en el problema del agente viajero, se ha encontrado que al explorar la ruta óptimo-r, es perfectamente satisfactorio confirmar las consideraciones para la ruta óptimo-3, la que produce resultados muy buenos en un tiempo razonablemente corto. En el problema de transportistas sin embargo, se encuentra que se obtienen mejores resultados y se produce primero un número de rutas óptimo-2, se escoge luego la mejor de éstas y de aquí se empieza a buscar la mejor ruta óptimo-3. La fig. 3.2 nos muestra el procedimiento para determinar una ruta óptimo-r partiendo de una ruta inicial aleatoria factible.

3.5 ALGORITMOS BASADOS EN AHORROS.-

En 1963, Clarke y Wright introdujeron el concepto de ahorros y desde entonces se ha desarrollado y publicado una serie de intentos para resolver el problema de transportistas usando técnicas basadas en este concepto.

Considere un terminal que requiere abastecer a n clientes. Además, suponga que se dispone de suficiente número de vehículos de la capacidad adecuada en el terminal, de modo que cada cliente puede ser atendido individualmente por un vehículo que suministre a ese cliente solamente. El costo o distancia total recorrida por todos los vehículos es entonces:

$$2 \sum_{J=1}^{n} C_{1J}$$

donde el sub-índice 1 representa al terminal y C_{j1} es el costo de las jornadas del terminal al cliente j. El número de vehículos usados en este caso es n. Supongamos ahora que los clientes i y j se enlazan de forma que son abastecidos por un mismo camión en la misma ruta. Este enlace de clientes i y j elimina una ruta de vehículos y también reduce el costo por una cantidad

$$S_{ij} = C_{j1} + C_{i1} - C_{ij}$$

La cantidad S_{ij} se denomina el ahorro del enlace (i,j) y conviene tomar los positivos; obviamente, el mejor ahorro S_{ij} nos permite el enlace más deseable de clientes (i,j) en una ruta.

3.5.1 ALGORITMO DE CLARKE Y WRIGHT.-

Este algoritmo se puede describir por el siguiente procedimiento:

a) Calcular los ahorros S_{ij} para todos los pares de clientes i,j.

b) Ordenar los ahorros en forma descendente.

c) Empezando de la parte superior de la lista de ahorros ordenados, hacer lo siguiente:

   1.- Si el enlace escogido resulta en una ruta posible de acuerdo a las restricciones del problema, entonces agregue a este enlace a la solución, sino, rechace el enlace.

   2.- Pruebe el nuevo enlace de la lista y repita el paso (1) hasta que la lista se haya extenuado.

d) Los enlaces que han sido escogidos forman la solución del problema.

Obviamente, este algoritmo no produce la respuesta óptima y bajo estas circunstancias la respuesta puede diferir completamente de un valor óptimo. El algoritmo es muy simple de aplicar y requiere pequeño tiempo de computadora para ser ejecutado; sin embargo, algunas restricciones son difíciles de incorporar y los requerimientos de memoria en la computadora se vuelve excesivos.

Hay algunas dificultades de este algoritmo que pueden afectar la calidad de las respuestas que produce. Una vez que se hace un enlace ya no se quiebra, es decir, su deseabilidad se considera independiente de los otros enlaces que se pueden escoger en forma individual, ya sea que se pueda prohibir la futura selección de nuevos enlaces cuyos ahorros son ligeramente menores que el del enlace escogido y que al final nos proporcionarían una mejor solución al problema. El siguiente algoritmo es una ligera modificación del método de Clarke y Wright y se sobrepone parcialmente a esta dificultad.

3.5.1.1 EJEMPLO NUMERICO.-

Sea Q = 22 ton. la capacidad de camiones (existe un número infinito de éstos)

La matriz de distancias se da a continuación (no hay restricciones adicionales).

P1	Q						
P2	10	2 15					
P3	12	2 10	13 12				
P4	8	2 13	14 14	10 13			
P5	6	2 8	3 20	7 11	11 18		
P6	7	2 16	13 18	6 20	14 15	12 12	
P7	9	2 9	4 20	4 15	11 11	15 2	15 10

Solución.-

Lo primero que hay que calcular son los ahorros. Esto se hace aplicando la ecuación (4.7) que se explica con detalle en el capítulo IV.

Los ahorros calculados aparecen en el lado izquierdo de las celdas de la matriz de distancias y ahorros. Se aprecia que existen dos ahorros con valores máximos de 15 correspondientes a los enlaces (7,5) y (7,6), pero calculando las distancias totales de ambas posibles rutas escogemos el enlace (7,5), originándose la ruta tentativa $P_1 - P_5 - P_7 - P_1$ con una capacidad de 15 ton.. El siguiente mayor ahorro a considerarse es 15 que corresponde a (7,6) permitiendo conformar la ruta $P_1 - P_5 - P_7 - P_6 - P_1$ que tiene una capacidad de 22 ton ó sea, la capacidad de un camión. Como no puede enviarse mas carga en esta ruta, se ha encontrado una de las rutas solución del problema.

El siguiente paso consiste en anular las filas y columnas de los puntos que intervienen en la ruta y con el resto tratamos de encontrar otras rutas como si se estubiera resolviendo un problema nuevo. La matriz con las filas y columnas anuladas se muestra en la siguiente página.

El siguiente mayor ahorro de los que quedan es 14 , correspondiente al enlace (4,2) que origina la ruta $P_1 - P_4 - P_2 - P_1$ con una capacidad de 18 ton . Puesto que P_3 tiene una demanda de 12 ton que no podemos enviarla en esta ruta, la segunda ruta solución es de la forma antes descrita.

P1	Q						
P2	10	2 5					
P3	12	2 10	13 12				
P4	8	2 13	[illegible] 14	11 12			
P5							
P6							
P7							

P1	Q						
P2							
P3	12	2 15					
P4							
P5							
P6							
P7							

si anulamos nuevamente filas y columnas de los puntos de la ruta notamos que el único ahorro posible de considerar es (3,1) por lo que necesitamos otra ruta que es $P_1 - P_3 - P_1$ con una capacidad de 12 ton. La matriz marcado de rutas se actualiza de acuerdo a como se fueron generando las rutas quedando de la siguiente manera :

P_1	8						
P_2	18	1					
P_3	12	2					
P_4	18	1	1				
P_5	22	1					
P_6	22						
P_7	22					1	1

El resúmen de rutas , distancias y cargas se muestra a continuación.

R U T A S	Distancia	Carga
$P_1 - P_6 - P_7 - P_5 - P_1$	36	22
$P_1 - P_4 - P_2 - P_1$	42	18
$P_1 - P_3 - P$	20	12
Distancia Total: 98		

3.5.2 ALGORITMO DE TILLMAN Y COCHRANE.-

Este algoritmo difiere del anteriormente mostrado sólo en la forma en que se seleccionan los ahorros. En lugar de tomar el enlace factible con el mayor ahorro, en cada etapa se selecciona el enlace que cuando hecho, nos permite escoger un segundo enlace de modo que la suma de los dos ahorros sea la mayor.

El anterior criterio de selección que requiere el efecto de mirar dos enlaces en secuencia, puede ser extendido a mirar tres ó más, pero los cálculos involucrados se vuelven muy extensos.

3.5.2.1 EJEMPLO NUMERICO.-

Sea Q = 22 ton la capacidad de camiones. Existe un número infinito de éstos camiones y no hay restricciones adicionales.

La matriz de distancias se dá a continuación, pero se le ha agregado los ahorros que se calculan del mismo modo que el algoritro de Clarke.

P1	Q						
P2	10	2 15					
P3	12	2 10	13 12				
P4	8	2 13	14 14	10 13			
P5	6	2 8	3 20	7 11	11 10		
P6	7	2 16	13 18	6 20	14 15	12 12	
P7	9	2 9	4 20	4 15	11 11	15 2	15 10

Solución.-

Inicializamos la matriz marcado de rutas colocando 2 en los enlaces al orígen para indicar que asignamos un camión a cada punto.

P1	Q						
P2	10	2					
P3	12	2					
P4	8	2					
P5	6	2					
P6	7	2					
P7	9	2					

Buscamos el mayor ahorro total de los pares de unio nes resultantes de elegir el mayor ahorro total y el siguiente mayor ahorro que no contenga ninguno de los puntos del primer enlace.

UNION 1	AHORRO	UNION 2	AHORRO	AHORRO TOTAL
$P_7 - P_5$	15	$P_4 - P_2$	14	29
$P_7 - P_4$	15	$P_3 - P_2$	13	28
$P_7 - P_6$	15	$P_4 - P_2$	14	29
$P_4 - P_2$	14	$P_7 - P_5$	15	29

Como hay varios ahorros totales iguales, escogemos uno de ellos digamos el primero, que genera dos posibles rutas :

$P_1 - P_7 - P_5 - P_1$ Cap. 15 ton

$P_1 - P_4 - P_2 - P_1$ Cap. 20 ton

Hacemos ahorros (7,5) y (4,2) iguales a cero para e vitar generar nuevamente las mismas rutas y volvemos a calcular otro par de uniones con mayor ahorro total.

UNION 1	AHORRO	UNION 2	AHORRO	AHORRO TOTAL
$P_7 - P_4$	15	$P_6 - P_2$	13	28
$P_7 - P_6$	15	$P_3 - P_2$	13	28
$P_7 - P_3$	14	$P_6 - P_4$	14	28
$P_6 - P_4$	14	$P_7 - P_2$	14	28
$P_6 - P_2$	13	$P_7 - P_4$	15	28

Puesto que todos los ahorros totales son iguales escogemos cualquiera de ellos digamos el primero. Hacer los ahorros (7,4) y (6,2) iguales a cero y vemos la posibilidad de incrementar éstas rutas, de unir dos rutas para formar una sola ó de generar nuevas rutas en el caso que los puntos del enlace en estudio no sean ninguno de los puntos de las rutas ya generadas.

Tomando como se a dicho, los ahorros (7,4) y (6,2) las rutas serían ahora :

$P_1 - P_4 - P_7 - P_5 - P_1$ Cap. 23 ton

$P_1 - P_4 - P_2 - P_6 - P_1$ Cap. 27 ton

Como ambas rutas sobrepasan la capacidad de los camiones, desechamos los ahorros considerados y buscamos nuevamente otro mayor ahorro total.

