

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

**UNIDAD DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



TESIS

**“PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA NO LINEAL DE ESTRUCTURAS
MEDIANTE MACROMODELOS BASADOS EN EL MÉTODO DE LA
ANALOGÍA DE LA FUERZA”**

**PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN
EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

ELABORADA POR

B.Sc. EDÉN ANGEL CAPCHA MOLINA

ASESOR

Dr. MIGUEL ANGEL TORRES MATOS

LIMA- PERÚ

2024

“PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA NO LINEAL DE ESTRUCTURAS
MEDIANTE MACROMODELOS BASADOS EN EL MÉTODO DE LA
ANALOGÍA DE LA FUERZA”

EDÉN ANGEL CAPCHA MOLINA

Presentado a la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil en cumplimiento
parcial de los requerimientos para el grado académico de:

MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN
INGENIERÍA ESTRUCTURAL

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

2024

Autor : B.Sc. Edén Ángel Capcha Molina
Recomendado : Dr. Miguel Ángel Torres Matos
Asesor de la Tesis
Aceptado por : Dra. Heddy Marcela Jimenez Yabar
Directora (e) de la Unidad de Posgrado

@ 2024; Universidad Nacional de Ingeniería, todos los derechos reservados o el autor autoriza
a la UNI-FIC a reproducir la tesis en su totalidad o en partes.



DEDICATORIA

A mis padres, Edén y Ayde, en cuyo cariño incondicional e imperecedero sentí el amor de Dios.

A Jhael, Amber y Lena, en cuyas miradas y sonrisas encontré optimismo y la belleza del mundo.

A Galvao y Dana, por haberme acompañado y ayudado en el sendero incomprensible de la vida.

A Jhoselyn, por convertir aquellas tardes melancólicas en estabilidad, tranquilidad y fortaleza.

A la Universidad Nacional de Ingeniería, por ser el faro que guía la ciencia y la tecnología dentro de las penumbras que cubren el país.



AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento al Dr. Miguel Ángel Torres Matos, docente del posgrado FIC UNI, por compartir sus conocimientos de forma sincera y desinteresada.



INDICE

DEDICATORIA.....	III
AGRADECIMIENTOS	IV
ÍNDICE DE FIGURAS.....	VIII
ÍNDICE DE TABLAS	XII
RESUMEN.....	XIII
ABSTRACT	XIV
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I: PROTOCOLO DE LA INVESTIGACIÓN	3
1.1 IDENTIFICACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	3
1.1.1 Formulación del problema general.....	4
1.1.2 Formulación de los problemas específicos	4
1.2 OBJETIVOS	5
1.2.1 General	5
1.2.2 Específicos.....	5
1.3 HIPÓTESIS Y VARIABLES	5
1.3.1 Hipótesis general.....	5
1.3.2 Hipótesis específicas	5
1.3.3 Variables	6
1.4 JUSTIFICACIÓN.....	6
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	7
2.1 ANTECEDENTES	7
2.2 BASES TEÓRICAS	8
2.2.1 Ecuaciones del movimiento	8
2.2.2 Principio del trabajo virtual.....	9
2.2.3 Teoría de Euler-Bernoulli.....	9
2.2.4 Amortiguamiento estructural.....	17
2.2.5 Matriz exponencial.....	24



2.2.6	Método del espacio estado.....	25
2.3	MARCO CONCEPTUAL.....	27
2.3.1	Respuesta lineal.....	27
2.3.2	Desplazamientos elásticos.....	27
2.3.3	Respuesta no lineal.....	27
2.3.4	Desplazamientos inelásticos.....	27
CAPÍTULO III: MÉTODO DE LA ANALOGÍA DE LA FUERZA.....		28
3.1	ANALOGÍA DE LA FUERZA.....	28
3.2	ANALOGÍA DE LA FUERZA A MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD.....	29
3.3	CAMBIO DE COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES.....	35
3.4	CAMBIO DE COORDENADAS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA.....	38
3.5	SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO.....	39
3.6	MÉTODO DEL ESPACIO ESTADO EN SISTEMAS LINEALES.....	41
3.7	MÉTODO DEL ESPACIO ESTADO EN SISTEMAS NO LINEALES.....	44
3.8	CONDENSACIÓN ESTÁTICA.....	48
3.9	SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES NO LINEALES.....	51
3.10	COMPORTAMIENTO CÍCLICO DE LAS ROTULAS PLÁSTICAS.....	54
CAPÍTULO IV: RESULTADOS.....		61
4.1	VALIDACIÓN DEL MÉTODO CON CARGA MONOTÓNICA PARA UN PÓRTICO DE CUATRO NIVELES.....	61
4.1.1	Descripción del caso de estudio.....	61
4.1.2	Modelamiento usando la analogía de la fuerza.....	63
4.2	VALIDACIÓN DEL MÉTODO CON CARGA MONOTÓNICA PARA UN PÓRTICO DE UN NIVEL	66
4.2.1	Descripción de la estructura.....	66
4.3	VALIDACIÓN DEL MÉTODO PARA CARGA CÍCLICA.....	68
4.4	APLICACIÓN A LA RESPUESTA DINÁMICA.....	71
4.4.1	Pórtico de un nivel y una crujía.....	71
4.4.2	Pórtico de dos niveles y una crujía.....	81
4.4.3	Pórtico de dos niveles y dos crujías.....	88
4.4.4	Pórtico de tres niveles y tres crujías.....	94
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....		98
5.1	CONCLUSIONES.....	98



5.2	RECOMENDACIONES.....	100
	REFERENCIAS.....	101
	ANEXOS	104
	ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA	104
	ANEXO 2: GUÍA PARA EL USO DEL PROGRAMA EDEN3	105
	ANEXO 3: PROGRAMA DE ANALISIS DINÁMICO NO LINEAL	108
	ANEXO 4: RUTINA IMPLEMENTADA EN PYTHON.....	109



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: <i>Desplazamiento transversal en función de los valores nodales.....</i>	12
Figura 2: <i>Funciones de interpolación de desplazamientos transversales y giros.....</i>	13
Figura 3: <i>Variación de la razón de amortiguamiento crítico con la aceleración espectral.</i>	18
Figura 4: <i>Variación de la razón de amortiguamiento crítico con la altura de una edificación de concreto armado.</i>	19
Figura 5: <i>Variación de la razón de amortiguamiento crítico con la frecuencia del sistema estructural.....</i>	20
Figura 6: <i>Comportamiento no lineal de un elemento estructural de un grado de libertad.</i>	28
Figura 7: <i>Elemento viga sometido a momentos que exceden el momento de fluencia y los giros inelásticos asociados.</i>	30
Figura 8: <i>Giros inelásticos remanentes en una viga sometida a cargas externas.</i>	31
Figura 9: <i>Nivel de fuerza asociado en el rango inelástico y elástico.....</i>	33
Figura 10: <i>Grados de libertad asociados al elemento viga-columna con 0° y con un ángulo de 90°.....</i>	35
Figura 11: <i>Fuerzas nodales asociadas a un elemento viga columna con giros inelásticos.</i>	36
Figura 12: <i>Fuerzas nodales en un elemento viga columna en coordenadas locales.</i>	36
Figura 13: <i>Grados de libertad en coordenadas locales. Fuente: Elaboración propia.</i>	38
Figura 14: <i>Sistema de coordenadas locales y globales.....</i>	39
Figura 15: <i>Diagrama momento rotación inelástica característica de elementos viga- columna.....</i>	40
Figura 16: <i>Nivel de fuerza asociado en el rango inelástico y elástico.....</i>	44
Figura 17: <i>Modelo cíclico perfectamente plástico y con endurecimiento sin degradación de rigidez.....</i>	47
Figura 18: <i>Relación constitutiva no lineal entre giro inelástico y momento.</i>	55
Figura 19: <i>Camino inicial y camino posfluencia positiva para una rotula con comportamiento elastoplastico.....</i>	55
Figura 20: <i>Caminos sucesivos para rotulas con comportamiento elastoplastico.</i>	56
Figura 21: <i>Modelo de comportamiento tetralineal de seis parámetros.....</i>	57
Figura 22: <i>Camino de carga y descarga en un modelo de comportamiento tetralineal con punto de partida en el segundo cuadrante.</i>	57



Figura 23: Camino de carga y descarga en un modelo de comportamiento tetralineal con punto de partida en el tercer cuadrante.....	58
Figura 24: Características geométricas del pórtico de concreto armado sometido a un estudio experimental de carga monotónica creciente.....	62
Figura 25: Modelo computacional con plasticidad concentrada basada en analogía de la fuerza y secciones transversales.	64
Figura 26: Diagrama momento curvatura de las vigas de sección BF 205 y BR6 y sus respectivas idealizaciones.	65
Figura 27: Diagrama momento curvatura de las columnas de sección CL15-1er Piso, CL15-2do-3er Piso, CL15-4to piso y sus respectivas idealizaciones.....	65
Figura 28: Comparación entre la curva monotónica experimental y la curva monotónica numérica obtenida mediante el uso de la FAM.	66
Figura 29: Pórtico de concreto armado y detalle del armado de vigas y columnas.	67
Figura 30: Diagramas momento curvatura de la columna y la viga de concreto armado, así como sus respectivas idealizaciones.	67
Figura 31: Comparación de la respuesta monotónica experimental y la respuesta numérica usando FAM.	68
Figura 32: Características geométricas y mecánicas de la columna sometida a carga lateral cíclica.....	69
Figura 33: Comparación de los resultados experimentales y numéricos obtenidos del análisis.....	70
Figura 34: Comparación de los resultados experimentales y numéricos obtenidos del análisis.....	71
Figura 35: Pórtico de concreto armado de una crujía y un nivel en el que se han considerado seris posibles rotulas plásticas.	72
Figura 36: Diagrama momento curvatura de viga de 30cmx40cm y diagrama de momento idealizado.	73
Figura 37: Diagrama momento curvatura de columna de 40cmx40cm y diagrama de momento idealizado.....	73
Figura 38: Componente NS y EW del registro de aceleraciones del terreno de Pisco 2007.	74
Figura 39: Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 0 y PHL 2 para el sismo de Pisco del 2007.	75
Figura 40: Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 4 y PHL 5 para el sismo de Pisco del 2007.	76



Figura 41: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 1 y PHL 3 para el sismo de Pisco del 2007.</i>	77
Figura 42: Componentes EW y NS del registro acelerografico del sismo de Atico del 2001. 78	78
Figura 43: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 0 y PHL 1 para el sismo de Atico 2001.</i>	79
Figura 44: <i>Registro acelerografico del sismo de Huaraz 1970.</i>	80
Figura 45: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 0 y PHL 1 frente al terremoto del Huaraz 1970.</i>	80
Figura 46: <i>Modelo estructural de dos niveles y una crujía.</i>	81
Figura 47: <i>Respuesta cíclica de las rotulas PHL 0 y PHL 9 frente al sismo de Pisco del 2007.</i>	82
Figura 48: <i>Respuesta cíclica de las rotulas PHL 8 y PHL 2 frente al sismo de Pisco del 2007. Fuente: Elaboración propia.</i>	83
Figura 49: <i>Respuesta cíclica de las rotulas PHL 2 y PHL 8 frente al sismo de Atico del 2001.</i>	84
Figura 50: <i>Respuesta cíclica de las rotulas PHL 0 y PHL 9 frente al sismo de Atico del 2001.</i>	85
Figura 51: <i>Respuesta cíclica de las rotulas PHL 2 y PHL 8 frente al sismo de Huaraz 1970.</i>	86
Figura 52: <i>Respuesta cíclica de las rotulas PHL 0 y PHL 9 frente al sismo de Huaraz 1970.</i>	87
Figura 53: <i>Pórtico de dos crujías y dos niveles de concreto armado.</i>	88
Figura 54: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 0 y PHL 12 ante el sismo de Pisco 2007.</i>	89
Figura 55: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 4 y PHL 13 ante el sismo de Pisco 2007.</i>	90
Figura 56: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 0 y PHL 12 ante el sismo de Atico 2001.</i>	91
Figura 57: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 4 y PHL 13 ante el sismo de Atico 2001.</i>	92
Figura 58: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 0 y PHL 12 ante el sismo Huaraz 1970.</i>	93
Figura 59: <i>Pórtico de tres crujías y tres niveles de concreto armado.</i>	94
Figura 60: <i>Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 0 y PHL 24 ante el sismo de Pisco del 2007.</i>	95



Figura 61: *Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 4 y PHL 26 ante el sismo de Pisco del 2007.....96*

Figura 62: *Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 6 y PHL 14 ante el sismo de Pisco del 2007.....97*



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: <i>Sección transversal y distribución de las armaduras de acero colocadas en los elementos estructurales.</i>	61
Tabla 2: <i>Resistencia promedio a la compresión del concreto según elementos estructurales.</i>	62
Tabla 3: <i>Propiedades mecánicas de las varillas de acero en función de los diámetros colocados.</i>	63
Tabla 4: <i>Características geométricas y mecánicas de las secciones que forman parte del pórtico analizado.</i>	63
Tabla 5: <i>Propiedades mecánicas de las secciones transversales de los elementos estructurales.</i>	67
Tabla 6: <i>Tabla de parámetros de comportamiento de la sección analizada.</i>	69
Tabla 7: <i>Tabla de parámetros de comportamiento de la sección analizada.</i>	70
Tabla 8: <i>Propiedades elásticas de los materiales que definen los elementos estructurales.</i>	72
Tabla 9: <i>Propiedades elásticas de los materiales que definen los elementos estructurales.</i>	73



RESUMEN

En los últimos años, el diseño basado en desempeño ha ganado relevancia dentro de la práctica de la ingeniería estructural, pues permite cuantificar una serie de parámetros útiles en el diseño sísmico; sin embargo, el desarrollo de macromodelos capaces de predecir el comportamiento no lineal de forma estable y computacionalmente eficiente, indispensables en la aplicación del método, aún está en desarrollo. El presente trabajo de investigación se basa en el método de la analogía de la fuerza (FAM) como un medio práctico para el desarrollo de tales macromodelos computacionalmente eficientes. La metodología aplicada considera que el término fuerza externa de la ecuación del movimiento, en los casos lineales y no lineales, se puede expresar como el producto de la matriz de rigidez inicial por el vector de desplazamiento elástico, definido de forma general como la diferencia entre el vector de desplazamiento total e inelástico. Así, es posible incorporar los desplazamientos inelásticos dentro de las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones del movimiento que, junto a las relaciones constitutivas, permite tener un sistema de ecuaciones de rápida solución. Posteriormente, el método descrito fue implementado en Python haciendo uso de módulos y programación orientada a objetos. Los resultados encontrados muestran que la analogía de la fuerza permite encontrar los desplazamientos y giros inelásticos usando la matriz de rigidez elástica del sistema, tanto en el caso estático como en el caso dinámico; además, se ha encontrado que la respuesta estructural predicha se encuentra dentro de un rango aceptable de predicción.

Palabras clave

Respuesta cíclica, respuesta no lineal, analogía de la fuerza, Rotulas plásticas, Registros sísmicos.



ABSTRACT

In recent years, performance-based design has gained relevance within the practice of structural engineering, as it allows for the quantification of a series of parameters useful in seismic design; however, the development of macromodels capable of predicting nonlinear behavior in a stable and computationally efficient manner, essential in the application of the method, is still under development. The present research work is based on the force analogy method (FAM) as a practical means for the development of such computationally efficient macromodels. The applied methodology considers that the external force term in the equation of motion, in both linear and nonlinear cases, can be expressed as the product of the initial stiffness matrix by the elastic displacement vector, defined in general as the difference between the total and inelastic displacement vector. Thus, it is possible to incorporate inelastic displacements within the equilibrium equations and the equations of motion, which, along with the constitutive relations, allows for a system of equations with rapid solution. Subsequently, the described method was implemented in Python using modules and object-oriented programming. The results show that the force analogy allows for finding inelastic displacements and rotations using the elastic stiffness matrix of the system, both in static and dynamic cases; furthermore, it has been found that the predicted structural response falls within an acceptable range of prediction.

Keywords

Nonlinear response, cyclic response, force analogy, plastic hinges, seismic records.



INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha observado una tendencia creciente clara de la ingeniería estructural hacia nuevos métodos y filosofías de diseño, siendo el de mayor vigencia y trascendencia el diseño basado en desempeño (*Performance Based Design*). Sin embargo, esta filosofía de diseño requiere, como ingrediente principal, de modelos de análisis estructural más sofisticados, que sean capaces de tomar en cuenta los límites de los materiales, y así poder realizar predicciones adecuadas de parámetros de comportamiento tales como, resistencia lateral, rigidez posfluencia, capacidad de desplazamiento, disipación de energía entre otros.

Aunque en la actualidad existen numerosos softwares orientados a este fin, la mayor parte de estos no son transparentes sobre la formulación usada en su desarrollo e implementación, y muchos de los macromodelos disponibles no se han diseñado específicamente para el modelamiento de ciertos elementos estructurales, por lo que en general no es posible la realización de análisis no lineales confiables.

El presente trabajo de investigación busca incrementar el conocimiento y los métodos disponibles para predecir el comportamiento no lineal de estructuras mediante el desarrollo de macromodelos que basen su formulación en un método transparente y versátil denominado método de la analogía de la fuerza (*Force Analogy Method*).

Este método consiste en incorporar los desplazamientos inelásticos de un sistema estructural directamente en las ecuaciones del movimiento, tomando en cuenta la consideración de que para un nivel dado de desplazamiento el nivel de fuerza alcanzado puede ser obtenido como el producto de la matriz de rigidez elástica por el vector de desplazamientos elásticos, aun en el caso de sistemas estructurales en el intervalo no lineal.

Finalmente, los algoritmos encontrados se implementaron directamente usando uno de los lenguajes de programación más versátiles y populares a la fecha, Python. Para esto se usaron algunas de las librerías más populares disponibles en este lenguaje como numpy, y se desarrollaron varios módulos propios que permiten una fácil y práctica ejecución del algoritmo.



El trabajo desarrollado se ha dividido en cuatro partes, que abordan todo el proceso seguido para la consecución de los objetivos planteados. A continuación, se presenta un resumen de cada uno de estos capítulos.

El capítulo I, se presentan los protocolos básicos de la investigación, en este se exponen la realidad problemática, el planteamiento del problema y los problemas específicos, asimismo, se presenta el objetivo general y los objetivos específicos. Finalmente, se presenta la metodología de la analogía de la fuerza aplicada a sistemas estructurales de uno y múltiples grados de libertad.

En el capítulo II, se exponen los antecedentes más importantes que han guiado y motivado el presente trabajo de investigación, asimismo se presentan las bases teóricas, como las ecuaciones del movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad, se define la matriz de amortiguamiento de Rayleigh, la matriz exponencial y el método del espacio estado. Finalmente, se presentan algunos términos básicos necesarios para el entendimiento del trabajo.

En el capítulo III, se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de la analogía de la fuerza a la predicción de la respuesta estructural. Los algoritmos obtenidos del método fueron implementados en Python, usando módulos y POO. Con la finalidad de evaluar la capacidad predictiva de los macromodelos de análisis, se han comparado las predicciones arrojadas por el método con los resultados obtenidos en ensayos de laboratorio.

Finalmente, en el capítulo IV, se exponen las principales conclusiones obtenidas del trabajo, resaltando que el uso de la analogía de la fuerza permite la generación de macromodelos sencillos con algoritmos de fácil implementación.

CAPÍTULO I: PROTOCOLO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Identificación y descripción del problema

Los sismos son fenómenos naturales que inducen grandes fuerzas de inercia en las estructuras construidas por el hombre, y al ser su predicción un problema abierto y aún sin solución cerrada dentro del estado del arte de la ingeniería civil, tales fuerzas pueden exceder, y a menudo exceden, las estimaciones realizadas sobre ellas. Este hecho provoca la incursión de la estructura en intervalos de comportamiento que van más allá del lineal, y debido a que los modelos de uso común en la práctica ingenieril son lineales, la predicción de la respuesta más probable, altamente no lineal, no es posible. Este hecho a su vez impide la correcta cuantificación de los niveles de desempeño esperados y si estos son aceptables o no, para la estructura diseñada (Wong & Wang, 2007c).

Los modelos de análisis lineal parten de hipótesis como la proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones asociadas, además de la consideración de pequeñas deformaciones. Estas hipótesis, sin embargo, no se cumplen cuando las cargas actuantes hacen que las estructuras incursionen más allá del límite de proporcionalidad de los materiales, por lo que los resultados obtenidos de estos modelos no captan el comportamiento observado de manera experimental (Bonet & Wood, 2008a).

Además, en los últimos años se ha venido incrementando de manera sostenida el uso de nuevas metodologías de diseño y de evaluación, tales como el diseño basado en desempeño, mismas que requieren la evaluación y cuantificación de parámetros no lineales, como la resistencia de fluencia, rigidez posfluencia, ductilidad, entre otros (Nica et al., 2022). Otro de los campos en los que se ha venido incrementado la necesidad por modelos de análisis no lineal es, el área de los sistemas de protección sísmica, ya que tanto el diseño como la evaluación del comportamiento requieren de la predicción de parámetros no lineales, los que a su vez requieren de modelos de análisis no lineal de creciente sofisticación (Colunga, 2017; Tsiavos et al., 2017). Estas tendencias nos obligan a disponer de modelos que consideren estos parámetros en su formulación.

Aunque actualmente existen modelos de análisis de no lineal disponibles en la literatura científica y en algunos de los softwares de análisis estructural más difundidos como SAP 2000 y ETABS, la mayor parte de estas opciones tienen serias limitaciones técnicas, pues no están diseñadas para modelar el comportamiento de elementos estructurales específicos, como muros de concreto armado, muros de albañilería entre otros; asimismo,



se ha podido observar que su capacidad de predecir parámetros de gran importancia para la ingeniería estructural como la resistencia de fluencia, resistencia lateral, disipación de energía, lazos de histéresis entre otros, no siempre presentan la precisión deseada, como en el caso de la predicción del comportamiento de elementos dominados por el corte o una combinación del cortante y flexión (Otani, 2015).

La carencia de modelos que permitan predecir el comportamiento no lineal de elementos y sistemas estructurales, dentro de rangos de precisión razonables, provoca un impacto negativo en la ingeniería estructural, pues sin la disposición de modelos prácticos y computacionalmente eficientes, no es posible la implementación apropiada y exitosa del diseño basado en desempeño sísmico, tanto en sistemas de base fija, tradicionales, como en los más recientes sistemas de protección sísmica, afectado a los usuarios finales (Wilson, 2008).

Ante esta situación, en este trabajo de investigación se propone el uso del método de la analogía de la fuerza como un medio que permitirá generar modelos de análisis no lineal prácticos y computacionalmente eficientes, ya que este permite tratar los desplazamientos y rotaciones inelásticas como nuevas variables y pueden ser incorporadas dentro de las ecuaciones del movimiento, y más específicamente, dentro de las ecuaciones de equilibrio, considerando estas como fuerzas externas que actúan logrando los desplazamientos deseados.

Esta técnica puede ser empleada para caracterizar una serie variada de comportamientos, tales como, elementos sometidos a flexión, elementos dominados por el cortante, dominados por esfuerzos de cortante y flexión, entre otros (Wong & Wang, 2007c). Así, se espera poder predecir de manera razonablemente precisa los parámetros de respuesta no lineal con un esfuerzo de cómputo moderado.

1.1.1 Formulación del problema general

¿Qué mejoras en la predicción de la respuesta cíclica no lineal de los elementos estructurales puede lograrse mediante la aplicación de la analogía de la fuerza?

1.1.2 Formulación de los problemas específicos

1. ¿Cómo modelar elementos viga columna de varios grados de libertad usando el método de la analogía de la fuerza?
2. ¿Qué características tiene la curva de comportamiento monotónica obtenida usando macromodelos basados en la analogía de la fuerza?
3. ¿Cuál es la capacidad de predicción de respuesta monotónica de los macromodelos al compararlos con resultados experimentales?



4. ¿Cómo pueden resolverse las ecuaciones del movimiento de forma eficiente usando el método del espacio estado para sistemas de varios grados de libertad?

1.2 Objetivos

1.2.1 General

Predecir la respuesta no lineal de estructuras mediante macromodelos basados en el método de la analogía de la fuerza.

1.2.2 Específicos

1. Establecer el método de la analogía de la fuerza para macromodelos de barras con varios grados de libertad que permitan modelar elementos viga-columna.
2. Determinar la respuesta monotónica de un sistema estructural de n grados de libertad usando macromodelos de barras basados en la analogía de la fuerza.
3. Comparar la capacidad de predecir la respuesta monotónica de los macromodelos desarrollados comparándolos con resultados obtenidos experimentalmente en ensayos de laboratorio.
4. Usar el método del espacio estado para resolver las ecuaciones del movimiento y así obtener la respuesta dinámica de un sistema de múltiples grados de libertad.

1.3 Hipótesis y variables

1.3.1 Hipótesis general

El método de la analogía de la fuerza permitirá tener macromodelos con capacidad de predicción de la respuesta cíclica no lineal de elementos estructurales con un 10% de error con respecto de los ensayos de laboratorio.

1.3.2 Hipótesis específicas

1. El método de la analogía de la fuerza permitirá incorporar los giros inelásticos en las ecuaciones de equilibrio permitiendo así tener macromodelos tipo Giberson.
2. La respuesta monotónica de un sistema estructural de n grados de libertad, obtenida mediante el macromodelo basado en la analogía de la fuerza, predice adecuadamente el comportamiento real de la estructura bajo cargas estáticas.
3. Los macromodelos obtenidos de la analogía de la fuerza permitirán tener predicciones con un error de a lo sumo 10% con respecto a los resultados obtenidos de ensayos de laboratorio.
4. El método del espacio estado permitirá la resolución de las ecuaciones del movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad de forma práctica y eficiente.



1.3.3 Variables

1.3.3.1 Independiente

Analogía de la fuerza

Método que permite la incorporación de los giros inelásticos en las ecuaciones de equilibrio, usando la matriz de rigidez elástica para alcanzar el mismo nivel de fuerza de un sistema no lineal (Wong et al., 2007a).

1.3.3.2 Dependiente

Respuesta no lineal

Es la forma como un sistema estructural responde a la acción de un sistema de fuerzas externos, considerando las propiedades no lineales de los materiales en lugar de las simplificaciones de la ley de Hooke. Esta variable se caracteriza en términos de resistencia, rigidez y capacidad de deformación (Wu et al., 2017).

1.4 Justificación

El presente trabajo de investigación busca contribuir directamente a la mejora del comportamiento sísmico de las edificaciones construidas en el Perú, mediante el desarrollo de métodos de análisis no lineal de estructuras, más transparentes y eficientes.

Esto promoverá la adopción de metodologías de diseño más integrales que las utilizadas actualmente, como el diseño basado en el desempeño, que permiten tener edificaciones más resilientes a la acción de terrenos frecuentes en el cinturón de fuego del pacífico.

Además, gracias a la eficiencia computacional esperada con la aplicación del método de la analogía de la fuerza, que se basa en el uso de una única rigidez elástica para sus cálculos, será posible implementarlo en el análisis de edificaciones completas, reduciendo significativamente el esfuerzo computacional y, por ende, minimizando el tiempo requerido.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

(Esmaeiltabar et al., 2019) presentaron un trabajo de investigación titulado “*Nonlinear macro modelling of slender reinforced concrete shear walls*”. El principal objetivo de este trabajo de investigación fue el desarrollo y la implementación de un modelo estructural que sea capaz de representar adecuadamente el comportamiento no lineal de muros delgados de concreto armado. Para esto, el autor se basó en modelos de comportamiento no lineal existentes, tales como el modelo de fibras, y el modelo de múltiples líneas verticales, propuestas anteriormente. Una vez desarrollado el modelo, este se implementó en Matlab y en OpenSees, siendo el primero un software de desarrollo de scripts y ejecutables, mientras el segundo un software de modelos computacionales orientados al análisis estructural de código abierto, generado en la Universidad Berkeley. Los resultados encontrados mostraron que el modelo computacional basado en modelos de múltiples fibras verticales permite la predicción de parámetros importantes tales como la resistencia de fluencia, con un error de hasta 15%; resistencia última, con un error de hasta 20%; rigidez elástica y disipación de energía, con un error de hasta 20%; tanto para el caso de cargas monotónicas como para el caso de carga cargas cíclicas.

(Kolozviri et al., 2015) presentaron un trabajo de investigación titulado “*Modelling of cyclic shear-flexure interaction in reinforced concrete structural walls. II. Experimental validation*”. En este trabajo de investigación el principal objetivo fue el desarrollo de un modelo de comportamiento que permita la predicción de la respuesta cíclica no lineal de elementos estructurales en los que predomine la interacción corte y flexión, tales como muros de concreto de mediana altura. La metodología propuesta consistió en un ensamble de macromodelos más simples, consistentes de elementos uniaxiales con capacidad de incursionar en el intervalo no lineal. Este modelo está basado en el modelo de tres fibras verticales propuestos anteriormente, en el que los núcleos de concreto se modelan con un elemento línea no lineal; mientras que el alma del muro se modela con un elemento línea que puede ser lineal o no, dependiendo de las cargas aplicadas. Los resultados encontrados muestran que el modelo propuesto permite representar de manera apropiada las respuestas experimentales medidas y obtenidas de una serie de ensayos desarrollados en laboratorio. Este modelo permitió la predicción de parámetros no lineales como la resistencia de fluencia, con un error de hasta 15%; mientras que la disipación de energía con una aproximación de hasta 18%.

El trabajo de investigación presentado por (Wong & Wang, 2007a) y titulado como “*Seismic analysis of inelastic moment-resisting frames part I: Modified force analogy method for end offsets*” se aplicó la analogía de la fuerza modificada para poder representar zonas de una estructura donde no se cumplen las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli, tales como zonas panel. Para esto los autores desarrollaron e implementaron matrices de rigidez que consideraron la acción de brazos rígidos en los extremos de los elementos. Además, se realizó un uso extensivo del método de condensación estático para disminuir considerablemente el tamaño de las matrices de rigidez. De esta forma se pudo lograr una disminución eficiente del número de grados de libertad del problema original, dedicando esta liberación a la consideración de los giros y desplazamientos inelásticos. Los autores desarrollaron esta técnica y la implementaron únicamente en osciladores de un grado de libertad encontrando que las predicciones realizadas están de acuerdo con los resultados encontrados por otros autores.

En este capítulo se presentan las teorías del análisis estructural clásico establecidas mediante las hipótesis de Euler-Bernoulli y que servirán como base para que más adelante se presente el desarrollo teórico de la analogía de la fuerza. Además, se presentan los conceptos del amortiguamiento estructural y la forma de incorporarlos en el análisis dinámico de estructuras mediante el amortiguamiento de Rayleigh. Finalmente, se presentan los conceptos de matriz exponencial y el método del espacio estado.

2.2 Bases teóricas

2.2.1 Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones del movimiento establecen las relaciones básicas entre los parámetros de respuesta básicos, como los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. A continuación, se muestra esta y las matrices asociadas, solo para el caso de tres grados de libertad, aunque las ecuaciones mostradas son generales (Wong & Yang, 1999a; Zhao & Wong, 2006a).

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{a}_g$$

En estas ecuaciones, a continuación, se muestran las matrices de masas, amortiguamiento y matriz de rigidez.

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{21} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{21} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Principio del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual es una expresión que liga el trabajo desarrollado por las fuerzas externas y los esfuerzos desarrollados dentro de un cuerpo ante la acción de un campo de desplazamientos virtual, que induce un estado de deformaciones virtuales dentro de un sólido deformable arbitrario. A continuación, se muestra el principio del trabajo virtual.

$$\int_V \sigma \delta \varepsilon dv + \int_V \tau \delta \gamma dv = \int_{\partial V} q \delta u ds + \sum_i p_i \Delta_i$$

Donde:

σ : Esfuerzos normales

τ : Esfuerzos cortantes

q : Cargas externas

$\delta \varepsilon$: Deformación unitaria normal virtual

$\delta \gamma$: Deformación unitaria cortante virtual

δu : Desplazamiento virtual

Es importante tener en cuenta que el principio del trabajo virtual es equivalente a las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo deformable.

2.2.3 Teoría de Euler-Bernoulli

La teoría de Euler-Bernoulli establece entre sus hipótesis que, las secciones son planas y ortogonales al eje neutro antes y después de la deformación, por lo que los esfuerzos de corte son iguales a cero. Con esta consideración, el principio del trabajo virtual queda de la siguiente forma.

$$\int_{\partial V} q \delta w ds = \int_V \sigma \delta \varepsilon dv$$

Además, considerando que es válida la ley de Hooke, que establece la proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones, se tiene:

$$\sigma = E \varepsilon$$

La deformada en una viga producto de la aplicación de cargas externas produce una función de x , la curvatura, es uno de los parámetros más importantes de esta función deformada, la que puede obtenerse de la siguiente expresión:

$$k = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$$

En el caso de una teoría elástica lineal de primer orden, puede considerarse que el cuadrado de la pendiente es igual a cero, por lo que se tiene la siguiente expresión simplificada para la curvatura.

$$k = \frac{d^2w}{dx^2}$$

La deformación unitaria longitudinal, producto de la curvatura (k) del eje neutro de la viga puede obtenerse como el producto de la curvatura por la distancia del eje neutro a la fibra de interés (z).

$$\delta\varepsilon = -z\delta k = -z\frac{d^2\delta w}{dx^2}$$

Esta expresión puede ser usada para calcular el esfuerzo longitudinal mediante la siguiente expresión:

$$\sigma = -zE\frac{d^2w}{dx^2}$$

Además, el diferencial del volumen puede expresarse como el producto del área de la sección transversal (A), por el diferencial de longitud de la viga.

$$dv = A dx$$

Sustituyendo el esfuerzo en función del desplazamiento transversal, la deformación unitaria, en función del desplazamiento transversal, y el diferencial de volumen, en función del diferencial de longitud de la viga, se tiene:

$$\int_{\partial v} q\delta w ds = \int_V \left(-zE\frac{d^2w}{dx^2}\right) \left(-z\frac{d^2\delta w}{dx^2}\right) A dx$$

Reescribiendo y admitiendo la posibilidad de la existencia de cargas y momentos puntuales, se tiene la siguiente expresión:

$$\int_L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) dx = \int_{\partial V} q \delta w ds + \sum_i p_i \Delta_i + \sum_i p_i \theta_i$$

En el caso de no existir cargas o momentos puntuales, la expresión anterior tendría la siguiente forma simplificada.

$$\int_L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) dx = \int_{\partial V} q \delta w ds$$

El problema puede reescribirse como, el de encontrar una función $w \in C^2(0, L)$, tal que se cumpla que:

$$\int_L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) dx = \int_{\partial V} q \phi ds,$$

Para toda función $\phi \in C^2(0, L)$.

Aproximación por elementos finitos

Con la finalidad de poder encontrar una al problema de interés, se realiza una partición del dominio.

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = L$$

En el que cada intervalo se denota por $I_n = (x_{n-1}, x_n)$, y su longitud o recorrido por $h_n = x_n - x_{n-1}$, el diámetro de la malla se define como $h = \max\{h_n\}$.

Así, el problema puede ser reescrito como, encontrar un $w_h \in P^3(0, L)$, tal que:

$$\int_L EI \left(\frac{d^2 w_h}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \phi_h}{dx^2} \right) dx = \int_{\partial V} q \phi_h ds,$$

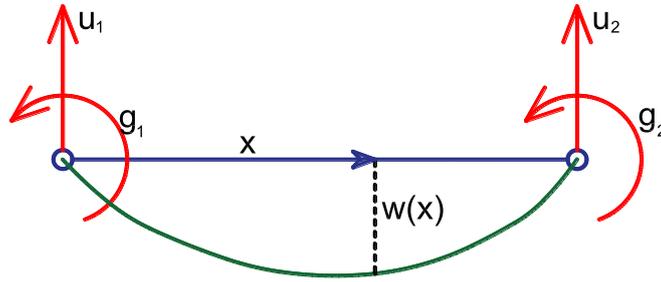
Para toda $\phi_h \in P^3(0, L)$, donde:

$$P^3(0, L) = \{v: v|_{I_n} = P^3\}$$

Ahora, se hará una aproximación del desplazamiento transversal w en un punto interior de un elemento arbitrario producido por la partición del dominio, para esto remítase a la Figura 1. De esta figura, se observa que es posible determinar mediante funciones de interpolación, los valores de desplazamiento transversal en un punto dentro del elemento, en función de los valores nodales de la función y sus derivadas, a las que en este trabajo se llaman, deflexiones y rotaciones, respectivamente.

Figura 1:

Desplazamiento transversal en función de los valores nodales.



$$w(x) = u_1 H_1 + u_2 H_3 + g_1 H_2 + g_2 H_4 = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} u_1 \\ g_1 \\ u_2 \\ g_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{u}$$

Aunque en este punto se desconocen las funciones de interpolación usadas en el desarrollo propuesto, es claro que estas deberán ser, al menos, polinomios de grado tres, pues de otra forma la segunda derivada producirá un polinomio constante o cero, para polinomios de grado dos o grado uno respectivamente.

Además, como se están interpolando tanto desplazamientos como giros, las condiciones que deberán cumplir están asociadas no solo a la función, sino también a sus derivadas.

Para el caso de la función de interpolación H_1 , esta deberá cumplir que, evaluada en el extremo izquierdo, su valor deberá ser igual a la unidad, mientras que, en el extremo derecho, este valor deberá ser igual a cero. Además, las derivadas en los extremos deberán ser iguales a cero, es decir:

$$H_1(0) = 1, \quad H_1(L) = 0, \quad H'_1(0) = 0, \quad H'_1(L) = 0$$

Con la finalidad de simplificar los cálculos, se prefiere el uso de coordenadas naturales en todas las derivaciones presentadas, con esto en mente, las condiciones que deberá satisfacer el polinomio de grado tres buscado serán los siguientes:

$$H_1(-1) = 1, \quad H_1(1) = 0, \quad H'_1(-1) = 0, \quad H'_1(1) = 0$$

Es fácil observar que la derivada del polinomio buscado deberá tener la forma indicada a continuación:

$$H'_1(\xi) = c(1 + \xi)(1 - \xi) = c(1 - \xi^2)$$

Esta se ha deducido rápidamente considerando que las derivadas deberán tener valor cero en los extremos. Ahora, integrando la expresión anterior, se obtiene la forma del polinomio buscado.

$$H_1(\xi) = c \left(\xi - \frac{1}{3} \xi^3 \right) + d$$

Imponiendo las dos condiciones restantes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$H_1(-1) = -\frac{2}{3}c + d = 1$$

$$H_1(1) = \frac{2}{3}c + d = 0$$

La solución de este sistema conduce a los coeficientes buscados, y a la función de interpolación buscada.

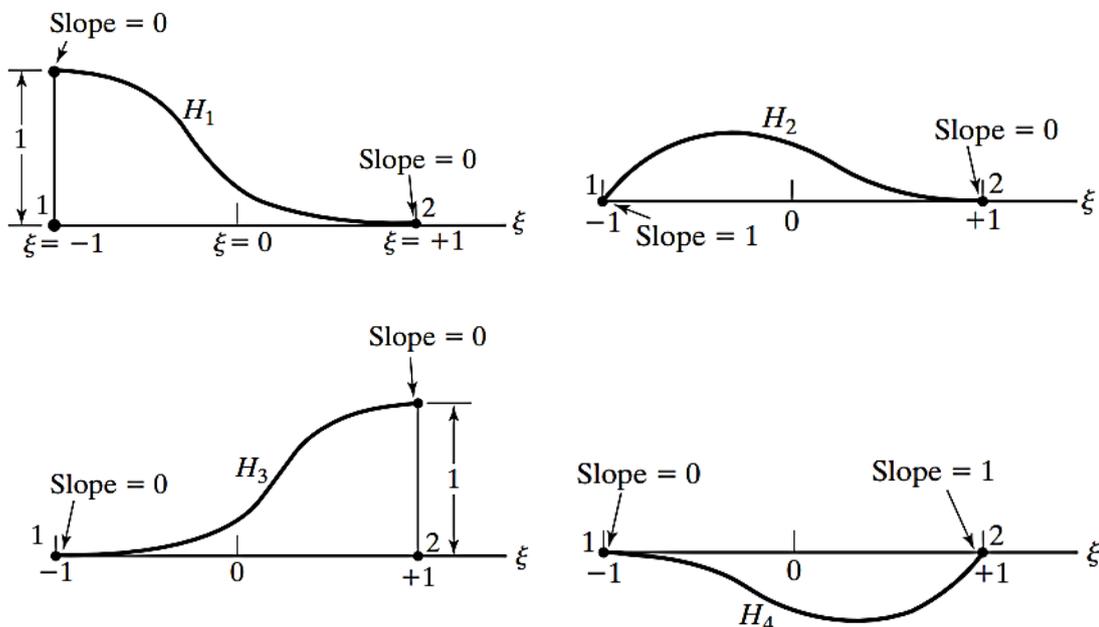
$$2d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{3}{4}$$

$$H_1(\xi) = -\frac{3}{4} \left(\xi - \frac{1}{3} \xi^3 \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3)$$

En la Figura 2 se aprecia una grafico de la función de interpolación encontrada, además, también se muestran las otras tres funciones de interpolación usadas.

Figura 2:

Funciones de interpolación de desplazamientos transversales y giros.



