

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA



**DISEÑO Y CONTROL EN TIEMPO REAL DEL
SISTEMA SUBACTUADO PENDUBOT**

TESIS

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO MECATRÓNICO**

EWAR ALEXANDER MAMANI CHURAYRA

PROMOCIÓN 2009-I

LIMA-PERU

2012

Dedicatoria

A mi familia, a quienes les debo ser quien soy, por su incondicional apoyo siempre, porque todo lo que he conseguido ha sido gracias a ellos.

TABLA DE CONTENIDOS

PRÓLOGO	1
 CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN.....	3
1.1 ANTECEDENTES	3
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
1.3 OBJETIVO.....	5
1.4 JUSTIFICACIÓN	5
1.5 ALCANCES Y LIMITACIONES	6
 CAPÍTULO II	
MODELO MATEMÁTICO Y ANÁLISIS DEL PENDUBOT	7
2.1 MODELO DINÁMICO	8
2.2 OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS.....	14
2.3 ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO	19
2.3.1 Representación en Variables de Estado.....	19
2.3.2 Puntos de Equilibrio	21
2.3.3 Aproximación Lineal del Modelo Matemático.....	23
2.3.3.1 Estabilidad.....	25
2.3.3.2 Controlabilidad	26
2.3.3.3 Observabilidad	27
 CAPÍTULO III	
CONTROL NO LINEAL POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS.....	29
3.1 CONTROL DE BALANCEO	30
3.1.1 Linealización Parcial por Realimentación.....	30
3.2 CONTROL DE ESTABILIZACIÓN.....	33

CAPÍTULO IV

HARDWARE Y SOFTWARE	36
4.1 HARDWARE.....	41
4.1.1 Sensores	41
4.1.2 Actuador	42
4.1.3 Tarjeta de Adquisición de Datos PCIe 6363	44
4.1.4 Tarjeta Electrónica de Potencia EPOS2 50/5	45
4.2 SOFTWARE	46
4.2.1 EPOS Studio	46
4.2.2 Programación Gráfica	46
4.2.3 Diagrama de Flujo.....	48

CAPÍTULO V

RESULTADOS EXPERIMENTALES E IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL.....	49
5.1 ESTRUCTURA DE CONTROL	50
5.2 SIMULACIONES DEL SISTEMA DE CONTROL	52
5.3 IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL.....	56

CONCLUSIONES	60
---------------------------	-----------

BIBLIOGRAFÍA	62
---------------------------	-----------

APÉNDICE A

SIMULACIÓN DEL SISTEMA PENDUBOT EN MATLAB	65
--	-----------

APÉNDICE B

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA TARJETA DE ADQUISICIÓN DE DATOS PCIe 6363	70
B.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES DIGITALES I/O/PFI.....	71
B.2 CONTADORES/TEMPORIZADORES DE PROPÓSITO GENERAL.....	71

APÉNDICE C

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA TARJETA DE CONTROL EPOS2 50/5.....	73
C.1 INFORMACIÓN ELÉCTRICA.....	73
C.2 INFORMACIÓN MECÁNICA.....	74
C.3 CONDICIONES AMBIENTALES DE OPERACIÓN	74
C.4 CONEXIONES.....	75

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Pendubot en el Laboratorio Instructivo de Control de Sistemas de la Universidad de Illinois, Estados Unidos.....	3
Figura 2.1 Diagrama esquemático del Pendubot.....	7
Figura 2.2 Software CAD 3D y estimación de propiedades físicas.....	14
Figura 2.3 Respuesta del sistema Pendubot ante una señal de entrada cuadrada.....	17
Figura 2.4 Pendubot en la posición Superior (izquierda) e Inferior (derecha).....	22
Figura 3.1 Diagrama de bloques del control basado en la Linealización Parcial por Realimentación.....	32
Figura 3.2 Esquema del Control de Estabilización.....	33
Figura 4.1 Ensamble mecánico del Pendubot en Catia V5.....	36
Figura 4.2 Vista explosionada del ensamble mecánico del Pendubot en SolidWorks.....	37
Figura 4.3 Fresa CNC de la marca HAAS, modelo TM1.....	37
Figura 4.4 Verificación de operaciones de fabricación.....	38
Figura 4.5 Verificación de trayectorias de movimiento y tiempos de fabricación.....	38
Figura 4.6 Generación del programa de control numérico para la fresa CNC.....	39
Figura 4.7 Pruebas iniciales de ensamble del prototipo Pendubot.....	39
Figura 4.8 Elementos del sistema mecatrónico Pendubot.....	40
Figura 4.9 Encoder del eslabón 01(izquierda) y eslabón 02 (derecha).....	41
Figura 4.10 Motor-reductor Maxon, actuador del eslabón 01.....	42
Figura 4.11 Tarjeta de adquisición de datos PCIe 6363.....	44
Figura 4.12 Cable blindado SHC68 (izquierda) y bornera SCB-68 (derecha).....	44
Figura 4.13 Tarjeta electrónica EPOS2 50/5.....	45
Figura 4.14 Interfaz de EPOS Studio.....	46
Figura 4.15 Programa de control para la Posición Inferior de operación, desarrollado en LabVIEW.....	47
Figura 4.16 Algoritmo de control del sistema Pendubot para las posiciones de operación.....	48
Figura 5.1 Esquema de Control Multinivel por Realimentación Basado en Conocimientos.....	49
Figura 5.2 Estructura de control del sistema Pendubot.....	50
Figura 5.3 Condición de conmutación bloque "Switch".....	50

Figura 5.4 Simulación punto de operación: Posición Superior.....	54
Figura 5.5 Simulación punto de operación: Posición Inferior.....	55
Figura 5.6 Control híbrido de la Posición Superior, comparado con la simulación. .	57
Figura 5.7 Control híbrido de la Posición Inferior, comparado con la simulación respectiva.....	58
Figura B.1 Pines DAQ PCIe 6363.....	70
Figura C.1 Dimensiones de la tarjeta EPOS2 50/5.....	74
Figura C.2 Diagrama de conexiones de la tarjeta EPOS2 50/5.....	75
Figura C.3 Cables para la conexión de la tarjeta EPOS2 50/5.....	76

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1 Parámetros físicos del Pendubot.....	15
Tabla 2.2 Parámetros reagrupados y asociados al modelo CAD 3D.....	16
Tabla 2.3 Parámetros reagrupados del Pendubot.....	18
Tabla 4.1 Características de los Encoders.....	42
Tabla 4.2 Características del Motor-Reductor Maxon.....	43
Tabla A.1 Información eléctrica de la tarjeta EPOS2 50/5.....	73
Tabla B.2 Información mecánica de la tarjeta EPOS2 50/5.....	74
Tabla B.3 Información de condiciones ambientales de operación para la tarjeta EPOS2 50/5.....	74
Tabla B.4 Cables requeridos para la conexión de la tarjeta EPOS2 50/5.....	76

PRÓLOGO

Los sistemas mecánicos subactuados son aquellos que poseen menos entradas de control que grados de libertad, a su vez también están dentro de la clasificación de sistemas no lineales, los cuales no poseen métodos generales disponibles que resuelvan todas las clases de sistemas no lineales. Es así que existen diversos sistemas subactuados, que permiten desarrollar y poner a prueba diversas técnicas de control, con la finalidad de controlar y estabilizar un sistema no lineal en un punto de operación. Uno de estos sistemas subactuados es el denominado "Pendubot", el cual para el desarrollo de la presente tesis fue diseñado y construido, basado únicamente en el concepto de la bibliografía existente. En la presente tesis se presenta un control de balanceo que incluye el método de linealización parcial por realimentación y el control de estabilización LQR (Linear-Quadratic Regulator), con la finalidad de obtener una estrategia de control al problema del sistema subactuado Pendubot. La presente tesis se ha organizado en 5 capítulos cuyo contenido es el siguiente:

El capítulo I presenta una introducción a esta tesis con los antecedentes, el planteamiento del problema, el objetivo, la justificación, los alcances y las limitaciones.

El capítulo II expone el modelamiento matemático del sistema no lineal Pendubot y el análisis de los puntos de equilibrio susceptibles de controlar para el modelo lineal.

El capítulo III trata del control no lineal necesario para desarrollar la estrategia de control, describiendo al balanceo y la estabilización como parte de la estrategia a implementar.

El capítulo IV presenta los equipos y dispositivos empleados, así como también los programas que permitieron el desarrollo de la estrategia de control. Se presentan aspectos generales de las partes que comprenden el diseño mecánico para la construcción del mecanismo subactuado Pendubot.

El capítulo V describe el procedimiento y los algoritmos de empleados en la implementación de los controladores de balanceo y estabilización, asimismo presenta los resultados experimentales y algunas sugerencias para trabajos futuros.

Finalmente se presentan las conclusiones.

El apéndice A presenta el código empleado en Matlab para realizar las simulaciones del sistema de control del Pendubot. El apéndice B muestra algunas de las características de la tarjeta PCIe 6363, empleada en la lectura de posiciones y velocidades angulares. En el Apéndice C se presentan algunas características de la tarjeta de control EPOS2 50/5, empleada para el control del motor.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

El Pendubot es un sistema mecatrónico desarrollado para ser usado académicamente en investigaciones de teorías de control no lineal, el Pendubot además está inmerso en la categoría de sistemas mecánicos subactuados, los cuales se caracterizan por tener menos entradas de control que grados de libertad, como lo explican Mark W. Spong y Daniel J. Block en [7], [10] y [11]. El Pendubot, nombre formado a partir de las palabras “Pendulum” y “Robot” es un robot de 2 grados de libertad, conformado por 2 eslabones rígidos interconectados mediante juntas de revolución, cuyos movimientos están referenciados en un solo plano, un ejemplo de Pendubot es el que posee la Universidad de Illinois y que se muestra en la Figura 1.1.



Figura 1.1 Pendubot en el Laboratorio Instructivo de Control de Sistemas de la Universidad de Illinois, Estados Unidos.

El Pendubot como sistema ha sido objeto de estudio, desarrollándose diversas técnicas de control, la mayoría de las cuales utilizadas en sistemas de control híbridos, estableciendo etapas como control de balanceo y control de estabilización, cada etapa representa un problema de control particular y con una solución específica, como lo presentan M. Zhang y T.J. Tang en [12]. El desarrollo de técnicas de control para resolver el problema planteado por el Pendubot, como cualquier sistema mecánico, depende de 3 problemas básicos:

- Planeamiento de trayectoria (*trajectory planning*).
- Seguimiento de trayectoria (*trajectory tracking*).
- Regulación de punto de operación (set-point regulation).

Para el caso del Pendubot se han empleado técnicas relacionadas con la linealización por retroalimentación de estados, control basado en pasividad, control basado en la energía, como lo presenta Alessandro De Luca en [8] y [9], control basado en lógica difusa, desarrollado por Xiao Q. en [5], control basado en redes neuronales por Murad M. en [4], y mas recientemente las investigaciones están abocadas al manejo de trayectorias para el control del Pendubot, presentado por Bailey R. en [3] y [6].

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El Pendubot es un sistema subactuado de dos grados de libertad, cuya característica principal es la carencia de un actuador en uno de sus grados de libertad, lo cual representa un problema por lo menos interesante para la teoría de control, debido a que es imposible tener un control directo sobre el grado de libertad

no actuado, implicando de esta forma que el control debe ser realizado de forma indirecta, empleando únicamente el grado de libertad que posee un actuador.

Con la consideración vista anteriormente podemos formular:

¿Es posible realizar el control de posición angular del sistema Pendubot y superar la dificultad que significa controlar un sistema subactuado?.

Vista la interrogante del planteamiento del problema, nuestro compromiso es esta tesis, es resolver los problemas de balanceo y estabilización en dos configuraciones inestables del Pendubot, teniendo en cuenta la regulación y el seguimiento de trayectorias de tal forma que se pueda lograr el control con alta performance, es decir mínimo sobre impulso y error en estado estacionario nulo.

1.3 OBJETIVO

La tesis presenta el siguiente objetivo:

- Realizar el diseño e implementación de un control no lineal en tiempo real para el sistema subactuado Pendubot en dos configuraciones inestables, cuya estrategia sea inicialmente efectuar un control de balanceo hasta alcanzar las configuraciones de equilibrio, y cambiar a un control de estabilización.

1.4 JUSTIFICACIÓN

La complejidad que caracteriza al sistema no lineal (Pendubot), ha permitido el desarrollo de diferentes técnicas de control, las cuáles en su mayoría son desarrolladas inicialmente en forma teórica; el diseño e implementación del sistema

Pendubot permite la comprobación y validación de dichas técnicas de control en tiempo real, lo cual es importante para el desarrollo y aprendizaje de estudiantes e ingenieros mecatrónicos; por lo tanto el sistema Pendubot está inmerso también en el área de investigación y docencia, con la finalidad de desarrollar nuevos métodos de control e identificación, que de forma continua se incorporen en la formación académica de futuros ingenieros mecatrónicos.

1.5 ALCANCES Y LIMITACIONES

- Los programas de control desarrollados en la presente tesis, únicamente abarcan 2 puntos inestables de control, denominados posición superior e inferior, ambas posiciones tienen en común que el punto mas alejado de la junta del segundo grado de libertad y que pertenece al mismo, esté siempre arriba de cualquier otro punto asociado al primer o segundo grado de libertad.
- La estructura de control desarrollada permite que a futuro se puedan desarrollar otras técnicas de control, ya que en la implementación se procuró establecer la lectura de todas las variables de estado posibles a necesitar por cualquier tipo de controlador.

CAPÍTULO II

MODELO MATEMÁTICO Y ANÁLISIS DEL PENDUBOT

La obtención del modelo matemático de un sistema permite predecir su comportamiento, debido a que la validez de la predicción y el comportamiento de las estructuras de control diseñadas, dependen en gran medida, del modelo dinámico empleado. El Pendubot es un sistema subactuado, consta de 2 eslabones rígidos unidos por juntas de revolución mostrados en la figura 2.1 (únicamente el primer grado de libertad posee un actuador).

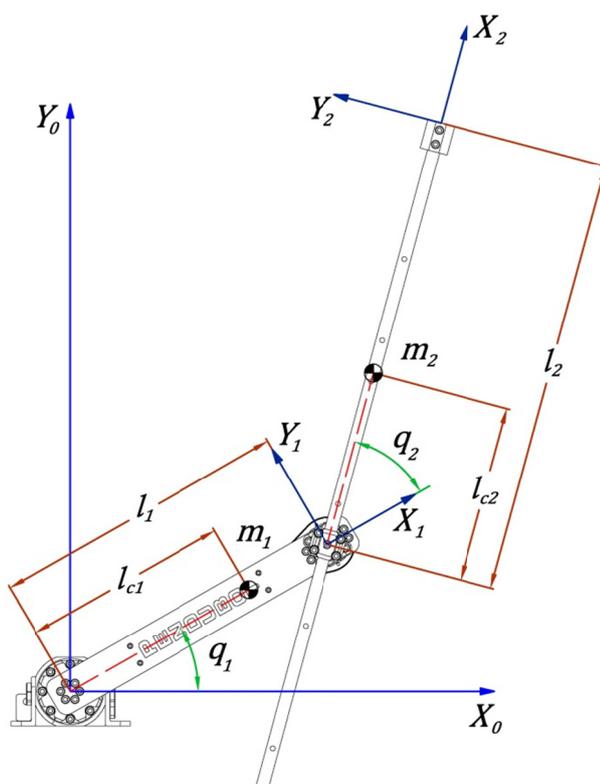


Figura 2.1 Diagrama esquemático del Pendubot.

2.1 MODELO DINÁMICO

La naturaleza del sistema subactuado permite encontrar ecuaciones diferenciales que determinan su comportamiento dinámico. Estas ecuaciones se obtienen haciendo uso del método de Euler-Lagrange. Para un sistema conservativo, dicha ecuación se define como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

Donde $q = [q_1 \dots q_n]^T$ es el conjunto de coordenadas generalizadas para el sistema, τ es un vector de fuerzas generalizadas y \mathcal{L} es el lagrangiano del sistema. El lagrangiano de un sistema está definido como la diferencia entre la energía cinética \mathcal{K} y la energía potencial \mathcal{P} , de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{P}(q) \quad (2.2)$$

Para un sistema no conservativo, el uso de la función de disipación de Rayleigh asociada a las fuerzas de fricción $\mathcal{F}(\dot{q})$, transforma las ecuaciones de Euler-Lagrange en:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

De esta forma se pueden describir las ecuaciones de movimiento de un sistema no conservativo, siendo la representación matricial de la forma:

$$\mathcal{D}(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathcal{G}(q) + \varphi(\dot{q}) = \tau \quad (2.4)$$

Donde $\mathcal{D}(q)$ es la matriz de inercias, $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ es la matriz de las fuerzas de Coriolis, $\mathcal{G}(q)$ es la matriz de fuerzas de gravedad, $\varphi(\dot{q})$ es la matriz de fuerzas de fricción viscosa producidas en los ejes de rotación con los rodamientos en cada grado de libertad.

A partir del diagrama esquemático del Pendubot mostrado en la figura 2.1, se define para $i = 1, 2$, q_i como el ángulo de cada grado de libertad que a su vez sirve como coordenada generalizada; m_i representa la masa de cada eslabón; l_i representa la longitud de cada eslabón; l_{ci} representa la longitud desde la unión con el eslabón previo hasta el centro de masa del eslabón i ; finalmente I_i representa el momento de inercia del eslabón i respecto de su centro de masa. A continuación se definirán las relaciones cinemáticas del Pendubot, necesarias para proceder con el modelamiento dinámico.