UNION 1	AHORRO	UNION 2	AHORRO	AHORRO TOTAL
$P_7 - P_6$	15	$P_3 - P_2$	13	28
$P_7 - P_2$	14	$P_6 - P_4$	14	28
$P_6 - P_4$	14	$P_7 - P_2$	14	28
$P_3 - P_2$	13	$P_7 - P_6$	15	28

Como nuevamente los ahorros son iguales tomamos el primero, originándose las siguientes rutas tentativas :

$P_1 - P_6 - P_7 - P_5 - P_1$ Cap. 22 ton

$P_1 - P_4 - P_2 - P_3 - P_1$ Cap. 30 ton

La primera de las rutas mostradas satisface la condición de capacidad de camión y como no puede enviarse más carga, hemos encontrado la primera ruta solución. Como el enlace (3,2) origina que se viole la restricción de capacidad, se deja de lado.

La ruta $P_1 - P_4 - P_2 - P_1$ no puede satisfacer ninguna demanda mas pues su capacidad es de 18 ton y el punto P_3 que falta satisfacer tiene una demanda de 12 ton; luego, ésta última ruta también forma parte de la solución. Anulando filas y columnas de los puntos que toman parte en la ruta antes mencionada, queda para ser satisfecho solamente el punto P_3 el que se asigna en una ruta de ida y vuelta.

El resúmen de rutas, distancias recorridas y demanda satisfecha en cada ruta se muestran mas adelante como también la matriz marcado de rutas actualizada de acurdo a las rutas encontradas como solución.

Una explicación mucho más detallada en cuanto a la solución misma de éste algoritmo se encuentra en el capítulo V de éste trabajo.

P1	d						
P2	18	1					
P3	12	2					
P4	18	1		1			
P5	22	1					
P6	22	1					
P7	22					1	1

R U T A S	Distancia	Carga
$P_1 - P_6 - P_7 - P_5 - P_1$	36	22
$P_1 - P_4 - P_2 - P_1$	42	18
$P_1 - P_3 - P_1$	20	12
Distancia Total: 98		

3.6 **ALGORITMO DE GASKELL.-**

Este método también difiere del de Clarke y Wright sólo en la forma de medir la deseabilidad de un enlace.

Gaskell sugiere las siguientes alternativas de ahorros :

$$\lambda_{ij} = S_{ij} \left(\bar{C} + |C_{0i} - C_{0j}| - C_{ij} \right)$$

$$\text{y: } \quad \pi_{ij} = S_{ij} - C_{ij}$$

donde $\bar{C}$ es el valor promedio de todos los C_{ii} y S_{ij} entre los puntos i y j, más que sobre el ahorro S_{ij}, discriminando éstos en favor de los enlaces que son más o menos radiales, los que el método del ahorro favorece a aquéllos que son circunferenciales.

Así, el algoritmo de Clarke y Wright en lugar de ordenar los enlaces en forma descendente basados en S_{ij}, el criterio para ordenarlo aquí se basa ya sea sobre λ_{ij} ó sobre π_{ij} y todos los otros pasos del algoritmo, son los mismos.

3.6.1 **EJEMPLO NUMERICO.-**

Sea C = 22 ton. la capacidad de camiones (existe un número infinito de éstos y no hay restricciones adicionales).

La matriz de distancias se da a continuación y cada celda contiene:

B	C

A: ahorro λ_{ij} ó π_{ij}

B: ahorro S_{ij} (el mismo que usa Clarke)

C: distancia o costo

P_1	Q																		
P_2	10	2	2	15															
P_3	12	2	2	10	-65	13	12												
P_4	8	2	2	13	-54	14	14	20	10	13									
P_5	6	2	2	8	-45	3	20	7	7	11	-33	11	10						
P_6	m	2	2	16	-65	13	18	-12	6	20	0	14	15	96	12	12			
P_7	9	2	2	9	-54	14	20	-16	4	15	-33	11	11	165	15	2	-75	15	10

<u>Solución.-</u>

a) Empleando los ahorros: $\lambda_{ij} = S_{ij}\left(\bar{C} + |C_{1i} - C_{1j}| - C_{ij}\right)$

El valor de $\bar{C}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\bar{C} = \frac{\Sigma C_i}{n} = \frac{15+10+13+8+16+9}{6} = \frac{71}{6}$$

$$\bar{C} \simeq 12$$

En nuestro ejemplo, para un par de puntos que formen un enlace cualquiera como (3,2), tendremos:

$$\lambda_{3,2} = 13\,(12 + |10-15| - 12)$$

$$\lambda_{3,2} = -65$$

para el enlace (4,2)

$$\lambda_{4,2} = 14\,(12 + |13-15| - 14)$$

$$\lambda_{4,2} = -54$$

para el enlace (6,4)

$$\lambda_{6,4} = 14\,(12 + |16-13| - 15)$$

$$\lambda_{6,4} = 0$$

Una vez encontrados los ahorros respectivos el algoritmo se continúa como el de Clarke. Así, el mayor ahorro 165 que corresponde a (7,5) originando una primera ruta P_1 - P_7- P_5- P_1 con una capacidad de 15 ton.

Como por esta ruta puede satisfacerse todavía algún otro punto, buscamos el siguiente mayor ahorro que pueda nexarse por P_7 ó P_5. Este enlace es (7,6) y chequeamos las restricciones del problema para ver si es factible anexarlo a la ruta. La única restricción que tiene el problema es la capacidad de camiones y como la ruta formada P_1- P_6 P_7 - P_5 - P_1 satisface esta condición, la primera ruta ha sido encontrada.

Anulemos las filas y columnas de los puntos que participan en la ruta y buscamos nuevamente el siguiente mayor ahorro. El enlace (4,3) tiene el mayor ahorro (20) que genera la ruta P_1- P_4- P_3- P_1 con capacidad de 20 ton. Como no puede enviarse mas por esta ruta dado que P_2 que es el único punto al que falta satisfacer tiene una demanda de 10 ton.; la segunda ruta ha sido hallada y la tercera será P_1- P_3- P_1

El resúmen de rutas se muestra seguidamente

R U T A S	Distancia	Carga
$P_1 - P_6 - P_7 - P_5 - P_5$	36	22
$P_1 - P_4 - P_3 - P_1$	36	20
$P_1 - P_2 - P_1$	30	10
Distancia Total: 102		

b) Empleando los ahorros : $\Pi_{ij} = S_{ij} - C_{ij}$

La nueva matriz de ahorro será

P_1	Q						
P_2	10	2 : 2 : 15					
P_3	12	2 : 2 : 10	1 : 13 : 12				
P_4	8	2 : 2 : 13	0 : 14 : 14	-3 : 10 : 13			
P_5	6	2 : 2 : 8	-17 : 3 : 20	-4 : 7 : 11	-1 : 11 : 10		
P_6	7	2 : 2 : 12	-5 : 13 : 18	-14 : 6 : 20	-1 : 14 : 15	0 : 12 : 12	
P_7	9	2 : 2 : 5	-6 : 14 : 20	-11 : 4 : 15	4 : 15 : 11	3 : 15 : 2	4 : 15 : 10

Por ejemplo para el enlace (3,2) tenemos

$$\Pi_{3,2} = S_{3,2} - C_{3,2} = 13 - 12$$

$$\Pi_{3,2} = 1$$

Se aprecia que los enlaces (7,4) y (7,6) tienen los mayores ahorros y son iguales. Cuando se presenta esta situación se puede resolver escogiendo aquél enlace que tenga la menor distancia que en nuestro caso es (7,4) generando la ruta $P_1 - P_7 - P_4 - P_1$ con 17 ton. de capacidad.

Como el menor valor de las demandas que falta satisfacer es 6 ton. correspondiente a P_5, que de agregarse a la ruta formada sobrepasaría la capacidad de camiones, la primera ruta se ha encontrado y debemos anular filas y columnas respectivas.

El siguiente mayor ahorro es 1 correspondiente a (3,2) que origina la ruta $P_1 - P_3 - P_2 - P_1$ con 22 ton. de capacidad, que satisface la capacidad de camiones y en conse cuencia se genera otra ruta.

Como los siguientes ahorros a considerar tienen valores negativos, esto significa que no se ahorra nada si hacemos dicha unión y lo más conveniente es asignar un camión a cada punto restante.

El resumen de rutas se muestra a continuación

R U T A S	Distancia	Carga
$P_1 - P_7 - P_4 - P_1$	33	17
$P_1 - P_3 - P_2 - P_1$	37	22
$P_1 - P_5 - P_1$	16	6
$P_1 - P_6 - P_1$	32	7
	Distancia Total: 118	

UN METODO DE BUSCA EN ARBOL BASADO EN LOS AHORROS.-

Este método usa los ahorros como un criterio para ramificar en un árbol de búsqueda el que en cada etapa nos da la posibilidad de sacar ya sea el mejor o el más próximo al mejor enlace posible. El método (siendo una búsqueda en árbol) es relacionado en principio a la técnica de ramificación y acotación descrita anteriormente, aunque no se calcula límites aquí y no se hace intentos para limitar el tamaño del árbol. En su lugar sólo se explora una pequeña parte del árbol por lo que no se garantiza la optimalidad de la solución.

El método es el siguiente:

Considere la lista de enlaces en orden descendente de ahorros como sigue: (y, j), (k,l), (m,n), (p,q),,, etc. En el algoritmo de Clarke and Wright, el enlace (i,j) se seleccionaría primero, luego el enlace (k,l) si es factible y así sucesivamente. En el presente algoritmo, se hace una selección en la primera etapa para elegir los enlaces (i,j) ó (k,l) como se muestra en la fig. 3.3.

Si se hace el enlace (i,j), el próximo enlace que se tomaría será (k,l) ó (m,n) suponiendo naturalmente que ellos son factibles. Este proceso continúa hasta que no sean posibles más ramificaciones cuando se ha completado el árbol de búsqueda, tenemos un número de rutas posibles y sus costos para seleccionar la mejor.

Observe que la ruta representada por la cadena de la mano derecha de nudos de la figura 3.3, es en efecto la solución de Clarke.

Una vez que se hace una ramificación se sigue por otras en serie formando una cadena hasta que se alcanza una solución y sólo entonces, se exploran ramificaciones alternativas.

Así, si la búsqueda se termina prematuramente existe alguna ruta completa de modo que ya se puede escoger una solución. Uno podría notar que aun si se busca el árbol completo, la solución no es óptima ya que solamente se han observado dos alternativas en cada etapa. Se puede introducir tres, cuatro o más alternativas en cualquier etapa pero la cantidad de cálculos se vuelve totalmente impráctica y mucho más grande que la del método de ramificación y acotación.

