UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

Sobre el teorema de Cohn para el cálculo de la primera homología SL_2 vía sucesiones espectrales

Para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática

Elaborado por:

Elvis Torres Pérez

ORCID: 0009-0004-9215-0176

Asesor:

Dr. Joe Albino Palacios Baldeón

ORCID: 0000-0003-4239-2746

Lima-Perú

2024

Citar/How to cite	Torres Pérez [1]
Referencia/Reference Estilo/Style: IEEE	[1] E. Torres Pérez, *“Sobre el teorema de Cohn para el cálculo de la primera homología de SL_2 vía sucesiones espectrales”* [Tesis de licenciatura]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2024.

Citar/How to cite	(Torres Pérez, 2024)
Referencia/Reference Estilo/Style: APA (7ma ed.)	Torres Pérez, E.(2024). *“Sobre el teorema de Cohn para el cálculo de la primera homología de SL_2 vía sucesiones espectrales”* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional UNI.

Dedicatoria

Dedico principalmente esta tesis a mi familia y a mi novia Ruth, los amo mucho.

Agradecimientos

Agradecimientos principales a mi asesor y a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería en cuyas aulas se me dió la formación que me abrió las puertas al mundo. Al grupo ACECOM donde aprendí más sobre el mundo de la programación, con el cual tuve acceso a mejores oportunidades laborales. A mis profesores, a quienes recuerdo en esta nueva etapa de mi vida y de quienes siempre procuré aprender.

Resumen

Paul M. Cohn, en su estudio de la estructura del grupo general lineal GL_2 de un anillo unitario, obtuvo una fórmula para la primera homología del subgrupo SL_2. En esta tesis se mostrará otra prueba de este resultado para una clase particular de anillos (conmutativos) que el propio Cohn llamó *anillos* GE_2 *universales*. Para lo cual se usarán las sucesiones espectrales como herramienta principal.

Palabras clave: Homología de grupos, grupo especial lineal, matrices elementales, teoría K algebraica.

Abstract

Paul M. Cohn, in his study of the structure of the general linear group GL_2 for a ring with unit, found a formula for the calculation of the first homology of the subgroup SL_2. In this thesis we will show another proof of this result for a particular class of (commutative) rings which Cohn called *universal* GE_2*-rings*. For this purpose, spectral sequences will be used as a principal tool.

Keywords: Group homology, special linear group, elementary matrices, algebraic K-theory.

Introducción

Generalidades

El grupo general lineal GL_n para un cuerpo F ha sido ampliamente estudiado, se sabe del álgebra lineal que:

Toda matriz invertible $n \times n$ puede expresarse como producto de matrices elementales.

De hecho esto se cumple también para dominios euclídeos (anillos donde puede efectuase la división euclídea, los cuales poseen una norma conocida como norma euclídea), es por eso que si un anillo unitario cualquiera satisface dicha propiedad, a este se le conoce como *anillo* GE_n. En su artículo Paul M. Cohn [1] estudia los anillos que satisfacen esta condición para el caso $n = 2$ y da algunos ejemplos de anillos que la satisfacen. Uno de los teoremas principales del mencionado artículo trata del cálculo de la abelianización de un subgrupo generado por matrices elementales de "determinante" 1 llamado E_2. No es difícil mostrar que un anillo conmutativo A satisface GE_2 si y solamente si $\mathrm{E}_2(A) = \mathrm{SL}_2(A)$, luego la abelianización de E_2 estos anillos coincide con la primera homología de SL_2.

Descripción del problema de investigación

El profesor Kevin Hutchinson de la universidad de Dublin, estudiando el complejo de vectores unimodulares [2] encuentra una fuerte relación entre la exactitud del complejo en los primeros términos y la propiedad GE_2. Fue justamente en el estudio de la primera homología de SL_2 es donde nos encontramos con el resultado de Cohn para anillos GE_2 conmutativos, y es lo que se expondrá en la presente tesis.

Objetivos del estudio

Objetivo general

El objetivo principal de esta tesis es vincular el estudio de la primera homología de SL_2 para un anillo GE_2 conmutativo y el resultado de P.M Cohn sobre la abelianización de el grupo de matrices elementales en SL_2.

Objetivos específicos

- Presentar los principales conceptos del estudio de Cohn y enunciar la versión original del teorema de Cohn.
- Presentar ejemplos de la clasificación de anillos de Cohn tanto de éste como de otros autores.
- Abordar el caso conmutativo del teorema de Cohn utilizando técnicas para el cálculo de la primera homología de grupos lineales basadas en sucesiones espectrales.
- Presentar algunos ejemplos del cálculo de la primera homología de SL_2 para algunos anillos.

Hipótesis del estudio

Hipótesis general

Existe una relación entre el estudio de la primera homología de SL_2 usando el complejo de vectores unimodulares y el teorema de P.M Cohn.

Metodología

La metodología seguida para el desarrollo de la presente tesis es la siguiente:

- Estudiar la exactitud del complejo de vectores unimodulares para un anillo conmutativo y unitario.
- Estudiar la homología de SL_2 con coeficientes en algunos módulos del complejo de vectores unimodulares así como algunos de sus subgrupos, identificar los objetos conocidos que nos van apareciendo.
- Usar la maquinaria de las sucesiones espectrales para aproximarnos a la homología de SL_2 en dimensión 1.
- Estudiar la convergencia de la sucesión espectral a la homología de SL_2 y obtener algunas secuencias exactas que involucran los objetos estudiados.
- Estudiar los diferenciales de la sucesión espectral que nos brindarán información mas precisa de las secuencias exactas obtenidas.

Estructura de la tesis

La presente tesis consta de 4 capítulos, en el primero se incluirán los mínimos conocimientos de teoría de anillos y módulos requeridos por el lector, mientras que en el segundo y tercero se detallan las principales herramientas teóricas requeridas para el desarrollo de la tesis, estas giran entorno a la homología de grupos y las sucesiones espectrales. El último capítulo, cuerpo principal de la tesis, enuncia en su primera sección la versión original del teorema de Cohn, mientras que en la siguiente y última sección presenta nuestra versión mas particular y algunos ejemplos de nuestros cálculos.

Finalizando tenemos algunas conclusiones sobre la clasificación de anillos de Cohn y la generalización de los métodos aquí expuestos para la prueba del teorema.

Cabe destacar que el lector necesitará conocer el lenguaje básico de la teoría de categorías (objetos, morfismos y funtores), así como conocimientos básicos sobre anillos conmutativos y módulos (homomorfismos, núcleo, imagen, teoremas de isomorfismo, producto tensorial, etc.) y la teoría de grupos básica.

Tabla de Contenido

Capítulo I. Anillos y Módulos

Este apéndice incluirá algunas definiciones y hechos básicos de la teoría de anillos no conmutativos y módulos.

A. Definiciones básicas

Definición A.1. Un anillo A es un conjunto junto a dos aplicaciones $+ : A \times A \to A$ y $\cdot : A \times A \to A$ que satisface las siguientes operaciones.

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo $a, b, c \in A$.
2. $a + b = b + a$ para todo $a, b \in A$.
3. Existe $0 \in A$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo $a \in A$.
4. Para todo $a \in A$ existe $-a \in A$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$, dicho elemento es llamado el *opuesto* de a.
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todo $a, b, c \in A$.
6. Distributividad: Para todo $a, b, c \in A$ se satisface

   a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

   b) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

A veces en el producto $a \cdot b$ solo escribiremos ab.

Decimos que un anillo A es *unitario* o con *con unidad* si existe $1 \in A$ tal que

7. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in A$.

Es sencillo mostrar que dicho elemento es único.

Una *unidad* en un anillo unitario A es un elemento $a \in A$ tal que existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$. De la definición de anillo es fácil mostrar que este elemento es único. Denotaremos por a^{-1} al elemento correspondiente a a y le llamaremos el *inverso* de a. El conjunto de todas las unidades de A será denotado por $A^{\times}$.

Decimos que un anillo es *conmutativo* si satisface

8. $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in A$.

Un *dominio* es un anillo A tal que $ab = 0$ implica que $a = 0$ o $b = 0$ para todo $a, b \in A$. Si A es conmutativo le llamamos dominio integro.

Definición A.2. Un ideal izquierdo I en un anillo unitario A es un subconjunto de A que satisface lo siguiente:

1. Para todo $a, b \in I$ tenemos que $a + b \in I$.

2. Para todo $a \in I$ y $b \in A$ tenemos que $ab \in I$.

Un ideal es *propio* si no es todo el anillo.

De la definición tenemos que un ideal izquierdo I de A es de hecho un submódulo de A.

De forma análoga podemos definir un ideal derecho. Un ideal *bilatero* es un ideal de A izquierdo y derecho a la vez.

Un ideal izquierdo (derecho) $\mathfrak{m}$ es *maximal* si no existe un ideal izquierdo (derecho) propio $I \neq \mathfrak{m}$ que lo contenga. El lema de Zorn garantiza que todo ideal izquierdo (derecho) propio esté contenido en un ideal izquierdo (derecho) maximal.

Es conocido el concepto de anillo local en anillos conmutativos, en este contexto necesitamos de un lema.

Lema A.3. *Dado un anillo A unitario, son equivalentes:*

1. *A tiene un único ideal izquierdo maximal.*

2. *A tiene un único ideal derecho maximal.*

Demostración. Vea T. Y. Lam [3, Teorema 19.1]. □

Definición A.4. Un anillo A es local si y solo si satisface alguno de las propiedades equivalentes del lema anterior.

Dado un anillo A unitario y un ideal I bilatero, y dada la relación de equivalencia $a \sim b$ si y solo si $b - a \in I$, el conjunto cociente A/I es el conjunto de las clases $a + I$ con $a \in A$. No es difícil mostrar que este conjunto es un anillo con las operaciones

1. $(a + I) + (b + I) := (a + b) + I$.

2. $(a + I) \cdot (b + I) := ab + I$.

Es sabido para anillos conmutativos que el cociente entre un anillo A y un ideal maximal M es siempre un cuerpo, el cuerpo obtenido del cociente entre un anillo local conmutativo y su único ideal maximal es llamado *cuerpo residual*.

Ahora vamos pasar a la definición de módulo en este contexto

Definición A.5. Sea A un anillo unitario, un A-módulo izquierdo M es un conjunto con dos operaciones, una interna $+ : M \times M \to M$ y una externa $\cdot : A \times M \to M$ que satisfacen:

1. $m + (n + p) = (m + n) + p$ para todo $m, n, p \in M$.

2. $m + n = n + m$ para todo $m, n \in M$.