Posición del centro de masa del eslabón 1:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= l_{c1} \cos(q_1) \\ y_{c1} &= l_{c1} \sin(q_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Velocidad del centro de masa del eslabón 1:

$$v_{c1} = J_{v_{c1}}(q)\dot{q} \quad (2.6)$$

Siendo el Jacobiano relativo al centro de masa del eslabón 01:

$$J_{v_{c1}}(q) = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin(q_1) & 0 \\ l_{c1} \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Posición del centro de masa del eslabón 2:

$$\begin{aligned} x_{c2} &= l_{c1} \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ y_{c2} &= l_{c1} \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Velocidad del centro de masa del eslabón 2:

$$v_{c2} = J_{v_{c2}}(q)\dot{q} \quad (2.9)$$

Siendo el Jacobiano relativo al centro de masa del eslabón 02:

$$J_{v_{c2}}(q) = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin(q_1) - l_{c2} \sin(q_1 + q_2) & -l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ l_{c1} \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) & l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Definiendo las velocidades angulares de los eslabones 01 y 02, perpendiculares al plano XY :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{q}_1 k \\ \omega_2 &= (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) k\end{aligned}\quad (2.11)$$

Los Jacobianos respectivos a las velocidades angulares:

$$\begin{aligned}J_{\omega_1}(q) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ J_{\omega_2}(q) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.12)$$

Definiremos la energía cinética total del sistema Pendubot, a partir de los centros de masa de cada eslabón. La energía cinética de un cuerpo rígido en rotación se calcula como la suma de la energía cinética de traslación y la energía cinética de rotación, así la expresión matemática para la energía cinética del sistema Pendubot es de la forma:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} I \omega^T \omega \quad (2.13)$$

Reformulando la expresión (2.13), en términos de Jacobianos y coordenadas generalizadas para cada eslabón, se tiene:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^2 [m_i J_{v_{ci}}(q)^T J_{v_{ci}}(q) + I_i J_{\omega_i}(q)^T J_{\omega_i}(q)] \right) \dot{q} \quad (2.14)$$

Se deduce de las ecuaciones de Euler-Lagrange además:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{D}(q) \dot{q} \quad (2.15)$$

Comparando las ecuaciones (2.14) y (2.15) se establece:

$$\mathcal{D}(q) = \sum_{i=1}^2 [m_i J_{v_{ci}}(q)^T J_{v_{ci}}(q) + I_i J_{\omega_i}(q)^T J_{\omega_i}(q)] \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(q) = & m_1 J_{v_{c1}}(q)^T J_{v_{c1}}(q) + I_1 J_{\omega_1}(q)^T J_{\omega_1}(q) + m_2 J_{v_{c2}}(q)^T J_{v_{c2}}(q) + \dots \\ & \dots + I_2 J_{\omega_2}(q)^T J_{\omega_2}(q) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Remplazando (2.7), (2.10) y (2.12) en (2.17) y operando se obtiene:

$$\mathcal{D}(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Donde:

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2 \\ d_{12} &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 \\ d_{21} &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 \\ d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

La matriz de las fuerzas de Coriolis $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ está definida por:

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Donde cada término de dicha matriz se obtiene a partir de la expresión:

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^2 h_{ijk}(q) \dot{q}_i \quad (2.21)$$

Siendo h_{ijk} los Símbolos de Christoffel:

$$h_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (2.22)$$

Así, para el Pendubot se tienen las expresiones:

$$\begin{aligned} h_{111} &= 0 \\ h_{112} &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \\ h_{121} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \\ h_{122} &= 0 \\ h_{211} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \\ h_{212} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} h_{221} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \\ h_{222} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Remplazando (2.23) en (2.21), se obtiene la matriz de fuerzas de Coriolis $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ definida como:

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} (-m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)) \dot{q}_2 & (-m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ (m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La matriz de fuerzas de gravedad $\mathcal{G}(q)$, está definida como:

$$\mathcal{G}(q) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Cada uno de sus términos están definidos por:

$$\phi_n = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_n} \quad (2.26)$$

Donde \mathcal{P} , es la energía potencial del Pendubot, definida a partir de cada eslabón, como la masa multiplicada por la aceleración de la gravedad y la altura de su centro de masa, siendo entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= m_1 g l_{c1} \sin(q_1) \\ \mathcal{P}_2 &= m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \\ \mathcal{P} &= \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Desarrollando adecuadamente la ecuación (2.26), se define la matriz de fuerzas de gravedad $\mathcal{G}(q)$ como:

$$\mathcal{G}(q) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

La matriz de fuerzas de fricción viscosa, producidas en los ejes de rotación $\varphi(\dot{q})$, proviene de la función de disipación de Rayleigh $\mathcal{F}(\dot{q})$, la cual, para el Pendubot está definida como:

$$\mathcal{F}(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \beta_i \dot{q}_i^2 \quad (2.29)$$

Donde β_i es el coeficiente de fricción viscosa, para el eslabón i . Se define entonces la matriz de fuerzas de fricción viscosa, como:

$$\varphi(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \dot{q}_1 \\ \beta_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Las representaciones matriciales del conjunto de ecuaciones de movimiento, pueden ser simplificadas, reagrupando los parámetros convenientemente, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \theta_5 &= m_1 l_{c2} \\ \theta_6 &= \beta_1 \\ \theta_7 &= \beta_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Sustituyendo los parámetros reagrupados en (2.31), en las matrices (2.18), (2.24), (2.28) y (2.30), se forman las siguientes expresiones:

$$\mathcal{D}(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} (-\theta_3 \sin(q_2))\dot{q}_2 & (-\theta_3 \sin(q_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ (\theta_3 \sin(q_2))\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{G}(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\varphi(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \theta_6 \dot{q}_1 \\ \theta_7 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Remplazando las ecuaciones (2.32), (2.33), (2.34) y (2.35) en (2.4), obtenemos el modelo del sistema Pendubot:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} (-\theta_3 \sin(q_2))\dot{q}_2 & (-\theta_3 \sin(q_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ (\theta_3 \sin(q_2))\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_6 \dot{q}_1 \\ \theta_7 \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.2 OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS

Los parámetros físicos del Pendubot, debido a que se realizó el diseño mecánico, inicialmente se obtuvieron a través de herramientas de software CAD 3D como se muestra en la figura 2.2

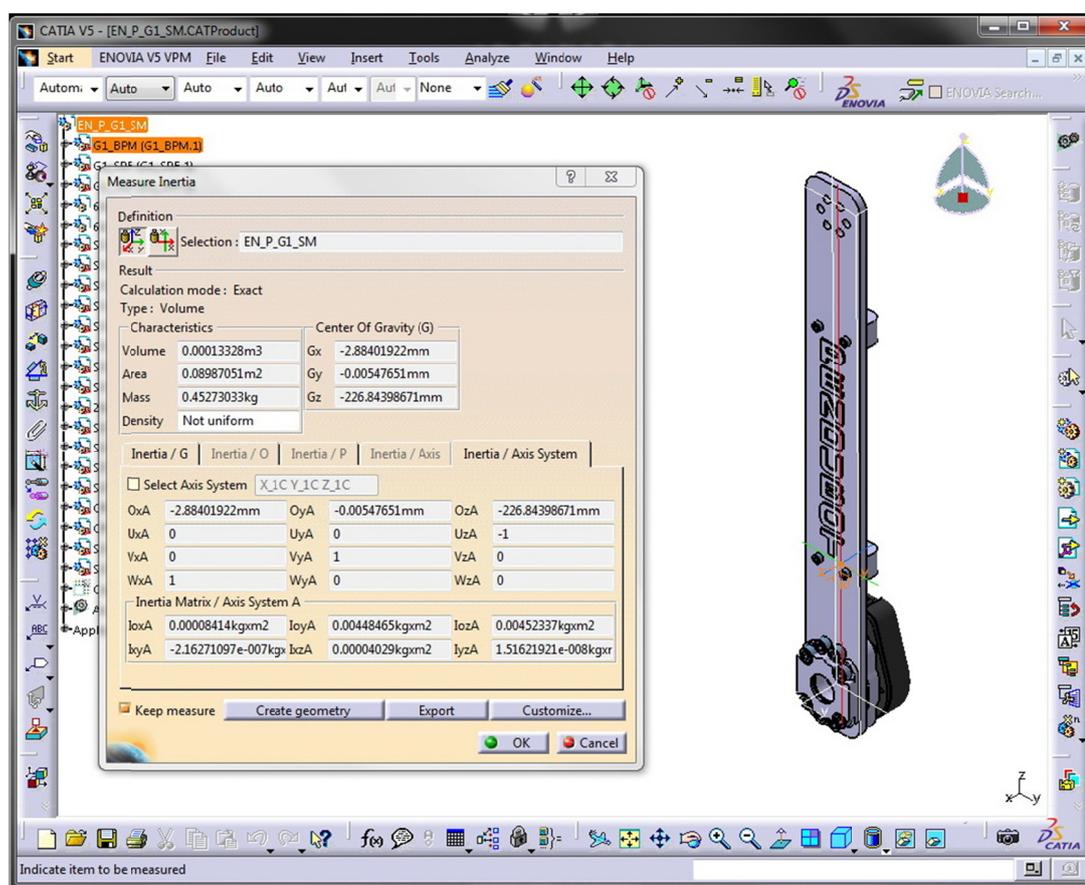


Figura 2.2 Software CAD 3D y estimación de propiedades físicas.

Las herramientas de software CAD 3D permiten la obtención de propiedades físicas tales como masa, longitudes, centros de masa y momentos de inercia, a partir de la definición de los materiales de cada componente físico. En el caso del Pendubot, cada eslabón posee diferentes componentes de diversos materiales, tales como: aluminio, acero y diversos tipos de plástico. La utilidad de una herramienta de software CAD 3D que permita determinar las propiedades físicas de un ensamble mecánico, adquiere importancia, debido a la aproximación a las propiedades físicas reales desde la etapa de diseño mecánico, y que dichas propiedades puedan ser además verificadas realizando las mediciones correspondientes.

En la tabla 2.1, se presentan las magnitudes físicas de los parámetros del Pendubot.

Tabla 2.1 Parámetros físicos del Pendubot.

Parámetros Físicos	Valor
$m_1[Kg]$	0.4527
$m_2[Kg]$	0.4809
$l_1[m]$	0.3
$l_2[m]$	0.445
$l_{c1}[m]$	0.2268
$l_{c2}[m]$	0.0937
$I_1[Kgm^2]$	0.0045
$I_2[Kgm^2]$	0.0173

A partir de los parámetros físicos se pueden definir los parámetros reagrupados, de los cuales únicamente 5 son posibles de obtener al remplazar los

valores de la tabla 2.1 en la expresión (2.31). La tabla 2.2 presenta los parámetros asociados al modelo CAD 3D.

Tabla 2.2 Parámetros reagrupados y asociados al modelo CAD 3D.

Parámetros Físicos	Valor
$\theta_1 [Nms^2]$	0.0711
$\theta_2 [Nms^2]$	0.0215
$\theta_3 [Nms^2]$	0.0135
$\theta_4 [Ns^2]$	0.2469
$\theta_5 [Ns^2]$	0.0450
$\theta_6 \left[\frac{Nms}{rad} \right]$	-
$\theta_7 \left[\frac{Nms}{rad} \right]$	-

Debido a la imposibilidad de la obtención de los parámetros θ_6 y θ_7 , de forma teórica y que estos fueran confiables, se desarrolló un algoritmo de identificación de parámetros reagrupados del Pendubot, con la finalidad además de comparar los parámetros obtenidos mediante el modelo CAD 3D. El algoritmo de identificación está basado en el teorema de energía, que puede ser descrito de la forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\tau - \varphi(\dot{q})) \dot{q}^T dt = (\mathcal{K}(t_2) + \mathcal{P}(t_2)) - (\mathcal{K}(t_1) + \mathcal{P}(t_1)) = \mathcal{L}(t_2) - \mathcal{L}(t_1) \quad (2.37)$$

La implementación de este algoritmo de identificación se hizo mediante mínimos cuadrados (soluciones no negativas), teniendo en cuenta que los parámetros de la expresión (2.31), que se buscan identificar, son las variables y forman un sistema lineal de ecuaciones.

Se realizaron pruebas a diversas entradas de control en lazo abierto, para determinar qué señal de entrada, determina la mejor identificación de los parámetros reagrupados del Pendubot, se obtuvo que la respuesta a una señal cuadrada, presenta la mejor aproximación al comportamiento del Pendubot como se muestra en la figura 2.3.

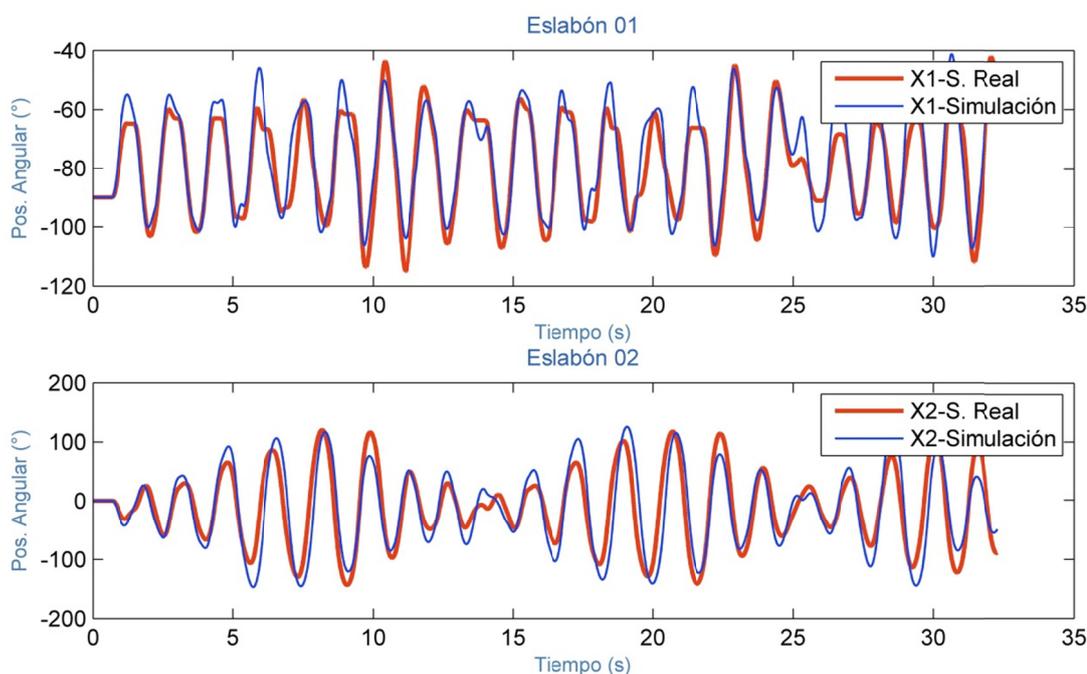


Figura 2.3 Respuesta del sistema Pendubot ante una señal de entrada cuadrada.

El algoritmo fue desarrollado a través de la herramienta computacional Matlab, siendo los parámetros reagrupados obtenidos y comparados con los provenientes del modelo CAD 3D, presentados en la tabla 2.3.

Tabla 2.3 Parámetros reagrupados del Pendubot.

Parámetros Físicos	Modelo CAD 3D	Algoritmo de Identificación
$\theta_1 [Nms^2]$	0.0711	0.0827
$\theta_2 [Nms^2]$	0.0215	0.0283
$\theta_3 [Nms^2]$	0.0135	0.0180
$\theta_4 [Ns^2]$	0.2469	0.2663
$\theta_5 [Ns^2]$	0.0450	0.0582
$\theta_6 \left[\frac{Nms}{rad} \right]$	-	0.1680
$\theta_7 \left[\frac{Nms}{rad} \right]$	-	0.0032

El modelo CAD 3D puede ser confiable, siempre y cuando los componentes mecánicos hayan sido fabricados con un alto grado de precisión, y que no existan defectos en los materiales empleados, de otro lado el algoritmo de identificación de parámetros está sujeto a errores numéricos, de esa forma puede explicarse la existencia de diferencias entre los parámetros obtenidos.

Expuesto lo anterior, se seleccionaron los parámetros provenientes del algoritmo de identificación, para ser empleados en la implementación de técnicas de control, debido a que muestran un buen ajuste respecto al sistema real, validando de esta forma el modelo del sistema Pendubot.

2.3 ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO

2.3.1 Representación en Variables de Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables, junto con el conocimiento de la entrada del sistema, determinan completamente el comportamiento del sistema. Para el sistema Pendubot se definió el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= q_1 \\
 x_2 &= q_2 \\
 x_3 &= \dot{q}_1 \\
 x_4 &= \dot{q}_2 \\
 u &= \tau_1
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Luego de realizar el cambio de variable propuesto y aplicado en la ecuación (2.36), se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(x_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(x_2) & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \dots \\
 & \dots + \begin{bmatrix} (-\theta_3 \sin(x_2))x_4 & (-\theta_3 \sin(x_2))(x_3 + x_4) \\ (\theta_3 \sin(x_2))x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \dots \\
 & \dots + \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \\ \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_6 x_3 \\ \theta_7 x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

En términos simplificados de las matrices se tiene:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$\mathcal{D}(q) \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \mathcal{G}(q) + \varphi(\dot{q}) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Despejando $[\dot{x}_3 \ \dot{x}_4]^T$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = -\mathcal{D}(q)^{-1} \mathcal{C}(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \mathcal{D}(q)^{-1} \mathcal{G}(q) - \mathcal{D}(q)^{-1} \varphi(\dot{q}) + \mathcal{D}(q)^{-1} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \left(\begin{bmatrix} (c_{21}d_{12} - c_{11}d_{22})x_3 + (c_{22}d_{12} - c_{12}d_{22})x_4 \\ (c_{11}d_{21} - c_{21}d_{11})x_3 + (c_{12}d_{21} - c_{22}d_{11})x_4 \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \left(\begin{bmatrix} -d_{22}\phi_1 + d_{12}\phi_2 - d_{22}\psi_1 + d_{12}\psi_2 \\ d_{21}\phi_1 - d_{11}\phi_2 + d_{21}\psi_1 - d_{11}\psi_2 \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \left(\begin{bmatrix} -d_{22} \\ d_{21} \end{bmatrix} u \right)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Remplazando convenientemente y desarrollando la ecuación (2.43) en ecuaciones diferenciales de primer orden, se obtiene la representación de estado:

$$\dot{x}_1 = f_1(x, u) = x_3 \tag{2.44}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x, u) = x_4 \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 = f_3(x, u) &= \frac{-\theta_2 u + \theta_3^2 x_3^2 \cos(x_2) \sin(x_2) + \theta_2 \theta_3 x_3^2 \sin(x_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2} + \dots \\
&\dots + \frac{2\theta_2 \theta_3 x_3 x_4 \sin(x_2) + \theta_2 \theta_3 x_4^2 \sin(x_2) + \theta_3 \theta_7 x_4 \cos(x_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2} + \dots
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
&\dots + \frac{\theta_3 \theta_5 g x_4 \cos(x_2) \cos(x_1 + x_2) - \theta_2 \theta_6 x_3 + \theta_2 \theta_7 x_4 - \theta_2 \theta_4 g \cos(x_1)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2} \\
\dot{x}_4 = f_4(x, u) &= \frac{-(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2))u + \theta_2 \theta_6 x_3 - \theta_1 \theta_7 x_4 - \theta_2 \theta_7 x_4}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2} + \dots \\
&\dots + \frac{-\theta_1 \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) + \theta_2 \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_3 \theta_6 x_3 \cos(x_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2} + \dots \\
&\dots + \frac{-2\theta_3 \theta_7 x_4 \cos(x_2) - 2\theta_3^2 x_3^2 \cos(x_2) \sin(x_2) - \theta_3 x_4^2 \cos(x_2) \sin(x_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2} + \dots
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
&\dots + \frac{-\theta_1 \theta_3 x_3^2 \sin(x_2) - \theta_2 \theta_3 x_3^2 \sin(x_2) - 2\theta_3^2 x_3 x_4 \cos(x_2) \sin(x_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2} + \dots \\
&\dots + \frac{-\theta_2 \theta_3 x_4^2 \sin(x_2) + \theta_3 \theta_4 g \cos(x_1) \cos(x_2) - 2\theta_2 \theta_3 x_3 x_4 \sin(x_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2} + \dots \\
&\dots + \frac{-\theta_3 \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \cos(x_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos(x_2))^2}
\end{aligned}$$