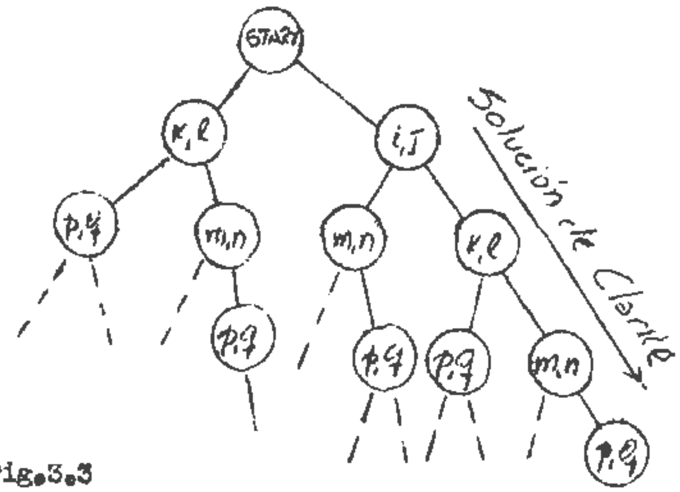


Fig.3.3

3.7.1 EJEMPLO NUMERICO.-

Sea C = 22 ton. la capacidad de los camiones (existe un número infinito de éstos y no hay restricciones adicionales)
La matriz de distancias se muestra a continuación

P_1	Q												
P_2	10	2	15										
P_3	12	2	10	13	12								
P_4	8	2	13	14	14	10	13						
P_5	6	2	8	3	20	7	11	11	10				
P_6	7	2	16	13	18	6	20	14	15	16	12		
P_7	9	2	9	14	20	4	15	11	11	15	2	15	[illegible]

Solución.-

Los ahorros que aquí se usan son los mismos que emplea el algoritmo de Clarke.
Una vez calculados los ahorros, se ordenan de mayor a menor como se aprecia después. Con los mayores ahorros se hace las primeras ramificaciones, o sea, (7,4) y (7,5). Si tomamos la rama (7,4), los siguientes enlaces que podemos considerar son (7,2) y (7,6) que tienen que desecharse pues en ambos casos se sobrepasa la capacidad de los camiones. ($P_1 - P_2 - P_7 - P_4 - P_1$ con 27 ton. de capacidad y $P_1 - P_6 - P_7 - P_4 - P_1$ con 24 ton. de capacidad)
Tomando en consecuencia la otra rama del árbol (7,5), los siguientes enlaces posibles son (7,6) y (7,4). Si tomamos la ruta $P_1 - P_5 - P_7 - P_4 - P_1$, su capacidad (23 ton) excede a la del camión y esta rama se descarta como las anteriores.

Con el enlace (7,6) se forma la ruta $P_1 - P_5 - P_7 - P_6 - P_1$ cuya capacidad es 22 ton y satisface la restricción de carga. Siguiendo la búsqueda del árbol tenemos que hacerlo a partir del nudo (7,6) denominado P en el diagrama que se presenta mas adelante. Las siguientes ramificaciones que surjan de éste nodo y que contengan 5, 6 ó 7 se descartan y con los otros enlaces se ve la posibilidad de formar nuevas rutas.

Por las consideraciones antes expuestas, el nodo N debe descartarse y el M origina la probable ruta $P_1 - P_4 - P_2 - P_1$ con 18 ton de capacidad. Continuando con la ramificación de M, encontramos los enlaces (4,3) y (3,2) llamados R y S en el diagrama, los cuales forman las rutas $P_1 - P_2 - P_4 - P_3 - P_1$ con 30 ton de capacidad y $P_1 - P_4 - P_2 - P_3 - P_1$ también con 30 ton de capacidad. Obviamente ambas rutas no son factibles y como no puede hacerse mas ramificaciones, la segunda ruta se ha encontrado y es $P_1 - P_4 - P_2 - P_1$ con 18 ton de capacidad. La tercera ruta será aquella que sólo satisface a P_3 en viaje de ida y vuelta.

Al igual que los otros ejemplos que se han desarrollado, el resúmen de rutas, distancias y cargas son mostradas mas adelante.

AHORRO	I	J
15	7	5
15	7	4
15	7	6
14	7	2

3.8 ALGORITMO DE HAYES.-

Este algoritmo es conceptualmente diferente de todos los algorit - mos definidos anteriormente ya que intenta utilizar las mismas téc nicas que usa un despachador humano experimentado. La mayoría de las decisiones tomadas por un despachador humano son subjetivas por naturaleza y entonces son imposibles de reproducir exactamente; sinembargo, se sugiere el siguiente procedimiento como una aproxi- mación razonable :

a) Producir un número de puntos exteriores, es decir puntos locali zados en la periferia del área servida por el terminal. El pri- mero de éstos puntos se escoje como el cliente que está mas alo jado del terminal. Escoja el segundo de los siguientes clientes de modo que se maximice el producto de su distancia al terminal con su distancia al primer punto (éste sería un punto diametri calmente opuesto al primero). Los puntos sucesivos se escojen de modo de maximizar el producto de la distancia al terminal y la distancia a todos los puntos prewiamente seleccionados.

b) Seleccionar un punto exterior para empezar una ruta.

c) Colocar un contador para cada punto no colocado como una combi- nación lineal de las siguientes características :

1.- demanda

2.- número de otros clientes no colocados en su vecindad

3.- la distancia entre el punto exterior y el terminal

4.- la distancia del terminal

5.- la distancia al próximo punto exterior no calculado; y

6.- elemento aleatorio.

para las características 1,4,5 y 6, cuanto mayor es la magnitud de la característica mayor es la adición del tar eador. Lo contrario ocurre para las características 2 y 3.

d) seleccionar el punto con el tanteador mas alto y asignarlo en la ruta bajo construcción si es posible.

e) recalcular los scores y repetir. Cuando se completa una ruta, escojer otra ruta exterior para empezar una nueva y así sucesivamente.

Varios refinamientos a este procedimiento se sugirieron por Hayes incluyendo la solución del agente viajero para cada ruta. El método se puede usar para resolver muy rápidamente problemas muchas veces con diferentes valores del arreglo aleatorio y finalmente se selecciona la mejor de estas soluciones. Aunque la calidad de las rutas producidas pueden no ser tan buenas como la de los otros métodos descritos anteriormente, el algoritmo es muy rápido y puede ser particulamente útil como un elemento de entrada para proveer las rutas factibles al método del algoritmo óptimo-3.

3.9 RESULTADOS COMPUTACIONALES Y CONCLUSIONES.-

La eficiencia computacional en los algoritmos descritos se compara por medio de la solución de un cierto número de problemas. Estos datos están listados en la tabla 3.1

Número de Problema	Número de clientes	Problema original
1	6	Hayes
2	13	Dantzig y Ramser
3,4,5	21,22,29	Gaskell
6	30	Clarke y Wright
7	32	Gaskell
8	50	Christofides and Eilon
9	75	" "
10	100	" "

Tabla 3.1

Los resultados que se muestran en la tabla 3.2 expresa que el método óptimo-3 fué el mejor de los explorados. El método de ramificación y acotación se probó solamente para los problemas 1 y 2 debido a que el tiempo de computación y los requerimientos de memoria del computador se tornaron prohibitivos para los otros problemas. Claramente la eficiencia computacional del algoritmo de ramificación y acotación cuando se aplica al problema de transportistas, es sustancialmente reducido si se compara con la solución de un problema equivalente de agente viajero.

El examen de la tabla 3.2 nos muestra que el método óptimo-3 produce rutas que son hasta 10% menos en longitud que las rutas producidas por el método de los ahorros de Clarke y Wright.

Además, en tres de un total de 10 problemas considerados, el número de vehículos usados para proveer a los clientes fué también menor en las rutas producidas por el método óptimo-3, que en las rutas producidas por los métodos de los ahorros.

Se observa que ninguno de los métodos propuestos por Gaskell es consistentemente mejor que el método de Clarke y que la técnica heurística de búsqueda en el árbol usando los ahorros, aunque por su naturaleza produce mejores resultados que el de Clarke, también requiere un mayor tiempo de computación y produce resultados que por lo menos para los problemas probados no es tan bueno como los resultados del método óptimo-3. Sinembargo, a medida que las restricciones del problema se hacen más y más restrictivas, uno debe esperar que el método E se vuelva progresivamente más eficiente y el C progresivamente menos eficiente; entonces, las conclusiones anteriores sobre los métodos planteados no se pueden considerar de toda generalidad

CAPITULO IV

ALGORITMO DE CLARKE Y WRIGHT

Este algoritmo trata de encontrar rutas óptimas contando con una flota de camiones de capacidad conocida (iguales ó diferentes), los que se usan para entregar mercaderías (suministros) desde un depósito central a un número variado de puntos demanda.

Se desea distribuir las demandas en los camiones de modo que toda la mercadería sea asignada y la distancia total recorrida sea mínima.

4.1 FORMULACION

Un número de camiones X_i de capacidad C_i ($i=1,2,,,,n$) son disponibles. Las demandas q_j deben ser repartidas a los puntos P_j ($j=2,3,,,M$) desde un depósito P_1. Dadas las distancias $d_{y,z}$ entre todos los pares de puntos, se necesita minimizar la distancia total recorrida por los camiones.

En este algoritmo se considera que las capacidades de los camiones son iguales, ó sea, $C_1=C_2=\ldots=C_n$ y que inicialmente hay disponibles un número infinito de éstos camiones. Si las capacidades fueran diferentes, se ordenan en forma descendente ($C_{i-1}<C_i$, $i=1,2,\ldots,n$) y se asume que :

$$C_1 \ll \sum_{J=1} q_J$$

puesto que si en la solución se nota que $C_n \gg \sum_{J=1} q_J$ entonces el problema se resolverá como un problema de agente viajero.

Si alguna de las demandas es mayor que la capacidad de los camiones, se asigna lo que quepa en un camión y el resto conforma el problema de asignación de éso sobrante en algunas de las rutas que se generarán.

4.2 ASPECTOS TEORICOS DEL PROBLEMA.-

Consideremos una posible asignación de rutas. En todos los casos que se presentan cada punto demanda puede ser unido a otro par de puntos siendo uno ó ambos el orígen. Considerando los dos puntos antes mencionados P_y y P_z, éstos pueden unirse a $P_{y\pm1}$ y $P_{z\pm1}$ respectivamente y también puede calcularse el efecto de unir P_y con P_z.

Se asume que P_y y P_z se encuentran en rutas separadas que parten del orígen. Si ellos se encuentran en la misma ruta, las mismas consideraciones se aplican excepto el caso mostrado en la fig. 4.1 .