Nota. Fuente (Bonet & Wood, 2008b)

Las condiciones de contorno que deberá cumplir los tres polinomios restantes se muestran a continuación:

$$H_2(-1) = 0, \quad H_2(1) = 0, \quad H'_2(-1) = 1, \quad H'_2(1) = 0$$

$$H_3(-1) = 0, \quad H_3(1) = 1, \quad H'_3(-1) = 0, \quad H'_3(1) = 0$$

$$H_4(-1) = 0, \quad H_4(1) = 0, \quad H'_4(-1) = 0, \quad H'_4(1) = 1$$

Cálculo de la función de forma H_2

$$H_2(\xi) = (1 - \xi)(1 + \xi)(a + b\xi) = a + b\xi - a\xi^2 - b\xi^3$$

$$H'_2(\xi) = b - 2a\xi - 3b\xi^2 \rightarrow H'_2(1) = b - 2a - 3b = 0$$

$$H'_2(-1) = b + 2a - 3b = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$$

$$H_2(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(1 + \xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

Cálculo de la función de forma H_3

$$H'_3(\xi) = a(1 - \xi)(1 + \xi) \rightarrow H_3(\xi) = a\left(\xi - \frac{1}{3}\xi^3\right) + b$$

$$\frac{2}{3}a + b = 1, -\frac{2}{3}a + b = 1 \rightarrow a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$$

$$H_3(\xi) = \frac{3}{4}\left(\xi - \frac{1}{3}\xi^3\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

Cálculo de la función de forma H_4

$$H_4(\xi) = (1 - \xi)(1 + \xi)(a + b\xi) = a + b\xi - a\xi^2 - b\xi^3$$

$$H'_4(\xi) = b - 2a\xi - 3b\xi^2 \rightarrow H'_4(1) = -2a - 2b = 1$$

$$H'_4(-1) = b + 2a - 3b = 0 \rightarrow a = b \rightarrow a = b = -\frac{1}{4}$$

$$H_4(\xi) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \xi) = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

Ahora, se procede a sustituir las aproximaciones realizadas en la formulación discreta, obteniendo:

$$\int_L EI \left(\frac{d^2 \phi_h}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2 w_h}{dx^2} \right) dx = \int_{\partial V} q \phi_h^T ds,$$

$$w_h = \mathbf{N}^T \mathbf{u} \rightarrow \frac{dw_h}{dx} = \frac{d}{dx} \mathbf{N}^T \mathbf{u} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} \mathbf{N}^T \mathbf{u} = \frac{2}{L} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \mathbf{u}$$

$$\xi = 2 \frac{x}{L} - 1 \rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$$

$$\frac{d^2 w_h}{dx^2} = \frac{2}{L} \frac{d}{dx} \left(\frac{dN^T}{d\xi} \right) \mathbf{u} = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 N^T}{d\xi^2} \mathbf{u}$$

Considerando las mismas funciones de forma para las funciones test, se tiene lo siguiente:

$$\frac{d^2 \phi_h}{dx^2} = \frac{d^2 N^T}{d\xi^2} \mathbf{v}$$

$$\int_{-1}^1 EI \mathbf{v}^T \frac{d^2 N}{d\xi^2} \left(\frac{4}{L^2} \frac{d^2 N^T}{d\xi^2} \mathbf{u} \right) d\xi = \int_{-1}^1 q \mathbf{v}^T \mathbf{N} d\xi$$

Simplificando la expresión obtenida anteriormente y dándole la forma esperada, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{4EI}{L^2} \left(\int_L \frac{d^2 N}{d\xi^2} \frac{d^2 N^T}{d\xi^2} dx \right) \mathbf{u} = \frac{L}{2} \int_l q \mathbf{N} d\xi \rightarrow \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Donde, la función de forma considerada se puede expresar de forma vectorial cuyas componentes son las funciones de forma en coordenadas naturales.

$$\mathbf{N} = \left[\frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \right]$$

La segunda derivada del vector de funciones de forma tiene la siguiente forma en coordenadas naturales.

$$\frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2} = \left(\frac{3}{2}\xi \quad \frac{1}{2}(-1 + 3\xi) \quad -\frac{3}{2}\xi \quad \frac{1}{2}(1 + 3\xi) \right)$$

La matriz de rigidez del sistema puede obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{k} = \frac{4EI}{L^2} \left(\int_{-1}^1 \frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2} \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{d\xi^2} d\xi \right)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores, se encuentra que la matriz de rigidez buscada será la integral del producto de un vector columna por un vector fila, como se muestra a continuación.

$$k = \frac{4EI}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\xi \\ \frac{1}{2}(-1+3\xi) \\ -\frac{3}{2}\xi \\ \frac{1}{2}(1+3\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\xi & \frac{1}{2}(-1+3\xi) & -\frac{3}{2}\xi & \frac{1}{2}(1+3\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

Desarrollado el producto del vector columna y el vector fila se obtiene una matriz de 4x4 con las entradas que se muestran a continuación.

$$k = \frac{4EI}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{4}\xi(-1+3\xi) & -\frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{4}\xi(1+3\xi) \\ \frac{3}{4}\xi(-1+3\xi) & \frac{1}{4}(-1+3\xi)^2 & -\frac{3}{4}\xi(-1+3\xi) & \frac{1}{4}(-1+9\xi^2) \\ -\frac{9}{4}\xi^2 & -\frac{3}{4}\xi(-1+3\xi) & \frac{9}{4}\xi^2 & -\frac{3}{4}\xi(1+3\xi) \\ \frac{3}{4}\xi(1+3\xi) & \frac{1}{4}(-1+9\xi^2) & -\frac{3}{4}\xi(1+3\xi) & \frac{1}{4}(1+3\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi$$

Como se puede observar del resultado obtenido, los integrando de cada uno de los componentes encontrados son polinomios, por lo que la integración explícita y exacta es posible, desarrollando cada termino se obtiene el siguiente resultado.

$$k = \frac{4EI}{L^2} \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & -3 & 3/2 \\ 3/2 & 2 & -3/2 & 1/2 \\ -3 & -3/2 & 3 & -3/2 \\ 3/2 & 1/2 & -3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, acomodando los términos adecuadamente se obtiene la conocida matriz de rigidez de un elemento barra.

$$K = \begin{pmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{pmatrix}$$

El otro termino que deberá calcularse de forma explícita es el termino de fuerzas o termino no homogéneo. Esta se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$f = \int_L qN ds = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 q \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\ \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{pmatrix} d\xi$$

Existen casos especiales, como cuando la carga transversal es constante o si esta tiene alguna variación conocida de antemano. En estos casos, es posible realizar la integración sobre el elemento.

2.2.4 Amortiguamiento estructural

De la observación cotidiana de la naturaleza se puede observar que cuando un sistema estructural está en movimiento, este movimiento no se sostiene de forma perpetua, sino que se va aminorando de forma más o menos gradual en el tiempo, debido a los mecanismos propios del ensamble. A esta propiedad se le conoce como amortiguamiento estructural.

Así, puede decirse que el amortiguamiento estructural es la propiedad de todo sistema estructural que consiste en la capacidad de este de ir disipando energía con el paso del tiempo y provocar así que el movimiento impuesto por una carga externa vaya aminorándose con el paso del mismo hasta cesar por completo.

La disipación de energía de un sistema estructural tiene diversas fuentes, entre las más comunes y frecuentes está la fricción interna que existe en los componentes del mismo. Conviene aclarar que cuando una estructura está en movimiento existe fricción dentro del material y del ensamble, lo que hace que la energía se disipe en forma de calor (Chopra, 2020). Además de esta, existe también una fuente de disipación producida por la fricción entre la interfaz sistema estructural y componentes no estructurales. Al igual que la fricción interna, este mecanismo provoca la liberación de la energía en forma de calor (Chopra, 2020).

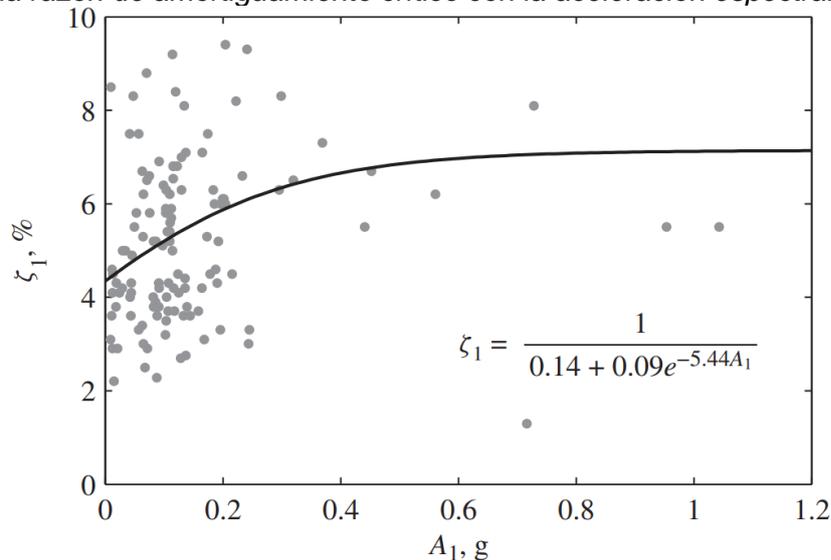
Es importante aclarar que, hasta este punto, las fuentes de disipación de energía se dan a cualquier magnitud del movimiento, ya sean movimientos moderados o severos; sin embargo, cuando los movimientos presentes son severos, el sistema estructural empieza a experimentar otros fenómenos asociados con el daño que generan nuevas fuentes de disipación de energía, esto ocurre cuando se han alcanzado los límites de fluencia de los materiales.

También existen otras posibles fuentes de disipación de energía, aquella generada por la incorporación de dispositivos de disipación de energía adicionales al sistema estructural, estos sistemas provocarán un gasto de energía en forma de calor diferente a los mencionados anteriormente. Otra fuente de disipación de energía adicional se da en la interacción suelo estructura ya que durante la ocurrencia de este fenómeno existe una disipación de energía en forma de radiación hacia el suelo que es difícil de cuantificar de manera específica.

En la práctica actual de la ingeniería estructural, es posible incorporar la disipación de energía producida por la fluencia de los materiales mediante la incorporación de modelos constitutivos no lineales de los materiales (Chopra, 2020). De igual forma es posible incorporar la disipación de energía producida por dispositivos externos, como disipadores de energía, mediante la incorporación de modelos de comportamiento no lineal que simulan estos mecanismos; sin embargo, la disipación de energía del sistema debido a la fricción interna y a la fricción ocurrida entre el sistema estructural y los componentes no estructurales es difícil de incorporar de manera explícita, por lo que se hace conveniente acumular estas fuentes de disipación de energía y tratar de representarlas de forma práctica mediante la incorporación del coeficiente de amortiguamiento viscoso que aparece en la ecuación del movimiento.

Figura 3:

Variación de la razón de amortiguamiento crítico con la aceleración espectral.



Nota. Fuente (Bernal et al., 2015)

De acuerdo con los datos proporcionados por Bernal et al. (2015) el amortiguamiento asociado al primer modo de vibración vari en función de la intensidad del movimiento sísmico, yendo desde valores bajos para movimientos con un *pga* pequeño hasta valores

más o menos constantes para valores de p_{ga} mayores, sin llegar tales valores de p_{ga} a provocar la fluencia de los materiales.

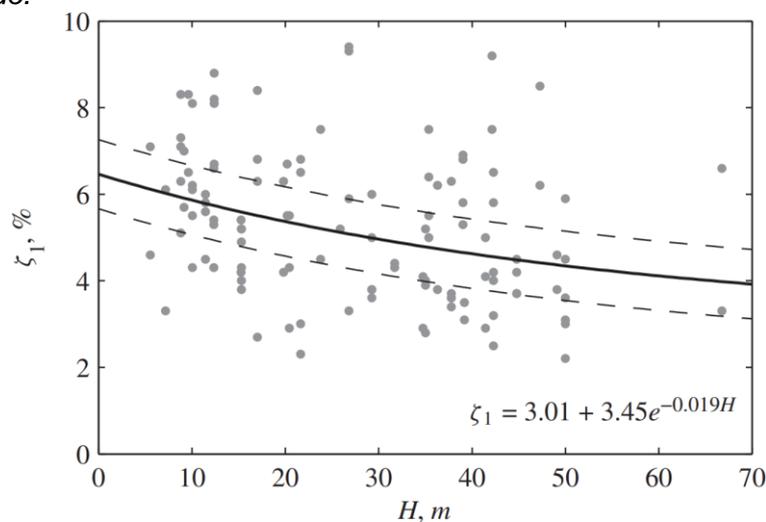
En la **Figura 3** se aprecia un gráfico presentado de Bernal et al (2015), que relaciona la razón de amortiguamiento crítica (ζ) contra la ordena espectral evaluada para el periodo fundamental de la estructura $A_1=A(T_1)$.

De este grafico se puede apreciar que, en el caso de estructuras de concreto armado, la razón de amortiguamiento critico varia desde un mínimo de alrededor de 4%, para movimientos muy leves hasta valores de alrededor de 6.5% para movimientos más fuertes, sin que este valor sea tal que provoque la fluencia de los materiales.

Además de haberse encontrado que la razón de amortiguamiento critico varía en función de la intensidad del movimiento del suelo, de acuerdo con Bernal et al. (2015), se ha encontrado que este parámetro también presenta una variación significativa con la altura de la edificación.

Figura 4:

Variación de la razón de amortiguamiento crítico con la altura de una edificación de concreto armado.



Nota. Fuente (Bernal et al., 2015)

En la **Figura 4** se muestra la variación que presenta la razón de amortiguamiento critico contra la altura de la edificación. Como puede apreciarse de este gráfico, existe una gran dispersión entre las mediciones realizadas para la primera forma de modo; sin embargo, el citado autor a sugerido una variación negativa, que puede entenderse en términos de rigidez, ya que a medida que la altura de una edificación se incrementa, la rigidez lateral de la misma disminuye, por lo que puede entenderse que existe una relación directa entre la razón de amortiguamiento y la rigidez lateral del sistema estructural.

2.2.4.1 Amortiguamiento de Rayleigh

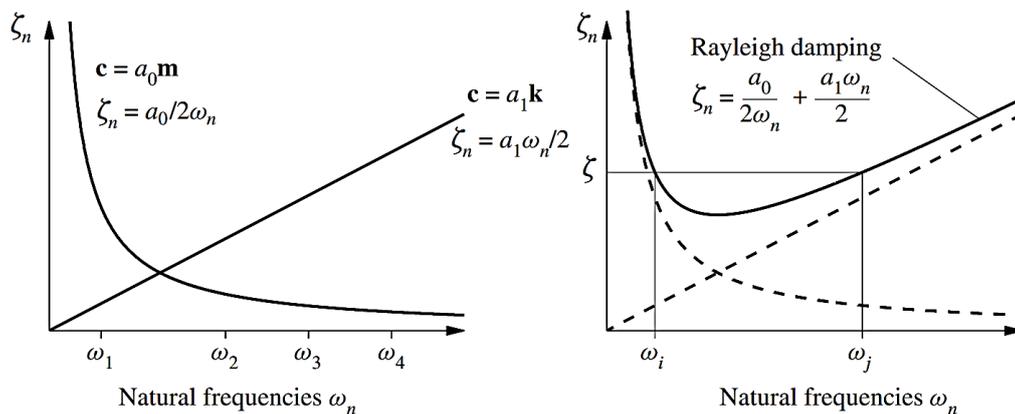
Los datos medidos en campo, mostrados en la sección anterior, parecían indicar que existe una relación positiva entre la razón de amortiguamiento crítico y la rigidez lateral de la estructura, por lo que parece razonable establecer la siguiente relación:

$$C = a_1 K$$

Es decir, que la matriz de amortiguamiento debe ser proporcional a la matriz de rigidez, así, cuando la edificación es mayor cantidad de pisos, esta posee menor rigidez, por lo que el amortiguamiento es menor, mientras que, si la edificación tiene menor cantidad de pisos, su rigidez es mayor, por lo que se espera que su amortiguamiento sea mayor.

Figura 5:

Variación de la razón de amortiguamiento crítico con la frecuencia del sistema estructural.



Nota. Fuente (Chopra, 2020).

Cuando se asume esta relación entre la matriz de amortiguamiento y la matriz de rigidez, se obtiene que la razón de amortiguamiento varía de forma lineal con la frecuencia cíclica, de la siguiente manera.

$$\zeta_n = a_1 \frac{\omega_n}{2}$$

Esto significa que el amortiguamiento de las formas de modo superiores se incrementa de forma lineal y desmesurada. Esto podría interpretarse diciendo que las formas de modo superiores verán sus efectos aplacados en poco tiempo, debido a los elevados niveles de amortiguamiento.

Aunque esta relación es bastante simple, y por tanto conveniente para el análisis estructural, de acuerdo con Chopra (2020), mediciones experimentales realizadas en estructuras de concreto armado, sugieren que el amortiguamiento modal es casi constante

para todas las formas modales, por lo que esta expresión no coincide con las observaciones experimentales.

Otra forma de expresar de forma práctica la matriz de amortiguamiento de un sistema estructura es indicando que esta es proporcional a la masa del sistema, es decir:

$$C = a_0 M$$

Esta expresión resulta ser aún más simple que la relación hipotetizada anteriormente, dando como resultado la siguiente expresión que vincula la razón de amortiguamiento crítico con las frecuencias de los modos de vibración:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2\omega_n}$$

A diferencia de la expresión anterior, esta relación indica que la razón de amortiguamiento es predominante para las frecuencias más bajas, mientras que este valor decrece abruptamente para frecuencias más elevadas. Esto puede interpretarse como una forma de dar mayor importancia a los modos de vibración asociados con mayores frecuencias.

En la **Figura 5** se puede apreciar la dependencia entre la razón de amortiguamiento crítica y las frecuencias asociadas con los distintos modos de vibración de una estructura.

Una mejor forma de abordar el problema de la matriz de amortiguamiento es mediante la combinación de ambos métodos. Tal combinación recibe a menudo el nombre de matriz de amortiguamiento de Rayleigh o simplemente amortiguamiento de Rayleigh.

$$C = a_0 M + a_1 K$$

Ahora la cuestión es cómo determinar los coeficientes de combinación asociadas a la matriz de masas y a la matriz de rigidez, para esto se hará uso de la ecuación del movimiento.

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{a}_g$$

Ahora, considerando que el vector de desplazamientos se puede escribir en términos de una nueva base, y resulta conveniente la elección de la base formada por los vectores modales, se tiene que:

$$X = \sum_{n=1} q_n \Phi_n$$

Sustituyendo este desarrollo en la ecuación del movimiento, se tiene la siguiente expresión:

$$M \left(\sum_{n=1} q_n \Phi_n \right) + C \left(\sum_{n=1} \dot{q}_n \Phi_n \right) + K \left(\sum_{n=1} q_n \Phi_n \right) = -MJ\ddot{a}_g$$

Multiplicando por la izquierda con el vector Φ_r^T , y considerando las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración, se tiene lo siguiente:

$$\Phi_r^T \left(\sum_{n=1} \ddot{q}_n M \Phi_n \right) + \Phi_r^T \left(\sum_{n=1} \dot{q}_n C \Phi_n \right) + \Phi_r^T \left(\sum_{n=1} q_n K \Phi_n \right) = -\Phi_r^T M J \ddot{a}_g$$

$$(\Phi_n^T M \Phi_n) \ddot{q}_n + (\Phi_n^T C \Phi_n) \dot{q}_n + (\Phi_n^T K \Phi_n) q_n = -\Phi_n^T M J \ddot{a}_g$$

Valido para las n formas de modo de la estructura analizada. Es decir, se han obtenido n ecuaciones diferenciales desacopladas, que pueden ser resueltas por los métodos conocidos para la integración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Considerando que el producto de las matrices y vectores presentados arrojan matrices diagonales, se tiene que:

$$\Phi_n^T M \Phi_n = M_n$$

$$\Phi_n^T C \Phi_n = C_n$$

$$\Phi_n^T K \Phi_n = K_n$$

Dividiendo cada ecuación diferencial acoplada por la masa modal correspondiente a la forma de modo, se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{q}_n + \frac{(\Phi_n^T C \Phi_n)}{(\Phi_n^T M \Phi_n)} \dot{q}_n + \frac{(\Phi_n^T K \Phi_n)}{(\Phi_n^T M \Phi_n)} q_n = -\frac{\Phi_n^T M J \ddot{a}_g}{(\Phi_n^T M \Phi_n)}$$

Ahora, tomando en cuenta que se está haciendo uso del amortiguamiento de Rayleigh.

$$C = aM + bK$$

Y sustituyendo en la ecuación desacoplado, se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{q}_n + \left(a + b \frac{(\Phi_n^T K \Phi_n)}{(\Phi_n^T M \Phi_n)} \right) \dot{q}_n + \frac{(\Phi_n^T K \Phi_n)}{(\Phi_n^T M \Phi_n)} q_n = -\frac{\Phi_n^T M J \ddot{a}_g}{(\Phi_n^T M \Phi_n)}$$

Definiendo el cociente de la rigidez lateral modal y la masa modal como la frecuencia modal:

$$\omega_n^2 = \frac{(\Phi_n^T K \Phi_n)}{(\Phi_n^T M \Phi_n)}$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n + (a + b\omega_n^2)\dot{\mathbf{q}}_n + \omega_n^2\mathbf{q}_n = -\frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{J} \ddot{\mathbf{a}}_g}{(\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n)}$$

Tomando en cuenta que la forma de la ecuación modal desacoplada tiene la siguiente forma, en función de la frecuencia cíclica modal y la razón de amortiguamiento modal.

$$\ddot{q}_n + 2\beta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = -\frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{J} \ddot{\mathbf{a}}_g}{(\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n)}$$

Se obtiene la expresión que relacionan los coeficientes de combinación lineal de las matrices de masas y de rigidez, con la frecuencia cíclica y la razón de amortiguamiento modal, es decir:

$$a_0 + a_1\omega_n^2 = 2\beta_n\omega_n$$
$$a_0\left(\frac{1}{2\omega_n}\right) + a_1\left(\frac{\omega_n}{2}\right) = \beta_n$$

Resulta evidente que al tener dos variables basta con seleccionar dos condiciones para poder tener un sistema compatible determinado. Estas condiciones pueden ser elegidas para cualquiera dos formas de modo diferentes. Si se eligen dos formas de modo diferentes, los coeficientes que determinan la matriz de amortiguamiento de Rayleigh vienen dada por:

$$a_0 = \frac{2\omega_1\omega_2(\beta_2\omega_1 - \beta_1\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$
$$a_1 = \frac{2(\beta_1\omega_1 - \beta_2\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

Es importante comentar que en la gran mayoría de las aplicaciones prácticas se suelen seleccionar los valores de la razón de amortiguamiento asociadas con las primera y segunda formas de modo de la estructura. Además, de acuerdo con las mediciones experimentales realizadas, las razones de amortiguamiento asociadas a formas de modo diferentes son aproximadamente constantes. En este caso los coeficientes de combinación se simplifican de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{2\omega_1\omega_2\beta}{\omega_1 + \omega_2}, \quad a_1 = \frac{2\beta}{\omega_1 + \omega_2}$$

2.2.5 Matriz exponencial

Numerosos problemas surgidos en la práctica de las ciencias y de la ingeniería poseen la siguiente forma general.

$$\dot{x} = ax$$

Donde, x , es una función del tiempo, a es una constante y f es una función que usualmente depende del tiempo. La solución de una ecuación diferencial de una dimensión como la presentada es relativamente simple y consiste de la función exponencial.

$$x(t) = e^{at} + C$$

Existen sistemas de ecuaciones diferenciales lineales que tienen la forma de sistemas de ecuaciones de una dimensión, es decir:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

Donde, \mathbf{X} , es un vector n -dimensional que contiene n funciones dependientes del tiempo, mientras que \mathbf{A} , es una matriz cuadrada constante de orden n .

En este punto resulta clara la analogía entre este sistema de ecuaciones diferenciales y la ecuación diferencial de una dimensión. Además del gran parecido entre estas ecuaciones, se puede pensar que las soluciones tengan también la misma forma, por lo que la posible solución de este sistema tendría la forma:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

Sin embargo, tal expresión no está claramente definida, por lo que recurriendo a la literatura matemática se encuentra la siguiente definición:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4t^4 + \dots$$

Esta expresión resulta ser una función de una variable, específicamente la variable temporal, por lo que es posible obtener la derivada de la misma. El procedimiento estándar arroja la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^4t^3 + \dots$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}) = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4t^4 + \dots)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

Es decir, la matriz exponencial de una matriz cuadrada resulta ser otra matriz cuadrada definida en términos de las potencias de la matriz original, y tal como se ha mostrado líneas arriba, esta matriz guarda características similares a la función exponencial de una dimensión.

Por la propiedad definida previamente, puede observarse que, en efecto, el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto tiene una solución en forma de matriz exponencial y definida a través de la serie de Taylor de una dimensión.

2.2.6 Método del espacio estado

El método del espacio estado consiste en convertir un sistema de ecuaciones diferenciales de alto orden y de dimensión “q” en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, pero usualmente de mayor dimensión “r”, donde $r > s$. Este proceso se logra mediante la incorporación de nuevas variables que sustituyen órdenes de diferenciación sucesivos.

Este método es especialmente útil en la solución de la ecuación de movimiento, presentada anteriormente y reescrita aquí de forma general y de dimensión “n”:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{a}_g$$

Como se puede apreciar, esta es una ecuación diferencial de segundo orden; sin embargo, al considerar un orden de diferenciación como una variable independiente, es decir:

$$Y = \dot{X}$$

Es posible reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, de dimensión n, por un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión 2n, pero de primer grado, para esto, el proceso da inicio sustituyendo este cambio de variable en la ecuación diferencial original, y despejando la derivada temporal de la nueva ecuación.

$$M\dot{Y} + CY + KX = -MJ\ddot{a}_g$$

$$\dot{Y} = -M^{-1}KX - M^{-1}CY - J\ddot{a}_g$$

$$\dot{X} = Y$$

Estas ecuaciones pueden ser reescritas convenientemente considerando una notación matricial y vectorial, colocando las variables originales, la posición **X** y la velocidad **Y**, como los elementos de un vector columna.

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{J} \end{bmatrix} \ddot{a}_g$$

Con estas consideraciones se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, pero de dimensión “2n”, que se muestra a continuación.

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{AZ} + \mathbf{f}$$

Donde, la variable principal pasa a ser la variable de estados siguiente:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

La matriz que vincula la derivada temporal de esta variable frente a la misma variable es la siguiente matriz cuadrada de orden “2n”.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el termino homogéneo viene dado por el vector columna de 2n filas compuesto de n filas nulas y n filas que contienen el impacto de la aceleración del terreno en la aceleración de los grados de libertad del sistema estructural.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{J} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}_g$$

Una vez convertida la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, es posible multiplicar la ecuación resultante por una matriz cuadrada exponencial.

$$(\dot{\mathbf{Z}}e^{-\mathbf{A}t} - \mathbf{AZ}e^{-\mathbf{A}t}) = \mathbf{f}e^{-\mathbf{A}t}$$

El lado izquierdo de la ecuación diferencial es el desarrollo de la derivada temporal de un producto matricial, por lo que resulta conveniente sustituir esta en la ecuación diferencial, obteniendo lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{z}e^{-\mathbf{A}t}) = \mathbf{f}e^{-\mathbf{A}t}$$

Finalmente, mediante integración se obtiene la solución del sistema de ecuaciones diferenciales en función de las condiciones iniciales del sistema considerado.

$$\mathbf{z}e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{z}_0e^{-\mathbf{A}t_0} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}e^{-\mathbf{A}s} ds$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0e^{\mathbf{A}(t-t_0)} + e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t \mathbf{f}e^{-\mathbf{A}s} ds$$

Donde, Z_0 , es el vector de espacio estados al inicio de la integración, y conocido; t_0 , es el tiempo inicial de integración.

2.3 Marco conceptual

2.3.1 Respuesta lineal

La respuesta no lineal viene definida en contraposición a la respuesta lineal, por lo que resulta conveniente la definición de un sistema de respuesta lineal. Un sistema estructural posee una respuesta lineal, cuando los materiales usados en su estructuración presentan una relación lineal, es decir, existe proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones. Además, la linealidad requiere, necesariamente, que la configuración inicial y deformada sean muy parecidas, de tal forma que no aparezcan términos geométricos de segundo orden (Nica et al., 2022).

2.3.2 Desplazamientos elásticos

Los desplazamientos elásticos son aquellos que, en el caso monotónico, no exceden los desplazamientos de fluencia, es decir, son aquellos que hacen valida la hipótesis de Hook. En este estado, se cumple la proporcionalidad entre fuerzas y desplazamientos, es decir:

$$F = Kx$$

Donde, F , es la fuerza aplicada al sistema o elemento estructural; K , es la rigidez o matriz de rigidez del sistema o elemento; x , es el desplazamiento elástico (Wong & Wang, 2007d).

2.3.3 Respuesta no lineal

Se dice que un material, o sistema estructural, responde de manera no lineal, cuando la relación existente entre los esfuerzos inducidos por el conjunto de cargas externas y las deformaciones unitarias asociadas no obedecen la ley Hooke. Este tipo de comportamiento ocurre cuando las fuerzas aplicadas a un sistema estructural exceden su esfuerzo de fluencia (Wong & Wang, 2003a).

2.3.4 Desplazamientos inelásticos

Los desplazamientos inelásticos son aquellos desplazamientos que han superado el límite de desplazamientos que definen el comportamiento elástico de un elemento estructural o de un sistema estructural. Estos desplazamientos no se pueden recuperar, una vez ocurridos, pues el sistema de fuerzas externas provoca un reacomodo de la estructura interna de los materiales, a nivel molecular (Bagheri et al., 1994).

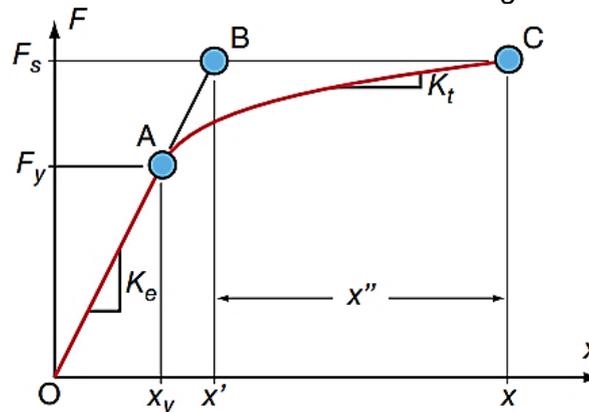
CAPÍTULO III: MÉTODO DE LA ANALOGÍA DE LA FUERZA

3.1 Analogía de la fuerza

Cuando un sistema estructural está sometido a un conjunto de fuerzas externas, la respuesta estructural de tal sistema es lineal hasta cierto límite, marcado como el punto A en la **Figura 6**. Esto implica que las fuerzas externas se obtienen como el producto de la rigidez inicial y el desplazamiento elástico; sin embargo, a medida que las fuerzas externas se incrementan, esto cambia.

Figura 6:

Comportamiento no lineal de un elemento estructural de un grado de libertad.



Nota. Fuente (Zhao & Wong, 2006a)

Como se puede apreciar de la misma figura, a medida que las fuerzas externas se incrementan, la relación entre estas y los desplazamientos asociados ya no guardan una relación lineal, sino una relación que en muchos casos es bastante compleja. En el caso analizado, este proceso ocurre en el tramo AC. Esto obliga a reescribir las ecuaciones del movimiento de forma más compleja, considerando que el término de fuerza es una función no lineal de los desplazamientos, de la siguiente forma (Chopra, 2020).

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + f(X) = -M\ddot{g}(t)$$

Sin embargo, se puede reducir drásticamente la complejidad del problema anterior al observar de la **Figura 6** que los niveles de fuerza asociados con el intervalo de comportamiento no lineal, es decir, los niveles de fuerza en el intervalo AC pueden obtenerse como el producto de la matriz de rigidez elástica y la diferencia entre el desplazamiento total y el desplazamiento inelástico (Zhao & Wong, 2006a).

Par observar esto considere que un sistema estructural con la curva de comportamiento mostrada en la **Figura 6** es cargada pasando el límite elástico en A, y llegando hasta el punto B, con un valor de fuerza total F_s y un desplazamiento total x . En este punto en particular se llama desplazamiento elástico (x') al desplazamiento asociado al punto de intersección del nivel de fuerza F_s y la tangente inicial y se le llamará desplazamiento inelástico a la distancia existente entre x' y x , así se obtienen las siguientes relaciones (Wong & Yang, 2002a):

$$x = x' + x''$$

$$x' = x - x''$$

Ahora, de la misma figura se puede observar que es posible llegar al nivel de fuerza F_s considerado, tomando solo la rigidez elástica y el desplazamiento elástico asociado por medio de la siguiente expresión.

$$F_s = K_e x'$$

Y tomando en cuenta las expresiones anteriores, se obtiene una expresión que permite considerar el mismo nivel de fuerza en función de los desplazamientos totales e inelásticos.

$$F_s = K_e (x - x'')$$

Finalmente, si se sustituye esta expresión en la ecuación del movimiento planteada inicialmente, obteniéndose una ecuación del movimiento no lineal mucho más simplificada, pues la matriz de rigidez inicial es siempre constante (Wong & Wang, 2003b).

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K_e(x - x'') = -M\ddot{g}(t)$$

Las ideas presentadas forman en su conjunto lo que actualmente se denomina en la literatura técnica como la analogía de la fuerza. Estas mismas ideas se pueden extender de forma directa a un análisis con varios grados de libertad.

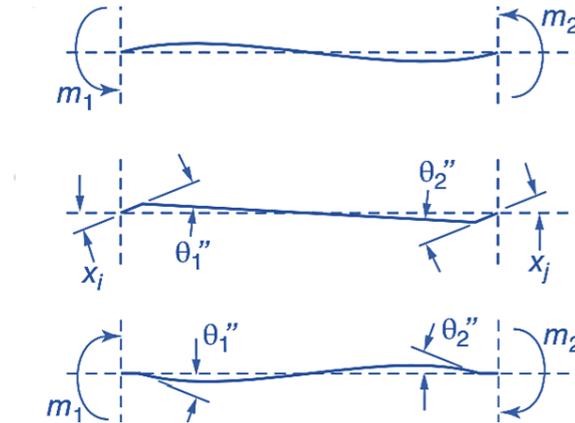
3.2 Analogía de la fuerza a múltiples grados de libertad

Con la finalidad de derivar un conjunto de relaciones matemáticas entre los giros inelásticos, los desplazamientos totales del sistema y el conjunto de fuerzas externas, considere un sistema estructural sometido a un conjunto de fuerzas externas, que provocan un estado de deformación en la misma. Este estado puede ser obtenido a partir del estado de deformación de cada uno de los elementos individuales que lo componen, como las vigas y columnas.

Así, cuando las fuerzas externas consideradas sobre un elemento viga columna, como el mostrado en la **Figura 7**, provocan que las deformaciones sobrepasen el límite elástico, estas deformaciones tendrán una componente inelástica de deformaciones, es decir, deformaciones que no se recuperan al cesar la carga actuante.

Figura 7:

Elemento viga sometido a momentos que exceden el momento de fluencia y los giros inelásticos asociados.



Nota. Fuente Li & Wong (2017).

Si se descarga el elemento de manera gradual, se observará que una vez cesadas todas las fuerzas externas, la estructura no retornará a su estado inicial, sino que exhibirá un conjunto de deformaciones remanentes. Es precisamente este estado, a partir del cual comenzará la deducción de las ecuaciones de equilibrio.

Se comenzará anotando que, en un sistema de un grado de libertad, el desplazamiento total tiene dos componentes, una elástica y una inelástica, es decir, una deformación que se recupera una vez terminada la aplicación de las cargas, y una que no desaparece, una vez terminada la carga, a esta se le denomina, deformación remanente. En el caso de un sistema de múltiples grados de libertad, puede escribirse lo siguiente (Wong & Wang, 2003b; Wong & Yang, 2002a):

$$x = x' + x''$$

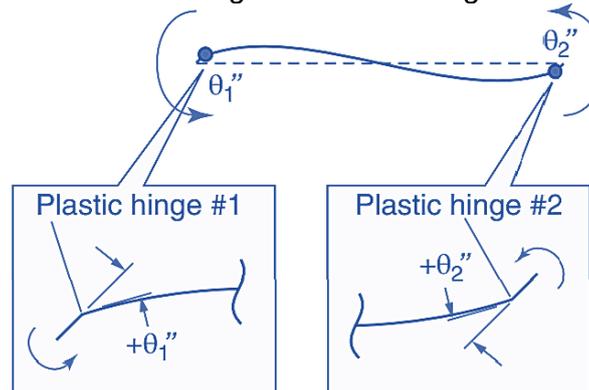
Donde, x' es el vector que contiene los desplazamientos elásticos, mientras que x'' , es el vector que contiene los desplazamientos inelásticos. Además, si el sistema estructural analizado posee n grados de libertad, estos pueden escribirse así:

$$x' = (x'_1 \ x'_2 \ x'_3 \ \dots \ x'_n)^T \quad y \quad x'' = (x''_1 \ x''_2 \ x''_3 \ \dots \ x''_n)^T$$

El método de la analogía de la fuerza consiste en la superposición de dos estados, que sumados nos llevan al estado de deformación inelástico buscado. Para esto se parte del estado deformado. En el caso de pórticos de concreto armado en los que las no linealidades se concentran en los extremos de los elementos, el estado de deformación inelástica estará determinado por los giros inelásticos.

Figura 8:

Giros inelásticos remanentes en una viga sometida a cargas externas.



Nota. Fuente Li & Wong (2017).

Así el primer estado de deformación considerado, es aquel que requiere la eliminación de los giros inelásticos. Las fuerzas requeridas para lograr eliminar tales giros inelásticos serían (Wong & Yang, 2002a):

$$f_R = \begin{Bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{2EI} & \frac{2EI}{2EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^2}{4EI} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\theta''_1 \\ -\theta''_2 \end{Bmatrix} \quad K' = \begin{Bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{2EI} & \frac{2EI}{2EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^2}{4EI} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{Bmatrix}$$

$$f_R = -K'\theta''$$

La aplicación de tales fuerzas, implicará un conjunto de momentos en los grados de libertad correspondientes a los giros inelásticos. Estos momentos pueden obtenerse a través de la siguiente expresión (Wong & Yang, 2002a).

$$m_R = \begin{Bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\theta''_1 \\ -\theta''_2 \end{Bmatrix}$$

$$m_R = -K''\theta''$$

Es claro que un estado de deformaciones en el que los giros inelásticos sean ceros es ficticio, pues es precisamente la existencia de estos giros lo que motiva la investigación. Por lo expuesto, se requiere la aplicación de un conjunto de fuerzas externas que regrese todo al estado anterior.

$$f_a = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v''_1 \\ \theta''_1 \\ v''_2 \\ \theta''_2 \end{Bmatrix}$$

A diferencia del caso anterior, este conjunto de fuerzas externas debe expresarse en función de los desplazamientos inelásticos definidos por el estado de giros inelásticos. Esto puede hacerse considerando la matriz de rigidez elástica asociada a los grados de libertad. Lo que se puede expresar de manera resumida mediante la siguiente expresión.

$$f_a = Kx''$$

Al igual que en el caso anterior, el conjunto de desplazamientos aplicados, provocará un conjunto de momentos flectores en los grados de libertad asociados a los giros inelásticos. Los momentos en estos grados de libertad pueden obtenerse de la siguiente forma (Wong & Yang, 1999b, 2002a):

$$m_p = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v''_1 \\ \theta''_1 \\ v''_2 \\ \theta''_2 \end{Bmatrix}$$

$$m_p = K'^T x''$$

Ahora, es importante observar que, las fuerzas externas aplicadas en un caso y otro deben estar equilibradas, es decir:

$$f_a = -f_R$$

$$Kx'' = K'\theta''$$

Finalmente, se puede establecer una relación entre los desplazamientos inelásticos y los giros inelásticos considerados. Así, se tiene la siguiente expresión (Wong & Yang, 1999b, 2002a):

$$x'' = K^{-1} K' \theta''$$

La superposición de los dos estados de deformación permite estimar los momentos inelásticos asociados a los giros de libertad remanentes del elemento. Así, se tiene la siguiente expresión (Wong & Yang, 1999b):

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{m}_a + \mathbf{m}_p$$

$$\mathbf{m}'' = -\mathbf{K}''\boldsymbol{\Theta}'' + \mathbf{K}'^T\mathbf{x}''$$

$$\mathbf{m}'' = -\mathbf{K}''\boldsymbol{\Theta}'' + \mathbf{K}'^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}'\boldsymbol{\Theta}''$$

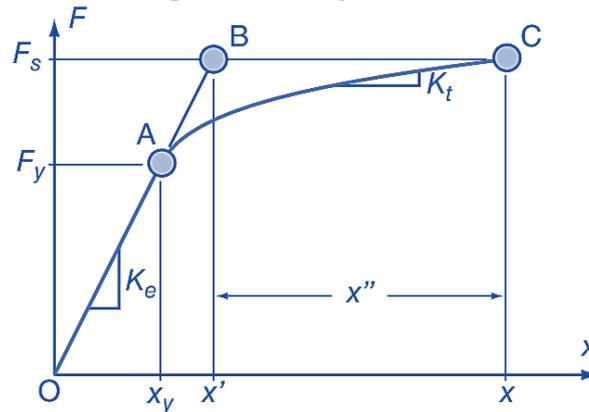
$$\mathbf{m}'' = -(\mathbf{K}'' - \mathbf{K}'^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}')\boldsymbol{\Theta}''$$

En este punto, se toma en consideración que el nivel de fuerza asociado al nivel de desplazamiento inelástico puede ser calculado considerando la rigidez elástica del elemento, tal como se indica en la Figura 9. Así se tiene la siguiente expresión.

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{K}\mathbf{x}'$$

Figura 9:

Nivel de fuerza asociado en el rango inelástico y elástico.



Nota. Fuente Li & Wong (2017).

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')$$

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{K}\mathbf{x}''$$

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{K}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}'\boldsymbol{\Theta}'')$$

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{K}'\boldsymbol{\Theta}''$$

Los momentos aplicados en los giros inelásticos pueden ser obtenidos mediante la superposición de momentos flectores elásticos y momentos flectores inelásticos.