2.3.2 Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema Pendubot son importantes para los propósitos de análisis y la determinación de sus características más importantes, los cuales se obtienen al establecer: $f_k(x, u) = 0$ para valores de $k = 1, 2, 3, 4$. De las ecuaciones (2.44) y (2.45) se establece que: $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$. Remplazando estos valores en la ecuación (2.39), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(q, \dot{q}) &= 0 \\ \varphi(\dot{q}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Remplazando en la ecuación (2.42), se establece:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{D}(q)^{-1} \left(-\mathcal{G}(q) + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \right) \tag{2.49}$$

$$\mathcal{G}(q) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \\ \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

$$\theta_5 g \cos(x_1 + x_2) = 0$$

Es decir:

$$x_1 + x_2 = n \frac{\pi}{2} \rightarrow \forall n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \tag{2.52}$$

Por lo tanto los puntos de operación en están definidas por la expresión:

$$X_1 + X_2 = n \frac{\pi}{2} \rightarrow \forall n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

$$X_3 = 0 \tag{2.53}$$

$$X_4 = 0$$

$$u_{op} = \theta_4 g \cos(X_1)$$

A partir de la ecuación (2.53), se seleccionaron 2 puntos de operación:

- Posición Superior, cuya región de operación esta definida por:

$$X_1 = \frac{\pi}{2}, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0, \quad u_{op} = 0 \quad (2.54)$$

- Posición Inferior, cuya región de operación está definida por:

$$X_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad X_2 = \pi, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0, \quad u_{op} = 0 \quad (2.55)$$

En la figura 2.4 se observan las 2 posiciones descritas.



Figura 2.4 Pendubot en la posición Superior (izquierda) e Inferior (derecha).

2.3.3 Aproximación Lineal del Modelo Matemático

El modelo del Pendubot es un modelo no lineal de cuarto orden. A fin de obtener un modelo lineal se empleó la técnica de linealización mediante expansiones en serie de Taylor, de la forma:

$$x_\delta = x_{\delta_0} + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, u_{op})} x_\delta + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x, u_{op})} u_\delta \right] d\sigma$$

$$x_\delta = x - X$$

$$u_\delta = u - u_{op}$$
(2.56)

Donde $x_\delta = [x_{1\delta} \quad x_{2\delta} \quad x_{3\delta} \quad x_{4\delta}]^T$, se define además:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, u_{op})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \Big|_{(x, u_{op})}$$
(2.57)

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x, u_{op})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(x, u_{op})}$$
(2.58)

Remplazando la expresión (2.56), de la forma:

$$x_\delta = x_{\delta_0} + \int_{t_0}^t [Ax_\delta + Bu_\delta] d\sigma$$
(2.59)

Derivando la ecuación (2.59), se obtiene el sistema lineal:

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta$$
(2.60)

$$y = Cx_\delta$$
(2.61)

Simplificando las expresiones de las matrices A, B y C , para el sistema Pendubot se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{3u} \\ f_{4u} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Donde $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ para $i = 3,4 \wedge j = 1,2,3,4$ y $f_{iu} = \frac{\partial f_i}{\partial u}$ para $i = 3,4$.

Remplazando valores numéricos, se definen las matrices A y B , para los puntos de operación:

- Posición Superior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 31.5894 & -5.1089 & -2.3592 & 0.0745 \\ -31.5394 & 28.5288 & 3.8616 & -0.2362 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14.0424 \\ -22.9848 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

- Posición Inferior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 31.5894 & 5.1089 & -2.3592 & 0.0165 \\ -31.6394 & 18.3110 & 0.8568 & -0.1203 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14.0424 \\ -5.1000 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

2.3.3.1 Estabilidad

Debido a la linealización realizada, el estudio de la estabilidad local considera el concepto de “Estabilidad para Entrada Limitada, Salida Limitada” (BIBO: Bounded Input Bounded Output), el cual establece que “Un sistema BIBO es estable si para cada entrada limitada su salida es limitada”, lo cual significa que la estabilidad está condicionada a que las raíces de la ecuación característica, tengan parte real negativa.

Teniendo en cuenta las matrices presentadas en las expresiones (2.65) y (2.67), para cada uno de los puntos de operación, podemos establecer los polinomios característicos y sus respectivos polos:

- Posición Superior:

$$P_{PS}(s) = s^4 + 2.595s^3 - 59.8484s^2 - 52.6907s + 740.0760 \quad (2.69)$$

$$s_1 = -7.8367$$

$$s_2 = -4.2846$$

$$s_3 = 5.5660$$

$$s_4 = 3.9599$$

(2.70)

- Posición Inferior:

$$P_{PI}(s) = s^4 + 2.4796s^3 + 13.5481s^2 - 44.2979s - 740.0760 \quad (2.71)$$

$$s_1 = 4.5483$$

$$s_2 = -1.1615 + 5.7650i$$

$$s_3 = -1.1615 - 5.7650i$$

$$s_4 = -4.7049$$

(2.72)

De acuerdo a lo planteado acerca de la estabilidad para los puntos de operación, se concluye que el sistema presenta un comportamiento inestable, debido a la existencia de por lo menos un polo $s_i > 0$, que representa la ubicación de dicho polo en la parte derecha del semiplano s .

2.3.3.2 Controlabilidad

La controlabilidad del sistema está asociada al concepto: “un sistema es controlable para un instante inicial, si es posible llevarlo desde cualquier estado inicial a cualquier otro estado, empleando un vector de control no acotado, en un lapso finito”. Existen varios criterios que permiten establecer la controlabilidad de un sistema, entre ellos está, determinar el rango la matriz de controlabilidad, definida por:

$$Co = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]_{4 \times 4} \quad (2.73)$$

Para el caso del sistema Pendubot, se requiere analizar la matriz de controlabilidad para ambos puntos de operación.

- Posición Superior:

$$Co_{PS} = \begin{bmatrix} 0 & 14.0424 & -34.8403 & 647.6563 \\ 0 & -22.9848 & 59.6554 & -1247.2501 \\ 14.0424 & -34.8403 & 647.6563 & -3026.1791 \\ -22.9848 & 59.6554 & -1247.2501 & 5596.3408 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\det(Co_{PS}) = -6.3961 \times 10^6 \quad (2.75)$$

- Posición Inferior:

$$Co_{PI} = \begin{bmatrix} 0 & 14.0424 & -33.2132 & -391.0822 \\ 0 & -5.1000 & 12.6458 & 320.9273 \\ 14.0424 & -33.2132 & -391.0822 & 2041.7364 \\ -5.1000 & 12.6458 & 320.9273 & -1193.0047 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\det(Co_{PI}) = -6.4091 \times 10^6 \quad (2.77)$$

Para los dos puntos de operación seleccionados, el sistema es controlable, ya que ambas matrices de controlabilidad poseen rango completo.

2.3.3.3 Observabilidad

La observabilidad del sistema, es tal si en un tiempo inicial, con el sistema en dicho estado inicial, es posible determinar dicho estado, a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito. El criterio empleado para determinar la observabilidad del sistema Pendubot, fue teniendo en cuenta la matriz de observabilidad, definida por:

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}_{8 \times 4} \quad (2.78)$$

Se establecen las matrices de observabilidad para los 2 puntos de operación del sistema Pendubot:

- Posición Superior:

$$Ob_{PS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 31.5893 & -5.1088 & -2.3592 & 0.0744 \\ -31.5893 & 28.5287 & 3.8615 & -0.2362 \\ -76.8741 & 14.1770 & 37.4427 & -5.3021 \\ 129.4350 & -26.4673 & -41.5618 & 28.8720 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$rango(Ob_{PS}) = 4 \quad (2.80)$$

- Posición Inferior:

$$Ob_{PI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -31.5893 & 5.1088 & -2.3592 & 0.0165 \\ 31.6394 & 18.3110 & 0.8568 & -0.1203 \\ 75.0485 & -11.7503 & -26.0094 & 5.0679 \\ -30.8746 & 2.1737 & 29.5148 & 18.3396 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

$$rango(Ob_{PI}) = 4 \quad (2.82)$$

El criterio de la matriz de observabilidad, establece que dicha matriz debe poseer rango completo para determinar si el sistema es observable, condición que es cumplida para ambos puntos de operación del sistema Pendubot.

CAPÍTULO III

CONTROL NO LINEAL POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS

Un sistema cuyo comportamiento es modelado por la interacción de sub-sistemas continuos y sub-sistemas a eventos discretos es llamado también sistema híbrido. En control se han empleado la conmutación entre sistemas dinámicos para aplicar técnicas de control centradas en la estabilidad y funcionamiento adecuado de los controladores.

En el caso del sistema subactuado Pendubot, la estrategia de control empleada, establece 2 etapas de funcionamiento bien definidas:

- Control de Balanceo.
- Control de Estabilización

La etapa inicial es la encargada de aproximar los eslabones a las cercanías de los puntos de operación, la segunda etapa tiene como finalidad mantener estable el sistema en el punto de operación. La selección de una u otra etapa está restringida por condiciones, asociadas al éxito en el objetivo de cada etapa de control.

3.1 CONTROL DE BALANCEO

Esta etapa de la estrategia de control tiene como principal objetivo, llevar los eslabones desde su posición estable o de reposo, hasta los puntos de operación definidos.

A diferencia de sistemas completamente actuados, cuya característica consecuente es que siempre son linealizables por realimentación, el sistema subactuado Pendubot, es no linealizable en las coordenadas generalizadas, sin embargo se puede linealizar una parte del sistema, es así que para efectuar el control de Balanceo se hace uso de la Linealización Parcial por Realimentación, que es un caso especial de la Linealización por Realimentación: Entrada-Salida.

3.1.1 Linealización Parcial por Realimentación

La utilización de este método toma en cuenta el efecto no lineal del segundo eslabón sobre el primero, una vez conseguida la linealización parcial, es factible que la señal de control provenga de cualquier técnica de control, así para el control de balanceo en el sistema Pendubot, se empleó un compensador PD.

A partir de las expresión (2.36), y reemplazando el valor numérico de $c_{22} = 0$, se desarrollan las expresiones:

$$d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + \phi_1 + \psi_1 = \tau_1 \quad (3.1)$$

$$d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + \phi_2 + \psi_2 = 0 \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) muestra que el segundo grado de libertad es no actuado, y es a su vez no factible de linealizar, sin embargo la inclusión de

esta dinámica es importante para el diseño del lazo de control del primer grado de libertad, ya que dicho lazo de control se encargará del seguimiento de una trayectoria, se resuelve entonces la ecuación (3.2) de la forma:

$$\ddot{q}_2 = \frac{-d_{21}\ddot{q}_1 - c_{21}\dot{q}_1 - \phi_2 - \psi_2}{d_{22}} \quad (3.3)$$

Remplazando y reordenando la ecuación (3.1), se tiene:

$$d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\left(\frac{-d_{21}\ddot{q}_1 - c_{21}\dot{q}_1 - \phi_2 - \psi_2}{d_{22}}\right) + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + \phi_1 + \psi_1 = \tau_1 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \left(d_{11} - \frac{d_{12}d_{21}}{d_{22}}\right)\ddot{q}_1 + \left(c_{11} - \frac{d_{12}c_{21}}{d_{22}}\right)\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + \left(\phi_1 - \frac{d_{12}\phi_2}{d_{22}}\right) + \dots \\ \dots + \left(\psi_1 - \frac{d_{12}\psi_2}{d_{22}}\right) = \tau_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Redefiniendo la ecuación (3.5), se obtiene:

$$\bar{d}_{11}\ddot{q}_1 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{\phi}_1 + \bar{\psi}_1 = \tau_1 \quad (3.6)$$

$$\bar{d}_{11} = d_{11} - \frac{d_{12}d_{21}}{d_{22}}$$

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - \frac{d_{12}c_{21}}{d_{22}}$$

$$\bar{c}_{12} = c_{12} \quad (3.7)$$

$$\bar{\phi}_1 = \phi_1 - \frac{d_{12}\phi_2}{d_{22}}$$

$$\bar{\psi}_1 = \psi_1 - \frac{d_{12}\psi_2}{d_{22}}$$

Se puede definir entonces el lazo interno que linealiza la dinámica de q_1 , de la siguiente forma:

$$\tau_1 = \bar{d}_{11}v_1 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{\phi}_1 + \bar{\psi}_1 \quad (3.8)$$

Este método llamado también torque computado, permite redefinir el sistema de como:

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (3.9)$$

$$d_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + \phi_2 + \psi_2 = -d_{21}v_1 \quad (3.10)$$

Ahora la ecuación (3.9) es lineal, consecuentemente un lazo externo de control puede ser diseñado para el seguimiento de una trayectoria para el primer eslabón. La respuesta del segundo eslabón está dada por la ecuación (3.10). El objetivo del lazo externo de control entonces, además de realizar el seguimiento de una trayectoria determinada, incluye la excitación de la dinámica interna del sistema, de modo tal que el segundo grado de libertad pueda aproximarse a los puntos de operación. El compensador PD seleccionado para el Pendubot está definido por:

$$v_1 = \ddot{q}_1^d + K_D(\dot{q}_1^d - \dot{q}_1) + K_P(q_1^d - q_1) \quad (3.11)$$

La figura 3.1 muestra el diagrama de bloques del Control de Balanceo empleado como parte de la estrategia de control del sistema Pendubot.

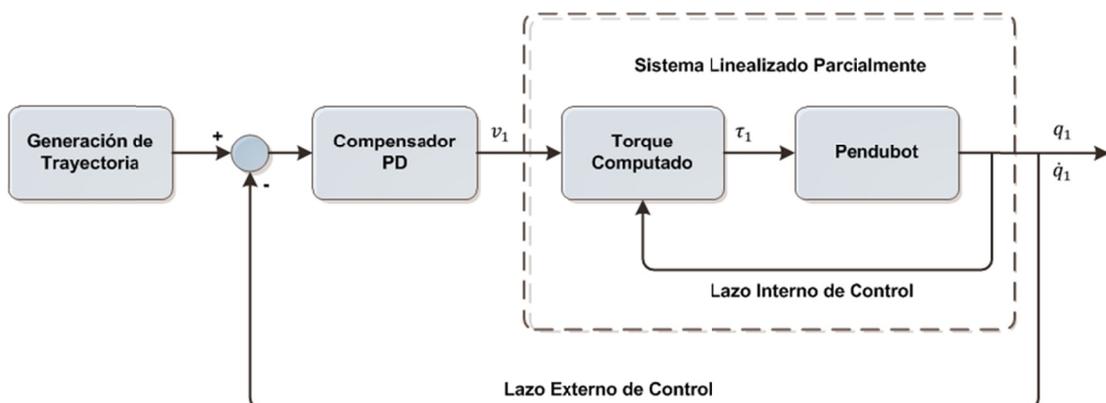


Figura 3.1 Diagrama de bloques del control basado en la Linealización Parcial por Realimentación.

3.2 CONTROL DE ESTABILIZACIÓN

La acción de esta etapa de la estrategia de control, está condicionada a las posiciones angulares alcanzadas por los eslabones, producto de la acción previa en el control de balanceo, si las posiciones angulares son próximas a los puntos de operación, entonces actuará el control de estabilización.

Esta etapa del control consiste en implementar un controlador, cuyo objetivo es mantener estable el Pendubot en un punto de operación, para dicha finalidad se diseñó un controlador a partir del modelo linealizado en el capítulo previo, también se pudo establecer que el sistema linealizado es inestable para los dos puntos de operación, pero es a su vez controlable y observable.

La técnica empleada es: Control por Realimentación de Estados mediante un Regulador Cuadrático Lineal (LQR *Linear Quadratic Regulator*), es una técnica de diseño de sistemas de control por realimentación del vector estado. La figura 3.2 muestra el esquema de control.

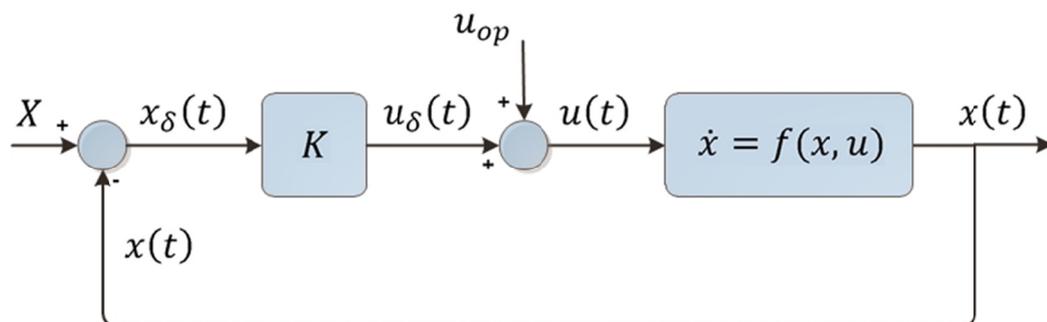


Figura 3.2 Esquema del Control de Estabilización.

