

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS**



TESIS

**“INTERACCIÓN ENTRE DOS SOLITONES DEL FLUJO NEUTRÓNICO
TÉRMICO EN UN REACTOR TÉRMICO UNIDIMENSIONAL INFINITO”**

**PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON
MENCIÓN EN ENERGÍA NUCLEAR**

ELABORADO POR:

MANUEL ROBERTO VASQUEZ CASTELLANOS

ASESOR:

Dr. ROSENDO OCHOA JIMÉNEZ

LIMA - PERÚ

2024

DEDICADO A

Mis padres, a mi padre Roberto por haber dado todo de si para convertirme en un profesional, a mi madre Rosario por ser mi primera maestra e inculcarme los valores y la fortaleza para conseguir mis metas.

Mis hermanos, Joel y Nathalie por siempre ser un apoyo en mi vida

Mis sobrinos, Milagritos, Valeria y Sebastian por alegrar mi vida cada dia.

A Dios, por haberme dado salud y sabiduría a lo largo de mi vida

AGRADECIMIENTO

MI TOTAL AGRADECIMIENTO AL DR. ROSENDO OCHOA JIMENEZ POR SU ASESORAMIENTO, PACIENCIA, AMISTAD, CONFIANZA Y CONCEJOS EN EL DESARROLLO DE ESTA TESIS. SIN SUS RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES NO HUBIERA SIDO POSIBLE LA CULMINACIÓN DE ESTA TESIS.

Resumen

Los reactores nucleares han jugado un papel importante en las diferentes áreas de la sociedad ya sea en la parte energética, medica, militar, etc; en términos generales los reactores nucleares se pueden dividir en reactores de potencia y de investigación, a medida que la ciencia y la ingeniería avanzan los modelos de los reactores nucleares sea han hecho más óptimos para aprovechar de la manera más eficiente la energía nuclear de las fisiones que ocurren dentro del núcleo del reactor y a la vez hacer reactores más seguros durante su operación. Uno de los modelos de reactores nucleares planteados a finales de la década de los 90 el cual une las bases de un reactor simple con una teoría de dinámica no lineal es el modelo del Reactor Solitón (Seifritz, 1997).

En este modelo debido a los procesos de fisión se obtiene una onda de quemado el cual es impulsada autocatalíticamente, lo que hace especial a este modelo es que sus distribuciones espaciales que caracteriza a un reactor como son: el flujo de neutrones, densidad de potencia y densidad de las partículas asociadas tienen características de un onda solitón. La teoría de solitones en las épocas actuales han tomado un gran interés ya que han servido como modelos de teorías no lineales que proponen nuevos enfoques para explicar la realidad. Las tres características que definen a un solitón son las siguientes: son ondas cuya amplitud es proporcional a la velocidad, son ondas que no obedecen el principio de superposición y la característica principal es que son ondas estables que pueden viajar sin cambiar su forma y su energía.

En este trabajo de investigación se trabajara con un reactor térmico unidimensional de dimensión infinita en el cual se puede demostrar aproximadamente la existencia de una solución solitón para el flujo de neutrones al desarrollar la ecuación de difusión del reactor. En diferentes modelos en donde existe una solución solitón es posible encontrar la interacción de dos solitones del modelo que forman un estado ligado, el objetivo de este trabajo sera hallar la interacción de dos solitones para el flujo de neutrones que forman un estado ligado, para ello sera necesario encontrar la Densidad Lagrangiana que caracteriza a la ecuación de difusión y a partir de esta Densidad Lagrangiana encontrar su Tensor de Energía - Momento el cual nos ayudara a encontrar la interacción entre los solitones del modelo.

Palabras claves: Reactor nuclear, solitones, ecuación de difusión, densidad lagrangiana, tensor energia - momento.

Tabla de contenidos

Dedicatoria	II
Agradecimiento	III
Resumen	IV
Tabla de contenidos	V
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	IX
I. Introducción	1
1.1 Planteamiento y formulación del problema	3
1.2 Estado del arte	3
1.3 Justificación	6
1.4 Hipótesis	6
1.5 Objetivos	7
1.5.1 Objetivo General	7
1.5.2 Objetivos Específicos	7
II. Marco Teórico	8
2.1 Interacción de neutrones con la materia	8
2.1.1 Sección eficaz microscópica y macroscópica	10
2.2 Fisión Nuclear	13
2.2.1 Factor de multiplicación infinito y efectivo	14
2.3 Difusión de Neutrones	16
2.3.1 La ley de Fick	16
2.4 Teoría de reactores nucleares	19
2.4.1 Reactores nucleares térmicos	21
2.4.2 Ecuación de continuidad	21
2.4.3 La ecuación del reactor	24
2.5 Introducción a la teoría de solitones	25

2.5.1	El Kink	27
III.	El solitón neutrónico térmico	35
3.1	Ecuación de difusión para el flujo de neutrones térmicos	35
3.2	Planteamiento de la solución solitón	37
3.3	Constante de multiplicación infinita en un modelo de reactor térmico solitón	39
3.4	Solución numérica de la ecuación de difusión	44
3.5	Solución solitón aproximada de la ecuación de difusión	45
IV.	La ecuación de Sine - Gordon	53
4.1	Modelo matemático	53
4.2	Formulación Lagrangiana	55
4.2.1	La densidad Lagrangiana	56
4.2.2	El tensor energía - momento	62
V.	Interacción solitónica en un reactor térmico unidimensional	65
	Conclusiones	78
	Referencias	81
	APENDICE	85

Índice de figuras

Figura 1:	Interacción neutrón - materia proceso de dispersión elástica.	9
Figura 2:	Interacción neutrón - materia proceso de dispersión inelástica.	9
Figura 3:	Interacción neutrón - materia proceso de absorción (ejemplo átomo de ^{10}B).	10
Figura 4:	Representación gráfica del proceso de dispersión de un haz de partículas.	11
Figura 5:	Modelo matemático empleado para encontrar la sección eficaz macroscópica de un material de espesor X	12
Figura 6:	Modelo matemático para encontrar la Ley de Fick	17
Figura 7:	Partes de una onda solitaria, las ondas azules son las denominadas ondas portadoras y la onda roja es la onda envolvente.	26
Figura 8:	Gráfica de la función potencial de un modelo de la teoría de campos de (1+1) dimensiones.	28
Figura 9:	Gráfica de solución tipo Kink para un modelo de la teoría de campos de (1+1) dimensiones.	30
Figura 10:	Gráfica de solución tipo Antikink para un modelo de la teoría de campos de (1+1) dimensiones.	31
Figura 11:	Gráfica de la densidad de energía de una solución tipo Kink.	32
Figura 12:	Gráfica de la densidad de energía de una solución tipo Kink en un instante de tiempo $t > 0$, luego de haber sufrido una transformación de Lorentz.	33
Figura 13:	Gráfica de la constante de multiplicación infinita (K_∞) en función de la fluencia F	43
Figura 14:	Gráfica de la función adimensional $\Pi(F)$ en función de la fluencia F	44
Figura 15:	Gráfica de la solución numérica de la ecuación de difusión con C.I $F \rightarrow 0, F' = 0$	45
Figura 16:	Grafica de la fluencia F en función de la variable $g = (x - vt)/D$	49
Figura 17:	Gráfica de la forma de la solución solitón para el flujo de neutrones ϕ	51
Figura 18:	Comparación de gráficas de la solución numérica y la solución aproximada	52

Figura 19: Configuración espacial entre dos Kinks para encontrar la energía de interacción entre ellos.	68
Figura 20: Gráfica de la fuerza de interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos, para un análisis cuasiestático.	73
Figura 21: Gráfica de la energía de interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos, para un análisis cuasiestático.	76

Índice de tablas

1	Clasificación de los neutrones con respecto a la energía que poseen.	21
2	Secciones eficaces de absorción de neutrones térmicos para los productos de fisión	41

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad la humanidad está en la búsqueda de nuevas formas de generar energía para satisfacer sus múltiples necesidades, ya sea a través de fuentes de energía renovables o no renovables pero siempre teniendo en cuenta los aspectos sociales, económicos y ambientales. En especial en estas últimas décadas el problema ambiental ha cobrado una gran relevancia en la forma de generar energía. Los principales causantes de este problema es el quemado de combustibles fósiles que son fuentes de energía no renovables, es por esta causa que existe la necesidad de buscar formas de generar energía que reduzca el problema ambiental. Una alternativa para minimizar dicho problema es el uso de combustibles nucleares que son fuentes de energía no renovables, un combustible nuclear puede liberar energía espontáneamente o artificialmente a través de reacciones nucleares, los desechos que generan estas reacciones nucleares puede ser reutilizados o ser tratados adecuadamente para que no generen problemas ambientales. La estructura en los cuales se lleva, se controla y se optimiza estas reacciones nucleares son los reactores nucleares, esto conlleva a la constante mejora de diseños de reactores nucleares que optimizan la generación de energía que se obtiene en la reacción nuclear.

Un nuevo concepto en diseño en reactores nucleares es el "Reactor Soliton" el cual esta basado en el funcionamiento de un reactor simple. En dichos reactores normales, los neutrones en la región crítica convierten el material fértil en material fisionable o también pueden reducir el envenenamiento del material fisionable el cual reduce la reactividad del material, y de esta manera emergen sucesivamente nuevas regiones críticas. Debido a dicho proceso de fisión dan como resultado una onda de quemado impulsada autocatalíticamente que se propaga por todo el reactor. La principal característica de un Reactor Solitón son sus distribuciones espaciales características mas relevantes que son: flujo de neutrones, densidad de potencia específica y las densidades de partículas asociadas, los cuales tienen características de una onda solitón.

Los solitones son fenómenos ondulatorios resultantes de modelos no lineales (ecuaciones diferenciales parciales no lineales), los cuales tienen las siguientes características: su amplitud es directamente proporcional a la velocidad, no obedecen el principio de superposición y no presentan dispersión, es decir, son ondas estables y que pueden viajar distancias muy grandes sin cambiar su forma, su amplitud y su energía.

El concepto de Reactor Solitón nos da una nueva forma cualitativa de aprovechamiento de la energía de fisión nuclear, el cual puede ser particularmente adecuada para pequeños reactores termales de agua ligera.

De acuerdo a los diferentes artículos y estudios con respecto a los Reactores Solitón se logró demostrar que el flujo de neutrones térmicos propagándose a través de materiales fértiles se asemeja mucho a una onda tipo solitón. Esta tesis tiene como objetivo encontrar la fuerza de interacción, la energía de interacción y el tipo de interacción en un caso cuasiestático de dos solitones que son las soluciones tipo solitón de la ecuación de difusión de un reactor nuclear térmico unidimensional de dimensión infinita para el flujo de neutrones. Como se corroborará en el desarrollo de esta tesis, el problema principal de este trabajo se reducirá simplemente a encontrar la interacción entre dos Kinks, donde el Kink es una solución particular que cumple con las características de un solitón, pero para llegar a ello se tendrá que hacer ciertas consideraciones como se mostrara en el desarrollo de este trabajo.

Esta tesis se ha dividido en 6 capítulos. El capítulo 1 contiene la introducción, el planteamiento del problema, el estado de arte y los avances en este tema, la justificación de la tesis, la hipótesis y los objetivos tanto general como específicos. El capítulo 2 contiene el resumen de la teoría necesaria que será usado para el desarrollo de esta tesis, como son las teorías de interacción de neutrones con la materia, fisión nuclear, difusión de neutrones, teoría de reactores nucleares y una breve introducción a la teoría de solitones especialmente en el solitón tipo Kink. En el capítulo 3 se demostrará la existencia de la solución solitón para la ecuación de difusión de un reactor neutrónico térmico unidimensional de dimensión infinita, tanto de manera analítica como numérica, y además mostrando las aproximaciones y consideraciones que hay que tener en cuenta para llegar a esta solución solitón el cual es una solución de tipo Kink.

En el capítulo 4 se desarrolla el planteamiento matemático que nos lleva a encontrar la densidad lagrangiana que caracteriza a la ecuación de difusión aproximada encontrada en el capítulo 3. En el capítulo 5 se tratará el objetivo principal de esta tesis, como en el capítulo 4 se logró encontrar una densidad lagrangiana para la ecuación de difusión aproximada, por lo tanto, esto conlleva a la construcción del tensor energía - momento del modelo, y con ayuda

de este tensor y del método planteado en el artículo *A PERTURBATIONAL APPROACH TO THE TWO-SOLITON SYSTEMS* de Karpman y Solov'ev (Karpman and Solov'ev, 1981), se podrá encontrar la interacción entre dos solitones. En el capítulo 6 se escribirán las conclusiones y perspectivas correspondientes de la tesis y después de la bibliografía se presenta un Apéndice el cual detalla los cálculos respectivos realizados en el desarrollo de la tesis.

1.1. Planteamiento y formulación del problema

Los reactores nucleares han jugado un papel importante en la vida humana como una alternativa de generar energía sin emisión de gases de efecto invernadero, y a medida que avanza la ciencia y la ingeniería los modelos de los reactores se van haciendo más óptimos. Uno de los nuevos conceptos en diseños planteados a finales de los años 90 es el reactor solitón, donde la principal característica de estos reactores es que el flujo de neutrones y otras distribuciones espaciales tienen semejanza con una onda solitón. Dichos solitones son soluciones de ecuaciones no lineales, y en la actualidad estas ecuaciones de la física - matemática han tomado gran importancia ya que han servido como modelos para nuevas teorías. Por lo tanto, como el flujo de neutrones se comporta como una onda solitón y existe estudio de interacción entre solitones en modelos no lineales, por ello planteamos la siguiente formulación ¿cómo se podría encontrar y formular dicha interacción y que tanto influiría en la energía que provee el reactor?

1.2. Estado del arte

La teoría del reactor solitón nació a finales de la década de los 90, el primero en plantear esta nueva concepción de reactor fue Walter Seifritz en su artículo *The nuclear soliton reactor* (Seifritz, 1997), en tal diseño de reactor, el flujo de neutrones en la región crítica convierte el material fértil en material fisionable o reducen el envenenamiento del material fisible y de esta manera nacen sucesivamente nuevas regiones críticas.

Por consiguiente el resultado es una onda de quemado o en inglés *burn-up wave* impulsada autocatalíticamente que se propaga por todo el volumen del reactor, lo interesante de este concepto planteado por Seifritz es que las distribuciones espaciales, características relevantes de un reactor, tienen un comportamiento de una onda solitón.

A partir de este nuevo concepto se han realizado nuevas investigaciones y trabajos relacionados de este tema, algunos incluso realizados por el creador de este concepto. A continuación se mencionarán algunos trabajos a partir del año de publicación del trabajo pionero del reactor

solitón hasta el año 2022, se eligió este intervalo de tiempo de búsqueda debido a que existe mayor variedad de artículos que se pueden tomar como referencia para el objetivo de este trabajo, la forma en que se buscó información con respecto al tema a tratar fue a través de buscadores académicos, dichos buscadores usados son a través de las plataformas *Google Academics*, *Researchgate*, *arXiv* y *Elseiver*.

Las siguientes trabajos publicados por Seifritz posterior a su publicación del reactor solitón son: *On the burn-up theory of fast soliton reactors* (Seifritz, 1998a) en donde plantea la física básica de un reactor rápido basado en el ciclo de combustible U/Pu o Th/LJ-233, el cual da origen a una onda de flujo impulsado autocatalíticamente similar a una onda solitón el cual se propaga a través de las regiones fértiles, quemándola y produciendo energía, en dicho artículo, plantea una nueva manera cualitativa de aprovechamiento de la energía nuclear como son el reprocesamiento y sin la necesidad de transportar los elementos combustibles irradiados. La siguiente publicación por parte de Seifritz que trata sobre el fenómeno de la onda solitón en un reactor de neutrones térmicos está publicada en el artículo *The thermal neutronic soliton wave phenomenon in an infinite medium* (Seifritz, 1998b) en donde plantea la dinámica después de la ignición de la onda solitón neutrónico propagándose en un medio subcrítico, basado en este concepto se puede emplear para el diseño de pequeños reactores termales de agua ligera. Por último en el artículo de Seifritz *Solitary burn-up waves in multiplying medium* (Seifritz, 2000) el cual se basa de su artículo *On the burn-up theory of fast soliton reactors* y muestra la posibilidad de diseñar un reactor rápido que posea solamente elementos combustibles de material fértil.

Otra investigación en el cual se usa la teoría de solitones para diseños de reactores nucleares está en los trabajos de B. Gaveau, J. Maillard, G. Maurel y J. Silva titulados *Hybrid soliton nuclear reactors: A model and simulation* (Gaveau et al., 2005) y *Equations of evolution of a hybrid soliton nuclear reactor* (Gaveau et al., 2006).

En dichos artículos plantean el diseño matemático y simulación de un reactor híbrido de fisión de vida larga el cual es impulsado por un acelerador de protones que produce neutrones en un objetivo; además, este reactor puede ser utilizado para destruir sus propios productos de desecho, pero la condición necesaria para que este sistema sea estable es que la velocidad de la fuente de neutrones sea lo suficientemente alta.

Una aplicación del concepto del reactor CANDLE en un reactor rápido refrigerado por agua supercrítica (SCWFR) es investigado en el trabajo titulado *Solitary breeding/burning waves in a supercritical water cooled fast reactor* (Chen et al., 2010) de los autores X. Chen, D. Zhang, W. Maschek y T. Schulenberg; en dicho artículo plantea lo siguiente, si se tiene como base el

diseño SCWFR, es posible encontrar una onda de quemado que presenta características de una onda solitón en un ciclo de conversión Th-U sin la necesidad de usar veneno combustible.

Un análisis matemático de las condiciones de existencia de una onda solitón nuclear en un medio multiplicador de neutrones es desarrollado en el artículo *Traveling Wave Reactor and Condition of Existence of Nuclear Burning Soliton-Like Wave in Neutron-Multiplying Media* (Rusov et al., 2011) de los autores V. D. Rusov, E. P. Linnik, V. A. Tarasov, T. N. Zelentsova, donde plantean dos condiciones necesarios para la existencia de la onda solitón en dichos medios, la primera condición es determinado por la relación entre la concentración de equilibrio y la concentración crítica del isótopo fisionable y la segunda condición es establecido por la estadística cuántica de Wigner.

Un análisis matemático del ciclo conversión de U-Pu realizado por los autores X. Chen, E. Kiefhaber, D. Zhang, W. Maschek y publicados en el artículo *Fundamental solution of nuclear solitary wave* (Chen et al., 2012), en dicho artículo se establece su ecuación de difusión junto con sus ecuaciones de quemado (*burn-up equation*) en donde se demuestra que las densidades del número de átomos de los nucleidos se puede expresar como una función de la fluencia de los neutrones despreciando los procesos radioactivos naturales, en tal ecuación de difusión es posible encontrar una solución de onda solitaria con la condición que el factor de multiplicación del medio infinito primero aumenta desde un nivel subcrítico hasta un punto supercrítico y luego vuelve a caer a otro nivel subcrítico.

Por último, un trabajo reciente publicado por Jin Feng Huang titulado *The solitary wave in advanced nuclear energy system* (Huang, 2022), en dicho artículo plantea lo siguiente: para diseñar sistemas nucleares más avanzados se ha propuesto utilizar reactores de ondas progresivas o llamados también reactores CANDLES, sin embargo no había una solución analítica, por ello en este artículo bajo el punto de vista de una onda solitón es posible encontrar una solución analítica, mediante el acoplamiento de la ecuación de difusión de neutrones de un grupo con las ecuaciones de quemado.

Teniendo en cuenta el material recopilado, se puede ver que las investigaciones realizadas sobre la teoría de solitones aplicado a los diseños reactores nucleares son diversas y con diferentes enfoques ya sea en la parte matemática o de simulación, pero en dichos artículos no tratan la interacción que pueda existir entre dos ondas solitón como ocurre en otros modelos no lineales donde se pueda encontrar una solución solitón.

1.3. Justificación

Las ecuaciones no lineales en la actualidad han tomado una gran importancia para la creación de nuevas teorías y modelar la naturaleza mediante estas ecuaciones, lo más interesante son las soluciones de estas ecuaciones, uno de ellos son los solitones aquellas ondas que pueden comportarse como partículas. La física nuclear o en específico la física de reactores nucleares no es ajena a la teoría de solitones, como se ha demostrado desde la primera publicación del reactor solitón en 1997 hasta la actualidad ha existido muchas investigaciones que utilizan el concepto de reactor solitón, ya sea planteando nuevos diseños de reactores modernos que usan la teoría de solitones o haciendo trabajos teóricos con respecto a este tema. Por ende, una investigación teórica sobre la interacción que puede existir entre dos solitones en un reactor neutrónico térmico, contribuiría al desarrollo teórico y la mejor comprensión de este fenómeno de interacción y la forma en que podría influir a la generación de energía nuclear de un reactor.

1.4. Hipótesis

La teoría de solitones ha jugado un papel importante en los avances teóricos de las diversas áreas de la física como son la materia condensada, cosmología, física de partículas y física nuclear, en algunos modelos no lineales que tienen una solución solitón puede ser expresados por una función de densidad lagrangiana y mediante esta función lagrangiana definir su respectivo tensor energía - momento, el cual será de utilidad para encontrar la interacción de un sistema de dos solitones. Algunos modelos no lineales en que se puede encontrar la interacción entre dos solitones mediante este método son por ejemplo la ecuación no lineal de Klein-Gordon, la ecuación no lineal de Dirac y la ecuación no lineal de Schrodinger, la interacción que se puede encontrar por ejemplo en el caso del modelo no lineal de Klein-Gordon responde a una interacción de Yukawa, por lo tanto teniendo esto en cuenta planteamos la siguiente hipótesis.

En un reactor neutrónico térmico se logró demostrar a través de su ecuación de difusión que existe una solución de onda de quemado que se comporta como un solitón, por ende, debe ser posible expresar esta ecuación de difusión por medio de una densidad lagrangiana y encontrar la interacción de un sistema ligado formado por dos solitones, mediante el empleo del tensor energía - momento que caracteriza el sistema.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

El objetivo general de este trabajo de investigación es hallar la fuerza de interacción, la energía de interacción y el tipo de interacción que puede existir entre dos solitones neutrónicos térmicos que forman un sistema ligado, donde dichos solitones son las soluciones de tipo solitón de la ecuación de difusión de un reactor neutrónico térmico unidimensional infinito

1.5.2. Objetivos Específicos

- Encontrar la solución de tipo solitón del flujo de neutrones térmicos en la ecuación de difusión de un reactor neutrónico térmico unidimensional infinito.
- Encontrar la función de densidad lagrangiana aproximada que caracteriza a la ecuación de difusión de un reactor térmico neutrónico unidimensional infinito.
- Encontrar la expresión del tensor energía - momento que se deriva de la densidad lagrangiana, que servirá para encontrar la interacción de dos solitones que forman un sistema ligado.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Interacción de neutrones con la materia

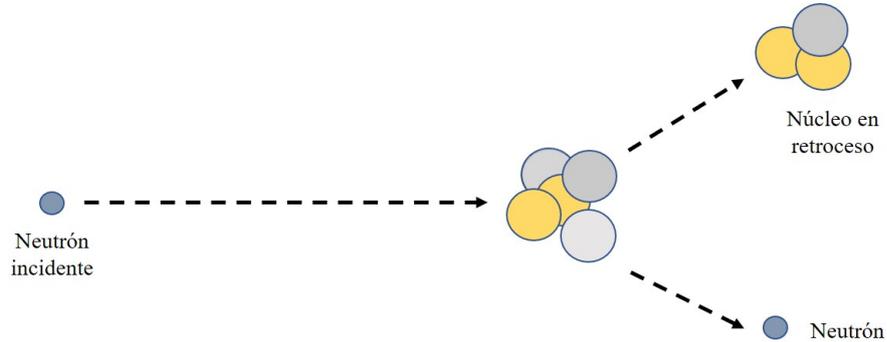
Los neutrones son las partículas subatómicas que se caracterizan por no tener carga eléctrica, por lo tanto, no pueden ser detenidos por las fuerzas eléctricas. Los neutrones al ser partículas no cargadas solo pueden ionizar a la materia indirectamente, es decir, que al momento de interactuar con la materia produce partículas cargadas siendo estas las que ionizan a otros átomos de la materia. La interacción entre los neutrones y los núcleos atómicos es fundamental para el funcionamiento del reactor.

La forma en que interacciona un neutrón con un átomo se divide de dos formas que se describe a continuación (Lamarsh, 1966).

- **Dispersión:** Es el resultado del intercambio de energía después de la colisión entre un neutrón y un átomo blanco, con la característica que el neutrón permanece libre luego del proceso, a su vez la dispersión se puede dividir en dos casos, la dispersión elástica e inelástica.
 - **Elástica:** Es el caso cuando después de la interacción no hay cambio en la composición isotópica del átomo blanco o en su energía interna, y el efecto neto es solo un cambio en la dirección del neutrón como se esquematiza en la figura 1, a menudo se representa una interacción elástica mediante este símbolo (n, n) .

Figura 1

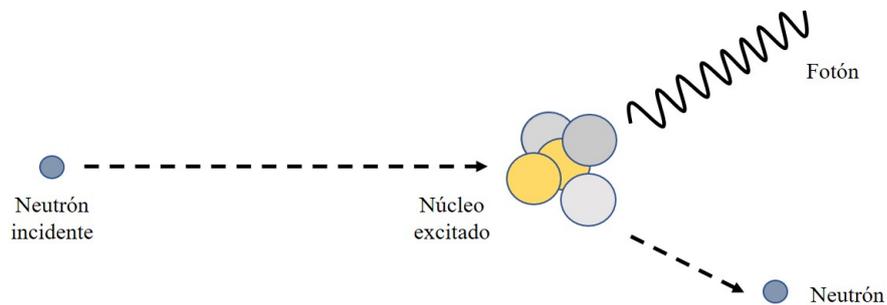
Interacción neutrón - materia proceso de dispersión elástica.



- **Inelástica:** Ha diferencia del caso elástico, el efecto neto después de la colisión es el cambio en la dirección del neutrón y la excitación del átomo blanco pero sin haber cambio en su composición isotópica y volviendo a su estado fundamental mediante la emisión de radiación gamma como se esquematiza en la figura 2, a menudo se representa una interacción inelástica mediante este símbolo (n, n').

Figura 2

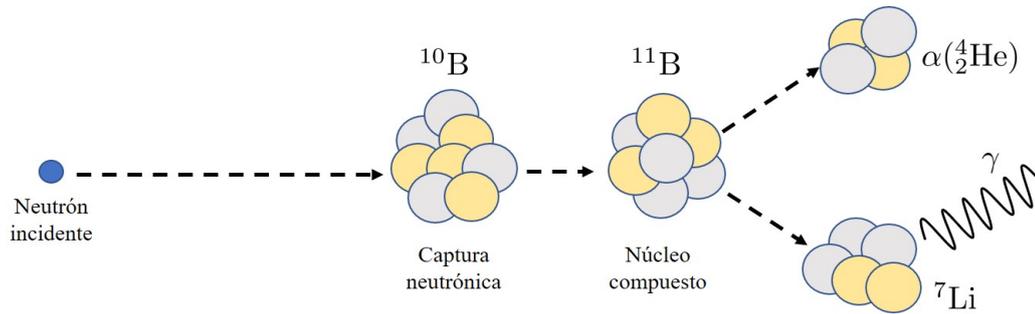
Interacción neutrón - materia proceso de dispersión inelástica.



- **Absorción:** En dicho proceso el neutrón es capturado por el núcleo blanco. Pueden ocurrir con neutrones de baja energía, en el cual el núcleo absorbe un neutrón y queda en un estado excitado, pudiendo volver al estado fundamental por emisión de radiación γ o de partículas (n, p, β, α) como se muestra en la figura 3. Eventualmente, cuando un núcleo es colisionado por un neutrón de alta energía se emiten dos o mas neutrones, dichos procesos se simbolizan a través de la siguiente notación ($n, 2n$) o ($n, 3n$). En las reacciones del tipo (n, kn) las cuales ocurren cuando un núcleo de un metal pesado colisiona con un neutrón muy energético, estos núcleos se dividen en dos fragmentos con liberación de energía dándose así el proceso de fisión nuclear.

Figura 3

Interacción neutrón - materia proceso de absorción (ejemplo átomo de ^{10}B).



2.1.1. Sección eficaz microscópica y macroscópica

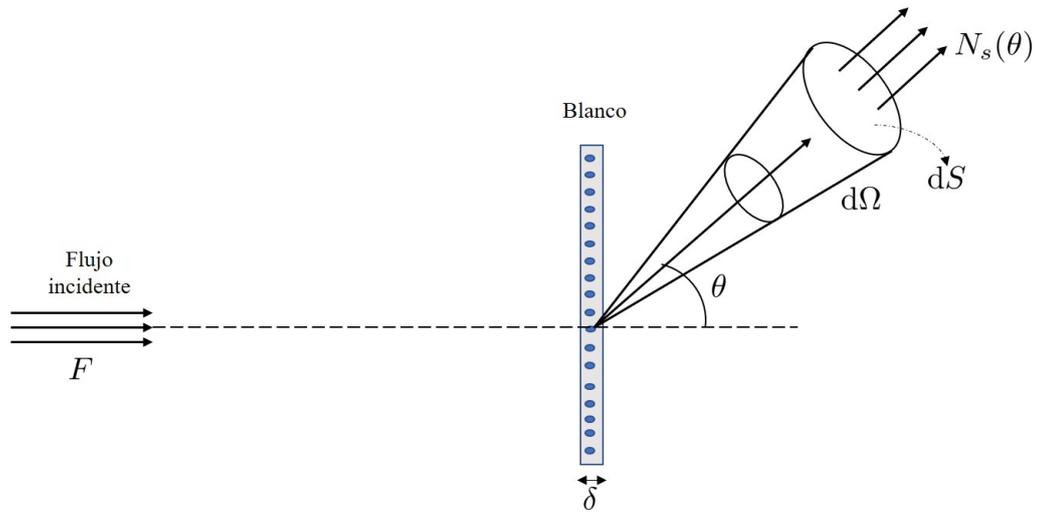
En el estudio físico de choque de partículas, es más frecuente el tratamiento no de la desviación de una sola partícula, sino de la dispersión de un haz de partículas idénticas que inciden hacia el centro de dispersión con una velocidad uniforme v_∞ . Como las diferentes partículas que forman el haz tienen diferentes parámetros de impacto y , por tanto, son dispersadas bajo distintos ángulos ϕ . Definamos dN el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo en ángulos comprendidos entre ϕ y $\phi + d\phi$. Como el número de dispersiones es proporcional a la densidad del haz incidente, para ello definamos como n el número de partículas que por unidad de tiempo atraviesan la superficie de una sección recta del haz, entonces definamos el siguiente cociente (Landau and Lifshitz, 1970).

$$d\sigma = \frac{dN}{n}. \quad (2.1)$$

A este cociente se le denomina como la sección eficaz de dispersión y tiene unidades de superficie, la cual se puede interpretar como la probabilidad de interacción de una partícula con un blanco. Supongamos un blanco muy delgado de espesor δ en el cual incide un flujo de partículas con flujo F [$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$] como se muestra en la figura 4, supongamos que un observador o un detector subtende un ángulo sólido $d\Omega = dS/R^2$, siendo dS la superficie útil del detector. Después de la colisión, la partícula incidente es desviada de su dirección original, con un ángulo de dispersión θ , donde dicho ángulo es formado entre la dirección inicial y la dirección final de la partícula.

Figura 4

Representación gráfica del proceso de dispersión de un haz de partículas.



Por lo tanto, definamos $N_s(\theta)$ como el número de dispersiones por unidad de tiempo en el ángulo sólido $d\Omega$ que subtiende el detector, de esta manera se define la sección eficaz diferencial o sección eficaz microscópica (Soria, 2020).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN_s}{d\Omega}. \quad (2.2)$$

Por ello, las sección eficaz total se hallara integrando la siguiente expresión (Soria, 2020)

$$\sigma(E) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (2.3)$$

la unidad usada para la sección eficaz microscópica es el barn (b) que es igual a 10^{-28} m^2 .

Como se ha mencionado existen diversas formas en que un neutrón interactúa con los núcleos de la materia, para una mayor descripción es necesario clasificar cada sección eficaz de acuerdo al tipo de interacción que sufren. De esta manera, la dispersión elástica es descrito por la sección eficaz de dispersión elástica σ_e ; de la misma forma para el caso de la dispersión inelástica es descrito por la sección eficaz de dispersión inelástica σ_i , para la captura neutrónica es descrito por la sección eficaz de captura σ_c y para el proceso de fisión es definida a través de la sección eficaz de fisión σ_f , por ende la sección eficaz total sera la suma de todas las secciones eficaces ya mencionadas (Lamarsh, 1966)

$$\sigma_T = \sigma_D + \sigma_A, \quad (2.4)$$

donde

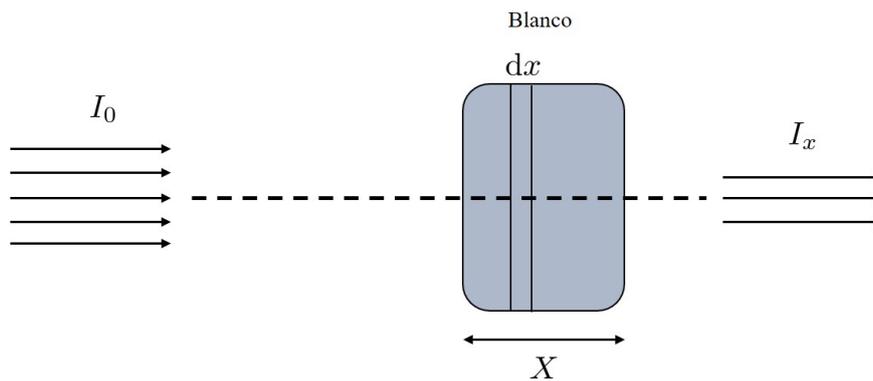
$$\sigma_D = \sigma_e + \sigma_i \quad (\text{Sección eficaz de dispersión total}),$$

$$\sigma_A = \sigma_c + \sigma_f \quad (\text{Sección eficaz de absorción total})$$

En la vida real nosotros no percibimos la interacción entre un neutrón con un único núcleo, en el laboratorio las medidas se realizan con muestras que tienen un espesor determinado y que además esta muestra con frecuencia es una combinación de varios elementos (Rábago et al., 2017). Hagamos el siguiente análisis, supongamos que en un blanco de espesor X incide un haz de neutrones unidireccionales de intensidad I_0 , un detector es colocado a una distancia cercana detrás del blanco como se esquematiza en la figura 5. Se asumirá que tanto el blanco y el detector son pequeños de modo que el detector subtende un ángulo sólido pequeño en el blanco. Cada vez que un neutrón interacciona con el blanco el haz inicial de neutrones reduce su intensidad, y la intensidad de aquellos neutrones que no interactúan con el blanco serán detectados por el detector.