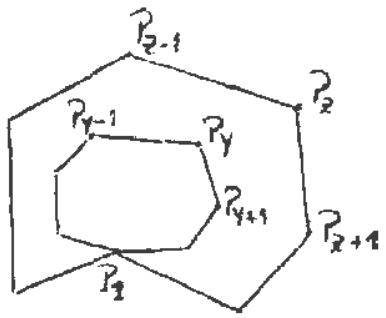


Figura 4.1

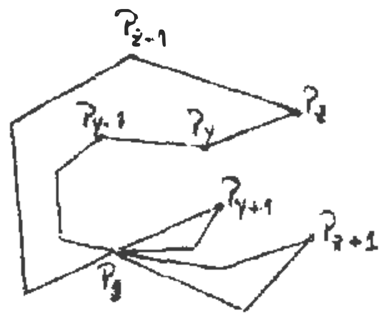


Figura 4.2

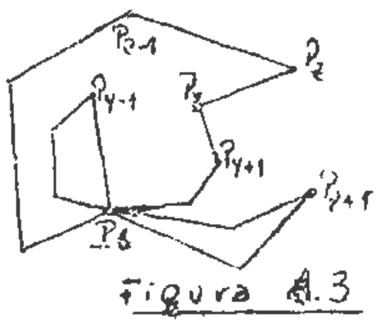


Figura 4.3

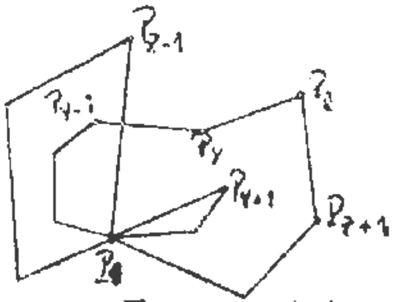


Figura 4.4

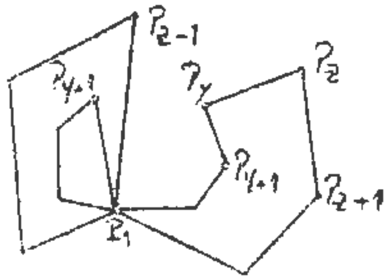


Figura 4.5

La fig. 4.1 muestra la posición de P_y y P_z de la asignación factible. Las figs. 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 muestran las cuatro posibles descomposiciones de éstas rutas resultantes de unir P_y con P_z. Estas descomposiciones consisten en las diversas formas en que se pueden unir $P_{y-1}P_y$ ó P_yP_{y+1} con las otras formas en que se pueden unir $P_{z-1}P_z$ ó P_zP_{z+1}. Las distancias ahorradas por cada una de estas descomposiciones se muestra a continuación :

$$d_{y,y+1} - d_{1,y+1} + d_{z,z+1} - d_{1,z+1} - d_{y,z} \qquad (4.1)$$

$$d_{y-1,y} - d_{1,y-1} + d_{z,z+1} - d_{1,z+1} - d_{y,z} \qquad 4.2)$$

$$d_{y,y+1} - d_{1,y+1} + d_{z,z+1} - d_{1,z-1} - d_{y,z} \qquad 4.3$$

$$d_{y-1,y} - d_{1,y-1} + d_{z,z-1} - d_{1,z-1} - d_{y,z} \qquad 4.4)$$

estos cuatro ahorros son calculados para cada par de puntos.

Lo mostrado anteriormente es la unión de un punto cualquiera con otros dos puntos también cualquiera.

Consideremos ahora que una asignación factible de P_y y P_z es aquelia en que los otros dos puntos que se unen a P_y son el orígen y lo mismo suponemos para P_z, según se muestra en la fig. 4.6 .

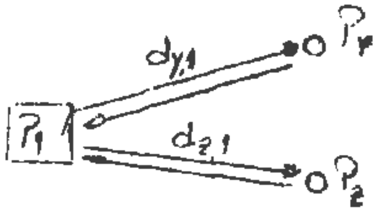


Fig. 4.6

La distancia total recorrida en ambas rutas será :

$$D1 = 2 * d_{y,1} + 2 * d_{z,1} \qquad (4.5)$$

Si unimos ahora P_y con P_z, tenemos lo siguiente :

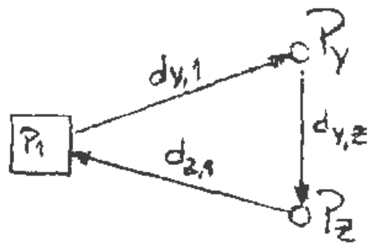


Fig. 4.7

siendo la distancia total recorrida para este caso

$$D2 = d_{y,1} + d_{y,z} + d_{z,1} \qquad (4.6)$$

El ahorro producido al hacer la unión P_y con P_z será de acuerdo a las ecuaciones (4.5) y (4.6)

$$S_{y,z} = D1 - D2$$
$$= 2 \times d_{y,1} + 2 \times d_{z,1} - d_{y,1} - d_{y,z} - d_{z,1}$$

$$S_{y,z} = d_{y,1} + d_{z,1} - d_{y,z} \qquad (4.7)$$

La ecuación (4.7) es la que se aplica para determinar los ahorros que resultan de unir dos puntos con el orígen y se emplea también en el algoritmo de Tillman y Cochrane (Cap. V).

4.3 PROCESO COMPUTACIONAL.-

Los datos que se necesitan para este problema son :

identificación de los puntos demanda (x 2,3,...,n)

P_1 orígen

Q_i demanda del punto i (i= 2,3,...,n)

C_1 capacidad de los camiones

d_{ij} distancia ó costo entre P_i y P_j

$t_{y,z}$ índice que indica la unión de los puntos P_y y P_z en una ruta (cuando ésta variable tiene valor 1 significa que los puntos se han conectado; si tiene valor 0, significa que no hay conexión y si $t_{y,1}$ igual a 2 , significará que el punto P_y se ha conectado con el orígen)

Si los camiones tubieran capacidad diferente un buen criterio para asignarlos puede ser, comenzar con los de mayor capacidad y continuar en orden descendente.

El proceso consiste en lo siguiente :

PASO 1 .- Calcular los ahorros para todas las uniones de dos puntos usando la ecuación (4.7).

PASO 2 .- Asignar un camión de la menor capacidad a cada punto demanda e inicializar la matriz "marcado de rutas" t_{ij} (una explicación más detallada se presenta en el Cap. V en el paso 3 del procedimiento).

PASO 3 .- Se escoge el enlace que proporciona el mayor ahorro siempre y cuando la suma de las capacidades de estos puntos sea menor que la capacidad del camión. Si cumple ésta y las posibles restricciones que puedan haber, los puntos escogidos formarán parte de una ruta y se actualiza la matriz "marcado de rutas".

PASO 4.- Se busca los enlaces

$$P_{y,m} \; (m = 1,2,\ldots, y-1) \text{ ó } P_{k,y} \; (k = y+1, y+2, \ldots, n) \quad (4.8)$$

$$P_{z,m} \; (m = 1,2,\ldots, z-1) \text{ ó } P_{k,z} \; (k = z+1, z+2, \ldots, n) \quad (4.9)$$

que pueden añadirse a la ruta inicial hasta satisfacer la necesidad del camión. Los enlaces que no cumplan con cualquiera de las condiciones del problema quedan marginados para usos futuros.

Si ya no se puede enviar más carga en el camión, se ha encontrado la primera ruta solución. Se actualiza la matriz marcado de rutas y asignación de flota terminando de esta manera una iteración.

Se regresa al paso 3 y se repite este proceso hasta que no mas enlaces cumplan con las restricciones.

Cuando se llega a esta parte en la solución del problema, los puntos que no hayan intervenido en ninguna de las rutas se consideran para ser satisfechos en forma independiente, o sea, se asigna un camión que va y viene a cada punto antes mencionado, concluyendo así el problema.

4.4 EJEMPLO NUMERICO.-

El siguiente ejemplo explica la forma de resolver este algoritmo.

Tenemos como datos la matriz de distancias de la tabla 4.1 y las características de la flota de la tabla 4.2

Q	P_1												
1200	2 9	P_2											
1700	2 16	18 5	P_3										
1500	2 24	18 12	28 7	P_4									
1400	2 23	10 22	20 17	34 [illegible]	P_5								
1700	2 22	10 27	20 [illegible]	22 21	26 19	P_6							
1400	2 25	10 24	[illegible] 23	36 30	20 28	38 9	P_7						
1200	2 32	10 31	20 26	26 27	30 25	44 10	50 7	P_8					
1900	2 36	10 35	20 30	20 37	24 35	42 16	50 11	58 10	P_9				
1800	2 38	10 37	16 36	16 43	20 [illegible]	38 22	50 13	54 16	68 6	P_{10}			
1600	2 [illegible]	10 41	20 34	32 31	36 29	44 20	50 17	[illegible] 10	92 6	68 [illegible]	P_{11}		
1700	2 50	10 [illegible]	20 [illegible]	34 37	42 31	44 [illegible]	50 25	64 [illegible]	92 [illegible]	76 12	84 8	P_{12}	
1400	2 52	10 55	20 46	34 39	44 29	44 30	50 27	64 20	72 16	90 [illegible]	84 10	92 12	P_{13}

Tabla 4.1

CAPACIDAD galones	4000	5000	6000
DISPONIBILIDAD REAL	∞	3	4
DISPONIBILIDAD	12	0	0

Tabla 4.2

Para resolver este problema, tenemos que calcular primeramente los ahorros empleando la ecuación (4.7). Estos se han colocado en el lado izquierdo de las casillas de la matriz de distancias.

Por ejemplo: para los puntos P_3 y P_5 el ahorro estará dado por:

$$S_{5,3} = d_{5,1} + d_{3,1} - d_{5,3}$$

$= 23 + 14 - 17$

y así sucesivamente para los demás puntos.

La matriz marcado de rutas inicialmente supone un camino a cada localidad en rutas de ida y vuelta, de allí el número 2 que aparece en la columna de P_1 en la tabla 4.3.

Escogemos el enlace $P_{13, 12}$ que nos proporciona el mayor ahorro ($S_{13, 12} = 92$) y como la suma de las demandas Q_{13} y Q_{12} es 2,800 cantidad que es menor que la capacidad máxima de camiones que 6,000 galones, tenemos que la primera ruta está siendo conformada por: $P_1 - P_{13} - P_{12} - P_1$

&	P_1												
1200	2	P_2											
1700	2		P_3										
1500	2			P_4									
1400	2				P_5								
1700	2					P_6							
1400	2						P_7						
1200	2							P_8					
1900	2								P_9				
1300	2									P_{10}			
1600	2										P_{11}		
1700	2											P_{12}	
1100	2												P_{13}

Tabla 4.3 Matriz inicial "marcado de rutas"

De acuerdo a las ecuaciones (3.8) y (3.9), vemos que hay dos enlaces que cumplen con la restricción de capacidad y como sus ahorros son iguales ($S_{13,\ 11} = 84$ y $S_{12,\ 11} = 84$) escogemos de éstos, el par que tenga la menor distancia ($d_{12,\ 11} = 100$ y $d_{13,\ 11} = 104$), o sea $P_{12,\ 11}$; siendo ahora la carga total de 4,400 galones.