La salida de control lineal es de la forma:

$$\begin{aligned}
 u_{\delta}(t) &= Kx_{\delta}(t) \\
 K &= [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \\
 x_{\delta}(t) &= X - x(t)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Donde K , es denominada matriz de ganancia de realimentación de estado con elementos de ganancia constantes, $x_{\delta}(t)$ es el vector de estado nominal, $X = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4]^T$ es el vector de estados deseados o de los puntos de operación, $x(t)$ es el vector de estados respuesta del sistema, $u_{\delta}(t)$ es la acción de control lineal nominal, u_{op} la acción de control para el punto de operación y $u(t)$ la acción de control para el sistema. La finalidad de la utilización de la técnica LQR, es generar una dinámica factible de controlar de naturaleza estable o asintóticamente estable, dicha técnica está basada en el cálculo de las ganancias de realimentación de forma óptima, basándose en minimizar una función de costo o índice de desempeño, definida por:

$$J = \int_0^{\infty} (x_{\delta}^T Q x_{\delta} + u_{\delta}^T R u_{\delta} + 2x_{\delta}^T N u_{\delta}) dt \tag{3.13}$$

Donde Q es una matriz simétrica real definida positiva o semidefinida positiva, R y N son matrices simétricas reales definidas positivas. La solución para obtener las ganancias de realimentación de manera óptima, esta condicionada a la solución de la matriz S , asociada a la ecuación de Riccati expresada de la forma:

$$A^T + SA - (SB + N)R^{-1}(B^T S + N^T) + Q = 0 \tag{3.14}$$

Una vez resuelta la matriz S , se puede obtener las ganancias de realimentación, a partir de la expresión:

$$K = R^{-1}(B^T S + N^T) \tag{3.15}$$

El cálculo de la matriz de ganancias se realizó haciendo uso de la herramienta computacional Matlab, software que proporciona la solución de las matrices S y K , definiendo previamente las matrices Q , R y N , de la forma:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$R = [1]$$

$$N = [0]$$

Las matrices de ganancias de realimentación de estados fueron obtenidas para cada punto de operación, así como también sus respectivos polos en lazo cerrado.

- Posición Superior:

$$K_{PS} = [-29.5348 \quad -29.1767 \quad -8.9615 \quad -6.3248] \quad (3.17)$$

$$s_{1,2} = -7.1043 \pm 1.6857i \quad (3.18)$$

$$s_{3,4} = -3.9604 \pm 0.3142i$$

- Posición Inferior:

$$K_{PI} = [11.6886 \quad 17.2735 \quad 2.0864 \quad 3.7129] \quad (3.19)$$

$$s_{1,2} = -1.7463 \pm 5.9397i \quad (3.20)$$

$$s_{3,4} = -4.6749 \pm 0.3141i$$

Debido a que el sistema Pendubot es no lineal, los controladores diseñados para el control de estabilización, únicamente presentarán un desempeño adecuado, durante un rango de operación limitado a las cercanías de los puntos de operación.

CAPÍTULO IV

HARDWARE Y SOFTWARE

El sistema Pendubot como sistema mecatrónico integra sistemas mecánicos, electrónicos, computacionales e informáticos, características que se tuvieron en cuenta, ya que el sistema Pendubot siguió el proceso de diseño mecatrónico, desde ser un concepto a desarrollar, hasta su fabricación e implementación final. Como parte del proceso de diseño mecatrónico, está el diseño mecánico y la fabricación de componentes mecánicos. El diseño mecánico fue realizado a partir de software CAD 3D, específicamente SolidWorks y Catia V5, como muestran las figuras 4.1 y 4.2.

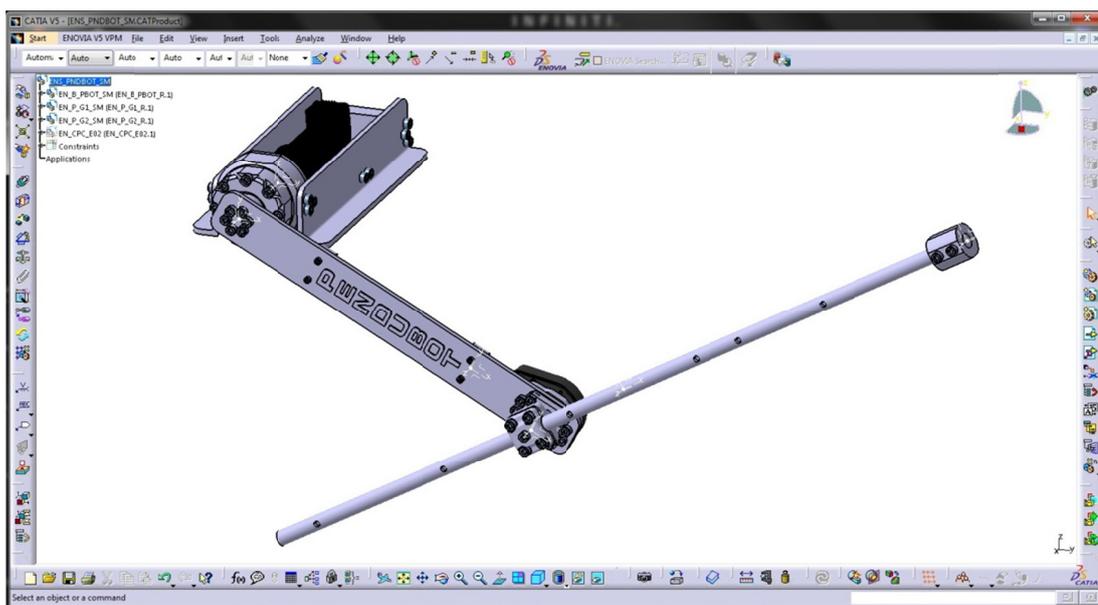


Figura 4.1 Ensamble mecánico del Pendubot en Catia V5.

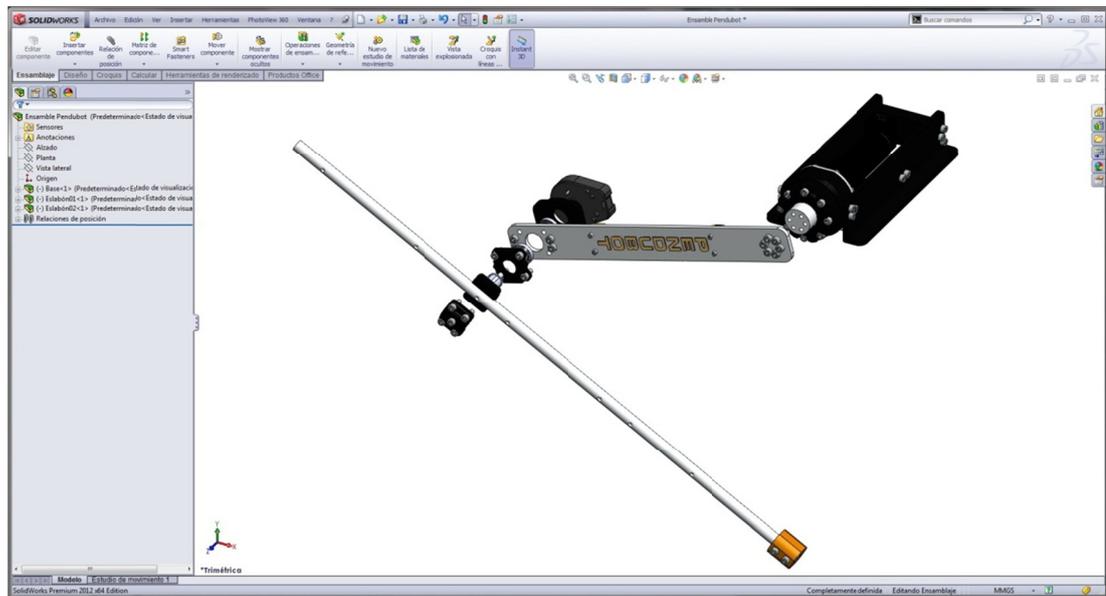


Figura 4.2 Vista explosionada del ensamble mecánico del Pendubot en SolidWorks.

La fabricación de los componentes mecánicos se hizo mediante una fresa CNC de la marca HAAS, modelo TM1, que se muestra en la figura 4.3.



Figura 4.3 Fresa CNC de la marca HAAS, modelo TM1.

La utilización de la fresa CNC implica la programación respectiva de cada componente mecánico a fabricar, dicha programación se hizo en el software Mastercam X5. Las figuras 4.4, 4.5 y 4.6, muestran algunas características de los programas de fabricación desarrollados en Mastercam.

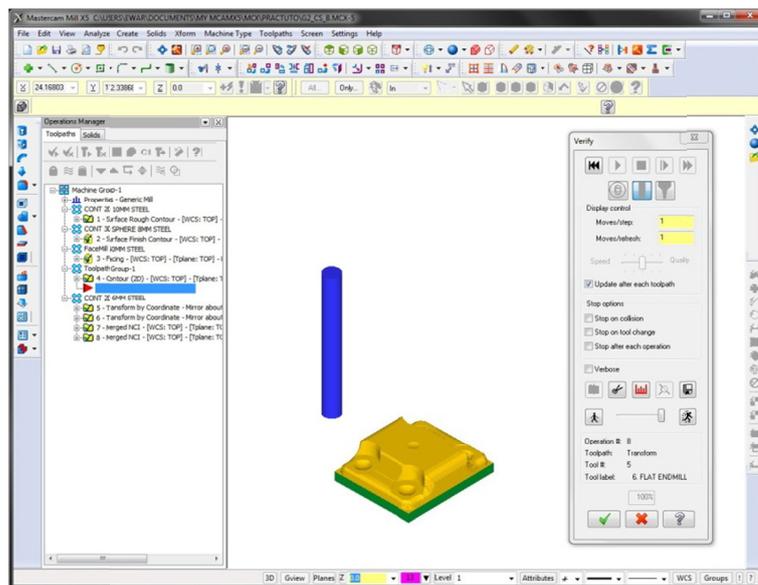


Figura 4.4 Verificación de operaciones de fabricación.

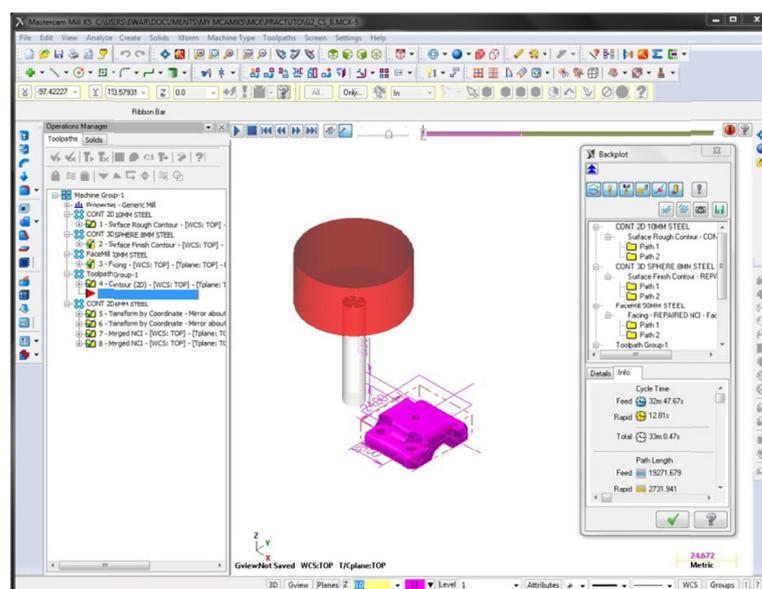
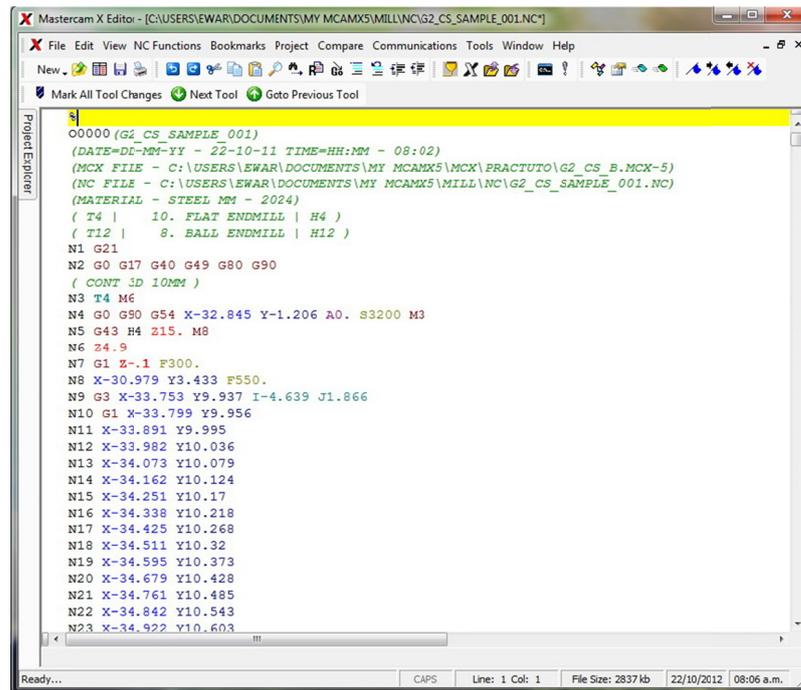


Figura 4.5 Verificación de trayectorias de movimiento y tiempos de fabricación.



```

Mastercam X Editor - [CAUSERS\EWAR\DOCUMENTS\MY MCAMX5\MILL\NC\G2_CS_SAMPLE_001.NC]
File Edit View NC Functions Bookmarks Project Compare Communications Tools Window Help
New [Icons]
Mark All Tool Changes Next Tool Goto Previous Tool
Project Engineer
O0000 (G2_CS_SAMPLE_001)
( DATE=DD-MM-YY - 22-10-11 TIME=HH:MM - 08:02 )
( MCK FILE - C:\USERS\EWAR\DOCUMENTS\MY MCAMX5\MCK\PRACTUTO\G2_CS_B.MCK-5 )
( NC FILE - C:\USERS\EWAR\DOCUMENTS\MY MCAMX5\MILL\NC\G2_CS_SAMPLE_001.NC )
( MATERIAL - STEEL M1 - 2024 )
( T4 | 10. FLAT ENDMILL | H4 )
( T12 | 8. BALL ENDMILL | H12 )
N1 G21
N2 G0 G17 G40 G49 G80 G90
( CONT ID 10MM )
N3 T4 M6
N4 G0 G90 G54 X-32.845 Y-1.206 A0. S3200 M3
N5 G43 H4 Z15. M8
N6 Z4.9
N7 G1 Z-.1 F300.
N8 X-30.979 Y3.433 F550.
N9 G3 X-33.753 Y9.937 I-4.639 J1.866
N10 G1 X-33.799 Y9.956
N11 X-33.891 Y9.995
N12 X-33.982 Y10.036
N13 X-34.073 Y10.079
N14 X-34.162 Y10.124
N15 X-34.251 Y10.17
N16 X-34.338 Y10.218
N17 X-34.425 Y10.268
N18 X-34.511 Y10.32
N19 X-34.595 Y10.373
N20 X-34.679 Y10.428
N21 X-34.761 Y10.485
N22 X-34.842 Y10.543
N23 X-34.922 Y10.603
Ready... CAPS Line: 1 Col: 1 File Size: 2837 kb 22/10/2012 08:06 a.m.

```

Figura 4.6 Generación del programa de control numérico para la fresa CNC.

La figura 4.7 muestra el Pendubot en etapas preliminares constructivas, verificación de ensamble de los componentes mecánicos y la integración con sensores y actuadores.



Figura 4.7 Pruebas iniciales de ensamble del prototipo Pendubot.

Las consideraciones de diseño mecánico para el sistema mecánico del Pendubot estuvieron basadas en bibliografía existente, como el “Módulo de Control de Mecatrónica” (Mechatronics Control Kit) de la empresa Quanser Consulting Inc. (http://quanser.com/english/html/mechatronics/fs_overview.htm).

El sistema Pendubot como sistema mecatrónico, además del sistema mecánico, posee como elementos clave del mismo: sistemas informáticos, sistemas eléctricos, interfaz en tiempo real, sensores y actuadores, los cuales fueron diseñados, seleccionados y adquiridos para su posterior integración al sistema Pendubot.

La figura 4.8 muestra los elementos del sistema mecatrónico Pendubot y el diagrama de interacción de dichos elementos.



Figura 4.8 Elementos del sistema mecatrónico Pendubot.

4.1 HARDWARE

Los componentes físicos empleados en la implementación, mostrados en la figura 4.8 fueron: sensores, actuador, tarjetas electrónicas de adquisición de datos, de electrónica de potencia y una computadora para el control en tiempo real.

4.1.1 Sensores

Se emplearon sensores para la medición de posición y velocidad de cada uno de los eslabones del Pendubot.

- Eslabón 01: Encoder HEDS 5540, del fabricante Avago, este encoder esta ensamblado al motor desde fábrica.
- Eslabón 02: Encoder E6-2500-236-I-S-D-D-B, del fabricante US Digital, ensamblado al eje de movimiento del segundo grado de libertad.

La figura 4.9 muestra los encoders para cada eslabón y la tabla 4.1 muestra las características más importantes de cada encoder.

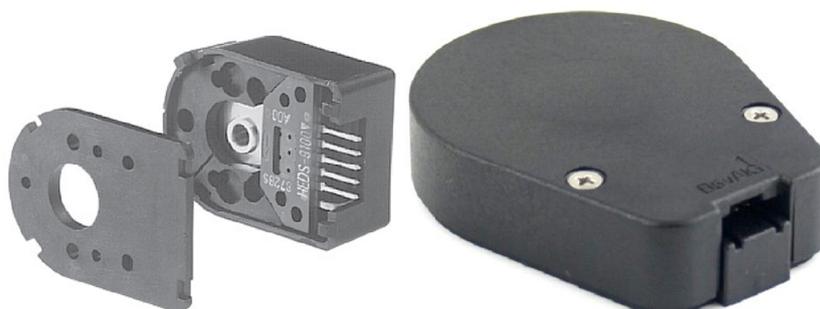


Figura 4.9 Encoder del eslabón 01(izquierda) y eslabón 02 (derecha).

Tabla 4.1 Características de los Encoders.