Figura 5

Modelo matemático empleado para encontrar la sección eficaz macroscópica de un material de espesor X



Entonces, sea $I(x)$ la intensidad de los neutrones que no interactúan con el blanco después de atravesar un espesor dx del blanco, la intensidad inicial se reducirá de acuerdo al número de neutrones que interactúan con la lamina de espesor dx , el cual estaría representado por la siguiente ecuación (Lamarsh, 1966)

$$\frac{dI}{I} = -N \sigma_T dx, \tag{2.5}$$

donde N es la densidad atómica del blanco, integrando la ecuación (2.5), obtenemos la siguiente ecuación

$$I(x) = I_0 e^{-N \sigma_T x}, \tag{2.6}$$

por lo tanto, la intensidad que detecta al detector es la

$$I(x) = I_0 e^{-N \sigma_T X}. \tag{2.7}$$

El producto de la densidad atómica N con la sección eficaz σ_T , se conoce como la “sección

eficaz macroscópica” él cual tiene unidades [cm^{-1}] y es denotado por la letra griega Σ , su uso es muy frecuente en las ecuaciones de la teoría de reactores nucleares, por lo tanto, en la ecuación (2.5) la sección eficaz macroscópica total sera igual a

$$\Sigma_T = N \sigma_T, \quad (2.8)$$

de igual manera se define la sección eficaz macroscópica de fisión y de captura (absorción) respectivamente que son iguales a

$$\Sigma_f = N \sigma_f, \quad (2.9)$$

$$\Sigma_c = N \sigma_c \quad (2.10)$$

Entonces, reescribiendo la ecuación (2.6) en términos de la sección eficaz macroscópica se obtiene la siguiente ecuación

$$I(x) = I(0) e^{-\Sigma x}, \quad (2.11)$$

incluso la anterior ecuación se puede escribir en términos del flujo neutrónico Φ en vez de la intensidad, debido a que en la ecuación de difusión se emplea el flujo neutrónico y no la intensidad, por lo tanto la anterior ecuación en términos del flujo neutrónico [$1/\text{s cm}^2$] seria igual a (Rábago et al., 2017)

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-\Sigma x} \quad (2.12)$$

2.2. Fisión Nuclear

En 1939 Otto Hann, Lisa Meitner y Fritz Strassman en sus investigaciones sobre la síntesis de elementos transuránidos observaron la existencia de la fisión bombardeado por neutrones produciendo una reacción que liberaba una energía muy grande alrededor del orden de los 100 MeV el cual era una energía mucho mayor que cualquier otra energía de proceso de desintegración que se halla observado previamente. Basado en esta observación Meitner y Frisch en 1939 plantearon que los núcleos de uranio que capturan un neutrón son muy inestables y se dividen o “fisionan” por la mitad (Krane, 1991). Por lo tanto, el proceso de fisión nuclear ocurre cuando un núcleo padre rico en neutrones captura un neutrón y se divide en dos núcleos cuyos números másicos son cercanos a la mitad del numero másico del núcleo padre (Soria, 2020).



Si proporcionamos la suficiente energía de excitación podemos fisionar cualquier núcleo, pero los procesos más interesantes y prácticos está en los procesos de fisión de núcleos pesados (elementos más pesados a partir del torio) (Krane, 1991). Fermi, Joliot y Kowarski descubrieron la posibilidad de obtener una reacción en cadena de fisión, a partir de esta idea

como una nueva forma de obtener energía, el cual daría origen a la idea de los reactores de fisión (Soria, 2020). En una reacción de fisión inducida por neutrones, se liberan de dos a tres neutrones, para mantener una reacción en cadena de fisión por lo menos un neutrón producido en la fisión debe sobrevivir para producir la fisión de los núcleos fragmentados y de esta manera se repita el proceso de fisión (Stacey, 2007).

2.2.1. Factor de multiplicación infinito y efectivo

Como se ha mencionado para que se mantenga una reacción en cadena de fisión nuclear, es necesario que por lo menos un neutrón liberado de la fisión de un núcleo padre sobreviva, para poder producir fisión a los núcleos fragmentados. Pero existe la posibilidad que la producción promedio de neutrones en cada fisión difiere una de la otra, es decir, que la concentración de neutrones en el medio donde ocurre la reacción en cadena puede incrementarse, disminuir o incluso permanecer constante en el tiempo. Por ello, en la física de reactores nucleares se define el parámetro de “factor de multiplicación” denotado por la letra K , la cual se define como el cociente de neutrones entre dos generaciones sucesivas, es decir (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016)

$$K = \frac{n_{s+1}}{n_s}, \quad (2.14)$$

donde n_s y n_{s+1} es el numero de neutrones producidos en la generación s y $s + 1$ respectivamente.

Si consideramos un medio homogéneo e infinito el factor de multiplicación se llamará “factor de multiplicación infinito” denotado por K_∞ . Por lo tanto, K_∞ representa el número de neutrones producidos por neutrón absorbido en un medio de dimension infinita, dependiendo del valor de K_∞ tendrá un significado en el control de un reactor nuclear.

Si:

$K_\infty > 1$, aumento de la concentracion de neutrones en el tiempo.

$K_\infty = 1$, concentracion de neutrones constante en el tiempo.

$K_\infty < 1$, disminucion de la concentracion de neutrones en el tiempo.

El parámetro K_∞ se puede calcular multiplicando el número promedio de neutrones que se producen por fisión y la relación de las probabilidades de tener una reacción de fisión y la absorción de neutrones, es decir la relación entre las secciones eficaces macrosocópicas de

fisión Σ_f y absorción Σ_A , si definimos a η como el numero promedio de neutrones producidos por reacción de fisión entonces la expresión de K_∞ será igual a (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016)

$$K_\infty = \eta \frac{\Sigma_f}{\Sigma_A}. \quad (2.15)$$

Para núcleos que poseen más de un isótopo fisionable se utiliza un η promedio el cual es calculado mediante la siguiente ecuación

$$\bar{\eta} = \frac{\sum_i \eta_i \Sigma_{fi}}{\Sigma_f}, \quad (2.16)$$

donde η_i es el número promedio de neutrones producidos por reacción de fisión en el isótopo i -ésimo, Σ_{fi} es la sección eficaz macroscópica de fisión del isótopo i -ésimo y Σ_f es la sección eficaz macroscópica de fisión total.

Hasta ahora hemos considerado un medio de dimension infinita, homogéneo y aislado en donde existe material fisionable para producir una reacción de fisión en cadena, y sea supuesto que al ser un medio infinito no existe la posibilidad que un neutrón escape del sistema. Pero si consideramos un medio finito, homogéneo y aislado donde existe material físil y neutrones, existe la posibilidad que los neutrones escapen del sistema. Por ello, hay la necesidad de definir una función de probabilidad P que representara la probabilidad que un neutrón sea absorbido y no escape del sistema. Entonces, si en la generación de fisión s el número de neutrones producidos es n_s , en consecuencia $P n_s$ neutrones sera absorbidos y producirán $K_\infty P n_s$ neutrones en la generación de fisión $(s + 1)$, recordando la definición del parámetro de factor de multiplicación, entonces, se tendrá que (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016)

$$K_{eff} = K_\infty P, \quad (2.17)$$

donde K_{eff} es el factor de multiplicación efectiva de un medio finito, dependiendo del valor K_{eff} tendrá un significado en el control de un reactor de dimension finita.

Si:

- i) $K_{eff} > 1$, aumento de la concentracion de neutrones en el tiempo, estado supercritico.
- ii) $K_{eff} = 1$, concentracion de neutrones constante en el tiempo, estado critico.
- iii) $K_{eff} < 1$, disminucion de la concentracion de neutrones en el tiempo, estado subcritico.

2.3. Difusión de Neutrones

Para el adecuado manejo de un reactor nuclear hay la necesidad de calcular las velocidades de las diferentes reacciones nucleares cuando los neutrones interactúan con los materiales combustibles. Para ello, existe la necesidad de conocer sus secciones eficaces de los materiales físis los cuales a la vez dependen de la energía del neutrón con la que interactúan, a la vez conocer la distribución y energía de los neutrones a lo largo del espacio del reactor. Por ejemplo, en el caso de un reactor de fisión, la distribución de los neutrones depende de la forma como se distribuye la fuente de neutrones y de las interacciones con los núcleos del material físil que sufren a medida que se alejan de la fuente (Stacey, 2007).

Una de las teorías que ayuda describir matemáticamente la distribución de los neutrones en un reactor nuclear es “La teoría de la difusión”, pero para poder usar esta teoría es necesario tratar la velocidad de los neutrones con una velocidad promedio y que estos neutrones sean monoenergéticos y despreciar los cambios de energía que podrían sufrir los neutrones. En la teoría de reactores nucleares cuando se dice que unos neutrones son monoenergéticos significa que pertenece a un “grupo” es decir que se encuentran dentro de un rango de energía para el cual se pueden usar valores promedio de las secciones eficaces. Una teoría mas general que abarca los distintos rangos de energía y valores promedios para cada rango de energía de los neutrones se encuentra en la “Teoría de Multigrupos” (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016). Para este trabajo de investigación se trabajará con neutrones que pertenecen a un solo grupo y por lo tanto no se tomara en cuenta la teoría de multigrupos.

2.3.1. La ley de Fick

Definamos el concepto de densidad de corriente de neutrones J , el cual es el numero de neutrones por segundo que atraviesan un área unitaria normal a la dirección del movimiento de los neutrones (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016). Para establecer la ley de Fick vamos a suponer que el espacio donde se encuentra la distribución neutrónica es un medio infinito y homogéneo y el objetivo será calcular la densidad de corriente en un punto del espacio infinito. Para que el procedimiento sea mas sencillo vamos a calcular la densidad de corriente en la zona media del sistema el cual se elegirá como el origen del sistema de coordenadas como se ve en la figura 6,¹ la corriente que se calculará en la zona media del sistema son producidas por las dispersiones que ocurren en todo el espacio, por ello estas dispersiones se dividirá en dos partes, aquellas dispersiones que se producen en el semiespacio superior y que se dirigen hacia un diferencial de superficie dA que se encuentra en el sistema de coordenadas, y aquellas dispersiones que se producen en el semiespacio inferior y que se

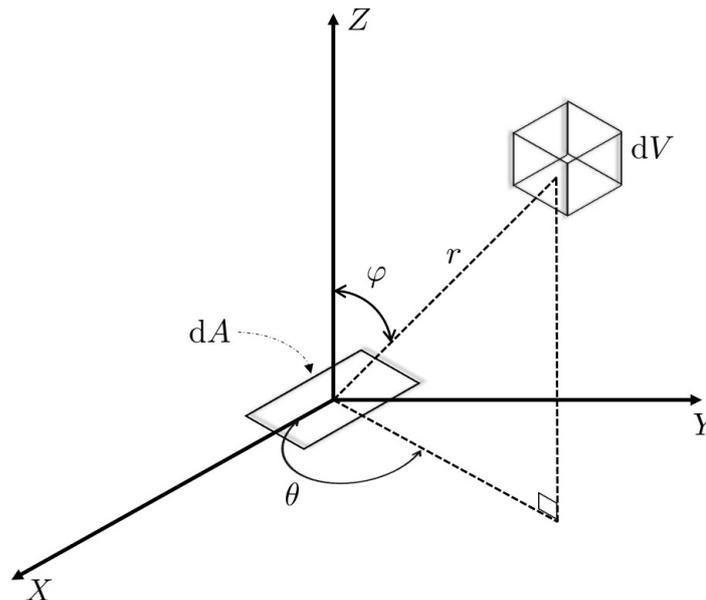
¹Los ángulos θ y φ , son aquellos ángulos que orientan la ubicación del diferencial de volumen dV con respecto al origen de coordenadas de la figura 6

dirigen hacia el diferencial de superficie dA , ambas densidades de corriente se denotaran como J_{z-} y J_{z+} respectivamente. Por lo tanto, la corriente neta en la dirección z sera igual a

$$J_z = J_{z+} - J_{z-}. \quad (2.18)$$

Figura 6

Modelo matemático para encontrar la Ley de Fick



Como se muestra en la figura 6 vamos a considerar un diferencial de volumen dV donde los neutrones se dispersan y salen de este volumen en todas las direcciones, encontremos primeramente la densidad de corriente J_{z-} en la diferencial de superficie dA . Sea ϕ el flujo de neutrones que inciden en el diferencial de volumen dV y Σ_S la sección eficaz macroscópica de dispersión de dV , entonces se tendrá que

$$(\text{Nro de dispersiones por segundo en } dV) = \phi \Sigma_S dV. \quad (2.19)$$

Usando el concepto de ángulo sólido podemos encontrar el número de neutrones dispersados que atraviesan dA desde una distancia r , entonces se tendrá que

$$\text{Nro de neutrones dispersados que cruzan } dA = \left(\frac{dA \cos \varphi}{4\pi r^2} \right) \phi \Sigma_S dV, \quad (2.20)$$

usando coordenadas esféricas se puede conocer dV (usando los ángulos θ y φ) el cual será igual a

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Hay que tener en cuenta que en el trayecto de dV hacia dA a lo largo de r pueden sufrir

reacciones nucleares. Recordando la definición de sección eficaz, entonces la probabilidad de que los neutrones viajen una distancia r sin sufrir una reacción es igual a

$$P = e^{-\Sigma r},$$

por ende, el número real de neutrones dispersados provenientes de dV que atraviesan dA es igual a:

$$(\text{Nro real de neutrones dispersados que cruzan } dA) = \left(\frac{dA \cos \varphi}{4\pi r^2} \right) \phi \Sigma_S r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi e^{-\Sigma r}, \quad (2.21)$$

si integramos la ecuación (2.21) en todo el semiespacio superior del medio infinito obtendremos el número de dispersiones provenientes de la parte superior por unidad tiempo que atraviesan dA , es decir la corriente J_{z-} multiplicado por dA , integrando (2.21) se obtiene la siguiente ecuación

$$J_{z-} dA = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{dA \cos \varphi}{4\pi r^2} \right) \phi \Sigma_S r^2 e^{-\Sigma r} \sin \varphi dr d\theta d\varphi,$$

simplificando dA en ambos términos se obtiene

$$J_{z-} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \varphi}{4\pi} \right) \phi \Sigma_S e^{-\Sigma r} \sin \varphi dr d\theta d\varphi. \quad (2.22)$$

Para poder resolver esta integral en función del flujo ϕ , se va a suponer que el flujo varía lentamente en todo su recorrido, teniendo en cuenta esta suposición podemos aproximar mediante una "serie de Taylor" (Ayres et al., 1991) el flujo ϕ , entonces haciendo la expansión de ϕ a una serie alrededor del origen de coordenadas se obtiene

$$\phi = \phi_0 + x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 + y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_0 + z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 + \dots$$

Como estamos usando coordenadas esféricas es necesario escribir x , y y z en función de estas coordenadas, entonces la serie de Taylor será igual a

$$\phi = \phi_0 + r \sin \varphi \cos \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + r \sin \varphi \sin \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + r \cos \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \quad (2.23)$$

reemplazando (2.23) en (2.22) se obtiene

$$J_{z-} = \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} \left[\phi_0 + r \sin \varphi \cos \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + r \sin \varphi \sin \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + r \cos \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \times \Sigma_S \cos \varphi \sin \varphi e^{-\Sigma r} d\theta.$$

Integrando con respecto a θ (los calculo están en el Apéndice A.1), se obtiene

$$J_{z-} = \frac{\phi_0 \Sigma_S}{4\Sigma} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \frac{\Sigma_S}{6\Sigma^2},$$

si supongamos que $\Sigma_S \approx \Sigma$, entonces J_{z-} sera igual a

$$J_{z-} = \frac{\phi_0}{4} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \frac{1}{\Sigma_S}, \quad (2.24)$$

análogamente

$$J_{z+} = \frac{\phi_0}{4} - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \frac{1}{\Sigma_S}. \quad (2.25)$$

Recordando la corriente J_z ecuación (2.18), reemplazando J_{z+} (2.25) y J_{z-} (2.24) en dicha ecuación

$$J_z = -\frac{1}{3\Sigma_S} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0, \quad (2.26)$$

de la misma manera

$$J_x = -\frac{1}{3\Sigma_S} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0, \quad (2.27)$$

$$J_y = -\frac{1}{3\Sigma_S} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_0. \quad (2.28)$$

Como el vector corriente \vec{J} es

$$\vec{J} = J_x \hat{e}_x + J_y \hat{e}_y + J_z \hat{e}_z, \quad (2.29)$$

entonces

$$\vec{J} = -D \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \hat{e}_z \right],$$

y de esta manera la ley de Fick sera igual a

$$\vec{J} = -D \nabla \phi \quad (2.30)$$

donde $D = \frac{1}{3\Sigma_S}$, a este termino D se le conoce como el "coeficiente de difusión", y tiene unidades de [cm], el valor del coeficiente de difusión nos indica la facilidad o dificultad que tiene una sustancia o gas en fluir en un determinado medio.

2.4. Teoría de reactores nucleares

Como ya se ha mencionado, un reactor nuclear es aquella instalación donde se produce, se controla, se mantiene y se optimiza las reacciones nucleares de fisión en cadena, para

producir energía mediante la generación de calor; un reactor nuclear es un sistema complejo y con el avance del tiempo los modelos de los reactores nucleares se van haciendo mas óptimos, en general un reactor nuclear consta de las siguientes partes:

- **Combustible:** Son aquellos materiales adaptados para el uso en un reactor nuclear que contengan átomos fisibles que generan calor mediante las reacciones de fisión, algunos elementos combustibles usados son el U, Pt, Th.
- **Refrigerante:** Es el fluido que tiene como función extraer el calor que genera los núcleos fisibles en el núcleo del reactor, algunos refrigerantes usados son agua, agua pesada, aire, CO₂, metales líquidos.
- **Moderador:** Sustancia que tienen como función reducir la energía cinética de los neutrones rápidos producidos en un proceso de fisión nuclear y convertirlos en neutrones lentos o térmicos a este proceso se le llama “termalizar neutrones”, los moderadores son usados en reactores nucleares térmicos para mantener la reacción en cadena, se caracterizan por tener una sección eficaz de captura baja y una alta sección eficaz de dispersión, algunos moderadores usados son el agua, agua pesada y el grafito.
- **Reflector:** Es el material que se encarga de reducir el escape de los neutrones que intentan fugar del núcleo y así mantener la población neutrónica, se caracterizan por tener una sección eficaz de dispersión alta, algunos elementos usados como reflector son grafito, berilio, agua.
- **Elementos o barras de control:** Son aquellos elementos que tienen la función de controlar la población neutrónica y de esta manera controlar la reactividad del reactor, llevando de un estado subcrítico a crítico y viceversa, y además evitando llegar a un estado supercrítico, estos elementos pueden estar presentes en forma de barra o diluidos en el refrigerante conocido como “veneno nuclear”, se caracterizan por tener una alta sección eficaz de captura, algunos materiales que usan como elementos de control son el Cd, Hf, B.
- **Blindaje:** Es la parte del reactor nuclear que evita el escape de radiación por parte de los rayos gammas o de neutrones del reactor, algunos elementos usados como blindaje son el plomo, agua, hormigón.
- **Vasija del reactor:** Es la parte que alberga los elementos combustibles y por donde pasa el flujo del refrigerante.

2.4.1. Reactores nucleares térmicos

Después de cada proceso de fisión nuclear hay producción de neutrones, los neutrones que aparecen instantáneamente alrededor de los 10^{-14} s luego del proceso de fisión son llamados neutrones inmediatos. Alrededor del 1 % los neutrones producidos, es debido al decaimiento de los productos de fisión y el tiempo de aparición de estos neutrones es variable que depende de la vida media de los productos de fisión, y se les llama neutrones diferidos (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016).

Estos neutrones producidos por el proceso de fisión presentan diferentes energías y como la sección eficaz depende de la energía que presenta la partícula, por lo tanto, existen diferentes maneras en que los neutrones interactúan con la materia, es por ello, que hay la necesidad de clasificar los neutrones con respecto a la energía que poseen y así tener la certeza de la forma en que los neutrones interactúan con la materia, en la tabla 1 se muestra la clasificación de los neutrones de acuerdo a la energía que poseen.

Tabla 1

Clasificación de los neutrones con respecto a la energía que poseen.

Denominación	E (eV)	v (cm/s)
Frios	0,005	$9,66 \times 10^4$
Térmicos	0,025	$2,20 \times 10^5$
Epitérmicos	1	$1,38 \times 10^6$
Lentos	10^2	$1,38 \times 10^7$
Intermedios	10^4	$1,38 \times 10^8$
Rápidos	10^6	$1,38 \times 10^9$
Ultrarápidos	10^8	$1,28 \times 10^{10}$

Modificado de (Sanchez del Rio et al., 1958).

De acuerdo al tipo de neutrones que se utiliza en el proceso de fisión en un reactor nuclear, los reactores tendrán una clasificación. Para nuestro tema de investigación solo nos interesa los reactores nucleares térmicos, los cuales se caracterizan por usar neutrones térmicos para producir la reacción en cadena, por ello, en estos tipos de reactores hay la necesidad de usar moderadores que disminuyen la velocidad de los neutrones hasta termalizarlos.

2.4.2. Ecuación de continuidad

En esta investigación solo se centrara en un reactor nuclear homogéneo en el cual se tiene en cuenta las siguientes características (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016):

1. Los neutrones nacen de la reacciones de fisión.

2. Los neutrones se pierden debido al proceso de absorción o al escapar de la región de interés de estudio.
3. Algunos neutrones de una región adyacente pueden emerger dentro de la región de interés.
4. El escape neto de los neutrones es la suma de los neutrones que logran escapar y los neutrones que aparecen provenientes de las regiones adyacentes.

Teniendo en cuenta estos puntos podemos concluir que la concentración de neutrones en una región esta cambiando en el tiempo, para encontrar una ecuación que muestra la variación de la concentración de neutrones con respecto al tiempo vamos a despreciar el tiempo de decaimiento radiactivo del neutrón que es alrededor de 12 minutos (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016). Para hallar la ecuación de la concentración de neutrones con respecto al tiempo en un volumen V , vamos a considerar cuatro puntos que se muestran en la siguiente ecuación

$$\Delta n_V = P_{n_V} - A_{n_V} - E_{n_V}, \quad (2.31)$$

donde:

Δn_V : variación de la concentración de neutrones por unidad de tiempo en un volumen V ,

P_{n_V} : Produccion de neutrones con respecto al tiempo en un volumen V

A_{n_V} : Absorción de neutrones con respecto al tiempo en un volumen V .

E_{n_V} : Escape neto de neutrones de un volumen V con respecto al tiempo.

Encontremos la expresión de Δn_V , si definimos que n sea la densidad neutrónica en un dV , por lo tanto, el número total de neutrones en un volumen V sera igual a

$$\int_V n dV, \quad (2.32)$$

entonces:

$$\Delta n_V = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV. \quad (2.33)$$

Si definimos como p_n como la cantidad de neutrones que se producen por unidad de tiempo en un diferencial de volumen dV , por ende

$$P_{n_V} = \int_V p_n dV. \quad (2.34)$$

Para encontrar la expresión de A_{n_V} , hay que recordar la definición de la sección eficaz macroscópica de absorción (Σ_a), por lo tanto, el numero de absorciones por volumen con

respecto al tiempo [absorciones/m³.s] será igual a

$$\Sigma_a \phi, \quad (2.35)$$

donde ϕ es el flujo de neutrones, si multiplicamos a la anterior expresión por dV , se obtiene el número de neutrones absorbidos por unidad de tiempo en un diferencial de volumen dV , que sera igual a

$$\Sigma_a \phi dV \quad [\text{absorciones/s}], \quad (2.36)$$

por consiguiente, si integramos esta expresión en un volumen V , se obtendrá el número total de neutrones absorbidos por unidad de tiempo en dicho volumen, entonces:

$$A_{nV} = \int_V \Sigma_a \phi dV. \quad (2.37)$$

Para encontrar la expresión del escape neto de neutrones E_{nV} , se usará la definición de la densidad de corriente. Definamos como \vec{J} la densidad de corriente de los neutrones que escapan a través de un diferencial de área dS en la superficie de un volumen V , sea \vec{n} el vector unitario normal a dS , entonces, el número de neutrones que escapan por unidad de tiempo en un dS sera igual a

$$\vec{J} \cdot \vec{n} dS, \quad (2.38)$$

en consecuencia, el escape neto de los neutrones a través de una superficie S que confina un volumen V sera igual a

$$E_{nV} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS, \quad (2.39)$$

usando el teorema de la divergencia E_{nV} sera igual a

$$E_{nV} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV.$$

Reemplazando todo los términos en (2.31) se obtiene

$$\int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = \int_V p_n dV - \int_V \Sigma_a \phi dV - \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV, \quad (2.40)$$

esta expresión es la ecuación de continuidad en su forma integral pero no es muy conveniente su uso, por ello, es necesario realizar el siguiente arreglo

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV - \int_V p_n dV + \int_V \Sigma_a \phi dV + \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV &= 0 \\ \int_V \left(\frac{\partial n}{\partial t} - p_n + \Sigma_a \phi + \nabla \cdot \vec{J} \right) dV &= 0, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial n}{\partial t} = p_n - \Sigma_a \phi - \nabla \cdot \vec{J}. \quad (2.41)$$

La expresión (2.41) es la ecuación de continuidad en su forma diferencial, ahora vamos a expresar esta ecuación en función del flujo ϕ , como

$$\phi = n v,$$

donde v es la velocidad promedio de los neutrones, y recordando la ley de Fick (2.30), entonces la ecuación (2.41) se expresara de la siguiente manera

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = p_n - \Sigma_a \phi + D \nabla^2 \phi. \quad (2.42)$$

2.4.3. La ecuación del reactor

El término p_n de la ecuación (2.42) es conocido como “el término de fuente” (Espinosa-Paredes and Rodríguez, 2016) y depende del flujo de neutrones, la sección eficaz macroscópica de absorción del combustible (Σ_a^{fis}) y el promedio de neutrones de fisión producidos por neutrón que es absorbido por el combustible (η), la expresión de p_n sera igual a

$$p_n = \eta \Sigma_a^{fis} \phi.$$

Si asumimos que estamos trabajando en un reactor homogéneo y de dimension infinita, recordando el factor de multiplicación infinita (ecuación (2.15)), podemos expresar p_n de la siguiente forma

$$p_n = \eta \frac{\Sigma_a^{fis}}{\Sigma_a} \Sigma_a \phi,$$

donde Σ_a es la sección eficaz macroscópica de absorción total, usando K_∞ , se tendrá la siguiente expresión

$$p_n = K_\infty \Sigma_a \phi. \quad (2.43)$$

Esta expresión de término de fuente también es válido para reactores de dimension finita ya que p_n depende de la composición del reactor mas no de sus dimensiones, en este trabajo de investigación se trabajará en un reactor nuclear de dimension infinita.

Reemplazando la ecuación (2.43) en (2.42) se obtiene

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + K_\infty \Sigma_a \phi = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.44)$$

a la cual se la conoce como la “ecuación del reactor”.

2.5. Introducción a la teoría de solitones

En la actualidad los modelos no lineales o ecuaciones no lineales han tomado un gran interés debido al uso de estas ecuaciones para modelar de manera aproximada fenómenos complicados e interesantes como por ejemplo la teoría de superconductores, una de las teorías que involucra a las ecuaciones no lineales y que se desarrollo a mediados del siglo XX fue la teoría de solitones, aquella teoría que conecta con claridad la matemática y la dinámica no lineal, dicha teoría juega un papel importante ya que aparece en las diferentes áreas de la física, por ejemplo en la física nuclear, la cosmología, la física de la materia condensada, la física de partículas e incluso en la vanguardista teoría de las cuerdas.

Frecuentemente se habla de dos tipos de ondas. Las primeras, las ondas lineales aquellas que se aproximan a las ondas de la vida diaria, como por ejemplo, las ondas de luz y las ondas de sonido. Estas ondas tienen como característica su velocidad constante, sea cual sea su forma; obedecen el llamado principio de superposición.

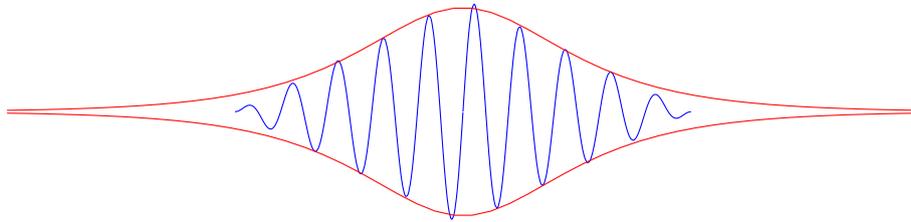
La contraparte a las ondas lineales son las ondas no lineales, estas ondas son más aproximadas a las reales. Un buen ejemplo de onda no lineal es una ola en el mar aproximándose hacia la orilla. Se puede observar que la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de la ola, van variando según avanza la ola, mientras que en las ondas lineales estas son constantes. La distancia entre las crestas va decreciendo, la altura de las ondas va creciendo mientras van percibiendo el fondo, y la velocidad cambia; la parte superior de la ola se adelanta sobre la inferior, cae sobre ella y la ola rompe (Valde and Thomas, 2006). Existe fenómenos aun mas intrincados como el de dos olas que se cruzan, interactúan de forma complicada y no lineal, y dan lugar a tres olas en lugar de dos. La teoría de solitones se origino en 1834 debido a la observación perspicaz del ingeniero naval escoces *John Scott Russell*, el cual observaba el paso de un bote a lo largo de un canal y se percató de un tipo muy extraño de ola que viajaba a lo largo del canal sin cambiar su forma, fascinado por lo que había observado (Russell, 1845), Rusell construyó un tanque de olas de 30 pies en su patio trasero y llevo a cabo experimentos, los solitones se caracterizan por las siguientes propiedades (Das, 1989)

- i. La amplitud de la onda es directamente proporcional a la velocidad.
- ii. Estas ondas no obedecen el principio de superposición. Cuando una onda más alta (más rápida) supera una onda más corta (más lenta), no se combinan. En cambio, dichas ondas parecen intercambiar lugares, es decir, la onda más rápida parece saltar sobre la onda más lenta.
- iii. Estas ondas no presentan dispersión es decir son ondas estables que pueden viajar distancias muy grandes sin cambiar su forma, su amplitud y su energía.

Las ondas solitones se constituyen de dos partes fundamentales: *la envoltura* y *las ondas portadoras*, como se muestra en la figura 7.

Figura 7

Partes de una onda solitaria, las ondas azules son las denominadas ondas portadoras y la onda roja es la onda envoltora.



El comportamiento de las ondas portadoras del solitón es de una manera muy concreta. En un paquete de ondas, dependiendo de como se comporten las ondas portadoras, es decir, de si continúan propagándose en forma de paquete sin distorsionarse o de si unas se aceleran frente a las otras. Bien se distorsionan al principio o al final del paquete, aparecen dos efectos que rompen su simetría. El primero es el fenómeno de la *dispersión*, debida a que cada frecuencia de onda se propaga a diferentes velocidades (por eso una onda de las ondas portadoras se adelantan a las otras); y el segundo es el llamado *efecto Kerr*, que produce un efecto similar, debido a las no-linealidades del medio en que se propague la onda: un cable, el agua, etc. En aquellos casos en que estos dos efectos se compensen y el paquete de ondas se mantenga intacto, surgirán los solitones.

Casi después de 60 años Korteweg y De Vries dos científicos alemanes publicaron en 1985 (Caso Huerta, 2018) su trabajo sobre la modelación de una onda que viaja a la superficie de un canal encontrando que dichas ondas satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2.45}$$

La ecuación (2.45) es denominada como la famosa ecuación **KdV** en forma general, donde el segundo término es el término de dispersión y el tercero es el no lineal, dicha ecuación presenta una solución explícita tipo solitón el cual es la siguiente: (Valde and Thomas, 2006)

$$u(x, t) = -\frac{12}{\alpha} a^2 \operatorname{sech}^2 [a(x - 4a^2 t - x_0)] \tag{2.46}$$

la solución anterior (2.46) representa a una onda solitaria, donde a , el cual representa la amplitud, nos da información acerca de la forma que la onda tiene.

En el año de 1965, Zabusky y Kruskal resolvieron la ecuación KdV de manera numérica. Ellos probaron matemáticamente que si dos ondas solitarias colisionan, cada una de ellas

pasa a través de la otra sin deformarse y con un solo pequeño cambio de fase después de la colisión. En otras palabras, después de chocar continúan su camino como si nada hubiera ocurrido. Un estudio detallado ratifico que cada pulso es una onda solitaria de tipo sech^2 como en la ecuación (2.46) y las ondas solitarias tienen comportamiento de partículas estables. Debido a esto Zabusky y Kruskal las nombraron *solitones*, donde el sufijo “on” proviene de la palabra griega para “partícula”; solitón significa, pues, una onda solitaria que se comporta como partícula (Zabusky and Kruskal, 1965).

En investigaciones posteriores los físico matemáticos, descubrieron que estos solitones no eran exclusivos de la ecuación KdV, sino que existe toda una variedad de ecuaciones diferenciales parciales que poseen soluciones con las mismas o similares características de ellos. Aparte se ha redactado una breve introducción sobre el origen de la teoría del solitón, pero para este trabajo de tesis, el solitón que nos interesara conocer será el Kink que a continuación se describirá el origen y las características de esta solución solitón.

2.5.1. El Kink

En la teoría de solitones existe una variedad de soluciones que cumplen con las características de un solitón, uno de los más característicos de estas soluciones debido a que es el objeto topológico más sencillo nacido de un modelo teórico de un solo campo escalar de (1+1) dimensiones es el denominado solución solitón de tipo Kink. En el estudio de la física - matemática existe una variedad de ecuaciones cuya solución es un solitón de tipo Kink, para esta introducción se va usar un modelo matemático el cual tiene una solución de tipo Kink, pero para no extender mucho esta introducción no detallaremos extensamente lo que significa el término de densidad lagrangiana y el tensor energía momento, estos términos se detallarán con mas precisión en los capítulos posteriores, entonces teniendo esto en cuenta, el modelo que usaremos en este ejemplo estará caracterizado por la siguiente función (Rubakov, 2009)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - V(\varphi), \quad \nu = 0, 1. \quad (2.47)$$

Donde \mathcal{L} es la función de densidad lagrangiana que caracteriza a un modelo que contiene un campo escalar φ , si esta función se reemplaza en la expresión de las ecuaciones de Euler - Lagrange obtendremos la ecuación de campo como se detallara en capítulos posteriores.

Para que este modelo pueda presentar soluciones tipo solitón, es necesario que la función $V(\varphi)$ de la ecuación (2.47), la cual llamaremos como la función potencial del modelo, presenta por lo mínimo dos valores de φ el cual minimiza el potencial $V(\varphi)$. Para este ejemplo

el potencial que se va a elegir será de la siguiente forma

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \frac{\mu^2}{4\lambda}, \quad (2.48)$$

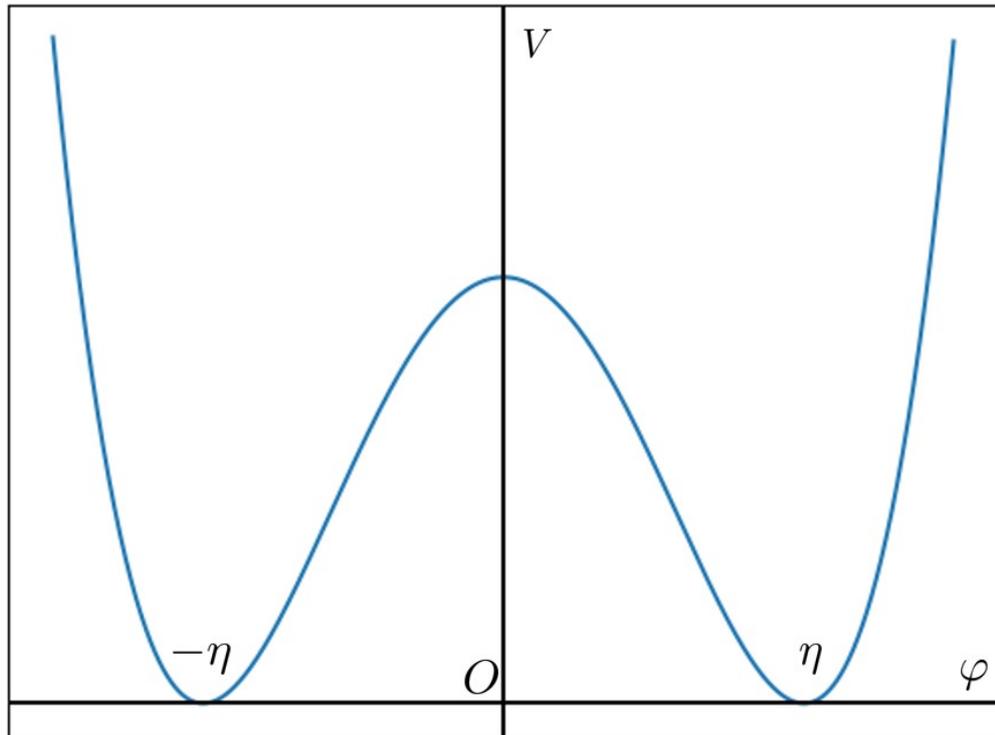
donde μ y λ son constantes, si lo transformamos a un binomio al cuadrado obtenemos

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - \eta^2)^2, \quad \text{con} \quad \eta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.49)$$

si graficamos la función potencial (2.49) en función del campo φ , obtenemos la figura 8

Figura 8

Gráfica de la función potencial de un modelo de la teoría de campos de (1+1) dimensiones.