Como a la ruta inicial se ha agregado al punto P_{11} tenemos como nueva ruta $P_1 - P_{13} - P_{12} - P_{11} - P_1$ y debemos buscar aquéllos ahorros en donde intervengan P_{13} y P_{11} ya que, P_{12} por ser un punto que no está conectado al origen, no debe tomarse en cuenta para evitar que la ruta pueda romperse.

Siguiendo con el análisis de los ahorros vemos que, $S_{13,\ 9}$ y $S_{11,\ 9}$ son iguales (tienen el valor 72) y si tomamos el que tenga menor distancia ($d_{11,\ 9} = 84$) y agregamos Q_9 a la carga total de la ruta (1,900 + 4,400 = 6,300), notamos que se sobrepasa la capacidad del camión en estudio (6,000 galones). Siguiendo la búsqueda de ahorros máximos que a su vez satisfagan la restricción de capacidad, encontramos como enlace posible $S_{11,\ 8}$, lo que nos permite la ruta $P_1 - P_{13} - P_{12} - P_{11} - P_8 - P_1$ con una carga de 5,600 galones (1,300 + 1,300 + 1,700 + 1,200) y una distancia total de 112 unidades (52 + 10 + 8 + 10 + 32)

Si la capacidad del camión permitiera agregar algún punto más a la ruta, el siguiente paso sería anular filas y columnas 12 y 11 y también el ahorro (13, 8) a fin de evitar que los puntos que conforman esta ruta sean considerados nuevamente en la búsqueda.

Como por los valores de las demandas no es posible satisfacer ningún punto más (el menor valor es $Q_2 = 1,200$ y lo que le falta a la ruta para copar la capacidad del camión es 400 galones) hemos encontrado la primera ruta solución del problema.

La matriz marcado de rutas ha variado según se muestra en la tabla 4.4, donde los subindices A significan que se trata de la primera ruta (B, C, etc. significarán las rutas sucesivas que se formen.

Como ya hemos encontrado una ruta, el siguiente paso consiste en anular filas y columnas de los puntos que conforman esta ruta y con los ahorros restantes se repite el proceso.

El ahorro $S_{10, 9} = 68$ permite inicializar la primera ruta ya que Q_{10} y Q_9 suman 3,700 galones que cumplen con la restricción de capacidad, teniendo entonces la ruta $P_1 - P_{10} - P_9 - P_1$. Siguiendo la búsqueda vemos que el siguiente ahorro posible es $S_{9, 7}$ siendo ahora la ruta $P_1 - P_7 - P_9 - P_{10} - P_1$ con una capacidad total de 5,100 galones y una distancia total de 80 unidades (en la tabla 4.4 ésta ruta se encuentra marcada con el subíndice B)

Como no puede satisfacerse otra demanda la segunda ruta queda conformada como se ha expresado antes y debemos anular ahora los puntos que la conforman.

De los ahorros restantes vemos que $S_{5, 4}$ nos permite empezar con la tercera ruta ($P_1 - P_4 - P_5 - P_1$) siendo la capacidad total igual a 2,900 galones. Repitiendo el proceso seguido con las rutas anteriores, apreciamos que la ruta se extiende a $P_1 - P_3 - P_4 - P_5 - P_1$ con una capacidad total de 4,600 galones y después de continuar la búsqueda llegamos a la ruta $P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 - P_1$ con una capacidad total de 5,800 galones y una distacia total de 54 unidades, que es la tercera ruta solución (C en la tabla 4.4).

Después de anular los ahorros respectivos de la tabla 4.1, apreciamos que sólo ha quedado el enlace (6,1) por lo que, el punto P_6 doverá ser asignado en ruta de ida y vuelta ($P_1 - P_6 - P_1$) con una capacidad de 1,700 galones y una distancia de 44 unidades (en la tabla 4.4 aparece con el sub-índice D)

Habiendo llegado al término de la solución del problema, las tablas 4.5 y 4.6 muestran el resumen final del problema.

Q	P1													
5800	1C	P2												
5800	–	1C	P3											
5800	–		1C	P4										
5800	1C			1C	P5									
1700	1D					P6								
5100	1B						P7							
5600	1A							P8						
5100	–						1B		P9					
5100	1B								1B	P10				
5600	1A										P11			
5600	–							1A				P12		
5600	–										1A	1A	P13	

Tabla 4.4

CAPACIDAD		5000	6000
DISP. REAL	∞	3	4
1ª ITERACION	0	0	1
2ª ITERACION	0	0	2
3ª ITERACION	0	0	3
4ª ITERACION	0	0	4

Tabla 4.5

R U T A S	Distancia	Carga
$P_1 - P_{11} - P_{13} - P_{12} - P_8 - P_1$	112	5600
$P_1 - P_7 - P_9 - P_{10} - P_1$	80	5100
$P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 - P_1$	54	5800
$P_1 - P_6 - P_1$	44	1700
	Distancia Total: 290	

Tabla 4.6 Rutas finales

Cabe recordar que cuando una ruta está conformada por más de dos puntos, por ejemplo: $P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_1$ (sin considerar por supuesto P_1 que es el origen), el siguiente punto que es anexado a la ruta, digamos P_5 sólo puede ingresar por P_2 ó P_4 y no por P_3, pues estaría "rompiendo" una ruta ya establecida.

4.5 <u>EJEMPLO NUMERICO.-</u>

En este ejemplo se tiene como datos la existencia de un número infinito de camiones de 8 ton. de capacidad; no existe ninguna restricción de distancia y ningún otro tipo de restricción adicional. La matriz de distancias se muestra en la tabla 4.7.

<u>Solución.-</u>

Analizando la tabla 4.7, notamos que el enlace que permite el mayor ahorro es $P_{5,3}$ que tiene un valor de 27. Sumando las demandas de los puntos escogidos da 7.2 ton. que satisface la restricción de capacidad de camiones e incluso hay un márgen de 0.8 ton. que pueden satisfacerse en esta ruta. De las demandas que tienen valores que como máximo sea 0.8 ton. existen dos (P_9 y P_{11}) que reducen el área de búsqueda del mayor ahorro. El siguiente ahorro a considerar es

$P_{9,3}$ por lo que la ruta es ahora $P_1 - P_5 - P_5 - P_9 - P_1$ con una capacidad de 7.8 ton. y una distancia de (13 + 3 + 23 + 11) 50 km.
Como no más puntos pueden satisfacerse hemos encontrado la primera ruta solución del problema.

Anulando las filas y columnas de los puntos participantes de la primera ruta encontrada, notamos que el siguiente mayor ahorro es 18 que corresponde al enlace (10,8), pudiendo inicializar ésta segunda ruta como $P_1 - P_{10} - P_8 - P_1$ con una capacidad de 6.4 ton.
Considerando el criterio de ir satisfaciendo las demandas más grandes, tenemos que decidirnos por Q_6 cuyo valor es 1.3 ton. y debemos analizar los ahorros $S_{10,6}$ y $S_{8,6}$ para determinar por que extremo de la ruta debe anexarse P_6. Luego del análisis respectivo nos decidimos por (8,6) siendo ahora la ruta $P_1 - P_{10} - P_8 - P_6 - P_1$ cuya capacidad es 7.7 ton.. Puesto que no se puede anexar más puntos a la ruta, hemos encontrado la segunda ruta solución siendo la distancia recorrida en ésta ruta 41 km.

Luego de anular filas y columnas respectivas, el siguiente mayor ahorro posible es P(11,7) (cuyo valor es 5) quedando esta nueva ruta como $P_1 - P_{11} - P_7 - P_1$ con 6.3 ton. de capacidad. El siguiente ahorro que permite se satisfagan las restricciones del problema es P(7,4) y la nueva ruta es $P_1 - P_{11} - P_7 - P_4 - P_1$ y la nueva capacidad es 7.3 ton. . El único punto posible de considerar es P_2 cuya demanda es 0.6 ton y se anexa a la ruta por P_4 según los ahorros y como tercera ruta tenemos finalmente $P_1 - P_{11} - P_7 - P_4 - P_2 - P_1$ con 7.9 ton. de capacidad y (6 + 8 + 1 + 13 + 18) 46 km. de distancia recorrida.

La matriz final "marcado de rutas" y el resúmen de las rutas finales se muestran a continuación.

CAPITULO V

ALGORITMO DE TILLMAN Y COCHRANE

Este algoritmo al igual que el de Clarke y Wright, trata de encontrar las rutas óptimas que una flota de camiones tiene que recorrer para minimizar una función objetivo que puede ser costos ó distancias, satisfaciendo las restricciones que tenga el problema.

La diferencia primordial entre este algoritmo y el de Clarke radica en el criterio de mirar hacia adelante. Este criterio en el algoritmo de Tillman está íntimamente ligado a otro llamado "número de uniones", que indica el máximo número de puntos demanda que pueden ser satisfechos con el camión de mayor capacidad . Así por ejemplo : si la capacidad máxima de camiones de una flota fuera de 10,000 unidades y las demandas en orden ascendente fuera $P_2 = 1,500$, $P_3 = 1,500$, $P_4 = 2,500$, $P_5 = 3,000$, $P_6 = 5,000$, $P_7 = 8,000$ unidades; lo máximo que podríamos satisfacer en una ruta (de cumplir además con las restricciones del problema) sería $P_2 - P_3 - P_4 - P_5$ que requieren una demanda de 8,500 unidades. Esto significa que podríamos hacer uniones de hasta 4 puntos o sea, tres enlaces y en la solución del problema si tomamos la decisión de trabajar con los tres enlaces debemos buscar todas las posibilidades de ahorros totales con este número de enlaces (una mayor explicación de ahorro total se hace más adelante). El solo hecho de hacer los cálculos de ahorros totales para cada ruta representa un tiempo considerable en la computadora que puede ser reducido si consideramos solamente dos el número de uniones que van a ser estudiados. Es necesario también mencionar que cuando el problema crece en magnitud (aumenta el número de puntos demanda), el criterio de sólo dos uniones puede ser aumentado a tres, cuatro, etc. según sean las necesidades del usuario. Obviamente un cri terio de sólo dos uniones para un problema grande podría darnos rutas de una optimalidad menor.