Especificaciones	Eslabón 01	Eslabón 02
	HEDS 5540	E6-2500-236
Número de pulsos por vuelta	500	2500
Número de canales	3	3
Maxima frecuencia de funcionamiento (kHz)	100	100
Máxima velocidad (rpm)	12000	2400

4.1.2 Actuador

El único actuador presente es el motor-reductor del fabricante Maxon, el cual se muestra en la figura 4.10.



Figura 4.10 Motor-reductor Maxon, actuador del eslabón 01.

El motor utilizado es un motor de corriente continua del programa de fabricación RE de Maxon Motor, el cual posee buenas características de desempeño, dicho motor además se encuentra acoplado a un reductor planetario con algunos componentes cerámicos, que de acuerdo al fabricante, posee mejores características de desempeño y vida útil que reductores planetarios con componentes de acero.

Las características más relevantes del motor-reductor se muestran en la tabla 4.2, las cuales fueron provistas por el fabricante.

Tabla 4.2 Características del Motor-Reductor Maxon.

Motor DC		
Valores a Tensión Nominal		
	Unidad	Valor
Tensión nominal	V	30
Velocidad en vacío	rpm	7220
Corriente en vacío	mA	123
Velocidad nominal	rpm	6420
Par nominal (máximo par permanente)	mNm	92.4
Corriente nominal (máxima corriente en continuo)	A	2.5
Par de arranque	mNm	949
Corriente de arranque	A	24.4
Máximo rendimiento	%	84
Características		
Resistencia en bornes	Ω	1.23
Inductancia en bornes	mH	0.34
Constante de par	mNm/A	38.9
Constante de velocidad	rpm/V	246
Relación velocidad / par	rpm/mNm	7.76
Constante de tiempo mecánica	ms	5.5
Inercia del rotor	gcm^2	67.6
Reductor		
Reducción		26:1
Reducción absoluta		26
Momento de inercia	gcm^2	6.1
Número de etapas		2
Máximo par permanente	Nm	7.5
Máximo par admisible de forma intermitente	Nm	11.3
Máximo rendimiento	%	81

4.1.3 Tarjeta de Adquisición de Datos PCIe 6363

La lectura e interpretación de señales provenientes de los sensores, se realizaron mediante la tarjeta de adquisición de datos PCIe 6363, del fabricante National Instruments, la tarjeta requiere de la instalación en una computadora de escritorio y se muestra en la figura 4.11.



Figura 4.11 Tarjeta de adquisición de datos PCIe 6363.

Se requieren además borneras y cables blindados para realizar la correcta conexión con los sensores, los cuales se muestran en la figura 4.12.



Figura 4.12 Cable blindado SHC68 (izquierda) y bornera SCB-68 (derecha).

4.1.4 Tarjeta Electrónica de Potencia EPOS2 50/5

La energía que se suministra al motor del sistema Pendubot y el control de la misma, se realizó mediante la tarjeta electrónica EPOS2 50/5, cuyo fabricante es Maxon, tarjeta que se muestra en a figura 4.13.



Figura 4.13 Tarjeta electrónica EPOS2 50/5.

La tarjeta electrónica EPOS2 50/5, requiere una fuente de poder de 30V y un conjunto de cables, para establecer la conexión con el motor-reductor (actuador) y la computadora encargada del sistema de control. Los cables requeridos son un cable USB para la conexión con la computadora, cable de alimentación de la tarjeta de potencia (conectado a la fuente de 30V), y un cable de alimentación al motor-reductor.

El apéndice B muestra mayor detalle acerca de las conexiones y especificaciones proporcionadas por el fabricante Maxon.

4.2 SOFTWARE

El modelamiento y análisis del sistema Pendubot se realizó mediante la herramienta computacional Matlab, mientras que la implementación de los controladores en tiempo real, fue realizada mediante el software LabVIEW.

4.2.1 EPOS Studio

EPOS Studio es un software de Maxon Motor, dedicado al monitoreo de variables de la tarjeta electrónica de potencia EPOS2 50/5, la figura 4.14 muestra la interfaz de dicho software.

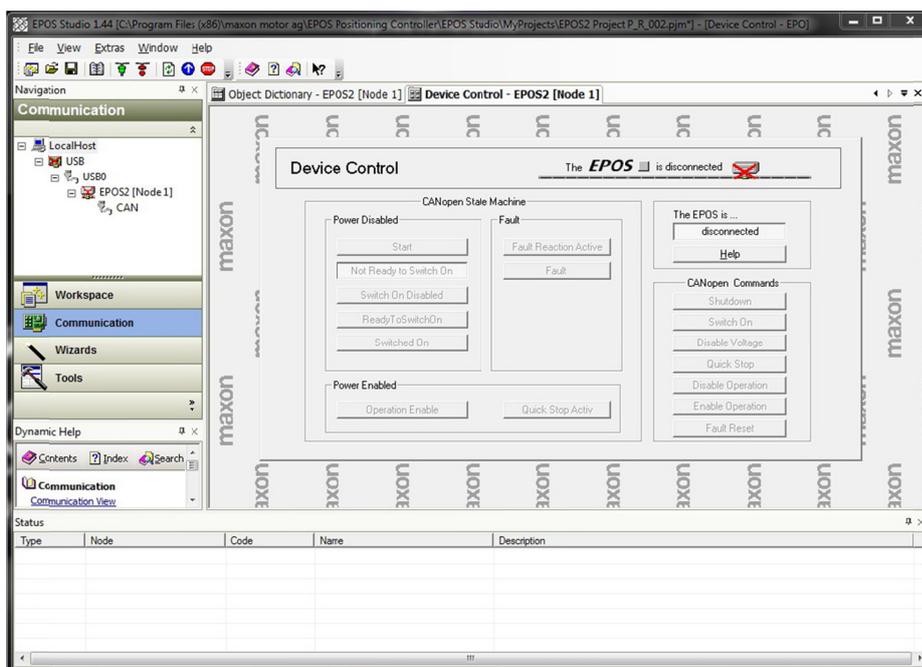


Figura 4.14 Interfaz de EPOS Studio.

4.2.2 Programación Gráfica

LabVIEW es un software que emplea programación gráfica y los programas desarrollados son los llamados “Instrumentos Virtuales” o “VIs”, la figura 4.15 muestra uno de los programas desarrollados para el control del sistema Pendubot.

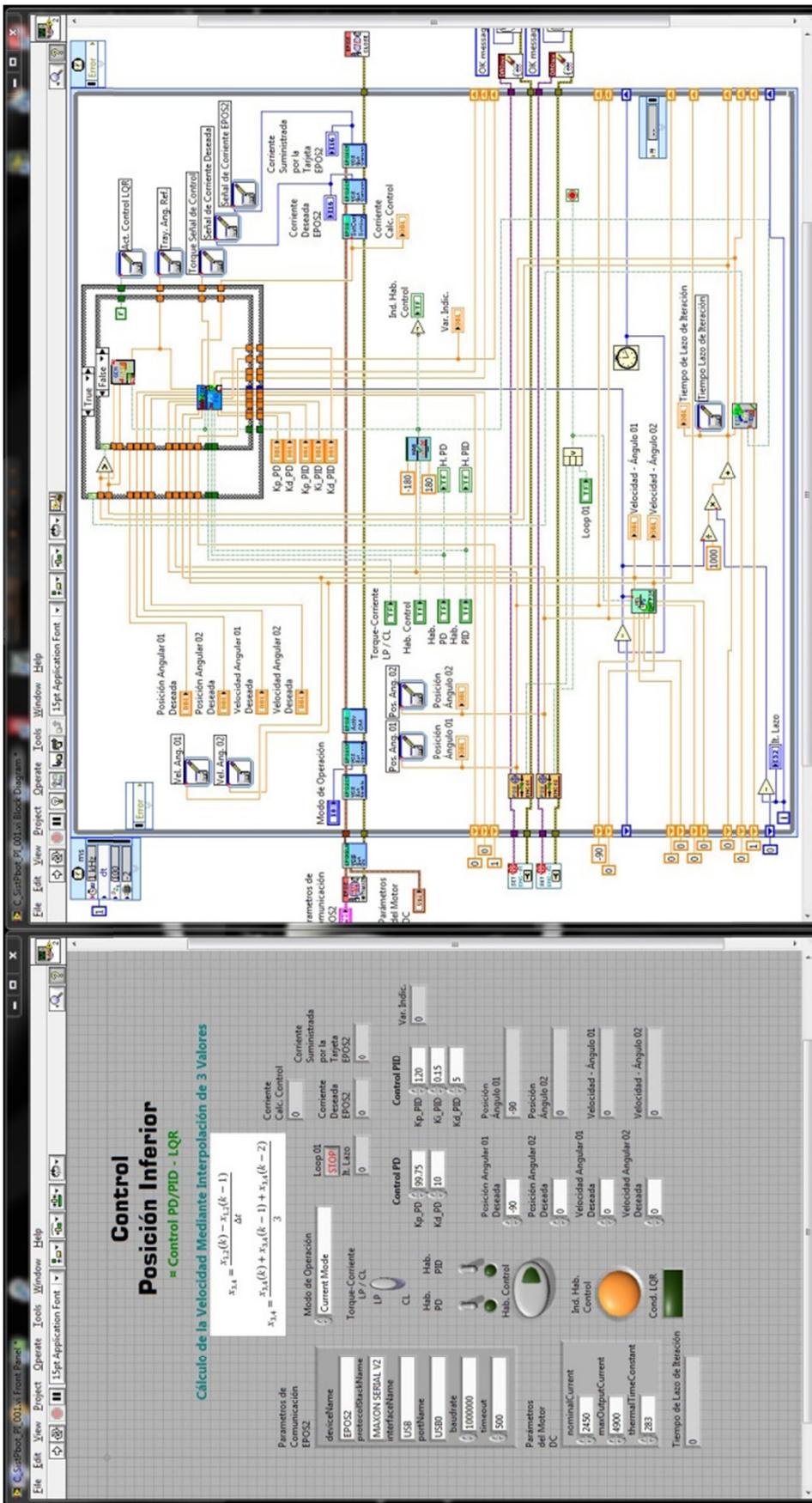


Figura 4.15 Programa de control para la Posición Inferior de operación, desarrollado en LabVIEW.

4.2.3 Diagrama de Flujo

El algoritmo desarrollado se presenta mediante el diagrama de flujo mostrado en la figura 4.16, dicho algoritmo fue el empleado para realizar la implementación de las estrategias de control.

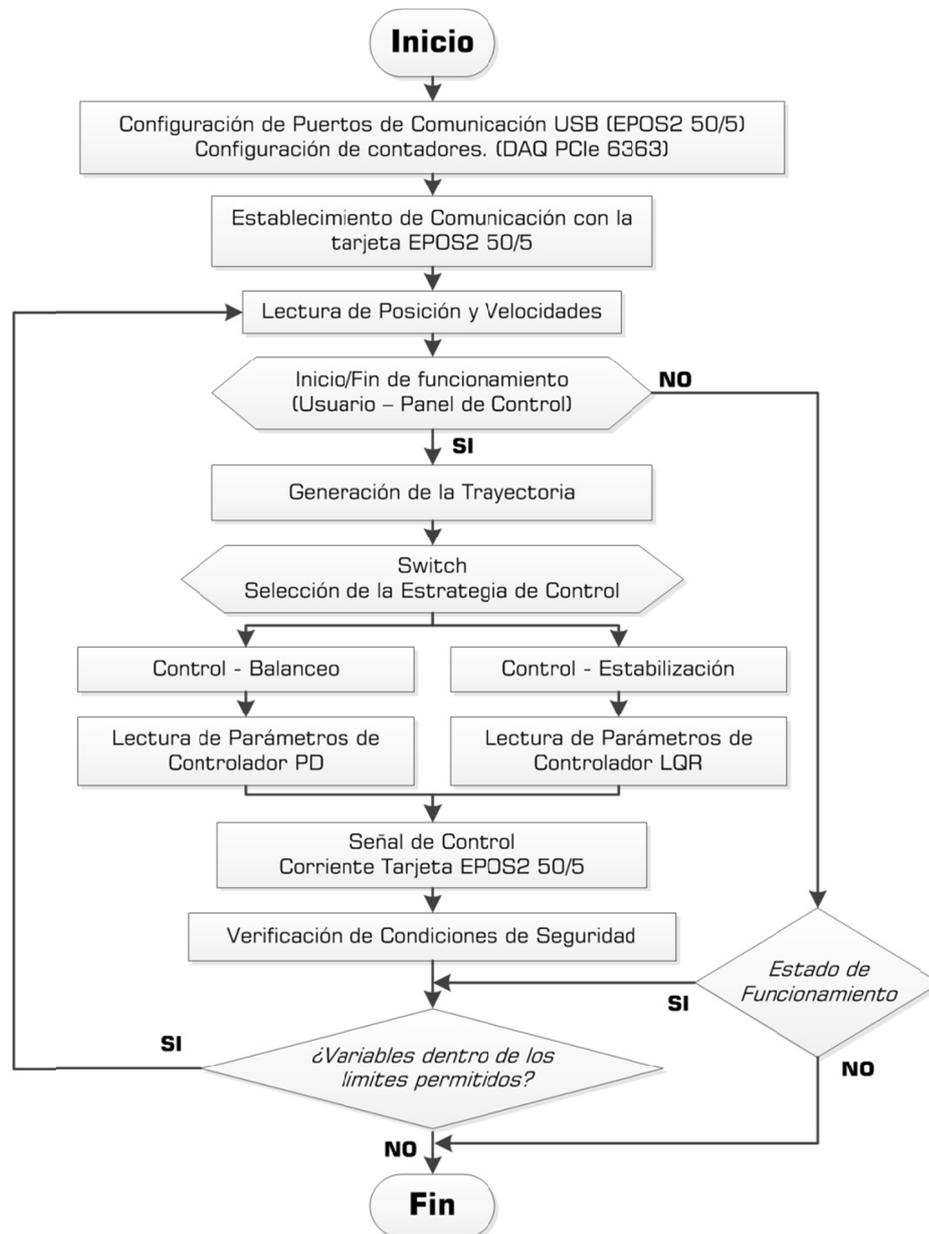


Figura 4.16 Algoritmo de control del sistema Pendubot para los puntos de operación.

CAPÍTULO V

RESULTADOS EXPERIMENTALES E IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL

La integración de las diversas técnicas de control que se requieren para el diseño de un sistema de control, tiene como consecuencia la necesidad de organizar de varios niveles de control, bases de conocimiento, mecanismos de inferencias e interfaces, esto depende además de la complejidad del sistema que se busca controlar. Para el sistema Pendubot se propone un esquema de control denominado “Control Multinivel por Realimentación Basado en Conocimientos” (*Knowledge-Based Multilevel Feedback Control*), que se muestra en la figura 5.1.

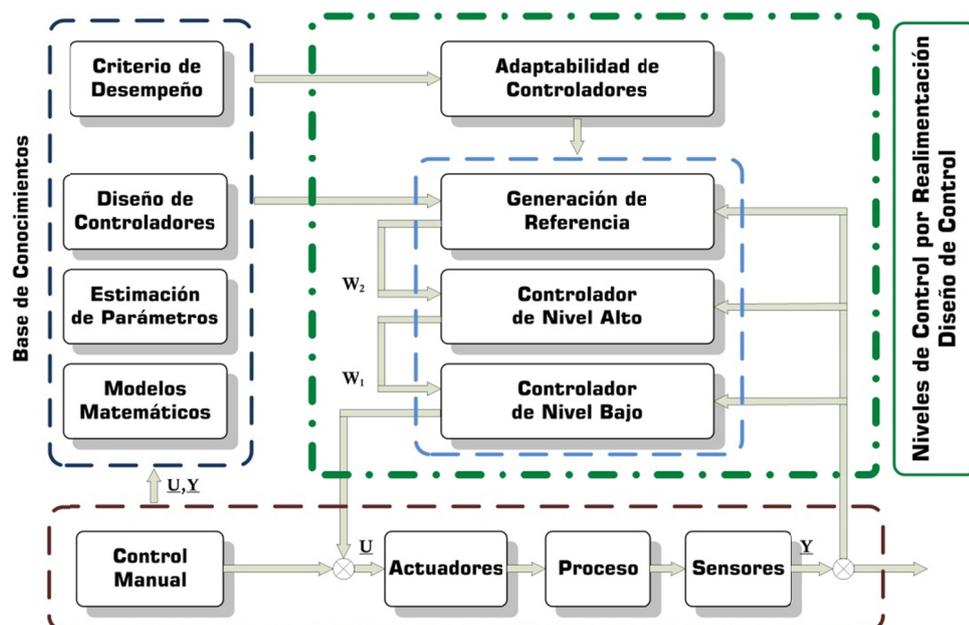


Figura 5.1 Esquema de Control Multinivel por Realimentación Basado en Conocimientos.

Además del esquema propuesto, el control del sistema Pendubot es un control de tipo híbrido, ya que emplea 2 técnicas de control, condicionadas a los puntos de operación.

5.1 ESTRUCTURA DE CONTROL

La estructura de control desarrollada para el sistema Pendubot se muestra en la figura 5.2, donde resalta la existencia del bloque “Switch”, el cual se encarga de conmutar entre el control de balanceo y estabilización, a partir de la realimentación de las variables de estado.

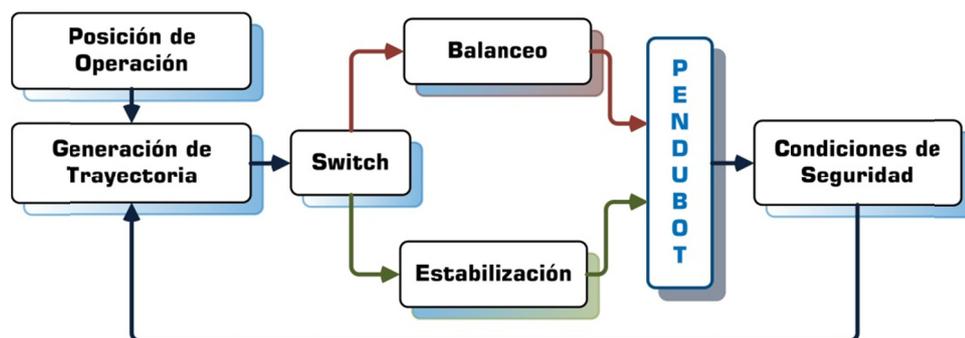


Figura 5.2 Estructura de control del sistema Pendubot.

Las condiciones de conmutación entre los tipos de control, dependen de los estados para cada punto de operación, como se muestra en la figura 5.3.