De la figura 8, se puede apreciar que los valores de φ que minimizan la función potencial $V(\varphi)$ se encuentra en los valores:

$$\varphi = \pm\eta.$$

En teoría clásica de campos a estos valores que minimizan la energía del modelos se le conoce como “vacíos” del modelo o “estados fundamentales” del modelo, a esta variedad de vacío crea

el espacio de configuraciones del campo que minimizan la energía. En este ejemplo, la variedad del vacío es doblemente degenerada dada por la simetría de reflexión $V(+\eta) = V(-\eta)$.

Si reemplazamos la densidad lagrangiana (2.47) en las ecuaciones de Euler - Lagrange para un caso estacionario ($\partial_t \varphi = 0$), obtenemos la siguiente ecuación de campo

$$\partial_{xx}\varphi - \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (2.50)$$

si integramos la ecuación (2.50) con respecto a φ , se obtiene

$$\int (\partial_{xx}\varphi) d\varphi - \int \frac{dV}{d\varphi} d\varphi = 0$$

$$\frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - V(\varphi) = \varepsilon_0.$$

Para resolver esta ecuación diferencial vamos a imponer las siguientes condiciones: cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces $\partial_x\varphi = 0$ y $V(\varphi) = 0$. Por lo tanto, $\varepsilon_0 = 0$, entonces la anterior ecuación diferencial sera igual a

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\sqrt{2V}, \quad (2.51)$$

si elegimos el signo positivo y reemplazamos la expresión de $V(\varphi)$ (ecuación (2.49)), obtenemos:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(\varphi^2 - \eta^2), \quad (2.52)$$

la solución de la ecuación (2.52) está dado por la siguiente función

$$\varphi(x) = \eta \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta(x - x_0)\right).$$

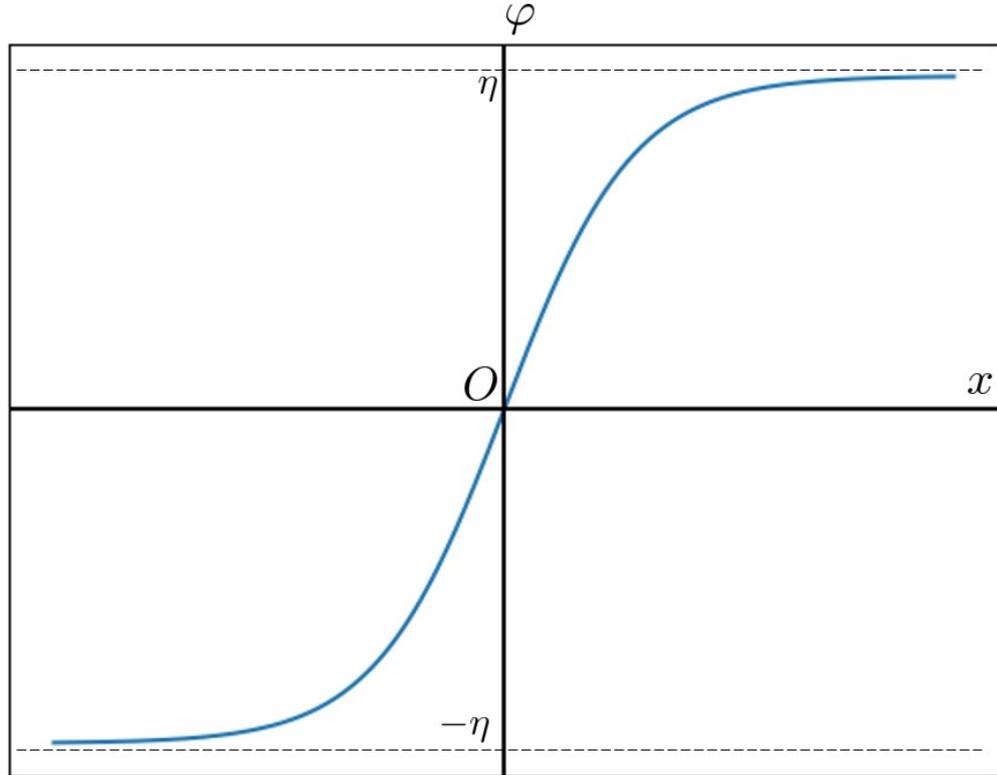
Donde el termino x_0 es una constante de integración y representa la posición del centro del solitón, si tomamos por comodidad que $x_0 = 0$, entonces la solución del Kink va estar dado por

$$\varphi_K(x) = \eta \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta x\right), \quad (2.53)$$

si graficamos la ecuación (2.53), obtenemos la figura 9

Figura 9

Gráfica de solución tipo Kink para un modelo de la teoría de campos de (1+1) dimensiones.



La solución solitón tipo Kink tiene esta peculiar forma como se muestra en la figura 9, cuando x toma valores asintóticos el campo φ tiende a tomar los valores de los vacíos o estados fundamentales que minimizan la energía del modelo, este es algo característico de este tipo de soluciones.

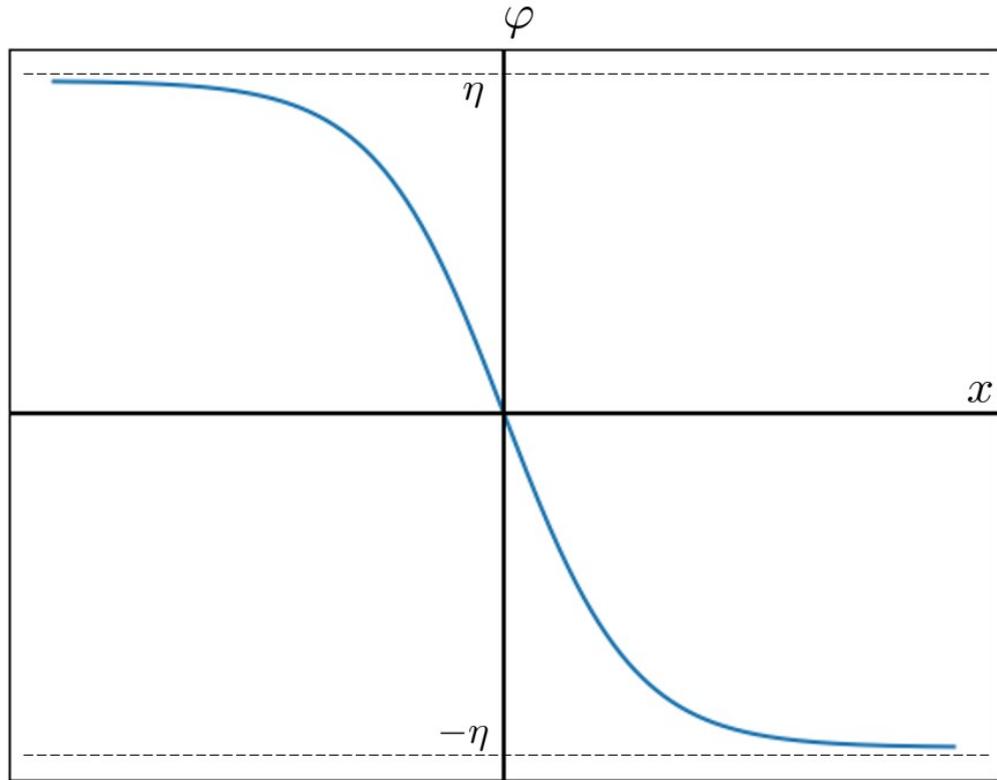
La solución tipo Kink (2.53) tiene esta forma debido a que se eligió el signo positivo en la ecuación (2.51), pero si hubiésemos elegido el signo negativo obteníamos una solución tipo Antikink, y la solución (2.53) se hubiese transformado en la siguiente expresión

$$\varphi_{AK}(x) = \eta \tanh\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta x\right), \quad (2.54)$$

la ecuación (2.54) representa una solución solitón de tipo Antikink y cuya gráfica se muestra en la figura 10.

Figura 10

Gráfica de solución tipo Antikink para un modelo de la teoría de campos de (1+1) dimensiones.



La figura 10 representa a una solución Antikink y como se puede ver es muy parecida a una solución Kink, solo con la diferencia que cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$, la función de campo φ tiende a los estados fundamentales $-\eta$ y $+\eta$ respectivamente.

Con el concepto del Tensor energía - momento que en capítulos posteriores se detallará, se puede demostrar que la energía de dicho modelo esta dado por la siguiente integral.

$$E[\varphi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \eta^2)^2 \right]. \quad (2.55)$$

De la figura 9 podemos analizar que cuando $x \rightarrow \pm\infty$, el primer y el segundo término de la expresión de la energía (ecuación (2.55)) tiende a cero, por lo tanto, la energía es finita y no hay inconsistencias físicas. De la ecuación (2.55) definimos la densidad de energía $\varepsilon(x)$ como

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \eta^2)^2,$$

si reemplazamos la función de campo φ con la solución tipo Kink φ_K , obtendremos la densidad de energía para el Kink

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_K}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi_K^2 - \eta^2)^2, \quad (2.56)$$

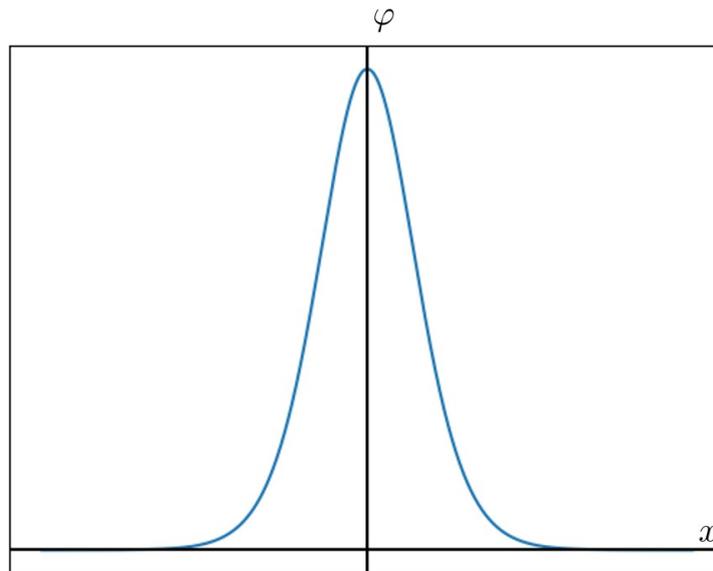
reemplazando la expresión de la solución tipo Kink (2.53) en la ecuación (2.56), obtenemos que la densidad de energía va estar dado por la siguiente expresión

$$\varepsilon(x) = \frac{\lambda}{2} \eta^4 \frac{1}{\cosh^4 \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} x \right)}, \quad (2.57)$$

graficando la ecuación (2.57), obtenemos la figura 11

Figura 11

Gráfica de la densidad de energía de una solución tipo Kink.



De la figura 11 podemos apreciar que la densidad de energía para la solución tipo Kink es un paquete de energía concentrado y, por lo tanto, podemos encontrar la energía que lleva este paquete simplemente integrandolo en todo en el espacio es decir, que la energía del Kink sera igual a

$$E_K = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x) dx$$

$$E_K = \frac{2}{3} m \eta^2,$$

donde $m = \sqrt{2}\mu$ y a este valor de E_k se le identificara como la masa del Kink estática, ya que hemos analizado el caso estacionario, por lo tanto, la masa del Kink sera igual a

$$M_K = \frac{2}{3}m\eta^2.$$

Una interesante propiedad de la solución tipo Kink (2.53) es no invariante bajo transformaciones espaciales o transformaciones de Lorentz. Si aplicamos una transformación de Lorentz a la solución (2.53), obtendremos las siguientes familias de soluciones.

$$\varphi_K(x) = \eta \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta \cdot \frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right), \quad (2.58)$$

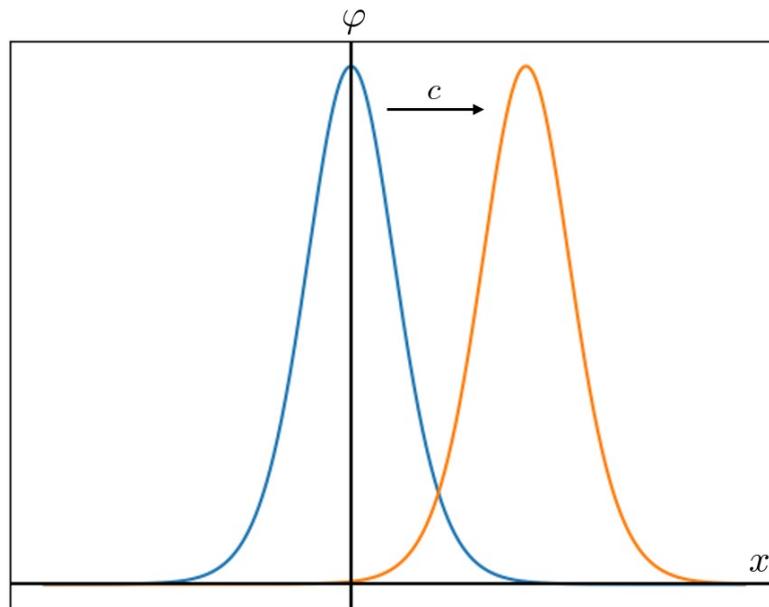
la solución (2.58) describe el movimiento del Kink, el cual puede viajar hacia la derecha con una velocidad c . Para esta solución también se puede calcular su densidad de energía, la cual estará dada por la siguiente expresión

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\lambda}{2} \eta^4 \frac{1}{\cosh^4 \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x - ct)}{\sqrt{1 - c^2}} \right)}, \quad (2.59)$$

si graficamos la ecuación (2.59) en un instante de tiempo $t > 0$, obtenemos la figura 12

Figura 12

Gráfica de la densidad de energía de una solución tipo Kink en un instante de tiempo $t > 0$, luego de haber sufrido una transformación de Lorentz.



La figura 12 muestra un paquete de energía que viaja sin cambiar su forma, es decir, no pierde energía y esto cumple con una de las características principales de una solución solitón.

Capítulo 3

El solitón neutrónico térmico

El primero en plantear un nuevo modelo de reactor el cual utiliza la teoría de solitones aplicado a la física de reactores fue Walter Seifritz el cual llamo a su modelo “Reactor Solitón Nuclear” el cual tiene la particularidad que todas sus distribuciones espaciales características (flujo de neutrones, densidad de potencia específica y las densidades de partículas asociadas) se comportan como un solitón (Seifritz, 1997). En un trabajo posterior Seifritz demostró que una onda de fluencia de neutrones en un reactor rápido presenta propiedades similares a un solitón si es encendido con un número alto de moles de una fuente de neutrones, los cuales se propagan autocatalíticamente dentro de materiales fértiles y convirtiendo parcialmente a su paso en materiales físiiles y productos de fisión (Seifritz, 1998a). Basado en estos hallazgos el planteó la siguiente hipótesis “es posible que este fenómeno de la onda solitón también ocurra en un reactor térmico”, para encontrar la dinámica del solitón en un reactor térmico él supuso que se trata de un medio infinito y subcrítico al inicio (envenenado) (Seifritz, 1998b), a continuación se desarrollara las ecuaciones dinámicas que caracterizan a este modelo para así encontrar la soluciones solitón que caracteriza a la fluencia y al flujo de neutrones.

3.1. Ecuación de difusión para el flujo de neutrones térmicos

La ecuación no lineal planteada por Seifritz para el flujo de neutrones se escribe a continuación (Seifritz, 1998b).

$$D\nabla^2\phi + [(\eta - 1)\sigma_a^f N_f - \sigma_a^v N_v - \sigma_a^{pf} N_{pf} - \Sigma_{a,0}^m]\phi = \frac{1}{v} \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (3.1)$$

donde:

D : Coeficiente de difusión.

η : Numero de neutrones producidos por neutrón absorbido.

$\phi(x, t)$: Flujo de neutrones térmicos en función del espacio y tiempo.

v : Velocidad de propagación de los neutrones.

$\sigma_a^f, \sigma_a^v, \sigma_a^{pf}$: Secciones eficaces microscópicas de absorción para el material fisible, veneno neutrónico y productos de fisión, respectivamente.

$\Sigma_{a,0}^m$: Sección eficaz macroscópica de absorción del moderador el cual se toma como constante.

$N_f(x, t), N_v(x, t), N_{pf}(x, t)$: Densidad de partículas atómicas en función del espacio y tiempo del material fisible, veneno neutrónico y productos de fisión, respectivamente.

Se plantea las siguientes ecuaciones de quemados (*burn-up equation*) para las densidades de partículas atómicas.

$$\begin{aligned}\dot{N}_f &= -\sigma_a^f N_f \phi, \\ \dot{N}_v &= -\sigma_a^v N_v \phi, \\ \dot{N}_{pf} &= \sigma_a^f N_f \phi - \sigma_a^{pf} N_{pf} \phi,\end{aligned}\tag{3.2}$$

con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}N_f(x, 0) &= N_{f,0}, \\ N_v(x, 0) &= N_{v,0}, \\ N_{pf}(x, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones diferenciales (3.2) con sus respectivas condiciones iniciales (ver Apéndice A.2) se obtiene:

$$N_f(x, t) = N_{f,0} \cdot e^{-F},\tag{3.3}$$

$$N_v(x, t) = N_{v,0} \cdot e^{-\mu F},\tag{3.4}$$

$$N_{pf}(x, t) = \frac{N_{f,0}}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}),\tag{3.5}$$

donde

$$\mu = \frac{\sigma_a^v}{\sigma_a^f} \quad , \quad \gamma = \frac{\sigma_a^{pf}}{\sigma_a^f}$$

y

$$F = F(x, t) = \sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau, \quad (3.6)$$

la función F es una función adimensional y se le denomina como la “fluencia de neutrones”.

Si se inserta las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) en la ecuación (3.1) se obtiene la siguiente ecuación de difusión en términos de F y ϕ (los cálculos están en el Apéndice A.3)

$$D\nabla^2\phi + \Sigma_{a,0}^f \left[(\eta - 1)e^{-F} - \mu \Lambda e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \right] \phi = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (3.7)$$

donde

$$\Lambda = \frac{N_{v,0}}{N_{f,0}} \quad , \quad \Gamma = \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\Sigma_{a,0}^f}$$

Si se define

$$\kappa^2(F) = \frac{\Sigma_{a,0}^f}{D} \left[(\eta - 1)e^{-F} - \mu \Lambda e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \right], \quad (3.8)$$

entonces la ecuación (3.7) se reescribirá como

$$\nabla^2\phi + \kappa^2(F)\phi = \frac{1}{vD} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (3.9)$$

si existiera el caso en el que el flujo de los neutrones ϕ sea un flujo estacionario y la función $\kappa^2(F)$ sea una constante, entonces la ecuación (3.9) se trataría de la “ecuación de Helmholtz” y la constante κ^2 sería el número de onda, pero en este caso el termino $\kappa^2(F)$ es una función trascendental en función de la fluencia e introduce una no linealidad dentro de la ecuación de onda.

3.2. Planteamiento de la solución solitón

El planteamiento para encontrar una solución del tipo solitón para la ecuación (3.7) seguirá el mismo planteamiento utilizado en el modelo no lineal de la ecuación KdV, si a la ecuación (2.45) se considera como una solución de onda la cual viaja con una velocidad de fase “ a ” hacia la derecha manteniendo su forma, es decir se esta considerando una solución de la forma (Brauer, 2000)

$$u(x, t) = k(x - at) \equiv k(\varepsilon),$$

si la solución $k(\varepsilon)$ es introducida en la ecuación (2.45) se obtiene la siguiente ecuación

$$-a \frac{\partial k}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^3 k}{\partial \varepsilon^3} - \alpha k \frac{\partial k}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Ecuación que tiene una solución del tipo solitón representada en la ecuación (2.46).

Teniendo en cuenta el planteamiento en la ecuación KdV, para hallar una solución del tipo solitón en la ecuación (3.7) se considerara la siguiente solución de onda viajera con velocidad de fase v/D

$$F(x, t) = F(g(x, t)) = F\left(\frac{x - vt}{D}\right)$$

Recordando la expresión de la fluencia F , entonces se tiene la siguiente igualdad

$$F\left(\frac{x - vt}{D}\right) = \sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau \quad (3.10)$$

A partir de la ecuación (3.10) se van a encontrar las expresiones de ϕ , $\partial\phi/\partial t$ y $\nabla^2\phi$ en función de la fluencia F , tales expresiones son las siguientes (los cálculos están en el Apéndice A.4):

$$\phi = -\frac{v}{D \sigma_a^f} F', \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{v^2}{D^2 \sigma_a^f} F'', \quad (3.12)$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{v}{D^3 \sigma_a^f} F'''. \quad (3.13)$$

Hay que tener en cuenta que el termino F' es la derivada con respecto a todo su argumento, es decir $F' = dF/dg$. Al introducir las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) en la ecuación (3.7), se obtendrá la ecuación de difusión en términos de la fluencia de neutrones F , la ecuación que se obtiene es la siguiente (el desarrollo esta en el Apéndice A.5)

$$-D \Sigma_{a,0}^f \left[(\eta - 1)e^{-F} - \mu \Lambda e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \right] F' = F''' + F''. \quad (3.14)$$

Se puede observar que la anterior expresión es una ecuación adimensional y que el termino de la velocidad v no esta presente en dicha ecuación y solo esta expresado en términos de la fluencia F , por lo tanto, la solución de onda (3.10) que se planteo queda justificada.

Si a la ecuación (3.14) se integra una vez con respecto al argumento $g(x, t)$, pero con la condición que la constante de integración debe elegirse de tal manera que asintóticamente $F = F' = F'' = 0$. A este valor de $F = 0$ se le llamara el primer “estado fundamental” de la

ecuación, dicha ecuación que se obtiene es la siguiente

$$\Pi(F) = F'' + F', \quad (3.15)$$

donde:

$$\Pi(F) = D \cdot \Sigma_{a,0}^f \left\{ (\eta - 1)(e^{-F} - 1) - \Lambda(e^{-\mu F} - 1) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{\gamma}(e^{-\gamma F} - 1) - (e^{-F} - 1) \right] - \Gamma \cdot F \right\} \quad (3.16)$$

A la función $\Pi(F)$ se le va a denominar como la función potencial del modelo, si se analiza la ecuación (3.16), como $F \geq 0$ todos los términos de la ecuación (3.16) son negativos excepto el segundo término que es positivo, debido a que este término proviene del quemado o consumo del veneno neutrónico el cual da como resultado un aumento en la reactividad. Antes de encontrar la solución solitón aproximada de este modelo (3.15), se encontrara la constante de multiplicación infinita y su dependencia con respecto a la fluencia de los neutrones.

3.3. Constante de multiplicación infinita en un modelo de reactor térmico solitón

Recordando la expresión de la ecuación del reactor (2.44), la constante de multiplicación infinita se hallará a partir de la ecuación de difusión. Se escribe nuevamente la ecuación de difusión (3.1):

$$D\nabla^2\phi + [(\eta - 1)\sigma_a^f N_f - \sigma_a^v N_v - \sigma_a^{pf} N_{pf} - \Sigma_{a,0}^m]\phi = \frac{1}{v} \frac{\partial\phi}{\partial t},$$

desarrollando esta ecuación se obtiene

$$D\nabla^2\phi + \eta \sigma_a^f N_f \phi - (\sigma_a^f N_f + \sigma_a^v N_v + \sigma_a^{pf} N_{pf} + \Sigma_{a,0}^m)\phi = \frac{1}{v} \frac{\partial\phi}{\partial t},$$

como

$$\Sigma_a^f = \sigma_a^f \cdot N_f,$$

es la sección eficaz macroscópica de absorción del material fisible, además

$$\Sigma_a = \sigma_a^f N_f + \sigma_a^v N_v + \sigma_a^{pf} N_{pf} + \Sigma_{a,0}^m,$$

donde Σ_a es la sección eficaz macroscópica de absorción total, por lo tanto, la ecuación de difusión se reescribirá de la forma

$$D\nabla^2\phi + \eta \frac{\Sigma_a^f}{\Sigma_a} \Sigma_a \phi - \Sigma_a \phi = \frac{1}{v} \frac{\partial\phi}{\partial t},$$

recordando el concepto de la constante de multiplicación infinita, entonces se obtiene

$$D\nabla^2\phi + K_\infty\Sigma_a\phi - \Sigma_a\phi = \frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t},$$

donde esta expresión es la ecuación del reactor y por lo tanto la constante de multiplicación infinita es

$$K_\infty = \eta \cdot \frac{\Sigma_a^f}{\Sigma_a},$$

$$K_\infty = \frac{\eta \sigma_a^f N_f}{\sigma_a^f N_f + \sigma_a^v N_v + \sigma_a^{pf} N_{pf} + \Sigma_{a,0}^m},$$

escribiendo K_∞ en función de la fluencia F se obtiene la siguiente expresión (los cálculos están en el Apéndice A.6):

$$K_\infty(F) = \frac{\eta \cdot e^{-F}}{e^{-F} + \mu \Lambda e^{-\mu F} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(e^{-F} - e^{-\gamma F}) + \Gamma}. \quad (3.17)$$

Para el caso donde $F = 0$ se tiene que:

$$K_\infty(0) = \frac{\eta}{1 + \mu \Lambda + \Gamma}, \quad (3.18)$$

esta expresión se la conoce como la constante de multiplicación para la “potencia cero” (*zero-power*) (Seifritz, 1998b).

Para que los próximos cálculos sean mejor explicados y sencillos de entender, se tendrá la necesidad de dar valores a las secciones eficaces, coeficiente de difusión y a las densidades de partículas atómicas, por ello, se va a considerar que para nuestro modelo de reactor nuclear que se está trabajando con ^{235}U como material fisible, ^{10}B como veneno neutrónico, grafito como moderador y para los productos de fisión se usara dos grupos de productos de fisión correspondiente a la fisión del ^{235}U que se muestran en la tabla 2:

Tabla 2

Secciones eficaces de absorción de neutrones térmicos para los productos de fisión

	$(\sigma_a^{pf})_i$ b	T _{1/2} Isotopo	T _{1/2} Precursor	Rendimiento de fisión Y _i (%)
Grupo 1:				
¹⁴⁹ Sm	6,6 · 10 ⁴	estable	50 h	1,150
¹⁴⁹ Sm	1,2 · 10 ⁴	80 a	27 h	0,730
¹⁴⁹ Cd	2,5 · 10 ⁴	estable	5,3 h	0,011
¹⁵⁵ Eu	1,4 · 10 ⁴	estable	23 min	0,031
Grupo 2:				
¹⁵³ Eu	420	estable	47 h	0,15
⁸³ Kr	205	estable	2,3 h	0,54
¹¹⁵ In	197	estable	54 h, 43 d	0,001
¹⁴³ Nd	300	estable	13,8 h	5,90
	$\sigma_a^{pf} = \sum_{i=1}^8 Y_i \cdot (\sigma_a^{pf})_i$			

Extraído de (Seifritz, 1998b).

Los valores de coeficiente de difusión, las secciones eficaces del U, B y el grafito, y además los valores de las densidades atómicas iniciales del U y grafito que se van a utilizar se detalla a continuación:

- Coeficiente de difusión:

$$D = 0,868 \text{ cm}$$

- Grafito:

$$\sigma_a^m = 4,8 \text{ mb}, \quad N_{m,0} = 8 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

$$\Sigma_{a,0}^m = \sigma_a^m \cdot N_{m,0}$$

$$\Sigma_{a,0}^m = 3,84 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

- ²³⁵U:

$$\sigma_a^f = 688 \text{ b}, \quad \eta = 2,08$$

$$N_{f,0} = 5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$\Sigma_{a,0}^f = \sigma_a^f \cdot N_{f,0} = 34,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

- ¹⁰B:

$$\sigma_a^v = 3837 \text{ b.}$$

De acuerdo a los valores que se utilizarán, por lo tanto, los coeficientes μ y γ de la ecuación

(3.7) sera igual a los siguientes valores:

$$\mu = \frac{\sigma_a^v}{\sigma_a^f} = 5,577 \quad , \quad \gamma = \frac{\sigma_a^{pf}}{\sigma_a^f} = 1,27.$$

Se ha definido las densidades atómicas iniciales del U y del grafito, pero no del veneno neutrónico (^{10}B), ya que su escala de tiempo en que se consume es mayor alrededor de las 10 h y además depende de la constante de multiplicación para la potencia cero (3.18) , esta relación entre la concentración inicial del veneno neutrónico y la constante de multiplicación se muestra en la siguiente ecuación (los cálculos se encuentran en el Apéndice A.7):

$$N_{v,0} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\eta}{K_\infty(0)} - 1 \right) \cdot N_{f,0} - \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\sigma_a^v}. \quad (3.19)$$

Para determinar la concentración inicial del veneno neutrónico, se calculará la constante de multiplicación infinita a potencia cero ($K_\infty(0)$), reemplazando las constantes halladas en la ecuación (3.18) se obtiene que

$$K_\infty(0) = 0,9.$$

Se puede ver que $K_\infty(0) < 1$, por lo tanto, a potencia cero nos encontramos en un estado subcrítico como se muestra en la figura 13 y llegar a su máximo valor de 1.222 cuando la fluencia F es aproximadamente igual a 0.5, reemplazando valores a la ecuación (3.19) se obtiene que

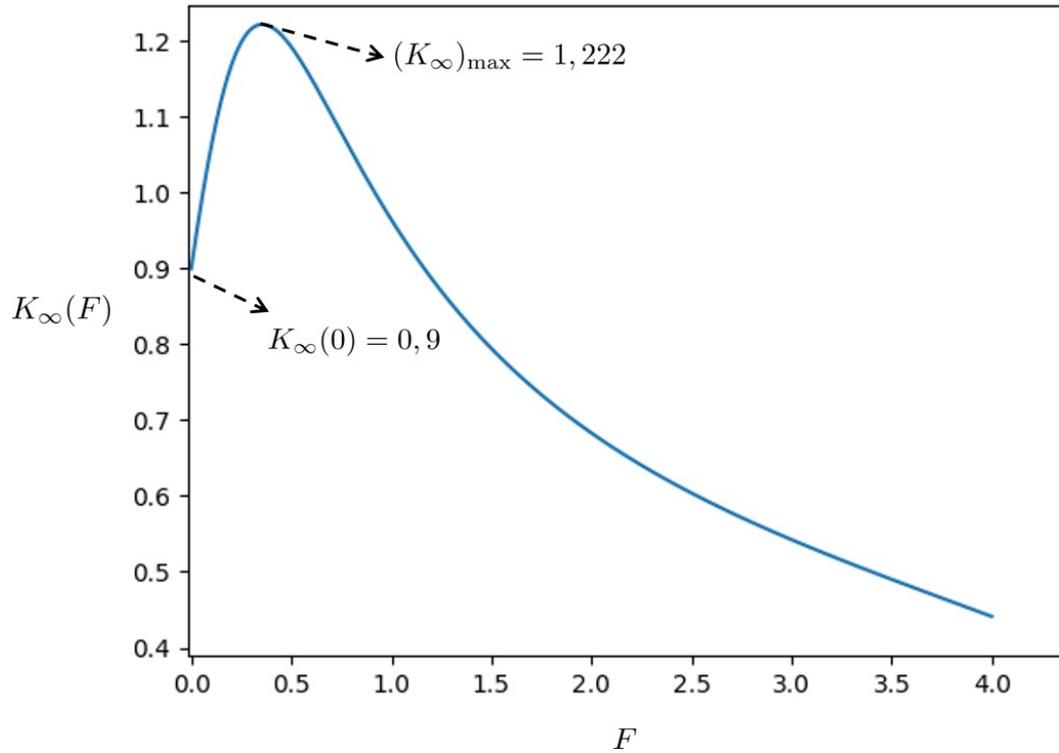
$$N_{v,0} = 1,1655 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}.$$

Conociendo el valor de $N_{v,0}$ se puede calcular el coeficiente Λ y de paso el coeficiente Γ de la ecuación (3.7), los valores obtenidos son los siguientes:

$$\Lambda = \frac{N_{v,0}}{N_{f,0}} = 0,2331 \quad , \quad \Gamma = \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\Sigma_{a,0}^f} = 1,1163 \cdot 10^{-2}$$

Figura 13

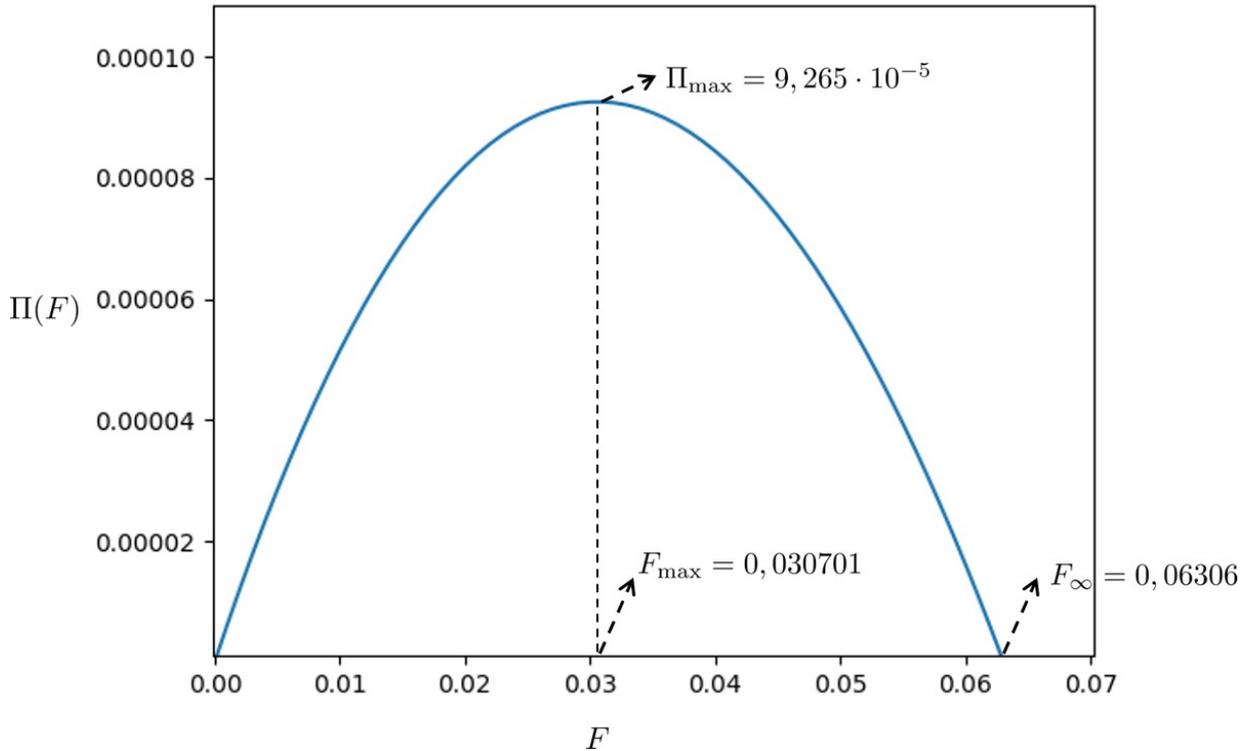
Gráfica de la constante de multiplicación infinita (K_∞) en función de la fluencia F



Una vez ya definidas las constantes $\eta, D, \Sigma_{a,0}^f, \mu, \gamma, \Lambda$ y Γ , se puede graficar la función (3.16) en función de F , dicha gráfica se muestra en la figura 14. La figura 14 muestra que hay dos valores de F el cual hace que $\Pi(F) = 0$, a estos dos valores de F son los estados fundamentales que minimiza a la función $\Pi(F)$, estos estados fundamentales son $F = 0$ y $F_\infty = 0,06306$, estos valores serán de utilidad para encontrar la solución aproximada de la ecuación (3.15) como se muestra en la siguiente sección.