3. Existe $0 \in M$ tal que $m + 0 = 0 + m = m$ para todo $m \in M$.

4. Para todo $m \in M$ existe $-m \in M$ tal que $m + (-m) = (-m) + m = 0$.

5. Para todo $a, b \in A$ y $m \in M$ tenemos que $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$.

6. Para todo $m \in M$ tenemos que $1 \cdot m = m$.

7. Para todo $a, b \in A$ y $m \in M$ tenemos que $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$.

8. Para todo $a \in A$ y $m, n \in M$ tenemos que $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$.

A veces escribiremos am en lugar de $a \cdot m$.

Un A-submódulo de un A-módulo izquierdo M es un subconjunto $N \subseteq M$ que es un A-módulo izquierdo restringiendo las operaciones de M. Solo es necesario verificar que $am + bn \in N$ para todo $a, b \in A$ y $m, n \in N$.

Los conceptos de A-módulo y A-submódulo derechos son definidos análogamente. A partir de aquí trabajaremos con A-módulos izquierdos a menos que se indique lo contrario, las propiedades sobre módulos que citaremos también son satisfechos por A-módulos

derechos sin cambios en las pruebas. También la palabra anillo a partir de aquí significará anillo unitario.

Dado un A-submódulo N de un A-módulo M, sea la relación de equivalencia $m \sim n$ si y solamente si $n - m \in N$. El conjunto cociente M/N de elementos $m + N$ con $m \in M$ es un A-módulo con las operaciones

1. $(m + N) + (n + N) := (m + n) + N$ con $m, n \in M$.
2. $a \cdot (m + N) := am + N$ con $a \in A$ y $m \in M$.

Definición A.6. 1. Sean A y B anillos, un homomorfismo de anillos es una función $f : A \to B$ que satisface para todo a, b lo siguiente:

   - $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
   - $f(ab) = f(a)f(b)$.
   - $f(1) = 1$.

   Dado un homomorfismo de anillos $f : A \to B$, definimos $\ker(f) := \{x \in A : f(x) = 0\}$ y $\text{im}(f) := \{f(x) : x \in A\} \subset B$.

2. Sea A un anillo y M, N A-módulos, un homomorfismo de A-módulos es una función $f : M \to N$ que satisface lo siguiente:

   - $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ para todo $m_1, m_2 \in M$ y $a, b \in A$.
   - $f(am) = af(m)$ para todo $a \in A$ y $m \in M$.

   Dado un homomorfismo de A-módulos $f : M \to N$, tenemos tres submódulos distinguidos, el núcleo $\ker(f) := \{m \in M : f(m) = 0\}$, la imagen $\text{im}(f) := \{f(m) :\in M\}$ y el cokernel $\text{coker}(f) := N/\text{im}(f)$. Un *monomorfismo* es un homomorfismo inyectivo, es fácil mostrar que un homomorfismo f es un monomorfismo si su núcleo es el submódulo trivial $\{0\}$. Un *epimorfismo* es un homomorfismo sobreyectivo. Un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo.

Teorema A.7 (Teoremas de Isomorfismo)**.** *1. Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos, entonces $\ker(f)$ es un ideal bilatero de A, $\text{im}(f)$ es un subanillo de B y existe un isomorfismo $A/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$.*

2. *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo de A-módulos, luego existe un isomorfismo $M/\ker(f) \xrightarrow{\sim} im(f)$.*

Demostración. En ambos casos la prueba es similar, en el primer caso el isomorfismo es definido como el mapa $\overline{f} : A/\ker(f) \to \text{im}(f) \subset B$, $a + \ker(f) \mapsto f(a)$ y en el segundo $\hat{f} : M/\ker(f) \to \text{im}(f) \subset N$, $m + \ker(f) \mapsto f(m)$. No es difícil mostrar que ambos están bien definidas y son inyectivas, la sobreyectividad es obvia. □

Definición A.8 (Suma directa)**.** Sea A un anillo, dada una familia de A-módulos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, la suma directa es un nuevo A-módulo $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ cuyos elementos son tuplas $(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ con $m_\alpha \in M_\alpha$ y con un número finito de componentes no nulas. Definimos también las inclusiones $j_\alpha : M_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$, que manda a $m_\alpha \in M_\alpha$ para la tupla que tiene como componente α-ésima igual a m_α y 0 en las otras.

Definición A.9. Sea A un anillo, decimos que un A-módulo es *libre* si es isomorfo a una suma directa de copias de A.

Teorema A.10 (Propiedad universal de la suma directa)**.** *Sea A un anillo, y $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de A-módulos. Sea M un A-módulo y $f_\alpha : M_\alpha \to M$, entonces existe un único homomorfismo $F_\Lambda : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \to M$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$ tenemos $F_\Lambda j_\alpha = f_\alpha$.*

Demostración. El homomorfismo en cuestión está definido por:

$$(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mapsto \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(m_\alpha),$$

note que el sumatorio es finito por la definición de suma directa.

La unicidad no es difícil de probar, si tenemos una tupla $(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, como este tiene un conjunto finito de componentes no nulas, es una suma finita

$$(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = \sum_{\alpha\in\Lambda} j_\alpha(m_\alpha)$$

luego si suponemos que existe otro homomorfismo F'_Λ que satisface lo mismo que F_Λ, entonces aplicando F'_Λ nos da

$$F'_\Lambda((m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = F'_\Lambda(\sum_{\alpha\in\Lambda} j_\alpha(m_\alpha)) = \sum_{\alpha\in\Lambda} F'_\Lambda j_\alpha(m_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(m_\alpha) = F_\Lambda((m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$$

□

B. Producto tensorial de módulos

Sea A un anillo, y sean M y N A-módulos derecho e izquierdo respectivamente. El producto tensorial de M y N denotado por $M \otimes_A N$ es el grupo abeliano libre generado por los símbolos $m \otimes n$ donde $m \in M$ y $n \in N$ cocientado por el subgrupo generado por los siguientes elementos

$$(m_1 + m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n, \quad m_1, m_2 \in M, \quad n \in N;$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) - m \otimes n_1 - m \otimes n_2, \quad m \in M, \quad n_1, n_2 \in N;$$

$$m\lambda \otimes n - m \otimes \lambda n, \quad m \in M, \quad n \in N, \quad \lambda \in A;$$

Un anillo A puede ser visto como un A-módulo izquierdo o derecho, luego tenemos los siguientes isomorfismos para el A-módulo izquierdo M

$$A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M, \quad \lambda \otimes m \to \lambda m,$$

y el A-módulo derecho N

$$N \otimes_A A \xrightarrow{\sim} N, \quad n \otimes \lambda \to n\lambda.$$

De la definición tenemos la siguiente propiedad universal

Teorema B.1. *Sea A un anillo, M un A-módulo derecho, N un A-módulo izquierdo y G un grupo abeliano. Sea $\varphi : M \times N \to G$ una aplicación que satisface*

- $\varphi(m_1 + m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$ *para todo* $m_1, m_2 \in M$, $n \in N$.
- $\varphi(m, n_1 + n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$ *para todo* $m \in M$, $n_1, n_2 \in N$.
- $\varphi(m\lambda, n) = \varphi(m, \lambda n)$ *para todo* $m \in M$, $n \in N$ *y* $\lambda \in A$.

Entonces existe un único homomorfismo de grupos abelianos $\overline{\varphi} : M \otimes_A N \to G$ definido como $m \otimes n \mapsto \varphi(m, n)$.

Demostración. Las propiedades de φ se ajustan a la definición de producto tensorial, no es difícil a partir de aquí probar que $\overline{\varphi}$ está bien definido. La unicidad es obvia. □

Capítulo II. Homología

En el presente capítulo introduciremos la homología de grupos, necesitaremos algunas preliminares de álgebra homológica que será tema de la sección 1 mientras que en la sección 2 construiremos la homología de grupos para un grupo G y estudiaremos algunas de sus propiedades básicas.

A. Complejos de cadenas y su homología

En esta sección A es un anillo con elemento unidad 1 y todos los módulos son A-módulos izquierdos. La construcción puede ser aplicada a A-módulos derechos casi sin ningún cambio.

Definición A.1. Un *complejo de cadenas* de A-módulos es una familia $C_\bullet = \{C_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de A-módulos con homomorfismos $\partial_i : C_i \to C_{i-1}$ llamados *diferenciales*, tales que $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ para cualquier $i \in \mathbb{Z}$.

Para cualquier complejo de cadenas $C_\bullet$, sean $Z_i = Z_i(C_\bullet) := \ker(\partial_i)$ $B_i = B_i(C_\bullet) := \mathrm{im}(\partial_{i+1})$, cuyos elementos son llamados i-*ciclos* y i-*bordes* de $C_\bullet$ respectivamente. Es fácil ver que $0 \subseteq B_i(C_\bullet) \subseteq Z_i(C_\bullet) \subseteq C_i$. La i-ésima *homología* de $C_\bullet$ es el grupo cociente $H_i(C_\bullet) = Z_i(C_\bullet)/B_i(C_\bullet)$. Cuando $H_i(C_\bullet) = 0$ decimos que $C_\bullet$ es *exacto* en dimensión i (o en C_i) y si esto último ocurre para todo i decimos que el complejo es una *secuencia exacta*.

Un *morfismo* $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ de complejos de cadenas es una familia $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos $f_i : C_i \to D_i$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}} & C_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}} & D_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & D_i & \xrightarrow{\partial_i} & D_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \cdots
\end{array}$$

es conmutativo. i.e. Para cualquier $i \in \mathbb{Z}$, $\partial_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \partial_i$ (note que aquí usamos la misma notación para los diferenciales de $C_\bullet$ y $D_\bullet$, usaremos una notación diferente cuando sea necesario). Entonces tenemos la categoría $\mathbf{Ch}(A - \mathbf{mod})$ de complejos de cadenas de A-módulos.

Un morfismo $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ entre complejos de cadenas induce un A-homomorfismo natural $f_* : H_i(C_\bullet) \to H_i(D_\bullet)$ dado por $x + B_i(C_\bullet) \mapsto f_i(x) + B_i(D_\bullet)$ para cualquier $x \in Z_i$. Si $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ y $g_\bullet : D_\bullet \to E_\bullet$ son morfismos de complejos de cadenas, tenemos que $(g_\bullet \circ f_\bullet)_* = g_* \circ f_*$. Más aún, la identidad $\mathrm{id}_{C_\bullet}$ induce el morfismo identidad $\mathrm{id}_{H_i(C_\bullet)}$.