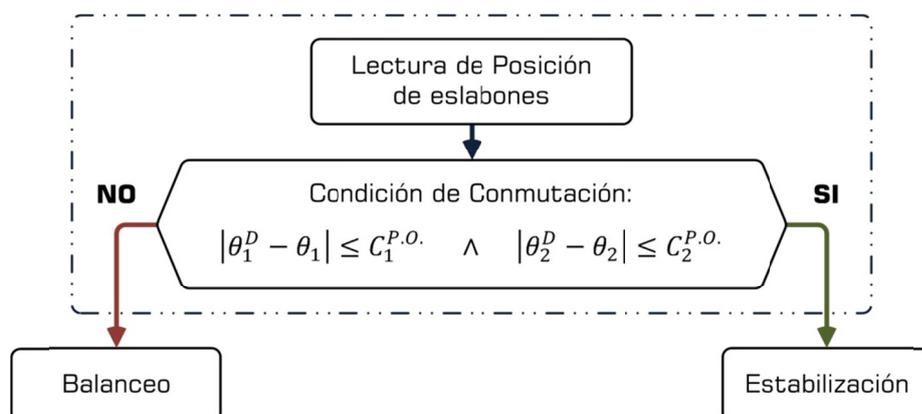


Figura 5.3 Condición de conmutación bloque “Switch”.

Para cada uno de los puntos de operación, los valores de posición angular deseados θ_1^D y θ_2^D , son comparados con las posiciones angulares θ_1 y θ_2 , provenientes de los sensores, si como resultado de la comparación se logra situar los eslabones en posiciones cercanas a los puntos de operación, la técnica de control cambia del control de balanceo al control de estabilización. Los valores mínimos de $C_1^{P.O.}$ y $C_2^{P.O.}$ para cada punto de operación, se establecieron inicialmente en las simulaciones como 12.5° .

La generación de trayectorias establece los valores de posición deseados, que a su vez dependen de los puntos de operación básicamente, cuando está activo el control de estabilización, las trayectorias son los valores de posición angular deseados. El control de balanceo por otro lado, requiere de una trayectoria adicional para el punto de operación denominado posición inferior, debido a que desde la posición estable del Pendubot, no es posible llevar los eslabones al punto de operación deseado. En el punto de operación denominado posición superior, el control de balanceo únicamente requiere que la trayectoria sea de tipo “escalón”.

La trayectoria adicional para el control de balanceo, está dada por la expresión:

$$\theta_1^{ref}(t) = 0.517 \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right) - \frac{\pi}{2} \quad t_1 < t < t_2 \quad (5.1)$$

$$t_2 - t_1 = t_d$$

Donde la trayectoria de referencia $\theta_1^{ref}(t)$, está en función del tiempo t , el cual está acotado entre t_1 y t_2 , siendo $t_d = 2.05$ s el tiempo total de duración de la trayectoria de referencia.

El bloque de condiciones de seguridad, que se muestra en la figura 5.2 está referido al monitoreo de las variables de estado y el correcto funcionamiento de las tarjetas electrónicas PCle6363 y EPOS2 50/5. Teóricamente los eslabones del Pendubot pueden moverse indefinidamente, pero en el sistema físico el movimiento del primer eslabón está limitado a una sola vuelta, debido a que un giro mayor generaría daños en los cables correspondientes al encoder del segundo eslabón, otra condición de seguridad es aplicada a la corriente continua suministrada por la tarjeta EPOS2 50/5, corriente que está limitada a 2.45 A, para evitar daños al motor.

5.2 SIMULACIONES DEL SISTEMA DE CONTROL

Las simulaciones de la implementación del control en el sistema Pendubot, se desarrollaron en tiempo discreto, a partir de las ecuaciones en variables de estado, presentadas en las expresiones (2.44), (2.45), (2.46) y (2.47):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x, u) \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x, u) \\
 \dot{x}_3 &= f_3(x, u) \\
 \dot{x}_4 &= f_4(x, u)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Aproximando la derivada mediante una diferencia finita de la forma:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}
 \tag{5.3}$$

Representando finalmente las variables de estado del sistema Pendubot de forma discreta se tiene:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= f_1(x, u)\Delta t + x_1(k) \\
 x_2(k+1) &= f_2(x, u)\Delta t + x_2(k) \\
 x_3(k+1) &= f_3(x, u)\Delta t + x_3(k) \\
 x_4(k+1) &= f_4(x, u)\Delta t + x_4(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Debido a que las simulaciones son susceptibles a modificar algunos parámetros, de forma que exista la mayor aproximación posible al desempeño de un sistema real, un parámetro importante es la frecuencia de muestreo, se requiere entonces establecer un periodo de muestreo mínimo aceptable a partir del cual realizar las simulaciones. La elección del periodo de muestreo se hizo a partir de la dinámica del sistema controlado en lazo cerrado para los puntos de operación, de esta forma se establece como criterio que el periodo de muestreo como mínimo, debe ser 25 veces menor al periodo correspondiente a la frecuencia ω_n mayor, de la dinámica en lazo cerrado. De las expresiones (3.18) y (3.20), podemos establecer las frecuencias ω_n de cada polo y seleccionar la mayor, de la forma:

$$\omega_s > 25 \max\{\omega_n\} \quad (5.5)$$

$$\omega_s > 25 \max\{7.3016 \quad 3.9728 \quad 6.1911 \quad 4.6854\} \quad (5.6)$$

$$\omega_s > 25 \times 7.3016 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (5.7)$$

Expresamos ω_s en unidades Hz de frecuencia para posteriormente determinar el periodo de muestreo, de la forma:

$$f_s > 29.0522 \text{ [Hz]} \quad (5.8)$$

$$T_s < 0.0344 \text{ [s]} \quad (5.9)$$

Adicionalmente a la restricción dada por la expresión (5.9), las pruebas de implementación de los controladores mostraron que debido a restricciones en el software LabVIEW, los programas de control que incluyen la lectura y escritura de datos para su posterior procesamiento, se realizan con un periodo de muestreo promedio de 12.85 ms , siendo este periodo de muestreo, el empleado en todas las

simulaciones de controladores, ya que además cumple con la restricción de la expresión (5.9).

La sintonización de los parámetros del compensador PD (ajuste de ganancias), en el control de balanceo fue realizado de forma heurística, mediante prueba y error, teniendo como objetivo acercar los eslabones a posiciones próximas a los puntos de operación.

Las ganancias del compensador PD para el punto de operación denominado posición superior fueron: $K_p = 94.75$ y $K_D = 3.675$, los resultados de la simulación para este punto de operación se muestran en la figura 5.4.

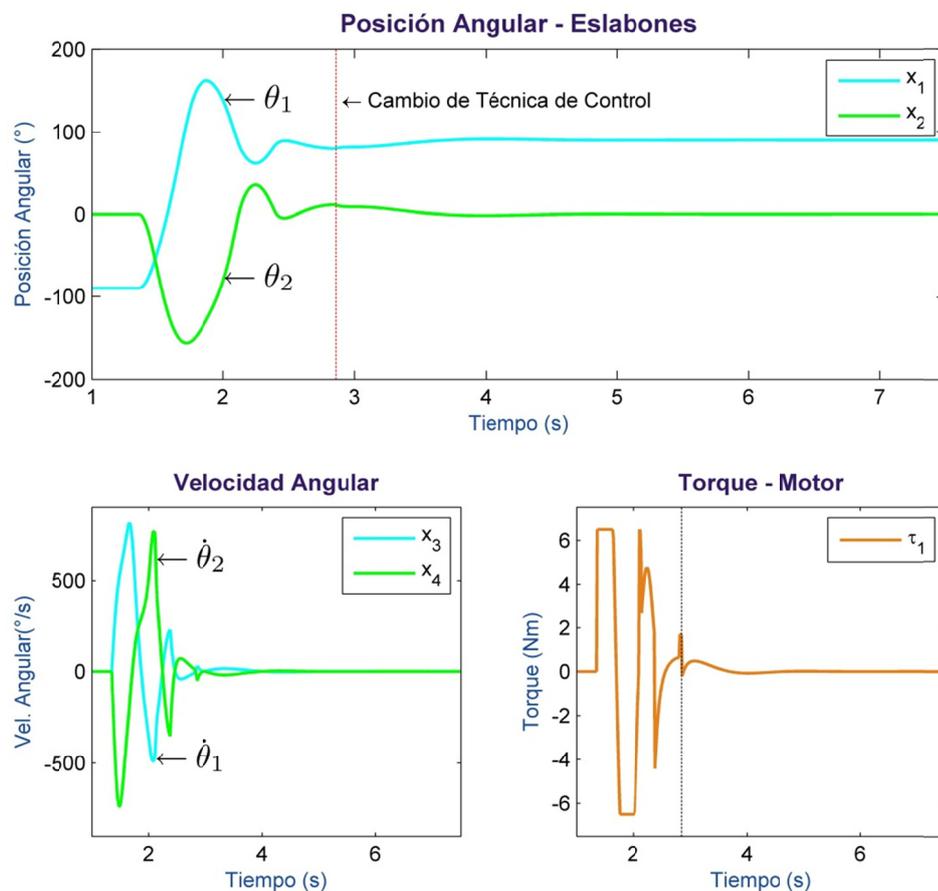


Figura 5.4 Simulación punto de operación: Posición Superior.

La simulación del punto de operación denominado posición inferior, tiene una trayectoria de referencia adicional, a la cual también se le hace seguimiento con el compensador PD, cuyas ganancias se establecieron como: $K_p = 99.75$ y $K_D = 12$, los resultados de la simulación para este punto de operación se muestran en la figura 5.5.

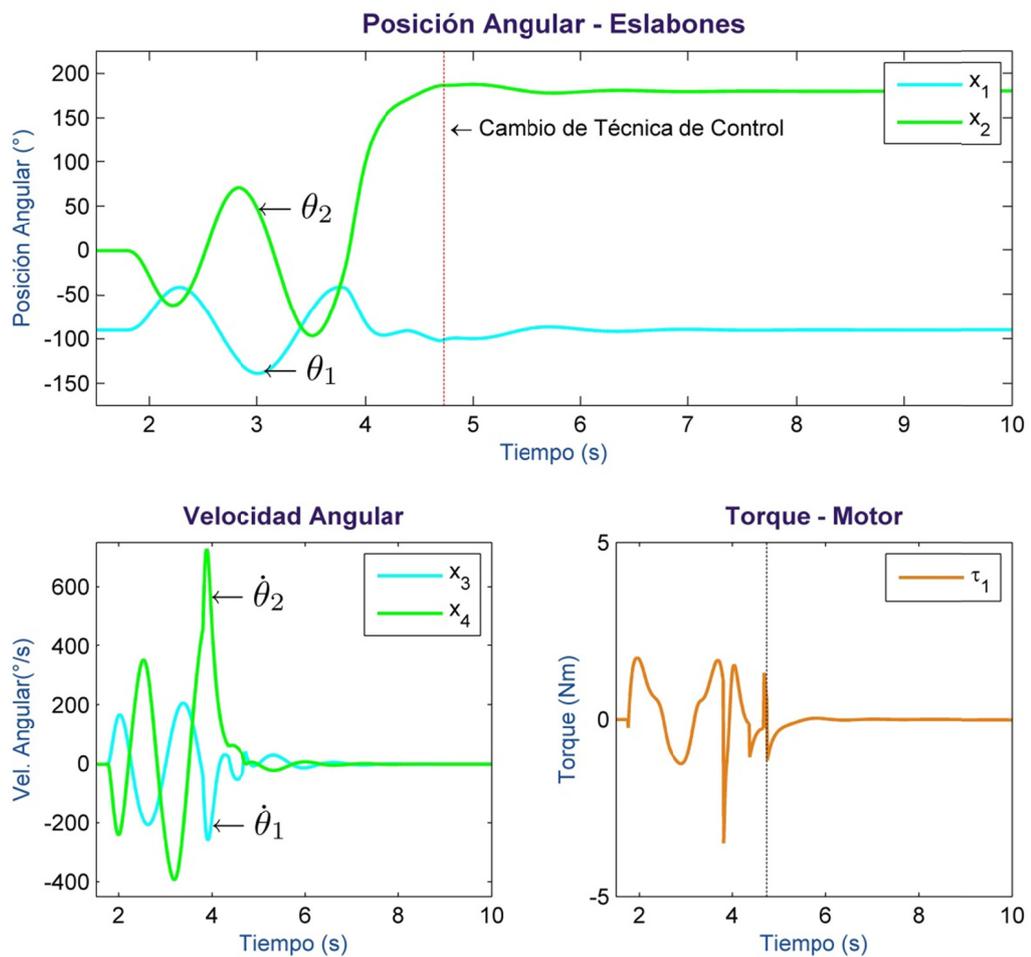


Figura 5.5 Simulación punto de operación: Posición Inferior.

En ambos puntos de operación simulados se puede apreciar la acción del sistema de control híbrido, cuya característica principal es la conmutación entre técnicas de control, siempre y cuando se cumplan las condiciones angulares $C_1^{P.O.}$ y $C_2^{P.O.}$.

5.3 IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL

Implementar el control híbrido en tiempo real, implica verificar que todos los subsistemas del sistema mecatrónico Pendubot funcionen e interactúen correctamente, finalmente se realiza la ejecución del programa de control desarrollado en LabVIEW. Se desarrollaron programas independientes para cada punto de operación. Durante la implementación del sistema real, las ganancias de los compensadores PD provenientes de simulación, no presentaron resultados satisfactorios, debido a esto requirió una nueva sintonización de las ganancias de los compensadores PD, la nueva sintonización fue a partir de los valores de simulación. También se modificaron los valores que condicionan el bloque de control "Switch", debido a que los valores $C_1^{P.O.}$ y $C_2^{P.O.}$ iniciales, no generan que el comportamiento del Pendubot sea repetible de forma confiable, lo cual requirió que los valores de las condiciones de conmutación sean específicos para cada punto de operación, y menores a los planteados en la simulaciones.

Se presentaron también algunos inconvenientes en el algoritmo de lectura de velocidades, el algoritmo inicial presentó errores asociados a ruido y errores numéricos, dicho algoritmo fue a partir de aproximación por diferencias finitas como el mostrado en la expresión (5.10).

$$x_{3,4}(k) = \frac{x_{1,2}(k) - x_{1,2}(k - 1)}{\Delta t} \quad (5.10)$$

Fabricantes como National Instruments recomiendan emplear tiempos mas prolongados, como mejora del algoritmo para lectura de velocidades, pero esta solución tampoco fue satisfactoria, como resultado se obtuvieron velocidades con el mismo valor para 2 ó 3 procesos de iteración del programa de control. Se realizaron entonces, pruebas con el promedio de valores previos de velocidad, con la finalidad

de disminuir la existencia del ruido, se probaron con 1, 2, y 3, siendo finalmente el cálculo de la velocidad establecido para 2 valores previos, resultando el algoritmo de lectura de velocidad adicional a la expresión (5.10), la expresión (5.11).

$$x_{3,4}(k) = \frac{x_{3,4}(k) + x_{3,4}(k-1) + x_{3,4}(k-2)}{3} \quad (5.11)$$

Finalmente se presentan los resultados de la implementación del control híbrido para cada punto de operación, las condiciones de conmutación y las ganancias de los compensadores PD. La figura 5.6 muestra los resultados de la implementación del control híbrido para la posición superior y el comparativo con la simulación respectiva.

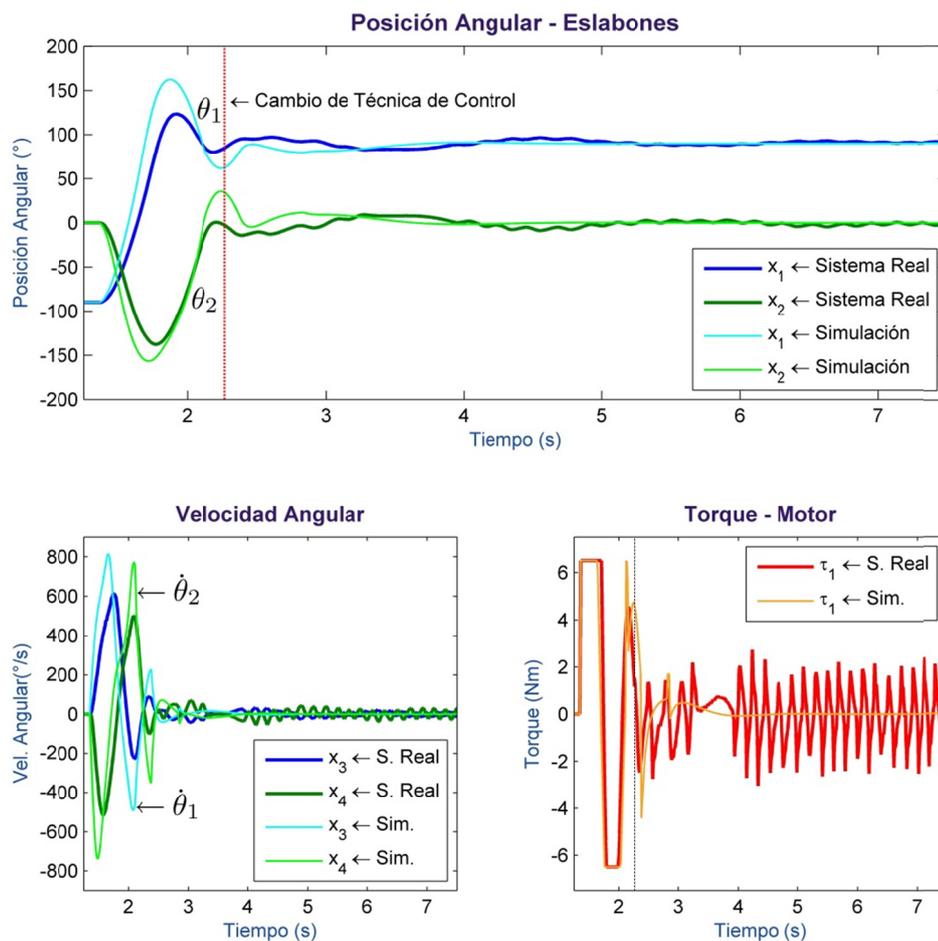


Figura 5.6 Control híbrido de la Posición Superior, comparado con la simulación.