Figura 14

Gráfica de la función adimensional $\Pi(F)$ en función de la fluencia F



3.4. Solución numérica de la ecuación de difusión

Para encontrar la solución numérica se tiene que trabajar con la ecuación diferencial (3.15), en la teoría de los métodos numéricos existe una variedad de métodos para resolver ecuaciones diferenciales. Para este estudio se optó en utilizar el “método de Euler”, debido a su simplicidad y porque el tamaño de paso de punto a punto que se va a utilizar es menor a 1 y de esta manera el error será mínimo. De acuerdo al método de Euler debido a que la ecuación (3.15) es una ecuación diferencial de segundo orden, es necesario conocer como condiciones iniciales (C.I) el valor de la función F y la derivada con respecto a g de dicha función, es decir, se necesita el valor de F' (Chapra, 2010), las C.I que se impondrán de acuerdo a nuestro objetivo de hallar una solución de tipo solitón serán las siguientes:

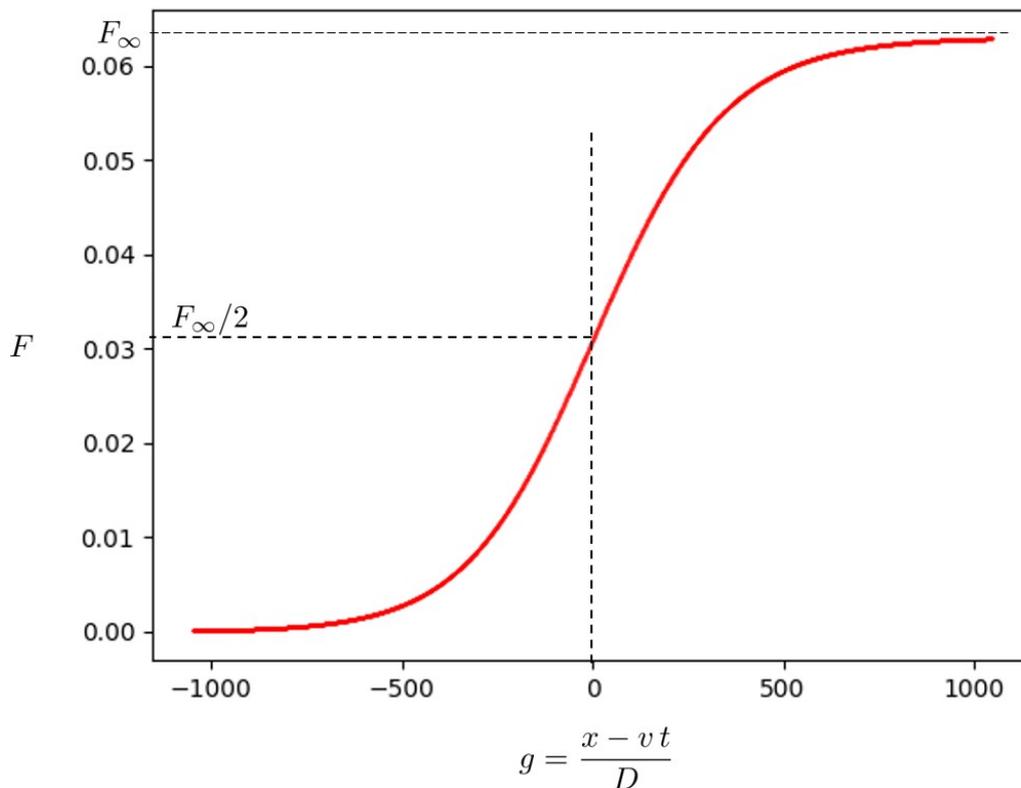
Cuando $g \rightarrow -\infty$

- $F \rightarrow 0$.
- $F' = 0$

Con estas C.I y considerando un tamaño de paso constante, se aplica el método de Euler para desarrollar la ecuación (3.15), este calculo numérico se desarrollo a través de un código escrito en el lenguaje de programación "Python", dicho código se encuentra en el Apéndice A.8, el resultado que arroja dicho código se muestra en la figura 15

Figura 15

Gráfica de la solución numérica de la ecuación de difusión con C.I $F \rightarrow 0, F' = 0$.



Como se puede ver de la figura 15, dicha gráfica presenta 2 asíntotas una en $F = 0$ y el otro en F_{∞} y de acuerdo a nuestra marco teórico planteado la figura 15 es similar a la figura 9, por lo tanto, dicha gráfica representa una solución solitón tipo Kink, ya que cuando $g \rightarrow \pm\infty$ la función F tiende a los dos estados fundamentales 0 y F_{∞} de la función $\Pi(F)$ respectivamente, que son los valores en donde $\Pi(F)$ toma una valor mínimo, esta es una característica de las soluciones solitón tipo Kink.

3.5. Solución solitón aproximada de la ecuación de difusión

Para poder obtener una solución solitón de manera analítica hay que tomar en cuenta la gráfica 15 que se obtuvo a través del calculo numérico. De acuerdo ha dicho gráfico se puede ver que aproximadamente la gráfica de la función F tiene el comportamiento de una

función impar, por lo tanto, podemos aproximar la función $\Pi(F)$ a través de una serie de Fourier en el dominio $0 \leq F \leq F_\infty$. Recordando la definición de una serie de Fourier de una función periódica:

Sea una función periódica $f(t)$ con un periodo T , entonces es posible aproximar dicha función a través de series de funciones senos y cosenos, es decir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \quad -T \leq t \leq T, \quad (3.20)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-T}^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt \quad (3.21)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-T}^T f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt. \quad (3.22)$$

Para nuestro caso vamos a aproxima la función $\Pi(F)$ a través de series de funciones senos es decir:

$$\Pi(F) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right), \quad (3.23)$$

donde

$$b_n = \frac{1}{F_\infty} \int_{-F_\infty}^{F_\infty} \Pi(F) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) dF = \frac{2}{F_\infty} \int_0^{F_\infty} \Pi(F) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) dF,$$

desarrollando esta integral se obtiene la expresión de b_n que se muestra a continuación (los cálculos están en el Apéndice A.9):

$$\begin{aligned} b_n = 2 \cdot D \cdot \Sigma_{a,0}^f \left\{ (\eta - 1) \left[\frac{F_\infty}{F_\infty^2 + n^2 \pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] - \right. \\ \Lambda \left[\frac{\mu^2 F_\infty}{\mu^2 F_\infty^2 + n^2 \pi^2} \left(\frac{n\pi}{\mu^2 F_\infty} - \frac{e^{-\mu F_\infty}}{\mu} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\mu^2 F_\infty} e^{-\mu F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] - \\ \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma^2 F_\infty}{\gamma^2 F_\infty^2 + n^2 \pi^2} \left(\frac{n\pi}{\gamma^2 F_\infty} - \frac{e^{-\gamma F_\infty}}{\gamma} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\gamma^2 F_\infty} e^{-\gamma F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] + \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{F_\infty}{F_\infty^2 + n^2 \pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] - \\ \left. \Gamma \left[\frac{F_\infty}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) \right] \right\}. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Haciendo un análisis de los denominadores, solo vamos a considerar para $n = 1$, ya que para el orden $n > 1$, los términos se hacen más pequeños y se pueden despreciar, calculando el

termino b_1 se tiene la siguiente expresión (ver Apéndice A.10):

$$b_1 = 2 \cdot D \cdot \Sigma_{a,0}^f \left\{ \left((\eta - 1) + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) \left[\frac{\pi}{F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \Lambda \left[\frac{\pi}{\mu^2 F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-\mu F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\pi}{\lambda^2 F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-\lambda F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \Gamma \cdot \frac{F_\infty}{\pi} \right\}. \quad (3.25)$$

Reemplazando los valores de D , $\Sigma_{a,0}^f$, η , μ , γ , Λ y Γ obtenemos que

$$b_1 = 1,020 \cdot 10^{-4},$$

los términos superiores a $n = 1$ como b_2 , b_3 , etc, tienen orden alrededor o menores de 10^{-5} , por lo tanto, se despreciarán esos términos y solo se trabajará con el termino b_1 , entonces la función $\Pi(F)$ de acuerdo a la aproximación (3.23) será igual a

$$\Pi(F) = b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi F}{F_\infty} \right), \quad (3.26)$$

reemplazando la ecuación (3.26) en la ecuación (3.15) se obtiene:

$$F'' + F' = b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi F}{F_\infty} \right). \quad (3.27)$$

Si se desarrolla la ecuación (3.27) tal y como está, se tendrá muchas dificultades en su desarrollo, por lo tanto, hay que optar por otros métodos de desarrollo; para ello se hará uso de la técnica de transformación de auto - semejanza (*self - similar transformation*) (Gratton, 1991; El-Wakil et al., 2016), el cual es una técnica usada muy frecuente en el estudio de las ecuaciones de la dinámica de fluidos, dicha técnica permite la simplificación de dichas ecuaciones que contienen variables independientes como puede ser el caso del espacio y tiempo, en un conjunto de ecuaciones diferenciales que dependen de una variable independiente que es una combinación de las anteriores variables independientes de espacio y tiempo. Como en la ecuación (3.27) la variable independiente es g la cual es una combinación de las variables (x, t) , por lo tanto, la transformación de auto - semejanza va estar dado por la siguiente transformación de escala

$$F(g) \rightarrow \lambda \cdot F^* (\kappa \cdot g). \quad (3.28)$$

Al hacer este reescaleo (3.28), se está haciendo que la función F sea semejante a la función F^* , para que estas funciones sean equivalentes hay que hallar los factores λ y κ , estos factores se hallarán reemplazando la equivalencia (3.28) en la ecuación (3.27) (ver los cálculos en el

Apéndice A.11), reemplazando se obtiene:

$$\lambda = \frac{F_\infty}{\pi} \quad , \quad \kappa = \sqrt{\frac{b_1 \pi}{F_\infty}}.$$

Conociendo los valores λ y κ , y reemplazando la equivalencia (3.28) en la ecuación (3.27) se obtiene la siguiente ecuación

$$(F^*)'' + \sqrt{\frac{F_\infty}{b_1 \pi}} \cdot (F^*)' = \text{sen}(F^*). \quad (3.29)$$

Reemplazando los valores de F_∞ y b_1 en la ecuación (3.29), se obtiene

$$(F^*)'' + 14,03 (F^*)' = \text{sen}(F^*). \quad (3.30)$$

Llegado a este punto, se analiza la ecuación (3.27), como $b_1 \ll 1$, esto implica que tanto las funciones F' y F'' son $\ll 1$, en consecuencia, $F \ll 1$, pero como se hizo la transformación de auto - semejanza (ecuación (3.28)), esto implica que la función $F^* \ll 1$. Si se analiza la ecuación (3.30), se ve que el coeficiente que multiplica a $(F^*)'$ es mayor que el coeficiente que multiplica a $(F^*)''$ y como $F^* \ll 1$, entonces el segundo termino del lado izquierdo de la ecuación (3.30) será el que predomina, por lo tanto, haciendo una aproximación fuerte el termino $(F^*)''$ puede ser despreciado, entonces teniendo en cuenta esta aproximación se tendrá la siguiente ecuación

$$14,03 (F^*)' = \text{sen}(F^*).$$

Pero como la ecuación (3.27) es auto - semejante a la ecuación (3.30) debido a la transformación (3.28), esto implica que la ecuación (3.27) puede ser aproximado a la siguiente ecuación

$$F' = b_1 \text{sen} \left(\frac{\pi F}{F_\infty} \right), \quad (3.31)$$

si se integra la anterior ecuación diferencial con respecto a la variable $g(x, t) = (x - vt)/D$, se obtiene la solución solitón para la fluencia de neutrones, la solución se muestra en la siguiente ecuación (los cálculos se encuentra en el Apéndice A.12)

$$F(g) = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \cdot \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g} \right). \quad (3.32)$$

Analizando los casos asintóticos de la ecuación (3.32), si $g \rightarrow \infty$ entonces:

$$F = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \arctan(\infty),$$

$$F = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = F_\infty,$$

por lo tanto

Si: $g \rightarrow \infty$, entonces $F \rightarrow F_\infty$.

Analizando el caso cuando $g \rightarrow -\infty$, entonces:

$$F = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \arctan(0),$$

$$F = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \cdot 0 = 0,$$

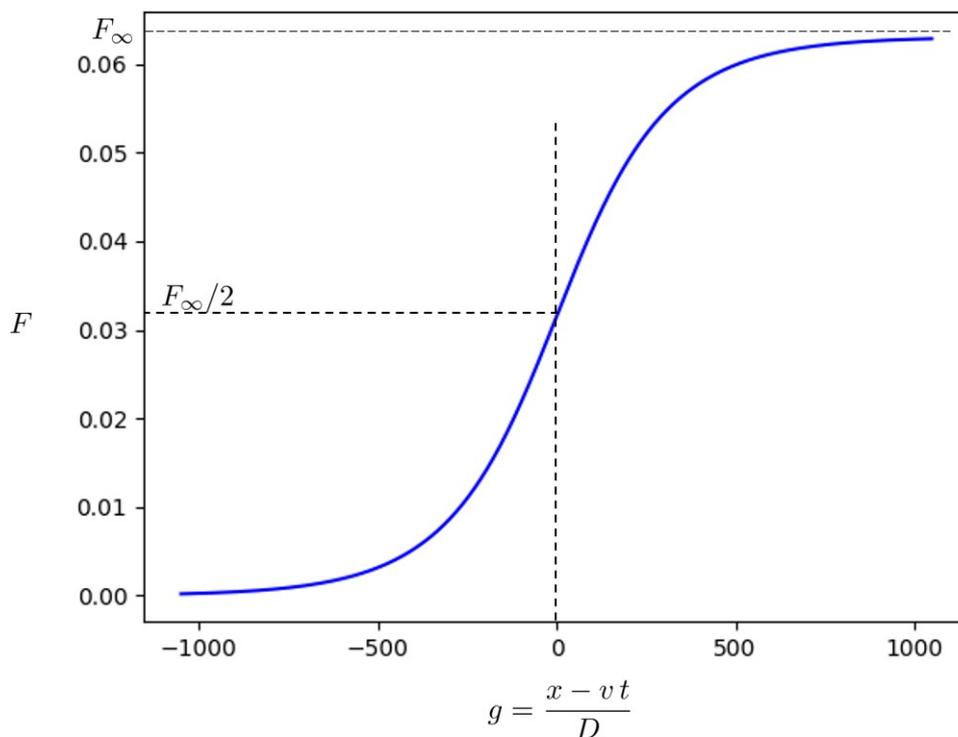
por lo tanto

Si: $g \rightarrow -\infty$, entonces $F \rightarrow 0$.

Si se gráfica la solución $F(g)$ ecuación (3.32) como se presenta en la figura 16, se puede apreciar que en los casos asintóticos de $g \rightarrow -\infty$ y $g \rightarrow \infty$, se obtiene los estados fundamentales $F = 0$ y $F = F_\infty$ respectivamente. Es decir que en los casos asintóticos la función F converge a los dos estados fundamentales del modelo en donde nuestra función potencial $\Pi(F)$ se hace cero, este peculiar comportamiento de la función F es característico de una solución solitón de tipo Kink, por lo tanto, la ecuación (3.32) es una solución de tipo Kink, en consecuencia, se ha demostrado la existencia de una solución solitón para este modelo.

Figura 16

Grafica de la fluencia F en función de la variable $g = (x - vt)/D$



Enseguida se encontrara la solución analítica del solitón para el flujo de neutrones (ϕ), para ello se va a utilizar las ecuaciones (3.11) y (3.31), introduciendo un valor para el flujo de neutrones ϕ_* ($\phi_* = 10^{10}$ n/cm² · s), entonces por la ecuación (3.11) se tiene:

$$\phi_* = -\frac{v}{D \sigma_a^f} F'_*,$$

de acuerdo a la ecuación (3.31) se tiene

$$F'_* = b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi F_*}{F_\infty} \right),$$

por razones de simplicidad se va elegir que $F_* = F_\infty/2$, por ende

$$F'_* = b_1,$$

reemplazando este valor en la ecuación de ϕ_* , se obtiene que

$$\phi_* = -\frac{v \cdot b_1}{D \cdot \sigma_a^f}, \quad (3.33)$$

por ende la velocidad del solitón sera igual a

$$v = -\frac{D \cdot \sigma_a^f}{b_1} \cdot \phi_*, \quad (3.34)$$

ahora que se ha definido la velocidad del solitón para el flujo de neutrones ϕ , se pasará a encontrar la forma de solución analítica del solitón para el flujo de neutrones, volviendo a utilizar la ecuación (3.11) se tiene

$$\phi = -\frac{v}{D \sigma_a^f} F'$$

reemplazando el valor de v , entonces

$$\phi = \frac{-1}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{-D \cdot \sigma_a^f}{b_1} \cdot \phi_* = \frac{\phi_*}{b_1} \cdot F'.$$

Para encontrar la solución de ϕ necesitamos encontrar la expresión de F' , para ello se utilizará la solución de F (3.32) y una vez encontrado la derivada F' se reemplazará en la expresión de ϕ y se obtendrá la solución analítica del solitón para el flujo de neutrones que se muestra

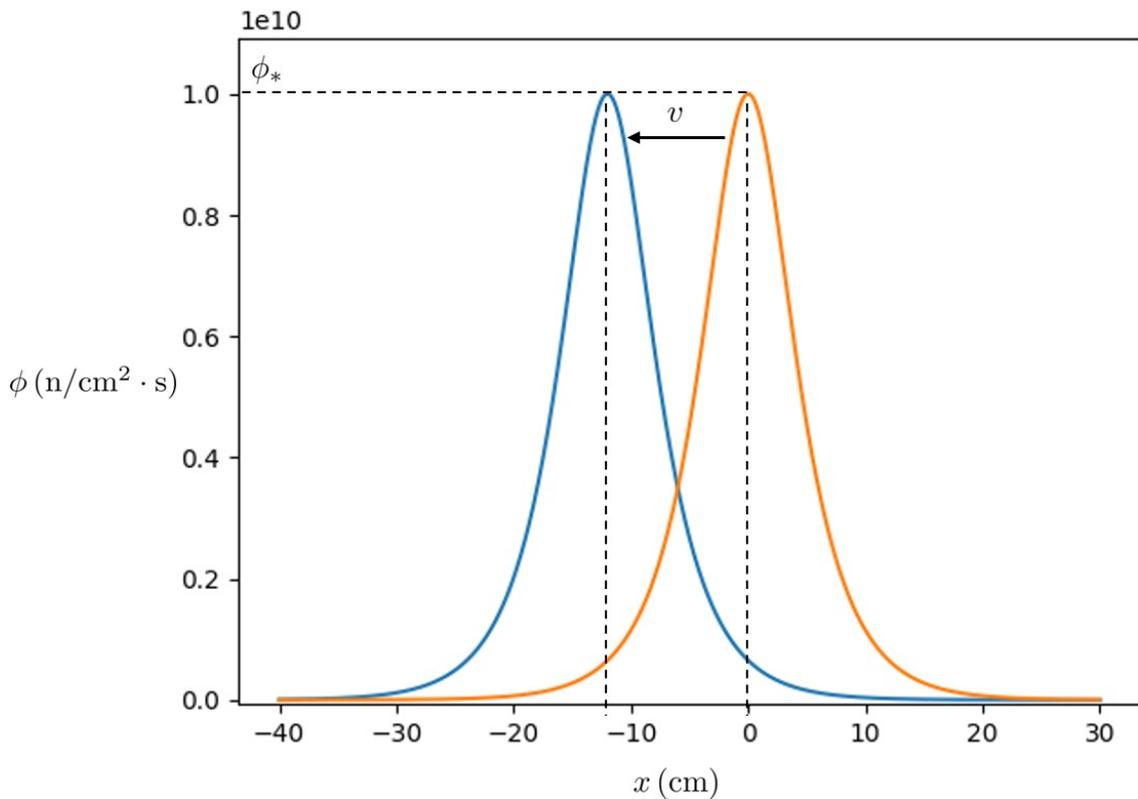
en la siguiente expresión (los cálculos se encuentran en el Apéndice A.13):

$$\phi(x, t) = \frac{\phi_*}{\cosh \left[\frac{\pi \cdot b_1}{F_\infty \cdot D} \left(x + \frac{D \cdot \sigma_a^f}{b_1} \cdot \phi_* t \right) \right]} \quad (3.35)$$

De la ecuación (3.34) se puede ver que la velocidad es proporcional a la amplitud ϕ , la cual es una característica de una onda no lineal y demuestra la existencia de una solución solitón. La gráfica de la solución (3.35) tiene forma de una “ola” la cual avanza manteniendo su forma con una velocidad v (3.34) hacia la izquierda debido a que en el argumento de la función cosh esta presente el signo positivo, dicha gráfica se muestra en la figura 17.

Figura 17

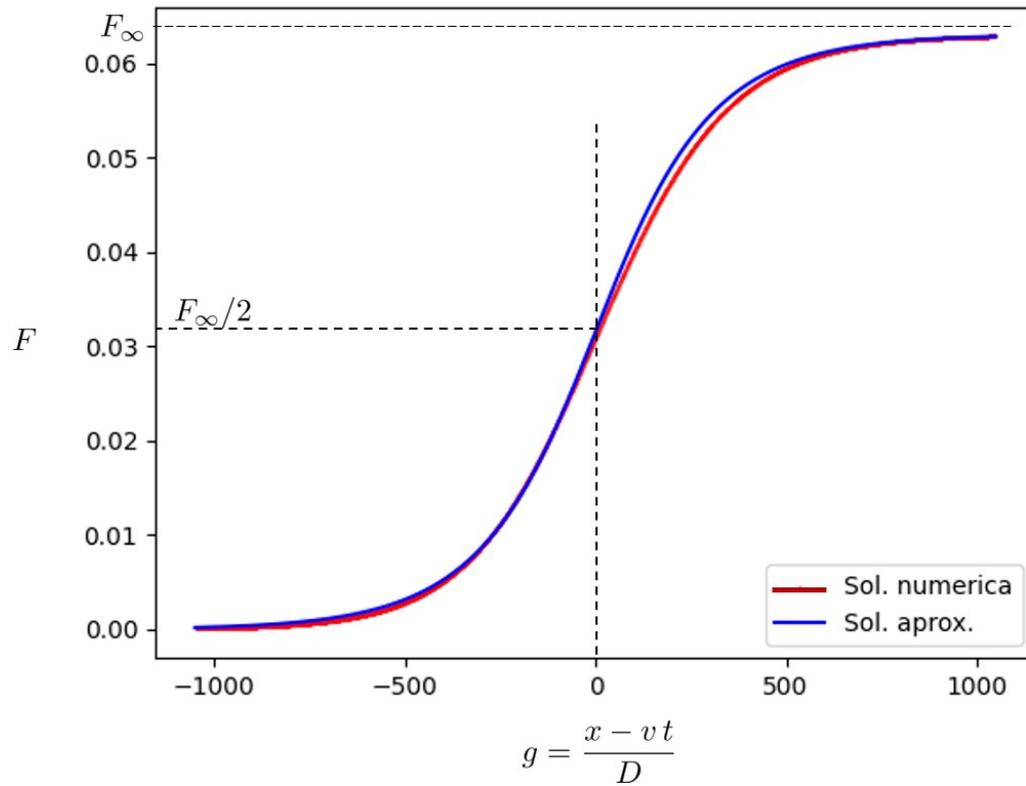
Gráfica de la forma de la solución solitón para el flujo de neutrones ϕ .



Además, para que sea más apreciable la relación de la solución aproximada con la solución hallada por cálculo numérico, se presenta la figura 18:

Figura 18

Comparación de gráficas de la solución numérica y la solución aproximada



De acuerdo a la figura 18 podemos apreciar que tanto las gráficas de la solución aproximada y numérica, presentan una buena aproximación, por lo tanto, es factible y correcto usar la solución aproximada para futuros cálculos dada por la ecuación (3.32).

Capítulo 4

La ecuación de Sine - Gordon

Como se ha mencionado en la introducción de este trabajo, la teoría de los solitones es una teoría nacida al resolver ecuaciones o modelos no lineales. Uno de los modelos no lineales que hasta el día de hoy se usa para diferentes temas de investigación ya sea pura o aplicada es “la ecuación de Sine - Gordon”, el modelo o la ecuación de Sine - Gordon es usado frecuentemente para modelar fenómenos ondulatorios o incluso partículas, las cuales se encuentran por ejemplo en las diferencias de fase en las uniones de Josephson, en las investigaciones de propagación de dislocaciones de cristales, en los estudios bioquímicos de ondas propagándose a lo largo de membranas lipídicas (Griffiths and Schiesser, 2010), en la propagación de ondas en materiales ferromagnéticos (Garifullin et al., 2007), en los estudios biológicos de propagación de deformaciones a lo largo del ADN de doble hélice (Lennholm and Hörnquist, 2003; Gaeta et al., 1994) y en las investigaciones recientes de circuitos electrónicos cuánticos utilizando un método perturbativo a la ecuación de Sine - Gordon (Roy, 2023), a continuación se detallará el modelo matemático que describe la ecuación de Sine - Gordon y el desarrollo de la ecuación que conlleva a una solución solitón.

4.1. Modelo matemático

La ecuación de Sine - Gordon es uno de los campos modelos (1+1) dimensiones pertenecientes a la “Teoría de Campos”, en el cual es posible encontrar cantidades conservables discretas y estados de partículas extendidas (Rubinstein, 1970). Este modelo nació originalmente de los estudios en geometría diferencial de Edmond Bour (1832-1866) al estudiar “las curvas de coordenadas asintóticas”, específicamente en el estudio de superficies de curvatura negativa (Bour, 1891) como las que se encuentran en la “ecuación de Gauss-Codazzi” (Bonnet, 1867) una ecuación muy importante geometría riemanniana y geometría pseudo-riemanniana.

Bour en su estudio planteó, que si las coordenadas curvas asintóticas u y v están inscritas en la superficie de una pseudoesfera, donde una pseudoesfera es una superficie de revolución el cual se caracteriza por tener una constante de curvatura negativa. Bour definió una función $\varphi(u, v)$ como el ángulo subtendido por la curva u y la curva v en su punto de intersección, y de acuerdo a la definición de $\varphi(u, v)$ satisface la siguiente ecuación (Bour, 1891)

$$\varphi_{uv} = \text{sen}(\varphi). \quad (4.1)$$

Si se hace el siguiente cambio de coordenadas:

$$\{u, v\} \rightarrow \{x, t\},$$

vía la transformación a coordenadas de luz (Candu and de Leeuw, 2013), es decir

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x + t) \\ v = \frac{1}{2}(x - t) \end{cases} \quad (4.2)$$

haciendo este cambio de variable se obtiene la siguiente ecuación (su demostración se encuentra en el Apéndice A.14):

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \text{sen } \varphi, \quad \text{donde: } \varphi_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \text{ y } \varphi_{tt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (4.3)$$

Casi después de 50 años del descubrimiento de Bour, la ecuación (4.3) es encontrada en un fenómeno físico estudiado por Frenkel y Kontoroba en 1939. Ellos estudiando la propagación de un *slip* en una cadena infinita de átomos unidos elásticamente, la cual está encima de una cadena inferior fija de átomos similares, encontraron que la ecuación matemática que podía describir dicho fenómeno físico puede ser aproximada a la ecuación de Sine - Gordon (ecuación (4.3)) (Barone et al., 1971). Frenkel y Kontoroba interpretaron la ecuación de la siguiente manera: el primer término de la ecuación (4.3) manifiesta la energía de interacción elástica que existe entre átomos vecinos, el segundo termino representa la energía cinética de los átomos y el ultimo termino representa aquella energía potencial que existe debido a la cadena inferior fija que restringe el movimiento.

La ecuación de Sine - Gordon también puede ser derivado de la "Ecuación de Klein - Gordon", específicamente de la "Ecuación no lineal de Klein - Gordon"(NLKGE), la cual es un modelo no lineal nacido de la Mecánica Cuántica Relativista junto con la Teoría de Campos Cuánticos (QFT), este modelo es usado frecuentemente para el estudio de la dinámica de partículas elementales en la materia condensada (Raza et al., 2016). La forma general del

modelo NLKGE esta dado por la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \varphi + \eta \varphi + \nu \varphi^k = f(x, t), \quad (4.4)$$

donde μ , η y ν son constantes y $f(x, t)$ es una función real.

Si en la ecuación (4.4) se hace que $\mu = 1$, $\eta = \nu = 0$ y $f(x, t) = -\text{sen}(\varphi)$, se obtiene la ecuación de Sine Gordon (4.3). Es por esta relación que existe con la ecuación de Klein - Gordon, Kruskal lo denominó como la ecuación de Sine - Gordon debido a la presencia de la función seno en dicha ecuación (Dutykh and Caputo, 2015).

Una de las características de la ecuación de Sine - Gordon es la siguiente, analizando la función seno de la ecuación (4.3); si una función φ_1 es una solución de la ecuación (4.3), entonces $\varphi_1 + 2n\pi$ también será una solución de (4.3). Esta periodicidad nos lleva a una familia infinita de soluciones para una solución φ_1 (Caudrey et al., 1975).

La ecuación de Sine - Gordon es un modelo el cual tiene diferentes puntos de vista para ser tratado, al ser un modelo que cumple con la definición de integrabilidad tiene un formalismo hamiltoniano y un formalismo del conmutador (McKean, 1981), entre otros puntos de vista de como tratar la ecuación de Sine - Gordon, para llegar al objetivo de este trabajo se va a optar por una formulación "Lagrangiana" de la ecuación de Sine - Gordon como se mostrará en la siguiente sección.

4.2. Formulación Lagrangiana

La formulación matemática que combina la ley de conservación del momento lineal con la ley de conservación de la energía el cual nos da nuevos puntos de vista con respecto a la "Mecánica Newtoniana", es la "Mecánica Lagrangiana". Uno de los aspectos que limitan a la Mecánica Newtoniana es que funciona bien cuando se trabaja con un sistema de coordenadas cartesianas, pero si se quiere trabajar con un sistema de coordenadas diferente al cartesiano trabajar con la Mecánica de Newton no sería lo ideal, por ello se tuvo la necesidad de reformular la mecánica a una mecánica que sea independiente del sistema de coordenadas, de esa reformulación nació la Mecánica Lagrangiana, la idea para ser esta reformulación es la siguiente.

Si se tiene un sistema de N masas puntuales y si queremos conocer la posición de cada masa, entonces es necesario conocer sus N vectores de posición, por lo tanto, se tendrá $3N$ coordenadas. En mecánica la cantidad de magnitudes que definen de manera única la posi-

ción de cada partícula o cuerpo que pertenecen a un sistema de física se le conoce como el número de “grados de libertad”. Para el sistema de N masas puntuales su número de grados de libertad será $3N$, cuando se usa la mecánica Lagrangiana no necesariamente se utiliza las coordenadas cartesianas, si no un sistema de coordenadas que nos sea más conveniente de acuerdo al problema físico (por ejemplo ángulos). Por ello, en la mecánica de Lagrange se utiliza el término de coordenadas generalizadas denotadas frecuentemente como $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$, las cuales definen de manera completa la posición de un sistema y el cual tiene s grados de libertad; y sus derivadas de cada coordenada generalizada con respecto al tiempo ($\dot{q}_i = dq_i/dt$) se le conoce como su velocidad generalizada (Landau and Lifshitz, 1970). Teniendo en cuenta estos nuevos conceptos Lagrange propone que todo sistema físico puede ser caracterizado por una función definida como

$$L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t). \quad (4.5)$$

Cuando el sistema evoluciona del instante $t = t_1$ a $t = t_2$ el sistema cambia su conjunto de coordenadas generalizadas $\bar{q}^{(1)}$ a $\bar{q}^{(2)}$, respectivamente, cuando este sistema se mueve entre estas dos posiciones, la integral (4.6) tomará el menor valor posible.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) dt. \quad (4.6)$$

La integral (4.6) es denominada como la “Acción”, para nuestro estudio solo la función de Lagrange (4.5) no será suficiente para encontrar nuestro objetivo, para ello la función de Lagrange se tendrá que extender para sistemas físicos continuos los cuales tienen infinitos grados de libertad como se mostrará en la siguiente subsección.

4.2.1. La densidad Lagrangiana

Para extender el concepto de la función de Lagrange a un sistema físico continuo como los campos, se usara el sistema físico de la cadena lineal. Este sistema físico trata de una cadena lineal cerrada que se compone de N puntos de igual masa m , donde se va a imaginar que estos puntos están unidos uno con otro mediante resortes que poseen un coeficiente de rigidez k . Una de las condiciones del sistema es que cuando el sistema está en equilibrio la cadena es igual a un anillo de radio R y las distancias entre los puntos vecinos es igual a d . Otra condición que se impondrá al sistema es la siguiente, que si el sistema se saca del equilibrio es decir perturbarlo, los puntos másicos presentaran movimientos unidireccionales alrededor de la circunferencia del anillo; se va designar como u_j el desplazamiento del

j -ésimo punto, en consecuencia, la energía cinética del anillo será (Sokolov et al., 1989)

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m}{2} \dot{u}_j^2,$$

y la energía potencial de sistema físico va estar definido por

$$V = \sum_{j=1}^N \frac{k}{2} (u_{j+1} - u_j)^2,$$

debido a la naturaleza del sistema físico que es un anillo, entonces la condición de periodicidad sera $u_{N+1} = u_1$, usando la definición de la mecánica, de como generar una función de Lagrange (Landau and Lifshitz, 1970), por lo tanto, la función de Lagrange para este sistema estará definido como

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ L &= \sum_{j=1}^N \frac{m}{2} \dot{u}_j^2 - \sum_{j=1}^N \frac{k}{2} (u_{j+1} - u_j)^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

para obtener una condición de estacionariedad del sistema, recordando la definición de la integral de la Acción (4.6), se utilizara el principio variacional (Spiegel, 1992)

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{u}, \dot{\bar{u}}) dt,$$

aplicando el principio variacional y la suma convencional de indices de Einstein (Albert et al., 1916), entonces

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \delta \dot{u}_j \right)$$

pero $\delta \dot{u}_j = \delta \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial \delta u_j}{\partial t}$, entonces

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \frac{\partial \delta u_j}{\partial t} \right),$$

analizando la expresión $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \cdot \delta u_j \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \right) \delta u_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \left(\frac{\partial \delta u_j}{\partial t} \right)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial u_j} \delta u_j - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \right) \delta u_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \cdot \delta u_j \right) \right] \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \right) \right) \delta u_j \right] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \cdot \delta u_j \right), \end{aligned}$$

considerando que $\delta u_j(t_1) = \delta u_j(t_2) = 0$, en consecuencia se obtiene

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \right) \right) \delta u_j \right],$$

para que el sistema tome un valor estacionario es necesario que $\delta S = 0$, para que ello se cumpla se tiene que cumplir la condición (4.8), también conocida como las "ecuaciones de Euler - Lagrange"

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} \right) = 0 \quad (4.8)$$

Si una función $u_j = u_j(t)$ es una solución de la ecuación (4.8) es conocido como el "camino recto" (Sokolov et al., 1989) donde la acción toma un valor mínimo y efectúa un movimiento real.