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}'^T\mathbf{x}' - (\mathbf{K}'' - \mathbf{K}'^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}')\boldsymbol{\Theta}''$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}'^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}'') - (\mathbf{K}'' - \mathbf{K}'^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}') \boldsymbol{\Theta}''$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x} - \mathbf{K}'^T \mathbf{x}'' - \mathbf{K}'' \boldsymbol{\Theta}'' + \mathbf{K}'^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}' \boldsymbol{\Theta}''$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x} - \mathbf{K}'^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}' \boldsymbol{\Theta}'' - \mathbf{K}'' \boldsymbol{\Theta}'' + \mathbf{K}'^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}' \boldsymbol{\Theta}''$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x} - \mathbf{K}'' \boldsymbol{\Theta}''$$

A partir de las expresiones encontradas se tiene un sistema de ecuaciones que involucran, tanto los grados de libertad del elemento estructural, como los grados de libertad asociados a los giros inelásticos, estas se presentan a continuación (Li & Wong, 2014):

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{K}' \boldsymbol{\Theta}''$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x} - \mathbf{K}'' \boldsymbol{\Theta}''$$

Este sistema de ecuaciones puede ser reescrito en forma de un sistema de ecuaciones, en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\boldsymbol{\Theta}'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_1 \\ \theta_2 \\ \theta''_1 \\ \theta''_2 \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez asociada a un elemento viga columna que forma un ángulo de noventa grados con respecto del eje X, puede obtenerse mediante la aplicación de las matrices de rotación. Este proceso se muestra a continuación.

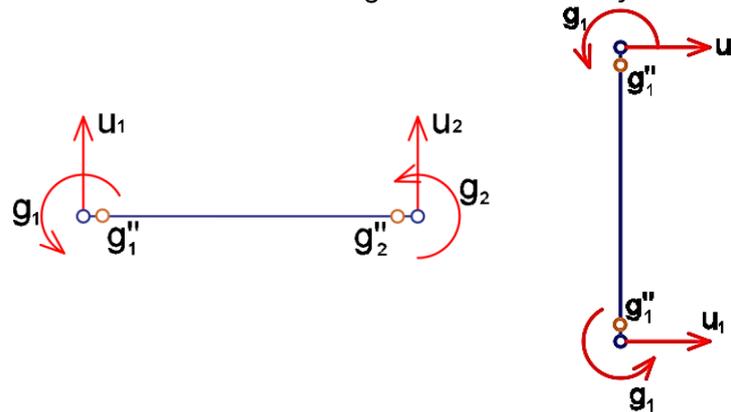
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^* = RKR^T$$

Figura 10:

Grados de libertad asociados al elemento viga-columna con 0° y con un ángulo de 90° .

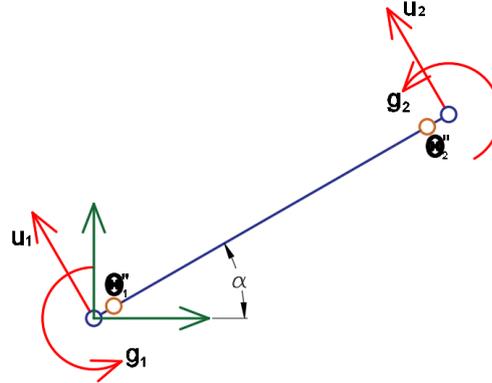


$$K^* = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

3.3 Cambio de coordenadas locales y globales

Con la finalidad de deducir las ecuaciones de equilibrio de la forma más general posible, se buscará la relación entre las matrices de rigidez asociados a los giros inelásticos (θ'') y las fuerzas nodales asociadas, para un sistema de coordenadas locales como globales. Para esto se debe referir a la Figura 11.

Figura 11:
 Fuerzas nodales asociadas a un elemento viga columna con giros inelásticos.



Además, de la sección anterior, se ha podido observar que las fuerzas nodales y los giros inelásticos, en el sistema de coordenadas locales, están relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$f_R^l = -(K')^l \theta''^l$$

Figura 12:
 Fuerzas nodales en un elemento viga columna en coordenadas locales.



$$f_R^l = \begin{bmatrix} 0 \\ T_1 \\ M_1 \\ 0 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta''_1 \\ \theta''_2 \end{bmatrix}$$

Donde los superíndices hacen referencia a que el sistema está establecido en sistema de referencias local. De acuerdo con la figura mencionada, este sistema de referencias estaría coloreado en color rojo. Además, se ha introducido un sistema de referencias diferente del primero, al que se le llamaría, sistema de coordenadas globales. Así, en este nuevo sistema existiría una relación similar al caso local, que se expresa así:

$$f_R^g = -(K')^g \theta''^g$$

Ahora, es posible establecer una relación entre el vector de fuerzas en el sistema local y global, y de la misma forma para el caso de los giros inelásticos y elásticos. A continuación, se muestra tal relación:

$$f_R^g = R^\Delta f_R^l$$

$$\Theta''^g = R^\theta \Theta''^l$$

Donde, las matrices R^Δ y R^θ representan las matrices de rotación de las fuerzas nodales aplicadas y los giros inelásticos aplicados. A continuación, se muestran tales matrices de forma explícita.

$$R^\Delta = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^\Delta f_R^l = -(K')^g R^\theta \Theta''^l$$

$$f_R^l = -(R^\Delta)^T (K')^g R^\theta \Theta''^l$$

Por comparación, se puede observar que:

$$(K')^l = (R^\Delta)^T (K')^g R^\theta$$

Por lo que se obtiene la siguiente expresión, que relaciona la matriz de rigidez en un sistema de coordenadas locales y en un sistema de coordenadas globales (Wong & Yang, 2002a).

$$(K')^g = (R^\Delta)^T (K')^l R^{\theta T}$$

$$(K')^g = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ L & L \\ 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L} & \frac{6EI}{L} \\ -\frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^2}{4EI} \\ \frac{L}{2EI} & \frac{L}{4EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(K')^g = \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{L^2} \operatorname{sen}\alpha & -\frac{6EI}{L^2} \operatorname{sen}\alpha \\ \frac{6EI}{L^2} \operatorname{cos}\alpha & -\frac{6EI}{L^2} \operatorname{cos}\alpha \\ \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} \operatorname{sen}\alpha & -\frac{6EI}{L^2} \operatorname{sen}\alpha \\ \frac{6EI}{L^2} \operatorname{cos}\alpha & -\frac{6EI}{L^2} \operatorname{cos}\alpha \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

3.4 Cambio de coordenadas de la matriz de rigidez elástica

Se dará inicio considerando el sistema de coordenadas locales, mostrado en la Figura 13. En este sistema, es posible establecer las relaciones entre fuerzas nodales y desplazamientos nodales como (Chopra, 2020):

$$\mathbf{F}^{el} = \mathbf{K}^{el} \mathbf{x}^{el}$$

Donde; \mathbf{F}^{el} , \mathbf{x}^{el} , son los vectores de fuerzas y desplazamientos nodales; mientras que, \mathbf{K}^{el} , es la matriz de rigidez. Estas entidades tienen las siguientes formas:

Figura 13: Grados de libertad en coordenadas locales. Fuente: Elaboración propia.

$$\mathbf{F}^{el} = \begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{el} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{el} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

En el caso de un sistema de coordenadas locales, es posible establecer relaciones similares a las obtenidas en el caso de coordenadas locales. Estas expresiones tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{F}^{eg} = \mathbf{K}^{eg} \mathbf{x}^{eg}$$

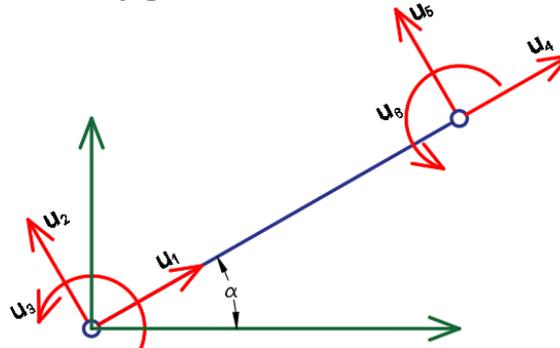
Además, es posible relacionar el vector de fuerzas y de desplazamientos nodales en el sistema de coordenadas globales, con el sistema de coordenadas locales.

$$\mathbf{F}^{eg} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{el}$$

$$\mathbf{x}^{eg} = \mathbf{R}\mathbf{x}^{el}$$

Figura 14:

Sistema de coordenadas locales y globales.



Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones obtenidas para el sistema de coordenadas globales.

$$\mathbf{R}\mathbf{F}^{el} = \mathbf{K}^{eg}\mathbf{R}\mathbf{x}^{el}$$

$$\mathbf{F}^{el} = (\mathbf{R}^T\mathbf{K}^{eg}\mathbf{R})\mathbf{x}^{el}$$

Finalmente, se obtiene la relación entre las matrices de rigidez locales y globales.

$$\mathbf{K}^{el} = \mathbf{R}^T\mathbf{K}^{eg}\mathbf{R}$$

$$\mathbf{K}^{eg} = \mathbf{R}\mathbf{K}^{el}\mathbf{R}^T$$

3.5 Solución de las ecuaciones de equilibrio

El sistema de ecuaciones de equilibrio resultantes involucra tanto los desplazamientos, como giros nodales, esto es, involucran n grados de libertad asociados a tales variables. Además de tales grados de libertad, la incorporación de los giros inelásticos incorpora r grados de libertad asociados a los giros inelásticos. Como ya se ha observado anteriormente tal sistema de ecuaciones puede ser resumido de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ -\boldsymbol{\Theta}'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix}$$

Como se puede apreciar del sistema presentado, se tienen n+2r variables desconocidas; n desplazamientos (\mathbf{x}), r giros inelásticos ($\boldsymbol{\Theta}''$), y r los momentos en las rótulas plásticas (\mathbf{m}); pero sólo se disponen de n+r ecuaciones linealmente independientes, producidas por

el sistema presentado; por lo que será necesario agregar las r condiciones restantes a través de los modelos constitutivos momento rotación inelástica a cada grado de libertad inelástico.

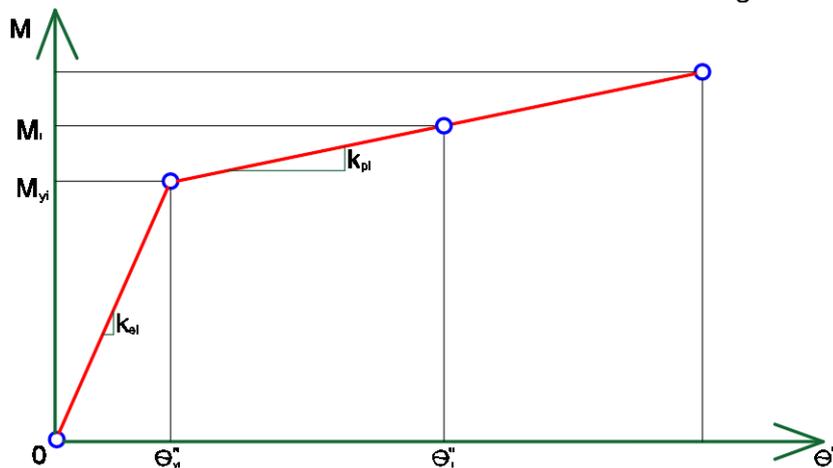
Si se supone un comportamiento bilineal, muy frecuente en las aplicaciones de la mecánica estructural, se puede establecer una relación clara entre los momentos y los giros inelásticos. A continuación, se muestra la expresión vectorial de lo comentado:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_y + \mathbf{K}^p \boldsymbol{\Theta}''$$

En la expresión anterior \mathbf{m}_y representa el vector de momentos de fluencia; mientras que $\boldsymbol{\Theta}''$, representa el vector de giros inelásticos asociados a los grados de libertad inelásticos. Finalmente, \mathbf{k}_p representa la matriz de rigidez posfluencia.

Figura 15:

Diagrama momento rotación inelástica característica de elementos viga-columna.



$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{y1} \\ m_{y2} \\ \vdots \\ m_{yr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{pr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta''_1 \\ \theta''_2 \\ \vdots \\ \theta''_r \end{bmatrix}$$

La sustitución de esta expresión en las ecuaciones de equilibrio encontradas permite obtener un sistema de ecuaciones explícitas de las variables desplazamientos nodales y giros inelásticos, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ -\boldsymbol{\Theta}'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{m}_y + \mathbf{K}^p \boldsymbol{\Theta}'' \end{Bmatrix}$$

Despejando el vector de giros inelásticos, se obtiene la siguiente expresión que permite establecer las variables de interés en función de un conjunto de cargas claramente definidas.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}'' + \mathbf{K}^p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ -\boldsymbol{\Theta}'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{m}_y \end{Bmatrix}$$

3.6 Método del espacio estado en sistemas lineales

Tradicionalmente las ecuaciones del movimiento pueden ser resueltas usando métodos iterativos como el de la aceleración constante, aceleración lineal, o el método de Newmark (Chopra, 2020); sin embargo, existen algunas otras alternativas que pueden resultar siendo más eficientes en términos de cómputo, una de tales alternativas es el método del espacio estado (Erfani & Akrami, 2019).

El método del espacio estado consiste en transformar una ecuación diferencial lineal de segundo orden, como la ecuación del movimiento, en una ecuación diferencial de primer orden, pero de mayor dimensión; que tenga como variables la posición y la velocidad (Wong & Wang, 2007a). Partiendo de la ecuación del movimiento, expresada en forma matricial y de forma general, se tiene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{g}}_{(t)}$$

Haciendo las siguientes consideraciones:

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{K}\mathbf{X} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{g}}_{(t)}$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{X} - \ddot{\mathbf{g}}_{(t)}$$

Reescribiendo estas ecuaciones matriciales en forma matricial, nuevamente, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\ddot{\mathbf{g}}_{(t)} \end{Bmatrix}$$

Asumiendo lo siguiente:

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\ddot{\mathbf{g}}_{(t)} \end{Bmatrix}$$

En este punto conviene aclarar el comportamiento del vector de aceleraciones del suelo, $\ddot{\mathbf{g}}_{(t)}$. Este es un vector de n filas y una columna que corresponde con el efecto de las aceleraciones del suelo en las aceleraciones de los grados de libertad considerados; es

decir, este vector no representa, propiamente las aceleraciones del suelo, pero puede vincularse a las tres componentes de aceleración del suelo, así:

$$\ddot{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{h} \begin{Bmatrix} \ddot{g}_x(t) \\ \ddot{g}_y(t) \\ \ddot{g}_z(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{h}\mathbf{a}(t)$$

Donde, \mathbf{h} es un vector de n filas y tres columnas, usualmente compuesto de cero y unos; mientras que \ddot{g}_x , \ddot{g}_y y \ddot{g}_z , representan las aceleraciones del terreno típicas obtenidas de un registro de aceleraciones.

Finalmente, se tiene:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{AZ} + \mathbf{Ha}$$

La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales lineales puede ser obtenida de la siguiente forma (Wong & Wang, 2007e):

$$\dot{\mathbf{Z}} - \mathbf{AZ} = \mathbf{Ha}$$

$$e^{-At}\dot{\mathbf{Z}} - e^{-At}\mathbf{AZ} = e^{-At}\mathbf{Ha}$$

$$\frac{d}{dt}e^{-At}\mathbf{Z} = e^{-At}\mathbf{Ha}$$

Integrando desde el tiempo de referencia t_0 hasta el tiempo t , se tiene la siguiente expresión:

$$e^{-At}\mathbf{Z} = e^{-At_0}\mathbf{Z}_0 + \int_{t_0}^t e^{-As}\mathbf{H}(s)\mathbf{a}(s)ds$$

Finalmente, luego de algunas operaciones sobre ambos lados de la igualdad se obtiene la solución general del sistema lineal de primer orden (Wong & Yang, 2002b).

$$\mathbf{Z}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{Z}_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As}\mathbf{H}(s)\mathbf{a}(s)ds$$

Esta integral también puede ser establecida para dos intervalos consecutivos de una discretización del tiempo, de la siguiente forma:

$$\mathbf{Z}_{k+1} = e^{A(\Delta t)}\mathbf{Z}_k + e^{At_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-As}\mathbf{H}(s)\mathbf{a}(s)ds$$

Para un caso específico analizado, el vector \mathbf{H} es contante, por lo que es posible retirarlo del integrando. Como se puede apreciar de la expresión mostrada, la integral dependerá exclusivamente de los valores del vector de aceleraciones $\mathbf{a}(s)$. Aunque existen numerosos métodos para la aproximación de tal integral, como el método de la aceleración constante, o el método de la aceleración lineal, en este trabajo se preferirá el método basado en la delta de Dirac (Wong & Wang, 2007b).

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{a}_k \delta(s - t_k) \Delta t, \quad t_k \leq s \leq t_{k+1}$$

Si se sustituye esta expresión en la forma anterior, y aprovechando las propiedades de la función delta de Dirac, se tiene lo siguiente (Zhao & Wong, 2006b):

$$\mathbf{Z}_{k+1} = e^{A(\Delta t)} \mathbf{Z}_k + e^{At_{k+1}} e^{-At_k} \mathbf{H}(t_k) \mathbf{a}(t_k) \Delta t$$

$$\mathbf{Z}_{k+1} = e^{A(\Delta t)} \mathbf{Z}_k + e^{A\Delta t} \mathbf{H}(t_k) \mathbf{a}(t_k) \Delta t$$

Si se hace el siguiente cambio:

$$\mathbf{F}_d = e^{A(\Delta t)}$$

$$\mathbf{H}_d = \Delta t e^{A\Delta t} \mathbf{H}(t_k)$$

Finalmente se obtiene una expresión recurrente explícita, es decir, si se conocen todos los términos del paso anterior, es posible encontrar los pasos siguientes.

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{F}_d \mathbf{Z}_k + \mathbf{H}_d \mathbf{a}_k$$

Finalmente, las aceleraciones actuales pueden ser obtenidas de la ecuación del movimiento en tiempo discreto, de la siguiente forma (Hart & Wong, 2000; Li & Wong, 2014):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{k+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{k+1} + \mathbf{K} \mathbf{X}_{k+1} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{g}}_{(t_{k+1})}$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{k+1} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{g}}_{(t_{k+1})} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{k+1} - \mathbf{K} \mathbf{X}_{k+1}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{k+1} = -\ddot{\mathbf{g}}_{(t_{k+1})} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{k+1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{X}_{k+1}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{k+1} = -\mathbf{H} \mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{k+1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{X}_{k+1}$$

Con este esquema queda completa la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad usando el método del espacio estado, para el caso de sistemas lineales.

3.7 Método del espacio estado en sistemas no lineales

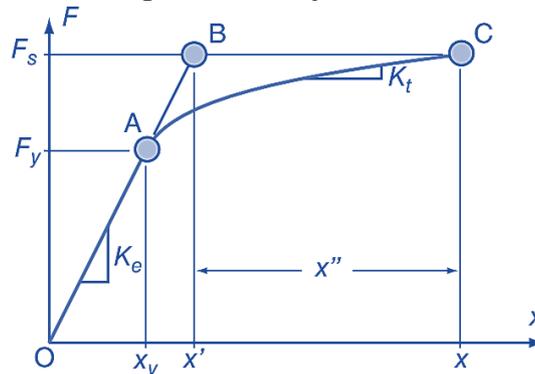
La aplicación directa del método de la analogía de la fuerza en el caso de los sistemas no lineales, no puede hacerse de forma inmediata, ya que en este tipo de sistemas la matriz de rigidez está cambiando de un paso a otro, esto se puede ver si se toma en cuenta que la ecuación diferencial del movimiento toma la siguiente forma (Chopra, 2020):

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + f(X) = -M\ddot{g}(t)$$

Sin embargo, si se recurre a la analogía de la fuerza, el sistema puede escribirse en función de la matriz de rigidez inicial, como se muestra a continuación, para esto, refiérase al Figura 16.

Figura 16:

Nivel de fuerza asociado en el rango inelástico y elástico.



Nota. Fuente (Hart & Wong, 2000; Li & Wong, 2014) .

De este gráfico, se puede apreciar que, a un determinado nivel de fuerzas, le corresponde una matriz de rigidez tangente, diferente de la matriz de rigidez inicial; sin embargo, se puede apreciar que el nivel de fuerza es idéntico al obtenido del producto de la matriz de rigidez inicial por el desplazamiento x' , es decir:

$$F_s(x) = K_e x'$$

Sustituyendo esta expresión en el sistema de ecuaciones del movimiento, se tiene lo siguiente:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K_e X' = -M\ddot{g}(t)$$

Además, del mismo gráfico se puede establecer una relación simple entre este nivel de desplazamiento, el desplazamiento total y los desplazamientos inelásticos:

$$X = X' + X''$$

Sustituyendo estas expresiones, y reescribiendo adecuadamente, se tiene la siguiente expresión:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K_e X = -M\ddot{g}_{(t)} + K_e X''$$

Como se puede apreciar de este sistema de ecuaciones diferenciales, la matriz de rigidez elástica inicial aparece en todos los instantes, por lo que se la puede considerar constante durante todo el análisis, lo que está cambiando en cada caso es, el termino asociado a los desplazamientos inelásticos. Así, los términos de la derecha pueden ser considerados el conjunto de acciones externas que dan origen al movimiento. En esta circunstancia, ya es posible la aplicación del método del espacio estado, para poder resolver directamente el sistema de ecuaciones mostrados.

Introduciendo a la velocidad como una nueva variable de búsqueda:

$$\dot{X} = Y$$

$$M\ddot{X} + CY + K_e X = -M\ddot{g}_{(t)} + K_e X''$$

$$\ddot{X} = -Ha + M^{-1}K_e X'' - M^{-1}CY - M^{-1}K_e X$$

Reescribiendo estas expresiones en forma matricial, se tiene (Hart & Wong, 2000; Li & Wong, 2014):

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K_e & -M^{-1}C \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -Ha + M^{-1}K_e X'' \end{Bmatrix}$$

Introduciendo los siguientes vectores y matrices,

$$Z = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}, \quad \dot{Z} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}K_e & -M^{-1}C \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -Ha + M^{-1}K_e X'' \end{Bmatrix}$$

se tiene:

$$\dot{Z} = AZ + B$$

Multiplicando por la matriz exponencial.

$$e^{-At}\dot{Z} - e^{-At}AZ = e^{-At}B$$

Observando que el termino izquierdo es la derivada temporal del vector buscado por matriz exponencial.

$$\frac{d(e^{-At}Z)}{dt} = e^{-At}B$$

Integrando entre el tiempo t_k y t_{k+1} , se obtiene la solución del sistema.

$$e^{-At_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1} - e^{-At_k}\mathbf{z}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-As}\mathbf{B}(s)ds$$

Reordenando, y simplificando.

$$e^{-At_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1} = e^{-At_k}\mathbf{z}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-As}\mathbf{B}(s)ds$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = e^{A\Delta t}\mathbf{z}_k + e^{At_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-As}\mathbf{B}(s)ds$$

Finalmente, se tiene:

$$\mathbf{z}_{k+1} = e^{A\Delta t}\mathbf{z}_k + e^{At_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-As}\mathbf{B}(s)ds$$

La expresión anterior permite obtener el vector de desplazamientos y velocidades en un instante arbitrario, en función de los valores conocidos del instante anterior.

Una vez establecidas las ecuaciones de movimiento, conviene recordar que (Hart & Wong, 2000; Li & Wong, 2014):

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{m}_a + \mathbf{m}_r$$

Producto de la analogía de fuerza, es posible incluir los giros inelásticos considerando dos etapas, partiendo de la posición deformada y considerando los giros inelásticos.

$$\mathbf{f}_{Rf} = -\mathbf{k}'\boldsymbol{\Theta}'', \quad \mathbf{m}_R = -\mathbf{k}''\boldsymbol{\Theta}''$$

El resultado final puede obtenerse restaurando el paso anterior y escribiendo estas en función de los desplazamientos inelásticos, como se muestra.

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{K}\mathbf{x}'', \quad \mathbf{m}_a = \mathbf{k}'^T \mathbf{x}''$$

Finalmente, notando que las fuerzas aplicadas deben estar relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{f}_{RF} = -\mathbf{f}_a \rightarrow \mathbf{K}\mathbf{x}'' = \mathbf{k}'\boldsymbol{\Theta}'' \rightarrow \mathbf{x}'' = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{k}'\boldsymbol{\Theta}''$$

Expresando los momentos inelásticos en función de los giros inelásticos, se tiene:

$$\mathbf{m}'' = -\mathbf{k}''\boldsymbol{\Theta} + \mathbf{k}'^T \mathbf{x}'' = -\mathbf{k}''\boldsymbol{\Theta}'' + \mathbf{k}'^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{k}' \boldsymbol{\Theta}''$$

$$\mathbf{m}'' = -(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}'^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{k}') \boldsymbol{\Theta}''$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}'' = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}' - \mathbf{k}'' \boldsymbol{\Theta} + \mathbf{k}'^T \mathbf{x}''$$

Finalmente, se obtiene la ecuación que establece la relación existente entre los momentos, los desplazamientos y los giros inelásticos (Li & Wong, 2014).

$$\mathbf{m} + \mathbf{k}'' \boldsymbol{\Theta}'' = \mathbf{K}'^T (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}$$

Conviene expresar la forma discretizada de la ecuación presentada, obteniendo (Hart & Wong, 2000; Li & Wong, 2014):

$$\mathbf{m}_i + \mathbf{k}'' \boldsymbol{\Theta}''_i = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}_i$$

Los desplazamientos inelásticos pueden escribirse en términos incrementales como (Li & Wong, 2014):

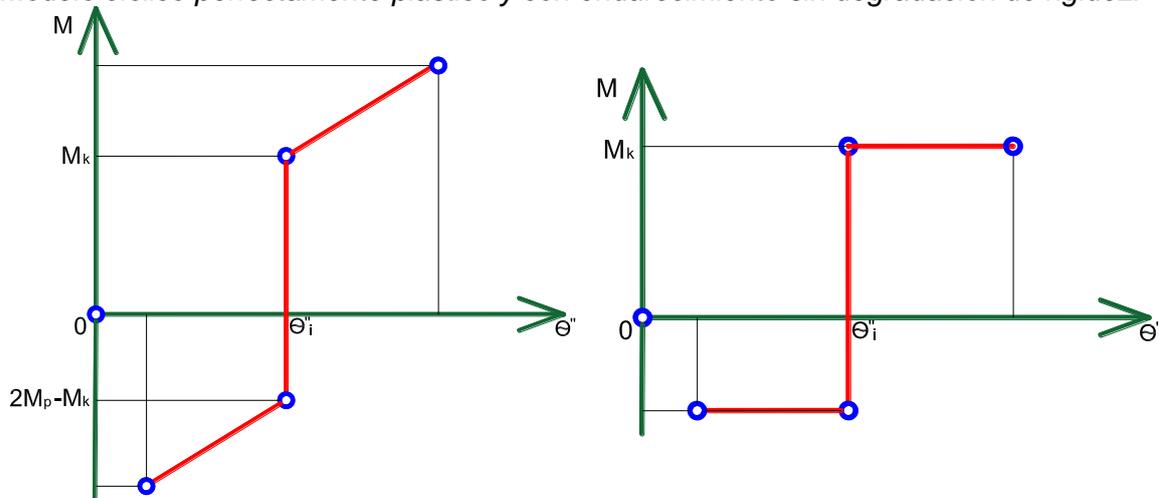
$$\boldsymbol{\Theta}''_i = \boldsymbol{\Theta}''_{i-1} + \Delta \boldsymbol{\Theta}$$

$$\mathbf{m}_i + \mathbf{k}'' \Delta \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}_i - \mathbf{k}'' \boldsymbol{\Theta}''_{i-1}$$

El sistema de ecuaciones resultantes establece la relación entre los momentos de cada rotula plástica y sus respectivos giros inelásticos, así, considerando que se tienen q rotulas inelásticas, se tienen $2q$ incógnitas y solo q ecuaciones. Las q ecuaciones resultantes se pueden obtener de q relaciones constitutivas de las rotulas plásticas consideradas.

Figura 17:

Modelo cíclico perfectamente plástico y con endurecimiento sin degradación de rigidez.



Es importante notar que la ecuación presentada brinda la relación entre momentos y giros inelásticos de forma explícita con los giros inelásticos obtenidos del paso previo, lo que facilita el esquema de solución.

3.8 Condensación estática

En la gran mayoría de aplicaciones, no todos los grados de libertad están asociados con las fuentes de masa, existen algunos casos en que los grados de libertad están asociados a masas nulas, tal es el caso, por ejemplo, de los giros en los nodos, que usualmente están asociados a masas nulas. En este tipo de casos, conviene la eliminación de estos grados de libertad y expresar las matrices de rigidez en términos únicamente de los grados de libertad con masa, conocidos de ahora en adelante como grados de libertad a dinámicos (x_d).

El primer paso consiste en ordenar los grados de libertad, y por tanto las matrices de rigidez, masas y de amortiguamiento, en grados de libertad dinámicos (x_d) y grados de libertad estáticos (x_r), esto haría que la ecuación del movimiento tenga la siguiente forma general.

$$\begin{bmatrix} M_{dd} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{x}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{dd} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{dr} \\ K_{rd} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_d \\ x'_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{dd} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h\ddot{a}$$

En esta ecuación M_{dd} representa la matriz de masas asociadas a los grados de libertad dinámicos; C_{dd} , la matriz de amortiguamiento asociados a los grados de libertad dinámicos; de igual forma, K_{dd} , es la matriz de rigidez asociada a los grados de libertad dinámicos, mientras que, K_{rr} , es la matriz de rigidez asociada a los grados de libertad estáticos.

De esta expresión, puede despejarse los grados de libertad estáticos en términos de los grados de libertad dinámicos, mediante la siguiente expresión:

$$K_{rd}x'_d + K_{rr}x'_r = 0$$

$$x'_r = -K_{rr}^{-1}K_{rd}x'_d$$

También es posible encontrar una ecuación dinámica adicional a partir de la primera línea de la ecuación anterior, encontrando lo siguiente:

$$M_{dd}\ddot{x}_d + C_{dd}\dot{x}_d + K_{dd}x'_d + K_{dr}x'_r = -M_{dd}h\ddot{a}$$

Finalmente, sustituyendo los grados de libertad estáticos en esta ecuación por la expresión que vincula los grados de libertad dinámicos y estáticos, y luego agrupando convenientemente, se tiene:

$$M_{dd}\ddot{x}_d + C_{dd}\dot{x}_d + K_{dd}x'_d - K_{dr}K_{rr}^{-1}K_{rd}x'_d = -M_{dd}ha$$

$$M_{dd}\ddot{x}_d + C_{dd}\dot{x}_d + (K_{dd} - K_{dr}K_{rr}^{-1}K_{rd})x'_d = -M_{dd}ha$$

$$\bar{K} = K_{dd} - K_{dr}K_{rr}^{-1}K_{rd}$$

$$M_{dd}\ddot{x}_d + C_{dd}\dot{x}_d + \bar{K}x'_d = -M_{dd}ha$$

Además de condensar esta ecuación, es posible realizar la condensación estática de la ecuación que vincula los desplazamientos inelásticos y los giros inelásticos, es decir:

$$x'' = K^{-1}K' \theta''$$

$$Kx'' = K' \theta''$$

Para esto se debe expresar la matriz de rigidez en términos de rigideces asociadas a los grados de libertad dinámicos, y estáticos, y considerar que la matriz de rigidez que relaciona las fuerzas exteriores y los grados de libertad inelásticos, también pueden ser separadas en términos de grados de libertad dinámicas y estáticas, como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} K_{dd} & K_{dr} \\ K_{rd} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''_d \\ x''_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_d \\ K'_r \end{bmatrix} \theta''$$

De la expresión anterior, es posible extraer las siguientes ecuaciones, más simplificadas, siguientes:

$$K_{dd}x''_d + K_{dr}x''_r = K'_d \theta''$$

$$K_{rd}x''_d + K_{rr}x''_r = K'_r \theta''$$

Ahora, conviene despejar los desplazamientos inelásticos asociados a grados de libertad estáticos en términos de los grados de libertad dinámicos:

$$x''_r = -K_{rr}^{-1}K_{rd}x''_d + K_{rr}^{-1}K'_r \theta''$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación anterior, se tiene:

$$K_{dd}x''_d + K_{dr}(-K_{rr}^{-1}K_{rd}x''_d + K_{rr}^{-1}K'_r \theta'') = K'_d \theta''$$

$$(K_{dd} - K_{dr}K_{rr}^{-1}K_{rd})x''_d = (K'_d - K_{dr}K_{rr}^{-1}K'_r) \theta''$$

Poniéndole un nombre adecuado a cada uno de estos términos:

$$\bar{K} = K_{dd} - K_{dr}K_{rr}^{-1}K_{rd}$$

$$\bar{K}' = K'_d - K_{dr}K_{rr}^{-1}K'_r$$

La forma final simplificada posee la misma forma que la expresión original.

$$\bar{K}x''_d = \bar{K}'\theta''$$

$$x''_d = \bar{K}^{-1}\bar{K}'\theta''$$

Finalmente, también resulta conveniente la condensación estática de la ecuación que vincula los momentos inelásticos con el desplazamiento total, es decir:

$$m + K''\theta = K'^T x$$

Esta ecuación puede expresarse considerando que la matriz cruzada puede descomponerse en matrices asociadas con los grados de libertad dinámicos y estáticos.

$$m + K''\theta = \begin{bmatrix} K'_d{}^T & K'_r{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_r \end{bmatrix} = K'_d{}^T x_d + K'_d{}^T x_r$$

$$m + K''\theta = K'_d{}^T x_d + K'_d{}^T x'_r + K'_d{}^T x''_r$$

En las secciones anteriores se han logrado expresiones para la los grados de libertad estáticos elásticos, y los grados de libertad a inelásticos estáticos, sustituyendo estas expresiones y desarrollando, se obtiene:

$$m + K''\theta = K'_d{}^T x_d + K'_d{}^T (-K_{rr}^{-1}K_{rd}x'_d) + K'_d{}^T (-K_{rr}^{-1}K_{rd}x''_d + K_{rr}^{-1}K'_r\theta'')$$

$$m + K''\theta = K'_d{}^T x_d - K'_d{}^T K_{rr}^{-1}K_{rd}x'_d + K'_d{}^T K_{rr}^{-1}K'_r\theta''$$

Reordenando y definiendo nuevas matrices, se tiene que:

$$m + (K'' - K'_d{}^T K_{rr}^{-1}K'_r)\theta'' = (K'_d{}^T - K'_d{}^T K_{rr}^{-1}K_{rd})x_d$$

$$\bar{K}'' = K'' - K'_d{}^T K_{rr}^{-1}K'_r$$

$$\bar{K}'^T = K'_d{}^T - K'_d{}^T K_{rr}^{-1}K_{rd}$$

Finalmente:

$$m + \bar{K}''\theta'' = \bar{K}'^T x_d$$

A continuación, se determinará la respuesta dinámica no lineal de una estructura de un piso con una cruja. Como se puede apreciar de la siguiente figura, el sistema tiene tres grados de libertad estáticos; sin embargo, es posible simplificar el modelo de respuesta dinámica, al considerar un solo grado de libertad dinámico.

3.9 Solución de las ecuaciones no lineales

El problema de obtener el comportamiento no lineal de las rotulas plásticas, y en general, de cualquier sistema que considere plasticidad concentrada puede resumirse a la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{m} + \mathbf{K}''\boldsymbol{\theta}'' = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}; \quad \mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}'' \in \mathbb{R}^q, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{m} = f(\boldsymbol{\theta}''); \quad \mathbf{m}, \boldsymbol{\theta}'' \in \mathbb{R}^q$$

Donde, f , es una función que muestra la dependencia existente entre los momentos flectores (\mathbf{m}) actuantes sobre las rotulas plásticas y los giros inelásticos ($\boldsymbol{\theta}''$).

Aunque el primer sistema de ecuaciones mostrado es lineal, el segundo es en general, no lineal. Esto puede conllevar a una dificultad en la solución de este tipo de sistemas. A continuación, se muestra el algoritmo implementado en el presente trabajo de investigación.

En principio, se suponen conocidas todas las variables en instante t_i , por lo que se deben determinar todas las variables de interés en el tiempo t_{i+1} . Conviene entonces, reescribir el sistema de ecuaciones de forma conveniente.

$$\mathbf{m}_{i+1} + \mathbf{K}''\boldsymbol{\theta}''_{i+1} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}_{i+1}$$

Tomando en cuenta que el vector de giros inelásticos en el instante t_{i+1} puede escribirse en función del vector de giros inelásticos en el instante anterior y un incremento, se tiene que:

$$\boldsymbol{\theta}''_{i+1} = \boldsymbol{\theta}''_i + \Delta\boldsymbol{\theta}''_{i+1}$$

$$\mathbf{m}_{i+1} + \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}''_i + \Delta\boldsymbol{\theta}''_{i+1}) = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}_{i+1}$$

Así, sustituyendo y despejando las variables se tiene el siguiente sistema de ecuaciones discreto en el tiempo t_{i+1} .

$$\mathbf{m}_{i+1} + \mathbf{K}''\Delta\boldsymbol{\theta}''_{i+1} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{K}''\boldsymbol{\theta}''_i$$

$$\mathbf{m}_{i+1} = f(\boldsymbol{\theta}''_i + \Delta\boldsymbol{\theta}''_{i+1})$$

El algoritmo usado para la solución de los problemas estudiados en este trabajo de investigación fue el siguiente:

Paso 1:

Como primer paso se establecerá un vector de incremento nulo, y con esta consideración se procede al cálculo de los momentos actuantes en las rotulas plásticas.

$$\Delta\theta''^{(0)}_{i+1} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}^{(0)}_{i+1} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{K}'' \theta''_i$$

Paso 2:

Una vez determinada la primera iteración del momento flector m , se procede a mejorar el vector de los giros inelásticos, haciendo uso de las relaciones constitutivas de la rótula plástica considerada.

$$\Delta\theta''^{(1)}_{i+1} = g(\mathbf{m}^{(0)}_{i+1})$$

Luego, se procede a la actualización de los momentos flectores asociados a los giros inelásticos previamente calculados, para esto haremos uso de la siguiente expresión.

$$\mathbf{m}^{(1)}_{i+1} = \mathbf{K}'^T \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{K}'' \theta''_i - \mathbf{K}'' \Delta\theta''^{(1)}_{i+1}$$

Paso 3:

Se calcula la distancia existente entre los vectores de momentos asociados a este paso y al anterior.

$$e = \|\mathbf{m}^{(1)}_{i+1} - \mathbf{m}^{(0)}_{i+1}\|$$

Paso 4:

Finalmente, con base en la proximidad de los vectores obtenidos, se decide si el algoritmo continúa o se detiene. Para esto se usa el criterio siguiente:

Si

$$e < Tol$$

El algoritmo finaliza, de lo contrario se repite desde el paso 2. El número de iteraciones continuará hasta lograr un error dentro de la tolerancia aceptada.

En este tipo de algoritmos es altamente recomendable incluir un contador de iteraciones, para que este se detenga una vez alcanzado un límite de iteraciones considerado como razonable, pues de lo contrario podríamos entrar en un bucle infinito.

3.9.1.1 Algoritmo de actualización

El siguiente algoritmo está basado en el algoritmo de Gauss-Seidel y consiste en despejar las variables involucradas en función de las variables restantes de tal forma que, a partir de una estimación de partida, se puedan obtener un nuevo conjunto de estimadores, una actualización de los valores iniciales, mismas que a su vez, sirven para obtener una nueva actualización. Este proceso se repite hasta tener convergencia razonablemente precisa.

Para poder obtener el algoritmo de actualización, se parte del conjunto de ecuaciones a resolver, esto es:

$$\mathbf{m}_{i+1} + \mathbf{K}'' \boldsymbol{\theta}''_{i+1} = \mathbf{K}^T \mathbf{x}_{i+1}$$
$$\mathbf{m}_{i+1} = f(\boldsymbol{\theta}''_{i+1})$$

A continuación, se despejan las variables de interés de cada sistema en función de las restantes. Para esto conviene separar la matriz de rotaciones pláticas en dos partes, es decir:

$$\mathbf{K}'' = \mathbf{K}_1'' + \mathbf{K}_2''$$

Donde la matriz \mathbf{K}_1'' es una matriz diagonal que contiene exactamente los elementos de la diagonal de la matriz original \mathbf{K}'' ; mientras que la matriz \mathbf{K}_2'' tiene exactamente los mismos elementos de la matriz original, pero con una diagonal nula.

$$\mathbf{K}_1'' = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_2'' = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & k_{1n} \\ k_{21} & 0 & k_{23} & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez establecida la separación mencionada, puede despejarse el vector de giros inelásticos en función de las actualizaciones obtenidas en el paso anterior, como se muestra:

$$\mathbf{m}_{i+1} + (\mathbf{K}_1'' + \mathbf{K}_2'') \boldsymbol{\theta}''_{i+1} = \mathbf{K}^T \mathbf{x}_{i+1}$$

$$\theta''_{i+1} = \text{inv}(\mathbf{K}_1'')\mathbf{K}^T \mathbf{x}_{i+1} - \text{inv}(\mathbf{K}_1'')\mathbf{K}_2''\theta''_{i+1} - \text{inv}(\mathbf{K}_1'')\mathbf{m}_{i+1}$$

$$\mathbf{K}q = \text{inv}(\mathbf{K}_1'')\mathbf{K}^T$$

$$\mathbf{K}r = \text{inv}(\mathbf{K}_1'')\mathbf{K}_2''$$

$$\theta''_{i+1}^{(k+1)} = \mathbf{K}q\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{K}r\theta''_{i+1}^{(k)} - \text{inv}(\mathbf{K}_1'')\mathbf{m}_{i+1}^{(k)}$$

A continuación, se expone el algoritmo desarrollado para la solución del sistema de ecuaciones no lineales usando el algoritmo expuesto:

Paso 1: Ingresar los vectores de giros inelásticos y momentos, iniciales. Estos usualmente pueden ser los giros y momentos iniciales del paso anterior.