Los complejos de cadenas tienen límites directos arbitrarios y sumas directas, si $\{C_j\}_{j \in I}$ es una familia de complejos de cadenas, no es difícil mostrar la conmutatividad de la homología con esta última operación, i.e.

$$H_i\left(\bigoplus_{j \in J} C_j\right) \simeq \bigoplus_{j \in J} H_i(C_j)$$

Un importante caso particular, es el concepto de secuencia exacta corta, para A-módulos C, D y E, decimos que el complejo (podemos completar con ceros a ambos lados)

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

es una *secuencia exacta corta* si es exacta en C, D y E. Esta condición implica que f es inyectiva y g es sobreyectiva y, obviamente, $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$.

También, decimos que el diagrama

$$0 \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} D_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} E_\bullet \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta corta de complejos de cadenas si para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow C_i \xrightarrow{f_i} D_i \xrightarrow{g_i} E_i \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta corta.

A continuación presentamos el muy útil lema de la serpiente.

Lema A.2 (Lema de la serpiente)**.** *Para el diagrama conmutativo con filas exactas de* A-

módulos

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & & \end{array}$$

existe un homomorfismo de conexión δ : ker$(h) \to$ *coker*(f) *tal que el diagrama*

$$\text{ker}(f) \xrightarrow{\alpha} \text{ker}(g) \xrightarrow{\beta} \text{ker}(h) \xrightarrow{\delta} \textit{coker}(f) \xrightarrow{\alpha'} \textit{coker}(g) \xrightarrow{\beta'} \textit{coker}(h)$$

es una secuencia exacta. Más aún, si α *es inyectiva entonces el homomorfismo inducido* ker$(f) \xrightarrow{\alpha}$ ker(g) *es también inyectivo. Similarmente si* β' *es sobreyectivo entonces el homomorfismo inducido coker*$(g) \xrightarrow{\beta'}$ *coker*(h) *es también sobreyectivo.*

Demostración. Los homomorfismos a ambos lados de δ son inducidos por α, β, α' y β' respectivamente. Luego, la exactitud ker(g) y coker(g) es clara.

La parte importante es la construcción del homomorfismo de conexión. Para este propósito, considere $c \in$ ker(h), por la sobreyectividad de β existe un elemento $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$. Por la conmutatividad del diagrama tenemos que $\beta'(g(b)) = h(\beta(b)) = h(c) = 0$ luego $g(b) \in$ ker$(\beta') =$ im(α'). Entonces existe $a' \in A'$ tal que $g(b) = \alpha'(a')$, así definimos $\delta(c) = a'$.

Ahora, suponga que $c = \beta(b) = \beta(\hat{b})$, entonces por la exactitud de la fila superior tenemos $\alpha(a) = b - \hat{b}$, aplicando g y usando la conmutatividad del diagrama tenemos $\alpha'(f(a)) = g(\alpha(a)) = g(b) - g(\hat{b}) = \alpha'(a') - \alpha'(\hat{a}')$. Por la inyectividad de α' tenemos $f(a) = a' - \hat{a}'$ que nos da el mismo elemento en coker(f), así garantizamos la buena definición de δ.

Para la exactitud en ker(h), suponga que $b \in$ ker(g), vamos a mostrar que $\delta(\beta(b)) = 0$. Como $b \in$ ker(g) es una pre-imagen de $\beta(b) \in$ ker(h) tenemos que para obtener la imagen por δ tomamos $g(b) = 0 = \alpha'(0)$ y así $\delta(\beta(b)) = 0$.

Ahora tomemos $c \in$ ker(h) tal que $\delta(c) = 0$, tomando $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$, sabemos que $g(b) = \alpha'(a')$. La premisa implica que $a' = f(a)$ para algún $a \in A$. Entonces tenemos (usando la conmutatividad de diagrama) que $g(b) = \alpha'(f(a)) = g(\alpha(a))$, entonces el elemento $b - \alpha(a) \in$ ker(g) es tal que $\beta(b - \alpha(a)) = \beta(b) = c$. Esto muestra a exactitud de la secuencia en ker(h).

Para la exactitud en coker(f), tomemos $c \in$ ker(h) y demostremos que $\alpha'(\delta(c)) = 0$. Tomando $b \in B$ con $\beta(b) = 0$ y luego $g(b) = \alpha'(a')$ tenemos que a' representa a $\delta(c)$. Ahora,

aplicando α a la clase de a' nos da la clase de $g(b)$ que es cero e coker(g). Así $\alpha'(\delta(c)) = 0$.

Ahora considere $\overline{a'} \in$ coker(f) tal que $\alpha'(\overline{a'}) = 0 \in$ coker(g). Luego tenemos que $\alpha'(a') = g(b)$ con $b \in B$. Tenemos que $\beta(b) \in$ ker(h) pues $h(\beta(b)) = \beta'(g(b)) = \beta'(\alpha'(a')) = 0$. Es claro que $\delta(\beta(b)) = \overline{a'}$. Esto demuestra la exactitud en coker(f). □

Proposición A.3 (Secuencia exacta larga)**.** *Para cualquier secuencia exacta corta de cadenas de A-modules*

$$0 \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet \xrightarrow{g} E_\bullet \longrightarrow 0.$$

y para cualquier $i \in \mathbb{Z}$ existe un homomorfismo de conexión $\delta_i : H_i(E_\bullet) \to H_{i-1}(C_\bullet)$ tal que el diagrama

$$\cdots \to H_i(C_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_i(D_\bullet) \xrightarrow{g_*} H_i(E_\bullet) \xrightarrow{\delta_i} H_{i-1}(C_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_{i-1}(D_\bullet) \xrightarrow{g_*} \cdots .$$

es una secuencia exacta.

Demostración. Aquí solo construiremos el homomorfismo δ_i y para el resto de la prueba el lector puede consultar C. Weibel [4, Teorema 1.3.1]. Considere el siguiente diagrama con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_i & \xrightarrow{f_i} & D_i & \xrightarrow{g_i} & E_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_i} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_i} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_i} & & \\
0 & \longrightarrow & C_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & D_{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & E_{i-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{i-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C_{i-2} & \xrightarrow{f_{i-2}} & D_{i-2} & \xrightarrow{g_{i-2}} & E_{i-2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Sea $e \in Z_i(E_\bullet) =$ ker(∂_i) que representa al elemento $\overline{e} \in H_i(E_\bullet)$. Tomamos $d \in D_i$ tal que $e = g_i(d)$. Luego (como en la prueba del Lema de la Serpiente) sabemos que $\partial_i(d) \in$ ker(g_{i-1}). Entonces $\partial_i(d) = f_{i-1}(c)$ para algún $c \in C_{i-1}$. Mostramos que $c \in Z_{i-1}(C_\bullet)$. Desde que $f_{i-2}(\partial_{i-1}(c)) = \partial_{i-1}(f_{i-1}(c)) = \partial_{i-1}(\partial_i(d)) = 0$, por la inyectividad de f_{i-2} tenemos $\partial_{i-1}(c) = 0$. Finalmente c representa un elemento de $H_{i-1}(C_\bullet)$. Ahora, definimos $\delta_i(\overline{e}) = \overline{c}$. □

El homomorfismo de conexión tiene la siguiente propiedad de *naturalidad* cuya demostración es de pura rutina. El lector curioso puede consultar la prueba en C. Weibel [4, Proposition 1.3.4].

Proposición A.4. *Del diagrama conmutativo de complejos de cadenas con filas exactas siguiente:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_\bullet & \xrightarrow{f_\bullet} & D_\bullet & \xrightarrow{g_\bullet} & E_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_\bullet} & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_\bullet & \xrightarrow{f'_\bullet} & D'_\bullet & \xrightarrow{g'_\bullet} & E'_\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

los homomorfismos de conexión de la proposición A.3 inducen el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_i(D_\bullet) & \xrightarrow{g_*} & H_i(E_\bullet) & \xrightarrow{\delta_i} & H_{i-1}(C_\bullet) & \xrightarrow{f_*} & H_{i-1}(D_\bullet) & \xrightarrow{g_*} & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_i(D'_\bullet) & \xrightarrow{g'_*} & H_i(E'_\bullet) & \xrightarrow{\delta'_i} & H_{i-1}(C'_\bullet) & \xrightarrow{f'_*} & H_{i-1}(D'_\bullet) & \xrightarrow{g'_*} & \cdots \end{array}$$

La siguiente definición viene de la topología algebraica.

Definición A.5. Decimos que dos morfismos de complejos $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ son *homotópicos* si existe una familia $\{s_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos $s_i : C_i \to D_{i+1}$ tales que

$$f_i - g_i = \partial_i s_i + s_{i-1}\partial_i.$$

La familia $\{s_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es llamada una *homotopía* de $f_\bullet$ a $g_\bullet$. Decimos que $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ es una *equivalencia homotópica* si existe un morfismo $g_\bullet : D_\bullet \to C_\bullet$ tal que $g_\bullet \circ f_\bullet$ y $f_\bullet \circ g_\bullet$ son homotópicos a los morfismos identidad de $C_\bullet$ y $D_\bullet$ respectivamente.

Dos morfismos homotópicos inducen mapas iguales en homología de complejos. Más precisamente.

Lema A.6. *Si $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ son homotópicos, entonces los homomorfismos $f_*, g_* : H_i(C_\bullet) \to H_i(D_\bullet)$ son iguales para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que si $f_\bullet$ y el morfismo cero $0_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ son homotópicos, entonces $f_* : H_i(C_\bullet) \to H_i(D_\bullet)$ es el mapa cero. Sea el elemento $\overline{x} \in H_i(C_\bullet)$ representado por $x \in Z_i(C_\bullet)$. Entonces $f_i(x) = \partial_i(s_i(x))$. Por tanto $f_i(x) \in B_i(D_\bullet)$ el cual representa el elemento cero en $H_i(D_\bullet)$. □

Para la definición de la homología de grupos necesitamos de los módulos proyectivos. Estos módulos can pueden ser considerados como la generalización de los espacios vectoriales con escalares en anillos.

Definición A.7. Un A-módulo P es llamado *proyectivo* si para cualquier diagrama con fila exacta dado (i.e. $f : M \to N$ es sobreyectivo)

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

existe un *levantamiento* de ρ, i.e. un homomorfismo $h : P \to M$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \overset{h}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es conmutativo.

Es bien sabido que cualquier para A-módulo M existe un módulo libre F y un homomorfismo sobreyectivo $F \twoheadrightarrow M$. El módulo F puede construirse tomando el A-módulo libre generado por los elementos de M y el homomorfismo $F \twoheadrightarrow M$ puede definirse correspondiendo al elemento básico $u_m \in F$ el elemento $m \in M$ y luego extender por linealidad. Cuando M es proyectivo, entonces el homomorfismo $F \twoheadrightarrow M$ tiene un mapa de escisión $M \to F$.