Si se reemplaza la función lagrangiana (4.7) que caracteriza al sistema físico de la cadena lineal en la ecuación de Euler - Lagrange (4.8) se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$m\ddot{u}_j = k[(u_{j+1} - u_j) - (u_j - u_{j-1})], \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.9)$$

El método a utilizar para pasar de un sistema discreto como se plantea en el ejemplo de la cadena, a un sistema continuo; se tendrá que analizar el caso cuando $m \rightarrow 0$ y $d \rightarrow 0$, tomando como densidad lineal ρ cuya definición es $\rho = m/l$ [kg/m], y como modulo de Young $\epsilon = k \cdot d$ [N/m²]. Considerando que tanto la densidad lineal y el modulo de Young permanecen finitos, y ademas que el tamaño de la cadena no varia, por lo tanto, los grados de libertad del sistemas y la cantidad de puntos N tienden al infinito. Debido a esto, la posición en el anillo de un punto j -esimo se sustituirá por una variable continua x , es decir

$$j \rightarrow x, \text{ entonces, } d \rightarrow dx,$$

teniendo en cuenta este cambio, la función que define el desplazamiento $u_j(t)$ se transformara en una función de dos variables continuas t y x , esta función debe satisfacer la condición de periodicidad para que sea consistente con el ejemplo inicial, por ello, se tiene que cumplir que

$$u_j(t) \rightarrow u(t, x) \wedge u(t, x) = u(t, x + 2\pi R),$$

analizando el caso limite ($l \rightarrow 0$), se obtiene

$$\left. \begin{aligned} u_j - u_{j-1} &\rightarrow d \frac{\partial u}{\partial x} \\ (u_{j+1} - u_j) - (u_j - u_{j-1}) &\rightarrow d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \right\}. \quad (4.10)$$

Si se reemplaza el sistema de ecuaciones (4.10) en la ecuación (4.9), se consigue la siguiente ecuación diferencial

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4.11)$$

redefiniendo la función lagrangiana (4.7) de la siguiente manera

$$L = \sum_{j=1}^N \left(d \frac{m}{2d} \dot{u}_j^2 - dk \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{2d^2} d \right), \quad (4.12)$$

si se toma el caso limite cuando $N \rightarrow \infty$, la suma discreta se convertirá en

$$\sum_j = \frac{1}{d} \int dx,$$

de manera que, la ecuación (4.12) se reescribirá como

$$L = \int dx \left\{ \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} = \int dx \mathcal{L}. \quad (4.13)$$

En la ecuación (4.13) se definió la función \mathcal{L} a la que se le denomina la "densidad lagrangiana", usando esta función se puede expresar la integral que define la acción de la siguiente manera

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}.$$

Si se define como

$$\mathbf{x} = (t, x) \equiv (x^0, x^1)$$

si se escribe la función lagrangiana en función de la densidad lagrangiana

$$L(t) = \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \mathcal{L}(u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x)),$$

donde $d^2 \mathbf{x} = dx^0 dx^1$ y Ω una región de M^2 (espacio - tiempo de Minkowski de 2-dimensiones) (Carroll, 1997). Escribiendo la acción en función de la densidad lagrangiana

$$S = \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \mathcal{L}(u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x)),$$

una vez definido la acción, se realiza la variación de dicha acción, entonces:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \delta u_x \right),$$

pero $\delta u_t = \delta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \delta u}{\partial t}$ y $\delta u_x = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x}$, entonces

$$\delta S = \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right),$$

analizando los siguientes terminos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \cdot \delta u \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \cdot \delta u \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \frac{\partial \delta u}{\partial x},$$

en consecuencia, se tendrá que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \cdot \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \cdot \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \delta u \right] \\ \delta S &= \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) \delta u - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \delta u \right] + \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \cdot \delta u \right) + \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \cdot \delta u \right) \end{aligned}$$

aplicando el teorema de Stokes

$$\int_{\Omega} dw = \int_{\Gamma(\Omega)} w$$

se obtiene

$$\delta S = \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \right] \delta u + \int_{\Gamma(\Omega)} d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \cdot \delta u \right) + \int_{\Gamma(\Omega)} d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \cdot \delta u \right),$$

teniendo en cuenta que $\delta u = 0$ en $\Gamma(\Omega)$ (frontera de Ω en 1-dimension), se considera que $u \rightarrow 0$ en el infinito, por ende, las siguientes integrales serán igual a

$$\int_{\Gamma(\Omega)} d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \cdot \delta u \right) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma(\Omega)} d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \cdot \delta u \right) = 0,$$

tomando en cuenta estos resultados la variación de la acción sera igual a

$$\delta S = \int_{\Omega} d^2 \mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \right] \delta u,$$

para que el sistema realice un movimiento real es necesario que $\delta S = 0$, por ende, es necesario que se cumple la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) = 0. \quad (4.14)$$

Si se define la siguientes notaciones

$$u_{,\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha} u \quad \alpha = 0, 1$$

$$u^{\cdot\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha u \quad \alpha = 0, 1$$

la ecuación (4.14) se reescribirá de la siguiente manera

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\alpha}} \right) = 0, \quad (4.15)$$

la ecuación (4.15) puede ser generalizado para el espacio M^4 (espacio - tiempo de Minkowski de 4-dimensiones), es decir con un conjunto de coordenadas $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ (Carroll, 1997), y para aquellos sistemas que presentan mas de un campo $(\phi_A; A = 1, \dots, N)$; esta generalización es conocida como el problema variacional general y cuyo resultado es la ecuación de Euler - Lagrange para sistemas que tienen infinitos grados de libertad (o campos), que se muestra a continuación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \right) = 0; \quad \alpha = 0, 1, \dots, 3; \quad A = 1, 2, \dots, N. \quad (4.16)$$

Se ha introducido la definición y presentado el formalismo matemático de la densidad lagrangiana, entonces volviendo al modelo de Sine - Gordon, para encontrar el objetivo de este trabajo se ha de usar un modelo muy similar a la ecuación (4.3), solamente con una variación en uno de sus términos de la expresión; el modelo de Sine - Gordon que se utilizara para este estudio se muestra a continuación

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2 \text{sen}(k^2 \varphi) = 0, \quad (4.17)$$

la ecuación (4.17) es conocida como la ecuación de Sine - Gordon másico con masa m^2 y con una constante de fase k^2 , esta expresión será de utilidad y muy importante para encontrar el objetivo de este trabajo en el transcurso del desarrollo de esta tesis, debido a su importancia es necesario encontrar la densidad lagrangiana que caracteriza a la ecuación (4.17), dicha densidad lagrangiana esta dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + \frac{m^2}{k^2} \cos(k^2 \varphi), \quad \mu = 0, 1. \quad (4.18)$$

Donde $\partial_\mu \varphi$ y $\partial^\mu \varphi$ son las derivadas covariante y contravariante respectivamente, para que la ecuación (4.18) sea la densidad lagrangiana que define a la ecuación (4.17), es preciso demostrar que al reemplazar la ecuación (4.18) en la ecuación de Euler - Lagrange (4.16) genere la ecuación de campo (4.17), efectuando los cálculos se demuestra que (4.18) es la densidad lagrangiana de (4.17) (la demostración se encuentra en el Apéndice).

Hasta este punto se ha especificado la densidad lagrangiana (4.18) y el modelo matemático (4.17) con el que se ha de trabajar para encontrar el objetivo de este trabajo, pero esta no

sera suficiente para llegar a dicha meta, es necesario conocer un concepto físico el cual nos permitirá plantear el desarrollo matemático que nos lleve a nuestro objetivo, este concepto se plantea en la siguiente subsección.

4.2.2. El tensor energía - momento

Para encontrar esta herramienta matemática se va a partir de la expresión (4.16) considerando un solo campo solamente por temas de simplicidad sin perdida de generalidad, entonces, se tendrá:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) = 0. \quad (4.19)$$

Diferenciando $\mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu})$, entonces, se tiene que:

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} d\phi_{,\mu} \quad (4.20)$$

dividiendo la ecuación (4.20) entre dx^ν , entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \frac{\partial \phi_{,\mu}}{\partial x^\nu}, \quad (4.21)$$

introduciendo la ecuacion (4.19) en la ecuacion (4.21), se obtiene la siguiente expresion

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right), \end{aligned}$$

usando el tensor mixto delta de Kronecker δ_ν^μ , se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_\nu^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\delta_\nu^\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si se define el siguiente tensor mixto

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (4.23)$$

la ecuación (4.23) representa un tensor mixto de segundo orden, pero para cálculos en donde es necesario conocer el valor de la energía o el momento de un sistema, por lo tanto, es mas

conveniente convertir el tensor mixto T^μ_ν a un tensor contravariante de segundo orden, para ello simplemente tenemos que multiplicar a la ecuación (4.23) por el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ del espacio M^4 , obteniéndose

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial^\nu \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (4.24)$$

generalizando la anterior ecuación para un sistema que consta de varios campos, la expresión para el tensor $T^{\mu\nu}$ sera igual a

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} (\partial^\nu \phi^A) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad A = 1, 2, \dots, N. \quad (4.25)$$

Una vez definido el tensor $T^{\mu\nu}$, entonces de la ecuación (4.22) se puede definir la siguiente ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (4.26)$$

si se toma que el índice $\mu = 0$ en la expresión (4.26), por consiguiente, vamos a tener una cantidad que se conserva en el tiempo

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial t} = 0,$$

al hallar la integral de conservación de la anterior ecuación se obtiene la siguiente expresión (Landau and Lifshitz, 1992)

$$\int T^{0\nu} d^3x = P^\nu \quad (4.27)$$

de la ecuación (4.27) se puede ver que la integración tiene que ser con respecto a todo el volumen que ocupa el campo, además el término P^ν representa las componentes del cuadrimomento del campo, en consecuencia, se puede escribir las componentes del cuadrimomento en términos del tensor $T^{\mu\nu}$. El término P^0 representa el valor de la energía total del campo (E), entonces de la ecuación (4.27) se obtiene

$$P^0 = E = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} d^3x, \quad (4.28)$$

donde \mathcal{H} representa la "densidad de la energía", o también llamado "la densidad de Hamilton", el cual coincide con el término T^{00} y esta expresado mediante la siguiente ecuación

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^A)} (\partial^0 \phi^A) - \mathcal{L} = \mathcal{H}. \quad (4.29)$$

De igual manera, se puede encontrar las componentes P^k (donde $k = 1, 2, 3$) que representa el momento del campo, por lo tanto, de la ecuación (4.27), se obtiene

$$P^k = \int T^{0k} d^3x = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^A)} (\partial^k \phi^A), \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.30)$$

De las ecuaciones (4.28) y (4.30) se puede ver que a partir de las componentes de tensor $T^{\mu\nu}$, se puede encontrar las expresiones de la energía y momento del campo, es por ello, que a este tensor se le denomina como "el tensor energía - momento" (Landau and Lifshitz, 1992).

En este capítulo se ha definido las herramientas matemáticas que nos permitirá encontrar el objetivo de este trabajo, especialmente la densidad lagrangiana (4.18) y el tensor energía - momento que nos será de mucha utilidad como se verá en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Interacción solitónica en un reactor térmico unidimensional

En el capítulo 3 se desarrolló el procedimiento matemático para encontrar la solución de tipo solitón (3.32) de la ecuación del reactor (3.1). Dicha solución se le denominó como el solitón neutrónico térmico y que es del tipo Kink, para encontrar esta solución se tuvo que hacer la aproximación planteada en la sección 3.5 y esta aproximación fue corroborada al realizar la solución numérica como se presentó en la sección 3.4 y cuya similitud se puede apreciar en la figura 18.

Para desarrollar este capítulo se vuelve a escribir la ecuación (3.31) que es la ecuación previa que lleva a la solución solitón, pero cambiando la fluencia F por la letra griega φ , solo por razones de costumbre de uso de variables, haciendo este cambio la ecuación (3.31) se reescribirá como

$$\varphi' = b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi \varphi}{F_\infty} \right), \quad (5.1)$$

recordando que $\varphi = \varphi(g)$, donde $g(x, t) = (x - vt/D)$. Si a la ecuación (5.1) elevamos al cuadrado en ambos términos de la ecuación, se obtiene la siguiente expresión

$$(\varphi')^2 = b_1^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi \varphi}{F_\infty} \right),$$

si a la anterior ecuación se lo deriva con respecto a la variable g , entonces se obtiene

$$2\varphi'(\varphi'') = \left[2b_1^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi \varphi}{F_\infty} \right) \cos \left(\frac{\pi \varphi}{F_\infty} \right) \right] \frac{\pi \varphi'}{F_\infty},$$

simplificando φ' en ambos términos y utilizando la propiedad trigonométrica del seno de un ángulo doble, se obtiene

$$2\varphi'' = \frac{b_1^2\pi}{F_\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\varphi}{F_\infty}\right)$$

$$\varphi'' = \frac{b_1^2\pi}{2F_\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\varphi}{F_\infty}\right). \quad (5.2)$$

Al hacer este procedimiento se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden (5.2), pero esta ecuación tiene una relación con la ecuación de Sine - Gordon másico (4.17); para encontrar esta relación se analizará la ecuación de Sine - Gordon másico

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2 \operatorname{sen}(k^2\varphi) = 0,$$

para encontrar una solución tipo solitón en la ecuación de Sine - Gordon se va seguir el mismo planteamiento mostrado en la sección 3.2, se va a considerar una solución de onda la cual viaja con una velocidad de fase v/D , pero como φ para nuestro estudio representa la fluencia el cual es una función adimensional, entonces se va considerar una solución del tipo

$$\varphi(x, t) = \varphi(g) = \varphi\left(\frac{x - vt}{D}\right),$$

por lo tanto, hemos hecho que

$$g = \frac{x - vt}{D}$$

al hacer este cambio de variable, y teniendo en cuenta que $d\varphi/dg = \varphi'$, en consecuencia las derivadas φ_{xx} y φ_{tt} de la ecuación de Sine - Gordon tomarán las siguientes formas (la demostración se encuentra en el Apéndice A.16):

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{D^2} \varphi'' \quad (5.3)$$

$$\varphi_{tt} = \frac{v^2}{D^2} \varphi'' \quad (5.4)$$

si se reemplaza estas ecuaciones en la ecuación de Sine - Gordon másico, se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{v^2}{D^2} \varphi'' - \frac{1}{D^2} \varphi'' + m^2 \operatorname{sen}(k^2\varphi) = 0,$$

factorizando y ordenando se obtiene

$$\varphi'' = \frac{D^2 m^2}{(1 - v^2)} \operatorname{sen}(k^2\varphi). \quad (5.5)$$

Se puede ver que la ecuación (5.2) y la ecuación (5.5) son similares debido a que la función φ están siendo derivados por la misma variable g , una de ellas proviene de la aproximación

para encontrar una solución de tipo solitón para la ecuación del reactor, y la segunda proviene de la condición propuesta para encontrar una solución tipo solitón para la ecuación de Sine - Gordon, respectivamente. Para que estas ecuaciones sean iguales solamente se tiene que igualar los coeficiente que multiplican a la función seno y hallar el termino de la masa m^2 que haga cumplir la igualdad, e igualar las constantes de fase de la función seno, entonces:

$$\varphi'' = \frac{b_1^2 \pi}{2F_\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\varphi}{F_\infty}\right) \equiv \varphi'' = \frac{D^2 m^2}{(1-v^2)} \operatorname{sen}(k^2\varphi)$$

por ello, se tiene que cumplir

$$\frac{D^2 m^2}{(1-v^2)} = \frac{b_1^2 \pi}{2F_\infty},$$

entonces:

$$m^2 = \frac{b_1^2 \pi (1-v^2)}{2D^2 F_\infty}, \quad (5.6)$$

y también se tiene que cumplir que

$$k^2 = \frac{2\pi}{F_\infty}. \quad (5.7)$$

Para corroborar que la ecuación (5.5) es igual que la expresión (3.31) la ecuación del reactor aproximada, se debe resolver la ecuación (5.5) con los valores de m^2 y k^2 dados por (5.6) y (5.7) respectivamente, y la solución de esta ecuación debe coincidir con la solución (3.32), y efectivamente al hacer los cálculos respectivos (ver Apéndice A.17), la solución es la ecuación (5.8) que es igual a la ecuación (3.32)

$$\varphi(x, t) = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \cdot \arctan\left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot \frac{x-vt}{D}}\right). \quad (5.8)$$

Al hacer esta equivalencia la ecuación del reactor aproximada (3.31), adquiere la posibilidad de ser caracterizado por una densidad lagrangiana que define a la ecuación, debido a que es equivalente a la ecuación de Sine - Gordon másico, por lo tanto, la densidad lagrangiana que define a la ecuación del reactor aproximada va estar dada por la densidad lagrangiana (4.18), entonces

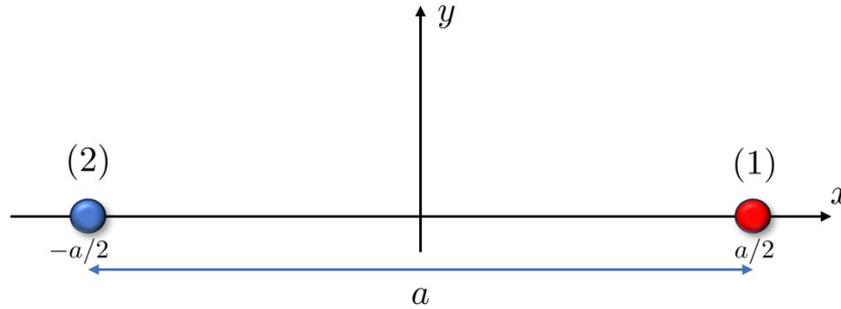
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + \frac{m^2}{k^2} \cos(k^2\varphi), \quad \mu = 0, 1.$$

$$\text{con } m^2 = \frac{b_1^2 \pi (1-v^2)}{2D^2 F_\infty} \text{ y } k^2 = \frac{2\pi}{F_\infty}.$$

Ahora que ya se ha definido una densidad lagrangiana que caracteriza a la ecuación del reactor aproximada, se empezara ha desarrollar el procedimiento que nos lleva a encontrar la fuerza y la energía de interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos o mejor dicho entre dos Kinks, para encontrar la energía de interacción entre estos dos Kinks se va a suponer que nuestros dos Kinks esta distribuido en el espacio como se muestra en la siguiente imagen.

Figura 19

Configuración espacial entre dos Kinks para encontrar la energía de interacción entre ellos.



La figura 19 representa la distribución espacial de dos Kinks iguales ubicadas en los puntos (1) y (2) simétricamente separadas con respecto al origen de coordenadas, las cuales forman un sistema ligado, donde el centro de dichos Kinks están separados una distancia a , el objetivo será hallar la fuerza de interacción en la línea que une sus centros y también calcular la energía de interacción entre estos Kinks.

Para encontrar la fuerza de interacción entre estos Kinks se hará uso del método planteado por *Karpman* y *Solov'ev* (Karpman and Solov'ev, 1981), en sus métodos sobre perturbaciones en sistemas de dos solitones, proponen que un sistema ligado formado por dos solitones puede ser aproximado como una superposición lineal de cada uno de los solitones. Basándose en esta propuesta, se va a definir el sistema ligado de dos Kinks como

$$\varphi_{K-K} = \varphi_K \left(x + \frac{a}{2} \right) + \varphi_K \left(x - \frac{a}{2} \right), \quad (5.9)$$

donde φ_{K-K} representa la función de campo del sistema ligado (interacción Kink - Kink), además se definen las funciones de campo para cada Kink:

$$\varphi_1(x) = \varphi_K \left(x + \frac{a}{2} \right) \quad (5.10)$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_K \left(x - \frac{a}{2} \right), \quad (5.11)$$

donde φ_1 y φ_2 son las funciones de campo para los dos Kinks en las posiciones (1) y (2) respectivamente. Para este estudio se va a considerar que estos dos Kinks son "iguales", es decir que ambos Kinks tienen la misma energía

$$E[\varphi_1] = E[\varphi_2] = E_K, \quad (5.12)$$

donde $E[\varphi_1]$ y $E[\varphi_2]$, son las energías de los Kinks (1) y (2) respectivamente, por lo tanto, teniendo en cuenta esta condición se define la energía de este sistema ligado de dos Kinks, el

cual está dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} E[\varphi_1 + \varphi_2] &= E[\varphi_1] + E[\varphi_2] + E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] \\ E[\varphi_1 + \varphi_2] &= 2E_K + E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde $E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$ es la energía de interacción del sistema ligado.

Antes de empezar a calcular la energía de interacción hay que redefinir, la densidad lagrangiana que caracteriza al sistema (4.18), para ello se va a restar la constante m^2/k^2 a dicha expresión, por lo tanto, la ecuación (4.18) se reescribirá como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) + \frac{m^2}{k^2}[\cos(k^2\varphi) - 1], \quad \mu = 0, 1 \quad (5.14)$$

al sumarle o restarle como en este caso una constante no alterara la ecuación de campo (4.17), ya que esta constante entrara en las derivadas de la ecuación de Euler - Lagrange (4.16) y como se sabe la derivada de cualquier constante es igual cero y, por lo tanto, la ecuación de campo se mantiene invariante; por ello, a partir de ahora se trabajara con esta densidad lagrangiana para los futuros cálculos que se mostraran.

Una vez aclarado este punto, se ha de limitar la energía que posee cada Kink, para ello se va a encontrar la densidad de energía, calculando el termino T^{00} (4.29) del tensor energía - momento se obtiene (ver Apéndice A.18)

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{k^2}[\cos(k^2\varphi) - 1]. \quad (5.15)$$

Como T^{00} representa la densidad de energía; por ello, si se integra este término con respecto a la variable x debido a que es un modelo unidimensional, se obtendrá la energía del campo φ o mejor dicho del Kink, entonces la energía de cada Kink estara definido como

$$E[\varphi] = \int \left\{ \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{k^2}[\cos(k^2\varphi) - 1] \right\} dx, \quad (5.16)$$

para este estudio se va a suponer el caso cuasiestático, es decir que la velocidad de difusión v es mucho menor que 1 ($v \ll 1$) y que el cambio del campo φ a través del tiempo es casi cero, en consecuencia, se tendrá que la

$$\partial_0\varphi \approx 0, \quad (5.17)$$

teniendo en cuenta esta condición la expresión de la energía del Kink ecuación (5.16), se

reescribirá como

$$E[\varphi] = \int \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 - \frac{m^2}{k^2} [\cos(k^2 \varphi) - 1] \right\} dx, \quad (5.18)$$

si se usa la siguiente relación trigonométrica

$$\cos(k^2 \varphi) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right),$$

entonces la ecuación (5.18) será igual a

$$E[\varphi] = \int \left[\frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 + 2 \frac{m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) \right] dx, \quad (5.19)$$

$$E[\varphi] = \frac{1}{2} \int \left[(\partial_x \varphi)^2 + 4 \frac{m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) \right] dx,$$

sumando y restando términos para formar un binomio cuadrado en la anterior expresión, entonces:

$$E[\varphi] = \frac{1}{2} \int \left[(\partial_x \varphi)^2 - 4 \frac{m}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) (\partial_x \varphi) + 4 \frac{m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) + 4 \frac{m}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) (\partial_x \varphi) \right] dx,$$

$$E[\varphi] = \frac{1}{2} \int \left\{ \left[(\partial_x \varphi) - \frac{2m}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) \right]^2 + 4 \frac{m}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} dx,$$

$$E[\varphi] = \frac{1}{2} \int \left[(\partial_x \varphi) - \frac{2m}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) \right]^2 dx + \frac{2m}{k} \int \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) dx.$$

Para encontrar la energía del Kink se tiene que integrar en todo el espacio, pero esta energía tiene que ser finita, ya que sería físicamente inconsistente que la energía del Kink sea infinita, entonces:

$$E[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\partial_x \varphi) - \frac{2m}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) \right]^2 dx + \frac{2m}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) dx$$

$$E[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\partial_x \varphi) - \frac{2m}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) \right]^2 dx - \underbrace{\frac{4m}{k^3} \cos \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right)}_{=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

por lo tanto, la condición para que la energía del Kink en el infinito sea finita o cero es

$$\partial_x \varphi - \frac{2m}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi}{2} \right) = 0. \quad (5.20)$$

Una vez demostrado la condición que se tiene que cumplir para que la energía del Kink sea finita, se está listo para empezar a calcular la energía de interacción de dos Kinks similares,

recordando la solución tipo Kink de la ecuación de difusión de nuestro reactor

$$\varphi_K(x, t) = \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x-vt}{D} \right)} \right),$$

pero como se esta considerando el caso cuasiestático ($\partial_t \varphi_K \approx 0$), entonces la solución del Kink se escribirá de la forma

$$\varphi_K(x) = \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} \right)} \right). \quad (5.21)$$

Utilizando la expresión (5.21) se puede definir la solución cuasiestática de los dos Kinks que forman nuestro sistema ligado, recordando las expresiones (5.10) y (5.11), se obtiene las siguientes expresiones que caracterizan a los dos Kinks (1) y (2) respectivamente

$$\varphi_1(x) = \varphi_K \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)} \right) \quad (5.22)$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_K \left(x - \frac{a}{2} \right) = \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)} \right). \quad (5.23)$$

Ahora que se ha definido las soluciones cuasiestáticas de los dos Kinks, se esta preparado para poder encontrar la energía del sistema ligado que forman estos Kinks y de esta manera encontrar la energía de interacción entre ellos. Para ello, se va a utilizar la expresión de la energía para un Kink ecuación, (5.19), pero para este caso en vez de definir la energía para un solo Kink, se va a definir la energía para un sistemas de dos Kinks, es decir, se definirá la siguiente integral

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = \int \left\{ \frac{1}{2} [\partial_x(\varphi_1 + \varphi_2)]^2 + \frac{2m^2}{k^2} \sin^2 \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right\} dx, \quad (5.24)$$

pero si se desarrolla esta expresión y se utiliza la condición que limita la energía de un Kink (5.20), al realizar los cálculos (ver Apéndice A.19) la ecuación (5.24) se convierte en la siguiente expresión

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = 2E_K + \frac{4m^2}{k^2} \int \sin \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \sin \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] dx. \quad (5.25)$$

Si se compara la expresión (5.25) con la expresión (5.13), se puede observar que la energía de interacción entre los dos Kinks es igual a

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} \int \sin \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \sin \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] dx, \quad (5.26)$$

a partir de la expresión (5.26), se puede definir la densidad de energía $\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$, el cual va

a estar definido por la siguiente ecuación

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} \operatorname{sen}\left(\frac{k^2\varphi_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k^2\varphi_2}{2}\right) \left[1 + \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right)\right], \quad (5.27)$$

si se desarrolla la expresión de $\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$, se obtiene (los cálculos se encuentran en el Apéndice A.20):

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{8m^2}{k^2} \frac{\operatorname{senh}^2(X)}{\cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right)}, \quad (5.28)$$

donde $X = \frac{\pi b_1 x}{F_\infty D}$ y $A = \frac{\pi b_1 a}{F_\infty D}$.

Recordando los conceptos de mecánica clásica, existe una ecuación que relaciona la energía potencial (U) con la fuerza (F) que hay que aplicar para vencer la fuerza del campo que produce esta energía potencial (Murray, 1989), dicha relación esta dado por la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = -\nabla U, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{k},$$

si se aplica este concepto de mecánica clásica a la energía de interacción $E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$ que es el potencial de interacción de nuestro sistema ligado de dos Kinks, se puede encontrar la fuerza de interacción $F_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$ del sistema ligado, debido a que se esta trabajando en una dimension, por lo tanto, la fuerza de interacción va estar definido mediante la siguiente ecuación

$$F_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = -\frac{dE_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]}{dx},$$

pero de las ecuaciones (5.26) y (5.27), se puede concluir que

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{dE_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]}{dx},$$

por consiguiente, se tiene que

$$F_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = -\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2],$$

si se reemplaza la ecuación (5.28), se obtiene la expresión de la fuerza de interacción, el cual esta dado por

$$F_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = -\frac{8m^2}{k^2} \frac{\operatorname{senh}^2(X)}{\cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right)}, \quad (5.29)$$

antes de reemplazar los valores $m^2 = \frac{b_1^2 \pi (1 - v^2)}{2D^2 F_\infty}$ y $k^2 = \frac{2\pi}{F_\infty}$, hay que tener en cuenta que

se esta analizando un caso cuasiestático es decir $v \ll 1$; es por ello, que el termino másico m^2 sera igual a

$$m^2 = \frac{b_1^2 \pi}{2D^2 F_\infty},$$

teniendo en cuenta el valor de m^2 para el caso cuasiestático, se reemplaza en la ecuación (5.29) junto con el valor de k^2 y se obtiene la expresión final de la fuerza de interacción entre los dos Kinks

$$F_{\text{int}}[\varphi_1, \varphi_2] = -\frac{\frac{8b_1^2 \pi}{2D^2 F_\infty} \sinh^2(X)}{\frac{2\pi}{F_\infty} \cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right)},$$

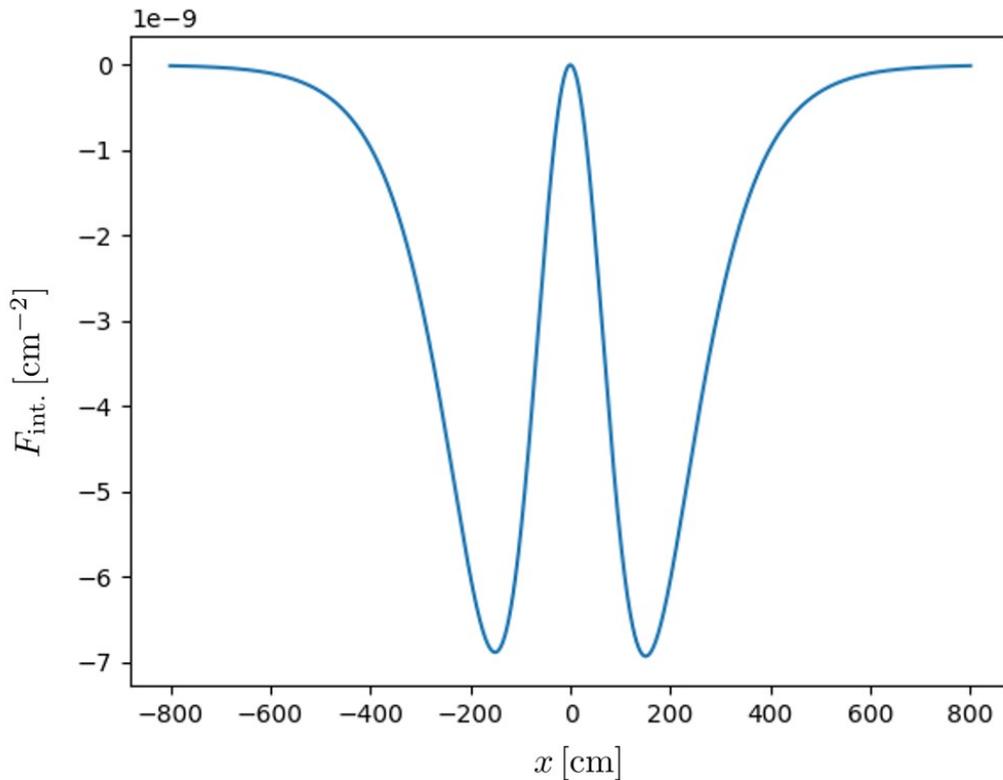
simplificando términos, se obtiene que

$$F_{\text{int}}[\varphi_1, \varphi_2] = -\frac{2b_1^2}{D^2} \frac{\sinh^2(X)}{\cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right)}, \quad (5.30)$$

la gráfica de la ecuación (5.30) se representa en la figura 20

Figura 20

Gráfica de la fuerza de interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos, para un análisis cuasiestático.



La figura 20 muestra el comportamiento de la fuerza de interacción entre dos solitones

neutrónicos térmicos, los cuales están representados por dos Kinks, se puede ver de la gráfica que la fuerza de interacción toma valores negativos y que esta en un orden de 10^{-9} , es decir, que la fuerza de interacción entre estos dos Kinks es de repulsión y, por lo tanto, la suposición que estos dos Kinks formaban un sistema ligado no sería así, ya que existe una fuerza que trata de separarlos. Solamente la fuerza de interacción sería igual a cero en la posición $x = 0$, es decir, en el punto medio de la línea que une los centros de los Kinks; y cuando la distancia entre estos dos Kinks sea mucho mayor a 1.

Ahora que ya se ha definido la expresión para la fuerza de interacción (5.30), se pasara a encontrar la energía de interacción entre los Kinks, para ello se tiene que definir los límites de integración, de acuerdo a la distribución espacial que se está considerando mostrado en la figura 19 los dos Kinks están separados simétricamente con respecto al origen de coordenadas y los Kinks (1) y (2) se encuentran en los puntos $a/2$ y $-a/2$ respectivamente; es por ello, que los límites de integración sería entre estos dos puntos. Si se utiliza la expresión de la densidad de energía (5.28), por lo tanto, la energía de interacción se expresara de la siguiente manera

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{8m^2}{k^2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\sinh^2(X)}{\cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right)} dx, \quad (5.31)$$

si se realiza el siguiente arreglo matemático:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{8m^2}{k^2} \cdot \frac{F_{\infty}D}{\pi b_1} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\sinh^2(X)}{\cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right)} d\left(\frac{\pi b_1 x}{F_{\infty}D}\right),$$

como $X = \frac{\pi b_1 x}{F_{\infty}D}$, entonces el parámetro de integración sería X , pero también si se realiza este cambio de variable el límite de integración $\frac{a}{2}$ pasaría a convertirse en $\frac{A}{2}$ $\left(A = \frac{\pi b_1 a}{F_{\infty}D}\right)$, por consiguiente, la integral de la energía de interacción estará dado por la siguiente expresión

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{8m^2}{k^2} \cdot \frac{F_{\infty}D}{\pi b_1} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{\sinh^2(X)}{\cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right)} d(X). \quad (5.32)$$

Al desarrollar la integral (5.32) se obtiene la siguiente expresión (los cálculos se encuentran en el Apéndice A.21):

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_{\infty}D}{\pi b_1} \left\{ \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dX}{\cosh(2X) + \cosh(A)} - 2 \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dX}{[\cosh(2X) + \cosh(A)]^2} \right\}, \quad (5.33)$$

si se define las siguientes integrales:

$$I_1 = \int \frac{dX}{\cosh(2X) + \cosh(A)}$$

$$I_2 = \int \frac{dX}{[\cosh(2X) + \cosh(A)]^2}$$

realizando los cálculos de las integrales I_1 y I_2 (ver Apéndices A.22 y A.23 respectivamente), se obtiene las siguientes expresiones:

$$I_1 = \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \cdot \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \quad (5.34)$$

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ \left(p^2 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{senh}\left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \right\}, \quad (5.35)$$

donde $p^2 = \frac{1}{2}[\cosh(A) - 1]$.