Paso 2: Separar la matriz de giros inelásticos en una matriz diagonal (\mathbf{K}_1'') y una matriz con diagonal nula (\mathbf{K}_2''), además calcular las matrices \mathbf{K}_q y \mathbf{K}_r .

3.10 Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas

3.10.1.1 Modelo elastoplástico

El algoritmo presentado anteriormente requiere la obtención de un momento o un vector de momentos iniciales (\mathbf{m}). Esto se logra considerando que el vector de incrementos de giros inelásticos ($\Delta\theta''$) es cero para todas las rótulas plásticas. Este paso se denomina Paso Cero en el proceso iterativo. Sin embargo, una vez calculado el momento, es necesario mejorar el cálculo del vector de incrementos, recurriendo a la curva de comportamiento de los materiales o a las relaciones constitutivas entre los momentos y los giros inelásticos.

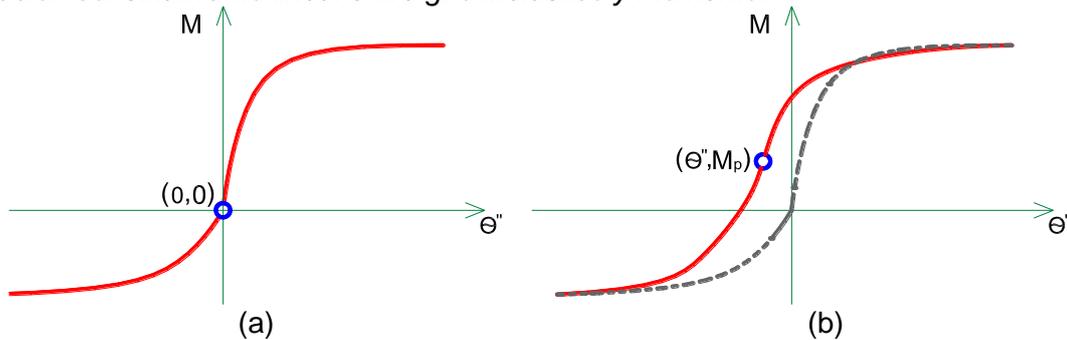
En el caso estático o de carga monótonica incremental se considera un único camino de carga. Este camino se muestra en la primera imagen de la **Figura 19**. En esta representación gráfica, se observa el trayecto seguido por los momentos y los giros inelásticos en una rótula plástica cuando esta se carga desde el origen, es decir, cuando no hay giro inelástico ni momento flector, como se puede notar en la citada figura.

Aun en este caso, existen dos posibles direcciones en este camino: una cuando los momentos son positivos y otra cuando son negativos. En el modelo presentado, se ha simplificado aún más considerando que los momentos plásticos son iguales. Es decir, tanto el momento plástico positivo como el negativo tienen el mismo valor absoluto. Esta simplificación facilita el análisis al reducir la complejidad de los cálculos involucrados.

En el caso dinámico, la situación resulta radicalmente diferente, pues en este caso nos enfrentamos a una serie de fenómenos que consisten esencialmente en el cambio de rigidez y resistencia de los elementos estructurales en cada ciclo, lo que provoca que el camino formado por el par; giro inelástico, momento flector, cambie constantemente.

Figura 18:

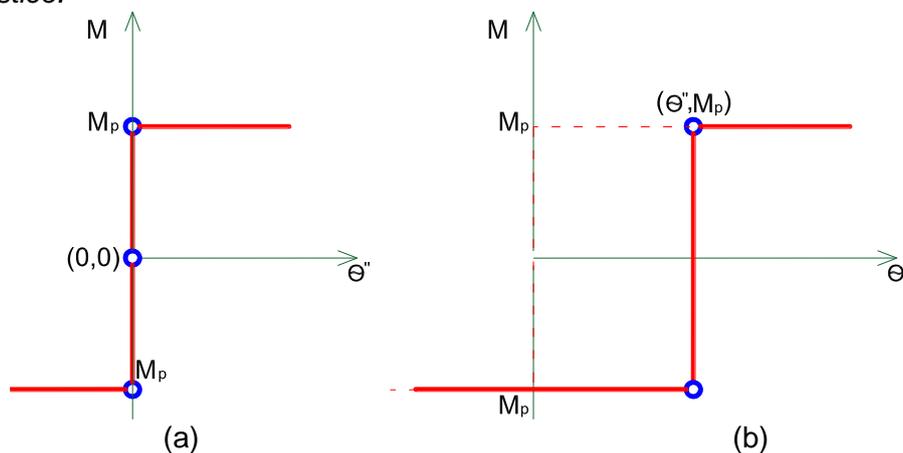
Relación constitutiva no lineal entre giro inelástico y momento.



En esencia, el problema radica en resolver la ecuación que describe los momentos y los giros inelásticos, y las relaciones constitutivas existentes entre los momentos y los giros inelásticos; que en este trabajo se conocerá también como camino que siguen los giros y momentos en cada paso del análisis.

Figura 19:

Camino inicial y camino posfluencia positiva para una rotula con comportamiento elastoplástico.

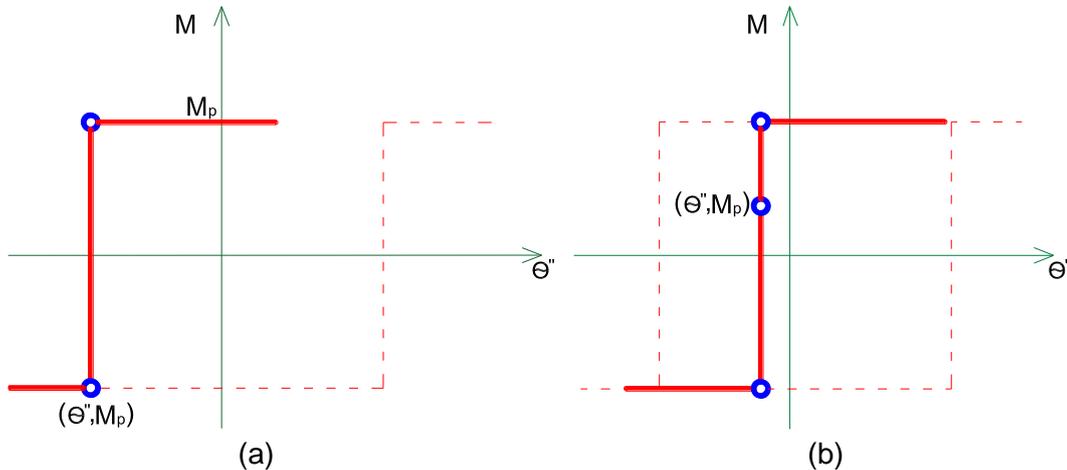


En este sentido, las relaciones constitutivas existentes entre los momentos y los giros inelásticos poseen en general, una naturaleza no lineal y móvil, que cambia de paso en paso. Esta relación constitutiva es una función que, en el caso de un elemento descargado, inicia en el origen; tal como se muestra en la **Figura 18** (a). Mientras que una vez que este elemento ha realizado algunas series de carga y descarga y que empiece su camino en un

giro inelástico y un momento dado, posee una relación constitutiva totalmente diferente de la relación inicial, tal como se muestra en la **Figura 18** (b).

Figura 20:

Caminos sucesivos para rotulas con comportamiento elastoplastico.



En muchos casos, las relaciones constitutivas pueden tener formas bastante sencillas, siendo una de las más sencillas las relaciones elastoplásticas, que tienen como función constitutiva las relaciones mostradas en la **Figura 19** (a). Esta relación constitutiva dice esencialmente que si los momentos están entre M_p y $-M_p$, el giro inelástico es cero; de lo contrario, el momento es el momento de fluencia.

A pesar de ser una función no lineal, esta se compone de tres zonas, cada una de las cuales presenta funciones esencialmente lineales. Esto implica que, en el caso de cargas monotónicas, la solución se obtiene de forma relativamente sencilla. Sin embargo, cuando se trata de cargas cíclicas, es decir, cargas que varían en dirección y magnitud con el tiempo, la situación puede volverse más compleja. En este caso, el camino del par momento-giro inelástico no permanece constante ni coincide con el de la imagen mencionada. En cambio, varía constantemente según las demandas de carga impuestas, como se muestra en la **Figura 19** (b).

De hecho, si los momentos aumentan hasta alcanzar el momento de fluencia y se produce un giro inelástico distinto de cero, como se muestra en la **Figura 19** (b), el resultado final es que, durante un aumento adicional o una disminución de la carga, el camino seguido no será el inicialmente positivo o negativo, sino el que se ilustra en la **Figura 19** (b). Esto indica un cambio en el camino y, por ende, una modificación en la función que relaciona los momentos y los giros inelásticos. Este fenómeno subraya la complejidad de analizar cargas cíclicas y resalta la necesidad de considerar los cambios dinámicos en el comportamiento estructural.

3.10.1.2 Modelo tetralineal

En la sección previa se ha mostrado un modelo de comportamiento elastoplástico, este es sin lugar a dudas un modelo sencillo, pero útil en numerosos casos prácticos; sin embargo, el comportamiento de los elementos estructurales observados en numerosos ensayos de laboratorio en muchas ocasiones dista de este tipo de comportamiento, ocurriendo numerosos fenómenos adicionales como, la degradación de rigidez y de resistencia, que ameritan un modelo de comportamiento más elaborado.

Figura 21:
 Modelo de comportamiento tetralineal de seis parámetros.

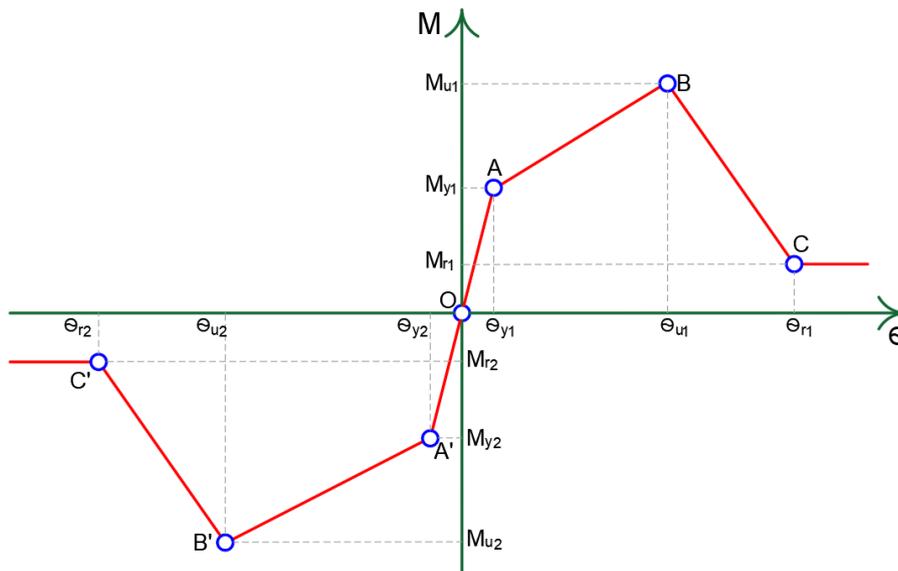
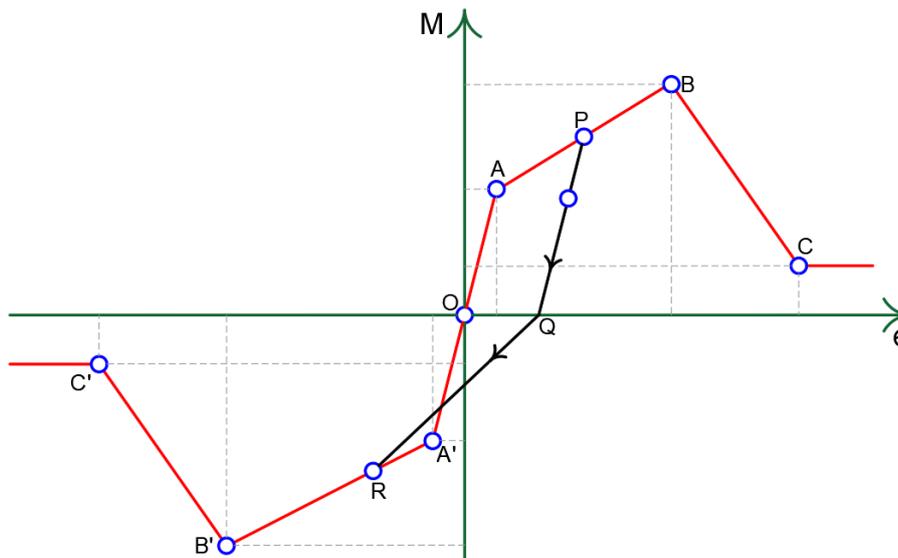


Figura 22:
 Camino de carga y descarga en un modelo de comportamiento tetralineal con punto de partida en el segundo cuadrante.



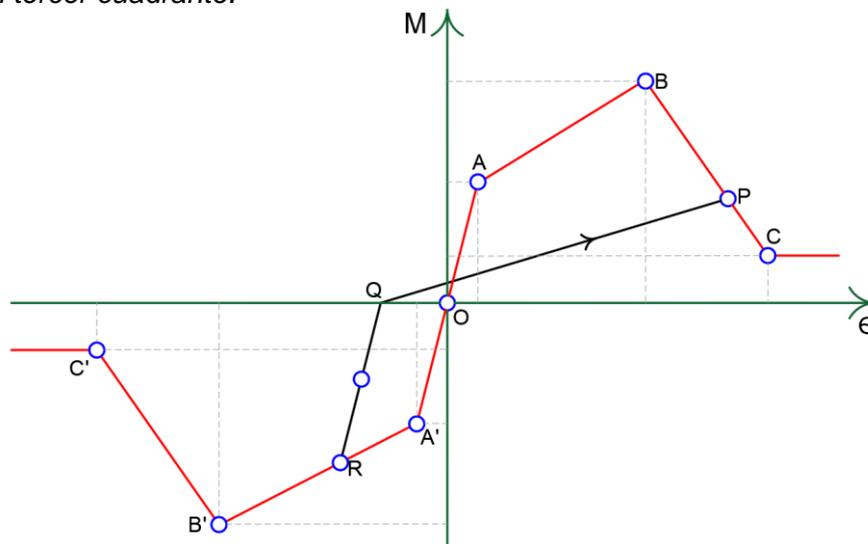
Sin embargo, el método de la analogía de la fuerza es un procedimiento de análisis que puede usarse con casi cualquier modelo constitutivo, incluidos aquellos que son capaces de reproducir la degradación de rigidez y degradación de la resistencia, pues su formulación usa únicamente la rigidez inicial en el cálculo de los pasos siguientes de análisis (Li & Wong, 2014).

Con la finalidad de poder emular comportamientos más complejos que el que se puede representar con un modelo elastoplástico, en este trabajo, además del modelo elastoplástico, se usará un modelo constitutivo con degradación de rigidez y degradación de resistencia por ablandamiento, definido de forma general por una curva esqueleto o curva soporte (skeletal curve) tetrilineal, tal como se observa en la **Figura 21**.

Este modelo constitutivo es capaz de representar el punto de fluencia del elemento (Punto A), el punto de último de resistencia (Punto B) y el punto de resistencia residual (Punto C), tanto positivo como negativo. A continuación, se desarrollará la formulación matemática del modelo constitutivo comentado para su implementación en el método de la analogía de la fuerza.

Figura 23:

Camino de carga y descarga en un modelo de comportamiento tetrilineal con punto de partida en el tercer cuadrante.



Como primer punto es importante recordar que, en todo análisis dinámico, especialmente un análisis sísmico, la integración de las ecuaciones del movimiento requiere la discretización del dominio del tiempo, y posteriormente resolver las ecuaciones para un instante dado en función del instante anterior, esto se hace usualmente considerando incrementos finitos de tiempo o de desplazamiento. Así, en el caso de curvas de

comportamiento como las mostradas, se usarán incrementos de desplazamiento para obtener los momentos y desplazamientos en función de los valores anteriores.

En principio, es importante distinguir dos tipos de casos cuando un elemento estructural está sometido a la acción de cargas cíclicas, siendo el primero el de carga y el segundo el de descarga. Así, se dice que el elemento se está cargando cuando el signo que tienen tanto la fuerza (M) como el incremento de desplazamiento ($\Delta\theta$) son iguales.

En la **Figura 22**, si el estado de carga anterior se encuentra ubicado en el punto P, donde claramente, el signo de la fuerza en este paso es positivo; se dirá que, si el incremento de desplazamientos es también positivo, el elemento se está cargando; mientras que si el incremento de desplazamientos es negativo, estaremos hablando de una descarga.

Es importante observar que, dado un estado completamente determinado, el camino a seguir depende de este estado, en este caso del punto P, y de si el elemento está en un estado de carga o descarga. Si el elemento está en un estado de carga, el camino a seguir estará dado por el segmento PB, mientras que, si el elemento está en descarga, el camino a seguir será PQ. Como se puede observar el camino a seguir por la curva es función no solo del punto de partida sino de dos puntos adicionales, el punto B y el punto R.

Si el punto de partida está ubicado ahora en el tercer cuadrante, como se muestra en la **Figura 23**, queda claro que ahora el signo de la fuerza es negativo, por lo que si incremento de desplazamientos es negativo, se está en un estado de carga, mientras que si el signo es positivo se estará en un estado de descarga. Así, si se asume que el estado previo es el punto R, ubicado en la curva monotónica, el segmento RB' representa el camino de carga, mientras que el segmento RQ representa el camino de descarga. Estas consideraciones siguen siendo validas si el punto se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante

Con estas consideraciones, se empezará describiendo como calcular el camino de descarga, a partir de un punto dado y los puntos de máxima desplazamiento positivo (P) y máxima carga negativa (R). Para esto se dará inicio suponiendo que el punto de inicio solo puede estar contenido dentro de la región encerrada por la curva C'B'A'OABC y el eje de las abscisas, incluida su frontera y ciertas regiones de los cuadrantes dos y cuatro.

El primer caso es cuando el punto de partida está ubicado en la frontera, tal como en el primer ejemplo, es decir cuando el punto de partida se encuentra en el punto P. En este caso, al ser el signo de la fuerza positivo, el punto de máximo desplazamiento positivo y por tanto el punto objetivo del camino de carga será el punto de carga última del elemento,

es decir el punto B. En términos matemáticos el camino estará definida por la siguiente ecuación:

$$m = m_P + \left(\frac{m_B - m_P}{q_B - q_P} \right) (q_B - q_P)$$

Si estando en el punto P, de frontera, se da una descarga y no una carga, en este caso el camino queda determinada por una pendiente que es función del desplazamiento de fluencia y del desplazamiento máximo positivo y negativo en el caso que nos encontremos en el primer o tercer cuadrante respectivamente. EL valor de esta pendiente se calcula mediante la siguiente expresión (Li & Wong, 2014):

$$k_{PQ} = 1.7 k_o \left(\frac{\theta_y}{\theta_{max}} \right)^\alpha$$

Donde, k_o , es la pendiente inicial elástica OA u OA', dependiente de si estamos en el primer o tercer cuadrante, respectivamente; mientras que θ_y es el desplazamiento de fluencia, θ_{max} es del desplazamiento máximo alcanzado en el momento del cambio de carga a descarga y α es el parámetro que controla el valor de la pendiente, en este trabajo se usó el valor de 0.4 (Li & Wong, 2014).

El segundo caso a considerar ocurre cuando el punto de partida se encuentra dentro de la región señalada previamente, en este caso, cuando se está en el caso de carga, el camino apunta hacia el punto en que se alcanzó el máximo desplazamiento lateral, lo que ocurre cuando da inicio la descarga del elemento. Considerando la figura anterior, el camino de carga apuntaría hacia el punto P, que es donde ocurrió la descarga.

$$m = m_o + \left(\frac{m_P - m_o}{q_P - q_o} \right) (q_P - q_o)$$

Y el caso de descarga ocurre, de forma similar al caso anterior, cuando el incremento de carga es negativo, en este caso la pendiente de descarga puede calcularse de la misma forma a la mostrada en anteriormente.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del método de la analogía de la fuerza a la predicción de la respuesta sísmica de pórticos de concreto armado, de diferentes características geométricas, el método fue implementado en Python. Asimismo, se muestra la respuesta monotónica de una estructura obtenida mediante la aplicación de la analogía de la fuerza y se compara con resultados los experimentales obtenidos por Sharma et al. (2013) y Grubišić et al. (2019).

4.1 Validación del método con carga monotónica para un pórtico de cuatro niveles

4.1.1 Descripción del caso de estudio

En esta sección se evaluará la curva de comportamiento monotónica de la estructura de pórticos de concreto armado ensayada por Sharma et al. (2013). Esta estructura consistió esencialmente en una edificación de concreto armado de un vano y cuatro niveles construida de concreto armado. Las vigas perimetrales de cada entrepiso tuvieron una sección transversal de 230mmx1000mm, y el refuerzo longitudinal para los tres primeros pisos se muestra en la **Tabla 1**, siendo de dos varillas de 25mm de diámetro en la parte inferior y en la parte superior. El refuerzo de las vigas colocadas en el último nivel varió del resto de niveles, siendo estos de tres varillas de 20mm de diámetro en la parte inferior y dos varillas de 20mm en la parte superior.

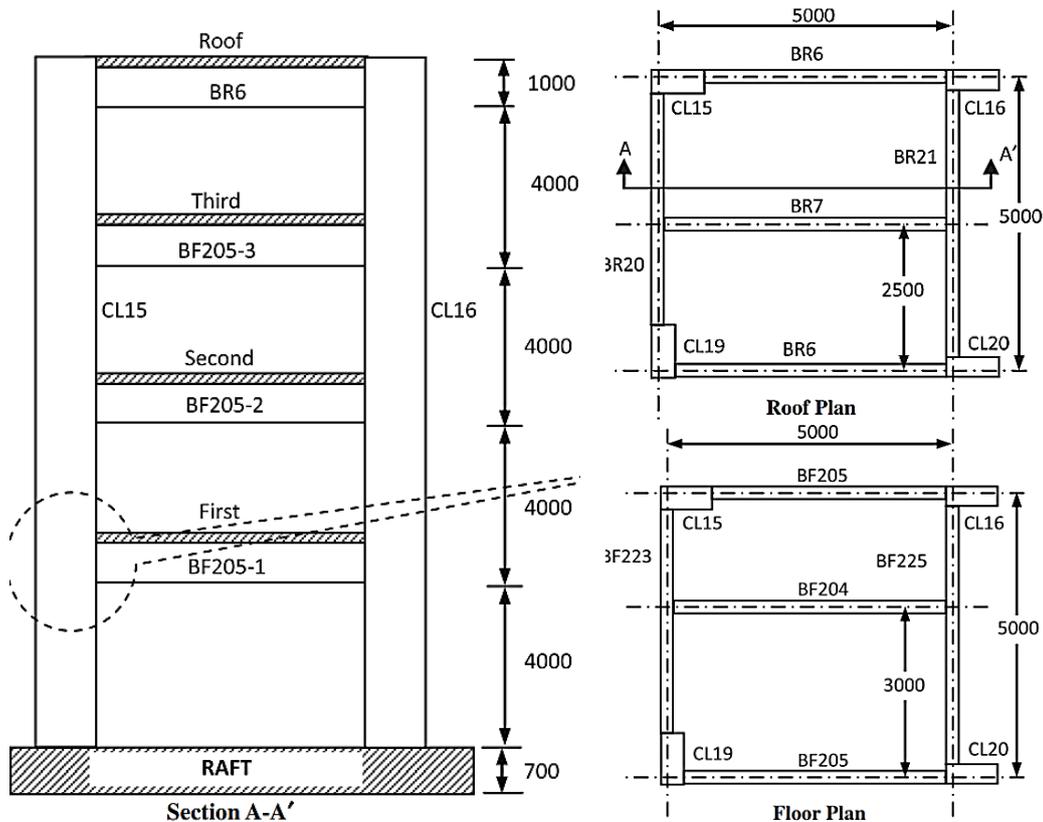
Tabla 1:

Sección transversal y distribución de las armaduras de acero colocadas en los elementos estructurales.

Viga/Columna	B (mm)	D (mm)	Refuerzo longitudinal	Refuerzo transversal
BF 204	230	1000	2-16 (Top) 3-16 (Bottom)	8-200 c/c
BF 205	230	1000	2-25 (Top) 2-25 (Bottom)	10-125 c/c
BF 223	230	1000	2-25 (Top) 2-25 + 1-16 (Bottom)	10-125 c/c
BF 225	230	1000	2-20 (Top) 2-25 (Bottom)	10-150 c/c
BR 6	230	1000	2-20 (Top) 3-20 (Bottom)	8-200 c/c
BR 7	230	600	2-16 (Top) 3-16 (Bottom)	8-120 c/c
BR 20	230	1000	2-20 (Top) 2-25 (Bottom)	8-175 c/c
BR 21	230	1000	2-20 (Top) 2-20 (Bottom)	8-175 c/c
CL 15/ CL 19 (Gr to 2 floor)	400	900	12-28	10-100 c/c
CL 15/ CL 19 (2-3 floor)	400	700	4-25 + 6-20	10-100 c/c
CL 15/ CL 19 (3-4 floor)	300	700	8-20	10-100 c/c
CL 16/ CL 20 (Gr to 2 floor)	350	900	12-25	10-100 c/c
CL 16/ CL 20 (2-4 floor)	350	900	10-20	10-100 c/c

Nota. Fuente (Sharma et al., 2013).

Figura 24:
 Características geométricas del pórtico de concreto armado sometido a un estudio experimental de carga monotónica creciente.



Nota. Fuente (Sharma et al., 2013)

Tabla 2:
 Resistencia promedio a la compresión del concreto según elementos estructurales.

Localización	Resistencia a la compresión promedio (MPa)
Cimentación (<i>Raft</i>)	32.88
Columnas 1er piso	28.86
Vigas y losa 1er piso	27.73
Columnas 2do piso	33.3
Vigas y losa 2do piso	31.09
Columnas 3er piso	32.24
Vigas y losa 3er piso	29.86
Columnas 4to piso	31.24
Vigas y losa 4to piso	30.56

Fuente: Sharma et al. (2013).

De forma similar, la sección transversal de las columnas en el primer nivel de la estructura fue de 400mmx900mm, mientras que las columnas en el segundo nivel fueron de 400mmx700mm, las secciones transversales del tercer y cuarto nivel fueron de 350mmx900mm. Los refuerzos de cada una de estas secciones se muestran en la tabla ya indicada.

Las propiedades mecánicas de los materiales usados para la construcción de la citada edificación se muestran en la **Tabla 2**. Como se puede apreciar de esta tabla, la resistencia a la compresión del concreto está en alrededor de 32MPa. Además, en la **Tabla 3** se muestran las propiedades mecánicas de las varillas de acero en función de los diámetros.

Tabla 3:

Propiedades mecánicas de las varillas de acero en función de los diámetros colocados.

Diámetro de barra (mm)	Esfuerzo de fluencia (MPa)	Esfuerzo último (MPa)
8	456.06	604.91
10	517.81	599.94
12	539.88	620.78
16	490.96	615.02
20	488.93	614.6
25	523.37	629.49
28	498.42	622.33

Fuente: Sharma et al. (2013).

4.1.2 Modelamiento usando la analogía de la fuerza

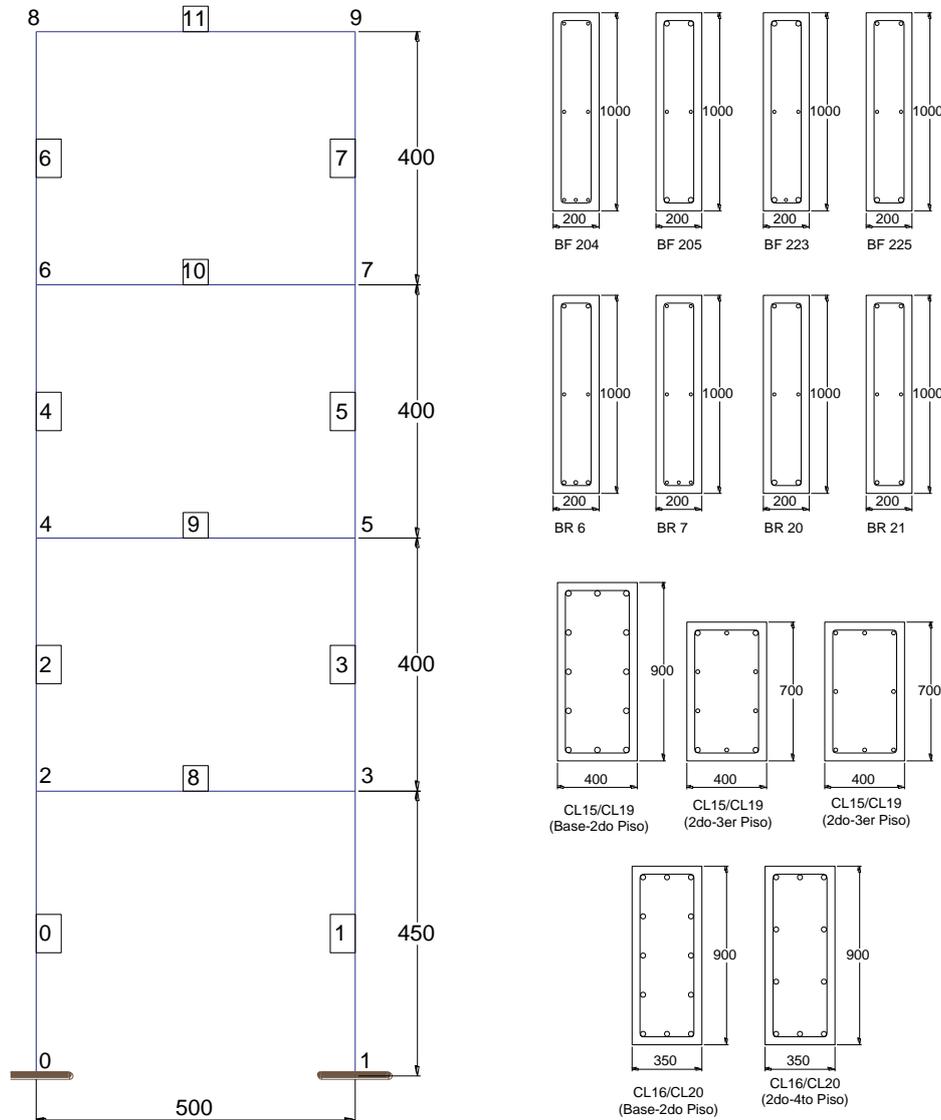
Con la finalidad de evaluar las capacidades de predicción del método de la analogía de la fuerza, se ha realizado un modelo estructural de barras con capacidad de generar rotulas plásticas concentradas en los extremos. El algoritmo desarrollado para el caso monotónico se implementó en Python. La implementación realizada requiere las características geométricas del ensamble y las propiedades elásticas e inelásticas de las secciones transversales y fue usado para la predicción de la respuesta monotónica de la estructura analizada. En la **Figura 25** se muestra el modelo computacional realizado en Python y las secciones transversales consideradas para cada elemento.

Tabla 4:

Características geométricas y mecánicas de las secciones que forman parte del pórtico analizado.

Sección	Base (cm)	Peralte (cm)	Inercia (m ⁴)	Área (m ²)	My (t.m)	Φ (1/m)
BF205	23	100	0.019	0.23	46.8	0.00368
BR6	23	100	0.019	0.23	44.6	0.00421
CL15-1	40	90	0.024	0.36	124.7	0.00805
CL15-2	40	70	0.011	0.28	58.2	0.00759
CL15-4	30	70	0.009	0.21	37.5	0.00439

Figura 25:
Modelo computacional con plasticidad concentrada basada en analogía de la fuerza y secciones transversales.



Con la finalidad de poder caracterizar el comportamiento mecánico de las secciones consideradas de concreto armado, se han realizado los diagramas momento curvatura de cada una de las secciones transversales. Los diagramas momento curvatura calculados para las secciones típicas BF205 y BR6 se muestran en la **Figura 26**, mientras que los diagramas momento curvatura de las secciones CL15 para los diferentes niveles de la estructura se muestran en la **Figura 27**. De estos diagramas se pueden obtener parámetros claves para el análisis como, los momentos de fluencia, curvaturas de fluencia y curvaturas ultimas, mismas que se pueden ver de forma resumida en la **Tabla 4**.

Se puede observar de la tabla mencionada que la sección BF205 de dimensiones de sección transversal 23cm de base con 100 cm de peralte tuvo, para el refuerzo de acero considerado, tuvo un momento de fluencia de 46.8 t.m; mientras que la sección BR6, para las mismas dimensiones de la sección transversal y diferente refuerzo longitudinal, tuvo un momento de fluencia de 44.6 t.m.

Figura 26:

Diagrama momento curvatura de las vigas de sección BF 205 y BR6 y sus respectivas idealizaciones.

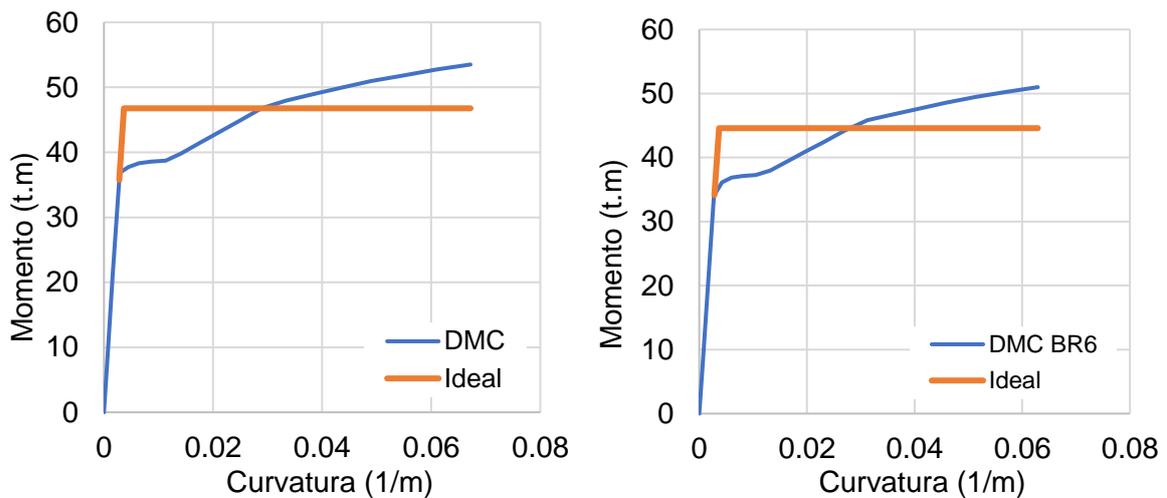
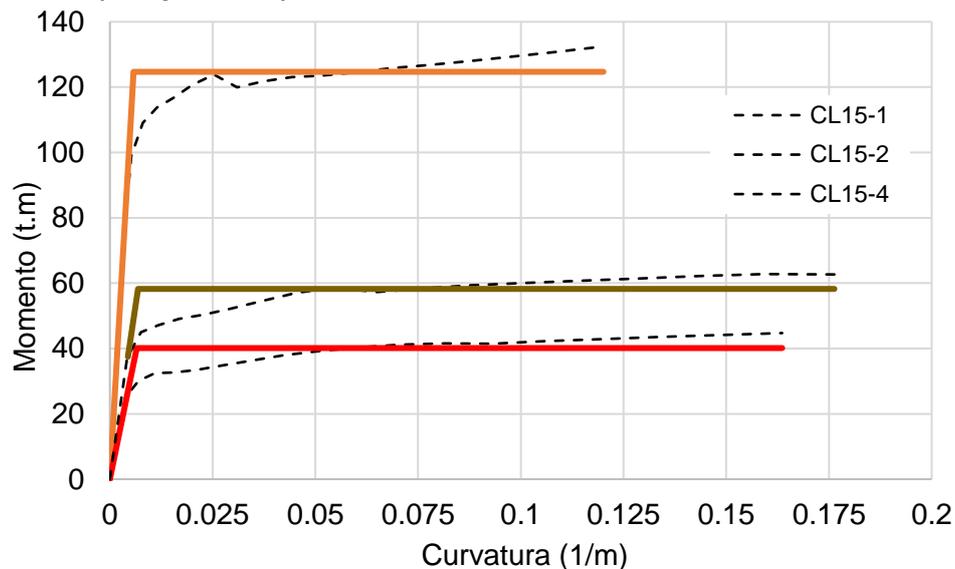


Figura 27:

Diagrama momento curvatura de las columnas de sección CL15-1er Piso, CL15-2do-3er Piso, CL15-4to piso y sus respectivas idealizaciones.



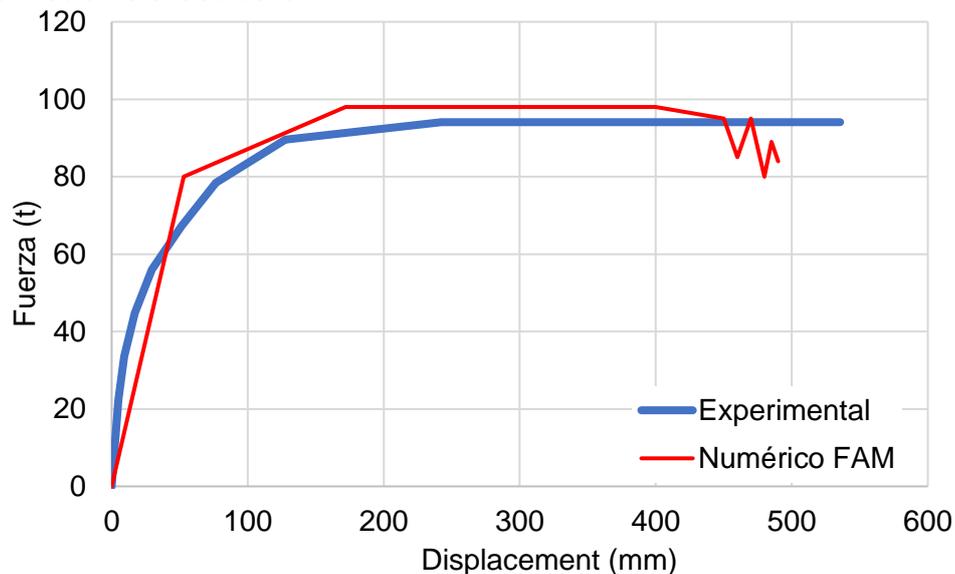
De la misma tabla se puede apreciar que la sección CL15-1, la sección transversal del primer y segundo lugar, con una sección transversal de 40cm de base y 90 cm de peralte

tuvo momento de fluencia sin carga axial, de 124.7 t, mientras que la sección CL15-2, con una base de 40cm y 70cm de peralte, tuvo un momento de fluencia de 58.2 t.m. Finalmente, la sección CL15-4, ubicada en el cuarto nivel del pórtico ensayado, alcanzó un momento de fluencia de 37.5 t.m. Es importante observar que en estas tablas también pueden encontrarse las curvaturas de fluencia de cada una de las secciones analizadas.

Finalmente, el modelo construido con las características geométricas y las propiedades mecánicas comentadas líneas arriba fue sometida a la acción de cargas laterales monotonamente crecientes. Estas cargas tuvieron un patrón de carga triangular invertida, que intentó reproducir las condiciones de carga aplicadas durante la realización del ensayo reportadas por Sharma et. al. (2013). Finalmente, se registraron las fuerzas cortantes y los desplazamientos laterales obtenidos del análisis en cada paso del análisis. Los resultados numéricos obtenidos se han comparado con los resultados experimentales reportados por Sharma et al. (2013) y se comparan en la **Figura 28**.

Figura 28:

Comparación entre la curva monótonica experimental y la curva monótonica numérica obtenida mediante el uso de la FAM.



Como se puede apreciar de este gráfico, existe una buena correlación entre la respuesta obtenida experimentalmente y la respuesta obtenida de forma numérica usando el método de la analogía de la fuerza e implementada en Python.

4.2 Validación del método con carga monótonica para un pórtico de un nivel

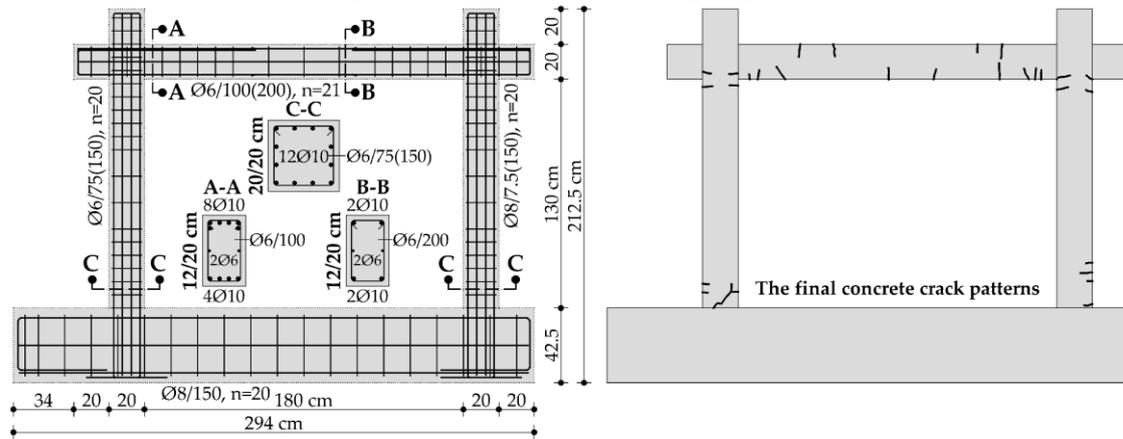
4.2.1 Descripción de la estructura

La estructura considerada para la validación del método se trata de un pórtico de concreto armado de un nivel y un vano, tal como se muestra en la **Figura 29**. Es importante

considerar que este pórtico fue construido con una escala de 1/2.5, por lo que la altura de las columnas fue de 1.30m y la luz libre fue de 1.80m.