Las condiciones de conmutación se definieron como muestra la expresión:

$$\begin{aligned} C_1^{PS} &= 5.5^\circ \\ C_2^{PS} &= 7.5^\circ \end{aligned} \quad (5.12)$$

Los valores de ganancias del compensador PD, luego de ser sintonizado heurísticamente fueron: $K_P = 98.5$ y $K_D = 5.75$.

Los resultados de la implementación del control híbrido para la posición inferior se muestran en la figura 5.7.

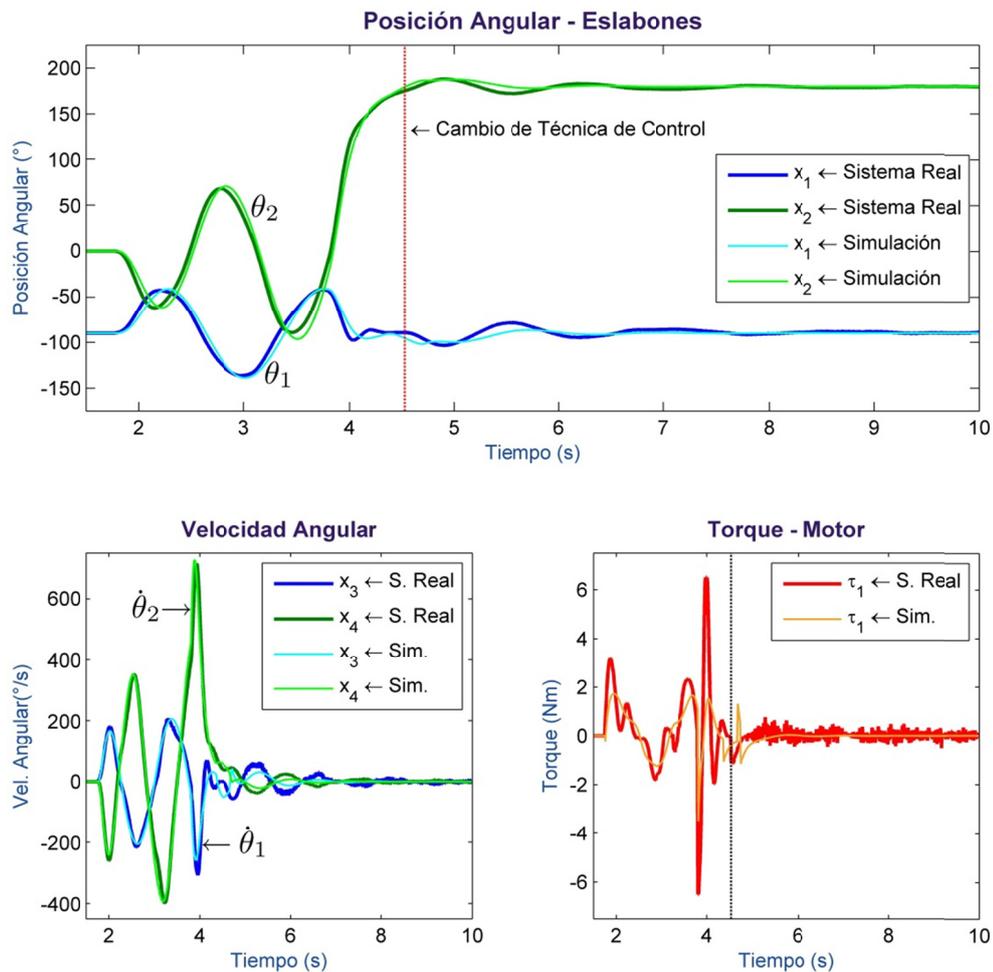


Figura 5.7 Control híbrido de la Posición Inferior, comparado con la simulación respectiva.

Las condiciones de conmutación para este punto de operación (posición inferior) se definieron de acuerdo a la expresión 5.13.

$$\begin{aligned}C_1^{PI} &= 5.5^\circ \\C_2^{PI} &= 5^\circ\end{aligned}\tag{5.13}$$

Los valores de ganancias del compensador PD, luego de ser sintonizados mediante prueba y error, fueron: $K_p = 99.75$ y $K_D = 10.5$.

Los resultados para ambos puntos de operación, muestran que las respuestas de desempeño del Pendubot, se aproximan a los resultados provenientes de las simulaciones respectivas, mostrando el correcto funcionamiento del control híbrido implementado, a pesar de la diferencia en los parámetros del control de balanceo (ganancias del compensador PD), lo cual se refleja en la señales de torque, donde se aprecia un mayor requerimiento de torque o par en el sistema real.

Referido a la implementación del control, se sugiere que en trabajos futuros, estos se desarrollen utilizando alternativas como DSPs, u otras alternativas de procesamiento, que permitan independizar el sistema de control de la computadora, y que ésta sea únicamente para monitoreo.

Se recomienda también a futuro el desarrollo de diversas técnicas de control como redes neuronales, lógica difusa, manejo de trayectorias y demás, a fin de profundizar en el desarrollo e investigación de control de sistemas no lineales.

CONCLUSIONES

- El desarrollo e implementación del control no lineal híbrido permite establecer la mejor forma de seleccionar una técnica de control, dependiendo del estado del sistema, más aun cuando es un sistema de tipo subactuado como el Pendubot.
- El control de sistemas no lineales requiere que la descripción y el modelamiento de los mismos, sean lo mas precisos posibles, y que estos modelos sean verificables, de lo contrario las técnicas de control desarrolladas en simulación no podrán ser comprobadas en un sistema real.
- Las estructuras de control fueron desarrolladas para permitir implementar otras técnicas de control, en los diferentes niveles de control, de forma tal que únicamente se cambie o adicionen las leyes de control, ya que todo lo concerniente al procesamiento de señales e interacción de los subsistemas del sistema mecatrónico Pendubot, se encuentran desarrollados y funcionales.
- Realizar el diseño e implementación del sistema mecatrónico Pendubot, de acuerdo al proceso de diseño mecatrónico, significó comprobar y aplicar una metodología de integración que busca desarrollar un diseño óptimo.

- La existencia del sistema mecatrónico Pendubot, permitirá implementar diferentes técnicas de control no lineal y fomentar la investigación de sistemas no lineales, no solamente de forma teórica sino con aplicación a sistemas físicos reales, lo cual es importante en el proceso formativo de futuros ingenieros mecatrónicos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Khalil H. K., *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Prentice Hall, 2002.
- [2] Ogata K., *Modern Control Engineering*, 5th Edition, Prentice Hall, 2010.
- [3] Bailey R., *Trajectory Exploration and Maneuver Regulation of the Pendubot*, Thesis for Doctor of Philosophy at University of Colorado, United States, 2012.
- [4] Murad M. Al-Shibli, *Direct Adaptive Control for the Underactuated Mechatronic System Using Fuzzy System and Neural Network: Case Pendubot*, Thesis for Degree of Master of Applied Science at Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, 2002.
- [5] Xiao Qing Ma, *Fuzzy Control for an Under-Actuated Robotic Manipulator: Pendubot*, Thesis for Degree of Master of Applied Science at Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, 2001.
- [6] Bailey R. and Hauser J., *On the Periodically Driven Inverted Pendulum*, In 48th IEEE International Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shangai, P.R. China, December 16-18, 2009.
- [7] Block D. J., *Mechanical Design & Control of the Pendubot*, SAE Earthmoving Industry Conference, Peoria, IL, April 4-5, 1995.
- [8] De Luca A., Iannitti S., Mattone R. and Oriolo G., *Underactuated Manipulators: Control Properties and Techniques*, Machine Intelligence and Robotic Control, vol. 4, no 03, pp. 113-125, 2002.
- [9] De Luca A. and Oriolo G., *Trajectory Planning and Control for Planar Robots with Passive Last Joint*, International Journal of Robotics Research, vol. 21 no. 5-6, pp. 575-590, 2002.

- [10] Spong M. W. and Block Daniel J., *The Pendubot: A Mechatronic System for Control Research and Education*. In 34th IEEE International Conference on Decision and Control, New Orleans, pp. 555-557, 1995.
- [11] Spong M. W., *Underactuated Mechanical Systems*, Control Problems in Robotics and Automation, B. Siciliano and K.P. Valavanis (Eds), Lecture Notes in Control and Information Sciences 230, Springer-Verlag, London, UK, 1997.
- [12] Zhang M. and Tarn T.J., *Hybrid Control for the Pendubot*, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 7(1):79-86, 2002.

APÉNDICE

APÉNDICE A

SIMULACIÓN DEL SISTEMA PENDUBOT EN MATLAB

La simulación del Sistema Pendubot se realizó mediante la herramienta computacional Matlab, a continuación se muestra el código empleado.

```

%% SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL - PENDUBOT
%% Control para la "POSICIÓN INFERIOR"
close all
clear all
clc
%% Simulación del Sistema Pendubot
% Constantes Numéricas del Modelo Dinámico obtenido en la
IDENTIFICACIÓN DE
% PARÁMETROS DEL SISTEMA PENDUBOT
g=9.81; % Gravedad 9.81 m/s^2
K_SPbEx=[
    0.082701126916495
    0.028329558483285
    0.018040600444873
    0.266399698956694
    0.058237347002932
    0.168005072189086
    0.003239450103702
];
K_1PbN=K_SPbEx(1);
K_2PbN=K_SPbEx(2);
K_3PbN=K_SPbEx(3);
K_4PbN=K_SPbEx(4);
K_5PbN=K_SPbEx(5);
K_6PbN=K_SPbEx(6);
K_7PbN=K_SPbEx(7);
% -----
%% VALORES DESEADOS - Posición a controlar en el Sistema
Pendubot
x1d_s=-90*pi/180; % Posición Angular deseada Eslabón 01
x2d_s=180*pi/180; % Posición Angular deseada Eslabón 02
x1d_d_s=0; % Velocidad Angular deseada Eslabón 01
x1d_dd_s=0; % Aceleración Angular deseada Eslabón 01
% -----

```

```

% Trayectoria de Referencia Inicial para el eslabón 01:
% ->  $0.517\pi/2\sin(2\pi(t-t_1))-\pi/2$ 
    id_ts=12.85/1000;
% En ms(miliseundos) Intervalo de tiempo entre muestras
    % 12.85 ms es el valor promedio proveniente
    % de las pruebas reales.
N_In_S=1; % Numero de muestra inicial de Respuesta del Sistema
N_Fn_SP=20/id_ts; % 20 segundos -> Tiempo de Simulación Total
N_Fn_S=round(N_Fn_SP);
for i=1:N_Fn_S;
    ts_SP(i+1)=(i)*id_ts;
end
for i=1:N_Fn_S;
    x1_s(i)=-pi/2;
    x2_s(i)=0;
    x3_s(i)=0;
    x4_s(i)=0;
% Establecimiento de la longitud (Tamaño del Vector) de la
% trayectoria de referencia similar al de las variables de estado.
    x_1_TRef(i)=-pi/2;
end
N_det_FP=10/id_ts; % 10 segundos -> Máximo tiempo de espera,
    % acercamiento a configuraciones estables
N_det_F=round(N_det_FP);
%-----%
% Trayectoria de Referencia
% Parámetros de la Trayectoria de Referencia:
%  $0.517\pi/2\sin(2\pi/T(t-t_1))-\pi/2$ 
    t_1_TRef=0;
% Tiempo inicio de acción de la trayectoria (segundos)
    N_I_TRef=1;
% Número de muestra correspondiente al tiempo de inicio.
% Tiempo de Acción de la Trayectoria
    T_Ac_TRef=t_1_TRef+2.05; % en segundos.
    N_Ac_TRefP=T_Ac_TRef/id_ts;
    N_Ac_TRef=round(N_Ac_TRefP); % Posición del instante de término
    % de acción de Trayectoria de
    % Referencia

    for i=N_I_TRef:N_Ac_TRef;
        x_1_TRef(i)=0.517*pi/2*sin(2*pi*(ts_SP(i)-t_1_TRef)/1.5)-pi/2;
    end
% -----%
for i=N_In_S:N_Fn_S;
%% Reconocimiento de la Trayectoria de Referencia Inicial
x1d_s=x_1_TRef(i);
%% Definición de dinámica del Sistema Pendubot
D_PbS=[ K_1PbN+K_2PbN+2*K_3PbN*cos(x2_s(i)) ,
    K_2PbN+K_3PbN*cos(x2_s(i));
    K_2PbN+K_3PbN*cos(x2_s(i)) , K_2PbN ];
C_PbS=[ -K_3PbN*sin(x2_s(i))*x4_s(i) , -K_3PbN*sin(x2_s(i))*x4_s(i)-
    K_3PbN*sin(x2_s(i))*x3_s(i);
    K_3PbN*sin(x2_s(i))*x3_s(i) , 0 ];
G_PbS=[ K_4PbN*g*cos(x1_s(i))+K_5PbN*g*cos(x1_s(i)+x2_s(i));
    K_5PbN*g*cos(x1_s(i)+x2_s(i)) ];
FV_PbS=[ K_6PbN*x3_s(i);
    K_7PbN*x4_s(i) ];
d_q_PbS=[x3_s(i);x4_s(i)]; % Primera Derivada - Velocidad Angular

```

```

%% Estrategia y Ley de Control de Posición
%-----
% Selección de Tipo de Pruebas
% STP_RSP=1; % Cuando únicamente se prueba la respuesta del Sistema
Pendubot
%           % a un controlador PD.
% STP_RSP=2; % Cuando se prueba la respuesta del Sistema Pendubot al
Control
%           % Total (Balanceo + Estabilización).
STP_RSP=2;
%-----
% Selección de Tipo de Controlador (SWITCH)
% STC_RSP=1; % Control de Balanceo PD / Control de Respuesta PD
Prueba
% STC_RSP=2; % Control de Estabilización LQR.
if STP_RSP==1;
    STC_RSP=1;
end
if STP_RSP==2;
    CC_1=abs(x1_s(i)-x1d_s);
    CC_2=abs(x2_s(i)-x2d_s);
    STC_RSP=1;
    if CC_1<=0.2;
        if CC_2<=0.2;
            STC_RSP=2;
        end
    end
end
end
%-----
% Control de Balanceo
if STC_RSP==1
% Linealización de la Dinámica del Pendubot
% Parámetros simplificados:
d_11c_s=D_PbS(1,1)-(D_PbS(1,2)*D_PbS(2,1))/D_PbS(2,2);
c_11c_s=C_PbS(1,1)-(D_PbS(1,2)*C_PbS(2,1))/D_PbS(2,2);
c_12c_s=C_PbS(1,2);
phi_11c_s=G_PbS(1,1)-(D_PbS(1,2)*G_PbS(2,1))/D_PbS(2,2);
fr_11c_s=FV_PbS(1,1)-(D_PbS(1,2)*FV_PbS(2,1))/D_PbS(2,2);
% Acción del Controlador
    if (i<N_det_F)
        % Definición del Controlador PD
        Kp_s=99.75;
        Kd_s=12;
        v1_s=x1d_dd_s+Kd_s*(x1d_d_s-x3_s(i))+Kp_s*(x1d_s-x1_s(i));
        % Definición de la Señal de Control al Sistema Pendubot (Torque
        % Computado)
        u_p_s=d_11c_s*v1_s+c_11c_s*x3_s(i)+c_12c_s*x4_s(i)+phi_11c_s+fr_11c_
s;
    end
    if (i>N_det_F)
        v1_s=0;
        u_p_s=0;
    end
end
end
%-----

```

```

% Control de Estabilización
VP_MCE(i+1)=0;
if STC_RSP==2
    VP_MCE(i)=1; % Detección del instante de acción del Control de
                % Estabilización
    Xpd_s=[-pi/2;pi;0;0]; % Posiciones Deseadas
    Xp_s=[x1_s(i);x2_s(i);x3_s(i);x4_s(i)];
    % Ganancias del Controlador K (LQR), provenientes del diseño del
    % regulador LQR.
    K_PEXC=[
    11.688671687008625
    17.273544025295671
    2.086461620632877
    3.712903519584740
    ];
    K1_LQR=K_PEXC(1);
    K2_LQR=K_PEXC(2);
    K3_LQR=K_PEXC(3);
    K4_LQR=K_PEXC(4);
    K_LQR_PS=[K1_LQR K2_LQR K3_LQR K4_LQR];
    % State-Feedback Convergencia a los valores deseados.
    DXp_s=Xp_s-Xpd_s;
    u_p_s=-K_LQR_PS*DXp_s; % Control LQR.
end
%% Saturación de Señal de Control - Torque de Entrada al Sistema
Pendubot
if u_p_s>6.5;
    u_p_s=6.5;
end
if u_p_s<-6.5;
    u_p_s=-6.5;
end
u_s=[u_p_s;0]; % Torque de Entrada al Sistema.
T_s(i+1)=u_p_s; % Torque Señal de Control (Gráfica)
%% Respuesta del Sistema Pendubot
fxp_p1_s=-D_PbS\C_PbS*d_q_PbS-D_PbS\G_PbS-D_PbS\FV_PbS+D_PbS\u_s;
x1_s(i+1)=x3_s(i)*id_ts+x1_s(i);
x2_s(i+1)=x4_s(i)*id_ts+x2_s(i);
x3_s(i+1)=fxp_p1_s(1)*id_ts+x3_s(i);
x4_s(i+1)=fxp_p1_s(2)*id_ts+x4_s(i);
end
%% GRÁFICOS
% Simulación de POSICIÓN INFERIOR
fig1=figure;
set(fig1,'Color',[0.98 0.99 0.98],'Name','Simulación - Posición
Inferior');
scrsz_P=get(0,'ScreenSize');
set(fig1,'Position',[scrsz_P(3)/3 scrsz_P(4)/5 scrsz_P(3)/2.75
scrsz_P(4)/1.75])
% Gráfico de Posiciones
X_tI_g=0; % Tiempo mínimo para graficar
X_tS_g=7.5; % Tiempo máximo para graficar
subplot(2,2,1:2)
plot(ts_SP,x1_s*180/pi,'b','Linewidth',1.5)
hold on
plot(ts_SP(1:length(x2_s)),x2_s*180/pi,'r','Linewidth',1.5)
plot([2.99405 2.99405],[-200 225],'-k','Linewidth',0.5)
axis([X_tI_g X_tS_g -175 225])

```

```

title('Posición Angular - Eslabones','FontSize',12,'Color',[0.2 0.1
0.4],'FontWeight','bold');
xlabel('Tiempo (s)','FontSize',10,'Color',[0.1 0.3 0.6])
ylabel('Posición Angular (°)','FontSize',10,'Color',[0.1 0.3 0.6])
text(1.3,36.36,'subplot(2,2,1:2)','fontsize',12,
'interpreter','latex','string',...
['$$ \leftarrow \theta_2 $$']);
text(1.485,-121.4,'subplot(2,2,1:2)','fontsize',12,
'interpreter','latex','string',...
['$$ \leftarrow \theta_1 $$']);
text(2.99405,140,' \leftarrow Cambio de Técnica de Control');
PT_leg01=legend('x_1','x_2');
% Gráfico de Velocidades
subplot(2,2,3)
plot(ts_SP(1:length(x3_s)),x3_s*180/pi,'c','Linewidth',1.5)
hold on
plot(ts_SP(1:length(x4_s)),x4_s*180/pi,'g','Linewidth',1.5)
axis([X_tI_g X_tS_g -450 750])
title('Velocidad Angular','FontSize',11,'Color',[0.2 0.1
0.4],'FontWeight','bold');
xlabel('Tiempo (s)','FontSize',10,'Color',[0.1 0.3 0.6])
ylabel('Vel. Angular(°/s)','FontSize',10,'Color',[0.1 0.3 0.6])
text(2.25,-199.6,'subplot(2,2,1:2)','fontsize',12,
'interpreter','latex','string',...
['$$ \leftarrow \dot{\theta}_1 $$']);
text(2.25,452.8,'subplot(2,2,1:2)','fontsize',12,
'interpreter','latex','string',...
['$$ \leftarrow \dot{\theta}_2 $$']);
VT_leg01=legend('x_3','x_4');
% Gráfico de Torque entregado al Pendubot
subplot(2,2,4)
plot(ts_SP(1:length(T_s)),T_s,'Color',[0.9 0.5
0.1],'Linewidth',1.5);
hold on
plot([2.99405 2.99405],[-200 200],'-r','Linewidth',0.5)
axis([X_tI_g X_tS_g -5 5])
title('Torque - Motor','FontSize',11,'Color',[0.2 0.1
0.4],'FontWeight','bold');
xlabel('Tiempo (s)','FontSize',10,'Color',[0.1 0.3 0.6])
ylabel('Torque (Nm)','FontSize',10,'Color',[0.1 0.3 0.6])
TT_leg01=legend('\tau_1');

```

APÉNDICE B

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA TARJETA DE ADQUISICIÓN DE DATOS PCIe 6363

La adquisición y procesamiento de señales provenientes de los encoders, se realizó mediante la tarjeta de adquisición de datos PCIe 6363, del fabricante National Instruments. La figura A.1 muestra los pines de la tarjeta PCIe 6363.