Reemplazando las expresiones (5.34) y (5.35) de las integrales I_1 y I_2 pero evaluados dentro de los límites de integración $-A/2$ y $A/2$, en la ecuación (5.33), se obtiene que

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \left\{ \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \cdot \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{2 \cosh^2(A/2)}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \right. \\ \left. \cdot \left\langle \left(p^2 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{senh}\left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \right\rangle_{-A/2}^{A/2} \right\},$$

simplificando y ordenando esta expresión (el procedimiento se encuentra en el Apéndice A.24), se obtiene

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{4p^3\sqrt{1+p^2}} \left\{ -\operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{senh}\left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \right\}_{-A/2}^{A/2}.$$

Si se evalúa la anterior expresión dentro de los límites de integración, se obtiene que la energía de interacción entre los Kinks sera igual a

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{b_1 F_\infty}{D\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{senh}^3(A/2) \cosh(A/2)} \left\{ -\operatorname{Ln}[\cosh(A)] + \frac{\cosh(A) - \operatorname{sech}(A)}{2} \right\}, \quad (5.36)$$

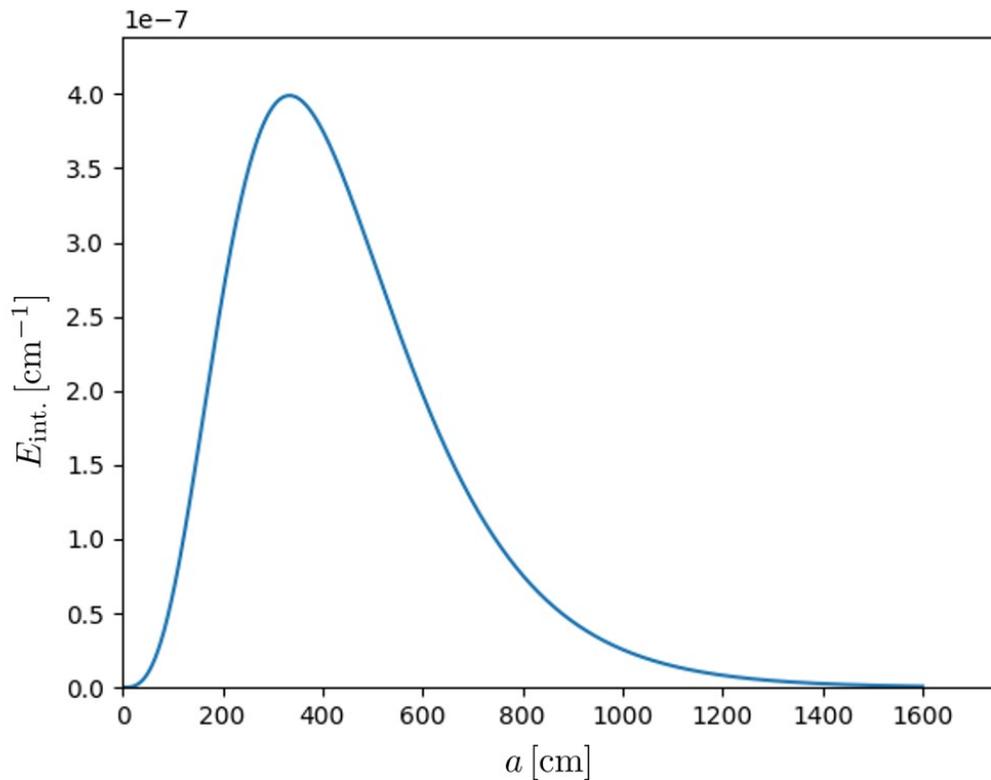
analizando el caso limite cuando $A \rightarrow 0$. Si se analiza este caso límite se puede demostrar (ver Apéndice A.26) que la energía de interacción sera igual a

$$\lim_{A \rightarrow 0} E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = 0,$$

la gráfica de la ecuación (5.36) va estar dado por la figura 21.

Figura 21

Gráfica de la energía de interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos, para un análisis cuasiestático.



La figura 21 representa la energía de interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos, como se puede ver la energía de interacción toma valores positivos y esto es consistente, ya que de acuerdo a la figura 20 se ha demostrado que la fuerza de interacción es de repulsión y de acuerdo a la mecánica clásica la energía de interacción tiene que ser positiva, y esto se puede corroborar con la figura 21. Además se puede apreciar que esta gráfica tiene un valor máximo, es decir existe un punto en el cual la fuerza de repulsión será máxima (como se puede ver en la figura 20); y además se puede ver que cuando la distancia entre estos solitones (a) es cero o un valor mucho mayor a 1 la energía de interacción será igual a cero, es decir, no habrá fuerza de interacción.

De acuerdo a los resultados encontrados dados por la ecuación (5.30) y (5.36) y sus gráficos 20 y 21 respectivamente, se ha podido encontrar el objetivo general de este trabajo, y se ha podido demostrar que el tipo de interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos es de tipo repulsión. Pero en este punto del trabajo se hace la siguiente pregunta ¿si el solitón neutrónico térmico en verdad representa un flujo de neutrones que se comportan como una

onda solitón, porque existe una fuerza de repulsión entre estos dos solitones, si los neutrones tienen carga nula?

Si se quiere encontrar una respuesta a esta interrogante en el campo del electromagnetismo no sería posible, para ello se tendría que adentrar en el campo de la mecánica cuántica para encontrar una posible respuesta a esta interrogante. De acuerdo a la física de partículas el neutrón es clasificado en la familia de los fermiones los cuales se caracterizan por tener un espín con número semi - entero, para el caso del neutrón se caracteriza por tener un espín igual a $1/2$, por lo tanto, obedece al principio de exclusión de Pauli (Griffiths, 2020), lo cual conlleva a que las funciones de onda de dos neutrones no puedan superponerse, es decir que dos neutrones no puede ocupar el mismo lugar al mismo tiempo y sienten una fuerza de repulsión al tratar de juntarse, a esta fuerza que sienten dos partículas indistinguibles como el caso de dos neutrones es conocida como la “interacción de intercambio” (Zener and Heikes, 1953) el cual es un fenómeno propio de la mecánica cuántica que ocurre en sistemas de partículas idénticas. El efecto en si de este fenómeno es debido a la función de onda de un sistema de partículas indistinguibles que presenta una simetría de intercambio, es decir si nosotros intercambiamos posiciones de dos partículas del sistema la función de onda se mantendrá simétrica (conservara su signo) o sera antisimétrica (cambiara su signo). Esta simetría o antisimetría con lleva para el caso de los fermiones sufrir una interacción de intercambio de tipo repulsión entre dos partículas indistinguibles y para los bosones es decir para las partículas con espín entero sufrir una interacción de intercambio de tipo atracción.

Si se aplica el concepto de la interacción de intercambio para resolver la interrogante planteada, se tendría que suponer que el flujo de neutrones se comportaría como un solo neutrón, despreciando las interacciones internas de todos los neutrones que forman ese flujo. Por lo tanto, teniendo en cuenta esta consideración se puede explicar el porque dos solitones neutrónicos térmicos en un reactor nuclear térmico unidimensional de dimension infinita presenta una interacción de tipo repulsión.

Conclusiones

En el capítulo 1 se ha presentado la introducción de la importancia de la teoría de los solitones aplicado a la física de reactores nucleares, así como los avances y diferentes modelos de reactores relacionados al concepto del reactor solitón y dando un nuevo enfoque en modelos de reactores; también se formulo la hipótesis y los objetivos generales y específicos de esta tesis. En el capítulo 2 se desarrollo la teoría necesaria para la elaboración de esta tesis, especificando por ejemplo los temas de fisión nuclear, difusión de neutrones, teoría de reactores nucleares y un tema de suma importancia para esta tesis que fue el tema del solitón tipo Kink.

En el capítulo 3 se demostró la existencia tanto de manera analítica como numérica de la existencia de una solución solitón para la ecuación de difusión de un reactor neutrónico térmico unidimensional de dimension infinita, el cual tiene como elemento combustible al uranio-235, como veneno neutrónico al boro-10, como moderador al grafito y como productos fisión los grupos 1 y 2 de la tabla 2, pero para llegar a este solución se tuvo que definir una función adimensional F (3.6) a la cual se denominó como la fluencia de neutrones, el cual nace después de desarrollar las ecuaciones de quemado con sus respectivos condiciones iniciales (3.3 - 3.5). Una vez definida la función F , se planteó que dicha función sea una solución de tipo onda viajera, al hacer este planteamiento la ecuación de difusión del reactor paso a ser una ecuación diferencial no lineal adimensional en términos de la función F (3.15). A la función $\Pi(F)$ (3.16) de la ecuación (3.15) se le denominó la función potencial del modelo y al momento de graficar dicha función $\Pi(F)$ se obtuvo que los estados fundamentales del modelo se encuentra en los valores de $F = 0$ y $F_{\infty} = 0,06306$, donde estos valores de F hacen que la función $\Pi(F)$ toma un valor de cero. Debido a la complejidad para resolver la ecuación (3.15) de manera analítica se opto por resolver esta ecuación primeramente a través del método numérico de Euler, dicha solución se muestra en la figura 15, como se puede ver de esta figura, la solución numérica de la ecuación (3.15) tiene las características de una solución de tipo Kink, cuya teoría se definió en la subsección 2.5.1. Al encontrar la solución numérica de la ecuación (3.15), dicha solución nos sirvió para encontrar la solución analítica aproximada de dicha ecuación, para encontrar esta solución se analizó la forma de la función F de la figura 15, debido a la simetría de la función F con respecto a $F_{\infty}/2$ como se puede

apreciar en la figura 15, se opto por realizar una aproximación a primer orden de la función $\Pi(F)$ a una serie de Fourier en el dominio $0 \leq F \leq F_{\infty}$, al hacer este procedimiento la ecuación complicada (3.15) se transformó en una ecuación mas corta mostrada en la ecuación (3.27). Pero resolver la ecuación (3.27) también tiene sus complicaciones, para poder simplificar mas esta ecuación, se opto por la técnica de transformación de auto - semejanza, al realizar esta técnica y observando que el coeficiente b_1 y la función F de la ecuación (3.27) son mucho menores a 1, en consecuencia, la ecuación (3.27) se pudo aproximar a la ecuación (3.31). Al solucionar la ecuación (3.31) obtenemos la solución para la función F (3.32) donde dicha función F cumple con las características de una solución solitón de tipo Kink, además debido al desarrollo matemático que se planteó para encontrar dicha solución, solo es posible encontrar soluciones de tipo Kink, mas no de tipo Antikink. Una vez encontrado la solución solitón para la fluencia F se utilizo esta función para encontrar la solución para el flujo de neutrones, donde la gráfica de dicha solución tiene forma de una ola (o también llamado en ingles *reciprocal catenary*) el cual viaja sin cambiar su forma con una velocidad v hacia la izquierda como se aprecia en la Figura 17, el cual comprobaría que el flujo neutrónico tiene comportamiento de una onda solitón. Al final de esta sección se realizó la comparación de las soluciones tipo de solitón, tanto de la forma numérica como analítica, el cual se puede evidenciar que ambas soluciones son muy semejantes, como se muestra en la figura 18 y además corrobora que la aproximación analítica que se realizo es la correcta.

En el capítulo 4 se desarrolló el tema de la ecuación de Sine - Gordon a través de una formulación lagrangiana, en este capitulo se estudio el caso en particular de la ecuación de Sine - Gordon másico que fue de importancia para el desarrollo del objetivo de esta tesis, además en este capítulo se desarrollo y se presento el concepto del tensor energía - momento, muy importante para encontrar la energía de un sistema caracterizado por una densidad lagrangiana.

Por ultimo en el capítulo 5 que fue el capitulo principal de esta tesis se desarrollo el procedimiento para encontrar la interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos. Para encontrar dicha interacción, primero se tuvo que encontrar una densidad lagrangiana que caracteriza a la ecuación aproximada de la ecuación de difusión del reactor (3.31) encontrado en el capitulo 3. Se pudo demostrar que la densidad lagrangiana que caracteriza a dicha ecuación se puede representar a través de la densidad lagrangiana de la ecuación de Sine - Gordon másico. Para poder hallar dicha interacción se supuso que dos Kinks forman un estado ligado, los cuales equidistan del punto medio que une sus centros. Para encontrar dicha fuerza de interacción se utilizo el método de superposición lineal de cada uno de los solitones, pero antes de hallar dicha fuerza se tuvo que usar el tensor de energía - momento para encontrar la energia del sistema, y encontrar la condición matemática (5.20) que limita a la energía y

evitar tener inconsistencias físicas, una vez definida esta condición se calculo la fuerza de interacción entre estos dos Kinks el cual esta dado por la ecuación (5.30), si graficamos esta ecuación como se muestra en la figura 20 nos damos con la sorpresa que dicha fuerza solo toma valores negativos, por lo tanto, la suposición que estos dos Kinks formarían un estado ligado seria incorrecta ya que existe una fuerza de repulsión que esta en el orden de 10^{-9} que intenta separarlos. Una vez encontrado la fuerza de interacción se pasó a hallar la energía de interacción de estos dos Kinks, al calcular esta energía dado por la expresión (5.36) y graficándolo como se muestra en la figura 21 se observa que la energía de interacción toma valores positivos y estos es consistente con el resultado de la fuerza de interacción que se halló, por que si fuera un sistema ligado la fuerza de interacción seria positiva y la energía de interacción sera negativa como ocurre en el núcleo de un átomo, pero en este caso el sistema no es ligado si no que intenta separarse. De acuerdo a nuestros resultados se puede ver que la energía de interacción será cero y, por lo tanto, la fuerza de interacción será también cero solo cuando la distancia entre los Kinks sea cero o que la distancia que los separa sea mucho mayor que 1, por lo tanto, podemos concluir que la interacción entre dos solitones neutrónicos térmicos de un reactor neutrónico térmico unidimensional infinito es del tipo repulsión. El resultado final de este trabajo va acorde con un concepto de la mecánica cuántica, el cual es el concepto de la interacción de intercambio, el cual puede explicar el porque nuestros dos solitones neutrónicos térmicos, el cual es en si, dos flujos neutrónicos con propiedades de una onda solitón presentan una interacción de tipo repulsión, ya que basándose en el concepto de interacción intercambio, los dos flujos neutrónicos actúan como si fuera un solo neutrón cada uno de ellos, por lo tanto, al ser un sistema de partículas indistinguibles y al realizar una simetría de intercambio, esto conlleva a que experimenten una fuerza de interacción que para el caso de los fermiones, como es el caso de los neutrones, es una interacción de tipo repulsión, igual que los resultados obtenidos en este trabajo.

Referencias

- Albert, E., Perrett, W., and Jeffery, G. (1916). The foundation of the general theory of relativity. *Annalen der Physik*, 354(7):769. doi: 10.1002/andp.19163540702
- Ayres, F., Mendelson, E., and Abellanas, L. (1991). *Cálculo diferencial e integral*. Number 3a. ed. McGraw-Hill México.
- Barone, A., Esposito, F., Magee, C., and Scott, A. (1971). Theory and applications of the sine-gordon equation. *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)*, 1(2):227–267. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02820622>
- Bonnet, O. (1867). *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. deuxième partie*. Gauthier-Villars.
- Bour, E. (1891). *Théorie de la déformation des surfaces*. Gauthier-Villars.
- Brauer, K. (2000). The korteweg-de vries equation: history, exact solutions, and graphical representation. *University of Osnabrück/Germany I*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/2806104_The_Korteweg-de_Vries_Equation_History_exact_Solutions_and_graphical_Representation
- Candu, C. and de Leeuw, M. (2013). Introduction to integrability. *lectures delivered at ETH*. Recuperado de <http://edu.itp.phys.ethz.ch/fs13/int/CFT.pdf>
- Carroll, S. M. (1997). Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/9712019>
- Caso Huerta, M. (2018). La ecuación de korteweg-de vries: Un ejemplo práctico de integrabilidad. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10651/49119>
- Caudrey, P., Eilbeck, J., and Gibbon, J. (1975). The sine-gordon equation as a model classical field theory. *Il Nuovo Cimento B*, 25(2):497–512. doi: 10.1007/BF02724733
- Chapra, S. C. (2010). *Numerical methods for engineers*. McGraw-hill.

- Chen, X.-N., Kiefhaber, E., Zhang, D., and Maschek, W. (2012). Fundamental solution of nuclear solitary wave. *Energy conversion and management*, 59:40–49. doi: 10.1016/j.enconman.2012.02.005
- Chen, X.-N., Zhang, D., Maschek, W., and Schulenberg, T. (2010). Solitary breeding/burning waves in a supercritical water cooled fast reactor. *Energy Conversion and Management*, 51(9):1792–1798. doi: 10.1016/j.enconman.2010.01.028
- Das, A. (1989). *Integrable models*, volume 30. World scientific.
- Dutykh, D. and Caputo, J.-G. (2015). Discrete sine-gordon dynamics on networks. *arXiv preprint arXiv:1506.02405*. Recuperado de <https://hal.science/hal-01160840v1/document>
- El-Wakil, S., Abulwafa, E. M., El-hanbaly, A., El-Shewy, E., and Abd-El-Hamid, H. (2016). Self-similar solutions for some nonlinear evolution equations: Kdv, mkdv and burgers equations. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 19:44–51. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jaubas.2014.06.007>
- Espinosa-Paredes, G. and Rodríguez, R. V. (2016). *Física de reactores nucleares I: Un enfoque conceptual*. OmniaScience.
- Gaeta, G., Reiss, C., Peyrard, M., and Dauxois, T. (1994). Simple models of non-linear dna dynamics. *Rivista del Nuovo cimento*, 17(4):1–48. doi: 10.1007/BF02724511
- Garifullin, R. N., Kalyakin, L. A., and Shamsutdinov, M. A. (2007). Autoresonance excitation of a breather in weak ferromagnetics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 47(7):1158. doi: <https://doi.org/10.1134/S0965542507070081>
- Gaveau, B., Maillard, J., Maurel, G., and Silva, J. (2005). Hybrid soliton nuclear reactors: A model and simulation. *Nuclear engineering and design*, 235(15):1665–1674. doi: 10.1016/j.nucengdes.2005.02.001
- Gaveau, B., Maillard, J., Maurel, G., and Silva, J. (2006). Equations of evolution of a hybrid soliton nuclear reactor. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 85(5):633–670. doi: 10.1016/j.matpur.2005.11.001
- Gratton, J. (1991). Similarity and self similarity in fluid dynamics. *Fundamentals of Cosmic Physics*, 15:1–106. Recuperado de <https://lhe.epfl.ch/pdf/gratton.pdf>
- Griffiths, D. (2020). *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons.
- Griffiths, G. and Schiesser, W. E. (2010). *Traveling wave analysis of partial differential equations: numerical and analytical methods with MATLAB and Maple*. Academic Press.

- Huang, J. F. (2022). The solitary wave in advanced nuclear energy system. *Nuclear Science and Engineering*, 196(7):873–885. doi: 10.1080/00295639.2021.2025299
- Karpman, V. and Solov'ev, V. (1981). A perturbational approach to the two-soliton systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 3(3):487–502. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(81\)90035-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(81)90035-X)
- Krane, K. S. (1991). *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons.
- Lamarsh, J. R. (1966). *Introduction to nuclear reactor theory*. Addison-Wesley.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. (1970). *Física teórica. Mecánica*, volume 1. Reverte.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1992). *Teoría clásica de campos*, volume 2, chapter 4. Reverté.
- Lenholm, E. and Hörnquist, M. (2003). Revisiting salerno's sine-gordon model of dna: active regions and robustness. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 177(1-4):233–241. doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(02\)00769-8](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(02)00769-8)
- McKean, H. (1981). The sine-gordon and sinh-gordon equations on the circle. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 34(2):197–257. doi: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160340204>
- Murray, R. S. (1989). *Mecánica Teórica*, chapter 2. Mc Graw Hill, Caracas.
- Raza, N., Butt, A. R., and Javid, A. (2016). Approximate solution of nonlinear klein-gordon equation using sobolev gradients. *Journal of Function Spaces*, 2016. doi: <https://doi.org/10.1155/2016/1391594>
- Rábago, D., Gómez, S., Mañanes, A., and Lima, D. (2017). Caracterización de materiales para el blindaje frente a neutrones. 385. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/320444732_Caracterizacion_de_materiales_para_el_blindaje_frente_a_neutrones
- Roy, A. (2023). Quantum electronic circuits for multicritical ising models. *arXiv preprint arXiv:2306.04346*. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.04346>
- Rubakov, V. (2009). *Classical theory of gauge fields*, chapter 7. Princeton University Press.
- Rubinstein, J. (1970). Sine-gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 11(1):258–266. doi: 10.1063/1.1665057

- Rusov, V. D., Linnik, E. P., Tarasov, V. A., Zelentsova, T. N., Sharph, I. V., Vaschenko, V. N., Kosenko, S. I., Beglaryan, M. E., Chernenchenko, S. A., Molchinikolov, P. A., et al. (2011). Traveling wave reactor and condition of existence of nuclear burning soliton-like wave in neutron-multiplying media. *Energies*, 4(9):1337–1361. doi: 10.3390/en4091337
- Russell, J. S. (1845). Report on waves. report of the fourteenth meeting of the british association for the advancement of science, york, september 1844. Recuperado de <https://www.macs.hw.ac.uk/~chris/Scott-Russell/SR44.pdf>
- Sanchez del Rio, C., Vigon, M., Verdaguer, F., Rodriguez Mayquez, E., and Montes, J. (1958). Neutron physics; fisica del neutron. Recuperado de https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/41/003/41003515.pdf
- Seifritz, W. (1997). The nuclear soliton reactor/der nukleare soliton-reaktor. *Kerntechnik*, 62(5-6):222–226. doi:10.1515/kern-1996-625-609
- Seifritz, W. (1998a). On the burn-up theory of fast soliton reactors. *International journal of hydrogen energy*, 23(2):77–81. doi:10.1016/S0360-3199(97)00072-4
- Seifritz, W. (1998b). The thermal neutronic soliton wave phenomenon in an infinite medium. *Kerntechnik* (1987), 63(5-6):261–266. Recuperado de https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:30008251
- Seifritz, W. (2000). Solitary burn-up waves in a multiplying medium. *Kerntechnik*, 65(5-6):261–264. doi:10.1515/kern-2000-655-618
- Sokolov, A. A., Ternov, I., Zhukovski, V. C., and Borisov, A. (1989). *Electrodinámica cuántica*, chapter 1. Mir.
- Soria, A. F. (2020). *Física nuclear y de partículas*, volume 62. Universitat de València.
- Spiegel, M. (1992). *Mecánica Teórica. Ed*, chapter 11. McGraw-Hill, Madrid.
- Stacey, W. M. (2007). *Nuclear reactor physics*. John Wiley & Sons.
- Valde, J. E. N. and Thomas, A. G. (2006). Solitones, una no-linealidad no tan solitaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 7(1). Recuperado de <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/download/2122/1924>
- Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D. (1965). Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6):240. doi:10.1103/PhysRevLett.15.240
- Zener, C. and Heikes, R. (1953). Exchange interactions. *Reviews of Modern Physics*, 25(1):191. doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.25.191.2>

APÉNDICE

A.1. APÉNDICE 1

Resolviendo:

$$J_{z-} = \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} \left[\phi_0 + r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 + r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_0 + r \cos \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_0 \right] \\ \bullet \Sigma_S \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi e^{-\Sigma r} d\theta$$

$$J_{z-} = \left(\frac{\Sigma_S}{4\pi} \right) \int_0^\infty e^{-\Sigma r} dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \left[\phi_0 + r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 + r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_0 \right. \\ \left. + r \cos \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \right] d\theta.$$

Integrando con respecto a θ :

$$J_{z-} = \left(\frac{\Sigma_S}{4\pi} \right) \int_0^\infty e^{-\Sigma r} dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \left[\underbrace{\phi_0 \theta}_{=0} + r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_0 - r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_0 \right. \\ \left. + r \theta \cos \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \right]_{0}^{2\pi} d\varphi.$$

$$J_{z-} = \left(\frac{\Sigma_S}{4\pi} \right) \int_0^\infty e^{-\Sigma r} dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \left[2\pi \phi_0 + 2\pi r \cos \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \right] d\varphi$$

$$J_{z-} = \left(\frac{\Sigma_S}{2} \right) \int_0^\infty e^{-\Sigma r} dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \left[\phi_0 + r \cos \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \right] d\varphi$$

$$J_{z-} = \left(\frac{\Sigma_S}{2} \right) \left\{ \underbrace{\phi_0 \int_0^\infty e^{-\Sigma r} dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi}_{(I)} + \underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \int_0^\infty r e^{-\Sigma r} dr \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi}_{(II)} \right\}.$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}(I) &= \int_0^{\infty} e^{-\Sigma r} dr \\ &= -\frac{e^{-\Sigma r}}{\Sigma} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\Sigma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(II) &= \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \\ &= -\int_1^0 \cos \varphi d(\cos \theta \varphi) \\ &= -\frac{\cos^2 \varphi}{2} \Big|_1^0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(III) &= \int_0^{\infty} r e^{-\Sigma r} dr \\ &= \underbrace{-\frac{r e^{-\Sigma r}}{\Sigma} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\Sigma r}}{\Sigma} dr \\ &= \frac{1}{\Sigma} \int_0^{\infty} e^{-\Sigma r} dr \\ &= \frac{1}{\Sigma^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(IV) &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \\ &= -\int_1^0 \cos^2 \varphi d(\cos \varphi) \\ &= -\frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Entonces reemplazando en J_{z-} :

$$\begin{aligned} J_{z-} &= \left(\frac{\Sigma_S}{2}\right) \left[\frac{\phi_0}{2\Sigma} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \frac{1}{3\Sigma^2} \right] \\ &= \frac{\phi_0\Sigma_S}{4\Sigma} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \frac{\Sigma_S}{6\Sigma^2} \end{aligned}$$

A.2. APÉNDICE 2

- Resolviendo:

$$\frac{\dot{N}_f}{N_f} = -\sigma_a^f \phi(x, t)$$

integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{dN_f}{N_f} &= \int_0^t -\sigma_a^f \phi(x, \tau) d\tau \\ \text{Ln}(N_f) + \text{cte} &= -\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau \\ \text{Ln}(N_f \cdot \text{cte}) &= -\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau \\ N_f(x, t) &= \text{cte} \cdot e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau} \end{aligned}$$

usando la condicion inicial $N_f(x, 0) = N_{f,0}$, entonces

$$N_f(x, t) = N_{f,0} \cdot e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau},$$

si denominamos como

$$F = e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau},$$

entonces

$$N_f(x, t) = N_{f,0} \cdot e^{-F}.$$

- Resolviendo:

$$\frac{\dot{N}_v}{N_v} = -\sigma_a^v \phi(x, t)$$

integrando

$$\int \frac{dN_v}{N_v} = \int_0^t -\sigma_a^v \phi(x, \tau) d\tau$$

$$N_v(x, t) = \text{cte} \cdot e^{-\sigma_a^v \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau}$$

usando la condición inicial $N_v(x, 0) = N_{v,0}$

$$N_v(x, t) = N_{v,0} \cdot e^{-\frac{\sigma_a^v}{\sigma_a^f} \underbrace{\int_0^t \phi(x, \tau) d\tau}_F},$$

si definimos como $\mu = \sigma_a^v / \sigma_a^f$, entonces

$$N_v(x, t) = N_{v,0} \cdot e^{-\mu F}$$

• Resolviendo:

$$\dot{N}_{pf} = \sigma_a^f N_f \phi - \sigma_a^{pf} N_{pf} \phi$$

$$\frac{\partial N_{pf}}{\partial t} + \sigma_a^{pf} N_{pf} \phi = \sigma_a^f N_f \phi,$$

usando la solución de N_f , entonces

$$\frac{\partial N_{pf}}{\partial t} + \sigma_a^{pf} N_{pf} \phi = \sigma_a^f \phi N_{f,0} e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau},$$

planteamos la siguiente solución:

$$N_{pf} = \alpha e^{-\sigma_a^{pf} \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau} + \beta e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau}$$

reemplacemos esta solución en la ecuación diferencial para encontrar los coeficientes de α y β , entonces se obtiene la siguiente ecuación

~~$$-\alpha \sigma_a^{pf} \phi e^{-\sigma_a^{pf} \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau} - \beta \sigma_a^f \phi e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau} + \sigma_a^{pf} \phi \alpha e^{-\sigma_a^{pf} \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau} + \sigma_a^{pf} \phi \beta e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau} = \sigma_a^f \phi N_{f,0} e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau}$$~~

factorizando y eliminando términos se obtiene la siguiente ecuación:

$$\beta(\sigma_a^{pf} - \sigma_a^f) = \sigma_a^f N_{f,0}$$

$$\beta \left(\frac{\sigma_a^{pf}}{\sigma_a^f} - 1 \right) = N_{f,0},$$

sea $\gamma = \sigma_a^{pf} / \sigma_a^f$, entonces:

$$\beta(\gamma - 1) = N_{f,0}$$

$$\beta = \frac{N_{f,0}}{\gamma - 1}$$

reemplazando en la solución de N_{pf} planteada se obtiene la siguiente expresión

$$N_{pf} = \alpha e^{-\frac{\sigma_a^{pf}}{\sigma_a^f} \sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau} + \beta e^{-\sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau}$$

recordando las expresiones de γ y F , entonces se tiene que

$$N_{pf}(x, t) = \alpha e^{-\gamma F} + \beta e^{-F},$$

usando la condición inicial $N_{pf}(x, 0) = 0$ y sabiendo que $F(x, 0) = 0$, entonces se concluye que

$$\alpha + \beta = 0$$

teniendo en cuenta la condición que cumplen las constantes α y β , entonces la expresión de N_{pf} será igual a

$$N_{pf}(x, t) = \beta(e^{-F} - e^{-\gamma F})$$

pero como $\beta = \frac{N_{f,0}}{\gamma - 1}$, entonces se obtiene que

$$N_{pf}(x, t) = \frac{N_{f,0}}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F})$$

A.3. APÉNDICE 3

Como la ecuación de difusión para los neutrones térmicos es

$$D\nabla^2 \phi + [(\eta - 1)\sigma_a^f N_f - \sigma_a^v N_v - \sigma_a^{pf} N_{pf} - \Sigma_{a,0}^m] = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

reemplazando las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) en la anterior ecuacion se obtiene los siguientes resultados:

$$D\nabla^2\phi + \left[(\eta-1)\sigma_a^f N_{f,0} e^{-F} - \underbrace{\frac{\sigma_a^v}{\sigma_a^f}}_{\mu} \sigma_a^f N_{v,0} e^{-\mu F} - \underbrace{\frac{\sigma_a^{pf}}{\sigma_a^f}}_{\gamma} \sigma_a^f \frac{N_{f,0}}{\gamma-1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\Sigma_{a,0}^f} \Sigma_{a,0}^f \right] \phi = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

recordando la definicion de la seccion eficaz macroscopica $\Sigma = N \cdot \sigma$, entonces:

$$D\nabla^2\phi + \left[(\eta-1)\Sigma_{a,0}^f e^{-F} - \mu \sigma_a^f N_{f,0} \frac{N_{v,0}}{N_{f,0}} e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \Sigma_{a,0}^f (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\Sigma_{a,0}^f} \Sigma_{a,0}^f \right] \phi = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Si definimos como $\Lambda = \frac{N_{v,0}}{N_{f,0}}$ y $\Gamma = \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\Sigma_{a,0}^f}$, entonces

$$D\nabla^2\phi + \left[(\eta-1)\Sigma_{a,0}^f e^{-F} - \mu \Lambda \Sigma_{a,0}^f e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \Sigma_{a,0}^f (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \Sigma_{a,0}^f \right] \phi = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$D\nabla^2\phi + \Sigma_{a,0}^f \left[(\eta-1)e^{-F} - \mu \Lambda e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma-1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \right] \phi = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

A.4. APÉNDICE 4

Como:

$$F(g(x, t)) = F\left(\frac{x - vt}{D}\right) = \sigma_a^f \int_0^t \phi(x, \tau) d\tau,$$

realizando la derivada $\frac{\partial F}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{dF}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} \\ \sigma_a^f \phi(x, t) &= F' \cdot \frac{-v}{D} \\ \phi(x, t) &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} F'. \end{aligned}$$

Realizando la derivada $\frac{\partial \phi}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \\
 &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dF}{dg} \right) \\
 &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \\
 &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{dF}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} \right) \\
 &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{dF}{dg} \cdot \frac{-v}{D} \right) \\
 &= \frac{v^2}{D^2 \sigma_a^f} \cdot \frac{d^2 F}{dg^2} \\
 &= \frac{v^2}{D^2 \sigma_a^f} F''.
 \end{aligned}$$

Realizando la derivada $\frac{\partial \phi}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dF}{dg} \right) \\
 &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \\
 &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{dF}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) \\
 &= -\frac{v}{D \sigma_a^f} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{dF}{dg} \cdot \frac{1}{D} \right) \\
 &= -\frac{v}{D^2 \sigma_a^f} \cdot \frac{d^2 F}{dg^2},
 \end{aligned}$$

realizando la derivada $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -\frac{v}{D^2 \sigma_a^f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^2 F}{dg^2} \right) \\
&= -\frac{v}{D^2 \sigma_a^f} \cdot \frac{d^2}{dg^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \\
&= -\frac{v}{D^2 \sigma_a^f} \cdot \frac{d^2}{dg^2} \left(\frac{dF}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) \\
&= -\frac{v}{D^2 \sigma_a^f} \cdot \frac{d^2}{dg^2} \left(\frac{dF}{dg} \cdot \frac{1}{D} \right) \\
&= -\frac{v}{D^3 \sigma_a^f} \cdot \frac{d^3 F}{dg^3} \\
\nabla^2 \phi &= -\frac{v}{D^3 \sigma_a^f} F'''
\end{aligned}$$

A.5. APÉNDICE 5

Sea la ecuación:

$$D \nabla^2 \phi + \Sigma_{a,0}^f \left[(\eta - 1) e^{-F} - \mu \Lambda e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \right] \phi = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

reemplazando las expresiones de ϕ , $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ y $\nabla^2 \phi$, se obtiene

$$\begin{aligned}
D \left(-\frac{\gamma}{D^3 \sigma_a^f} F''' \right) + \Sigma_{a,0}^f \left[(\eta - 1) e^{-F} - \mu \Lambda e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \right] \cdot \frac{-\gamma}{D \sigma_a^f} F' &= \frac{1}{v} \cdot \frac{\gamma^2}{D^2 \sigma_a^f} F'' \\
-\frac{F'''}{D^2 \sigma_a^f} + \Sigma_{a,0}^f \left[(\eta - 1) e^{-F} - \mu \Lambda e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \right] \cdot \frac{-D}{D^2 \sigma_a^f} F' &= \frac{F''}{D^2 \sigma_a^f} \\
-D \Sigma_{a,0}^f \left[(\eta - 1) e^{-F} - \mu \Lambda e^{-\mu F} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) - \Gamma \right] F' &= F''' + F''
\end{aligned}$$

A.6. APÉNDICE 6

Teniendo la constante de multiplicación infinita:

$$K_\infty = \frac{\eta \sigma_a^f N_f}{\sigma_a^f N_f + \sigma_a^v N_v + \sigma_a^{pf} N_{pf} + \Sigma_{a,0}^m},$$

Reemplazando las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) se obtiene:

$$K_{\infty}(F) = \frac{\eta \cdot \sigma_a^f \cdot N_{f,0} \cdot e^{-F}}{\sigma_a^f \cdot N_{f,0} \cdot e^{-F} + \sigma_a^v \cdot N_{v,0} \cdot e^{-\alpha F} + \sigma_a^{pf} \cdot \frac{N_{f,0}}{\gamma - 1} \cdot (e^{-F} - e^{-\gamma F}) + \Sigma_{a,0}^m}$$

$$K_{\infty}(F) = \frac{\eta \cdot e^{-F}}{\frac{\sigma_a^{f/}}{\sigma_a^f} \cdot \frac{N_{f,0}}{N_{f,0}} \cdot e^{-F} + \frac{\sigma_a^v}{\sigma_a^f} \cdot \frac{N_{v,0}}{N_{f,0}} \cdot e^{-\alpha F} + \frac{\sigma_a^{pf}}{\sigma_a^f} \cdot \frac{N_{f,0}}{N_{f,0}} \cdot \frac{1}{\gamma - 1} \cdot (e^{-F} - e^{-\gamma F}) + \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\sigma_a^f \cdot N_{f,0}}}$$