Proposición A.8. *1. Un A-module M es proyectivo si y solo si existe un A-module N tal que $M \oplus N$ es libre.*

2. Si $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es una secuencia exacta corta de A-módulos izquierdos y P es un A-modulo proyectivo derecho, entonces

$$0 \longrightarrow P \otimes_A M' \xrightarrow{id_P \otimes f} P \otimes_A M \xrightarrow{id_P \otimes g} P \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

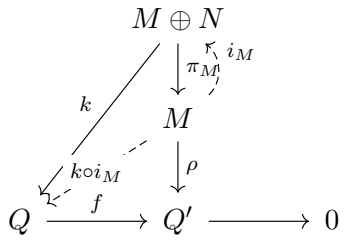
es una secuencia exacta corta.

Demostración. 1. Sea M proyectivo. Tomamos un A-módulo libre F con un homomorfismo sobreyectivo $f : F \to M$. Sea N el núcleo de este homomorfismo. Entonces por

la proyectividad de M tenemos $k : M \to F$ tal que $f \circ k = \mathrm{id}_M$. Luego la secuencia exacta $0 \to N \to F \xrightarrow{f} M \to 0$ se escinde y tenemos $F \simeq N \oplus M$. Recíprocamente, supongamos que existe un A-módulo N tal que $M \oplus N$ es libre, considere el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\ Q & \xrightarrow{f} & Q' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y componiendo con el homomorfismo de proyección $M \oplus N \xrightarrow{\pi_M} M$ tenemos por la proyectividad de $M \oplus N$ el homomorfismo $k : M \oplus N \to Q$



tomando el homomorfismo de inclusión $i_M : M \to M \oplus N$, el homomorfismo $k \circ i_M : M \to Q$ hace conmutativo el primer diagrama.

2. Si F es un A-módulo derecho libre, entonces $F \otimes_A M'$, $F \otimes_A M$ y $F \otimes_A M''$ son una suma directa de copias de los respectivos A-módulos M', M y M''. Esto nos da la exactitud de

$$0 \longrightarrow F \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{id}_F \otimes f} F \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}_F \otimes g} F \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

si Q es un A-módulo tal que $P \oplus Q$ es libre. Entonces la distributividad de la suma directa con respecto al producto tensorial nos da la exactitud de

$$0 \longrightarrow P \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes f} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes g} P \otimes_A M'' \longrightarrow 0.$$

□

Definición A.9. Sea M un A-módulo. Una *resolución* de M es una familia de A-módulos $\{M_i\}_{i \geq 0}$, una familia de morfismos $\{d_i : M_i \to M_{i-1}\}_{i \geq 1}$ y un mapa $\epsilon : M_0 \to M$ tal que el

diagrama

$$\cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

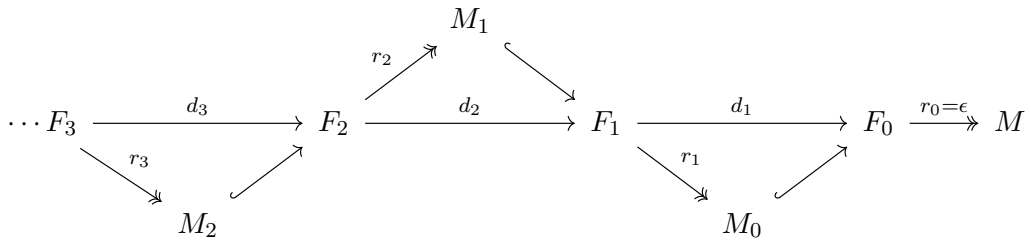
es una secuencia exacta. Esta resolución de M es llamada libre o proyectiva si los A-módulos M_i son libres o proyectivos respectivamente. denotamos esta resolución por $M_\bullet \to M$.

Proposición A.10. *Todo A-módulo M tiene una resolución libre. En particular, todo M tiene una resolución proyectiva.*

Demostración. Sea $F_0 \overset{d_0=\epsilon}{\twoheadrightarrow} M$ un homomorfismo sobreyectivo donde F_0 libre. Sea $M_0 = \ker(\epsilon)$. Sea $F_1 \overset{r_1}{\twoheadrightarrow} M_0$ un homomorfismo sobreyectivo donde F_1 es libre. Sea d_1 la composición $F_1 \overset{r_1}{\twoheadrightarrow} M_0 \hookrightarrow F_0$. Suponga por inducción que ya hemos construido $F_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\twoheadrightarrow} F_{n-2}$. Sea $M_{n-1} = \ker(d_{n-1})$ y tomemos $F_n \overset{r_n}{\twoheadrightarrow} M_{n-1}$ un homomorfismo sobreyectivo tal que F_n es libre. Tome d_n como la composición de r_n y la inclusión $M_{n-1} \to F_{n-1}$. Es fácil ver que el diagrama

$$F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta. Por claridad, vea el diagrama siguiente:



□

Teorema A.11 (Teorema de Comparación)**.** *Sea $P_\bullet \to M$ una resolución proyectiva de un A-módulo M y $f' : M \to N$ un homomorfismo de A-módulos. Entonces para cualquier resolución $Q_\bullet \overset{\eta}{\to} N$ existe un mapa de complejos de cadenas $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ tal que $\eta \circ f_0 = f' \circ \epsilon$. El mapa de complejos de cadenas $f_\bullet$ es único salvo homotopías.*

Demostración. Sea $Z_{-1}(P_\bullet) := M$, $Z_{-1}(Q_\bullet) = N$, $f_{-1} := f' : Z_{-1}(P_\bullet) \to Z_{-1}(Q_\bullet)$, $\partial_0 = \epsilon$ y $\partial_0 = \eta$. Por la proyectividad de P_0 existe $f_0 : P_0 \to Q_0$ tal que $f' \circ \epsilon = f_{-1} \circ \partial_0$.

Inductivamente supongamos que tenemos la construcción de f_i para $i \leq n$. Entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_n(P_\bullet) & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{\partial_n} & P_{n-1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ 0 & \longrightarrow & Z_n(Q_\bullet) & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{\partial_n} & Q_{n-1} \end{array}$$

donde f'_n es el homomorfismo inducido por la conmutatividad del cuadro derecho. Por la proyectividad de P_{n+1}, tenemos que $f'_n \circ \partial_{n+1}$ tiene un levantamiento f_{n+1} como se muestra:

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & Z_n(P_\bullet) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f'_n} & & \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & Z_n(Q_\bullet) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Concluimos que podemos construir un morfismo de cadenas $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ con las propiedades requeridas. Para la unicidad de $f_\bullet$ salvo homotopía el lector puede consultar en C. Weibel [4, Teorema de Comparación 2.2.6]. □

B. Homología de grupos

1. Definiciones básicas

El Teorema de Comparación A.11 nos el siguiente resultado importante.

Teorema B.1. *Sea M un A-módulo derecho, $P_\bullet \to M$ y $P'_\bullet \to M$ dos resoluciones proyectivas de M. Entonces para cualquier A-módulo izquierdo N tenemos que $H_n(P_\bullet \otimes_A N) \simeq H_n(P'_\bullet \otimes_A N)$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Por el Teorema de Comparación A.11 tenemos morfismos $f_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$ y $g_\bullet : P'_\bullet \to P_\bullet$. Otra vez por el Teorema de Comparación $g_\bullet \circ f_\bullet : P_\bullet \to P_\bullet$ es homotópico a $\mathrm{id}_{P_\bullet}$ y $f_\bullet \circ g_\bullet : P'_\bullet \to P'_\bullet$ es homotópico a $\mathrm{id}_{P_\bullet}$.

Más aún, considere los morfismos $f_\bullet \otimes \mathrm{id}_N$ y $g_\bullet \otimes \mathrm{id}_N$ tenemos que las composiciones $g_\bullet \circ f_\bullet \otimes \mathrm{id}_N$ y $f_\bullet \circ g_\bullet \otimes \mathrm{id}_N$ son homotópicos a los respectivos morfismos de identidad. Entonces, la homología de $f_\bullet \otimes \mathrm{id}_N$ nos da un isomorfismo. □

Ahora estamos listos para definir a homología de grupos. Sea G un grupo y sea $\mathbb{Z}G$ el anillo de grupo de G, i.e. el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los elementos de G con el producto inducido por el producto en G. En esta tesis trabajaremos con $\mathbb{Z}G$-módulos izquierdos, cualquier $\mathbb{Z}G$-módulo izquierdo tiene una estructura natural de $\mathbb{Z}G$-módulo derecho con la acción por derecha $mg := g^{-1}m$. Luego es natural solo hablar de $\mathbb{Z}G$-módulos.

En lo sucesivo usaremos la notación $M \otimes_G N$ para el producto tensorial de M y N como $\mathbb{Z}G$-módulos derecho e izquierdo discutidos arriba. Reservamos la notación $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ al caso en el que M presente naturalmente acciones izquierda y derecha por G (por ejemplo, cuando $M = \mathbb{Z}H$ donde $H \leq G$).

Observación B.2. Observe que la definición de $M \otimes_G N$ viene de $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ añadiendo las relaciones $mg \otimes n = g^{-1}m \otimes n = m \otimes gn$. Si cambiamos m por gm, la última igualdad se transforma en $m \otimes n = gm \otimes gn$. Ahora, si definimos la acción diagonal de G en $M \otimes N$ como $g(m \otimes n) := gm \otimes gn$, tenemos que la igualdad anterior se transforma ahora en $m \otimes n = g(m \otimes n)$. Entonces

$$M \otimes_G N = (M \otimes N)_G := M \otimes N / \langle g(m \otimes n) - (m \otimes n) | m \in M, n \in N, g \in G \rangle.$$

Definición B.3. Sea G un grupo y M un G-módulo i.e. un $\mathbb{Z}G$-módulo. La n-ésima homolgía de G con coeficientes en M se define como sigue:

$$H_n(G, M) := H_n(P_\bullet \otimes_G M).$$

Donde $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ es una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre G. Cuando $M = \mathbb{Z}$ y la acción de G en $\mathbb{Z}$ es trivial, entonces $H_n(G, \mathbb{Z})$ es llamada n-ésima homología entera de G.

Una propiedad importante dela homología de un grupo G es la secuencia exacta larga.

Teorema B.4. *Sea G un grupo y $0 \to N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N'' \to 0$ una secuencia exacta corta de G-módulos izquierdos ($\mathbb{Z}G$-módulos). Entonces existe una secuencia exacta larga*

$$\cdots \to H_n(G, N') \xrightarrow{\alpha_*} H_n(G, N) \xrightarrow{\beta_*} H_n(G, N'') \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(G, N') \to \cdots$$

Demostración. Considera una resolución proyectiva $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre G, tensorizando

(sin el último término $\mathbb{Z}$) obtenemos la secuencia exacta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow P_\bullet \otimes_G N' \xrightarrow{\mathsf{id}_\bullet \otimes \alpha} P_\bullet \otimes_G N \xrightarrow{\mathsf{id}_\bullet \otimes \beta} P_\bullet \otimes_G N'' \longrightarrow 0$$

luego aplicamos propiedad de la secuencia exacta larga A.3. □

El siguiente lema nos da la conmutatividad de la homología de grupos con las sumas y los límites directos.