Figura 29:

Pórtico de concreto armado y detalle del armado de vigas y columnas.



Nota. Fuente (Grubišić et al., 2019).

Con la finalidad de evaluar las características mecánicas de las secciones transversales de los elementos estructurales, se han realizado los diagramas momento curvatura de cada una de estas. Los resultados encontrados se muestran en la **Figura 30**.

Figura 30:

Diagramas momento curvatura de la columna y la viga de concreto armado, así como sus respectivas idealizaciones.

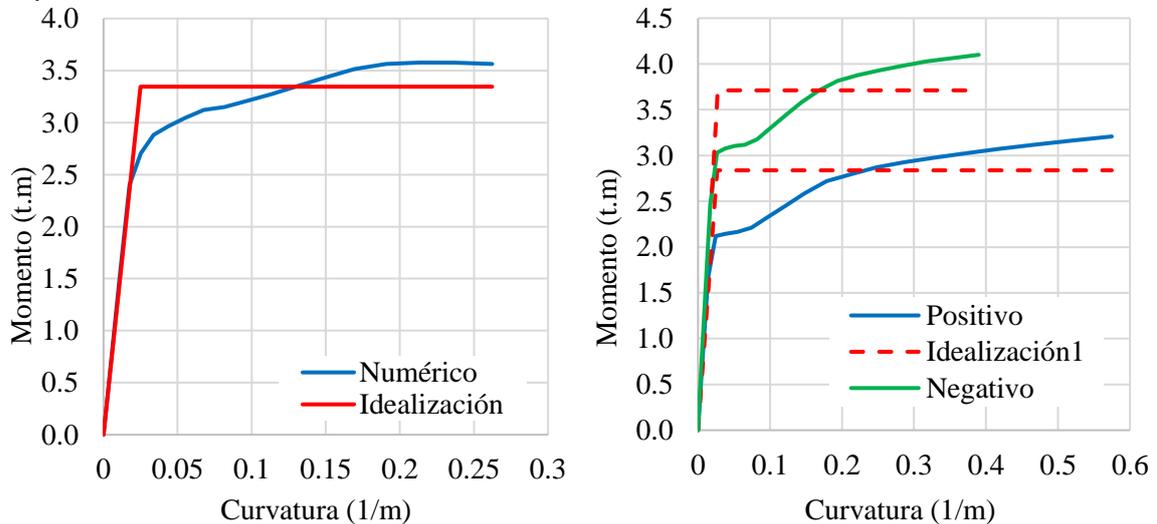


Tabla 5:

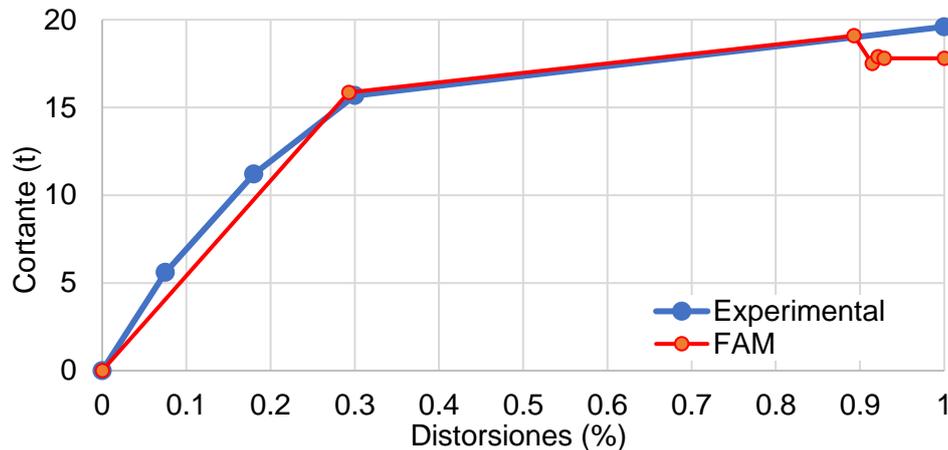
Propiedades mecánicas de las secciones transversales de los elementos estructurales.

Sección	Base (cm)	Peralte (cm)	Inercia (m ⁴)	Área (m ²)	My+ (t.m)	My- (t.m)	Φ (1/m)
C-C	20	20	1.33(10) ⁻⁴	0.040	3.34	3.34	0.00368
A-A	23	100	8.00(10) ⁻⁵	0.024	2.84	3.71	0.00421

Además, un resumen de estas se muestra en la **Tabla 5**, donde se pueden apreciar propiedades mecánicas como el momento de inercia de área de la sección, los momentos de fluencia, curvaturas de fluencia, entre otros.

Figura 31:

Comparación de la respuesta monotónica experimental y la respuesta numérica usando FAM.



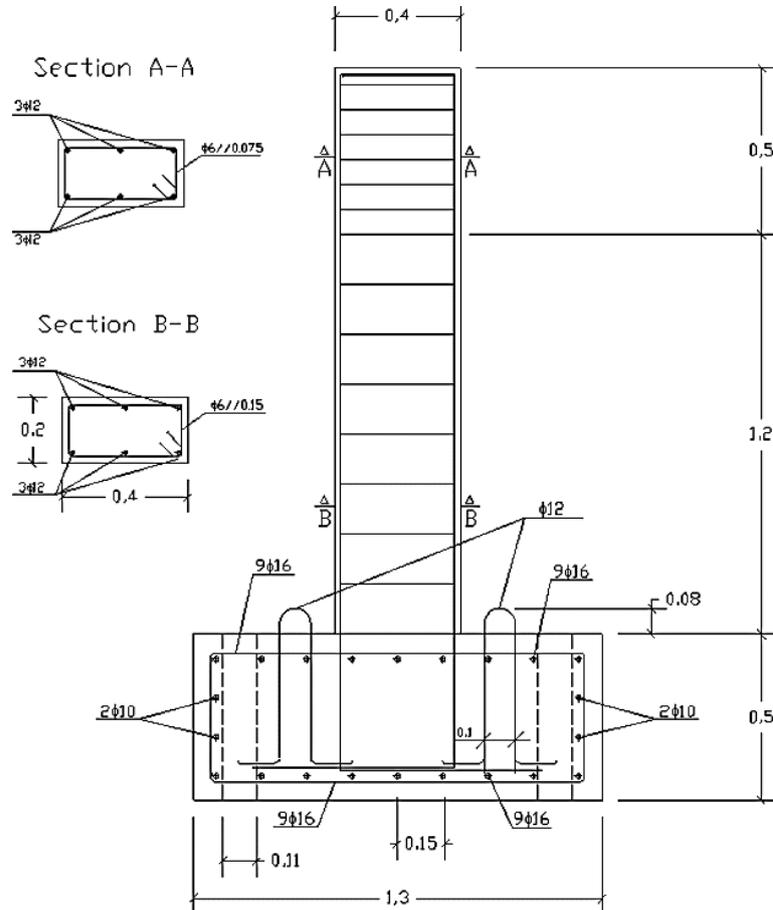
Finalmente, en la **Figura 31** se muestra una comparación de los resultados obtenidos usando el método de la analogía de la fuerza (FAM) y los resultados experimentales obtenidos por Grubišić et al. (2019). De estos resultados se puede apreciar que el método es capaz de predecir de forma razonablemente precisa parámetros de rigidez, resentida y desplazamientos.

4.3 Validación del método para carga cíclica

Con la finalidad de evaluar las capacidades predictivas del método de la analogía de la fuerza y de los macromodelos desarrollados en este trabajo de investigación, ante la aplicación de cargas cíclicas, se ha procedido a obtener la respuesta numérica de dos ensayos desarrollados por Rodríguez, Arede, Varum y Costa (2012).

En la **Figura 32**, se muestran las características geométricas y mecánicas del espécimen ensayado en el estudio experimental desarrollado por Rodrigues et al. (2012). Como puede apreciarse de esta figura, la sección transversal de la columna ensayada en el estudio citado fue rectangular, de 20 cm de base por 40cm de peralte y una altura total de 1.70m. En cuanto a el refuerzo longitudinal, este consistió de seis varillas de acero grado 60 de 12mm de diámetro, mientras que el refuerzo transversal estuvo compuesto de estribos cerrados espaciados cada 15cm con diámetros de 6mm. Además, con la finalidad de poder lograr un anclaje adecuado, la columna se cimentó sobre un bloque masivo de concreto armado de 1.3m y 0.5m, como se aprecia en la imagen anterior.

Figura 32:
 Características geométricas y mecánicas de la columna sometida a carga lateral cíclica.



Nota. Fuente (Rodrigues et al., 2012).

Tabla 6:
 Tabla de parámetros de comportamiento de la sección analizada.

	Q_y	M_y (t.m)	Q_u	M_u (t.m)	Q_r	M_r (t.m)
Negativo	-0.3	-6	-1.5	-8	-3.5	-8
Positivo	0.3	6	1.5	8	3.5	8

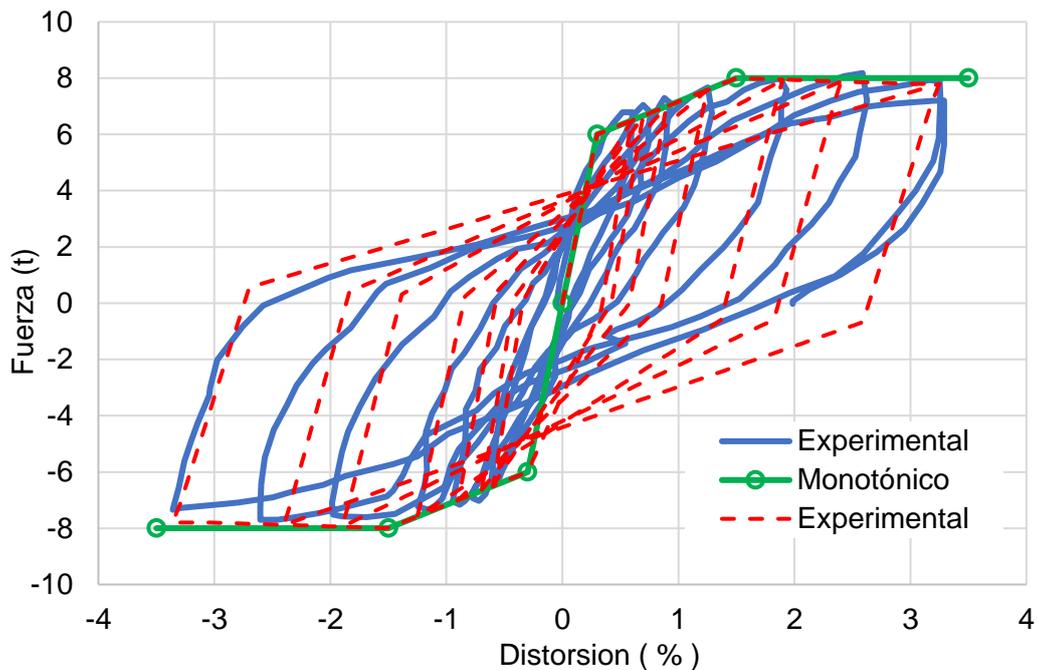
A continuación, se presentan los resultados obtenidos del modelamiento del comportamiento cíclico de la columna analizada usando el modelo tetralineal presentado en secciones anteriores. El modelo tetralineal considerado en el presente trabajo de investigación requiere de la definición de tres pares de puntos notables, el punto de fluencia, el punto ultimo y el punto de resistencia residual, tanto positivos como negativos. En la **Tabla 6**, se presentan los parámetros indicados para la sección y condiciones de carga analizada.

Una vez obtenidos los resultados del análisis dinámico con carga cíclica sobre el elemento estructural, estos se han comparado con los resultados experimentales obtenidos por

Rodrigues et al. (2012), tal como se aprecia en la **Figura 33**. De este grafico se puede apreciar que los resultados numéricos logran describir de manera razonable la envolvente de comportamiento y de forma aproximada las zonas de carga y descarga.

Figura 33:

Comparación de los resultados experimentales y numéricos obtenidos del análisis.



Un segundo caso de estudio consistió en el mismo ensamble sometido previamente a una historia de cargas laterales en la dirección corta, y luego sometida a la aplicación de cargas cíclicas en la dirección principal. Los resultados experimentales obtenidos por Rodrigues et al. (2012), se muestran en la figura.

Tabla 7:

Tabla de parámetros de comportamiento de la sección analizada.

	Qy	My (t.m)	Qu	Mu (t.m)	Qr	Mr (t.m)
Negativo	-0.35	-5.60	-2.2	-7.84	-4.5	-3.36
Positivo	0.8	6.72	2.4	8.96	4	3.36

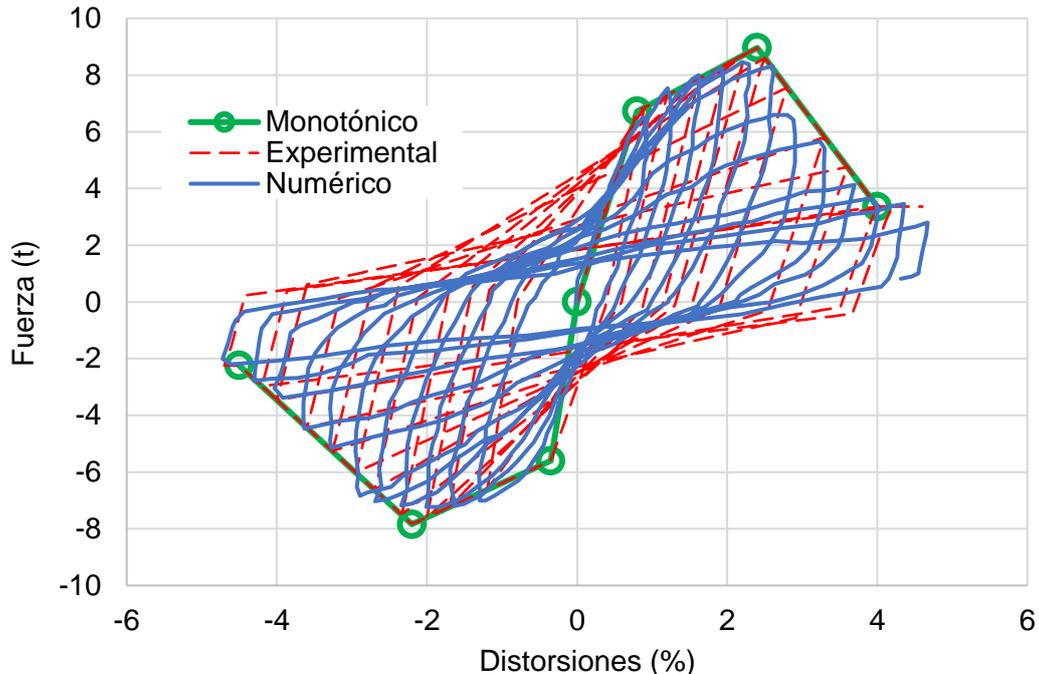
Fuente: Elaboración propia.

Con la finalidad de evaluar en una segunda ocasión las capacidades predictivas del modelo comportamiento sugerido y el método de la analogía de la fuerza, aun en el caso en que exista la posibilidad de degradación de resistencia, se han evaluado las predicciones obtenidas con los resultados experimentales.

En la **Tabla 7**, se muestran los parámetros de comportamiento considerados para el modelamiento de este caso, que definen como en el caso anterior, los parámetros de comportamiento de la curva monotónica.

Figura 34:

Comparación de los resultados experimentales y numéricos obtenidos del análisis.



Finalmente, se ha aplicado un patrón de cargas cíclicas al modelo considerado, de tal forma que este coincida con el patrón de cargas aplicado durante el ensayo experimental del elemento. Los resultados encontrados se muestran en forma de lazos de histéresis, tal como se presentan en la siguiente **Figura 34**. Los resultados obtenidos del análisis cíclico se han graficado en la figura junto a los resultados obtenidos por Rodrigues et al. (2012).

Como se puede apreciar de los resultados encontrados, el método de la analogía de la fuerza es capaz de trabajar en diferentes escenarios, incluso en el caso de ablandamiento, como ocurre en este caso. Esto demuestra que, si se consideran modelos con degradación de resistencia, también es posible aplicar el método de la analogía de la fuerza.

4.4 Aplicación a la respuesta dinámica

4.4.1 Pórtico de un nivel y una crujía

Como caso de estudio se estudiará la respuesta sísmica de una edificación de un nivel que posee una sola crujía en la dirección transversal y posee cuatro pórticos iguales espaciados cada 4m en dirección longitudinal. A continuación, se muestra el modelo estructural de uno

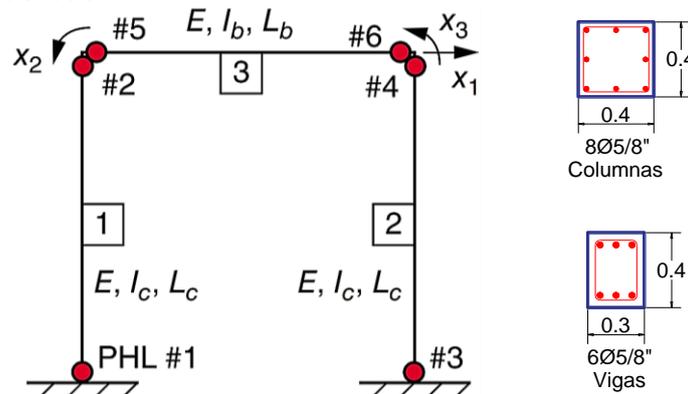
de estos pórticos de concreto armado, en el que además se han considerado la formación de seis rotulas plásticas.

La masa del sistema se calculará considerando una carga total de $0.8t/m^2$, característica de las edificaciones convencionales de concreto armado. Con estas consideraciones la masa dinámica total del entrepiso será de $1.30 t.s^2/m$. Es importante tener en cuenta que, con la finalidad de hacer cálculos sencillos y fáciles de entender se ha considerado el sistema MKS como sistema de unidades.

Tabla 8:
Propiedades elásticas de los materiales que definen los elementos estructurales.

Nº	b (m)	t (m)	Inercia Bruta (m ⁴)	Inercia Efectiva (m ⁴)	Área (m ²)	Long del Elemento (m)
1	0.4	0.4	$2.13(10)^{-3}$	$1.60(10)^{-3}$	0.16	4
2	0.4	0.4	$2.13(10)^{-3}$	$1.60(10)^{-3}$	0.16	4
3	0.3	0.4	$1.60(10)^{-3}$	$1.20(10)^{-3}$	0.12	4

Figura 35:
Pórtico de concreto armado de una crujía y un nivel en el que se han considerado seis posibles rotulas plásticas.



Además, las propiedades geométricas y mecánicas de las secciones transversales de los elementos que componen las columnas y vigas de la estructura analizada se presentan en la **Tabla 8**. En las columnas número dos y número tres, se aprecian las dimensiones de las secciones rectangulares consideradas en el caso de estudio: 140 cm x 40 cm para la sección transversal de las columnas y 30 cm x 40 cm para la sección transversal de la viga. Asimismo, se muestran las características mecánicas básicas, como la inercia bruta, la inercia efectiva, el área de la sección transversal y la longitud del elemento.

Además de las características mencionadas, es crucial considerar los diagramas momento-curvatura de las secciones transversales. En las **Figura 36** y **Figura 37**, se presentan los diagramas momento-curvatura de la columna y la viga, respectivamente, considerando una

cuantía de acero del 1% para las columnas. Como se observa en estos gráficos, el momento de influencia para las columnas de concreto armado fue de aproximadamente 11.9 t.m, mientras que el momento de influencia para la viga fue de 8.9 t.m.

Figura 36:

Diagrama momento curvatura de viga de 30cmx40cm y diagrama de momento idealizado.

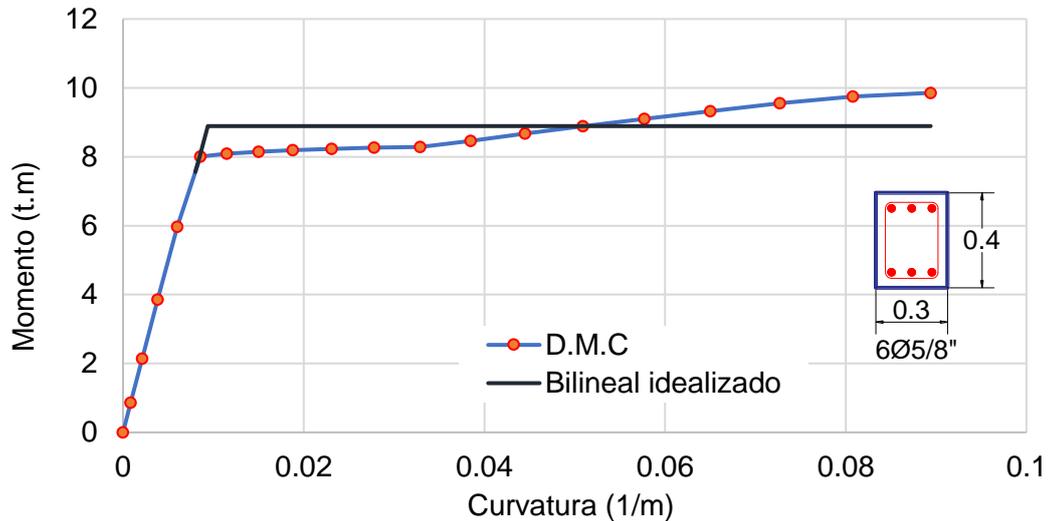


Figura 37:

Diagrama momento curvatura de columna de 40cmx40cm y diagrama de momento idealizado.

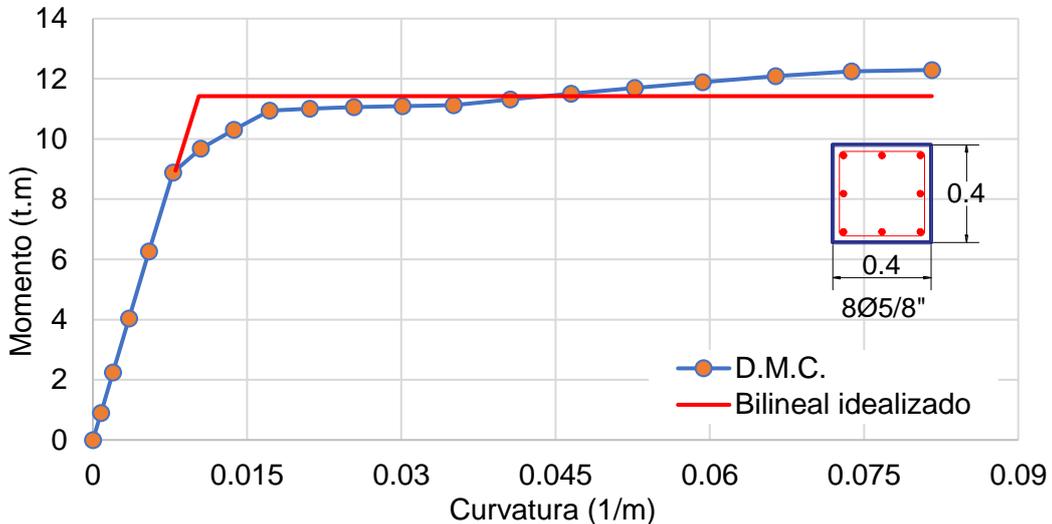


Tabla 9:

Propiedades elásticas de los materiales que definen los elementos estructurales.

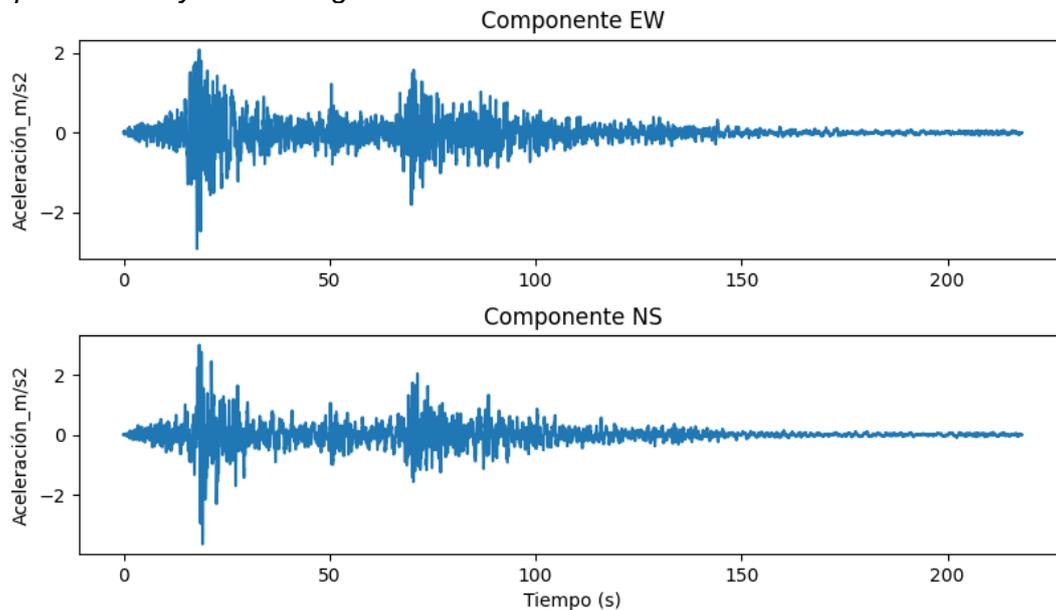
Elemento	Momento de Fluencia M_y (t.m)	Curvatura de Fluencia (1/m)	Momento ultimo M_u (t.m)	Curvatura ultima (1/m)
Viga	8.90	$9.4(10)^{-3}$	8.90	$8.94(10)^{-2}$
Columna	11.4	$1.05(10)^{-2}$	11.4	$8.20(10)^{-2}$

4.4.1.1 Terremoto de Pisco del 2007

Con la finalidad de evaluar las capacidades predictivas del modelo considerado utilizando la analogía de la fuerza, se ha decidido emplear tres sismos peruanos importantes e históricos. Estos son el terremoto de Pisco ocurrido en el 2007, el terremoto de Atico ocurrido en el 2001 y el terremoto de Huaraz de 1970. Se dará inicio al análisis y la obtención de la respuesta sísmica de la estructura considerada para el terremoto de Pisco del 2007.

Figura 38:

Componente NS y EW del registro de aceleraciones del terreno de Pisco 2007.

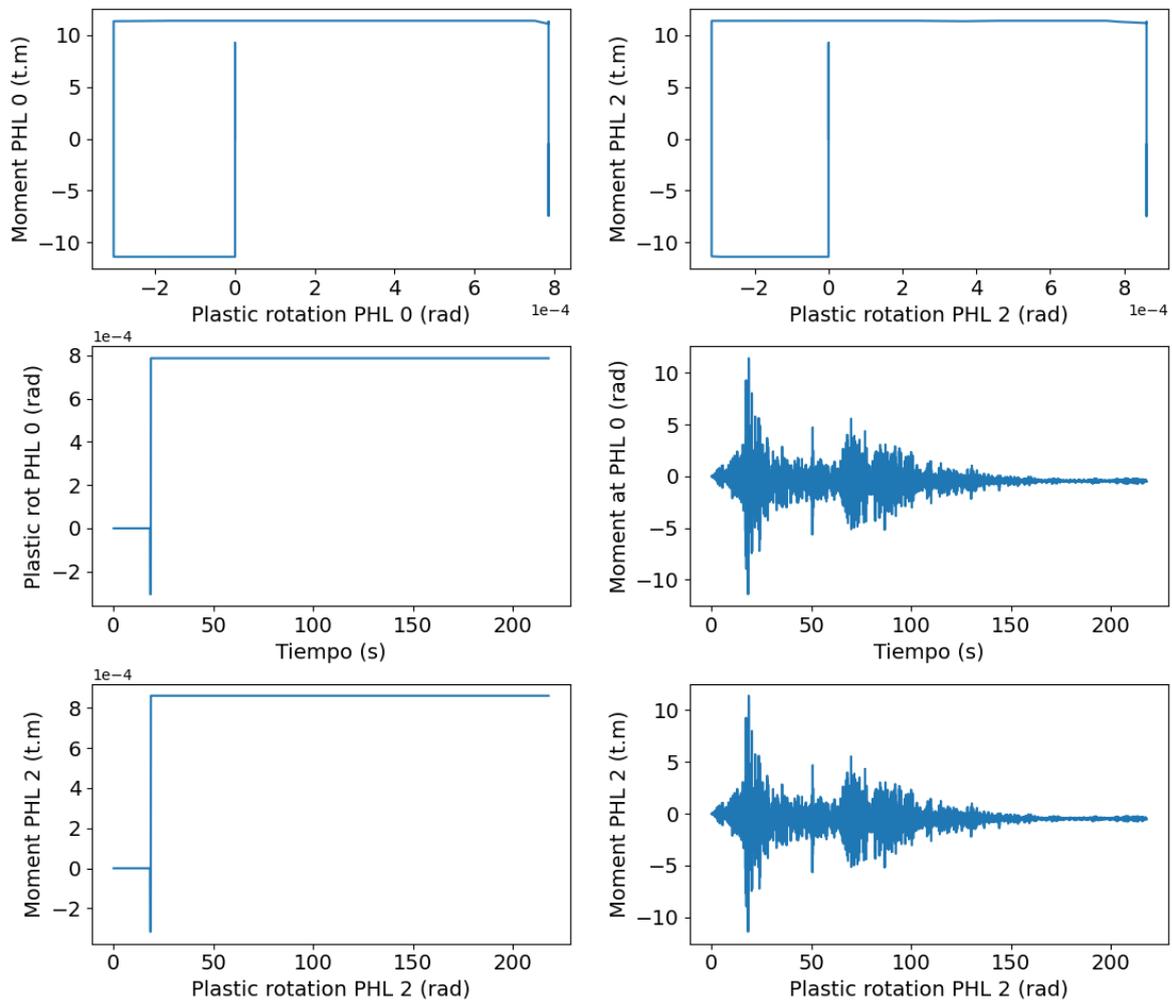


En la **Figura 39**, se presenta la respuesta sísmica del sistema estructural considerado, destacando las curvas momento-rotación plástica para las rótulas plásticas PHL 0 y PHL 2. Al observar estos gráficos, se evidencia que las mencionadas rotulas han superado los límites de fluencia en flexión, dando lugar a la formación de rótulas plásticas y manifestándose en la generación de giros inelásticos. En la misma figura, en las filas 2 y 3, se exhibe la historia de los giros inelásticos tanto para la rótula PHL 0 como para la rótula PHL 2, junto con la historia de momentos asociadas a estas.

Es esencial notar que aproximadamente a los 20 segundos de iniciado el terremoto, la demanda sísmica fue lo suficientemente intensa como para provocar la formación de giros inelásticos en la base de las columnas de la estructura, y estos no se han recuperado, como se puede observar. El efecto del terremoto concluye con giros inelásticos en ambas rótulas, aproximadamente de $8(10)^{-4}$ rad y $8.5(10)^{-4}$ rad, respectivamente.

Figura 39:

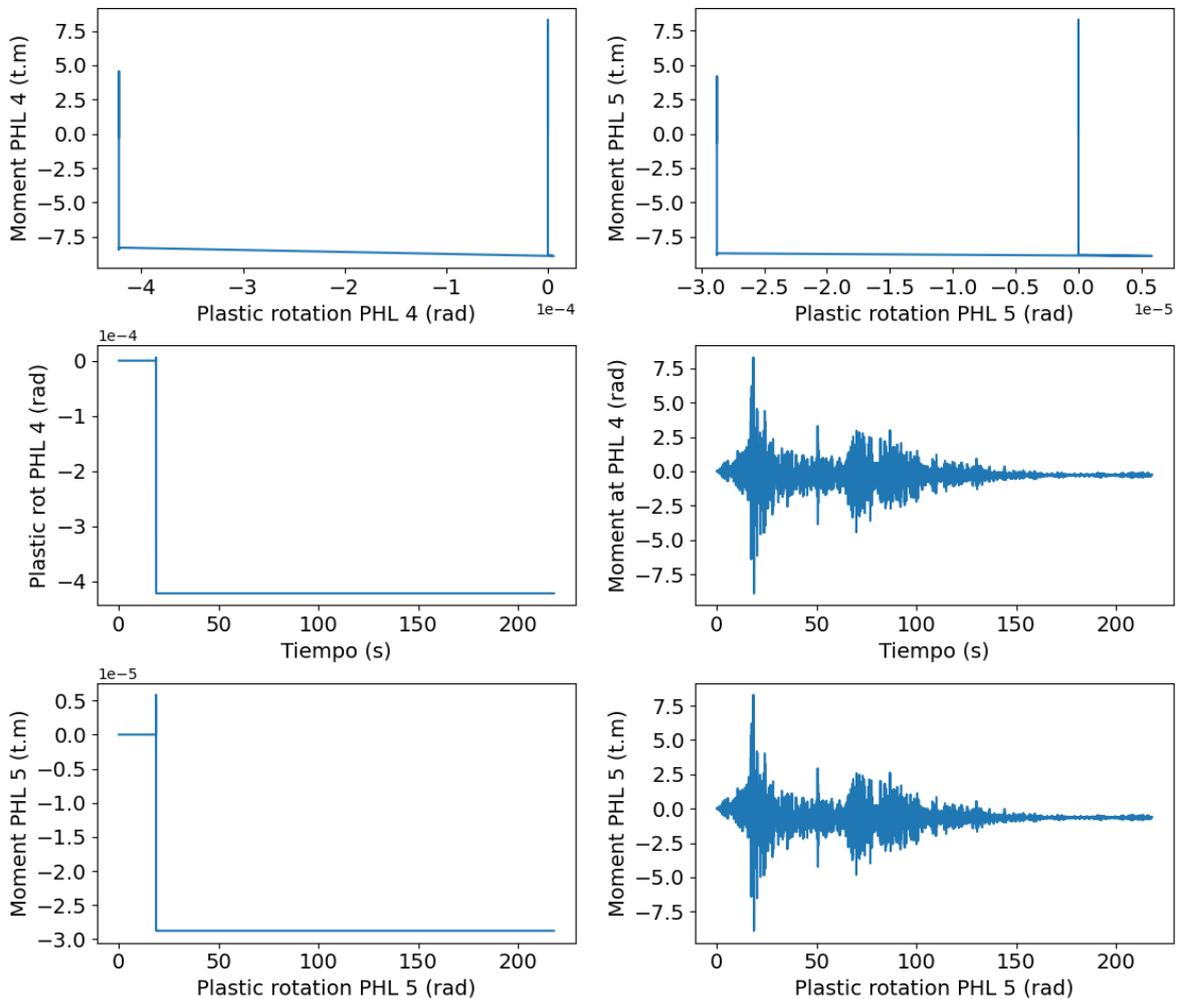
Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 0 y PHL 2 para el sismo de Pisco del 2007.



De manera similar, en la **Figura 40** se presentan las curvas momento-giro inelástico para las rótulas asociadas a la viga, en este caso, las rótulas PHL 4 y PHL 5.

Como se puede apreciar en la primera fila del diagrama adjunto, la demanda sísmica generada alrededor de los 20 segundos provocó una demanda de giros inelásticos de magnitud considerable, alcanzando un valor de aproximadamente $4.5(10)^{-4}$ rad para la rótula PHL 4 y un valor de $3(10)^{-5}$ rad para la rótula PHL 5. Igualmente, en las filas 2 y 3 de la misma figura, se muestran la historia de los giros inelásticos y los momentos asociados. Es relevante destacar la presencia de una deformación residual una vez finalizado el movimiento sísmico.

Figura 40:
Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 4 y PHL 5 para el sismo de Pisco del 2007.

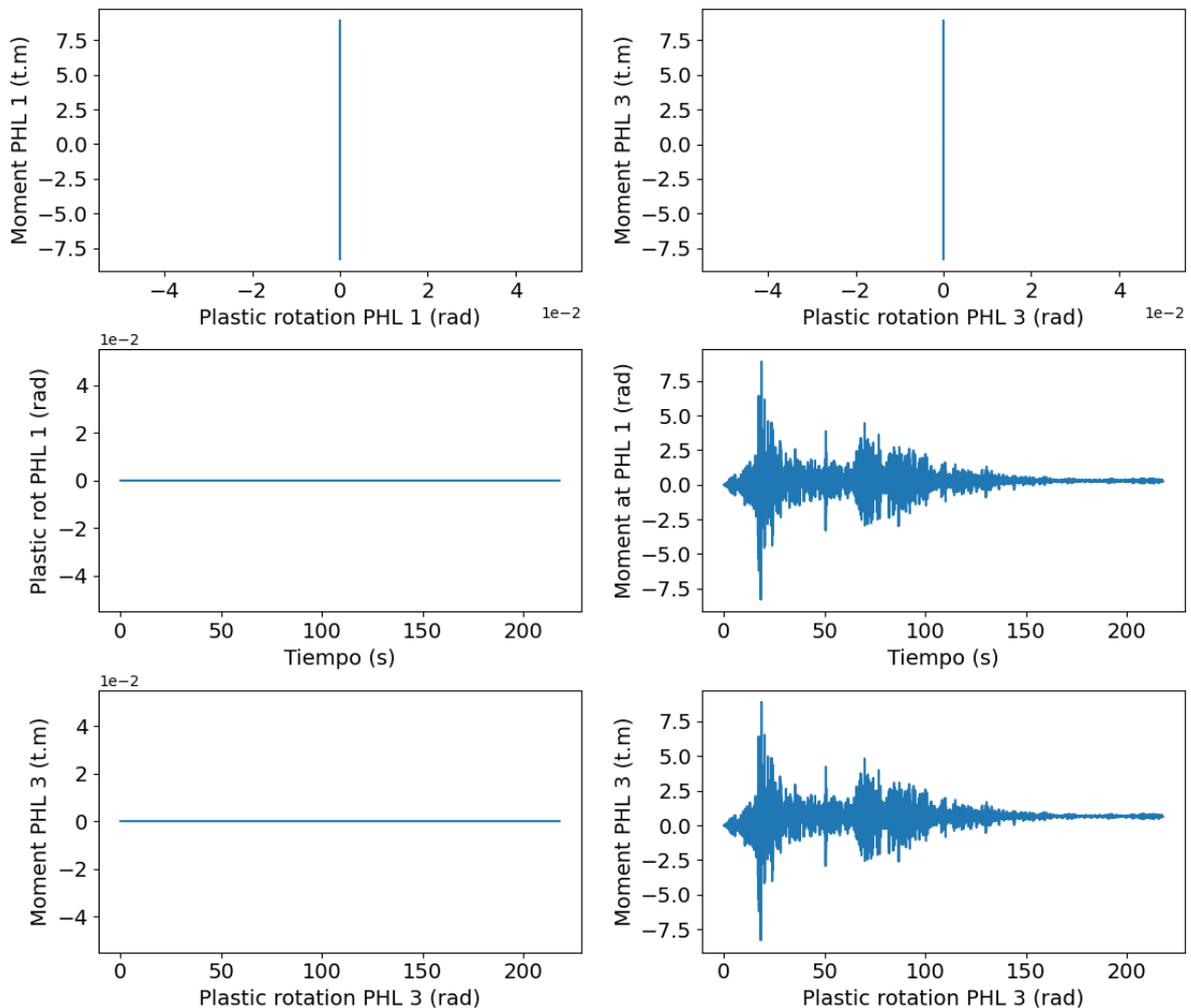


Finalmente, en la **Figura 41** se presentan los resultados obtenidos para las rótulas plásticas número uno y número tres, asociadas a la parte superior de las columnas del sistema estructural considerado en este caso de estudio.

Como se puede apreciar en estos gráficos, en todas las figuras se observa que los giros inelásticos son iguales a cero. Esto indica claramente que estos extremos no han experimentado la demanda sísmica necesaria para formar rótulas plásticas, sugiriendo que estos extremos se han mantenido esencialmente elásticos. Esta conclusión se respalda con los momentos alcanzados, como se puede observar en el diagrama presentado, donde los momentos estuvieron alrededor de 8 t.m, muy por debajo de los 11.9 t.m del momento de fluencia.

Figura 41:

Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 1 y PHL 3 para el sismo de Pisco del 2007.



4.4.1.2 Terremoto de Atico del 2001

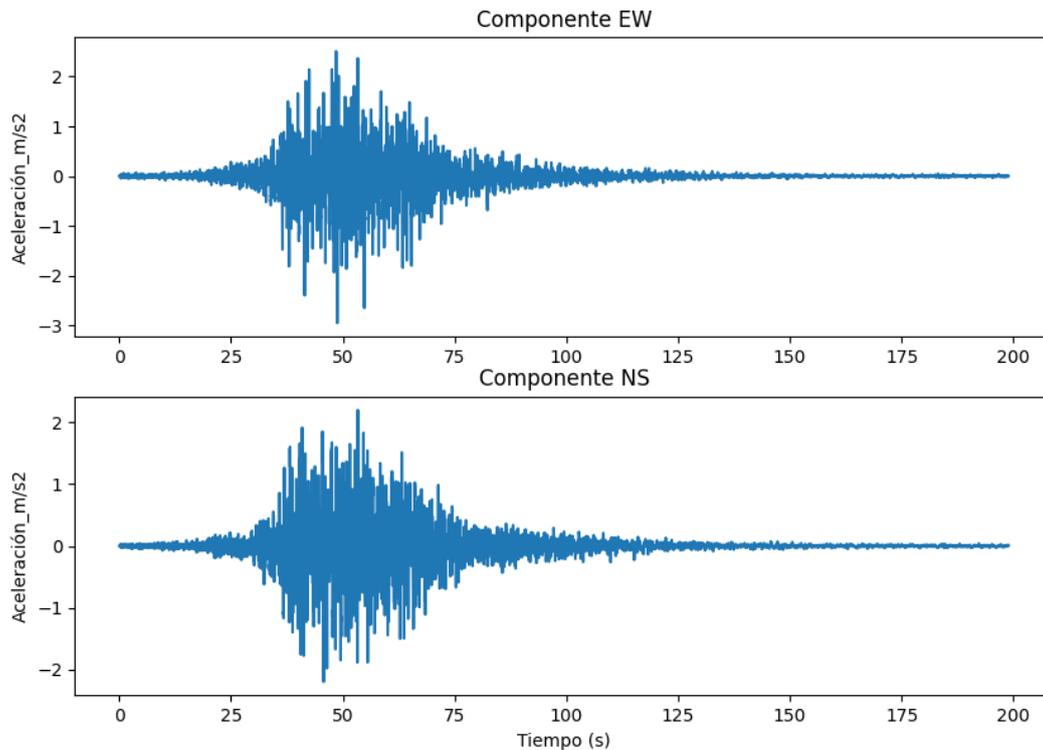
A continuación, se presenta la respuesta sísmica del sistema estructural considerado cuando es sometido a la acción del terremoto de Ático del 2001. El registro sísmico considerado para el siguiente análisis se muestra en la **Figura 42**. Como se puede observar en este gráfico, el registro tiene una duración de aproximadamente 200s con un pico de aceleración (pga) de alrededor de los 2.8 m/s^2 , que ocurrió alrededor de los 50s del registro, tanto en la componente EW como en la componente NS.