3.1 FORMULACION DEL ALGORITMO.-

Las variables empleadas en la solución de este algoritmo así como los pasos a seguir (aplicados a un ejemplo ilustrativo) se muestran a continuación :

n : número de puntos demanda

P : puntos demanda ($i = 2,3,\ldots,n$)

Q_y : cantidad requerida en el punto demanda y

C : capacidad de los camiones

$d_{y,z}$: distancia entre los puntos demanda y,z

$t_{y,z}$: índice de la matriz marcado de rutas que indica la unión de los puntos y,z

$t_{y,1} = 2$: indica que el punto P_y se ha conectado con el terminal P_1

$t_{y,z} = 1$: indica que los puntos P_y y P_z se han conectado

$t_{y,z} = 0$: indica no conexión de los puntos

para comenzar el algoritmo es necesario asignar un camión de la menor capacidad a cada punto demanda. Como normalmente no hay demasiados camiones para hacer esto, se asume que existen camiones adicionales disponibles; éstos camiones adicionales son llamados "camiones postizos" y sus capacidades "capacidades postizas" que se toman (según se mencionó antes) como las de los camiones de menor capacidad.

El procedimiento seguido para resolver el algoritmo es como se explica a continuación :

PASO 1.- Este primer paso consiste en hacer identificables los puntos demanda P ($y = 2,3,\ldots,n$). También se asume que el terminal es el punto P_1 pues en programación no se puede trabajar con subíndice cero que es como se le denomina al depósito central en la literatura existente.

PASO 2.- En el proceso computacional consiste en la asignación de camiones para los puntos demanda. Se asume que (como se mencionó en el preámbulo de este capítulo) los valores de las demandas requeridas son tales que una asignación de un camión a cada punto es posible.

Si una ó más demandas son más grandes que la máxima capacidad de camiones también se puede hacer una asignación dividiendo este peso mayor en dos ó más partes que puedan ser transportadas por los camiones de mayor capacidad y el resto en otro de menor capacidad. Por consiguiente, todos los pesos considerados en el problema pueden cumplir con $Q_y \ll C_x$ para todo y, siendo C_x la capacidad máxima de los camiones.

Una dificultad obvia ocurre cuando no hay suficientes camiones disponibles para asignar un camión a cada punto, siendo remediada esta situación con la asunción de los antes mencionados "camiones postizos" y sus "capacidades postizas".

Otra dificultad también puede ocurrir cuando tenemos camiones en exceso para ser usados en la asignación inicial, pues algunos camiones "grandes" a lo mejor han sido decididos para transportar pesos peuqeños. Un mejor uso de éstos camiores sería combinar pesos de mayores con menores cantidades para lograr una mejor distribución de las demandas.

Además, los camiones asignados inicialmente son reasignados después de cada iteración, siendo completada una iteración cuando se anexa un punto a una ruta ya existente ó cuando se considera un enlace para formar una nueva ruta.

Consideremos el siguiente ejemplo que nos servirá de ilustración de los pasos que iremos describiendo.

P1	Q						
P2	7	2 38					
P3	9	2 42	45 35				
P4	8	2 56	72 22	65 33			
P5	7	2 63	49 54	83 22	79 45		
P6	6	2 64	64 38	79 27	100 20	98 29	
P7	5	2 80	56 62	84 38	79 65	121 12	99 45

Tabla 5.1 Matriz de distancias y ahorros:

CAPACIDAD	12 ton.	15 ton.	18 ton.
DISPONIBILIDAD	2	1	1
DISPONIBILIDAD ASUMIDA	∞	1	1
ASIGNACION INICIAL	6	0	0

Tabla 5.2 Características de la flota

El proceso de asignación de camiones es como sigue :

a.- colocar las capacidades de los camiones en forma creciente.

b.- cada demanda es asignada al camión de menor capacidad para ser transportada. La reasignación de camiones ocurre en el paso 9 y se completa una iteración del algoritmo.

PASO 3.- Se calcula la matriz de ahorros empleando la ecuación (4.7) demostrada en el capítulo anterior. Se anexan éstos valores al lado izquierdo de las casillas. Puesto que la matriz de distancias es simétrica se usa sólo la mitad de la misma para la solución del problema. Denominando una celda cualquiera de la matriz $P_{i,j}$, significará la distancia entre P_i y P_j en la tabla 5.1.

Del ejemplo, para los puntos P_2 y P_3 tenemos lo siguiente :

Ahorro $S_{3,2} = d_{2,1} + d_{3,1} - d_{3,2}$

$38 + 42 - 35$

45

Los ahorros restantes se calculan de la misma forma y es necesario tener en cuenta las restricciones que existen para descartar los enlaces que no las cumplan, de futuras consideraciones. En la tabla 5.1 se ha agregado una columna con los valores Q_{i}, $i = 2, 3 .... n$; que son los pesos requeridos por cada punto demanda.

Considerando el vector Q con sus valores respectivos y otra matriz "marcado de rutas" con celdas $t_{i,z}$, que puede tener valores 0, 1 y 2 según se explicó anteriormente, se inicializa ésta considerado en la asignación inicial de camiones con los valores $t_{i,1} =$ 2 como se muestra en la tabla 5.3 .

La asignación inicial de camiones discutida en el paso 2 (mostrada en la tabla 5.2) significa para el ejemplo que hay disponibles inicialmente 4 camiones, siendo 2 de ellos de 12 unidades, uno de 15 y el otro de 18. Se ha hecho una asignación inicial de 6 camiones de 12 unidades de capacidad (aquí es donde hacemos uso de los camiones postizos).

PASO 4.- Puesto que cada punto demanda sólo puede ser unido a otros dos puntos (pudiendo ser uno de ellos el terminal), la siguiente relación debe cumplirse :

$$\sum_{z=1}^{k-1} t_{k,z} + \sum_{y=k+1}^{M} t_{y,k} = 2 \qquad \text{para } k = 1,2,\ldots,M$$

o sea, si sumamos los valores $t_{k,z}$ de la fila k y los $t_{y,k}$ de la columna k, el resultado siempre será 2. Cuando los coeficientes de la matriz "marcado de rutas" se vayan reajustando de acuerdo a como progrese la solución del problema; los valores de los $t_{y,z}$ variarán y la expresión anterior proporciona un método de recordar cómo las rutas son generadas por el algoritmo.

PASO 5.- Se hace un ensayo de unir los puntos que tengan el mayor ahorro. La aproximación usada por Clarke y Wright es para seleccionar el ahorro mas grande y conectar esos dos puntos. Tillman, además de un primer enlace también ve la posibilidad de buscar un segundo, un tercero etc. enlaces de acuerdo al tamaño del problema, etc.. Antes de decidir la unión de dos puntos, el paso 6 debe cumplirse.

El método usado en este paso para la selección de los puntos a unirse, sujetos a las condiciones antes mencionadas es :

a.- Considerar la celda con el máximo ahorro (factible de unirse) y considerar que este par de puntos se une (en el ejemplo, éste valor es $P_{i,j} = P_{5,4}$).

b.- De las celdas restantes después del paso a sin considerar las uniones que contengan subíndices i ó j, elegir el siguiente mayor ahorro que es factible. Sumar los ahorros de los casos a y b.

c.- Seguimos con el segundo mayor ahorro y vemos la posibilidad de hacer el enlace (asumimos que se puede para efectos de la explicación).

d.- De los ahorros que quedan después del paso c, buscamos uno que sea factible pudiendo ser uno de los ahorros de los pasos a y b. Sumamos los ahorros c y d.

e.- El proceso se repite para el tercer mayor ahorro y así sucesivamente hasta que todos los posibles ahorros hayan sido investigados. Un buen criterio para evitar hacer los cálculos que se muestran en la tabla 5.4 es el de parar cuando el segundo enlace que conforma el primer ahorro total sea primero en conformar cualquier otro ahorro total, pues es en los primeros ahorros totales donde se encuentra el mayor de todos.

P1	Q						
P2	7	2					
P3	9	2					
P4	8	2					
P5	7	2					
P6	6	2					
P7	5	2					

Tabla 5.3 Matriz inicial "marcado de rutas"

UNION 1	AHORRO	UNION 2	AHORRO	AHORRO TOTAL
P6 - P4	100	P5 - P3	83	183
P6 - P5	98	P4 - P2	72	170
P5 - P3	83	P6 - P4	100	183
P6 - P3	79	P5 - P4	74	153
P5 - P4	74	P6 - P3	79	153
P4 - P2	72	P6 - P5	98	170
P4 - P3	65	P6 - P5	98	163

$P_6 - P_2$	64	$P_5 - P_3$	83	147
$P_5 - P_2$	47	$P_6 - P_4$	100	147
$P_3 - P_2$	45	$P_6 - P_4$	100	145

Tabla 5.4 Ahorros totales para la primera iteración

De estos ahorros totales se escoge el mayor y los enlaces correspondientes a éste ahorro originan las dos primeras rutas factibles del problema.

Según el paso 5 en el ejemplo tenemos :

a.- El máximo ahorro posible es 100 que resulta de unir P_6 con P_4 y si cumplen con las restricciones del problema formarían la ruta $P_1 - P_6 - P_4 - P_1$ con una distancia total de 140 unidades.

b.- El siguiente mayor ahorro posible sin considerar los enlaces en que participan los puntos P_6 y P_4 es 83 que resulta de unir P_5 con P_3, formando de ser factible la ruta $P_1 - P_5 - P_3 - P_1$ con una distancia total de 127 unidades. Sumando éstos dos ahorros tenemos como ahorro total 183.

c.- Sin considerar los enlaces de los ahorros iniciales, seguimos con el siguiente mayor ahorro que es 98 correspondiente a P_5 con P_6, dando orígen a la ruta $P_1 - P_5 - P_6 - P_1$ con 156 unidades de distancia.

d.- El siguiente mayor ahorro (sin considerar P_5 ni P_6) es 72 de unir P_4 y P_2 , originando si los unimos (de ser factible por supuesto) la ruta $P_1 - P_4 - P_2 - P_1$ con 116 unidades de distancia y un ahorro total de 170.

e.- Repitiendo el proceso mostrado para cada uno de los ahorros si guiantes, los respectivos ahorros totales son obtenidos y mostrados en la tabla 5.4 .

PASO 6.- Los puntos seleccionados para ser unidos de acuerdo al paso 5, son analizados para ver si las restricciones anotadas inicialmente son satisfechas. Si el par de puntos son P_y y P_z tenemos

1.- Si los valores $t_{y,1}$ y $t_{z,1}$ son mayores que cero los puntos P_y y P_z se unen al orígen y se decide la unión entre ellos.

2.- Los puntos P_y y P_z (que van a anexarse a una ruta ó a formar una nueva) cuando la ruta cuenta con mas de dos puntos, no deben ser los extremos (sin considerar al orígen) para prevenir un "loop", o sea, cuando una ruta consta de varios puntos sin llegar al orígen.