Lema B.5. *Si $\{M_i\}_{i\in J}$ es una familia de G-módulos, tenemos que:*

$$H_n(G, \bigoplus_{i\in J} M_i) \simeq \bigoplus_{i\in J} H_n(G, M_i).$$

Más aún, si J es un conjunto dirigido y $\{M_i\}_{i\in J}$ un sistema directo de G-módulos, tenemos que:

$$H_n(G, \varinjlim_{i\in J} M_i) \simeq \varinjlim_{i\in J} H_n(G, M_i).$$

En los siguientes ejemplos presentamos algunas propiedades del funtor $H_n(G, \cdot)$.

Ejemplo B.6. Considere el A-módulo M. Tomemos una resolución proyectiva $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ de M sobre $\mathbb{Z}G$. Es bien sabido que el producto tensorial es un funtor exacto derecho, para esto puede consultar P. Hilton y U. Stanbach [5, Proposición 7.3] y el comentario del párrafo anterior. Con esto tenemos la siguiente secuencia exacta

$$P_1 \otimes_A N \xrightarrow{d_1 \otimes \mathsf{id}} P_0 \otimes_A N \xrightarrow{\epsilon \otimes \mathsf{id}} M \otimes_A N \longrightarrow 0$$

eso nos da

$$H_0(G, M) = H_0(P_\bullet \otimes_G M) = \mathsf{coker}(d_1 \otimes \mathsf{id}) \simeq M \otimes_A N$$

Ejemplo B.7. Sea M un G-módulo proyectivo, tenemos que si $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$, entonces $\{P_i \otimes_G M\}_{i\geq 0}$ es una secuencia exacta. Entonces $H_n(G, M) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Para cualquier grupo G, se llama *mapa de ampliación* al homomorfismo $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ definido por $\sum n_i g_i \mapsto \sum n_i$. El núcleo de este homomorfismo es denotado por $I_G = \ker(\epsilon)$ y es llamado *ideal de ampliación* de G. Es fácil ver que I_G es generado por $\{g - 1 | g \in G\}$ como $\mathbb{Z}$-módulo libre el cual, de hecho, es una $\mathbb{Z}$-base.

Para cualquier G-módulo M, el $\mathbb{Z}G$-submódulo $I_G M$ es generado por los elementos $gm - m$ con $g \in G$ y $m \in M$. El cociente

$$M_G := M/I_G M$$

es llamado el grupo de *co-invariantes* de M. Tomemos la secuencia exacta de $\mathbb{Z}G$-módulos

$$0 \to I_G \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

(G actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$). Tensorizando esta secuencia por M obtenemos la secuencia exacta

$$I_G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow M \xrightarrow{\epsilon\otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0$$

esto nos proporciona el isomorfismo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq \mathrm{coker}(I_G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M) = M/I_G M = M_G$ por tanto

$$H_0(G, M) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M_G.$$

En particular, para cualquier grupo G tenemos $H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Ejemplo B.8. En este ejemplo estudiamos el grupo de homología $H_1(G, \mathbb{Z})$. De la secuencia exacta corta $0 \to I_G \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$ de G-módulos, obtenemos la secuencia exacta larga

$$H_1(G, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{\epsilon_*} H_1(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_0(G, I_G) \to H_0(G, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{\epsilon_*} H_0(G, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Desde que $\mathbb{Z}G$ es libre como $\mathbb{Z}G$-módulo, tenemos $H_1(G, \mathbb{Z}G) = 0$ (por el Ejemplo B.6). Más aún

$$H_0(G, \mathbb{Z}G) = \mathbb{Z} \otimes_G \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z} \simeq H_0(G, \mathbb{Z}).$$

Mas el homomorfismo

$$\epsilon_* : \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \otimes_G \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$$

mapea $n \in \mathbb{Z}$ en

$$n \mapsto 1 \otimes n \mapsto 1 \otimes n \mapsto n.$$

Entonces

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq H_0(G, I_G) = (I_G)_G = I_G/I_G^2.$$

Como veremos después I_G/I_G^2 es isomorfo a la abelianización de G. Mostraremos esto usando la resolución estándar de G.

Ejemplo B.9. Sea G un grupo cíclico finito de orden n con generador t. Considere el elemento $N = 1 + t + \cdots + t^{n-1} \in \mathbb{Z}G$. No es difícil verificar que la secuencia

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Note que los homomorfismos están definidos por la multiplicación por N o $t-1$. Tensorizando este complejo de cadenas por un G-módulo M obtenemos el complejo

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{(t-1)} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{(t-1)} M \longrightarrow 0.$$

Luego

$$H_n(G, M) \simeq \begin{cases} M_G, & n = 0 \\ \frac{M^G}{\mathsf{im}N}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \ker(N : M_G \to M^G), & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

donde $M^G := \{m \in M : gm = m \text{ para todo } g \in G\}$.

Ahora presentaremos la resolución estándar de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, que nos será útil en cálculos futuros. Sea $\mathbf{C}'_n(G)$ el grupo abeliano libre generado por G^{n+1}. Sea $\mathbf{C}_n(G)$ el cociente de $\mathbf{C}'_n(G)$ por el subgrupo generado por los elementos $(g_0, \cdots, g_n)$ donde $g_i = g_{i+1}$ para algún i. Denotamos el elemento $\mathbf{C}_n(G)$ representado por $(g_0, \cdots, g_n)$ otra vez por $(g_0, \cdots, g_n)$.

$\mathbf{C}_n(G)$ es un G-módulo izquierdo con la acción:

$$g \cdot (g_0, g_1, \cdots, g_n) = (gg_0, gg_1, \cdots, gg_n)$$

(recuerde que podemos transformar esta acción izquierda de G en una acción derecha definiendo $m \cdot g := g^{-1} \cdot m$). Los elementos $(1, g_1, g_2, \cdots, g_n)$, $g_i \in G$ generan $\mathbf{C}_n(G)$ como un $\mathbb{Z}G$-módulo libre. Los homomorfismos

$$d_n(g_0, g_1, \cdots, g_n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (g_0, \cdots, g_{k-1}, g_{k+1}, \cdots, g_n), \qquad n \geq 1$$

$$\epsilon : \mathbf{C}_0(G) \to \mathbb{Z}, \qquad (1) \mapsto 1$$

Transforman $\mathbf{C}_\bullet(G) \to \mathbb{Z}$ e una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ llamado la *resolución estándar* de G. Sea $\mathbf{B}'_n(G)$ el $\mathbb{Z}G$-módulo generado por los símbolos $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$. Sea $\mathbf{B}_n(G)$ el cociente de $\mathbf{B}'_n(G)$ por el subgrupo generado por los elementos $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$ donde $g_i = 1$ para algún i. A la clase de $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$ en este cociente lo denotamos por el mismo símbolo. Sean los homomorfismos $d_n : \mathbf{B}_n(G) \to \mathbf{B}_{n-1}(G)$ definidos por

$$d_n([g_1|g_2|\cdots|g_n]) = g_1[g_2|\cdots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n] + (-1)^n[g_1|\cdots|g_{n-1}].$$

y $\epsilon : \mathbf{B}_0(G) \to \mathbb{Z}$, dado por $[] \mapsto 1$. Entonces $B_\bullet(G) \to \mathbb{Z}$ es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, llamada la *resolución barra* de G.

Tenemos el isomorfismo de cadenas $\theta_\bullet : \mathbf{C}_\bullet(G) \to \mathbf{B}_\bullet(G)$ definido por

$$(1, g_1, \cdots, g_n) \mapsto [g_1|g_1^{-1}g_2|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n]$$

with inverse $\eta_\bullet : \mathbf{B}_\bullet(G) \to \mathbf{C}_\bullet(G)$ given by

$$[g_1|g_2|\cdots|g_n] \mapsto (1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1g_2\cdots g_n).$$

Lema B.10. *Sea G un grupo. Entonces $H_1(G,\mathbb{Z}) \simeq \frac{G}{[G,G]}$, donde $[G,G]$ es el subgrupo conmutador de G. En otras palabras $H_1(G,\mathbb{Z})$ es la abelianización de G.*

Demostración. Podemos calcular $H_1(G,\mathbb{Z})$ sando la resolución barra $\mathbf{B}_\bullet(G)$. Considere el complejo de cadenas

$$\cdots \xrightarrow{d_3\otimes \mathrm{id}_\mathbb{Z}} \mathbf{B}_2(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2\otimes \mathrm{id}_\mathbb{Z}} \mathbf{B}_1(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1\otimes \mathrm{id}_\mathbb{Z}} \mathbf{B}_0(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Claramente $\mathbf{B}_1(G) = \ker(d_1 \otimes \mathrm{id}_\mathbb{Z})$. Entonces $H_1(G) = \mathbf{B}_1(G)/\mathrm{im}(d_2 \otimes \mathrm{id}_\mathbb{Z})$. En este grupo tenemos $\overline{(d_2 \otimes \mathrm{id}_\mathbb{Z})\{([g_1|g_2]) \otimes 1\}} = 0$, y también

$$\overline{[g_1g_2] \otimes 1} = \overline{[g_1] \otimes 1} + \overline{[g_2] \otimes 1}.$$

Esto implica que el homomorfismo $G/[G,G] \to H_1(G,\mathbb{Z})$, $\overline{g} \mapsto \overline{[g] \otimes 1}$, y su inversa $H_1(G,\mathbb{Z}) \to G/[G,G]$, $\overline{[g] \otimes 1} \mapsto \overline{g}$ están bien definidos y con testo termina la prueba.

Note que por el ejemplo B.8 tenemos

$$I_G/I_G^2 \simeq H_1(G,\mathbb{Z}) \simeq G/[G,G].$$

□

Ejemplo B.11. Sea G un grupo abeliano, y considere $\mathbf{B}_\bullet(G) \to \mathbb{Z}$ la resolución barra de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Considere el mapa

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & \mathbf{B}_2(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & ([g_1|g_2] - [g_2|g_1]) \otimes 1. \end{array}$$

Desde que $d_2 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(([g_1|g_2] - [g_2|g_1]) \otimes 1) = 0$, tenemos el mapa

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & H_2(G,\mathbb{Z}) \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & c(g_1,g_2) := \overline{([g_1|g_2] - [g_2|g_1]) \otimes 1}. \end{array}$$

Ahora, para cualquier $g_1, g_2, g_3 \in G$ tenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned} c(g_1g_2, g_3) &= c(g_1,g_3) + c(g_2,g_3) \\ c(g_1, g_2g_3) &= c(g_1,g_2) + c(g_1,g_3) \\ c(g_1,g_2) &= -c(g_2,g_1). \end{aligned}$$

Esto induce el homomorfismo del producto de cuña $\bigwedge^2 G \to H_2(G)$ dado por $g \wedge h \mapsto c(g,h)$. De hecho este mapa es un isomorfismo, el lector curioso puede consultar K. S. Brown [6, Chapter V, Theorem 6.4].