En la **Figura 43**, se presenta la respuesta sísmica del sistema estructural considerado frente a la acción del terremoto de Ático 2001. Como se puede observar en esta figura, a diferencia de lo ocurrido cuando se aplicó el sismo de Pisco del 2007, tanto la rótula plástica PHL 0 como la PHL 1 no han exhibido giros inelásticos debido a la acción de este terremoto. Esto se deduce claramente de los gráficos momento PLH0 vs giro plástico y PLH1 vs giro

plástico, en los que se observa una línea vertical que tiene como abscisa el cero, es decir, no hubo rotación plástica, en ningún paso del análisis.

Figura 42:

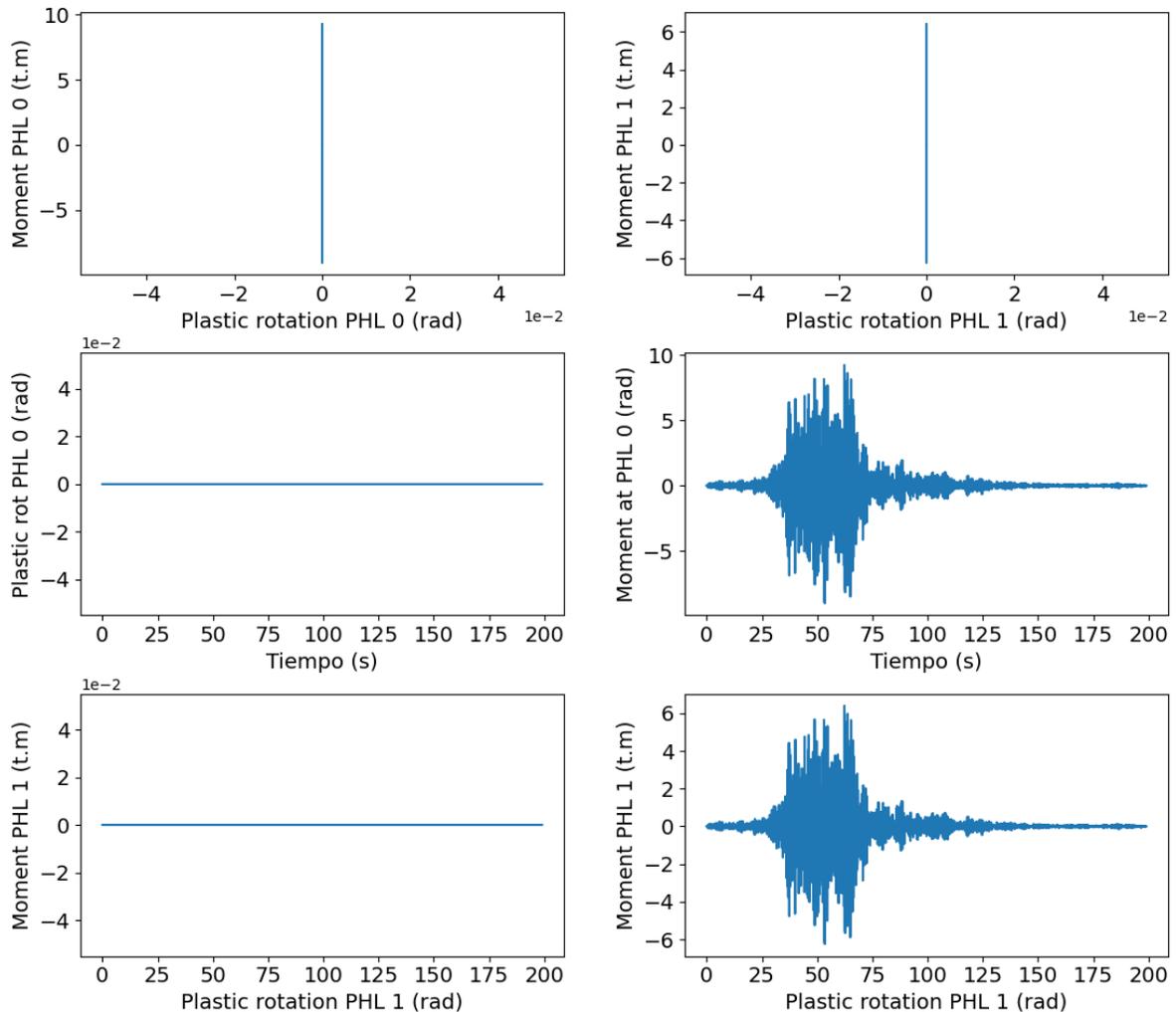
Componentes EW y NS del registro acelerografico del sismo de Atico del 2001.



A esta misma conclusión se puede llegar más fácilmente considerando los gráficos giro plástico PHL 0 vs tiempo y giro plástico PHL 1 vs tiempo, que representa la variación temporal de los giros plásticos demandados en la estructura por la acción del sismo. Como se puede observar estos han permanecido nulos durante todo el análisis, es decir, no se ha producido una rótula plástica en ningún momento.

Se concluye que el registro de aceleración considerado no logró provocar la fluencia de los extremos de las columnas consideradas, es decir, se mantuvieron elásticos durante todo el sismo considerado. Comentarios similares pueden hacerse para las rótulas plásticas número uno, dos, tres, cuatro y cinco. En conclusión, con la acción de este terremoto, todo el sistema de la estructura se mantuvo elástico.

Figura 43:
Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 0 y PHL 1 para el sismo de Atico 2001.



En el mismo grafico también se observa la variación temporal de los momentos actuantes en las rotulas plásticas PHL0 y PHL1. Como se puede observar de estos gráficos, el momento máximo alcanzado fue de 9 t.m para la rótula PHL0 y 6.2 t.m para la rótula PHL1, observándose en ambos casos que estos valores estuvieron por debajo de los momentos de fluencia de estas rotulas.

4.4.1.3 Terremoto de Huaraz de 1970

El siguiente terremoto considerado fue el terremoto de Huaraz de 1970. Como se puede observar en la figura número 43, este terremoto no llegó a superar 1 m/s² cuadrado de aceleración, por lo que puede considerarse un sismo bastante benigno.

Figura 44:
Registro acelerografico del sismo de Huaraz 1970.

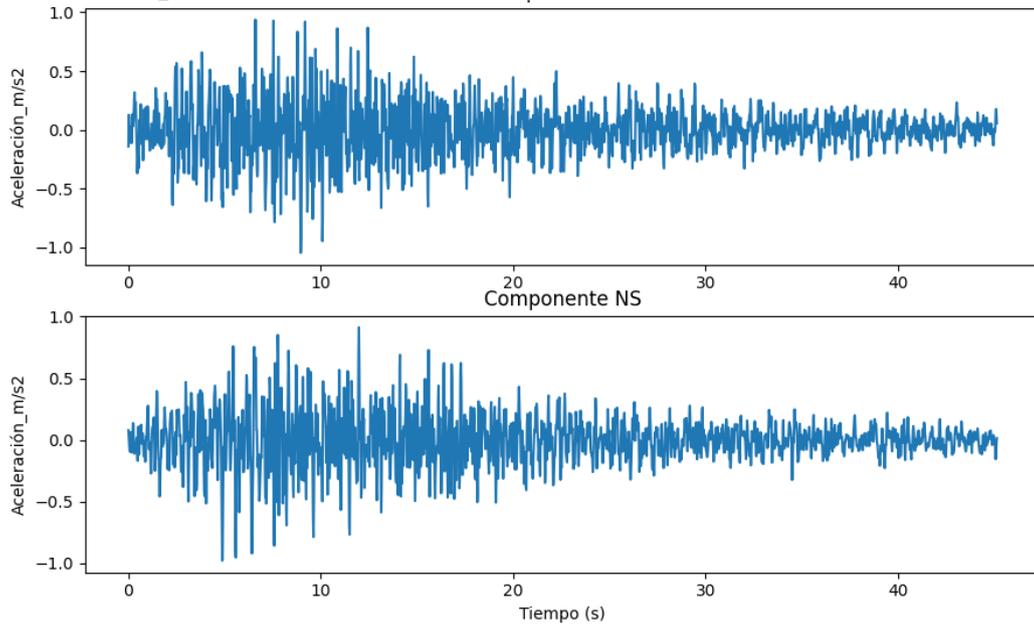
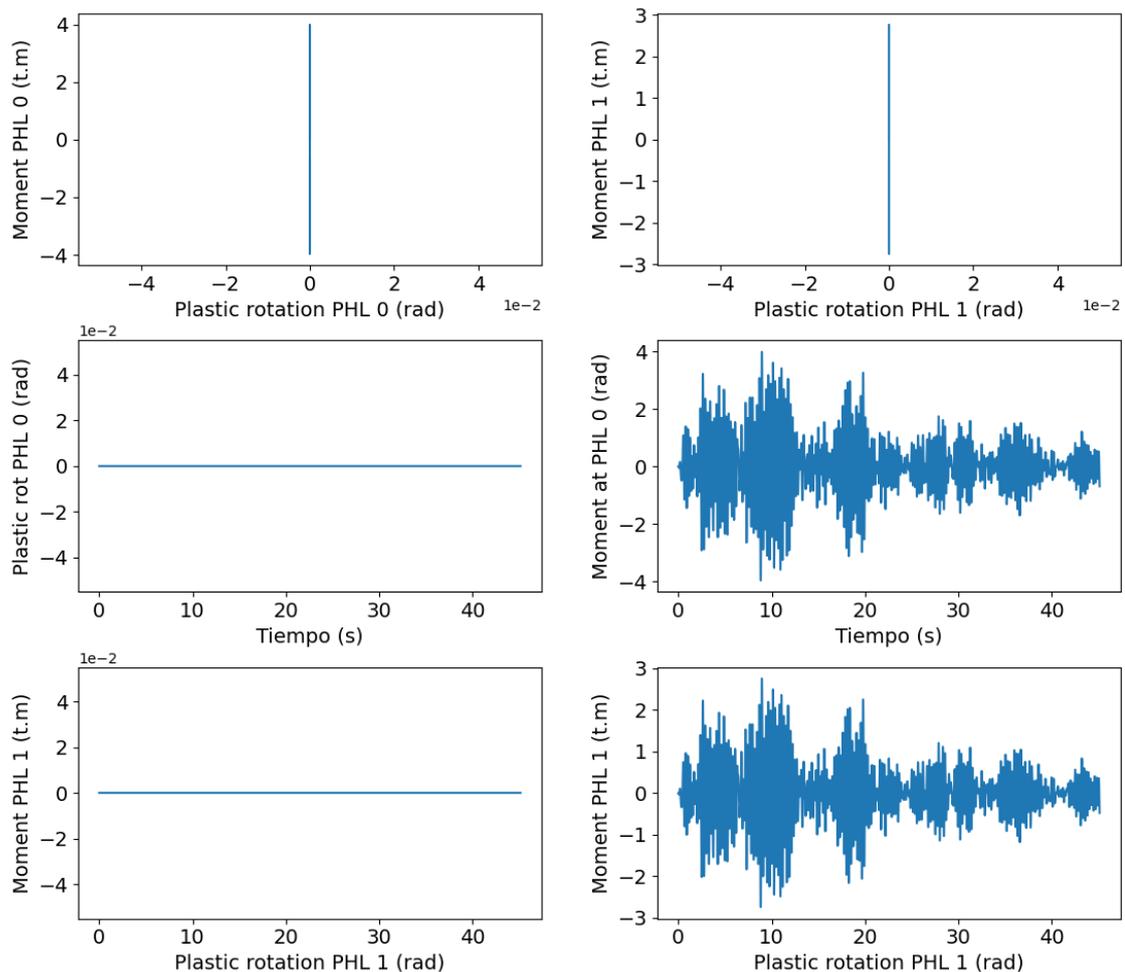


Figura 45:
Comportamiento cíclico de las rotulas plásticas PHL 0 y PHL 1 frente al terremoto del Huaraz 1970.



Al igual que en el caso anterior, la acción sísmica de este terremoto no ha provocado una inclusión inelástica de ningún elemento estructural que compone el sistema analizado. En esencia, todas las rótulas plásticas se mantuvieron elásticas, es decir, los giros inelásticos fueron iguales a cero durante todo el análisis. En la **Figura 46**, se presentan las curvas de comportamiento para las rótulas plásticas PHL 0 y PHL 1.

4.4.2 Pórtico de dos niveles y una crujía

El siguiente caso analizado en este trabajo de investigación consistió en un sistema de dos niveles y una crujía compuesta de columnas de 40 cm por 40 cm con una cuantía de acero mínima del 1% y vigas de 30 por 40 cm. El sistema estructural mencionado se muestra en la figura número 45. Es importante mencionar que se consideraron rótulas plásticas potenciales en todas las columnas y las vigas.

Figura 46:

Modelo estructural de dos niveles y una crujía.

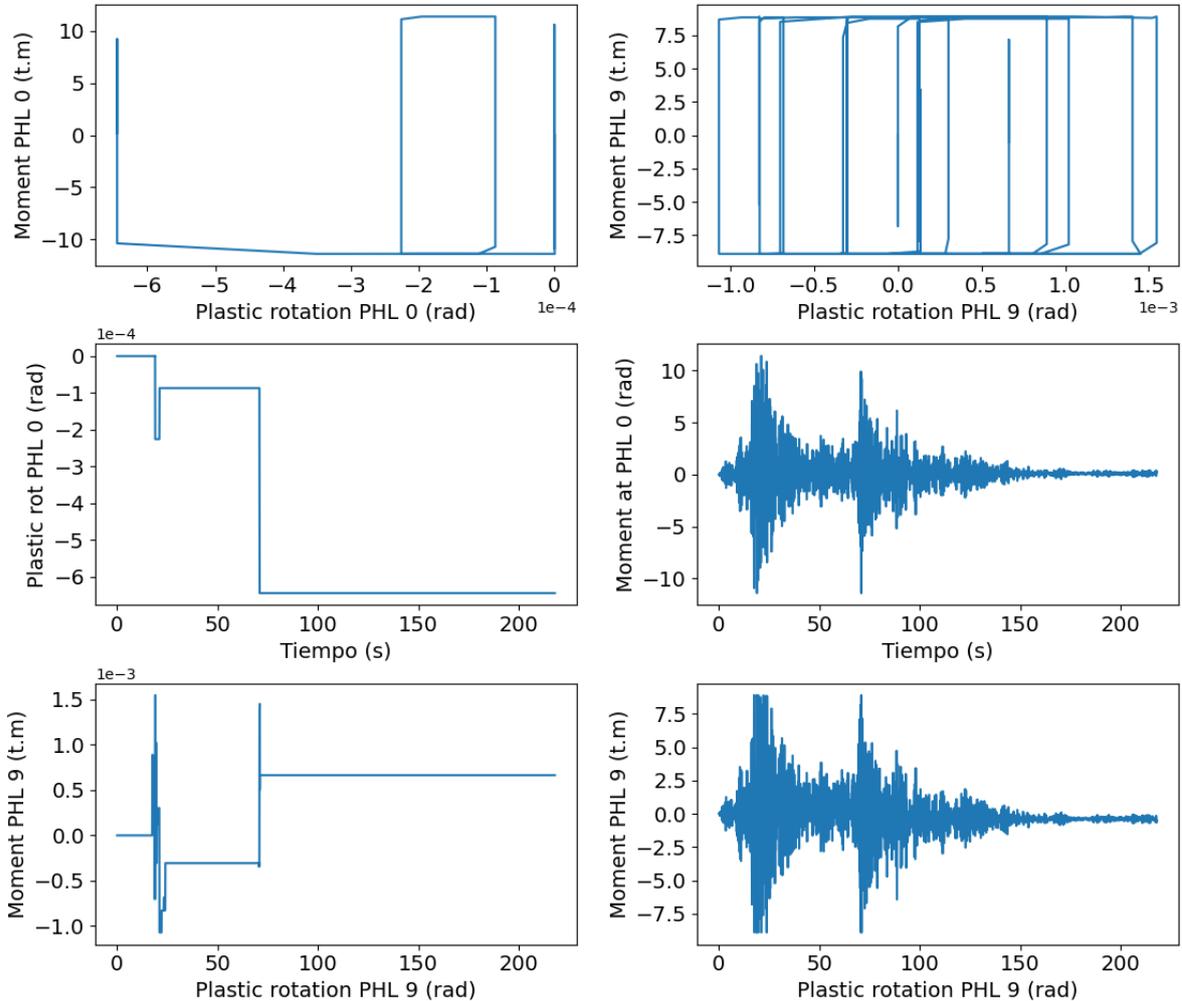


Al igual que en casos anteriores, este sistema estructural ha sido sometido a la acción de tres sismos diferentes, a saber, el terremoto de Pisco del 2007, el terremoto de Ático del 2001 y el terremoto de Huaraz de 1970.

4.4.2.1 Respuesta sísmica ante la acción del Sismo del Pisco del 2007

En la **Figura 47** se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del método a la respuesta sísmica del pórtico de dos niveles presentado en la figura anterior y considerando las secciones transversales mostradas en la misma figura.

Figura 47:
 Respuesta cíclica de las rótulas PHL 0 y PHL 9 frente al sismo de Pisco del 2007.

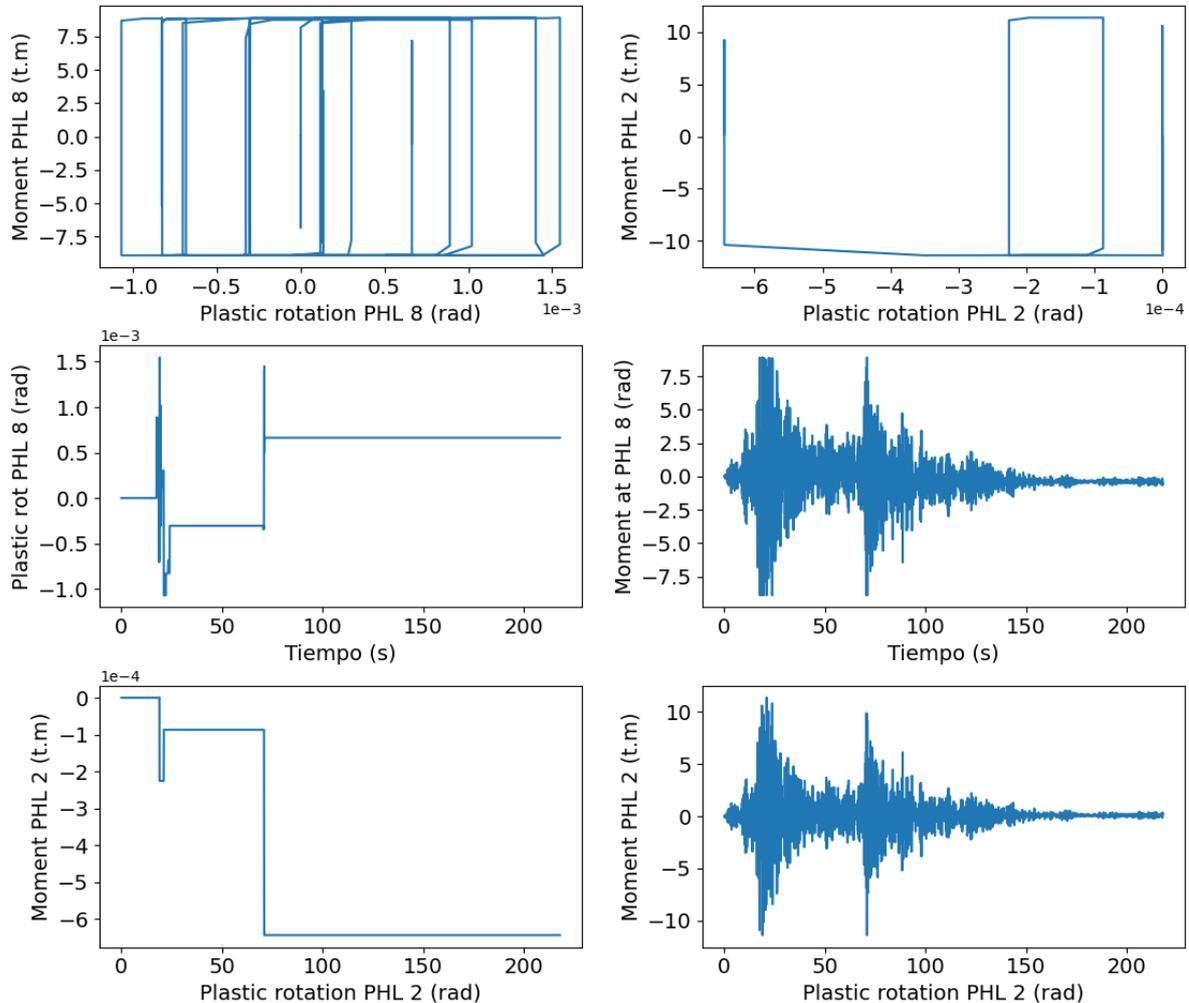


Como se puede apreciar, las rótulas plásticas PHL 0 y PHL 9 se desarrollaron, dejando giros inelásticos residuales de magnitudes considerables, siendo estas de $-6(10)^{-4}$ rad para la rótula PHL 0 y $1.5(10)^{-3}$ rad para la rótula PHL 09. Asimismo, se ha observado que los momentos de fluencia fueron alcanzados en diferentes instantes, iniciando esto alrededor del segundo 20.

De igual forma, en la **Figura 48** se muestran los resultados obtenidos para las rótulas plásticas PHL 8 y PHL 2. Estas son las rótulas existentes en la viga del primer nivel, extremo izquierda, y la rótula plástica de la columna derecha del primer nivel, en la base.

Figura 48:

Respuesta cíclica de las rótulas PHL 8 y PHL 2 frente al sismo de Pisco del 2007. Fuente: Elaboración propia.



Como se puede apreciar en estas figuras, la acción del terremoto considerado ha provocado una demanda de desplazamientos inelásticos variable y continua en ambas rótulas. Sin embargo, puede observarse que fue la rótula formada en la viga del primer nivel la que ha sufrido mayor inversión y cambio de signo de la demanda de giro inelásticos. Se observa del gráfico que el giro inelástico residual en la rótula PHL 8 tuvo un valor de aproximadamente $1.3(10)^{-3}$ rad, mientras que el giro inelástico residual en la columna, es decir, en la rótula PHL 2, tuvo un valor de aproximadamente $-7(10)^{-4}$ rad.

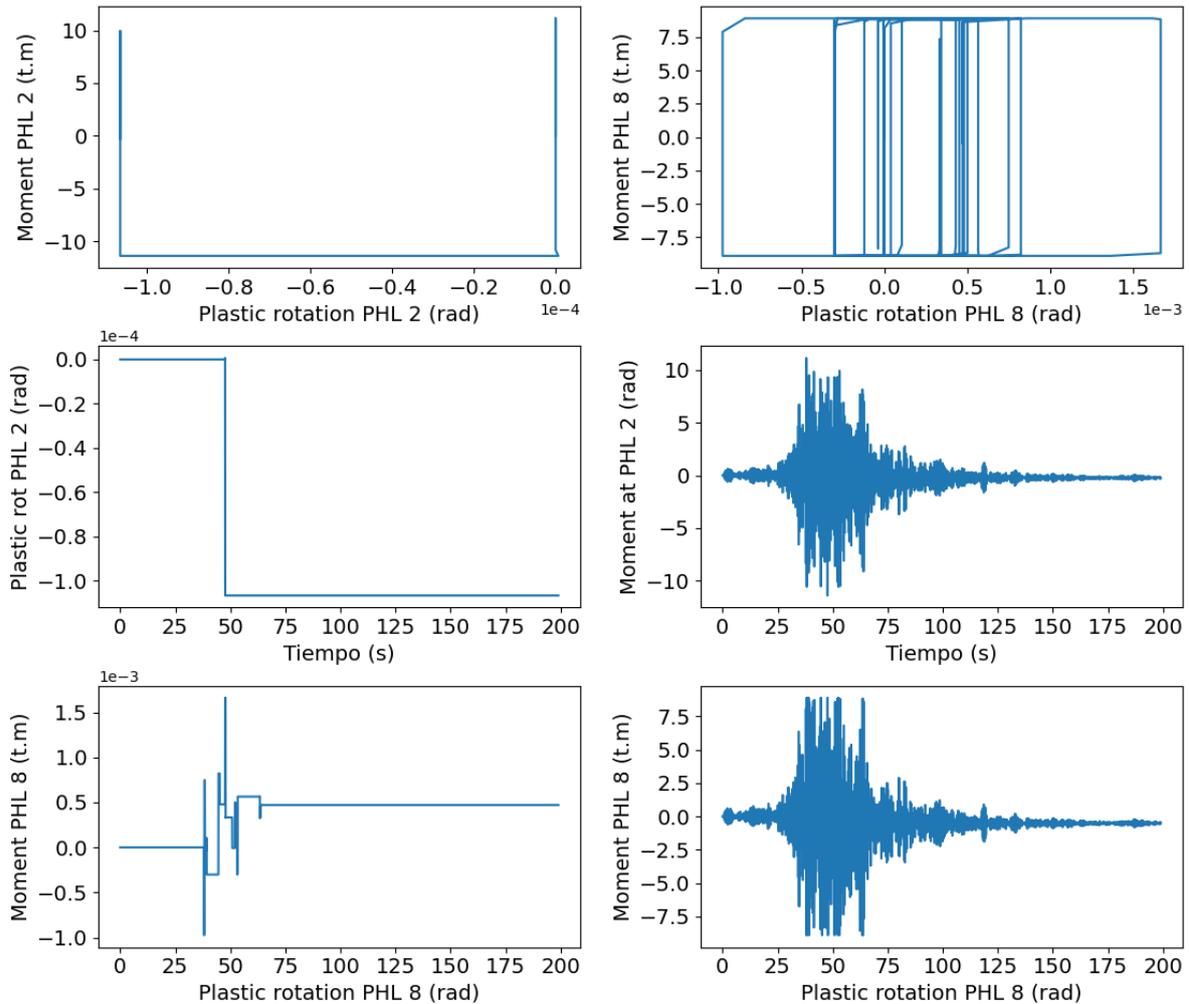
4.4.2.2 Respuesta sísmica ante la acción del Sismo de Atico del 2001

La estructura analizada también fue sometida a la acción del terremoto de Ático del 2001. Los resultados del comportamiento cíclico de las rótulas phl2, formada en la base de la columna derecha del primer nivel de la estructura, y la rótula plástica pH I8, formada en la

viga del primer nivel extremo izquierdo, se muestran en la figura número 48, presentada a continuación.

Figura 49:

Respuesta cíclica de las rotulas PHL 2 y PHL 8 frente al sismo de Atico del 2001.

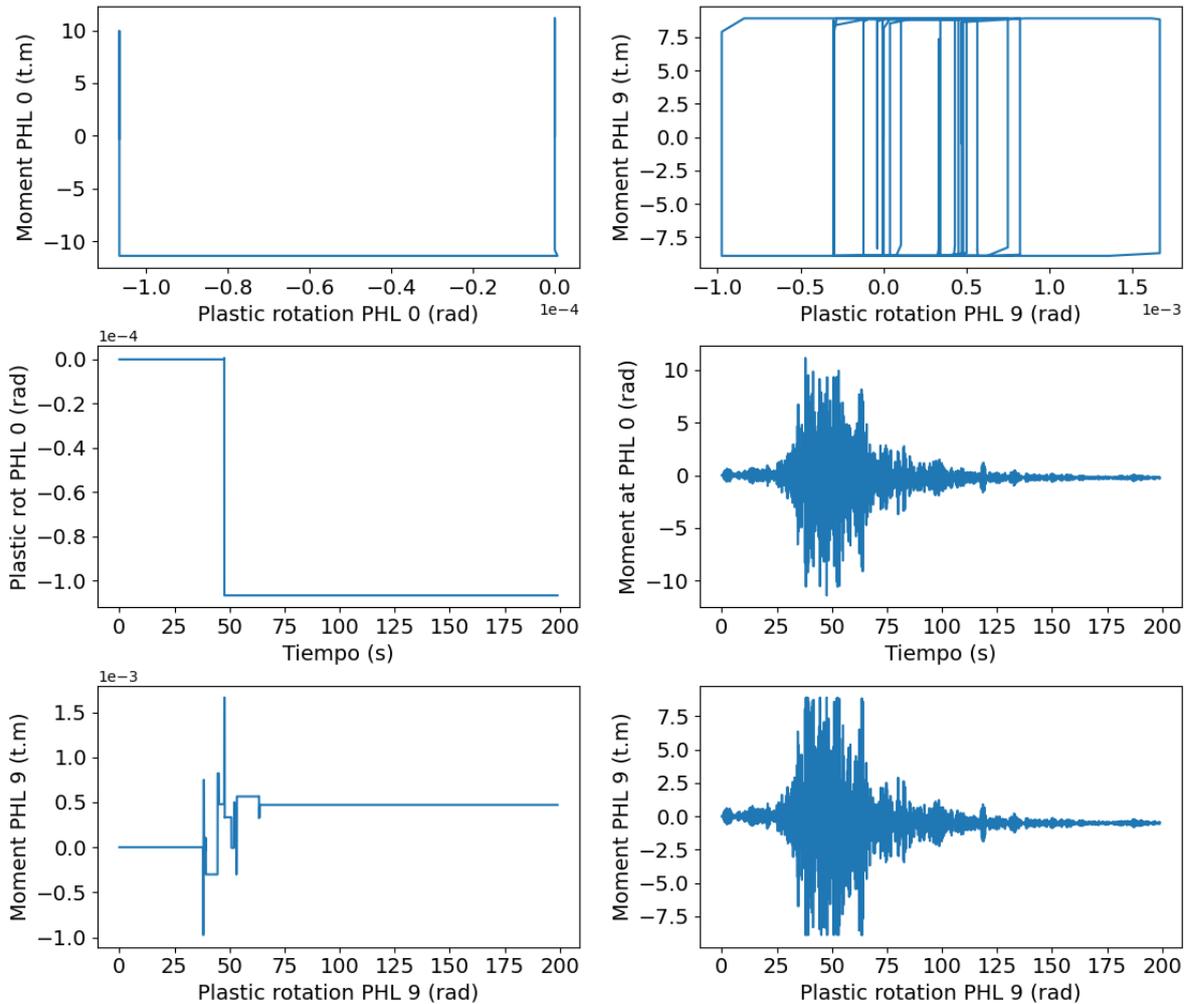


Al igual que en el caso anterior, se puede apreciar que el terremoto considerado ha generado grandes solicitaciones de giro inelástico en la rótula plástica formada en la viga del primer nivel. De la misma figura, se pueden observar las inversiones de giro inelástico producidas durante la acción del terremoto. De igual forma, la columna y la viga del primer nivel han experimentado grandes demandas elásticas, alcanzando un giro inelástico residual de alrededor de $-1(10)^{-4}$ rad, mientras que este mismo parámetro en el caso de la viga considerada fue de alrededor de $0.5(10)^{-3}$ rad.

De manera similar, en la **Figura 50** se presentan las curvas de comportamiento de las rótulas plásticas PHL 0 y PHL 9, las cuales se formaron en la base de la columna izquierda del primer nivel y en el extremo derecho de la viga del primer.

Figura 50:

Respuesta cíclica de las rotulas PHL 0 y PHL 9 frente al sismo de Atico del 2001.



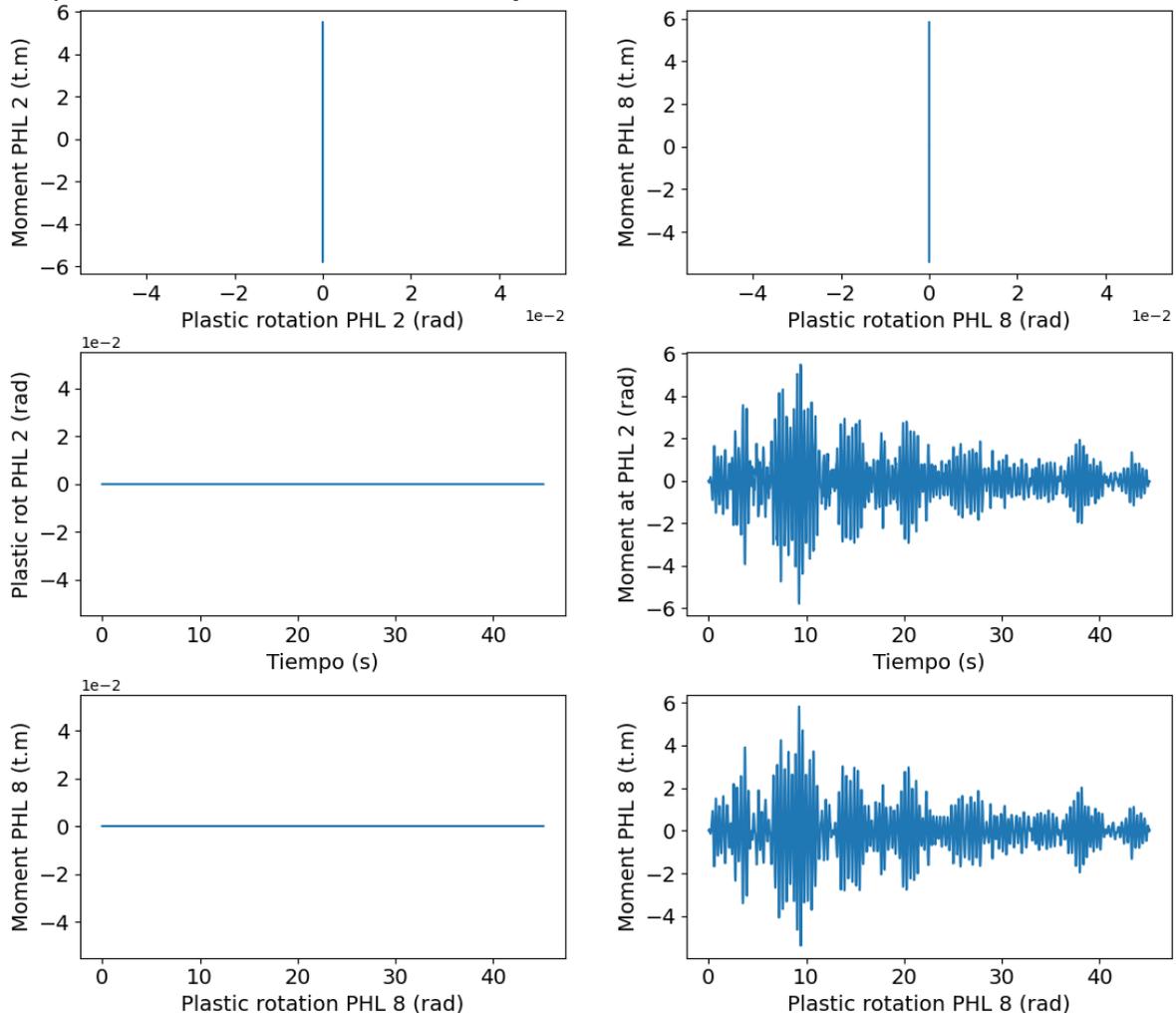
En los gráficos, se observa que la columna experimentó una demanda de giro inelástico considerable. Sin embargo, durante todo el movimiento sísmico, solo hubo una demanda inelástica de este tipo, ya que, una vez ocurrido este giro inelástico, se mantuvo residual y constante. Una situación muy diferente ocurre en el caso de la viga, que experimenta inversiones de signo en los giros inelásticos, iniciándose alrededor de los 28 s del registro sísmico y finalizando alrededor de los 60 s, un intervalo de tiempo que coincide con los picos de aceleración del registro sísmico considerado.

4.4.2.3 Respuesta sísmica ante la acción del sismo de Huaraz 1970

En esta sección se muestra la respuesta sísmica obtenida de la edificación estudiada cuando es sometida al registro sísmico del terremoto de Huaraz de 1970.

Figura 51:

Respuesta cíclica de las rótulas PHL 2 y PHL 8 frente al sismo de Huaraz 1970.



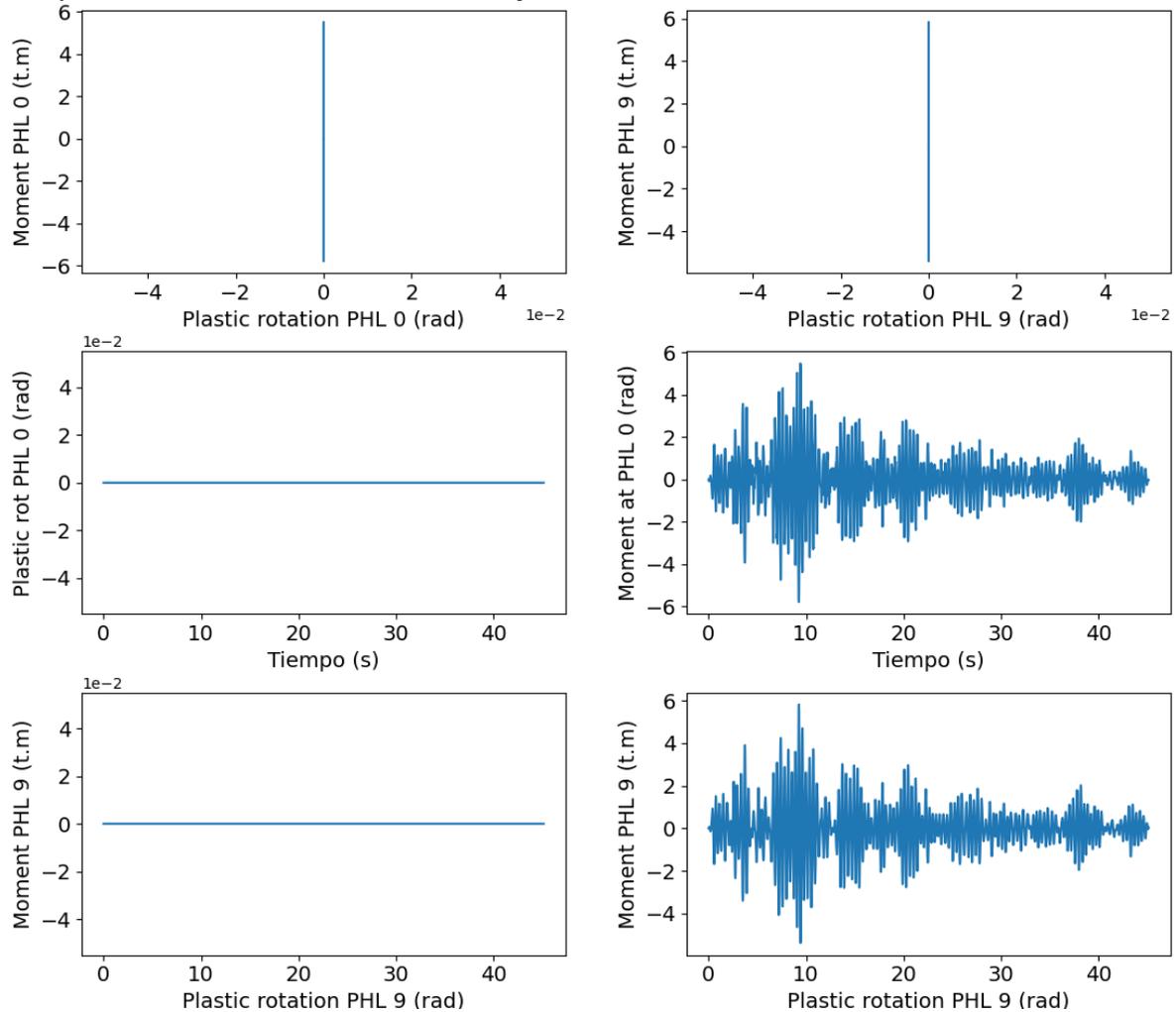
En la **Figura 51**, se presenta la respuesta cíclica obtenida en las rótulas PHL 2 y PHL 8, ubicadas en la base de la columna derecha y el extremo izquierdo de la viga del primer nivel, al mismo estilo de las presentadas en las secciones anteriores.

Como se puede observar en estos gráficos, la demanda sísmica generada por este registro de aceleración no ha sido lo suficientemente intensa como para generar la formación de giros inelásticos en ninguna de las rótulas consideradas, por lo que se puede decir que el sistema se ha mantenido esencialmente elástico.

De igual forma, en la **Figura 52** se muestra el comportamiento cíclico de las rótulas PHL 0 y PHL 9. Como se puede apreciar en estas figuras, ha ocurrido algo muy similar a lo observado en las rótulas plásticas mostradas anteriormente.

Figura 52:

Respuesta cíclica de las rotulas PHL 0 y PHL 9 frente al sismo de Huaraz 1970.