3.- Se asume que las cargas son combinadas de acuerdo a los pasos 7 y 8. Los camiones son entonces reasignados de acuerdo al paso 2 y las capacidades requeridas son chequeadas con las cargas para determinar si la ruta propuesta es posible.

4.- Todas las demás posibles restricciones del problema deben ser satisfechas. En el ejemplo mostrado, una restricción adicional es que los camiones no pueden recorrer más de 160 millas.

Si una ó más de las restricciones no se cumplen, se elimina el par de puntos de cualquier consideración posterior y se repite el paso 5.

En el ejemplo, el máximo ahorro total es 183 (ver tabla 5.4). La primera asignación corresponde a $P_6 - P_4$ con una carga de 14 unidades y la segunda es $P_5 - P_3$ con 16 unidades de capacidad.

PASO 7.- Si todas las condiciones mencionadas en el paso 6 son satisfechas, los puntos P_y y P_z elegidos en el paso 5 se unen y $t_{y,z}$ se hace igual a 1, haciendo los reajustes necesarios en la tabla 4.3

En el ejemplo, el enlace que transporta la mayor carga es $P_5 - P_3$ que como se explica en el paso 10, resulta ser la primera ruta en la solución del problema, luego, el reajuste de la matriz marcado de rutas se hace de la forma siguiente:

$t_{5,3} = 1$; $t_{3,1} = 1$; $t_{5,1} = 1$; como se muestra en la tabla 5.5

P1	Q						
P2	17	2					
P3	16	1					
P4	8	2					
P5	16	1		1			
P6	6	2					
P7	5	2					

Tabla 5.5 Matriz marcado de rutas reajustada según primera ruta

PASO 8.- El vector Q debe ser entonces corregido de dos formas:

a) Cada Q_j correspondiente a un $t_{j,1} = 0$, se hace igual a 0.

b) Cada Q_j correspondiente a los puntos demanda conectados al origen (de la ruta que se está analizando), se hace igual a la suma de las demandas de todos los puntos de la ruta. Esto también se ilustra en la tabla 5.5.

PASO 9.- Los camiones son reasignados para cubrir los pesos de las nuevas rutas. Esto consiste en remover los camiones asignados para cubrir los puntos P_3 y P_5, asignando uno a la ruta que incluye los puntos antes mencionados. El proceso para reasignar los camiones se discute en el paso 2, mostrándose en la tabla 5.6 la reasignación de la primera ruta.

En el paso 5, se unió los puntos P_5 y P_3 siendo la carga de esta ru ta 16 unidades que se asignan al camión de 18 y los puntos restantes son asignados a camiones de 2 unidades de capacidad.

PASO 10.- La primera iteración se ha completado y regresando al paso 5, vemos la posibilidad de hacer nuevas uniones. Si esto es posible, los dos enlaces que correspondan al máximo ahorro total de la nueva tabla generada (5.7) son chequeados con las rutas ya originadas en la iteración anterior pudiendo ocurrir varias alternativas:

a) Uno de los enlaces conecta dos rutas antes originadas.

b) Un enlace tiene un punto en común con una de las rutas.

c) Los dos enlaces no pueden conectarse con ninguna de las rutas originadas.

En el caso a, si esta conexión satisface las restricciones de peso, distancia, costos, etc. la ruta crece al haberse agregado una demanda más y esta nueva ruta, es la que se considera para futuras pruebas.

En el caso b, de ser factible esta posibilidad, tendremos una ruta que reemplaza a las dos rutas unidas.

En lo que respecta al caso c, estos enlaces forman nuevas rutas lo que origina que el problema tenga más posibilidades de generar rutas solución y su trato posterior será como el de las rutas originalmente generadas.

En el caso de no ser posible que existan otros enlaces en el paso 5, o sea, no pueden conectarse más puntos que satisfagan todas las restricciones del problema, se ha llegado a la solución final. Las rutas encontradas se asignan a los camiones respectivos (de acuerdo al criterio seguido tal como asignar los camiones de mayor capacidad inicialmente) y los puntos que no estén en ninguna ruta, son asignados en forma independiente, o sea, cada uno a un camión en rutas de ida y vuelta.

En el ejemplo tenemos que ningún punto puede anexarse a cualquiera de las rutas originales pues las capacidades de ambas son 14 y 16 ton. y de los puntos posibles a considerar para incrementar estas rutas o crear nuevas, la mínima capacidad es 5 ton. que si se suman a la ruta de menor capacidad sobrepasaría la capacidad máxima de camiones, que es 18 ton. Por esta razón, la ruta de mayor capacidad, se toma como definitiva, o sea, $P_1 - P_5 - P_3 - P_1$ con 16 ton. de capacidad y una distancia de 137 millas.

Hecha la asignación, se anulan todos los enlaces que contengan por lo menos uno de los puntos de la ruta con la finalidad de evitar que los puntos que ya han sido asignados, se tomen en cuenta en futuras consideraciones

CAPACIDAD (TON.)	12	15	18
DISPONIBILIDAD ASUMIDA	∞	1	1
1ª ASIGNACION	4	0	1

Tabla 5.6 Reasignación de camiones

UNION 1	AHORRO	UNION 2	AHORRO	AHORRO TOTAL
$P_6 - P_4$	100	- -	- -	- -
- -	- -	- -	- -	- -

Tabla 5.7 Nueva tabla de ahorros totales

NOTA: Como no más puntos satisfacen las restricciones del problema esta tabla queda inconclusa.

Con los ahorros que quedan, se vuelve al paso 5; se generan dos nuevas rutas y se continúa el proceso hasta que todos los puntos demanda, hayan sido satisfechos.

Continuando con la solución del ejemplo, la tabla 5.8, nos muestra la matriz marcado de rutas en la solución general. La tabla 5.9 , muestra la asignación final de camiones y la tabla 5.10 presenta - las rutas finales con cargas y distancias totales recorridas en todas esas rutas

P1	Q						
P2	7	2					
P3	16	1					
P4	14	1					
P5	16	1		1			
P6	14	1			1		
P7	5	2					

Tabla 5.8 Matriz final marcado de rutas

CAPACIDAD (TON.)	12	15	18
DISPONIBILIDAD REAL	2	1	1
ASIGNACION FINAL	2	1	1

Tabla 5.9 Asignación final de camiones

RUTAS	DISTANCIA	CARGA
$P_1 - P_5 - P_3 - P_1$	76	16
$P_1 - P_6 - P_4 - P_1$	127	14
$P_1 - P_2 - P_1$	140	7
$P_1 - P_7 - P_1$	160	5
Distancia Total : 503		

Tabla 5.10 rutas finales

Al igual que en el algoritmo de Clarke and Wright, es necesario - tener en cuenta que los puntos no conectados al orígen se descartan de posibles consideraciones de rutas para evitar el rompimiento de las mismas.

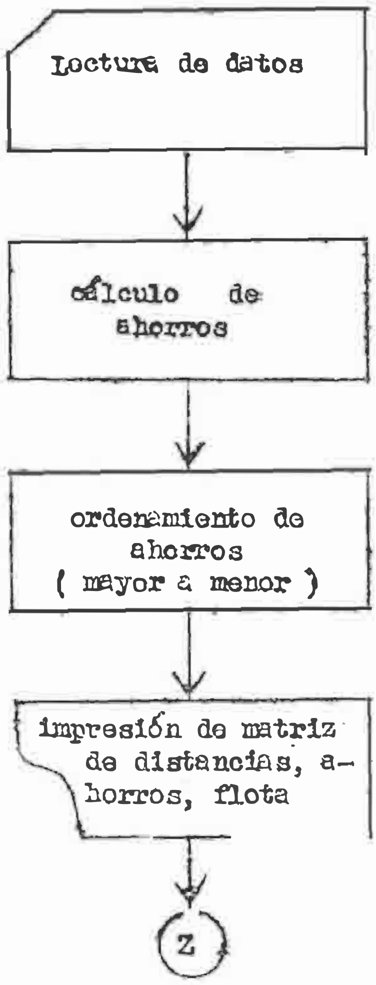
CAPITULO VI

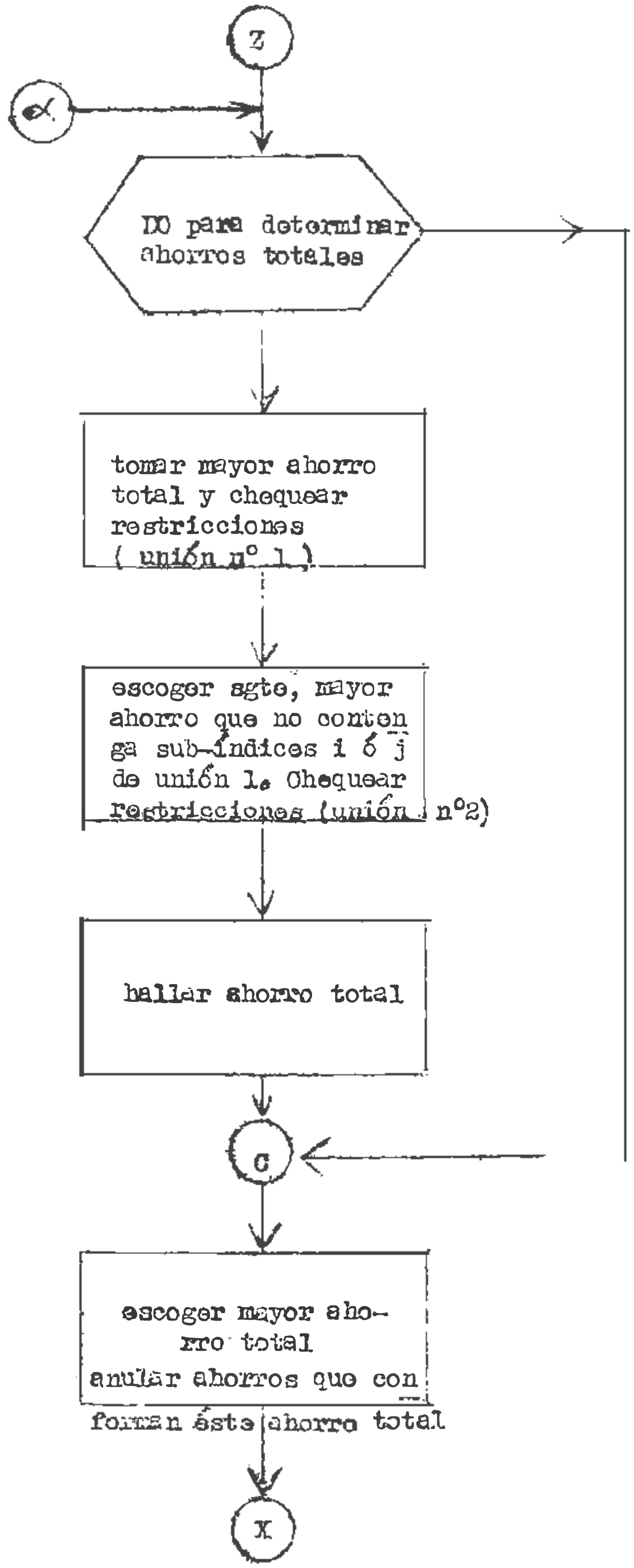
RESUMEN DEL PROGRAMA FORTRAN VERSION D.O.S. DEL ALGORITMO DE TILLMAN

El resúmen del programa fortran diseñado para resolver el algoritmo de Tillman como la forma en que se dan los datos y el significado de los reportes que se publican, se muestra a continuación.