Sea H un subgrupo de G. Sea $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Entonces este complejo es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$. Luego para cualquier H-módulo M y para cualquier resolución proyectiva $Q_\bullet \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$ tenemos que: $H_n(P_\bullet \otimes_H M) \simeq H_n(Q_\bullet \otimes_H M)$.

Ejemplo B.12. Sea H un subgrupo de un grupo G. Considere resoluciones estándar $C_\bullet(G) \to \mathbb{Z}$ y $C_\bullet(H) \to \mathbb{Z}$. Sea $H\backslash G$ el conjunto de clases derechas y $s : H\backslash G \to G$ cualquier sección de la proyección canónica $\pi : G \to H\backslash G$. Define el mapa

$$\Theta_\bullet(s) : \mathbf{C}_\bullet(G) \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet(H)$$

como

$$(g_0, g_1, \cdots, g_n) \longmapsto (\overline{g_0}, \overline{g_1}, \cdots, \overline{g_n})$$

donde $\overline{g} := g \cdot s(\pi(g))^{-1} \in H$ para cualquier $g \in G$. Es fácil mostrar que este es un H-morfismo de cadenas. Note que si $\text{inc}_\bullet : \mathbf{C}_\bullet(H) \to \mathbf{C}_\bullet(G)$ es el morfismo de cadenas inducido por la inclusión, Como en la prueba del teorema B.1, podemos mostrar que $\Theta_n(s) \circ \text{inc}$ es homotópico a $\text{id}_{\mathbf{C}_\bullet(H)}$. Tensorizando esto por un H-módulo M obtenemos

$$(\Theta_n(s) \otimes \text{id}_M)_* \circ (\text{inc} \otimes \text{id}_M)_* = (\Theta_n(s) \otimes \text{id}_M \circ \text{inc} \otimes \text{id}_M)_* = \text{id}_{H_n(H,M)}$$

Y como $(\text{inc} \otimes \text{id}_M)_* = \text{id}_{H_n(H,M)}$ finalmente obtenemos $(\Theta_n(s) \otimes \text{id}_M)_* = \text{id}_{H_n(H,M)}$.

2. La homología como funtor de 2 variables

En esta sección estudiaremos la homología de grupos como funtor de la categoría de pares(G, M) donde G es un grupo y M es un G-módulo izquierdo. Un morfismo entre (G, M) y (G', M') es un par de mapas (α, f), donde $\alpha : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos y $f : M \to M'$ es un homomorfismo de G-módulos tomando M' como un G-módulo con la acción $g \cdot m' := \alpha(g)m'$. i.e. Precisamente, el morfismo de pares debe satisfacer la ecuación de compatibilidad

$$f(gm) = \alpha(g)f(m). \tag{B.1}$$

Sea $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ y $P'_\bullet \to \mathbb{Z}$ dos resoluciones proyectivas de $\mathbb{Z}$ sobre G y G' respectivamente. Observe que P'_i es un G-módulo con la acción $g \otimes m' := \alpha(g)m'$. Por el Teorema de Comparación A.11 tenemos que la identidad $\text{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ se extiende a un morfismo de complejos de cadenas $\tau_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$ el cual es compatible con α, i.e. $\tau_n(gm) = \alpha(g)\tau_n(m)$. Luego tenemos el morfismo

$$\tau_\bullet \otimes f : P_\bullet \otimes_G M \to P'_\bullet \otimes_{G'} M'.$$

Para todo $n \geq 0$ este morfismo induce el homomorfismo $(\alpha, f)_* : H_n(G, M) \to H_n(G', M')$ el cual esa dado por $\overline{z_n} \mapsto \overline{(\tau_n \otimes f)(z_n)}$.

Ejemplo B.13. Sea H un subgrupo de G y considere el morfismo de pares $(\text{inc}, \text{id}_M) : (H, M) \to (G, M)$. El mapa $\text{cor}_H^G : H_n(H, M) \to H_n(G, M)$ es llamado el *mapa de corestricción*.

Sea H un subgrupo de G y M un H-módulo. El G-módulo inducido es definido por

$$\mathsf{Ind}_H^G(M) := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M.$$

Con esta notación tenemos:

Lema B.14 (Lema de Shapiro)**.** *Sea H un subgrupo de un grupo G y M un H-módulo. Entonces el morfismo $(\mathit{inc}, \alpha) : (H, M) \to (G, \mathbb{Z}G \otimes_H M)$, donde $\alpha(m) = 1 \otimes m$ induce el isomorfismo*

$$H_n(H, M) \simeq H_n(G, \mathit{Ind}_H^G(M)).$$

Demostración. Sea $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Entonces

$$\begin{aligned} H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) &\simeq H_n(P_\bullet \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_H M)) \simeq H_n((P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}G) \otimes_H M) \\ &\simeq H_n(P_\bullet \otimes_H M) = H_n(H, M). \end{aligned}$$

□

Ejemplo B.15. Sea H un subgrupo de G y M un H-módulo. Entonces $\mathsf{Hom}_H(\mathbb{Z}G, M)$ es un G-módulo con la G-acción $(g \cdot f)(x) = f(xg)$. Sea $\varphi : M \to \mathsf{Hom}_H(\mathbb{Z}G, M)$ dado por $m \to \varphi_m$, donde

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} xm, & x \in H \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$$

Este mapa puede extenderse a un G-homomorfismo $\overline{\varphi} : \mathbb{Z}G \otimes_H M \to \mathsf{Hom}_H(\mathbb{Z}G, M)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & \mathsf{Hom}_H(\mathbb{Z}G, M) \\ \downarrow & \nearrow_{\overline{\varphi}} & \\ \mathbb{Z}G \otimes_H M & & \end{array}$$

es conmutativo, donde el morfismo $M \to \mathbb{Z}G \otimes_H M$ es definido por $m \mapsto 1 \otimes m$. Explícitamente definimos

$$\overline{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{s} g_i \otimes m_i\right) = \sum_{i=1}^{s} g_i \cdot \varphi_{m_i}.$$

Sea $(G : H) < \infty$ y considere E como el conjunto de representantes de clases izquierdas de G/H. Definimos

$$\overline{\psi} : \mathsf{Hom}_H(\mathbb{Z}G, M) \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_H M,$$

$$f \longmapsto \sum_{s \in E} s \otimes f(s^{-1}).$$

No es difícil mostrar que este es un inverso de $\overline{\varphi}$. Entonces tenemos

$$\mathbb{Z}G \otimes_H M \simeq \mathsf{Hom}_H(\mathbb{Z}G, M).$$

Para un G-módulo M considere la composición

$$M \xrightarrow{\varphi} \mathsf{Hom}_H(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\overline{\psi}} \mathbb{Z}G \otimes_H M$$

entonces aplicando el funtor homología $H_n(G, \cdot)$, tenemos

$$H_n(G, M) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(G, \mathsf{Hom}_H(\mathbb{Z}G, M)) \xrightarrow{\overline{\psi}_*} H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_H M) \simeq H_n(H, M).$$

Note que $\overline{\psi}_*$ es un isomorfismo y el último isomorfismo es dado por el lema de Shapiro. Esta composición es llamada el *homomorfismo de restricción* o el *homomorfismo de transferencia* y es denotado por res^G_H o tr^G_H.

Otro ejemplo clásico muy útil es el morfismo que obtenido del isomorfismo de conjugación.

Ejemplo B.16. Sea G un grupo, H un subgrupo normal de G y M un G-módulo. Fijamos $g \in G$ y consideramos el morfismo de pares $(\alpha_g, f_g) : (H, M) \to (H, M)$ (note que se satisface la ecuación de compatibilidad B.1), donde

$$\alpha_g : H \to H, \qquad h \mapsto ghg^{-1}$$

y

$$f_g : M \to M, \qquad m \mapsto gm.$$

Tomamos una resolución proyectiva $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Note que esta es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$. Considere el morfismo de cadenas $\tau : P_\bullet \to P_\bullet$ definido por $x \mapsto gx$. Note que $\tau(hx) = ghx = ghg^{-1}gx = \alpha(h)\tau(x)$. Observe que este es único salvo homotopía. Tensorizando $\tau_\bullet$ por M tenemos $\tau_\bullet \otimes f_g$ el cual induce para cualquier $n \geq 0$

$$(\alpha_g, f_g)_* : H_n(H, M) \to H_n(H, M)$$

Note que este es dado por $x \otimes m \mapsto gx \otimes gm$. Con esto tenemos:

1. Si $g \in H$, entonces la acción a nivel de cadenas está dado por $x \otimes m \mapsto gx \otimes gm = x \otimes m$. Luego $(\alpha, f)_* = \mathrm{id}_{H_*(H,M)}$.

2. Si $g \in G$, para cualquier $n \geq 0$ tenemos que el mapa $(\alpha_g, f_g)_* : H_n(H, M) \to H_n(H, M)$ induce una acción de G sobre $H_n(H, M)$. Luego por el ítem anterior tenemos una acción de G/M sobre $H_*(H, M)$.

Los siguientes dos lemas serán útiles en cálculos futuros. El primer lema es una útil aplicación del lema de Shapiro mientras que el segundo lema es un resultado muy avanzado que involucra en su enunciado los homomorfismos cor_H^G y res_H^G, para la prueba de este último puede el lector puede revisar el artículo de K. Hutchinson [7, Prueba del lema 3, p. 183-184].