Como:

$$\mu = \frac{\sigma_a^v}{\sigma_a^f}, \quad \gamma = \frac{\sigma_a^{pf}}{\sigma_a^f}$$

$$\sigma_a^f \cdot N_{f,0} = \Sigma_{a,0}^f \quad y \quad \Lambda = \frac{N_{v,0}}{N_{f,0}}, \quad \Gamma = \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\Sigma_{a,0}^f}$$

entonces

$$K_{\infty}(F) = \frac{\eta \cdot e^{-F}}{e^{-F} + \mu \Lambda e^{-\mu F} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} (e^{-F} - e^{-\gamma F}) + \Gamma}$$

A.7. APÉNDICE 7

Como:

$$K_{\infty}(0) = \frac{\eta}{1 + \mu \cdot \Lambda + \Gamma},$$

entonces

$$1 + \mu \cdot \Lambda + \Gamma = \frac{\eta}{K_{\infty}(0)}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\eta}{K_{\infty}(0)} - 1 \right) - \frac{\Gamma}{\mu}$$

$$\frac{N_{v,0}}{N_{f,0}} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\eta}{K_{\infty}(0)} - 1 \right) - \frac{\Sigma_{a,0}^m / \Sigma_{a,0}^f}{\sigma_a^v / \sigma_a^f}$$

$$\frac{N_{v,0}}{N_{f,0}} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\eta}{K_{\infty}(0)} - 1 \right) - \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\sigma_a^f \cdot N_{f,0}} \cdot \frac{\sigma_a^f}{\sigma_a^v}$$

$$N_{v,0} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\eta}{K_{\infty}(0)} - 1 \right) \cdot N_{f,0} - \frac{\Sigma_{a,0}^m}{\sigma_a^v}$$

A.8. APÉNDICE 8

El código de lenguaje Python utilizado se muestra a continuación:

```
import math
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

eta=2.08
mu=5.577
gam=1.27
D=0.868
Nf0=5*10**19
sef_f=6.88*10**(-22)
Lamb=0.2331
Gam=1.1163*10**(-2)

g=np.arange(-1050,1050,1)
F=np.zeros(len(g))
H=np.zeros(len(g))
h=g[1]-g[0]
F[0]=0.0001
H[0]=0
n=1

while n <= len(g)-1:

m = [H[n - 1], D * sef_f * Nf0 * ((eta - 1) * (math.exp(-F[n - 1]) - 1) - Lamb * (math.exp(-mu*
F[n - 1]) - 1) - (gam/(gam - 1)) * ((1/gam) * (math.exp(-gam * F[n - 1]) - 1) -
(math.exp(-F[n - 1]) - 1)) - Gam * F[n - 1]) - H[n - 1]]
M = np.array(m)
[F[n], H[n]] = [F[n - 1], H[n - 1]] + h * M
n = n + 1

for i in range(len(g)):
if g[i]==0:
print(F[i])
```

F_infty=0.06306

b1=1.020*10**(-4)

x=np.zeros(len(g))

for i in range(len(g)):

x[i]=(2*F_infty/math.pi)*math.atan(math.exp(b1*math.pi*g[i]/F_infty))

plt.scatter(g,F,s=0.1,color='red',label="Sol. numerica")

plt.plot(g,x,color='blue',label="Sol. aprox.")

plt.legend(loc = "lower right")

plt.show()

A.9. APÉNDICE 9

Reemplazando la función $\Pi(F)$ en la siguiente expresión:

$$b_n = \frac{1}{F_\infty} \int_{-F_\infty}^{F_\infty} \Pi(F) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF = \frac{2}{F_\infty} \int_0^{F_\infty} \Pi(F) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF$$

desarrollando:

$$b_n = \frac{2}{F_\infty} \int_0^{F_\infty} D \Sigma_{a,0}^f \left\{ (\eta - 1)(e^{-F} - 1) - \Lambda(e^{-\mu F} - 1) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{\gamma}(e^{-\gamma F} - 1) - (e^{-F} - 1) \right] - \Gamma \cdot F \right\} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF$$

$$b_n = \frac{2 \cdot D \cdot \Sigma_{a,0}^f}{F_\infty} \left\{ \underbrace{\int_0^{F_\infty} (\eta - 1)(e^{-F} - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF}_{(I)} - \underbrace{\Lambda \int_0^{F_\infty} (e^{-\mu F} - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF}_{(II)} \right. \\ \left. - \underbrace{\frac{1}{\gamma - 1} \int_0^{F_\infty} (e^{-\gamma F} - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF}_{(III)} + \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \int_0^{F_\infty} (e^{-F} - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF}_{(IV)} \right. \\ \left. - \underbrace{\Gamma \int_0^{F_\infty} F \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF}_{(V)} \right.$$

Desarrollando cada una de las integrales:

$$(I) = (\eta - 1) \int_0^{F_\infty} (e^{-F} - 1) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) dF$$

$$(I) = (\eta - 1) \left[\int_0^{F_\infty} e^{-F} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) dF - \int_0^{F_\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) dF \right].$$

Para resolver la integral (I) y las demas, primero resolvemos la siguiente integral ya que estara presente en el desarrollo de las integrales (I), (II), (III), (IV), (V). Sea la integral:

$$k = \int_0^{F_\infty} e^{-\lambda F} \operatorname{sen}(\nu F) dF$$

integrando por partes:

$$k = -\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \operatorname{sen}(\nu F) \Big|_0^{F_\infty} - \int_0^{F_\infty} \left(-\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda}\right) \nu \cos(\nu F) dF$$

$$k = -\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \operatorname{sen}(\nu F) \Big|_0^{F_\infty} + \frac{\nu}{\lambda} \int_0^{F_\infty} e^{-\lambda F} \cos(\nu F) dF$$

integrando por partes:

$$k = -\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \operatorname{sen}(\nu F) \Big|_0^{F_\infty} + \frac{\nu}{\lambda} \left[-\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \cos(\nu F) \Big|_0^{F_\infty} - \int_0^{F_\infty} \left(-\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda}\right) (-\nu \operatorname{sen}(\nu F)) dF \right]$$

$$k = -\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \operatorname{sen}(\nu F) \Big|_0^{F_\infty} + \frac{\nu}{\lambda} \left[-\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \cos(\nu F) \Big|_0^{F_\infty} - \underbrace{\frac{\nu}{\lambda} \int_0^{F_\infty} e^{-\lambda F} \operatorname{sen}(\nu F) dF}_k \right]$$

$$k = -\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \operatorname{sen}(\nu F) \Big|_0^{F_\infty} + \frac{\nu}{\lambda} \left[-\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \cos(\nu F) \Big|_0^{F_\infty} - \frac{\nu}{\lambda} \cdot k \right]$$

$$k \left(1 + \frac{\nu^2}{\lambda^2} \right) = \left(\frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \operatorname{sen}(\nu F) + \frac{\nu}{\lambda^2} e^{-\lambda F} \cos(\nu F) \right) \Big|_0^{F_\infty}$$

$$k = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \nu^2} \left(\frac{\nu}{\lambda^2} - \frac{e^{-\lambda F_\infty}}{\lambda} \operatorname{sen}(\nu F_\infty) - \frac{\nu}{\lambda^2} e^{-\lambda F_\infty} \cos(\nu F_\infty) \right).$$

Si

$$\nu = \frac{n\pi}{F_\infty}$$

entonces:

$$k = \frac{\lambda^2 F_\infty^2}{\lambda^2 F_\infty^2 + n^2 \pi^2} \left(\frac{n\pi}{\lambda^2 F_\infty} - \frac{e^{-\lambda F_\infty}}{\lambda} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\lambda^2 F_\infty} e^{-\lambda F_\infty} \cos(n\pi) \right).$$

Utilizando la solución de la integral k en la integral (I) se obtiene:

$$(I) = (\eta - 1) \left[\frac{F_\infty^2}{F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) \Big|_0^{F_\infty} \right]$$

$$(I) = (\eta - 1) \left[\frac{F_\infty^2}{F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \right].$$

Resolviendo la integral (II):

$$(II) = \Lambda \int_0^{F_\infty} (e^{-\mu F} - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF$$

$$(II) = \Lambda \left[\int_0^{F_\infty} e^{-\mu F} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF - \int_0^{F_\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF \right],$$

usando la solución de la integral k , entonces:

$$(II) = \Lambda \left[\frac{\mu^2 F_\infty^2}{\mu^2 F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{\mu^2 F_\infty} - \frac{e^{-\mu F_\infty}}{\mu} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\mu^2 F_\infty} e^{-\mu F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \right].$$

Resolviendo la integral (III):

$$(III) = \frac{1}{\gamma - 1} \int_0^{F_\infty} (e^{-\gamma F} - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF$$

$$(III) = \frac{1}{\gamma - 1} \left[\int_0^{F_\infty} e^{-\gamma F} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF - \int_0^{F_\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF \right],$$

usando la solución de la integral k , entonces:

$$(III) = \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma^2 F_\infty^2}{\gamma^2 F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{\gamma^2 F_\infty} - \frac{e^{-\gamma F_\infty}}{\gamma} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\gamma^2 F_\infty} e^{-\gamma F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \right].$$

Resolviendo la integral (IV):

$$(IV) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \int_0^{F_\infty} (e^{-F} - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF$$

$$(IV) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\int_0^{F_\infty} e^{-F} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF - \int_0^{F_\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi F}{F_\infty} \right) dF \right],$$

usando la solución de la integral k , entonces:

$$(IV) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{F_\infty^2}{F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \right].$$

Resolviendo la integral (V):

$$(V) = \Gamma \int_0^{F_\infty} F \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) dF,$$

integrando por partes

$$(V) = \Gamma \left[-F \cdot \frac{F_\infty}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) \Big|_0^{F_\infty} + \int_0^{F_\infty} \frac{F_\infty}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) dF \right]$$

$$(V) = \Gamma \left[-F \cdot \frac{F_\infty}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) + \frac{F_\infty^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi F}{F_\infty}\right) \right]_0^{F_\infty}$$

$$(V) = \Gamma \left[\frac{F_\infty^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{F_\infty^2}{n\pi} \cos(n\pi) \right].$$

Sumando las integrales (I), (II), (III), (IV), (V), entonces b_n sera igual a:

$$b_n = \frac{2 \cdot D \cdot \Sigma_{a,0}^f}{F_\infty} \left\{ (\eta - 1) \left[\frac{F_\infty^2}{F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \right] - \right. \\ \Lambda \left[\frac{\mu^2 F_\infty^2}{\mu^2 F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{\mu^2 F_\infty} - \frac{e^{-\mu F_\infty}}{\mu} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\mu^2 F_\infty} e^{-\mu F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \right] - \\ \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma^2 F_\infty^2}{\gamma^2 F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{\gamma^2 F_\infty} - \frac{e^{-\gamma F_\infty}}{\gamma} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\gamma^2 F_\infty} e^{-\gamma F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \right] + \\ \left. \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{F_\infty^2}{F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \right] - \right. \\ \left. \Gamma \left[\frac{F_\infty^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{F_\infty^2}{n\pi} \cos(n\pi) \right] \right\},$$

factorizando F_∞ en todos los términos se tiene:

$$b_n = 2 \cdot D \cdot \Sigma_{a,0}^f \left\{ (\eta - 1) \left[\frac{F_\infty}{F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] - \right. \\ \Lambda \left[\frac{\mu^2 F_\infty}{\mu^2 F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{\mu^2 F_\infty} - \frac{e^{-\mu F_\infty}}{\mu} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\mu^2 F_\infty} e^{-\mu F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] - \\ \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma^2 F_\infty}{\gamma^2 F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{\gamma^2 F_\infty} - \frac{e^{-\gamma F_\infty}}{\gamma} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{\gamma^2 F_\infty} e^{-\gamma F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] + \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{F_\infty}{F_\infty^2 + n^2\pi^2} \left(\frac{n\pi}{F_\infty} - e^{-F_\infty} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{n\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \cos(n\pi) \right) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] - \\ \left. \Gamma \left[\frac{F_\infty}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{F_\infty}{n\pi} \cos(n\pi) \right] \right\}.$$

A.10. APÉNDICE 10

Reemplazando $n = 1$ en la expresion de b_n se obtiene el siguiente resultado:

$$b_1 = 2 \cdot D \cdot \Sigma_{a,0}^f \left\{ (\eta - 1) \left[\frac{F_\infty}{F_\infty^2 + \pi^2} \left(\frac{\pi}{F_\infty} + \frac{\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \right) - \frac{2}{\pi} \right] - \Lambda \left[\frac{\mu^2 F_\infty}{\mu^2 F_\infty^2 + \pi^2} \left(\frac{\pi}{\mu^2 F_\infty} + \frac{\pi}{\mu^2 F_\infty} e^{-\mu F_\infty} \right) - \frac{2}{\pi} \right] - \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma^2 F_\infty}{\gamma^2 F_\infty^2 + \pi^2} \left(\frac{\pi}{\gamma^2 F_\infty} + \frac{\pi}{\gamma^2 F_\infty} e^{-\gamma F_\infty} \right) - \frac{2}{\pi} \right] - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left[\frac{F_\infty}{F_\infty^2 + \pi^2} \left(\frac{\pi}{F_\infty} + \frac{\pi}{F_\infty} e^{-F_\infty} \right) - \frac{2}{\pi} \right] - \Gamma \cdot \frac{F_\infty}{\pi} \right\}$$

factorizando términos se tiene:

$$b_1 = 2 \cdot D \cdot \Sigma_{a,0}^f \left\{ (\eta - 1) \left[\frac{\pi}{F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \Lambda \left[\frac{\pi}{\mu^2 F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-\mu F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\pi}{\gamma^2 F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-\gamma F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{\pi}{F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \Gamma \cdot \frac{F_\infty}{\pi} \right\},$$

agrupando termino se obtiene

$$b_1 = 2 \cdot D \cdot \Sigma_{a,0}^f \left\{ \left((\eta - 1) + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) \left[\frac{\pi}{F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \Lambda \left[\frac{\pi}{\mu^2 F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-\mu F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{\pi}{\lambda^2 F_\infty^2 + \pi^2} (1 + e^{-\lambda F_\infty}) - \frac{2}{\pi} \right] - \Gamma \cdot \frac{F_\infty}{\pi} \right\}.$$

A.11. APÉNDICE 11

Sea la ecuación:

$$F'' + F' = b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi F}{F_\infty} \right),$$

realicemos la siguiente transformación de auto - semejanza

$$F(g) = \lambda \cdot F^*(\kappa \cdot g) = \lambda \cdot F^*(g^*),$$

al realizar esta transformación los términos F' y F'' serán igual a:

- Hallando la expresión de F' :

$$F' = \frac{dF}{dg} = \frac{d}{dg} (\lambda \cdot F^*)$$

$$F' = \lambda \cdot \frac{dF^*}{dg^*} \cdot \frac{dg^*}{dg}$$

$$F' = \lambda \cdot \kappa \cdot \frac{dF^*}{dg^*}.$$

$$F' = \lambda \cdot \kappa \cdot (F^*)'$$

- Hallando la expresión de F'' :

$$F'' = \frac{d}{dg} \left(\frac{dF}{dg} \right),$$

reemplazando la expresión de F' , se obtiene:

$$F'' = \lambda \cdot \kappa \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{dF^*}{dg^*} \right)$$

$$F'' = \lambda \cdot \kappa \cdot \frac{d}{dg^*} \left(\frac{dF^*}{dg} \right)$$

$$F'' = \lambda \cdot \kappa \cdot \frac{d}{dg^*} \left(\frac{dF^*}{dg^*} \cdot \frac{dg^*}{dg} \right)$$

$$F'' = \lambda \cdot \kappa \cdot \frac{d}{dg^*} \left(\kappa \cdot \frac{dF^*}{dg^*} \right)$$

$$F'' = \lambda \cdot \kappa^2 \cdot \frac{d}{dg^*} \left(\frac{dF^*}{dg^*} \right)$$

$$F'' = \lambda \cdot \kappa^2 \cdot (F^*)''.$$

Reemplazando las expresiones de F' y F'' en la ecuación diferencial

$$\lambda \cdot \kappa^2 \cdot (F^*)'' + \lambda \cdot \kappa \cdot (F^*)' = b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{F_\infty} \cdot \lambda \cdot F^* \right)$$

$$\frac{\lambda \cdot \kappa^2}{b_1} \cdot (F^*)'' + \frac{\lambda \cdot \kappa}{b_1} \cdot (F^*)' = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{F_\infty} \cdot \lambda \cdot F^* \right).$$

Vamos asumir que

$$\lambda = \frac{F_\infty}{\pi}$$

y para poder hacer uso de la transformación de auto - semejanza se impondrá que el factor que multiplica a $(F^*)''$ sea igual a 1, entonces:

$$\frac{\lambda \cdot \kappa^2}{b_1} = 1$$

$$\kappa^2 = \frac{b_1}{\lambda}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{b_1 \pi}{F_\infty}}$$

A.12. APÉNDICE 12

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$F' = b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi F}{F_\infty} \right),$$

$$\int \frac{dF}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi F}{F_\infty} \right)} = \int b_1 dg$$

$$\int \operatorname{csc} \left(\frac{\pi F}{F_\infty} \right) dF = b_1 \cdot g,$$

realicemos el cambio de variable $z = \frac{\pi F}{F_\infty}$, entonces:

$$\frac{F_\infty}{\pi} \int \operatorname{csc}(z) dz = b_1 \cdot g$$

$$\int \operatorname{csc}(z) = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

$$\int \frac{\operatorname{csc}(z) \cdot (\operatorname{csc}(z) + \cot(z))}{\operatorname{csc}(z) + \cot(z)} dz = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

$$\int \frac{\operatorname{csc}^2(z) + \operatorname{csc}(z) \cdot \cot(z)}{\operatorname{csc}(z) + \cot(z)} dz = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

pero $\frac{d(\operatorname{csc}(z) + \cot(z))}{dz} = -(\operatorname{csc}^2(z) + \operatorname{csc}(z) \cdot \cot(z))$, entonces:

$$-\int \frac{d(\operatorname{csc}(z) + \cot(z))}{\operatorname{csc}(z) + \cot(z)} = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

$$-\operatorname{Ln} |\operatorname{csc}(z) + \cot(z)| = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g,$$

desarrollemos las funciones csc y \cot , por lo tanto:

$$-\operatorname{Ln} \left| \frac{1}{\operatorname{sen}(z)} + \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} \right| = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

$$-\operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} \right| = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g,$$

usando las relaciones trigonométricas, entonces se tiene:

$$-\operatorname{Ln} \left| \frac{2 \cos^2(z/2)}{2 \operatorname{sen}(z/2) \cos(z/2)} \right| = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

$$-\text{Ln} |\cot(z/2)| = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

$$\text{Ln} |\cot(z/2)|^{-1} = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

$$\text{Ln} |\tan(z/2)| = \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g$$

$$\tan(z/2) = e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g}$$

$$\frac{z}{2} = \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g} \right),$$

reemplazando el valor de z , entonces:

$$\frac{\pi F}{2F_\infty} = \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g} \right)$$

$$F(g) = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \cdot \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g} \right)$$

A.13. APÉNDICE 13

Sea la solución:

$$\phi = \frac{\phi_x}{b_1} \cdot F'$$

como

$$F(g) = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \cdot \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g} \right)$$

entonces

$$F' = \frac{2 \cdot F_\infty}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi b_1}{F_\infty} \cdot g}} \cdot \frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g},$$

simplificando

$$F' = \frac{2 \cdot e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g}}{1 + e^{\frac{2\pi b_1}{F_\infty} \cdot g}} \cdot b_1.$$

Recordemos la expresión de la función coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x},$$

usando la expresión de \cosh en la expresión de F' , por lo tanto se tiene que:

$$F' = \frac{b_1}{\cosh\left(\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g\right)},$$

reemplazando F' en la expresión de ϕ se obtiene:

$$\phi = \frac{\phi_*}{b_1} \cdot \frac{b_1}{\cosh\left(\frac{\pi b_1}{F_\infty} \cdot g\right)},$$

como $g = \frac{x - vt}{D}$, entonces:

$$\phi = \frac{\phi_*}{\cosh\left[\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x - vt}{D}\right)\right]}$$

reemplazando el valor de $v = -\frac{D \cdot \sigma_a^f}{b_1} \cdot \phi_*$, entonces:

$$\phi(x, t) = \frac{\phi_*}{\cosh\left[\frac{\pi \cdot b_1}{F_\infty \cdot D} \left(x + \frac{D \cdot \sigma_a^f}{b_1} \cdot \phi_* t\right)\right]}$$

A.14. APÉNDICE 14

Sea la transformada de coordenadas de luz:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x + t) \\ v = \frac{1}{2}(x - t) \end{cases},$$

entonces su transformada inversa es

$$\begin{cases} x = u + v \\ t = u - v \end{cases}.$$

Sea una función $f = f(x, t)$, por lo tanto, diferenciando obtenemos

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt,$$

dividiendo la anterior ecuación entre du y dv separadamente, se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \end{cases},$$

usando las ecuaciones de la transformada inversa podemos obtener:

$$\begin{cases} \partial_u f = \partial_x f + \partial_t f \\ \partial_v f = \partial_x f - \partial_t f \end{cases},$$

de este sistema de ecuaciones se concluye que

$$\begin{aligned} \partial_u &= \partial_x + \partial_t \\ \partial_v &= \partial_x - \partial_t. \end{aligned}$$

Recordando la ecuación de Sine - Gordon:

$$\varphi_{uv} = \text{sen}(\varphi),$$

reemplazando las ecuaciones de ∂_u y ∂_v (teniendo en cuenta que $\varphi_{uv} = \partial_v(\partial_u \varphi)$), se obtiene:

$$\begin{aligned} (\partial_x - \partial_t)(\partial_x \varphi + \partial_t \varphi) &= \text{sen}(\varphi) \\ \partial_x(\partial_x \varphi) + \cancel{\partial_x(\partial_t \varphi)} - \cancel{\partial_t(\partial_x \varphi)} - \partial_t(\partial_t \varphi) &= \text{sen}(\varphi) \\ \varphi_{xx} - \varphi_{tt} &= \text{sen}(\varphi) \end{aligned}$$

A.15. APÉNDICE 15

Sea la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + \frac{m^2}{k^2} \cos(k^2 \varphi), \quad \mu = 0, 1$$

si reemplazamos \mathcal{L} en la ecuación de Euler - Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \right) = 0.$$

Hallando los siguientes terminos:

- Calculando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{m^2}{k^2} \cos(k^2 \varphi) \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -\frac{m^2}{k^2} k^{\mathcal{Z}} \text{sen}(k^2 \varphi) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -m^2 \text{sen}(k^2 \varphi).\end{aligned}$$

- Calculando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \varphi)} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\partial_\mu \varphi)}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \partial^\mu \varphi + \partial_\mu \varphi \frac{\partial(\partial^\mu \varphi)}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} &= \frac{1}{2} \left[\delta_\mu^\nu (\partial^\mu \varphi) + \partial^\mu \varphi \frac{\partial(\partial_\mu \varphi)}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \right],\end{aligned}$$

donde δ_μ^ν es el tensor mixto de Kronecker

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} &= \frac{1}{2} [\partial^\nu \varphi + (\partial^\mu \varphi) \delta_\mu^\nu] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} &= \frac{1}{2} [\mathcal{Z} \partial^\nu \varphi] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} &= \partial^\nu \varphi.\end{aligned}$$

Reemplazando estos términos en la ecuación de Euler - Lagrange se obtiene

$$-m^2 \text{sen}(k^2 \varphi) - \partial_\nu (\partial^\nu \varphi) = 0,$$

como $\nu = 0, 1$, entonces:

$$-m^2 \text{sen}(k^2 \varphi) - \partial_0 (\partial^0 \varphi) - \partial_1 (\partial^1 \varphi) = 0,$$

usando la métrica de Minkowski ($g = (1, -1, -1, -1)$), se obtiene

$$-m^2 \text{sen}(k^2 \varphi) - \partial_0 (\partial_0 \varphi) + \partial_1 (\partial_1 \varphi) = 0,$$

recordando que $\partial_0 = \partial_t$ y $\partial_1 = \partial_x$, entonces:

$$-m^2 \text{sen}(k^2 \varphi) - \partial_t (\partial_t \varphi) + \partial_x (\partial_x \varphi) = 0$$

ó

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2 \operatorname{sen}(k^2 \varphi) = 0$$

A.16. APÉNDICE 16

Sea

$$\varphi(g) = \varphi\left(\frac{x - vt}{D}\right),$$

entonces

$$g = \frac{x - vt}{D},$$

hallando la derivada de φ con respecto a x al hacer este cambio de variable, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{d\varphi}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{d\varphi}{dg} \cdot \frac{1}{D},\end{aligned}$$

si derivamos con respecto a x la anterior ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right) \\ \varphi_{xx} &= \frac{1}{D} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ \varphi_{xx} &= \frac{1}{D} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{d\varphi}{dg} \cdot \frac{1}{D} \right) \\ \varphi_{xx} &= \frac{1}{D^2} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right) \\ \varphi_{xx} &= \frac{1}{D^2} \varphi''.\end{aligned}$$

De la misma forma encontremos la derivada de φ con respecto a t al hacer este cambio de variable, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{d\varphi}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{d\varphi}{dg} \cdot \frac{-v}{D},\end{aligned}$$

si derivamos con respecto a t la anterior ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{v}{D} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right) \\ \varphi_{tt} &= -\frac{v}{D} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \\ \varphi_{tt} &= -\frac{v}{D} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{d\varphi}{dg} \cdot \frac{-v}{D} \right) \\ \varphi_{tt} &= \frac{v^2}{D^2} \cdot \frac{d}{dg} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right) \\ \varphi_{tt} &= \frac{v^2}{D^2} \varphi''.\end{aligned}$$

A.17. APÉNDICE 17

Resolvemos la siguiente ecuación:

$$\varphi'' = \frac{D^2 m^2}{(1-v^2)} \text{sen}(k^2 \varphi)$$

para resolver esta ecuación multiplicamos a ambos términos por el término φ' , entonces

$$\varphi' \cdot \varphi'' = \frac{D^2 m^2}{(1-v^2)} \cdot \varphi' \cdot \text{sen}(k^2 \varphi),$$

desarrollando

$$\frac{(1-v^2)}{D^2 m^2} \frac{d}{dg} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dg} = \text{sen}(k^2 \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dg}$$

integrando la anterior ecuación:

$$\frac{(1-v^2)}{D^2 m^2} \int \left(\frac{d\varphi}{dg} \right) \cdot d \left(\frac{d\varphi}{dg} \right) = \int \text{sen}(k^2 \varphi) d\varphi$$

$$\frac{(1-v^2)}{D^2 m^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right)^2 = -\frac{1}{k^2} \cos(k^2 \varphi) + c,$$

donde c es una constante de integración, para que existe una solución solitón, entonces se impondrá la siguiente condición

$$\text{Si: } g \rightarrow -\infty, \text{ entonces } \varphi \rightarrow 0 \text{ y } \varphi' \rightarrow 0,$$

al imponer esta condición, se obtiene que

$$0 = -\frac{1}{k^2} \cos(0) + c,$$

entonces:

$$c = \frac{1}{k^2}.$$

Volviendo al problema original y reemplazando el valor de la constante c , se obtiene:

$$\frac{(1-v^2)}{2D^2m^2} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right)^2 = \frac{1}{k^2} (1 - \cos(k^2\varphi)),$$

usando la propiedad trigonométrica: $\cos(k^2\varphi) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k^2\varphi}{2}\right)$, entonces:

$$\frac{(1-v^2)}{2D^2m^2} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right)^2 = \frac{2}{k^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k^2\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{(1-v^2)}{D^2m^2} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right)^2 = \frac{4}{k^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k^2\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{1-v^2}}{Dm} \left(\frac{d\varphi}{dg} \right) = \pm \frac{2}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k^2\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}\left(\frac{k^2\varphi}{2}\right)} = \pm \frac{2Dmk}{k\sqrt{1-v^2}} dg,$$

integrando la anterior ecuación

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}\left(\frac{k^2\varphi}{2}\right)} = \pm \frac{2Dm}{k\sqrt{1-v^2}} \int dg$$

$$\int \operatorname{csc}\left(\frac{k^2\varphi}{2}\right) d\varphi = \pm \frac{2Dm}{k\sqrt{1-v^2}} (g - g_0),$$

donde g_0 es una constante de integración, si hacemos el siguiente cambio de variable $z = \frac{k^2\varphi}{2}$, entonces:

$$\frac{2}{k^2} = \int \operatorname{csc}(z) dz = \pm \frac{2Dm}{k\sqrt{1-v^2}} (g - g_0),$$

usando la integral $\int \csc(z)dz = -\text{Ln}|\csc(z) + \cot(z)|$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{z}{k^2} [-\text{Ln}(\csc(z) + \cot(z))] &= \pm \frac{zDm}{k\sqrt{1-v^2}}(g - g_0) \\ -\text{Ln}\left(\frac{1}{\text{sen}(z)} + \frac{\cos(z)}{\text{sen}(z)}\right) &= \pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}(g - g_0) \\ -\text{Ln}\left(\frac{1 + \cos(z)}{\text{sen}(z)}\right) &= \pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}(g - g_0) \\ -\text{Ln}\left(\frac{z \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)}{z \text{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right)}\right) &= \pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}(g - g_0) \\ -\text{Ln}\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) &= \pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}(g - g_0),\end{aligned}$$

usando la propiedad de la función Ln, se obtiene:

$$\text{Ln}\left(\tan\left(\frac{z}{2}\right)\right) = \pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}(g - g_0)$$

reemplazando el valor de z , entonces:

$$\begin{aligned}\text{Ln}\left(\tan\left(\frac{k^2\varphi}{4}\right)\right) &= \pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}(g - g_0) \\ \tan\left(\frac{k^2\varphi}{4}\right) &= e^{\pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}(g-g_0)} \\ \varphi &= \frac{4}{k^2} \arctan\left(e^{\pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}(g-g_0)}\right),\end{aligned}$$

como $g = \frac{x-vt}{D}$ y tomando como $g_0 = 0$, obtenemos:

$$\varphi(x, t) = \frac{4}{k^2} \arctan\left(e^{\pm \frac{kDm}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{x-vt}{D}\right)}\right)$$

considerando solo la solución positiva, y reemplazando los valores de $m^2 = \frac{b_1^2\pi(1-v^2)}{2D^2F_\infty}$ y $k^2 = \frac{2\pi}{F_\infty}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= \frac{4}{\frac{2\pi}{F_\infty}} \arctan\left(e^{\frac{\sqrt{2\pi}b_1}{\sqrt{F_\infty(1-v^2)}} \cdot \frac{b_1\sqrt{\pi(1-v^2)}}{b_1\sqrt{2F_\infty}}\left(\frac{x-vt}{D}\right)}\right) \\ \varphi(x, t) &= \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan\left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty}\left(\frac{x-vt}{D}\right)}\right)\end{aligned}$$

A.18. APÉNDICE 18

Sea la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) + \frac{m^2}{k^2}[\cos(k^2\varphi) - 1], \quad \mu = 0, 1 \quad (37)$$

desarrollando esta expresión

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)(\partial^0\varphi) + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)(\partial^x\varphi) + \frac{m^2}{k^2}[\cos(k^2\varphi) - 1],$$

recordando la expresión del término T^{00} :

$$T^{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)}(\partial^0\varphi) - \mathcal{L},$$

encontremos el término $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)}$, entonces:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_0\varphi)} [(\partial_0\varphi)(\partial^0\varphi)],$$

bajando el superíndice y recordando que estamos usando la métrica de M^4 $(1, -1, -1, -1)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_0\varphi)} [(\partial_0\varphi)(\partial_0\varphi)] \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_0\varphi)} [(\partial_0\varphi)^2] \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} &= \partial_0\varphi, \end{aligned}$$

reemplazando este valor en la expresión de T^{00} , se obtiene:

$$T^{00} = (\partial_0\varphi)(\partial^0\varphi) - \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)(\partial^0\varphi) - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)(\partial^x\varphi) - \frac{m^2}{k^2}[\cos(k^2\varphi) - 1]$$

bajando los superíndices, tenemos:

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\partial_0\varphi)(\partial_0\varphi) - \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)(\partial_0\varphi) + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)(\partial_x\varphi) - \frac{m^2}{k^2}[\cos(k^2\varphi) - 1] \\ T^{00} &= \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{k^2}[\cos(k^2\varphi) - 1] \end{aligned}$$

A.19. APÉNDICE 19

Desarrollando la siguiente expresión:

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = \int \left\{ \frac{1}{2} [\partial_x(\varphi_1 + \varphi_2)]^2 + \frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right\} dx$$

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = \int \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_x \varphi_1)^2 + 2(\partial_x \varphi_1)(\partial_x \varphi_2) + (\partial_x \varphi_2)^2] + \frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right\} dx,$$

utilizando la siguiente relación trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) = 1 - \cos^2 \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right)$$

y reemplazando en la expresión de la integral obtenemos

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = \int \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_x \varphi_1)^2 + 2(\partial_x \varphi_1)(\partial_x \varphi_2) + (\partial_x \varphi_2)^2] + \frac{2m^2}{k^2} \left[1 - \cos^2 \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \right\} dx$$

utilizando la identidad algebraica de la diferencia de cuadrados, obtenemos:

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = \int \left\{ \frac{1}{2} (\partial_x \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi_2)^2 + (\partial_x \varphi_1)(\partial_x \varphi_2) + \frac{2m^2}{k^2} \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \right\} dx$$

si sumamos y restamos el termino $\frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right)$, e igualmente sumamos y restamos el termino $\frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right)$, obtenemos:

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = \int \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_x \varphi_1)^2 + \frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) - \frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right)}_{E[\varphi_1]} + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_x \varphi_2)^2 + \frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) - \frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right)}_{E[\varphi_2]} - \frac{2m^2}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) + (\partial_x \varphi_1)(\partial_x \varphi_2) + \frac{2m^2}{k^2} \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \right\} dx,$$

pero $E[\varphi_1] = \int \left[\frac{1}{2}(\partial_x \varphi_1)^2 + \frac{2m^2}{k^2} \text{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \right] dx$ y $E[\varphi_2] = \int \left[\frac{1}{2}(\partial_x \varphi_2)^2 + \frac{2m^2}{k^2} \text{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) \right] dx$;
y como estas considerando que $E[\varphi_1] = E[\varphi_2] = E_K$, entonces:

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = 2E_k + \int \left\{ -\frac{2m^2}{k^2} \text{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) - \frac{2m^2}{k^2} \text{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) + (\partial_x \varphi_1)(\partial_x \varphi_2) + \frac{2m^2}{k^2} \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \left[1 - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \right\} dx,$$

recordando la condición que debe cumplirse para que la energía del Kink sea finita

$$\partial_x \varphi_K - \frac{2m}{k} \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_K}{2} \right) = 0$$

$$\partial_x \varphi_K = \frac{2m}{k} \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_K}{2} \right)$$

entonces:

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = 2E_k + \int \left\{ -\frac{2m^2}{k^2} \text{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) - \frac{2m^2}{k^2} \text{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) + \frac{4m^2}{k^2} \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) + \frac{2m^2}{k^2} \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \left[1 - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \right\} dx$$

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = 2E_k + \frac{2m^2}{k^2} \int \left\{ - \left[\text{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) + \text{sen}^2 \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) \right] + 2 \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) + \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \left[1 - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \right\} dx,$$

para seguir simplificando esta integral, vamos a desarrollar aparte los siguientes términos:

- Desarrollo de $2 \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right)$:

Para desarrollar este termino, utilicemos la siguiente identidad trigonométrica

$$-2 \text{sen}(A) \text{sen}(B) = \cos(A + B) - \cos(A - B)$$

si tomamos como $A = \frac{k^2 \varphi_1}{2}$ y $B = \frac{k^2 \varphi_2}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} -2 \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) &= \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right) \\ 2 \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) &= \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right) - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \end{aligned}$$

- Desarrollo de $\text{sen}^2\left(\frac{k^2\varphi_1}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{k^2\varphi_2}{2}\right)$:

Recordando las siguientes identidades trigonométricas

$$1 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) = \cos(A)$$

$$1 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{B}{2}\right) = \cos(B)$$

si sumamos estas dos ecuaciones obtenemos:

$$2 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) - 2 \text{sen}^2\left(\frac{B}{2}\right) = \cos(A) + \cos(B)$$

pero

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} 2 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) - 2 \text{sen}^2\left(\frac{B}{2}\right) &= 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ - \left[\text{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{B}{2}\right) \right] &= \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

si tomamos como $A = k^2\varphi_1$ y $B = k^2\varphi_2$, entonces:

$$- \left[\text{sen}^2\left(\frac{k^2\varphi_1}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{k^2\varphi_2}{2}\right) \right] = \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right) \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right) - 1$$

reemplazando estas igualdades en la expresión de la integral de la energía, entonces:

$$\begin{aligned} E[\varphi_1 + \varphi_2] &= 2E_k + \frac{2m^2}{k^2} \int \left\{ \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right) \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right) - 1 + \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right) + \left[1 + \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right) \right] \left[1 - \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right) \right] \right\} dx, \end{aligned}$$

factorizando el termino $\cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} E[\varphi_1 + \varphi_2] &= 2E_k + \frac{2m^2}{k^2} \int \left\{ \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right) - 1 \right] + \left[\cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right) - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 + \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right) \right] \left[1 - \cos\left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right) \right] \right\} dx \end{aligned}$$

factorizando el termino $\left[\cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right) - 1 \right]$, se obtiene:

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = 2E_k + \frac{2m^2}{k^2} \int \left\{ \left[\cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right) - 1 \right] \left[\cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) + 1 \right] + \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \left[1 - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \right\} dx$$

factorizando el termino $\left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right]$, se obtiene:

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = 2E_k + \frac{2m^2}{k^2} \int \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \left[\cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right) - \cancel{1} + \cancel{1} - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] dx$$

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = 2E_k + \frac{2m^2}{k^2} \int \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] \underbrace{\left[\cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right) - \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right]}_{2 \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right)} dx$$

entonces se obtiene:

$$E[\varphi_1 + \varphi_2] = 2E_k + \frac{4m^2}{k^2} \int \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right] dx$$

A.20. APÉNDICE 20

Desarrollemos la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_1}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k^2 \varphi_2}{2} \right) \left[1 + \cos \left(\frac{k^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \right]$$

recordando que

$$\varphi_1 = \varphi_K \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)} \right)$$

multiplicando por k^2 en ambos términos de la ecuación obtenemos:

$$k^2 \varphi_1 = k^2 \cdot \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)} \right), \quad \text{pero } k^2 = \frac{2\pi}{F_\infty}$$

$$k^2 \varphi_1 = \frac{2\pi}{F_\infty} \cdot \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)} \right)$$

$$k^2 \varphi_1 = 4 \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)} \right),$$

si denominamos como

$$\theta_1 = \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)} \right),$$

entonces

$$k^2 \varphi_1 = 4\theta_1.$$

Ademas recordemos que

$$\varphi_2 = \varphi_K \left(x - \frac{a}{2} \right) = \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)} \right)$$

multiplicando por k^2 en ambos términos de la ecuación obtenemos:

$$k^2 \varphi_2 = k^2 \cdot \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)} \right), \quad \text{pero } k^2 = \frac{2\pi}{F_\infty}$$

$$k^2 \varphi_2 = \frac{2\pi}{F_\infty} \cdot \frac{2F_\infty}{\pi} \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)} \right)$$

$$k^2 \varphi_2 = 4 \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)} \right),$$

si denominamos como

$$\theta_2 = \arctan \left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty} \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)} \right),$$

entonces

$$k^2 \varphi_2 = 4\theta_2.$$

Una vez encontrados las expresiones equivalentes de $k^2 \varphi_1$ y $k^2 \varphi_2$, reemplazamos estas expresiones en la integral de $\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$, donde se obtiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} \text{sen}(2\theta_1) \text{sen}(2\theta_2) [1 + \cos(2\theta_1 + 2\theta_2)]$$

desarrollando y utilizando las identidades trigonométricas, obtenemos

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} [2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)] [2 \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)] [1 + \cos(2\theta_1) \cos(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1) \text{sen}(2\theta_2)]$$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) [1 + (\cos^2(\theta_1) - \text{sen}^2(\theta_1))(\cos^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_2)) - (2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1))(2 \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2))]$$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) [1 + \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_1) \text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + \text{sen}^2(\theta_1) \text{sen}^2(\theta_2) - 4 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)]$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] &= \frac{16m^2}{k^2} \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \{1 + [\cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) - \\ &\quad - 2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) + \text{sen}^2(\theta_1) \text{sen}^2(\theta_2)] - [\cos^2(\theta_1) \text{sen}^2(\theta_2) + \\ &\quad + 2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) + \text{sen}^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2)]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] &= \frac{16m^2}{k^2} \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \{1 + [\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)]^2 - \\ &\quad - [\cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) + \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2)]^2\}.\end{aligned}$$

Como:

$$\theta_1 = \arctan\left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty}\left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)}\right) \quad \theta_2 = \arctan\left(e^{\frac{\pi b_1}{F_\infty}\left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)}\right)$$

si definimos como

$$X = \frac{\pi b_1 x}{D} \quad \text{y} \quad A = \frac{\pi b_1 a}{D},$$

entonces

$$\theta_1 = \arctan\left(e^{(X+\frac{A}{2})}\right) \quad \theta_2 = \arctan\left(e^{(X-\frac{A}{2})}\right)$$

en consecuencia

$$\text{sen}(\theta_1) = \frac{e^{X+\frac{A}{2}}}{p} \quad \text{sen}(\theta_2) = \frac{e^{X-\frac{A}{2}}}{q}$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{1}{p} \quad \cos(\theta_2) = \frac{1}{q}$$

donde $p^2 = e^{2X+A} + 1$ y $q^2 = e^{2X-A} + 1$.

Reemplazando estas razones trigonométricas en la expresión de la integral $\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$, obtenemos:

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \left(\frac{e^{X+\frac{A}{2}}}{p}\right) \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{e^{X-\frac{A}{2}}}{q}\right) \left(\frac{1}{q}\right) \left[1 + \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} - \frac{e^{X+\frac{A}{2}}}{p} \cdot \frac{e^{X-\frac{A}{2}}}{q}\right)^2 - \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{e^{X-\frac{A}{2}}}{q} + \frac{e^{X+\frac{A}{2}}}{p} \cdot \frac{1}{q}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \left(\frac{e^{2X}}{p^2 \cdot q^2}\right) \left[1 + \left(\frac{1 - e^{2X}}{p \cdot q}\right)^2 - \left(\frac{e^{X-\frac{A}{2}} + e^{X+\frac{A}{2}}}{p \cdot q}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \left(\frac{e^{2X}}{p^2 \cdot q^2}\right) \left[\frac{p^2 \cdot q^2 + 1 - 2e^{2X} + e^{4X} - e^{2X-A} - 2e^{2X} - e^{2X+A}}{p^2 \cdot q^2}\right]$$

reemplazando el valor de p^2 y q^2 , entonces:

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \left(\frac{e^{2X}}{p^2 \cdot q^2}\right) \left[\frac{(e^{2X+A} + 1)(e^{2X-A} + 1) + 1 - 2e^{2X} + e^{4X} - e^{2X-A} - 2e^{2X} - e^{2X+A}}{p^2 \cdot q^2}\right]$$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \left(\frac{e^{2X}}{p^2 \cdot q^2} \right) \left[\frac{e^{4X} + e^{2X+A} + e^{2X-A} + 1 + 1 - 2e^{2X} + e^{4X} - e^{2X-A} - 2e^{2X} - e^{2X+A}}{p^2 \cdot q^2} \right]$$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \left(\frac{e^{2X}}{p^2 \cdot q^2} \right) \left[\frac{2e^{4X} - 4e^{2X} + 2}{p^2 \cdot q^2} \right]$$

factorizando $2e^{2X}$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{32m^2}{k^2} \left(\frac{e^{4X}}{p^2 \cdot q^2} \right) \left[\frac{e^{2X} - 2 + e^{-2X}}{p^2 \cdot q^2} \right]$$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{32m^2}{k^2} \left(\frac{e^{4X}}{p^2 \cdot q^2} \right) \left[\frac{(e^X - e^{-X})^2}{p^2 \cdot q^2} \right],$$

multiplicando y dividiendo por 4, entonces:

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{128m^2}{k^2} \left(\frac{e^{4X}}{p^2 \cdot q^2} \right) \left[\frac{(e^X - e^{-X})^2}{4} \right] \left(\frac{1}{p^2 \cdot q^2} \right),$$

recordando la definición de la función seno hiperbólico:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

por lo tanto

$$\sinh^2(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4},$$

teniendo esto en cuenta la integral de $\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$, sera igual a:

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{128m^2}{k^2} \left(\frac{e^{2X}}{p^2 \cdot q^2} \right) \left(\frac{e^{2X}}{p^2 \cdot q^2} \right) \sinh^2(X).$$

Desarrollemos la expresión $\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}}$:

$$\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}} = \frac{(e^{2X+A} + 1)(e^{2X-A} + 1)}{e^{2X}}$$

$$\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}} = \frac{e^{4X} + e^{2X+A} + e^{2X-A} + 1}{e^{2X}}$$

$$\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}} = e^{2X} + e^A + e^{-A} + e^{-2X}$$

$$\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}} = e^{X+\frac{A}{2}} \cdot e^{X-\frac{A}{2}} + e^{X+\frac{A}{2}} \cdot e^{-X+\frac{A}{2}} + e^{X-\frac{A}{2}} \cdot e^{-X-\frac{A}{2}} + e^{-X+\frac{A}{2}} \cdot e^{-X-\frac{A}{2}}$$

factorizando

$$\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}} = e^{X+\frac{A}{2}} \left(e^{X-\frac{A}{2}} + e^{-X+\frac{A}{2}} \right) + e^{-X-\frac{A}{2}} \left(e^{X-\frac{A}{2}} + e^{-X+\frac{A}{2}} \right)$$

factorizando

$$\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}} = \left(e^{X+\frac{A}{2}} + e^{-X-\frac{A}{2}} \right) \left(e^{X-\frac{A}{2}} + e^{-X+\frac{A}{2}} \right),$$

multiplicando y dividiendo por 4, entonces:

$$\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}} = 4 \left(\frac{e^{X+\frac{A}{2}} + e^{-X-\frac{A}{2}}}{2} \right) \left(\frac{e^{X-\frac{A}{2}} + e^{-X+\frac{A}{2}}}{2} \right),$$

recordando la definición de la función coseno hiperbólico:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

entonces

$$\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}} = 4 \cosh \left(X + \frac{A}{2} \right) \cosh \left(X - \frac{A}{2} \right).$$

Reemplazando la expresión de $\frac{p^2 \cdot q^2}{e^{2X}}$ en la expresión de la integral de $\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$, se obtiene:

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{128m^2}{k^2} \left(\frac{1}{4 \cosh \left(X + \frac{A}{2} \right) \cosh \left(X - \frac{A}{2} \right)} \right) \left(\frac{1}{4 \cosh \left(X + \frac{A}{2} \right) \cosh \left(X - \frac{A}{2} \right)} \right) \sinh^2(X)$$

$$\varepsilon_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{8m^2}{k^2} \frac{\sinh^2(X)}{\cosh^2 \left(X + \frac{A}{2} \right) \cosh^2 \left(X - \frac{A}{2} \right)}$$

A.21. APÉNDICE 21

Sea la integral:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{8m^2}{k^2} \cdot \frac{F_{\infty} D}{\pi b_1} \int \frac{\sinh^2(X)}{\cosh^2 \left(X + \frac{A}{2} \right) \cosh^2 \left(X - \frac{A}{2} \right)} dX,$$

para desarrollar esta integral, tenemos que hacer uso de las siguientes propiedades de las funciones hiperbólicas:

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x - y) = \cosh(x) \cosh(y) - \sinh(x) \sinh(y)$$

si sumamos estas dos ecuaciones obtenemos

$$\cosh(x + y) + \cosh(x - y) = 2 \cosh(x) \cosh(y)$$

elevando al cuadrado ambos términos, se obtiene

$$\frac{1}{4} [\cosh(x + y) + \cosh(x - y)]^2 = \cosh^2(x) \cosh^2(y),$$

ademas se utilizara la siguiente propiedad:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Utilizando estas propiedades vamos a desarrollar de manera aparte el numerador y denominador de la integral $E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$:

- Desarrollando $\sinh^2(X)$:

De las propiedades de las funciones hiperbólicas, se puede deducir que

$$\cosh(2X) = \cosh^2(X) + \sinh^2(X),$$

pero por propiedad $\cosh^2(X) = 1 + \sinh^2(X)$, entonces:

$$\cosh(2X) = 1 + 2 \sinh^2(X)$$

$$\sinh^2(X) = \frac{1}{2} (\cosh(2X) - 1),$$

pero por propiedad, nosotros podemos expresar como

$$1 = \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

entonces

$$\sinh^2(X) = \frac{1}{2} \left[\cosh(2X) - \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{A}{2}\right) \right],$$

pero por propiedad, se tiene que

$$\cosh(A) = \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

entonces

$$\sinh^2\left(\frac{A}{2}\right) = \cosh(A) - \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right).$$

Reemplazando esta ecuación en la expresión de $\sinh^2(X)$, se obtiene:

$$\sinh^2(X) = \frac{1}{2} \left[\cosh(2X) - \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) + \cosh(A) - \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) \right]$$

$$\sinh^2(X) = \frac{1}{2} \left[\cosh(2X) + \cosh(A) - 2 \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) \right].$$

- Desarrollando $\cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right)$:

Usaremos la siguiente identidad

$$\cosh^2(x) \cosh^2(y) = \frac{1}{4} [\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]^2,$$

si hacemos que

$$x = X + \frac{A}{2} \quad y = X - \frac{A}{2}$$

entonces

$$\cosh^2\left(X + \frac{A}{2}\right) \cosh^2\left(X - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{4} [\cosh(2X) + \cosh(A)]^2.$$

Reemplazando las expresiones equivalentes del numerador y denominador en la integral de $E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$, obtenemos:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{8m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \int \frac{\frac{1}{2} \left[\cosh(2X) + \cosh(A) - 2 \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) \right]}{\frac{1}{4} [\cosh(2X) + \cosh(A)]^2} dX$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \int \frac{[\cosh(2X) + \cosh(A)] - 2 \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right)}{[\cosh(2X) + \cosh(A)]^2} dX,$$

separando esta integral en dos fracciones, obtenemos:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \left\{ \int \frac{[\cosh(2X) + \cosh(A)]}{[\cosh(2X) + \cosh(A)]^2} dX - 2 \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) \int \frac{dX}{[\cosh(2X) + \cosh(A)]^2} \right\}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \left\{ \int \frac{dX}{[\cosh(2X) + \cosh(A)]} - 2 \cosh^2\left(\frac{A}{2}\right) \int \frac{dX}{[\cosh(2X) + \cosh(A)]^2} \right\}.$$

A.22. APÉNDICE 22

Sea la integral:

$$I_1 = \int \frac{dX}{\cosh(2X) + \cosh(A)}$$

por propiedad de las funciones hiperbólicas se cumple que

$$\cosh(2X) = 2 \cosh^2(X) - 1,$$

entonces

$$I_1 = \int \frac{dX}{2 \cosh^2(X) - 1 + \cosh(A)}$$
$$I_1 = \int \frac{dX}{2 \left\{ \cosh^2(X) + \frac{1}{2} [\cosh(A) - 1] \right\}},$$

por definición de la función coseno hiperbólico, se cumple:

$$\cosh(A) \geq 1$$

$$\cosh(A) - 1 \geq 0,$$

$$\frac{1}{2} [\cosh(A) - 1] \geq 0,$$

por lo tanto, podemos definir que

$$p^2 = \frac{1}{2} [\cosh(A) - 1] \geq 0;$$

por ello, la integral I_1 se reescribirá como

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dX}{\cosh^2(X) + p^2},$$

pero

$$\cosh(X) = \frac{1}{\operatorname{sech}(X)}$$

entonces

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dX}{\frac{1}{\operatorname{sech}^2(X)} + p^2}$$
$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sech}^2(X) dX}{1 + p^2 \operatorname{sech}^2(X)},$$

usando las siguientes propiedades:

$$\operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x) \quad \text{y} \quad \frac{d[\tanh(x)]}{dx} = \operatorname{sech}^2(x),$$

entonces la integral I_1 sera igual a

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d[\tanh(X)]}{1 + p^2[1 - \tanh^2(X)]}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d[\tanh(X)]}{(1 + p^2) - p^2 \tanh^2(X)}$$

haciendo el siguiente cambio de variable

$$Y = \tanh(X),$$

entonces:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dY}{(1 + p^2) - p^2 Y^2},$$

si realicemos nuevamente el siguiente cambio de variable

$$Y = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} \tanh(Z)$$

derivando:

$$dY = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} \operatorname{sech}^2(Z) dZ$$

$$dY = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} [1 - \tanh^2(Z)] dZ,$$

pero de acuerdo al cambio de variable que hizo se tiene que

$$\tanh^2(Z) = \frac{p^2 Y}{1 + p^2},$$

entonces:

$$dY = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} \left(1 - \frac{p^2 Y}{1 + p^2}\right) dZ$$

$$dY = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} \cdot \frac{1}{1 + p^2} [(1 + p^2) - p^2 Y] dZ.$$

Si reemplazamos la expresión de dY en la integral I_1 , obtenemos:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{\frac{1+p^2}{p^2}} \cdot \frac{1}{1+p^2} [(1+p^2) - p^2 Y^2] dZ}{[(1+p^2) - p^2 Y^2]}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+p^2}{p^2}} \cdot \frac{1}{1+p^2} \int dZ,$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+p^2}{p^2}} \cdot \frac{1}{1+p^2} \cdot Z,$$

del segundo cambio de variable, nosotros podemos despejar el valor de Z , entonces:

$$Z = \operatorname{arctanh} \left(\frac{pY}{\sqrt{1+p^2}} \right),$$

reemplazando el valor de Z en la integral I_1 , se obtiene:

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+p^2}{p^2}} \cdot \frac{1}{1+p^2} \cdot \operatorname{arctanh} \left(\frac{pY}{\sqrt{1+p^2}} \right)$$

pero recordemos que

$$Y = \tanh(X),$$

entonces:

$$I_1 = \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \cdot \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right).$$

A.23. APÉNDICE 23

Sea la integral:

$$I_2 = \int \frac{dX}{[\cosh(2X) + \cosh(A)]^2}$$

por propiedad de las funciones hiperbólicas se cumple que

$$\cosh(2X) = 2 \cosh^2(X) - 1,$$

entonces

$$I_2 = \int \frac{dX}{[2 \cosh^2(X) - 1 + \cosh(A)]^2}$$

$$I_2 = \int \frac{dX}{4 \left\{ \cosh^2(X) + \frac{1}{2} [\cosh(A) - 1] \right\}^2},$$

por definición de la función coseno hiperbólico, se cumple:

$$\cosh(A) \geq 1$$

$$\cosh(A) - 1 \geq 0,$$

$$\frac{1}{2}[\cosh(A) - 1] \geq 0,$$

por lo tanto, podemos definir que

$$p^2 = \frac{1}{2}[\cosh(A) - 1] \geq 0;$$

por ello, la integral I_2 se reescribirá como

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{dX}{[\cosh^2(X) + p^2]^2},$$

pero

$$\cosh(X) = \frac{1}{\operatorname{sech}(X)}$$

entonces

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{dX}{\left[\frac{1}{\operatorname{sech}^2(X)} + p^2 \right]^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{sech}^4(X) dX}{[1 + p^2 \operatorname{sech}^2(X)]^2},$$

usando las siguientes propiedades:

$$\operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x) \quad \text{y} \quad \frac{d[\tanh(x)]}{dx} = \operatorname{sech}^2(x),$$

entonces la integral I_2 sera igual a

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{sech}^2(X) \cdot \operatorname{sech}^2(X) dX}{\{1 + p^2[1 - \tanh^2(X)]\}^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{[1 - \tanh^2(X)] d[\tanh(X)]}{\{(1 + p^2) - p^2 \tanh^2(X)\}^2}$$

haciendo el siguiente cambio de variable

$$Y = \tanh(X),$$

entonces:

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{(1 - Y^2) dY}{[(1 + p^2) - p^2 Y^2]^2}$$

si realicemos nuevamente el siguiente cambio de variable

$$Y = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} \tanh(Z)$$

derivando:

$$dY = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} \operatorname{sech}^2(Z) dZ$$

$$dY = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} [1 - \tanh^2(Z)] dZ,$$

pero de acuerdo al cambio de variable que hizo se tiene que

$$\tanh^2(Z) = \frac{p^2 Y^2}{1 + p^2},$$

entonces:

$$dY = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} \left(1 - \frac{p^2 Y^2}{1 + p^2}\right) dZ$$

$$dY = \sqrt{\frac{1 + p^2}{p^2}} \cdot \frac{1}{1 + p^2} [(1 + p^2) - p^2 Y^2] dZ.$$

Si reemplazamos la expresión de Y y dY en la integral I_2 , obtenemos:

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{\left[1 - \left(\frac{1+p^2}{p^2}\right) \tanh^2(Z)\right] \sqrt{\frac{1+p^2}{p^2}} \cdot \frac{1}{1+p^2} [(1+p^2) - p^2 Y^2] dZ}{[(1 + p^2) - p^2 Y^2]^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{\left[1 - \left(\frac{1+p^2}{p^2}\right) \tanh^2(Z)\right] \frac{1}{p\sqrt{1+p^2}} dZ}{\left[(1 + p^2) - p^2 \left(\frac{1+p^2}{p^2}\right) \tanh^2(Z)\right]}$$

$$I_2 = \frac{1}{4p\sqrt{1+p^2}} \int \frac{\left[\frac{p^2 - (1+p^2) \tanh^2(Z)}{p^2}\right] dZ}{\left[(1 + p^2) - (1 + p^2) \tanh^2(Z)\right]}$$

$$I_2 = \frac{1}{4p^3\sqrt{1+p^2}} \int \frac{\left[p^2 - (1 + p^2) \tanh^2(Z)\right] dZ}{(1 + p^2) [1 - \tanh^2(Z)]}$$

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \int \frac{[p^2 - p^2 \tanh^2(Z) - \tanh^2(Z)] dZ}{[1 - \tanh^2(Z)]},$$

separando la integral I_2 en dos términos:

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ \int \frac{[p^2 - p^2 \tanh^2(Z)] dZ}{[1 - \tanh^2(Z)]} - \int \frac{\tanh^2(Z) dZ}{[1 - \tanh^2(Z)]} \right\}$$

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ \int \frac{p^2[1 - \tanh^2(Z)] dZ}{[1 - \tanh^2(Z)]} - \int \frac{\tanh^2(Z) dZ}{[1 - \tanh^2(Z)]} \right\},$$

por propiedad de las funciones hiperbólicas se tiene que $1 - \tanh^2(Z) = \operatorname{sech}^2(Z)$, entonces:

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ \int p^2 dZ - \int \frac{\tanh^2(Z) dZ}{\operatorname{sech}^2(Z)} \right\},$$

pero

$$\tanh^2(Z) = \frac{\sinh^2(Z)}{\cosh^2(Z)} \quad \text{y} \quad \operatorname{sech}^2(Z) = \frac{1}{\cosh^2(Z)}$$

entonces

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ p^2 Z - \int \frac{\frac{\sinh^2(Z)}{\cosh^2(Z)}}{\frac{1}{\cosh^2(Z)}} dZ \right\}$$

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ p^2 Z - \int \sinh^2(Z) dZ \right\}$$

por propiedad de las funciones hiperbólicas se tiene que

$$\sinh^2(Z) = \frac{1}{2} [\cosh(2Z) - 1],$$

por lo tanto:

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ p^2 Z - \frac{1}{2} \int [\cosh(2Z) - 1] dZ \right\}$$

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ p^2 Z - \frac{1}{2} \int \cosh(2Z) dZ + \frac{1}{2} \int dZ \right\}$$

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left[p^2 Z - \frac{\sinh(2Z)}{4} + \frac{Z}{2} \right],$$

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left[\left(p^2 + \frac{1}{2} \right) Z - \frac{\sinh(2Z)}{4} \right],$$

del segundo cambio de variable, nosotros podemos despejar el valor de Z , entonces:

$$Z = \operatorname{arctanh} \left(\frac{pY}{\sqrt{1+p^2}} \right),$$

reemplazando el valor de Z en la integral I_2 , se obtiene:

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left[\left(p^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctanh} \left(\frac{pY}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{1}{4} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{pY}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right],$$

pero recordemos que

$$Y = \tanh(X),$$

entonces:

$$I_2 = \frac{1}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \left\{ \left(p^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{1}{4} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\}$$

A.24. APÉNDICE 24

Simplifiquemos y ordenemos la siguiente expresión:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \left\{ \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \cdot \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{2 \cosh^2(A/2)}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \right. \\ \left. \cdot \left\langle \left(p^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{1}{4} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\rangle_{-A/2}^{A/2} \right\}$$

recordando que hemos definido que

$$p^2 = \frac{1}{2} [\cosh(A) - 1],$$

por propiedad se tiene que $\cosh(A) = 2 \cosh^2(A/2) - 1$, entonces:

$$p^2 = \frac{1}{2} [2 \cosh^2(A/2) - 1 - 1]$$

$$p^2 = \frac{1}{2} [2 \cosh^2(A/2) - 2]$$

$$p^2 = \cosh^2(A/2) - 1$$

entonces

$$\cosh^2(A/2) = 1 + p^2,$$

reemplazando este valor en la expresión de $E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$, tenemos:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \left\{ \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \cdot \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{2(1+p^2)}{4p^3(1+p^2)^{3/2}} \right. \\ \left. \cdot \left\langle \left(p^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{1}{4} \sinh \left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right] \right\rangle \right\}_{-A/2}^{A/2}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \left\{ \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \cdot \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{1}{2p^3\sqrt{1+p^2}} \right. \\ \left. \cdot \left\langle \left(p^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{1}{4} \sinh \left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right] \right\rangle \right\}_{-A/2}^{A/2}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \left\{ \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{1}{p^2} \right. \\ \left. \cdot \left\langle \left(p^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{1}{4} \sinh \left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right] \right\rangle \right\}_{-A/2}^{A/2}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \left\{ \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{p^2} \left(p^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) + \frac{1}{4p^2} \sinh \left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right] \right\}_{-A/2}^{A/2}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \left\{ \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \left(1 + \frac{1}{2p^2} \right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4p^2} \sinh \left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right] \right\}_{-A/2}^{A/2},$$

factorizando $\operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right)$, entonces:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \left\{ \left(1 - 1 - \frac{1}{2p^2} \right) \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4p^2} \sinh \left[2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right] \right\}_{-A/2}^{A/2}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}} \left\{ -\frac{1}{2p^2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \frac{1}{4p^2} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\}_{-A/2}^{A/2},$$

factorizando el denominador $2p^2$, entonces:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{4p^3\sqrt{1+p^2}} \left\{ -\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\}_{-A/2}^{A/2}$$

A.25. APÉNDICE 25

Desarrollando la siguiente expresión:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{4p^3\sqrt{1+p^2}} \left\{ -\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(X)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\}_{-A/2}^{A/2},$$

antes de desarrollar la anterior expresión, recordemos algunas propiedades de las funciones hiperbólicas, las cuales son las siguientes:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x) \quad \operatorname{tanh}(-x) = -\operatorname{tanh}(x)$$

$$\operatorname{arctanh}(-x) = -\operatorname{arctanh}(x).$$

Desarrollemos la expresión de la energía de interacción:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{4p^3\sqrt{1+p^2}} \left\{ -\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] + \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(-A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(-A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\},$$

usando las propiedades de las funciones hiperbólicas, se obtiene:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{4p^3\sqrt{1+p^2}} \left\{ -\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] + \operatorname{arctanh} \left(\frac{-p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{-p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{4p^3 \sqrt{1+p^2}} \left\{ -\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] - \operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[-2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{4p^3 \sqrt{1+p^2}} \left\{ -2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{senh} \left[2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{16m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{4p^3 \sqrt{1+p^2}} \left\{ -2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \operatorname{senh} \left[2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\}$$

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{p^3 \sqrt{1+p^2}} \left\{ -2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) + \operatorname{senh} \left[2\operatorname{arctanh} \left(\frac{p \tanh(A/2)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \right\},$$

reemplacemos el valor de p , hemos definido que

$$p^2 = \frac{1}{2} [\cosh(A) - 1],$$

por propiedad se cumple que $\cosh(A) = 1 + 2 \operatorname{senh}^2(A/2)$, entonces:

$$p^2 = \frac{1}{2} [1 + 2 \operatorname{senh}^2(A/2) - 1]$$

$$p = |\operatorname{senh}(A/2)|$$

pero como $A \geq 0$, entonces

$$p = \operatorname{senh}(A/2),$$

por lo tanto, reemplazando el valor de p y teniendo en cuenta que $\sqrt{1+p^2} = \cosh(A)$, entonces la expresión de la energía de interacción sera igual a:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{senh}^3(A/2) \cosh(A/2)} \left\{ -2\operatorname{arctanh} \left(\frac{\operatorname{senh}(A/2) \tanh(A/2)}{\cosh(A/2)} \right) + \operatorname{senh} \left[2\operatorname{arctanh} \left(\frac{\operatorname{senh}(A/2) \tanh(A/2)}{\cosh(A/2)} \right) \right] \right\},$$

pero $\tanh(A/2) = \frac{\sinh(A/2)}{\cosh(A/2)}$, entonces:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{\sinh^3(A/2) \cosh(A/2)} \left\{ -2\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)] + \sinh(2\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)]) \right\}.$$

Resolvemos por separado las siguientes expresiones:

- Desarrollando $\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)]$:

Recordando la definición de la función $\text{arctanh}(x)$:

$$\text{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

reemplazando $x = \tanh^2(A/2)$, entonces:

$$\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)] = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{1 + \tanh^2(A/2)}{1 - \tanh^2(A/2)} \right)$$

$$\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)] = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{1 + \frac{\sinh^2(A/2)}{\cosh^2(A/2)}}{1 - \frac{\sinh^2(A/2)}{\cosh^2(A/2)}} \right)$$

$$\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)] = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\cosh^2(A/2) + \sinh^2(A/2)}{\cosh^2(A/2)}}{\frac{\cosh^2(A/2) - \sinh^2(A/2)}{\cosh^2(A/2)}} \right),$$

pero por propiedad

$$\cosh^2(A/2) - \sinh^2(A/2) = 1 \quad \text{y} \quad \cosh(A) = \cosh^2(A/2) + \sinh^2(A/2)$$

entonces:

$$\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)] = \frac{1}{2} \text{Ln}[\cosh(A)].$$

- Desarrollando $\sinh(2\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)])$:

Se ha demostrado que

$$\text{arctanh}[\tanh^2(A/2)] = \frac{1}{2} \text{Ln}[\cosh(A)],$$

entonces:

$$\begin{aligned} \sinh(2\operatorname{arctanh}[\tanh^2(A/2)]) &= \sinh\left(\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \operatorname{Ln}[\cosh(A)]\right) \\ \sinh(2\operatorname{arctanh}[\tanh^2(A/2)]) &= \sinh(\operatorname{Ln}[\cosh(A)]) \\ \sinh(2\operatorname{arctanh}[\tanh^2(A/2)]) &= \sinh\left[\operatorname{Ln}\left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right)\right] \\ \sinh(2\operatorname{arctanh}[\tanh^2(A/2)]) &= \frac{e^{\operatorname{Ln}\left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right)} - e^{-\operatorname{Ln}\left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right)}}{2} \\ \sinh(2\operatorname{arctanh}[\tanh^2(A/2)]) &= \frac{e^{\operatorname{Ln}\left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right)} - e^{\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{e^A + e^{-A}}\right)}}{2} \\ \sinh(2\operatorname{arctanh}[\tanh^2(A/2)]) &= \frac{\frac{e^A + e^{-A}}{2} - \frac{2}{e^A + e^{-A}}}{2} \\ \sinh(2\operatorname{arctanh}[\tanh^2(A/2)]) &= \frac{\cosh(A) - \operatorname{sech}(A)}{2}. \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en la expresión de la energía de interacción, se obtiene:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{4m^2}{k^2} \cdot \frac{F_\infty D}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{\sinh^3(A/2) \cosh(A/2)} \left\{ -\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \operatorname{Ln}[\cosh(A)] + \frac{\cosh(A) - \operatorname{sech}(A)}{2} \right\},$$

evocando que los parámetros m^2 y k^2 lo hemos definido como

$$m^2 = \frac{b_1^2 \pi (1 - v^2)}{2D^2 F_\infty} \quad \text{y} \quad k^2 = \frac{2\pi}{F_\infty},$$

pero para un análisis cuasiestático ($v \ll 1$) el parámetro m^2 sera igual a

$$m^2 = \frac{b_1^2 \pi}{2D^2 F_\infty};$$

por ello, si reemplazamos los parámetros de m^2 y k^2 , obtendremos la expresión final de la energía de interacción:

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{\cancel{4} \left(\frac{b_1^2 \pi}{\cancel{2} D^2 F_\infty} \right)}{\frac{\cancel{2} \pi}{F_\infty}} \cdot \frac{F_\infty \cancel{D}}{\pi \cancel{b}_1} \cdot \frac{1}{\sinh^3(A/2) \cosh(A/2)} \left\{ -\operatorname{Ln}[\cosh(A)] + \frac{\cosh(A) - \operatorname{sech}(A)}{2} \right\},$$

simplificando términos, obtenemos

$$E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{b_1 F_\infty}{D \pi} \cdot \frac{1}{\sinh^3(A/2) \cosh(A/2)} \left\{ -\operatorname{Ln}[\cosh(A)] + \frac{\cosh(A) - \operatorname{sech}(A)}{2} \right\}.$$

A.26. APÉNDICE 26

Calculemos el siguiente caso limite:

$$\lim_{A \rightarrow 0} E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{b_1 F_\infty}{D\pi} \cdot \frac{1}{\sinh^3(A/2) \cosh(A/2)} \left\{ -\text{Ln}[\cosh(A)] + \frac{\cosh(A) - \text{sech}(A)}{2} \right\},$$

recordemos la serie de la función e^x :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots$$

apliquemos el siguiente limite a la función e^x

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 + x,$$

en consecuencia, se tendrá que

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1 - x.$$

La función seno hiperbólico esta definido como

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

si tomamos el limite cuando $x \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} e^x - \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x}}{2} = \frac{(1+x) - (1-x)}{2} = x.$$

La función coseno hiperbólico esta definido como

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

si tomamos el limite cuando $x \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} e^x + \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x}}{2} = \frac{(1+x) + (1-x)}{2} = 1.$$

Teniendo en cuenta los limites de $\sinh(x)$ y $\cosh(x)$ cuando $x \rightarrow 0$, se tendrá que:

$$\begin{aligned} \lim_{A/2 \rightarrow 0} \sinh(A/2) &= A/2 & \lim_{A/2 \rightarrow 0} \cosh(A/2) &= 1 \\ \lim_{A \rightarrow 0} \cosh(A) &= 1 & \lim_{A \rightarrow 0} \text{sech}(A) &= 1 \end{aligned}$$

por lo tanto, $\lim_{A \rightarrow 0} E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2]$ sera igual a:

$$\lim_{A \rightarrow 0} E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{b_1 F_\infty}{D\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{A}{2}\right)^3} [-\text{Ln}(1) + (1 - 1)],$$

pero $\text{Ln}(1) = 0$, entonces:

$$\lim_{A \rightarrow 0} E_{\text{int.}}[\varphi_1, \varphi_2] = 0$$