6.1 DIAGRAMA DE FLUJO EN GRANDES BLOQUES.-

En esta parte se presenta en una forma bastante general el diagrama de flujo en grandes bloques




Z
α
DO para determinar ahorros totales
tomar mayor ahorro total y chequear restricciones (unión n° 1)
escoger sgte, mayor ahorro que no conten ga sub-índices i ó j de unión 1. Chequear restricciones (unión n°2)
hallar ahorro total
C
escoger mayor aho- rro total anular ahorros que con forman éste ahorro total
X

6.2 LECTURA DE DATOS.- FORMATOS CORRESPONDIENTES.-

Las tarjetas de datos necesarias son las siguientes :

La primera tarjeta tiene como información :

```
  READ(Y,6) N,NN,NC,DISTAN
6 FORMAT(4I5)
```

donde :

N : número de puntos demanda

NN : número de datos distancias ó tiempos de la matriz respectiva

NC : tipos de camiones de diferente capacidad

DISTAN : restricción de distancias ó tiempos

Ejemplo :

			1	3			7	8				9			1	6	0	

- La segunda tarjeta de datos indica la demanda de los puntos.

```
  READ(Y,2) (IX(I),I =1,NN)
2 FORMAT(40I8)
```

Ejemplo :

3	0	0			6	0	0		1	3	0		8	4	0	

- La tercera tarjeta muestra las distancias ó tiempos en forma de vector.

Ejemplo : Si una matriz de distancias fuera así :

10			
13	15		
17	18	19	
19	22	25	27

se daría como información :

1	0	1	3	1	5	1	7	1	8	1	9	1	9	2	2	2	5	2	7	

- La cuarta tarjeta indica las diferentes capacidades de los camiones.

```
  READ(Y,4)(CAP(I),I=1,NC)
4 FORMAT(10I5)
```

Ejemplo : Si tenemos 4 tipos de camiones de 2000,3000,4000 y 5000 kg. se expresará :

| 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |

- La quinta tarjeta de datos contiene el número de camiones que de cada capacidad hay.

```
  READ(Y,5)(DIAPE(I),I=1,NC)
5 FORMAT(10I2)
```

Ejemplo : Si tubiéramos dos camiones de 2000, 3 de 3000, 4 de 4000 y 5 de 5000; escribiremos :

| 2 | 3 | 4 | 5 |

6.3 PUBLICACION DE REPORTES.-

Los reportes que publica el programa son :

a) Matriz de distancias y ahorros.- Cuando el problema tiene menos de 13 puntos (considerando al orígen) aparece una sola matriz donde en el lado derecho figuran los ahorros y en el izquierdo las distancias ó ahorros. Cuando el problema consta de más de 13 localidades, aparecen impresas las matrices separadas según se muestra en el siguiente ejemplo.

Para menos de 13 localidades :

CAPITULO VII

APLICACION PRACTICA DEL ALGORITMO DE TILLMAN A UNA CADENA DE SUPERMERCADOS(EPSA)

7.1 ENUNCIADO DEL PROBLEMA.-

En la actualidad la distribución de productos en EPSA se hace desde un depósito central a cada uno de los 14 supermercados con que cuenta la Empresa. Esta distribución se realiza según sean los requerimientos de éstos. Existen 4 camiones propios de la Empresa y se alquilan 13 camiones (los propios son de 8 ton. y los segundos de 13 ton.) para hacer el reparto. Las rutas que deben seguir los camiones para satisfacer las demandas de los super las ha determinado el Administrador del depósito central basado en su amplia experiencia en este tipo de trabajos. Hay definidas 6 rutas que son las que regulamente se emplean y cuando uno ó más supermercados de una ruta no tienen pedidos se trata de seguir la ruta adecuada sin considerar aquellos super y algunas veces cuando los pedidos de cierto super son grandes, se improvisa la ruta de acuerdo también a la experiencia del Administrador quien además de designar el orden de visitas, sugiere las rutas mismas para lo cual ha sostenido conversaciones con los choferes.

Como la tendencia de EPSA consiste en contar con tiendas afiliadas distribuidas inicialmente en todo Lima (luego abarcará todo el País) y que en un plazo cercano pueden llegar a ser 100 ó más; resulta materialmente imposible que una persona por mucha experiencia que tenga pueda encargarse de diseñar las rutas adecuadas para satisfacer las demandas de los supermercados. Es pensando en esto que se les propuso el algoritmo de Tillman para determinar las rutes, los camiones adecuados y las cantidades y variedades de productos a distribuir, espereando llegar a contribuir a diseñar un sistema de Distribución a los supermercados para tener alimentos disponibles al público en todas las tiendas mencionadas.

7.2 DATOS NECESARIOS.-

El problema naturalmente trata de encontrar las rutas que permitan satisfacer las demandas de los supermercados desde un depósito central minimizando tiempos principalmente.

La matriz de datos requerida para la solución del problema es la de tiempos para lo cual se ha tomado un promedio de los tiempos que emplean los camiones de ir del depósito a cualquier super ó entre supermercados. Estos datos se han conseguido de unos formularios que llenan los choferes en los que anotan los tiempos de recorridos y de descarga en cada super de la ruta. Esta matriz de tiempos se muestra a continuación junto son las demandas de los supermercados que se han conseguido de las guías de pedidos que se facilitaron. Hay que tomar en cuenta que los pedidos son completamente diferentes de un super a otro y de un día al siguiente por lo que las demandas presentadas corresponden a un día cualquiera de trabajo.

Como restricciones del problema tenemos las capacidades de los camiones (cuadro que también aparece luego) y además, el tiempo total recorrido en una ruta cualquiera no debe exceder 8 horas pues de lo contrario habría que pagar sobretiempo tanto a los camioneros como al personal de EPSA que se encarga de recepcionar la mercadería.

7.3 COMPARACION DE RESULTADOS.-

Las rutas que actualmente se emplean para hacer el reparto a los supermercados en verdad son derivaciones de una sola ruta que mediante pequeños cambios se transforma en las otras.

Esta ruta que podemos llamar ruta base es como se muestra a continuación :

14 -2 -10 -3 -6 -11 -7 -13 -9 -12 -4 -8 -1 -5 .... (A)

Como se aprecia, esta ruta tiene mas orientación a una del agente viajero pues se han considerado todos los supermercados y se ha supuesto que se cuenta con un camión de capacidad tal que permite satisfacer todas las demandas.

Las otras rutas que existen son las siguientes :

2 -10 -3 -6 -11 -7 -13 -9 -12 -4 -8 -1 -5 -14 .... (B)
10- 3 -6 -11 -7 -13 -9 -12 -4 -8 -1 -5 14 -2 .... (C)
1 -8 -4 -12 -9 -13 -7 -11 -6 -3 -10 -2 -14 -5 .... (D)
6 -4 -12 -9 -13 -7 -11 -6 -3 -10 -2 -14 -5 -1 .... (E)
4 -12 -9 -13 -7 -11 -6 -3 -10 -2 -14 -5 -1 -8 .... (F)

Comparando estas rutas con la ruta base (A) se nota que las rutas B y C han sufrido las variantes de colocar el primer super al final y a partir de la ruta D se ha hecho lo contrario ó sea, el último super de la ruta A se ha colocado al comienzo.

Los resultados obtenidos al aplicar el programa fortran diseñado para resolver el algoritmo de Tillman son los siguientes :

R U T A S	TIEMPO	CARGA
$P_1 - P_9 - P_5 - P_{13} - P_{10} - P_1$	76	8,700
$P_1 - P_7 - P_{11} - P_2 - P_1$	57	8,320
$P_1 - P_3 - P_{14} - P_8 - P_1$	55	8,185
$P_1 - P_{15} - P_6 - P_1$	53	5,320
$P_1 - P_{12} - P_4 - P_1$	63	5,390
TIEMPO TOTAL	304	

Como a los super se les ha aumentado una unidad para tener como depósito el punto P_1 en las salidas del programa, las rutas que se emplearon para el día que se tomaron los datos fueron las siguientes :

R U T A S	TIEMPO	CARGA
$P_1 - P_9 - P_5 - P_{13} - P_{10} - P_1$	76	8,700
$P_1 - P_{14} - P_8 - P_{12} - P_1$	63	7,040
$P_1 - P_7 - P_4 - P_{11} - P_1$	79	7,490
$P_1 - P_3 - P_{15} - P_5 - P_1$	69	9,415
$P_1 - P_2 - P_1$	40	3,340
TIEMPO TOTAL :	327	

Analizando las rutas que se han encontrado con las que se usaron aquél día, con el algoritmo de Tillman se logra una reducción de tiempo de 23 minutos. La asignación de camiones con Tillman requiere 5 de 10 ton. (pueden ser 3 de 10 ton. y 2 de 8 ton. haciendo un pequeño cambio en el programa), mientras que en la asignación de la Empresa se usaron 2 camiones de 10 ton. y 3 de 8 ton. . Esto que aparentemente otorga cierta ventaja al método actual(pues en la comparación de costos obviamente el usar camiones de 10 ton. implica un mayor gasto ya que éstos camiones son alquilados) no es real debido principalmente a que no existe un plan racional de reparto y en algunas ocasiones se usan sólo camiones de 10 ton..
Para explicar esto quiero manifestar que los pedidos se hacen co - actualmente en cualquier momento desde cualquier supermercado y algunos de éstos pueden hacer 2 ó 3 pedidos diarios lo que origina que conforme hayan pedidos se vayan asignando rutas. Hay situaciones en que los pedidos son urgentes y en ese caso se asigna un camión para satisfacer solamente la demanda de los super solicitantes.

B I B L I G R A F Í A

« An algoritmo for the vehicle-dispetching problem

N. Christofidas and S. Eilon

« The delivery problem

Robert W. Haring

* The truck dispatching problem

C.B. Dentzig and Ramser

A heuristic approach for solving the delivery problem

Tilman and Cochrane

B Distribution MANAGEMENT

Ne Christofidas and Eilon