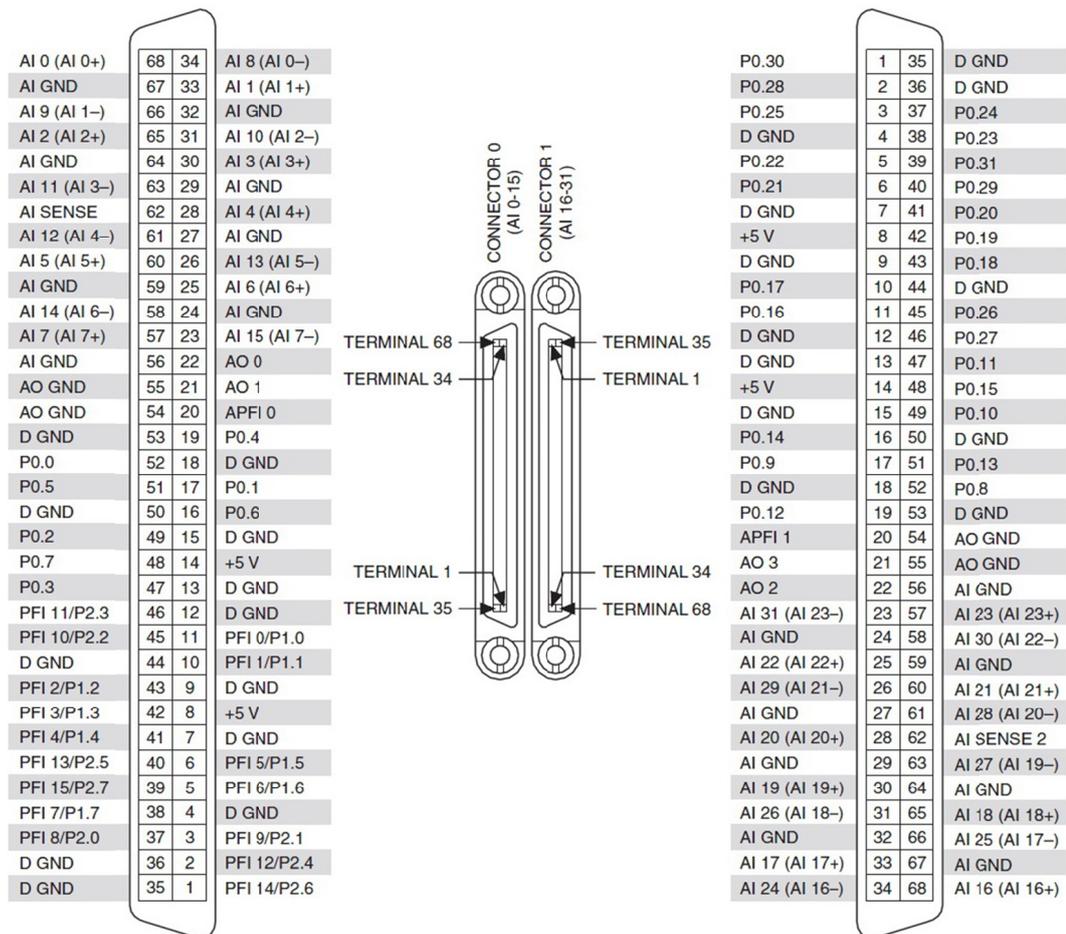


Figura B.1 Pines DAQ PCIe 6363.

B.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES DIGITALES I/O/PFI

Las características generales se describen a continuación:

Número de canales.....	48 total, 32(P0.<0..7>), 16(PFI<0..7>/P1,PFI <8..15>/P2)
Referencia a tierra.....	D GND
Control de dirección.....	Individual y programable para cada canal como entrada o salida.
Resistencia pull-down.....	50 k Ω típico. 20 k Ω mínimo.
Voltaje de protección de entrada.....	\pm 20 V entre 2 pines.

B.2 CONTADORES/TEMPORIZADORES DE PROPÓSITO GENERAL

Las características referentes a la lectura de posiciones de los encoder se describen a continuación:

Número de contadores/temporizadores...	4
Resolución.....	32
Medidas de contador.....	Contador de pulsos, ancho de pulso, semi-periodo, separación entre pulsos, detección de pulsos.
Medidas de posición.....	X1, X2, X4 cuadratura de encoders con uso del canal Z; medidas de 2 pulsos.

Aplicaciones de salida.....	Pulsos, tren dinámico de pulsos, generador de frecuencias, generador de tiempos de muestreo.
Relojes internos.....	100MHz, 210MHz, 100KHz
Reloj externo.....	0 MHz a 25 MHz
Precisión de reloj.....	50 ppm
FIFO.....	127 muestras por contador

Mayor detalle acerca de la tarjeta DAQ PCIe 6363, en la página web del fabricante: www.ni.com/manuals

APÉNDICE C

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA TARJETA DE CONTROL

EPOS2 50/5

La tarjeta electrónica de potencia, es fabricada por la empresa Maxon Motor y posee las siguientes características:

C.1 INFORMACIÓN ELÉCTRICA

Se describen las características más importantes únicamente.

Tabla A.1 Información eléctrica de la tarjeta EPOS2 50/5

Valores Nominales	
Voltaje de alimentación nominal V_{CC}	11...50 VDC
Voltaje de alimentación absoluto mínimo	10 VDC
Voltaje de alimentación absoluto máximo	54 VDC
Voltaje de salida máximo	$0.9V_{CC}$
Corriente de salida máxima I_{max}	10A
Corriente continua I_{cont}	5A
Frecuencia de oscilación	50 kHz
Eficiencia máxima	94%
Entradas	
Señales de encoder	A, A \, B, B \, I, I \ (máx. 5MHz)
Salidas de Voltaje	
Voltaje de alimentación a encoder	+5 VDC ($I_L < 100mA$)
Interfaces	
USB 2.0	Máx. 12Mbps/s

C.2 INFORMACIÓN MECÁNICA

Tabla B.2 Información mecánica de la tarjeta EPOS2 50/5

Dimensiones	
Peso	Aproximadamente 240g.
Dimensiones (Largo x Ancho x Altura)	120 x 93.5 x 27 mm
Montaje	Tornillos M3

La figura B.1 muestra las dimensiones de la tarjeta electrónica EPOS2 50/5.

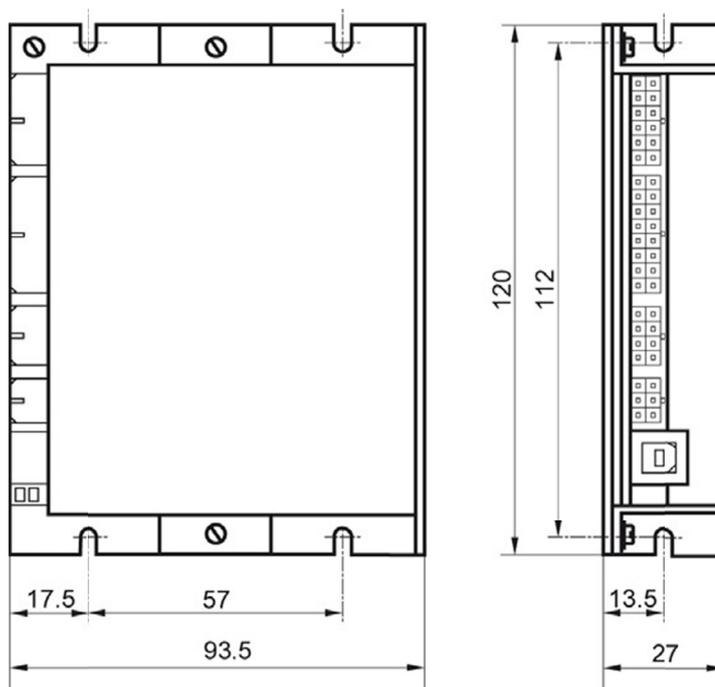


Figura C.1 Dimensiones de la tarjeta EPOS2 50/5.

C.3 CONDICIONES AMBIENTALES DE OPERACIÓN

Tabla B.3 Información de condiciones ambientales de operación para la tarjeta EPOS2 50/5

Temperatura (operación / almacenamiento)	-10...+45°C / -40...+85°C
Humedad	20...80% (Sin condensación)

C.4 CONEXIONES

El diagrama de conexiones se muestra en la figura B.2

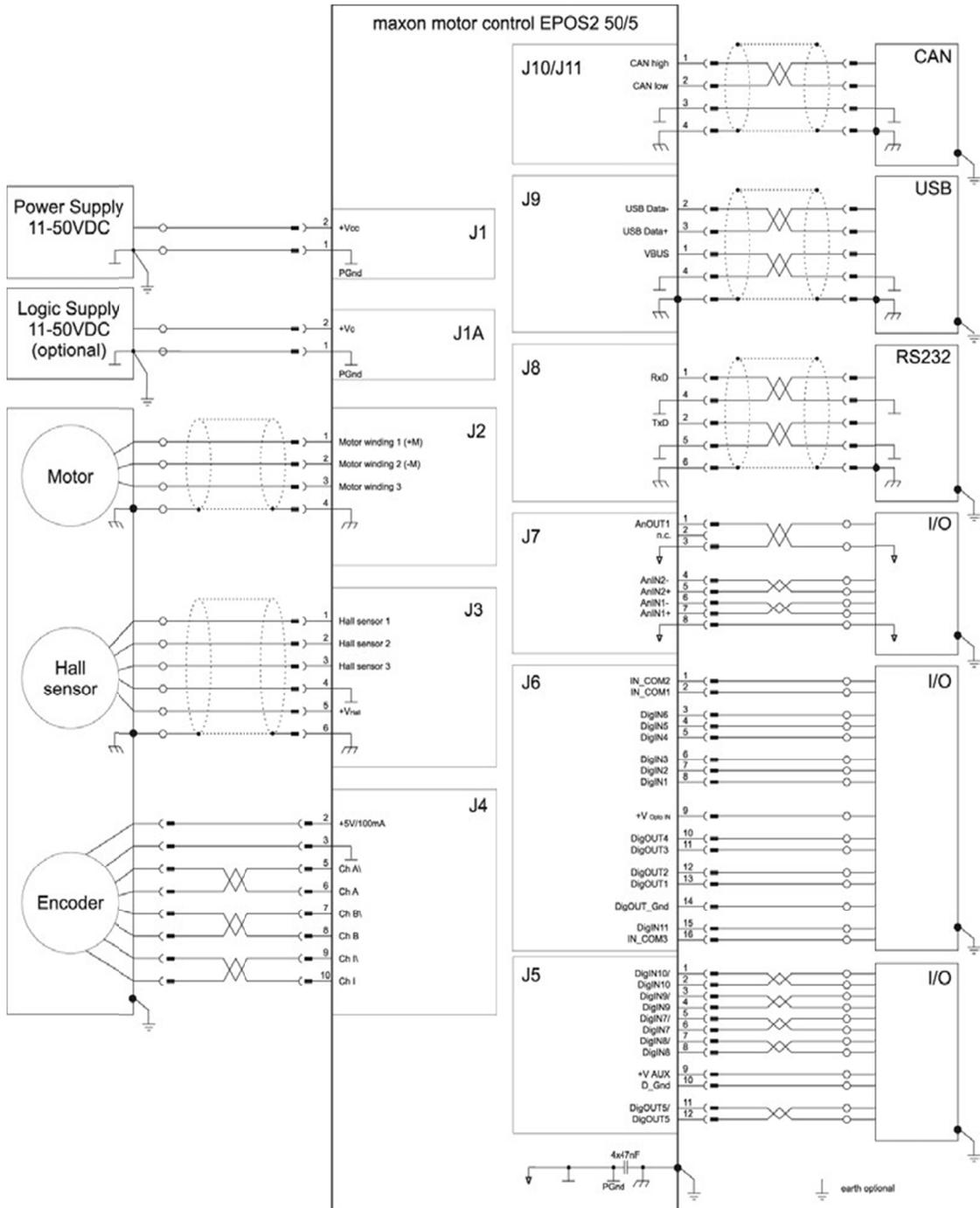


Figura C.2 Diagrama de conexiones de la tarjeta EPOS2 50/5.

Tabla B.4 Cables requeridos para la conexión de la tarjeta EPOS2 50/5

Cable		Conexión	
Designación	Código	De:	A:
EPOS Cable de Poder	275829	J1	Fuente de Alimentación +30V
EPOS Cable de Motor	275851	J2	Terminales del Motor
EPOS Cable de Encoder	275934	J4	Encoder del Motor
EPOS2 Cable USB-COM	350392	J9	Puerto USB de computadora

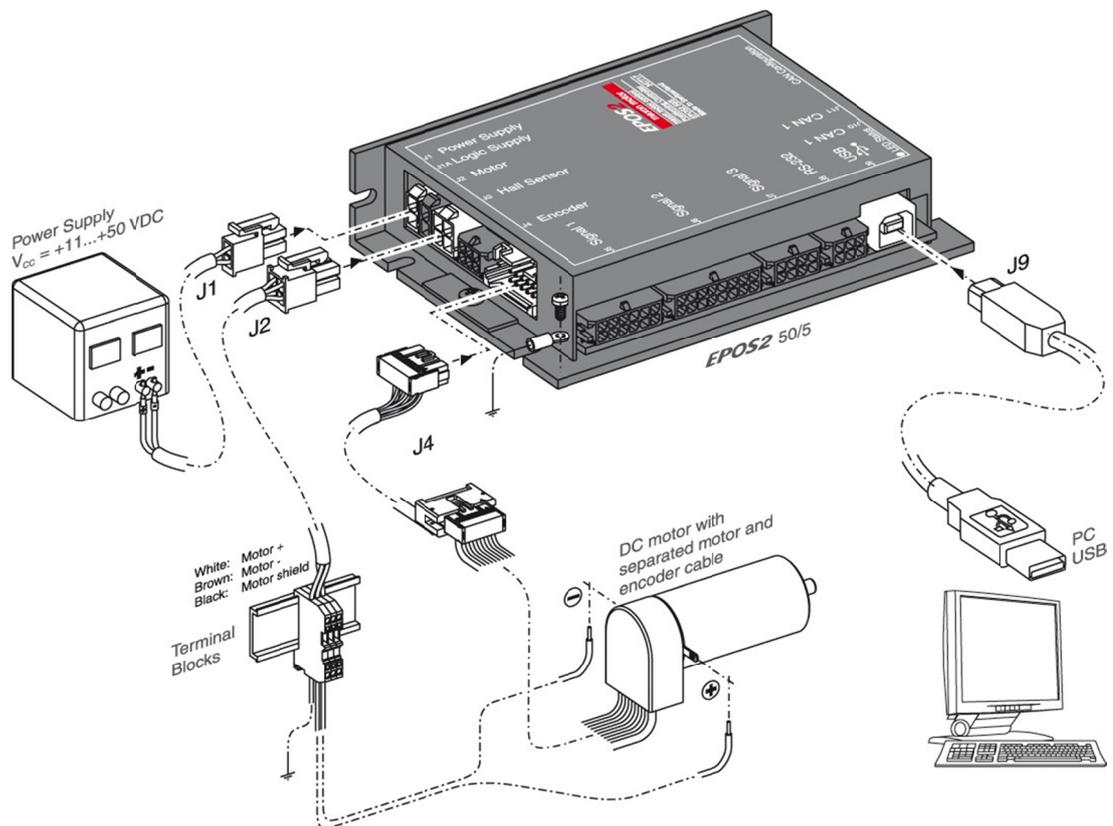


Figura C.3 Cables para la conexión de la tarjeta EPOS2 50/5.

Mayor detalle acerca de la tarjeta electrónica EPOS2 50/5, en la página web del fabricante: www.maxonmotor.com