Se observa que no ha habido demanda de giros inelásticos en ninguna de las rótulas presentadas, por lo que se puede decir con toda certeza que la estructura se ha mantenido esencialmente elástica durante la acción de este terremoto. Esto se puede corroborar al observar las demandas de momentos flectores en dichas rótulas, encontrando que el momento máximo demandado estuvo alrededor de 6 t.m en el caso de la rótula plástica PHL 0, es decir, en la base de la columna. Mientras que el momento flector máximo demandado en la viga estuvo en alrededor de 6 t.m. Estos valores están por debajo de los momentos de fluencia considerados para estos elementos estructurales.

4.4.3 Pórtico de dos niveles y dos crujías

El caso de estudio presentado en esta sección consiste en un pórtico de dos niveles y dos crujías con columnas de concreto armado de sección transversal de 40 cm x 40 cm, con una cuantía de acero longitudinal de ocho varillas de diámetro de 5/8 de pulgada y vigas de sección transversal de 30cm x 40cm y un refuerzo longitudinal de 6 varillas de 5/8 de pulgada, tal como se muestra en la figura adjunta.

Figura 53:

Pórtico de dos crujías y dos niveles de concreto armado.



Al igual que en los casos presentados anteriormente, esta estructura fue sometida a la acción de tres registros sísmicos, siendo ellos el terremoto de Pisco ocurrido en el 2007, el terremoto de Ático en el 2001 y el terremoto de Huaraz de 1970. Los resultados del análisis dinámico no lineal se muestran a continuación.

4.4.3.1 Respuesta sísmica ante la acción del sismo de Pisco 2007

En la **Figura 54** se muestra el comportamiento cíclico de las rótulas PHL 0 y PHL 12 del sistema estructural analizado.

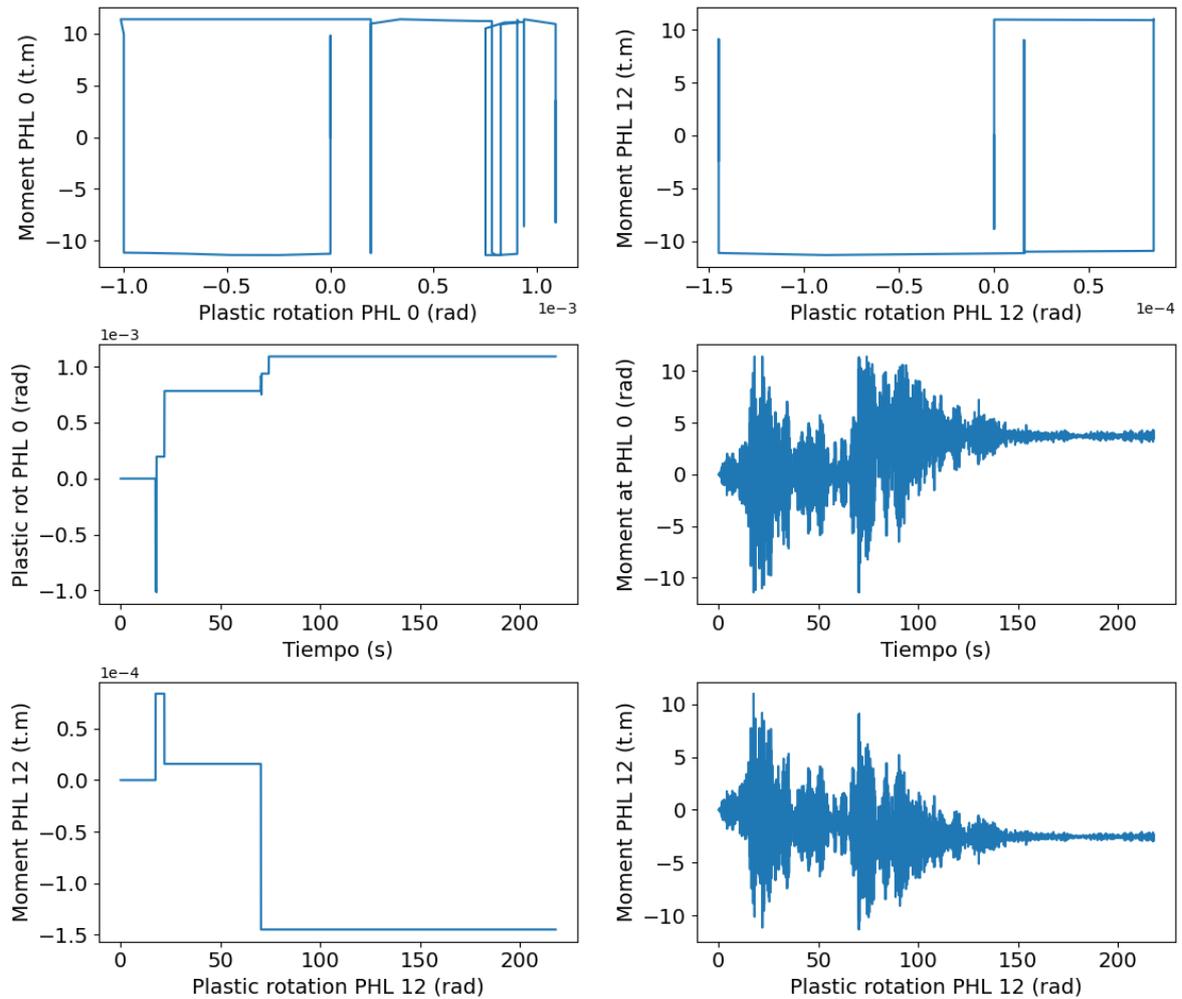
Conviene recordar que la rótula PHL 0 corresponde a la rótula de la columna izquierda del primer nivel, formada en la base de esta columna, mientras que la rótula PHL 12 se corresponde con la rótula plástica formada a la izquierda de la viga del primer nivel, ubicada en la primera cruja.

De este gráfico se aprecia que la rótula PHL0 ha producido giros plásticos a lo largo del análisis, encontrando que la primera incursión en el rango no lineal de comportamiento se dio alrededor del instante 20s, en el que el giro plástico alcanzó un valor de $-1.0(10)^{-3}$ rad, posteriormente este valor tuvo diferentes valores a lo largo del tiempo.

Una situación similar ocurrió con la rótula plástica PHL 12, en la que observó un valor de giro inelástico de alrededor $1(10)^{-4}$ rad en aproximadamente 20s de iniciado el análisis, posteriormente este parámetro fue variando a lo largo del tiempo hasta llegar al valor residual del giro plástico.

Figura 54:

Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 0 y PHL 12 ante el sismo de Pisco 2007.

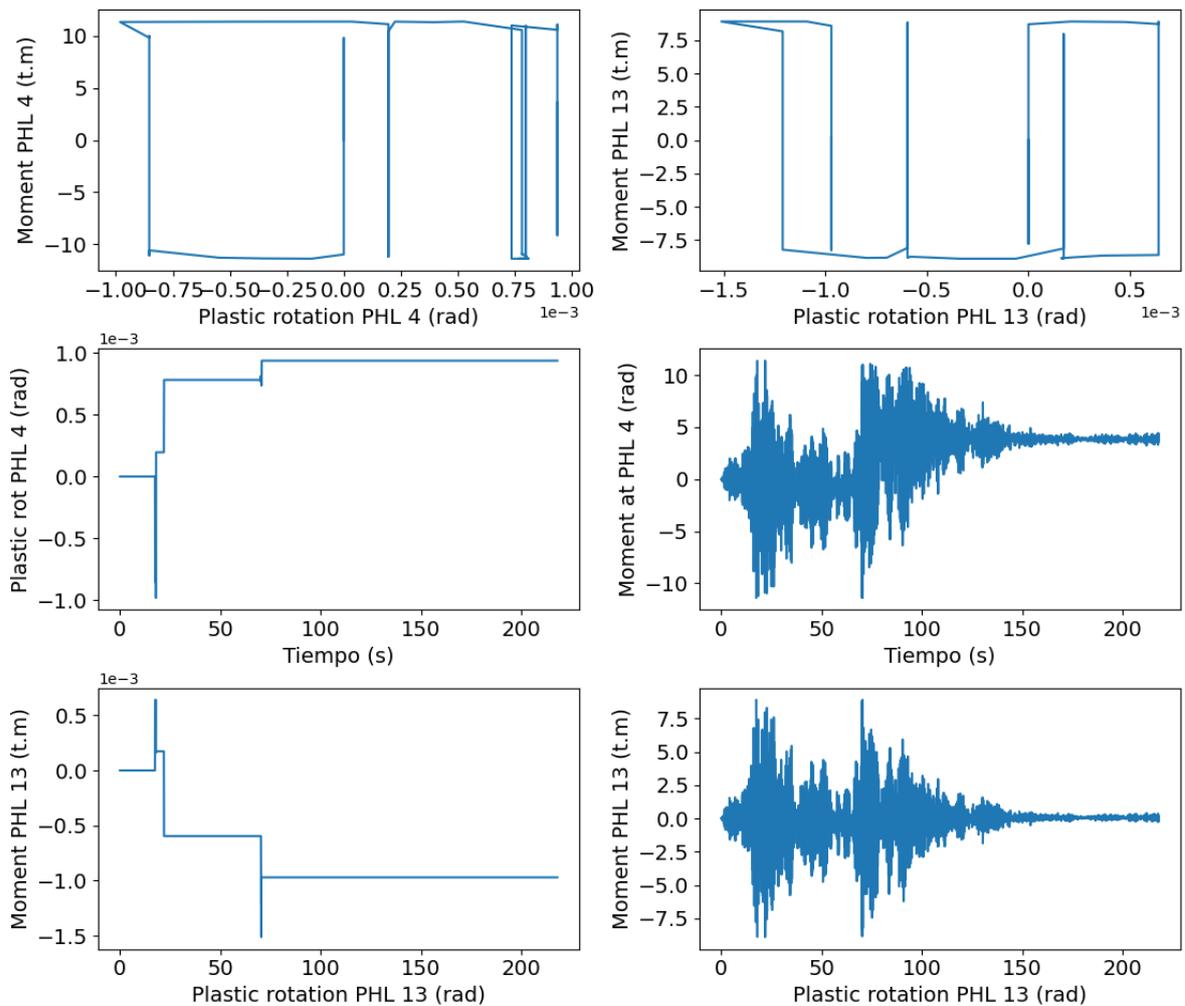


Como se puede apreciar en este gráfico, el registro sísmico considerado ha provocado giros inelásticos considerables tanto en la columna como en la viga. Después de la aplicación del registro sísmico, la columna ha tenido un giro inelástico residual de alrededor de $1(10)^{-3}$ rad, mientras que el giro inelástico en la viga ha sido de aproximadamente $-1.5(10)^{-4}$ rad.

En la misma figura también se presenta la variación de los momentos en las rotulas plásticas en función del tiempo. Como se puede observar de este gráfico, los valores máximos de fluencia fueron alcanzados en varios momentos del análisis, lo que ha provocado un momento residual en estas rotulas plásticas.

Comentarios similares puede hacerse para otras rotulas plásticas consideradas en el modelo analítico. En la **Figura 55** se muestran la variación de los momentos de fluencia y los giros plásticos para las rotulas plásticas PHL 4 y PHL 13.

Figura 55:
Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 4 y PHL 13 ante el sismo de Pisco 2007.



4.4.3.2 Respuesta sísmica ante la acción del sismo de Atico 2001

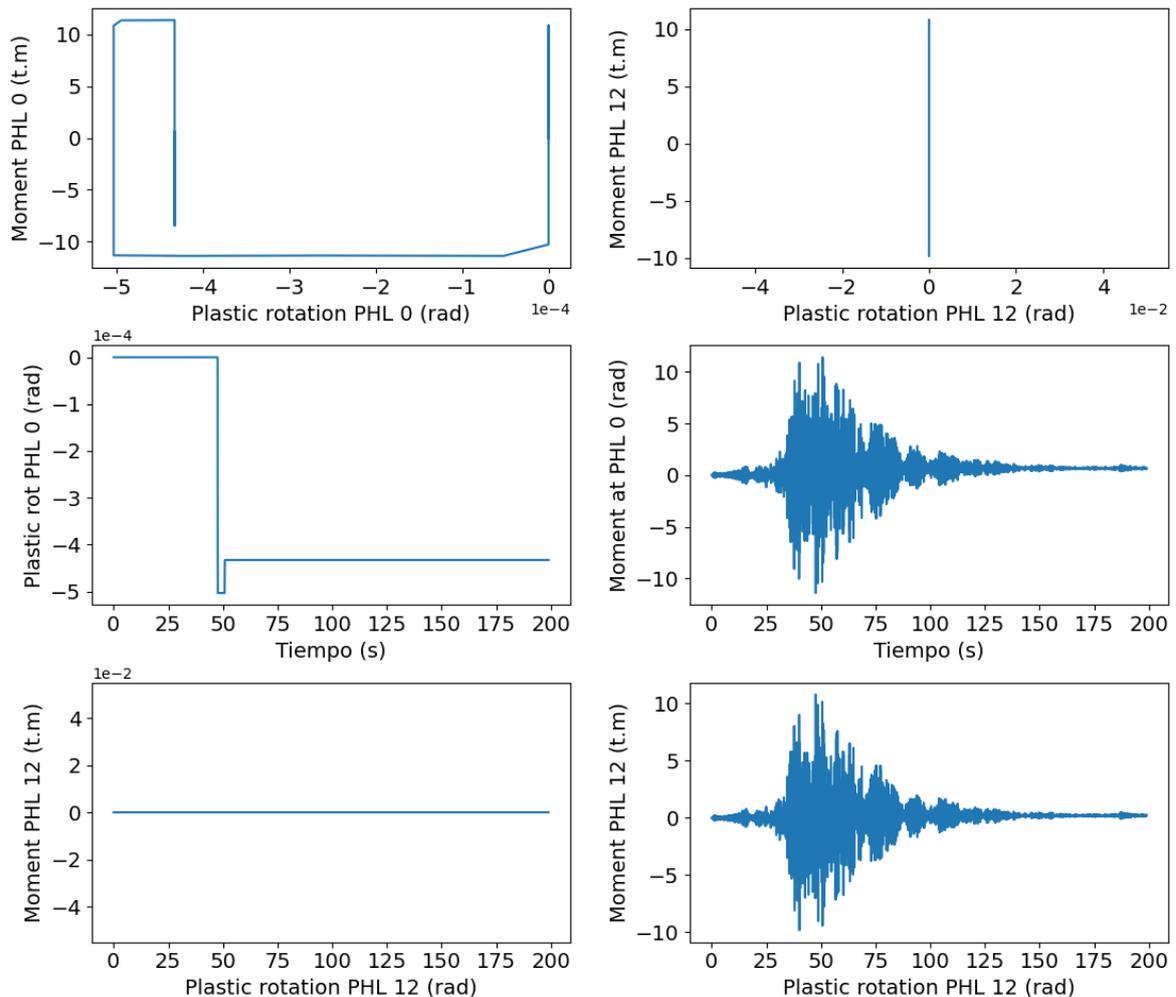
En esta sección se consideró el mismo análisis, pero colocando como sismo de ingreso las componentes del registro de aceleración de Atico 2001. Posteriormente se realizó el análisis tiempo historia no lineal para evaluar el comportamiento de las rotulas plásticas y el comportamiento global del sistema estructural.

En la **Figura 56** se presenta la respuesta sísmica del sistema estructural cuando es sometido al registro sísmico de Ático del 2001. De hecho, en esta figura se muestra tanto

el comportamiento cíclico como el comportamiento tiempo-historia de las rótulas plásticas PHL 0 y PHL 12. Al igual que en los casos anteriores, PHL 0 corresponde a la rótula plástica formada en la base de la columna izquierda del primer nivel, y PHL 12 es la rótula plástica ubicada en la viga izquierda del primer nivel, perteneciente a la primera cruja.

Figura 56:

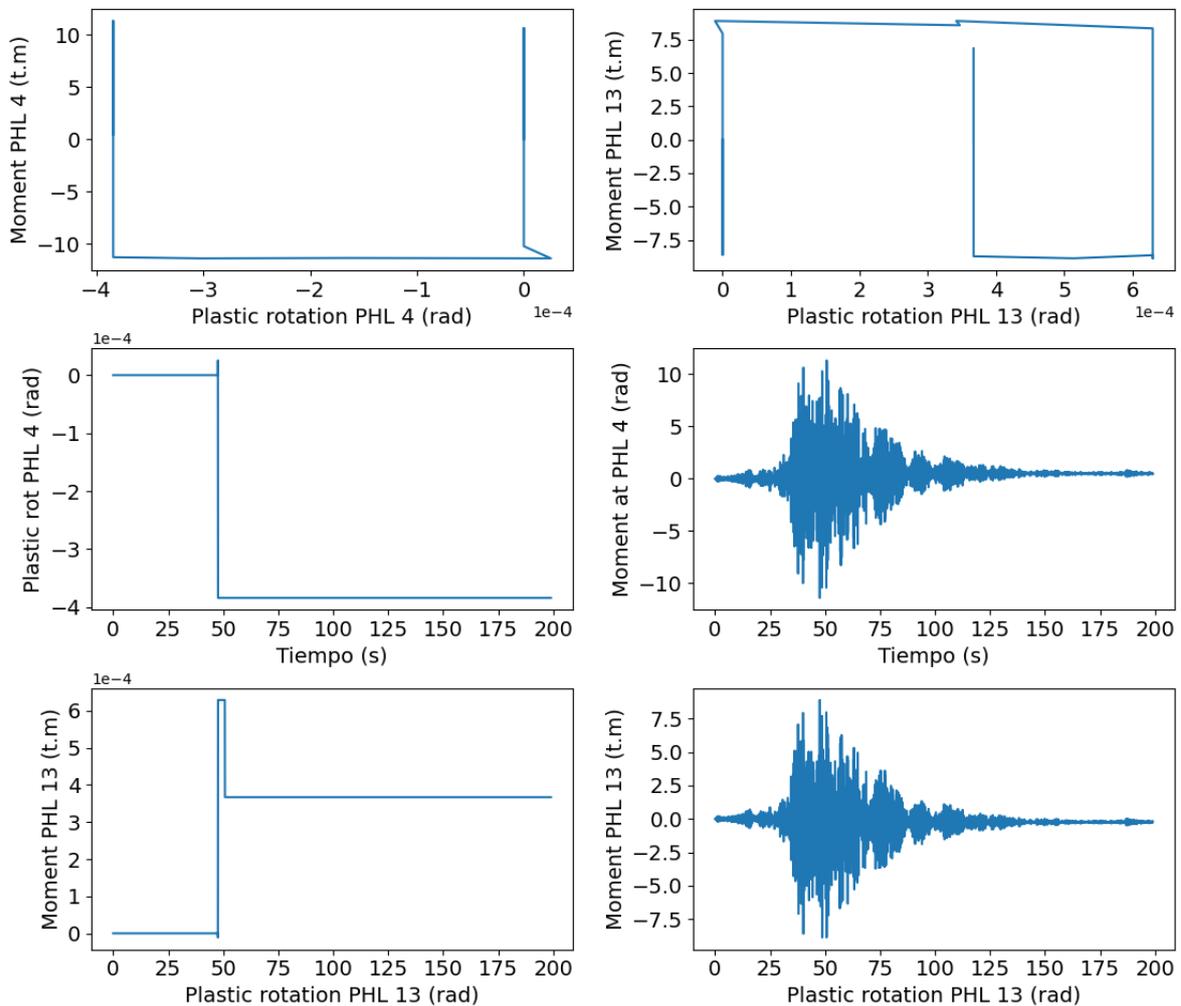
Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 0 y PHL 12 ante el sismo de Atico 2001.



De este gráfico se observa que el registro de aceleración considerado generó la formación de una rótula plástica en la columna izquierda, específicamente en la base, provocando una demanda de desplazamiento inelástico de $5(10)^{-4}$ rad. Sin embargo, la demanda sísmica considerada no fue capaz de generar una rótula plástica en el extremo izquierdo de la viga considerada, como se puede apreciar en la figura adjunta, ya que los desplazamientos inelásticos fueron cero en todo el proceso de análisis.

Figura 57:

Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 4 y PHL 13 ante el sismo de Atico 2001.



4.4.3.3 Respuesta sísmica ante la acción del sismo de Huaraz 1970

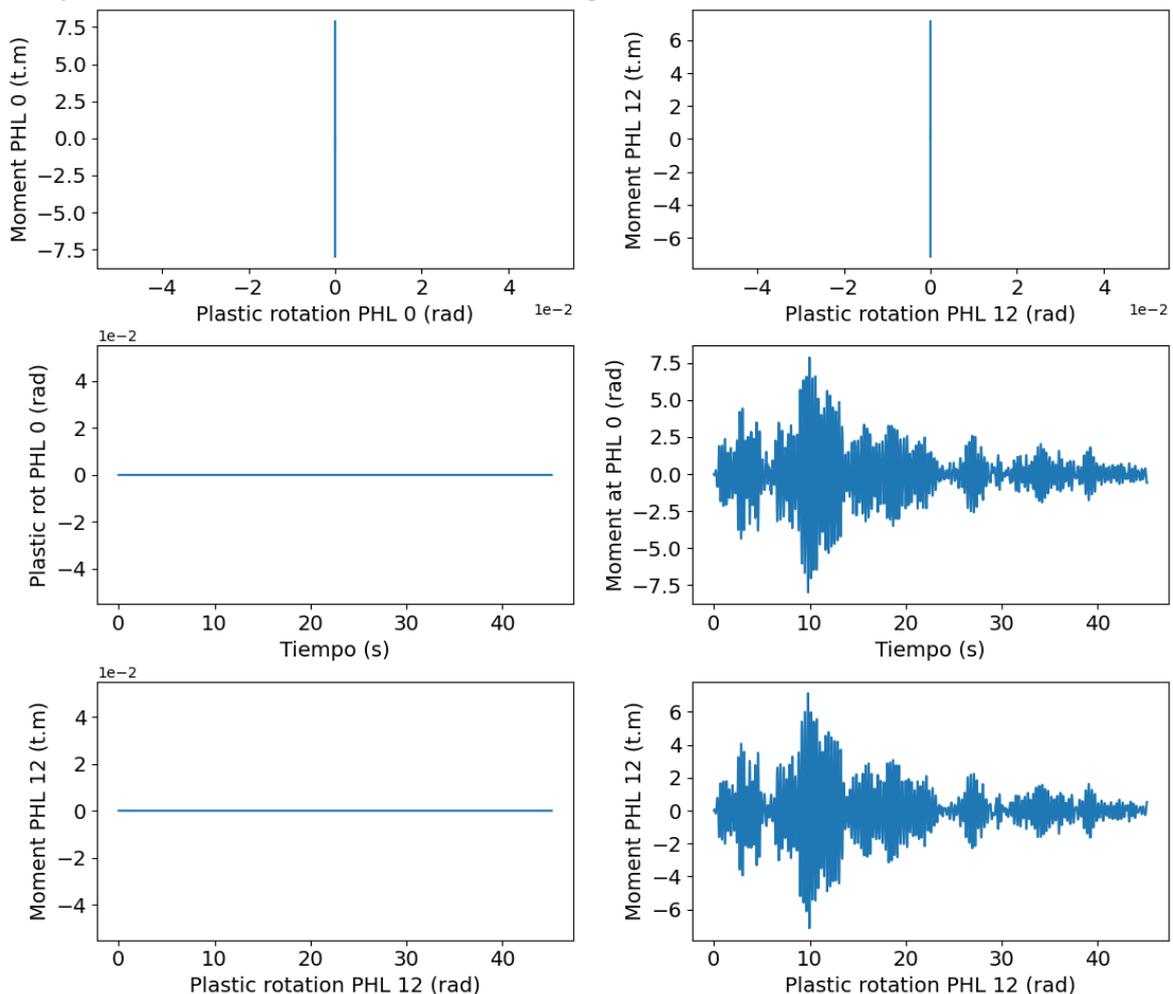
El tercer registro de aceleración considerado para obtener la respuesta sísmica de la edificación analizada fue el registro sísmico de Huaraz de 1970. Los resultados del comportamiento cíclico de las potenciales rótulas plásticas PHL 0 y PHL 12 se muestran en la **Figura 58**.

De este gráfico se puede observar con claridad que, para el caso de la rótula PHL 0, el registro de aceleraciones considerado no logró inducir la generación de una rótula plástica, y, por tanto, los giros inelásticos asociados fueron cero durante todo el análisis. Esto se puede observar en el gráfico, momento PHL 0 vs Rotación plástica, en el que aparece una línea vertical centrada en el origen. Este gráfico muestra que el momento en la rótula plástica tuvo una variación que va desde -7.5 t.m hasta un momento de 7.5 t.m, es decir, un momento inferior al momento de fluencia, que para este caso tuvo un valor de 11.4 t.m.

En cuanto a la potencial rótula plástica asociada a la viga de concreto armado, PHL 12, se observa en el grafico momento PHL 12 vs Rotación plástica que, durante todo el proceso de análisis, la demanda de momentos máximos alcanzados en el elemento estuvo en dentro de los -7 t.m y los 7 t.m, valores muy por debajo del momento de fluencia asociado a estos elementos, de 8.9 t.m, por lo que la demanda de giros inelásticos fue nula.

Figura 58:

Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 0 y PHL 12 ante el sismo Huaraz 1970.



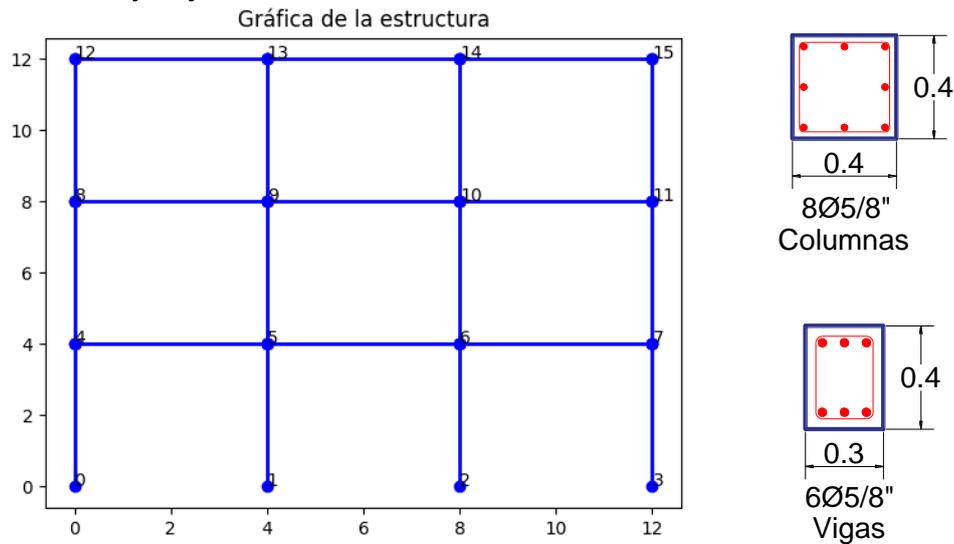
Comentarios similares pueden realizarse al observar la variación temporal de las rotulas mencionadas y que se pueden observar en los gráficos rotación plástica vs tiempo, en los que observa una línea horizontal ubicada en el cero de las ordenadas, esto muestra con claridad que el registro considerado no logro generar incursiones plásticas en ninguno de los elementos analizados.

4.4.4 Pórtico de tres niveles y tres crujeías

En esta sección se realizará el análisis sísmico de un sistema estructural de tres pisos y tres crujeías, que tiene como dimensiones de las secciones transversales de las columnas 40cmx40cm, mientras que las vigas de concreto armado tuvieron una sección de 30cmx40cm.

Figura 59:

Pórtico de tres crujeías y tres niveles de concreto armado.



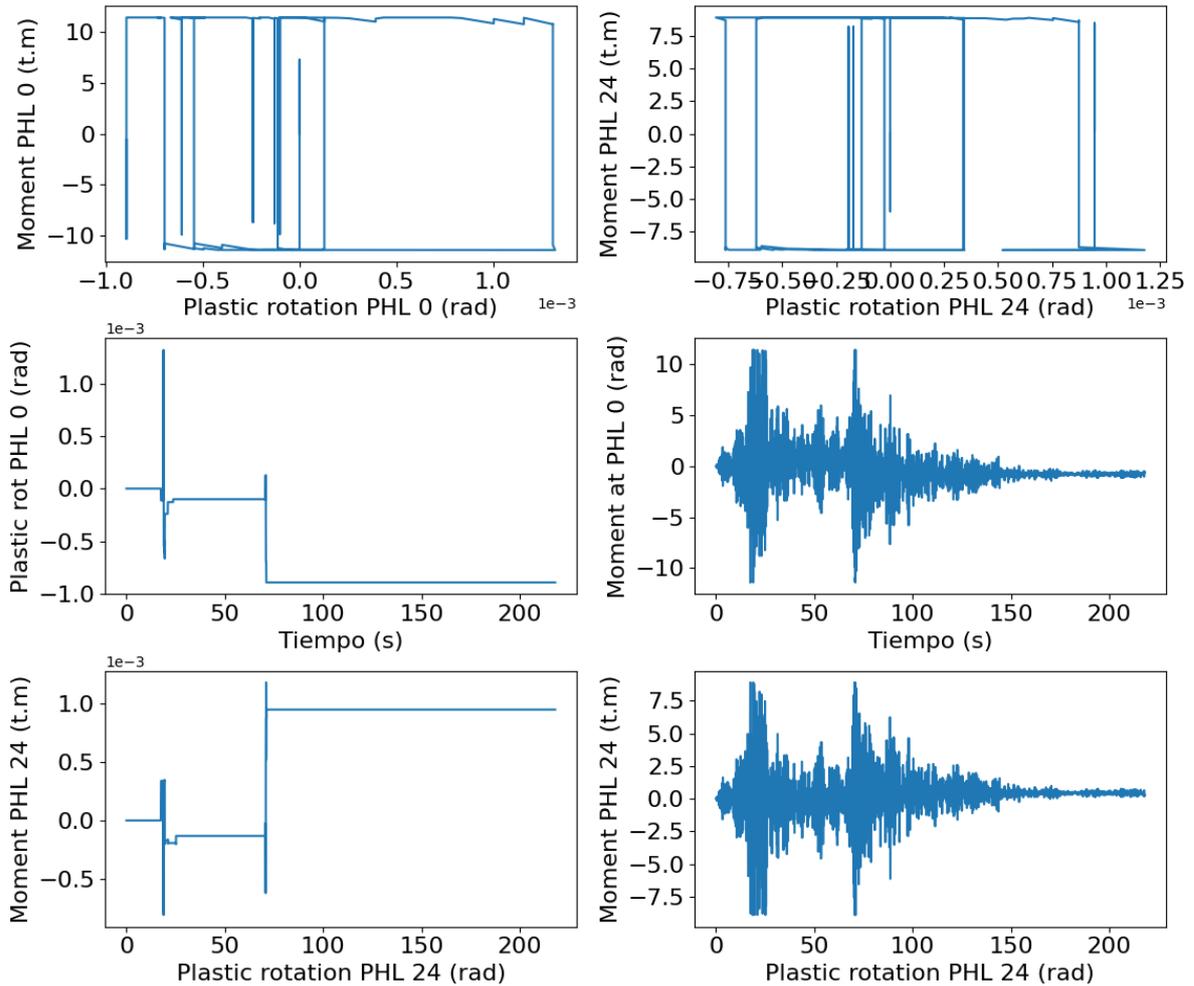
Las cuantías de acero de las columnas fueron del 1%, mientras que en las vigas se usaron seis varillas de 5/8\". Con estas características, los momentos de fluencia de las secciones transversales consideradas fueron de 11.4 t.m, para el caso de las columnas, y de 8.9 t.m para el caso de las vigas de concreto armado. Finalmente, esta estructura fue sometida a la acción del terremoto de Pisco del 2007, los resultados obtenidos se muestran en la siguiente sección.

4.4.4.1 Terremoto de Pisco del 2007

En la **Figura 60** se presentan los resultados del Análisis Dinámico no lineal de la estructura considerada en esta sección. Se pueden apreciar las curvas de comportamiento cíclico momento-giro inelástico. La rótula plástica en cuestión es la PHL 0, que es la formada en la base de la columna izquierda del primer nivel. De manera similar, se observan las curvas de comportamiento de la rótula PHL 24, asociada con la rótula plástica de la viga izquierda del primer nivel.

Figura 60:

Comportamiento cíclico de las rótulas PHL 0 y PHL 24 ante el sismo de Pisco del 2007.

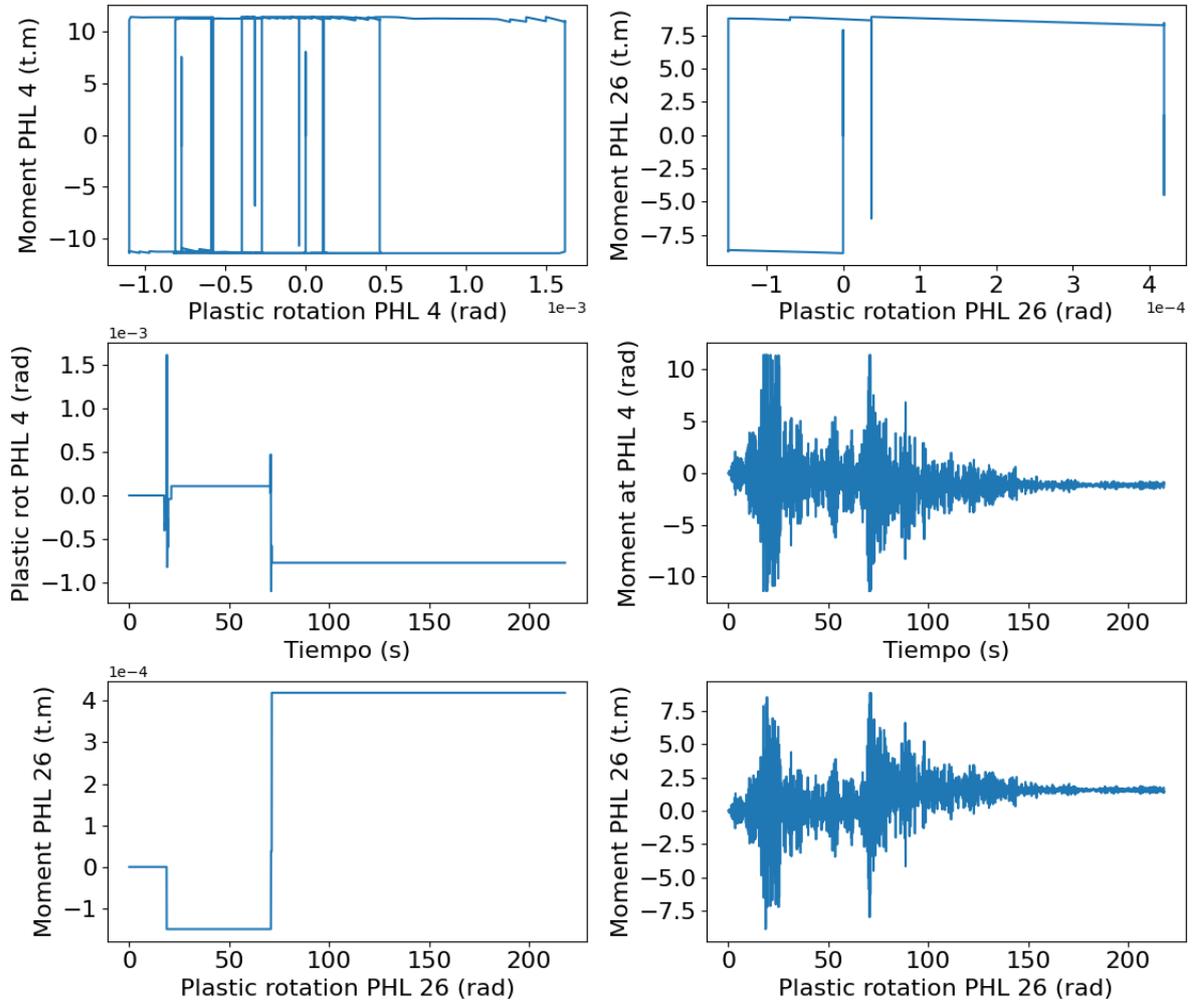


Del gráfico, se observa que la rótula PHL 0 experimentó una demanda de giro inelástico alrededor de los 20 segundos, momento en el cual ocurrió una inversión de signo, alrededor de los 60 segundos, aproximadamente. Del mismo gráfico, se evidencia que el movimiento sísmico considerado provocó un giro inelástico de $1(10)^{-3}$ rad. Comentarios similares pueden hacerse respecto a la rótula PHL 24. Como se aprecia en la figura citada, esta presentó varias inversiones de signo, culminando con un giro inelástico residual de $1(10)^{-3}$.

En la **Figura 61** se presenta la respuesta cíclica de las potenciales rótulas plásticas PHL 4 y PHL 26. La rótula PHL 4 corresponde a la generada en la base de la columna derecha del primer nivel, mientras que la rótula plástica PHL 26 se forma en la viga central del mismo nivel. Como se aprecia en este gráfico, ambas rótulas experimentaron grandes demandas de giro inelástico y múltiples inversiones de signo. La rótula PHL 4 alcanzó un

giro inelástico residual de $0.6(10)^{-3}$ rad, mientras que la PHL 26 experimentó dos cambios de signo en la demanda inelástica, resultando en una deformación residual de $4(10)^{-4}$ rad.

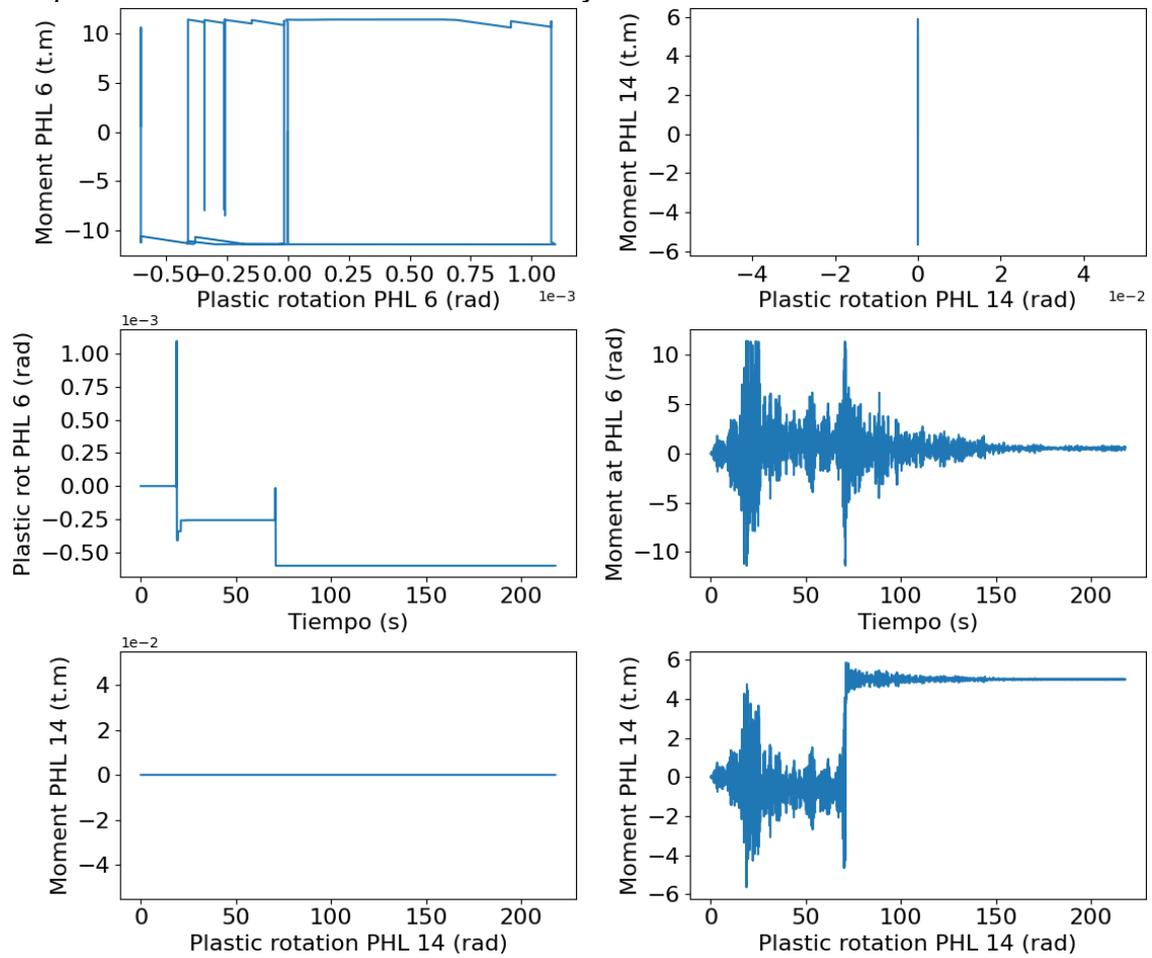
Figura 61:
Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 4 y PHL 26 ante el sismo de Pisco del 2007.



Finalmente, en la **Figura 62** se presenta el comportamiento cíclico de las rótulas PHL 6 y PHL 14. La rótula PHL 14 corresponde a la rótula plástica potencial formado en la columna derecha del segundo nivel, mientras que la rótula PHL 6 es la rótula plástica potencial formada en la columna derecha del primer nivel. Como se aprecia en estos gráficos, el sismo considerado impuso una deformación inelástica de hasta $1(10)^{-3}$ rad en el caso de la rótula plástica del primer nivel, mientras que la rótula plástica potencial del segundo nivel experimentó deformaciones elásticas, es decir, la columna se mantuvo elástica durante todo el movimiento.

Figura 62:

Comportamiento cíclico de las rotulas PHL 6 y PHL 14 ante el sismo de Pisco del 2007.



CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

General

De acuerdo con los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, se concluye que el método de cálculo basado en el método de la analogía de la fuerza, produce resultados razonables al predecir la respuesta monotónica y cíclica de estructuras de concreto armado que incursionan en el rango de comportamiento no lineal. Esto se concluyó a partir de la comparación entre los resultados experimentales encontrados por otros autores y los resultados numéricos obtenidos de la aplicación del método de la analogía de la fuerza. Se observó que el método permite realizar cálculos usando la matriz de rigidez elástica de la estructura e introduciendo los desplazamientos inelásticos como variables en las ecuaciones de equilibrio. Al evitar el cálculo de una nueva matriz de rigidez en cada paso del análisis, se logra una mayor eficiencia computacional.