Lema B.17. *Sea G un grupo X un G-conjunto. Sea T un conjunto de representantes de las órbitas de X. Entonces*

$$\mathbb{Z}X \simeq \bigoplus_{x \in T} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathit{Stab}_G(x)} \mathbb{Z})$$

Donde $\mathit{Stab}_G(x)$ es el estabilizador de $x \in X$. Esto implica que:

$$H_n(G, \mathbb{Z}X) \simeq \bigoplus_{x \in T} H_n(\mathit{Stab}_G(x), \mathbb{Z}).$$

Demostración. Sea $x \in T$ y considere los G-homomorfismos

$$\phi_x : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathrm{Stab}_G(x)} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}X$$

definidos por

$$\sum_{i=1}^{N} g_i \otimes m_i \longmapsto \sum_{i=1}^{N} m_i(g_i x).$$

Tomando la suma directa de los φ_x's tenemos el homomorfismo

$$\Phi := \bigoplus_{x \in T} \phi_x : \bigoplus_{x \in T} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathrm{Stab}_G(x)} \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}X$$

definido por

$$\left(\sum_{i=0}^{N} g_{i,x} \otimes m_{i,x} \right)_{x \in T} \longmapsto \sum_{x \in T} \left(\sum_{i=0}^{N} m_{i,x}(g_{i,x} x) \right).$$

La inversa de Φ es el siguiente G-homomorfismo

$$\Psi : \mathbb{Z}X \longrightarrow \bigoplus_{x \in T} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathsf{Stab}_G(x)} \mathbb{Z}$$

definido por

$$\sum_{i=1}^{N} n_i y_i \longmapsto \sum_{i=1}^{N} (g_i \otimes n_i)_{x_i}$$

donde y_i pertenece a la órbita de x_i y $g_i x_i = y_i$. Más aún, $(g_i \otimes n_i)_{x_i}$ es el elemento de $\bigoplus_{x \in T} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathsf{Stab}_G(x)} \mathbb{Z}$ con $g_i \otimes n_i$ en el componente x_i y 0 en otros lugares. No es difícil ver que este mapa está bien definido y es la inversa de Φ. La segunda parte se consigue aplicando el lema de Shapiro y la conmutatividad con la suma directa. □

Lema B.18. *Sea G un grupo y X_1, X_2 dos G-conjuntos transitivos. Sea $x_i \in X_i$ $(i = 1, 2)$ y $H_i = \mathsf{Stab}_G(x_i)$. Sea $\varphi : \mathbb{Z}[X_1] \to \mathbb{Z}[X_2]$ un homomorfismo de G-módulos con*

$$\varphi(x_1) = \sum_{g \in G/H_2} n_g g x_2$$

donde $n_g \in \mathbb{Z}$. Entonces

1. *n_g depende solamente de la clase de $g \in E$, donde $E = H_1 \backslash G / H_2$ es el conjunto de clases dobles.*
2. *Si $n_g \neq 0$ entonces $[H_1 : H_1 \cap g H_2 g^{-1}] < \infty$.*
3. *El homomorfismo $H_n(H_1, \mathbb{Z}) \to H_2(H_2, \mathbb{Z})$ inducido por φ es dado por la fórmula*

$$\varphi_n(z) = \sum_{g \in E} n_g \mathsf{cor}^{H_2}_{g^{-1}H_1 g \cap H_2} \circ \mathsf{res}^{g^{-1}H_1 g}_{g^{-1}H_1 g \cap H_2} g^{-1} z$$

Capítulo III. Sucesiones Espectrales

A. Sucesiones espectrales

En este capítulo abordaremos la herramienta principal de nuestro estudio, las sucesiones espectrales. Este nos permite obtener relaciones profundas entre grupos de homología. Primero nos ocuparemos de las definiciones principales, luego abordaremos la sucesiones espectrales que son originadas por la filtración de un complejo de cadenas y finalmente como caso particular abordaremos las sucesiones espectrales en homología de grupos.

1. Definiciones principales

Definición A.1. Una *sucesión espectral* iniciando en $a \geq 0$ de grupos abelianos $\mathcal{A}$ consiste de los siguientes ingredientes:

1. Una familia $\{E^r_{p,q}\}$ de grupos abelianos $\mathcal{A}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \geq a$.

2. Una familia de morfismos $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ tales que para cualquier $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \geq a$, satisfacen:

$$d^r_{p+r,q-r+1} \circ d^r_{p,q} = 0$$

   estos son llamados *diferenciales*

3. Isomorfismos para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \geq a$:

$$E^{r+1}_{p,q} \simeq \frac{\ker(d^r_{p,q})}{\mathrm{im}(d^r_{p+r,q-r+1})}$$

Los índices superiores $r \geq a$ denotan la "página" de la sucesión espectral, i.e. si fijamos $r \geq a$ tenemos que la familia $\{E^r_{p,q}\}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ es la página r-ésima (o la

página E^r). Note que, si fijamos $p, q \in \mathbb{Z}$, y $r \geq a$, los elementos $E^r_{p-kr,q+k(r-1)}$ con los diferenciales $d^r_{p-kr,q+k(r-1)}$ indexados por $k \in \mathbb{Z}$ forman un complejo de cadenas, si disponemos los elementos $E^r_{p,q}$ en un plano PQ (con coordenadas (p, q)), el complejo de cadenas $\{E^r_{p-kr,q+k(r-1)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ se ubica en una recta de pendiente $-(r-1)/r$ si $r \neq 0$, y en una recta vertical si $r = 0$. Con esta ultima observación podemos entender que los elementos en la página $(r+1)$-ésima son homologías de los complejos en la página r-ésima.

Definición A.2. Un morfismo $f : E \to E'$ de sucesiones espectrales es una familia de mapas $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$ en $\mathcal{A}$ con $d^r_{p,q} f^r_{p,q} = f^r_{p-r,q+r-1} d^r_{p,q}$, tales que cada $f^{r+1}_{p,q} : E^{r+1}_{p,q} \to E'^{r+1}_{p,q}$ es el mapa inducido por $f^r_{p,q}$ en homología.

Note que la familia $f^r_{p-kr,q+k(r-1)}$ con p, q y r fijos, forman un morfism de complejos de cadenas $E^r_{p-kr,q+k(r-1)} \to E'^r_{p-kr,q+k(r-1)}$. Las sucesiones espectrales con estos morfismos forman una categoría.

El *grado total* de un grupo abeliano $E^r_{p,q}$ es el número $n = p + q$, si fijamos n tenemos que los grupos $E^r_{p,q}$ con grado total n están ubicados en una recta de pendiente -1 sobre el plano PQ. Trabajaremos con sucesiones espectrales con un número finito de elementos no nulos sobre las rectas de pendiente -1.

Definición A.3. Decimos que una sucesión espectral es *acotada* si para cada n tenemos solamente una cantidad finita de elementos de grado total n.

Note que los diferenciales $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ disminuyen en 1 el grado total de un elemento, esto implica que si una sucesión espectral es acotada, entonces los elementos $E^r_{p,q}$ (con p, q fijos) serán eventualmente constantes a medida de que r crece, i.e. pasando las páginas eventualmente tendremos $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$, porque los diferenciales entrantes y salientes serán cero para r suficientemente grande. Denotamos por $E^\infty_{p,q}$ a este valor estable de $E^r_{p,q}$.

Ejemplo A.4. Las sucesiones espectrales E tales que $E^r_{p,q} = 0$ para $p < 0$ y $q < 0$ son llamados sucesiones espectrales de *primer cuadrante*, en estas sucesiones espectrales tenemos que si $r >$ máx$\{p, q + 1\}$ entonces $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$.

Definición A.5. Decimos que na sucesión espectral acotada comenzando en $a \geq 0$ *converge* a una familia $\{H_n\}$, si para cualquier n tenemos una filtración finita

$$0 = F_s H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1} H_n \subseteq F_p H_n \subseteq F_{p+1} H_n \subseteq \cdots \subseteq F_t H_n = H_n$$

con $s < t$, y dicha filtración satisface para cualquier $p, q \in \mathbb{Z}$ el isomorfismo

$$E^{\infty}_{p,q} \simeq \frac{F_p H_{p+q}}{F_{p-1} H_{p+q}}.$$

Denotamos esta convergencia como

$$E^{a}_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$$

Definición A.6. Sean las sucesiones espectrales $E^{a}_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ y $E'^{a}_{p,q} \Rightarrow H'_{p+q}$, decimos que una familia de mapas $h_n : H_n \to H'_n$ es *compatible* con un morfismo $f : E \to E'$ de sucesiones espectrales si h mapea $F_p H_n$ a $F_p H'_n$ y los homomorfismo asociados (inducidos por h_n) $F_p H_n / F_{p-1} H_n \to F_p H'_n / F_{p-1} H'_n$ se corresponden con los isomorfismos a $f^{\infty}_{p,q} : E^{\infty}_{p,q} \to E'^{\infty}_{p,q}$, i.e. el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_p H_n / F_{p-1} H_n & \xrightarrow{\overline{h_n}} & F_p H'_n / F_{p-1} H'_n \\ \| & & \| \\ E^{\infty}_{p,q} & \xrightarrow{f^{\infty}_{p,q}} & E'^{\infty}_{p,q} \end{array}$$

es conmutativo.

2. Sucesión espectral de una filtración

Las sucesiones espectrales nos permitirán aproximar la homología de un complejo de cadenas $C_\bullet$ mediante filtraciones.

Definición A.7. Una filtración F de un complejo de cadenas $C_\bullet$ es una familia ordenada de subcomplejos de $C_\bullet$

$$\cdots \subseteq F_{p-1} C_\bullet \subseteq F_p C_\bullet \subseteq F_{p+1} C_\bullet \subseteq \cdots$$

Una filtración F de $C_\bullet$ es llamada *acotada* si para cada n existen enteros $s < t$ tales que $F_s C_n = 0$ y $F_t C_n = C_n$.

El siguiente teorema, cuya prueba puede encontrar en un contexto más general en C. Weibel [4, Teorema 5.5.1], nos aproxima a la homología de un complejo a partir de la homología de sus filtraciones.

Teorema A.8 (Teorema de Convergencia Clásico)**.** *Sea $C_\bullet$ un complejo de cadenas y F una filtración de $C_\bullet$, si F es acotado entonces existe una sucesión espectral*

$$E^1_{p,q} = H_{p,q}\left(\frac{F_pC_\bullet}{F_{p-1}C_\bullet}\right) \Rightarrow H_{p+q}(C_\bullet)$$

Más aún, si $f : C_\bullet \to C'_\bullet$ es un mapa de complejos filtrados, entonces la familia de mapas $\{h_n = f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)\}_{n\geq 0}$ es compatible con el morfismo correspondiente de sucesiones espectrales inducido por f.

Ahora, las sucesiones espectrales que estudiaremos vienen de complejos dobles, aplicaremos la teoría anterior para construir estas sucesiones espectrales.