Específicos

- 1) El método de la analogía de la fuerza permite, en primer lugar, establecer relaciones matriciales sencillas entre los desplazamientos y los giros inelásticos de un elemento viga-columna. Por otro lado, permite simplificar el problema de la matriz de rigidez tangente requerido en cada paso del análisis, por el uso de la matriz de rigidez elástica (inicial) en todo el proceso de cálculo. Estos dos aspectos permiten la incorporación de los giros inelásticos como incógnitas adicionales del sistema de ecuaciones, que junto con las relaciones constitutivas momento curvatura de las potenciales rotulas plásticas, permiten tener un sistema de ecuaciones determinado y de solución única que puede resolverse de forma incremental.
- 2) La respuesta monotónica no lineal de estructuras de concreto de n grados de libertad se obtuvo considerando un modelo con capacidad de desplazarse horizontalmente en cada nivel y con capacidad de giro por cada nodo. Además, se ha considerado que las no linealidades de este ensamble provienen exclusivamente por la formación de rotulas plásticas en las zonas de mayor demanda de momentos flectores, es decir, los extremos de los elementos viga columna. Los mismos que se han modelado usando diagramas momento curvatura calculados considerando las propiedades no lineales del acero y del concreto, tanto confinado, como sin confinar. En el presente trabajo se modelaron dos pórticos de concreto armado ensayados en laboratorio, siendo el

- primero de ellos un pórtico de una crujía y cuatro niveles (Sharma et al., 2013), mientras que el segundo consistió de un pórtico de un nivel y una crujía (Grubišić et al., 2019).
- 3) De los resultados encontrados en el modelamiento de la estructura ensayada por Sharma et al. (2013), se ha encontrado que la respuesta estructural calculada, usando el método de la analogía de la fuerza, ha tenido una buena correlación con la curva monotónica experimental, especialmente en cuanto a la predicción de la resistencia mecánica y la capacidad de desplazamiento. La resistencia calculada usando el método de la analogía de la fuerza para este caso de estudio fue de 98t, mientras que la resistencia obtenida de forma experimental tuvo un valor de 94t, encontrándose un error en la predicción del 4.3 %; mientras que en el caso del máximo desplazamiento alcanzado, el valor calculado fue de 490 mm, con respecto de un valor experimental de 535 mm, dando un error de 8.5%. Resultados similares se encontraron en el caso experimental presentado por Grubišić et al. (2019), en el que el método predijo una resistencia de fluencia de 16 t, mientras que experimentalmente este valor fue de 17.7 t, es decir existió un error de 1%. Un valor similar se encontró en el caso de la resistencia última, habiéndose calculado un valor de 19.6 t contra un valor experimental de 17.8 t, es decir nuevamente un error del 1%.
 - 4) La aplicación del método basado en la analogía de la fuerza ha permitido estimar el comportamiento dinámico no lineal de un sistema estructural de un grado de libertad considerando esencialmente cualquier relación constitutiva del material y sometido a la acción de los sismos de Pisco 2007, Arequipa 2001 y Huaraz 197. Los resultados encontrados en cuanto a la predicción de la respuesta estructural para sistemas de múltiples grados de libertad han mostrado la capacidad del método a la hora de predecir la respuesta sísmica y por tanto la respuesta cíclica de los elementos estructurales. Los resultados encontrados para el caso de carga cíclica han logrado predicciones de resistencia que están dentro del 5% de error, estos resultados muestran que el método permite predecir la respuesta cíclica de las secciones de concreto y evaluar su incursión en el rango de comportamiento no lineal de forma razonablemente precisa.

5.2 Recomendaciones

General

Se recomienda la aplicación del método de la analogía de la fuerza en la predicción de los parámetros de respuesta no lineales de edificaciones, tales como, resistencia máxima alcanzada, máximo desplazamiento lateral, capacidad de disipación de energía, desplazamientos residuales, entre otros, tanto para análisis monotónicos como dinámicos, especialmente a la hora de aplicar el diseño basado en desempeño, pues como se ha visto en el desarrollo del presente trabajo de investigación, este método permite realizar un cálculo bastante simple y con una precisión razonable, en términos de aplicaciones prácticas de ingeniería.

Específicos

1. Se recomienda la aplicación de la analogía de la fuerza al desarrollo de macromodelos orientados a la predicción de modos de falla más específicos, tales como el pandeo de muros delgados fuera del plano, un caso de sistemas estructurales muy frecuentes en la práctica constructiva del Perú.
2. Se recomienda la aplicación del método de la analogía de la fuerza a la predicción del comportamiento no lineal de edificaciones con dispositivos externos tales como, sistemas con protección sísmica, ya sean estos de goma, o de triple péndulo de fricción; sistemas con dispositivos de disipación de energía, tales como dispositivos SLB o dispositivos de fluido viscoso.
3. Se recomienda la aplicación del método de la analogía de la fuerza para el cálculo de las curvas de comportamiento monótonico de estructuras con N grados de libertad, ya que, de acuerdo con los resultados obtenidos al predecir curvas de comportamiento experimentales, permite estimar parámetros de respuesta con una precisión razonable dentro de las aplicaciones de la ingeniería.
4. Se recomienda la implementación de rutinas de cálculo más sofisticadas basadas en el método de la analogía de la fuerza, especialmente en los análisis tiempo-historia no lineales, ya que se ha observado que la aplicación de este método, junto con el método del espacio de estado, permite la implementación de un algoritmo sencillo, capaz de realizar predicciones dentro de márgenes aceptables. Esto puede agilizar y mejorar el análisis detallado de estructuras especiales y la predicción de parámetros de diseño.



REFERENCIAS

- Bagheri, B., Ridgway Scott B', L., & Zhang, S. (1994). Implementing and using high-order finite element methods. In *Finite Elements in Analysis and Design* (Vol. 16). [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(94\)90063-9](https://doi.org/10.1016/0168-874X(94)90063-9)
- Bernal, D., Döhler, M., Kojidi, S. M., Kwan, K., & Liu, Y. (2015). First Mode Damping Ratios for Buildings. *Earthquake Spectra*, 31(1), 367–381. <https://doi.org/10.1193/101812EQS311M>
- Bonet, J., & Wood, R. D. (2008a). Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis, 2nd edition. In *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2nd Edition* (Vol. 9780521838). <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755446>
- Bonet, J., & Wood, R. D. (2008b). Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis, 2nd edition. In *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2nd Edition* (Vol. 9780521838). <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755446>
- Chopra, A. (2020). *Dynamic of structures Theory and Applications to earthquake engineering: Vol. I* (A. Chopra, Ed.; 5th ed.). Pearson.
- Colunga, A. T. (2017). Simplified design method for base-isolated bearing-wall masonry structures. In *Revista Internacional de* (Vol. 22). <https://doi.org/10.2174/1874836801408010022>
- Erfani, S., & Akrami, V. (2019). A Nonlinear Macro-model for Numerical Simulation of Perforated Steel Beams. *International Journal of Steel Structures*, 19(5), 1605–1623. <https://doi.org/10.1007/s13296-019-00239-x>
- Esmaeiltabar, P., Vaseghi, J., & Khosravi, H. (2019). Nonlinear macro modeling of slender reinforced concrete shear walls. *Structural Concrete*, 20(3), 899–910. <https://doi.org/10.1002/suco.201800206>
- Grubišić, M., Ivošević, J., & Grubišić, A. (2019). Reliability Analysis of Reinforced Concrete Frame by Finite Element Method with Implicit Limit State Functions. *Buildings*, 9(5). <https://doi.org/10.3390/buildings9050119>
- Hart, G., & Wong, K. (2000). *Structural Dynamics for Structural Engineers* (1st ed., Vol. 1). John Wiley.
- Kolozvari, K., Tran, T. A., Orakcal, K., & Wallace, J. W. (2015). Modeling of cyclic shear-flexure interaction in reinforced concrete structural walls. II: Experimental validation.



Journal of Structural Engineering, 141(5), 04014136.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001059](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001059)

- Li, G., & Wong, K. (2014). *Theory of Nonlinear Structural Analysis: The Force Analogy Method for Earthquake Engineering* (1st ed., Vol. 1). John Wiley & Sons.
<https://doi.org/10.1002/9781118718070>
- Nica, G. B., Munteanu, R. I., Calofir, V., & Iancovici, M. (2022). Modelling nonlinear behavior of 3D frames using the Force Analogy Method. *Structures*, 35, 1162–1174.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.08.097>
- Rodrigues, H., Arêde, A., Varum, H., & Costa, A. (2012). Behavior of rc building columns under cyclic loading: Experimental study. *Journal of Earthquake and Tsunami*, 6(4).
<https://doi.org/10.1142/S1793431112500261>
- Sharma, A., Reddy, G. R., Vaze, K. K., & Eligehausen, R. (2013). Pushover experiment and analysis of a full scale non-seismically detailed RC structure. *Engineering Structures*, 46, 218–233. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.08.006>
- Tsiavos, A., Mackie, K. R., Vassiliou, M. F., & Stojadinović, B. (2017). Dynamics of inelastic base-isolated structures subjected to recorded ground motions. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 15(4), 1807–1830. <https://doi.org/10.1007/s10518-016-0022-5>
- Wong, K. K. F., & Wang, Y. (2003a). Energy-based design of structures using modified force analogy method. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 12(5), 393–407. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000618](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000618)
- Wong, K. K. F., & Wang, Y. (2003b). Energy-based design of structures using modified force analogy method. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 12(5), 393–407. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000618](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000618)
- Wong, K. K. F., & Wang, Z. H. E. (2007a). Seismic analysis of inelastic moment-resisting frames part I: Modified force analogy method for end offsets. *Structural Design of Tall and Special Buildings*, 16(3), 267–282. <https://doi.org/10.1002/tal.314>
- Wong, K. K. F., & Wang, Z. H. E. (2007b). Seismic analysis of inelastic moment-resisting frames part I: Modified force analogy method for end offsets. *Structural Design of Tall and Special Buildings*, 16(3), 267–282. <https://doi.org/10.1002/tal.314>



- Wong, K. K. F., & Wang, Z. H. E. (2007c). Seismic analysis of inelastic moment-resisting frames part II: Energy dissipation in deformable panel zones. *Structural Design of Tall and Special Buildings*, 16(3), 283–299. <https://doi.org/10.1002/tal.315>
- Wong, K. K. F., & Wang, Z. H. E. (2007d). Seismic analysis of inelastic moment-resisting frames part II: Energy dissipation in deformable panel zones. *Structural Design of Tall and Special Buildings*, 16(3), 283–299. <https://doi.org/10.1002/tal.315>
- Wong, K. K. F., & Wang, Z. H. E. (2007e). Seismic analysis of inelastic moment-resisting frames part II: Energy dissipation in deformable panel zones. *Structural Design of Tall and Special Buildings*, 16(3), 283–299. <https://doi.org/10.1002/tal.315>
- Wong, K. K. F., & Yang, R. (1999a). Inelastic dynamic response of structures using force analogy method. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(10), 1190–1199. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:10\(1190\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:10(1190))
- Wong, K. K. F., & Yang, R. (1999b). Inelastic dynamic response of structures using force analogy method. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(10), 1190–1199. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:10\(1190\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:10(1190))
- Wong, K. K. F., & Yang, R. (2002a). Earthquake response and energy evaluation of inelastic structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(3), 308–317. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:3\(308\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:3(308))
- Wong, K. K. F., & Yang, R. (2002b). Earthquake response and energy evaluation of inelastic structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(3), 308–317. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:3\(308\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:3(308))
- Zhao, D., & Wong, K. K. (2006a). New approach for seismic nonlinear analysis of inelastic framed structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 132(9), 959–966. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2006\)132:9\(959\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2006)132:9(959))
- Zhao, D., & Wong, K. K. (2006b). New approach for seismic nonlinear analysis of inelastic framed structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 132(9), 959–966. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2006\)132:9\(959\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2006)132:9(959))



ANEXOS

ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA

Problemática General	Objetivos General	Hipótesis General	Variables Independiente	Indicadores
¿Qué mejoras en la predicción de la respuesta cíclica no lineal de los elementos estructurales puede lograrse mediante la aplicación de la analogía de la fuerza?	Predecir la respuesta no lineal de estructuras mediante macromodelos basados en el método de la analogía de la fuerza.	El método de la analogía de la fuerza permitirá tener macromodelos con buena capacidad de predicción de la respuesta cíclica no lineal de elementos estructurales.	Analogía de la fuerza	Desplazamiento total Desplazamiento inelástico Momento elástico Momento inelástico
Específicos	Específicos	Específicos	Dependiente	
1. ¿Cómo modelar elementos viga columna de varios grados de libertad usando el método de la analogía de la fuerza?	1. Establecer el método de la analogía de la fuerza para desarrollar macromodelos de barras con varios grados de libertad que permitan modelar elementos viga-columna.	1. El método de la analogía de la fuerza permitirá incorporar los giros inelásticos en las ecuaciones de equilibrio permitiendo así tener macromodelos tipo Giberson.	Respuesta no lineal	Resistencia última Resistencia de fluencia
2. ¿Qué características tiene la curva de comportamiento monotónica obtenida usando macromodelos basados en la analogía de la fuerza?	2. Determinar la respuesta monotónica de un sistema estructural de n grados de libertad usando macromodelos de barras basados en la analogía de la fuerza.	2. El método de la analogía de la fuerza permitirá generar macromodelos capaces de predecir el comportamiento monotónico de sistemas de n grados de libertad.		Rigidez elástica Rigidez posfluencia
3. ¿Cuál es la capacidad de predicción de respuesta monotónica de los macromodelos al compararlos con resultados experimentales?	3. Comparar la capacidad de predecir la respuesta monotónica de los macromodelos desarrollados comparándolos con resultados obtenidos experimentalmente en ensayos anteriores.	3. Los macromodelos obtenidos de la analogía de la fuerza permitirán tener predicciones con un error de a lo sumo 10% con respecto a los resultados obtenidos de ensayos de laboratorio.		Disipación de energía
4. ¿Cómo pueden resolverse las ecuaciones del movimiento de forma eficiente usando el método del espacio estado para sistemas de varios grados de libertad?	4. Usar el método del espacio estado para resolver las ecuaciones del movimiento de forma eficiente y así obtener la respuesta dinámica de un sistema de múltiples grados de libertad.	4. El método del espacio estado permitirá la resolución de las ecuaciones del movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad de forma práctica y eficiente.		



ANEXO 2: GUÍA PARA EL USO DEL PROGRAMA EDEN3

El programa de análisis no lineal estático EDEN3 requiere de la generación de dos archivos en los que se encontrarán datos relativos a los nodos y a los elementos. Así, se deberán generar dos archivos, el primero de ellos contendrá información sobre los nodos, y deberá ser renombrado como "nodos.txt". A continuación, se describe la estructura de los datos que deberá contener este archivo.

N° Nodo	Coord X	Coord Y	Rest X	Rest Y	Rest Z	Restric. Piso
1	0	0	0	0	0	0
2	3	0	0	0	0	0
3	0	3	1	1	1	1
4	3	3	1	1	1	1

N° Nodo: Ingrese el número de nodo.

Coord X: Ingrese la abscisa del nodo en dirección X.

Coord Y: Ingrese la abscisa del nodo en dirección Y.

Rest X: Significa restricción en dirección X. 0 Si esta restringido, 1, si está libre.

Rest Y: Significa restricción en dirección y. 0 Si está restringido, 1, si está libre.

Rest Z: Significa restricción en dirección Z. 0 Si está restringido, 1, si está libre.

Restric. Piso: Se indica con un número los nodos que se moverán de forma solidaria. Esta numeración deberá empezar desde el Número 1.

A continuación, se debe generar un archivo de texto en el que se almacenarán datos relativos a los elementos. Este archivo deberá ser renombrado como "elementos.txt".

#Elem	Nodo1	Nodo2	E	I	A	Long	Ang
1	1	3	1	1	1	0	0
2	2	4	1	1	1	0	0
3	3	4	1	1	1	0	0

#Elem: Indica el número de elemento

Nodo1: Indica el nodo inicial que define el elemento 1.

Nodo2: Indica el nodo inicial que define el elemento 2.

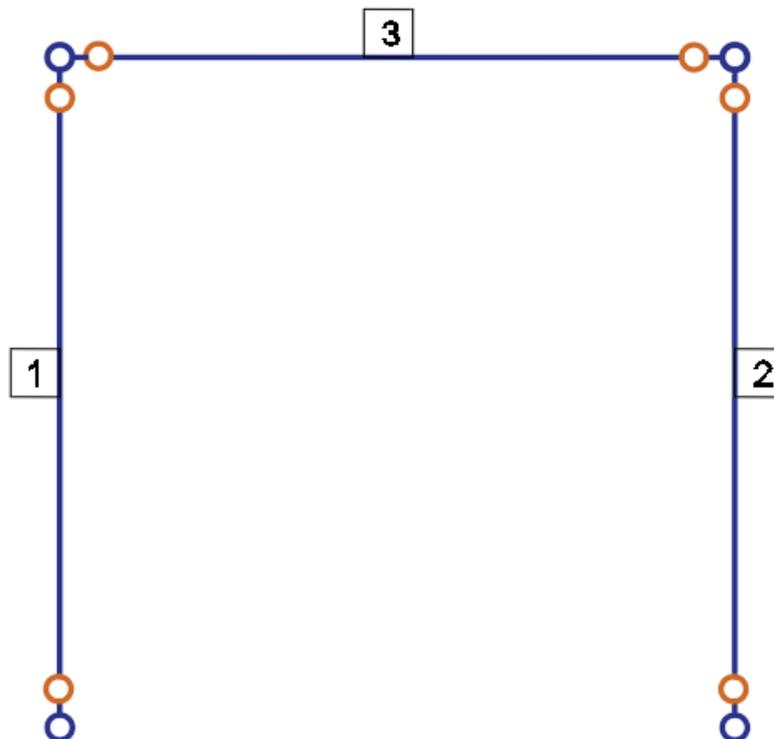
E: Modulo de elasticidad.

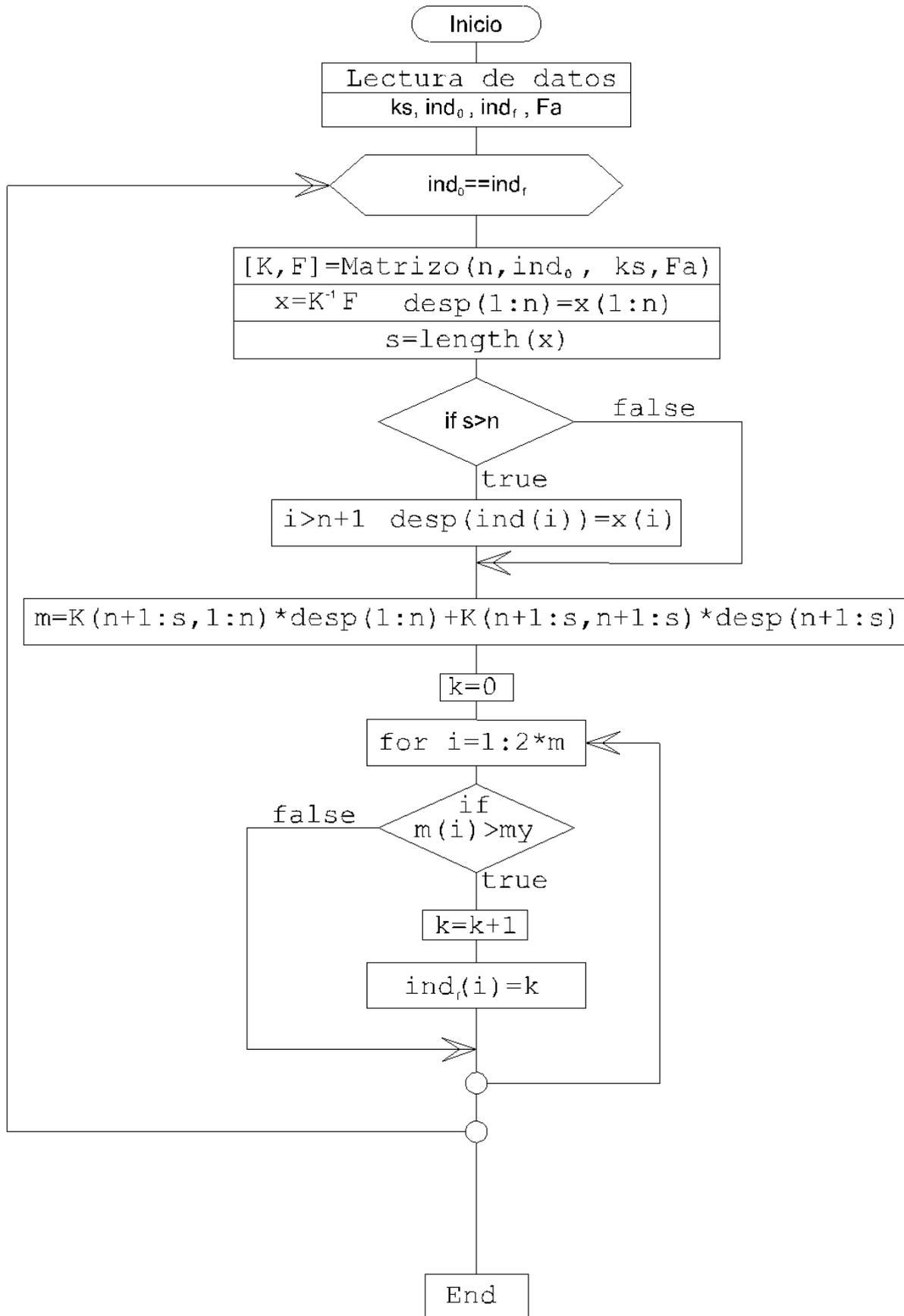
I: Momento de inercia.

A: Área de la sección transversal

Long: Longitud del elemento (El programa es capaz de realizar este cálculo por sí mismo).

Ang: Es el ángulo que forma el elemento con el eje X.





ANEXO 3: PROGRAMA DE ANALISIS DINÁMICO NO LINEAL

Nodos

Los datos relativos a los nodos de la estructura deberán suministrarse por medio de la creación de un archivo de texto con extensión .txt, que contenga información asociada a los nodos, de acuerdo con la siguiente tabla.

Es importante notar que los nodos deberán numerarse desde el cero, tal como se muestra a continuación; además, el archivo no debe realizarse usando la cabecera indicada, esta es meramente referencial.

N°	X	Y	DLx	DLz	DRy	Masterx	mx	mz	Mr
0	0.0	0.0	0	0	0	0	0	0	0
1	3.0	0.0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.0	3.0	1	1	1	1	10	10	10
3	3.0	3.0	1	1	1	1	10	10	10
4	0.0	6.0	1	1	1	2	10	10	10
5	3.0	6.0	1	1	1	2	10	10	10
6	0.0	9.0	1	1	1	3	10	10	10
7	3.0	9.0	1	1	1	3	10	10	10

N°: Etiqueta del número de nodos considerado (La numeración empieza en cero)

X: Coordenadas en X

Y: Coordenadas en Y

DLx: Grado de libertad del nodo en X (0: restringido, 1: Libre)

DLz: Grado de libertad del nodo en Y (0: restringido, 1: Libre)

DRy: Grado de libertad de rotación del nodo en Y (0: restringido, 1: Libre)

Masterx: Este parámetro identifica a aquellos nodos que se mueven de forma solidaria

Elementos

Tabla típica para el llenado de los datos de la definición de elementos.

N°	Nodoi	Nodoj	E	I	A
0	0	2	2e6	1.5e4	1.5e2
1	1	3	2e6	1.5e4	1.5e2
2	2	3	2e6	1.5e4	1.5e2

ANEXO 4: RUTINA IMPLEMENTADA EN PYTHON

```
1 #-----EDENMDNL-V1.000-----
2 #---PROGRAMA DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MULTIPLES GRADOS DE LIBERTAD---
3 #-----Autor: Edén Angel Capcha Molina-----
4 ##-----Importando librerías requeridas-----
5 import pandas as pd
6 import numpy as np
7 from math import *
8 import matplotlib.pyplot as plt
9 from Maexp import maexpo
10 from solve import *
11 class geometria():
12     def __init__( self, nnodos, nelementos):
13         self.nodo=nnodos
14         self.elemen=nelementos
15     def nod(self):
16         df=pd.read_csv(self.nodo, sep=" ", header=None) #Leyendo el archivo conteniendo
17 los nodos
18         self.nnd=len(df) # Número de nodos considerados
19         self.nodos=np.zeros((self.nnd,10)) # Matriz que almacena el número de
20 nodos
21         for i in range(self.nnd):
22             for j in range(10):
23                 self.nodos[i,j]=df.loc[i][j]
24         return self.nodos
25
26     def elem(self):
27         dr=pd.read_csv(self.elemen, sep=" ", header=None) #Leyendo el archivo conteniendo
28 los elementos
29         self.nel=len(dr)
30         self.elem=np.zeros((self.nel,8))
31         for i in range(self.nel):
32             for j in range(6):
33                 self.elem[i,j]=dr.loc[i][j]
34 #--Calculando la longitud y el ángulo de inclinación del elemento
35         for i in range(self.nel):
36             nod2=int(self.elem[i,2])
37             nod1=int(self.elem[i,1])
38             y2=self.nodos[nod2,2]
39             x2=self.nodos[nod2,1]
40             y1=self.nodos[nod1,2]
41             x1=self.nodos[nod1,1]
42             self.elem[i,6]=sqrt((x2-x1)**2+(y2-y1)**2)
43             if abs(x2-x1)==0 and y2>y1:
44                 self.elem[i,7]=pi/2
45             elif abs(x2-x1)==0 and y2<y1:
46                 self.elem[i,7]=3*pi/2
47             else:
48                 self.elem[i,7]=atan((y2-y1)/(x2-x1))
49         return self.elem
50     def grafic(self):
51         for i in range(self.nel):
52             nol=int(self.elem[i,1])
53             no2=int(self.elem[i,2])
```

```
54         plt.plot([self.nodos[nol,1],                self.nodos[no2,1]], [self.nodos[nol,2],
55 self.nodos[no2,2]], 'bo-', linewidth=2)
56         for i in range(self.nnd):
57             anot=str(i)
58             plt.annotate(anot, (self.nodos[i,1], self.nodos[i,2]))
59         #plt.figure(figsize=(10,10))
60         plt.title('Gráfica de la estructura')
61         plt.show()
62
63     def matrices1(self):
64         self.ke=np.zeros((self.nel,6,6))          # Matriz de rigidez elástica en coordenadas
65 locales
66         self.keg=np.zeros((self.nel,6,6))        # Matriz de rigidez elastica en coordenadas
67 globales
68         Ro=np.zeros((6,6))                       # Matriz de almacen de matriz de rotación
69         self.kp=np.zeros((self.nel,6,2))         # Matriz cruzada elastica plastica
70         self.kpg=np.zeros((self.nel,6,2))        # Matriz cruzada elastica plastica en
71 coordenadas globales
72         self.kpp=np.zeros((self.nel,2,2))        # Matriz de giros plasticos
73         for i in range(self.nel):
74             #--Leyendo las propiedades lineales de los materiales
75             E, I, L, q, A=self.elem[i,3], self.elem[i,4], self.elem[i,6], self.elem[i,7],
76 self.elem[i,5]
77             #--Calculando los coeficientes de rigidez
78             r11, r12, r13, r14=12*E*I/L**3, 6*E*I/L**2, 4*E*I/L, 2*E*I/L
79             #--Calculando la matriz de rigidez elastica local
80             self.ke[i,1,1], self.ke[i,1,2], self.ke[i,1,4], self.ke[i,1,5]=r11, r12, -r11,
81 r12
82             self.ke[i,2,1], self.ke[i,2,2], self.ke[i,2,4], self.ke[i,2,5]=r12, r13, -r12,
83 r14
84             self.ke[i,4,1], self.ke[i,4,2], self.ke[i,4,4], self.ke[i,4,5]=-r11, -r12,
85 r11, -r12
86             self.ke[i,5,1], self.ke[i,5,2], self.ke[i,5,4], self.ke[i,5,5]=r12, r14, -r12,
87 r13
88             self.ke[i,0,0], self.ke[i,0,3], self.ke[i,3,0], self.ke[i,3,3]=E*A/L, -E*A/L, -
89 E*A/L, E*A/L
90             #--Encontrando la matriz de rotación
91             qr=-self.elem[i,7]
92             Ro[0:3,0:3]=np.array([[cos(qr), -sin(qr), 0], [sin(qr), cos(qr), 0 ], [0, 0, 1]])
93             Ro[3:6,3:6]=np.array([[cos(qr), -sin(qr), 0], [sin(qr), cos(qr), 0 ], [0, 0, 1]])
94             #--Calculando la matriz de rigidez elastica en coordenadas globales
95             self.keg[i, :, :]=np.dot(np.dot(Ro.T, self.ke[i, :, :]), Ro)
96             #--Calculando la matriz de rigidez cruzada en coord Locales
97             self.kp[i, :, :]=np.array([[0,0], [r12,          r12], [r13,          r14], [0,0], [-r12,-
98 r12], [r14,r13]])
99             #--Calculando la matriz de rigidez cruzada en coord globales
100            self.kpg[i, :, :]=np.dot(Ro.T, self.kp[i, :, :])
101            #--Calculando la matriz de rigidez plastica-----
102            self.kpp[i, :, :]=np.array([[r13, r14], [r14,r13]])
103
104    def mrel(self):
105        return self.ke
106
107    def mreg(self):
108        return self.keg
```

```
109
110 def mrpl(self):
111     return self.kp
112 def mrpg(self):
113     return self.kpg
114 def mrrp(self):
115     return self.kpp
116 #-----Ensamblaje de la matriz de rigidez-----
117 def ensamblaje(self):
118     #-----Definiendo la matriz de grados de libertad-----
119     #-----
120     #---Definiendo la matriz de grados de libertad globales de los nodos
121
122     self.mdgl=np.ones((self.nnd,4)) #--Se define una matriz de nndx4 de -1
123     #print(mdgl)
124     for i in range(self.nnd):
125         self.mdgl[i,0]=i #--La primera columna almacena los nodos
126         if self.nodos[i,3]==0: #--Si el grado de libertad x(1) está restringido, se
127 coloooca cero(0)
128             self.mdgl[i,1]=0
129         if self.nodos[i,4]==0: #--Si el grado de libertad y(1) está restringido, se
130 coloooca cero(0)
131             self.mdgl[i,2]=0
132         if self.nodos[i,5]==0: #--Si el grado de libertad R(1) está restringido, se
133 coloooca cero(0)
134             self.mdgl[i,3]=0
135
136     #----Asignando grados de libertad de nodo maestro (Master nodo)
137     for i in range(self.nnd):
138         if self.nodos[i,6]!=0:
139             self.mdgl[i,1]=self.nodos[i,6]
140     smax=int(np.max(self.mdgl[:,1]))+1
141
142     for i in range(self.nnd):
143         if self.mdgl[i,3]==-1:
144             self.mdgl[i,3]=smax
145             smax=smax+1
146     self.din0=int(np.max(self.mdgl[:,1:4])) # Número de grados de libertad
147 totales
148     self.din=int(np.max(self.mdgl[:,1:2])) # Número de grados de libertad
149 dinámicos
150     mdglg=np.zeros((self.nel,6,2))
151
152     for i in range(self.nel):
153         nodd1=int(self.elem[i,1])
154         nodd2=int(self.elem[i,2])
155         for j in [0,1,2]:
156             mdglg[i,j,0]=j
157             if self.mdgl[nodd1,j+1]!=-1:
158                 mdglg[i,j,1]=self.mdgl[nodd1,j+1]
159         for j in [3,4,5]:
160             mdglg[i,j,0]=j
161             if self.mdgl[nodd2,j-2]!=-1:
162                 mdglg[i,j,1]=self.mdgl[nodd2,j-2]
163     #-----Matriz de rigidez plastica-----
```

```
164     mplg=np.zeros((self.nel,3))#--Matriz que guarda la relación existente entre grados
165 plasticos locales y globales
166     self.cont=0
167     for i in range(self.nel):
168         mplg[i,0]=i
169         mplg[i,1]=self.cont
170         mplg[i,2]=self.cont+1
171         self.cont=self.cont+2
172
173     #-----Ensamblaje de la matriz de rigidez-----
174
175     self.n1=int(np.max(self.mdgl[:,1:self.nnd]))+1
176     #print(n1)
177     self.Ke=np.zeros((self.n1,self.n1))
178     #print(mdglg)
179     #print(range(nel))
180     for i in range(self.nel):
181         for j in range(6):
182             nn1=int(mdglg[i,j,1])
183             if nn1!=0:
184                 for k in range(6):
185                     nn2=int(mdglg[i,k,1])
186                     if nn2!=0:
187                         self.Ke[nn1,nn2]=self.Ke[nn1,nn2]+self.keg[i,j,k]
188
189     ngp=int(np.max(mplg[:,1:3]))
190     self.ktp=np.zeros((self.n1,ngp+1))
191     for i in range(ngp+1):         #--Recorriendo todos los grados de libertad plásticos
192         el=int(i//2)             #--Identificando el elemento al que corresponde el
193 grado i
194         #print(el)
195         n01=int(self.elem[el,1])    #--Identificando el nodo izquierdo que define el
196 elemento
197         n02=int(self.elem[el,2])    #--Identificando el nodo derecho que define el
198 elemento
199         if i%2==0:
200             col=0
201         else:
202             col=1
203         for j in range(6):
204             c1=int(mdglg[el,j,1])
205             #print(c1)
206             if c1!=0:
207                 self.ktp[c1,i]=self.ktp[c1,i]+self.kpg[el,j,col]
208     self.ktp=np.zeros((ngp+1,ngp+1))    #Matriz de rigidez plastica
209     for i in range(self.nel):
210         s0=int(mplg[i,1])
211         s1=int(mplg[i,2])
212         self.ktp[s0,s0]=self.ktp[s0,s0]+self.kpp[i,0,0]
213         self.ktp[s0,s1]=self.ktp[s0,s1]+self.kpp[i,0,1]
214         self.ktp[s1,s0]=self.ktp[s1,s0]+self.kpp[i,1,0]
215         self.ktp[s1,s1]=self.ktp[s1,s1]+self.kpp[i,1,1]
216     def Mae(self):
217         return self.Ke
218     def Mac(self):
```

```
219     return self.ktp
220 def Map(self):
221     return self.ktp
222 def condens(self):
223     #-----
224 -----
225     #-----Obteniendo las matrices asociadas a los grados de libertad dinamicos
226     #-----
227     d=int(np.max(self.nodos[:,6]))
228     #print(d)
229     kdd=self.Ke[1:d+1,1:d+1]           # Matriz de rigidez asociados a los
230 grados de libertad dinámicos
231     krr=self.Ke[d+1:self.nl,d+1:self.nl] # Matriz de rigidez asociados a los
232 grados de libertad estáticos
233     kdr=self.Ke[1:d+1,d+1:self.nl]     # Matriz cruzada kdr
234     krd=self.Ke[d+1:self.nl,1:d+1]     # Matriz cruzada krd
235     ok1=np.linalg.inv(krr)             # Matriz auxiliar inversa de krr:
236 ok1=inv(krr)
237     ok2=np.dot(kdr,ok1)                 # Matriz auxiliar ok2=kdr*inv(krr)
238     ok3=np.dot(ok2,krd)                 # Matriz auxiliar ok3=kdr*inv(krr)*krd
239     self.hk=kdd-ok3                     # Matriz buscada \hat{H}
240     kd=self.ktp[1:d+1,0:self.cont]
241     kr=self.ktp[d+1:self.cont, 0:self.cont]
242     fg0=np.linalg.inv(krr)
243     fg=np.dot(fg0,kr)
244     fgr=np.dot(kr.T,fg)
245     self.hkpp=self.ktp-fgr
246     rg0=np.linalg.inv(krr)
247     rg=np.dot(rg0,kr)
248     rg1=np.dot(kdr,rg)
249     self.hkp=kd-rg1
250 def condk(self):
251     return self.hk
252
253 def condkp(self):
254     return self.hkp
255
256 def condkpp(self):
257     return self.hkpp
258
259 def masa(self):
260     #-----Definiendo la matriz de masas asociados con los grados de libertad---
261
262     M=np.zeros((self.din0, self.din0)) # Matriz de masas asociados a todos
263 los grados de libertad
264     #C=np.zeros((self.din0, self.din0)) # Matriz de amortiguamiento asociada
265 a todos los grados de libertad
266     self.mdd=np.zeros((self.din0, self.din0)) # Matriz de masas dinamicas
267     #print(nodos)
268     #---din0: Cuenta el total de grados de libertad globales
269     #---din: Cuenta el total de grados de libertad asociados a los nodos maestros
270     for i in range(self.nnd):
271         for j in range(3):
272             cont0=int(self.mdgl[i,j+1])
273             if cont0!=0:
```

```
274             M[cont0-1, cont0-1]=M[cont0-1, cont0-1]+self.nodos[i, 7+j]
275
276         self.mdd=M[0:self.din, 0:self.din]
277         #C=0.4*M
278         return self.mdd
279     def modal(self):
280         mau=np.dot(np.linalg.inv(self.mdd), self.hk) # Matriz auxiliar
281         mau=inv(Mdd)*hk
282         self.eival,eivec=np.linalg.eig(mau) # Algoritmo para
283         obtener los eigenvaloes wn^2
284         self.eival=np.sqrt(self.eival) # Sacando la raiz
285         cuadrada para obtener wn
286         return self.eival,eivec
287     def amort(self,beta1,beta2):
288         nd=len(self.mdd)
289         if nd==1:
290             self.cdd=2*beta1*self.eival[0]*self.mdd[0,0]
291         else:
292             # A=np.array([[1, self.eival[0]**2],
293             #             [1, self.eival[1]**2]])
294             # B=np.array([[2*beta1*self.eival[0]],
295             #             [2*beta2*self.eival[1]]])
296             # a=np.linalg.solve(A,B)
297             # self.cdd=a[0]*self.mdd+a[1]*self.hk
298             b=(2*beta1*self.eival[0]-2*beta2*self.eival[1])/(self.eival[0]**2-
299 self.eival[1]**2)
300             a=2*self.eival[0]*self.eival[1]*(beta2*self.eival[0]-
301 beta1*self.eival[1])/(self.eival[0]**2-self.eival[1]**2)
302             self.cdd=a*self.mdd+b*self.hk
303         return self.cdd
304     def matrizA(self):
305         self.Ao=np.zeros((2*self.din, 2*self.din))
306         self.Ao[self.din:2*self.din+1, 0:self.din]=-
307 np.dot(np.linalg.inv(self.mdd), self.hk)
308         self.Ao[self.din:2*self.din+1, self.din:2*self.din+1]=-
309 np.dot(np.linalg.inv(self.mdd), self.cdd)
310         self.Ao[0:self.din, self.din:2*self.din+1]=np.identity(self.din)
311         return self.Ao
312     def matrizH(self):
313         h=np.ones((self.din, 1))
314         self.H=np.zeros((2*self.din, 1))
315         self.H[self.din:2*self.din, :]=-h
316         return self.H
317     def matrizG(self):
318         self.G=np.zeros((2*self.din, self.din))
319         self.G[self.din:2*self.din+1, :]=np.dot(np.linalg.inv(self.mdd), self.hk)
320         return self.G
321     def matrizFd(self, dt):
322         '''
323         This method allows you to take the matrix Fd
324         Fd=exp(A*dt)
325         '''
326         self.dt=dt
327         self.Fd=maexpo(self.Ao*self.dt)
328         return self.Fd
```

```
329     def matrizHd(self):
330         '''
331         This method allows you to take the matriz Hd
332         Hd=Fd*H*dt
333         '''
334         self.Hd=np.dot(self.Fd,self.H)*self.dt
335         return self.Hd
336     def matrizGd(self):
337         '''
338         This method allows ypu to take the matrix Gd
339         Gd=Fd*G*dt
340         '''
341         self.Gd=np.dot(self.Fd,self.G)*self.dt
342         return self.Gd
343     def solutotal( self , a , my ):
344         n0=int(np.size(self.Fd[:,0])) # Número de grados de libertad
345         n1=int(np.size(a)) # Número de puntos del registro
346         n2=int(np.size(self.hkpp[:,0]))
347         self.z=np.zeros((n0,n1)) # Matriz que almacena los desplazamientos y las
348 velocidades
349         self.m=np.zeros((n2,n1)) # Matriz que almacena los momentos en las rotulas
350 plasticas
351         self.q=np.zeros((n2,n1)) # Matriz que almacena los giros inelasticos
352         n3=int(0.5*n0)
353         # ac=np.zeros((n3,n1))
354         self.xp=np.zeros((n3,n1))
355         ##-----Definir las condiciones iniciales del movimiento
356         cont=0
357         for i in range(n1-1):
358             cont=cont+1
359             print(cont)
360             ma1=self.z[:,i].reshape( n0 , 1 )
361             ma2=self.xp[:,i].reshape( n3 , 1 )
362             ma3=self.q[:,i].reshape( n2 , 1 )
363             ma4 , ma5 , ma6 , ma7 , error =solu ( self.Fd , self.Gd , self.Hd , self.hkpp
364 , self.hkp , self.hk , my , ma1 , ma2 , ma3 , a[ i+1 ] )
365             self.z[:,i+1]=ma4.squeeze()
366             self.q[:,i+1]=ma5.squeeze()
367             self.m[:,i+1]=ma6.squeeze()
368             self.xp[:,i+1]=ma7.squeeze()
369         return self.z[0:n3,:] , self.z[n3:n0,:] , self.q , self.m , self.xp
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
```