Definición A.9. Un complejo doble de grupos abelianos es una familia $C_{\bullet,\bullet} = \{C_{p,q}\}$ de grupos abelianos junto con homomorfismos $d^h : C_{p,q} \to C_{p-1,q}$ y $d^v : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$ tales que

$$d^h \circ d^h = d^v \circ d^v = d^v d^h + d^h d^v = 0$$

El *complejo total* de $C_{\bullet,\bullet}$ es el complejo de cadenas $\mathrm{Tot}(C)_\bullet$ definido por

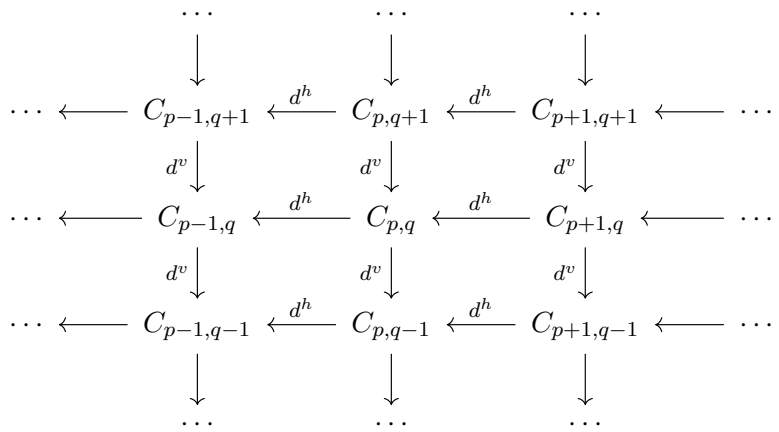
$$\mathrm{Tot}(C)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$$

con homomorfismos diferenciales $d : \mathrm{Tot}(C)_n \to \mathrm{Tot}_{n-1}(C)$ que hacen $(c_{p,q})_{p+q=n} \mapsto (c'_{p',q'})_{p'+q'=n-1}$ donde

$$c'_{p',q'} = d^h(c_{p'+1,q'}) + d^v(c_{p',q'+1})$$

Podemos representar un complejo doble $C_{\bullet,\bullet}$ como un diagrama anti-conmutativo, i.e.

tenemos una grilla



donde $d^v \circ d^h + d^h \circ d^v = 0$. Ahora, tenemos dos filtraciones del complejo total $\mathsf{Tot}(C)_\bullet$

$$ {}^{I}F_p\mathsf{Tot}(C)_n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i\leq p}} C_{i,j} $$

$$ {}^{II}F_p\mathsf{Tot}(C)_n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ j\leq p}} C_{i,j}. $$

Considere que $C_{p,q} = 0$ para $p < 0$ y $q < 0$, en este caso decimos que $C_{\bullet,\bullet}$ es un complejo doble de *primer cuadrante*, y las filtraciones arriba son acotadas. Usando el teorema A.8, tenemos dos sucesiones espectrales de primer cuadrante

$$ {}^{I}E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{{}^{I}F_p\mathsf{Tot}(C)_\bullet}{{}^{I}F_{p-1}\mathsf{Tot}(C)_\bullet}\right) \Rightarrow H_{p+q}(\mathsf{Tot}(C)_\bullet) $$

y

$$ {}^{II}E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{{}^{II}F_p\mathsf{Tot}(C)_\bullet}{{}^{II}F_{p-1}\mathsf{Tot}(C)_\bullet}\right) \Rightarrow H_{p+q}(\mathsf{Tot}(C)_\bullet) $$

pero el cociente en la primera sucesión espectral es el complejo

$$ \frac{{}^{I}F_p\mathsf{Tot}(C)_\bullet}{{}^{I}F_{p-1}\mathsf{Tot}(C)_\bullet} = C_{p,\bullet} $$

con diferencial d^v. Entonces la $(p+q)$-ésima homología de este complejo es de hecho el

grupo de homología $H_q(C_{p,\bullet})$, y entonces tenemos

$$ {}^{I}E^1_{p,q} = H_q(C_{p,\bullet}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathsf{Tot}(C)_\bullet) \tag{A.1} $$

con el diferencial $d^1_{p,q} = d^h_* : H_q(C_{p,\bullet}) \to H_q(C_{p-1,\bullet})$. Similarmente tenemos

$$ \frac{{}^{II}F_p\mathsf{Tot}(C)_\bullet}{{}^{II}F_{p-1}\mathsf{Tot}(C)_\bullet} = C_{\bullet,p} $$

con diferencial d^h, y la sucesión espectral

$$ {}^{II}E^1_{p,q} = H_q(C_{\bullet,p}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathsf{Tot}(C)_\bullet) \tag{A.2} $$

con el diferencial $d^1_{p,q} = d^v_* : H_q(C_{\bullet,p}) \to H_q(C_{\bullet,p-1})$.

Observación A.10. Los diferenciales $d^r_{p,q}$ pueden ser muy difíciles de calcular, afortunadamente existe un algoritmo muy útil en este caso particular. Por ejemplo, supongamos que necesitamos calcular el diferencial $d^3_{p,q}(\overline{x})$ con $\overline{x} \in E^3_{p,q} \simeq \ker(d^2_{p,q})/\mathsf{im}(d^2_{p+2,q-1})$, entonces tomamos un elemento x que represente $\overline{x}$ y pasamos a través del diagrama

$$ \begin{array}{ccccc} C_{p-3,q+2} & \xleftarrow{d^h_{p-2,q+2}} & C_{p-2,q+2} & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle d^v_{p-2,q+2}} & & \\ & & C_{p-2,q+1} & \xleftarrow{d^h_{p-1,q+1}} & C_{p-1,q+1} \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle d^v_{p-1,q+1}} \\ & & & & C_{p+1,q} \xleftarrow{d^h_{p,q}} C_{p,q} \end{array} $$

luego podemos tomar $x \in C_{p,q}$ (pues en general $E^{r+1}_{p,q}$ es un subcociente de $E^r_{p,q}$ para todo r), entonces aplicamos d^h y tenemos que $d^h_{p,q}(x) = d^v_{p-1,q+1}(y)$ donde $y \in C_{p-1,q+1}$, entonces aplicamos d^h y tenemos que $d^h_{p-1,q+1}(y) = d^v_{p-2,q+2}(z)$ donde $z \in C_{p-2,q+2}$ y finalmente $d^h_{p-2,q+2}(z) \in C_{p-3,q+2}$ representa la imagen $d^3_{p,q}(\overline{x})$.

Note que las imágenes de los diferenciales d^h de x y y son imágenes de los homomorfismos d^v pues $\overline{x} \in E^3_{p,q}$. Para una justificación de este algoritmo el lector puede consultar S. Mac Lane[8, Theorem 6.1].

B. Las sucesiones espectrales en homología de grupos

En esta sección aplicaremos la teoría anterior para obtener algunas sucesiones espectrales en homología de grupos.

Sea G un grupo y $C_\bullet$ un complejo de G-modules, tomemos una resolución proyectiva $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre G, considere el complejo doble $D_{p,q} = P_p \otimes_G C_q$, entonces para $n \geq 0$ definimos el n-ésimo grupo de homología con coeficientes en $C_\bullet$

$$H_n(G, C_\bullet) := H_n(\mathsf{Tot}(D)_\bullet).$$

Por ejemplo, si M es un G-module y $M_\bullet$ el complejo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

donde $M_0 = M$, entonces $H_n(G, M_\bullet) = H_n(G, M)$.

Ahora, si M es un G-módulo y $C_\bullet$ un complejo con $C_n = 0$ para $n < 0$, considere el complejo ampliado

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

que será denotado por $C_\bullet \to M$. Tenemos una sucesión espectral que aproxima la homología de M, más concretamente.

Teorema B.1. *Con las notaciones en el párrafo anterior, existe una sucesión espectral de primer cuadrante*

$$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p) \Rightarrow H_{p+q}(G, C_\bullet).$$

Más aún, si el complejo ampliado $C_\bullet \to M$ es exacto, entonces tenemos $H_n(G, C_\bullet) \simeq H_n(G, M)$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Tomemos una resolución proyectiva $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre G y, como arriba, considere el complejo doble $D_{\bullet,\bullet}$ con $D_{p,q} = P_p \otimes_G C_q$, tenemos dos sucesiones espectrales de primer cuadrante (ecuaciones A.1 y A.2) asociados a $D_{\bullet,\bullet}$

$${}^I E^1_{p,q} = H_q(D_{p,\bullet}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathsf{Tot}(D)_\bullet),$$

$$^{II}E^1_{p,q} = H_q(C_{\bullet,p}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathsf{Tot}(C)_\bullet).$$

Pero, tenemos que $^{II}E^1_{p,q} = H_q(D_{\bullet,p}) = H_q(P_\bullet \otimes_G C_p) = H_q(G, C_p)$, esto nos da la sucesión espectral

$$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p) \Rightarrow H_{p+q}(G, C_\bullet).$$

Ahora, si $C_\bullet \to M$ es exacto, para cualquier p el complejo $P_p \otimes_G C_\bullet \to P_p \otimes_G M$ es exacto (P_p es proyectivo), y entonces

$$^{I}E^1_{p,q} = \begin{cases} P_p \otimes_G M, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

pasando a la página E^2 tenemos

$$^{I}E^2_{p,q} = \begin{cases} H_p(P_\bullet \otimes_G M) = H_p(G, M), & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

y un sencillo análisis de la convergencia de $^{II}E^1_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(C_\bullet)$, nos da que $H_n(G, C_\bullet) \simeq H_n(G, M)$ para cada n. □

Capítulo IV. El Teorema de Cohn

En el presente capítulo presentaremos el resultado de Paul M. Cohn. En la primera sección enunciaremos la forma original del teorema, mientras que en la siguiente daremos una prueba el caso conmutativo.

A. El teorema de Cohn: Enunciado general

En esta sección revisaremos las principales definiciones y hechos del artículo de P.M. Cohn que aborda el estudio del grupo $\mathrm{GL}_2(A)$ para un anillo unitario (no necesariamente conmutativo). Es bien sabido que en un dominio euclídeo A el grupo $\mathrm{GL}_2(A)$ está generado por las matrices elementales

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde α, β, a son elementos de A con α y β unidades. En general, el grupo generado por estas matrices es llamado $\mathrm{GE}_2(A)$, los anillos que satisfacen $\mathrm{GL}_2(A) = \mathrm{GE}_2(A)$ son llamados *anillos GE_2*. Ahora considere las matrices

$$[\alpha, \beta] := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad D(\alpha) := [\alpha, \alpha^{-1}] \qquad E(a) := \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Sea $\mathrm{E}_2(A)$ grupo generado por las matrices $E(a)$ y $D_2(A)$ el grupo de las matrices diagonales. No es difícil demostrar que $\mathrm{GE}_2(A)$ es generado por $D_2(A)$ y $\mathrm{E}_2(A)$ mediante la identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E(-a)E(0)^{-1}$$

y teniendo en cuenta que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E(0)$.

Teorema A.1. *Sea A un anillo unitario y sea $GE_2(A)$ en grupo generado por las matrices*

$$[\alpha, \beta] := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in A^\times) \qquad y \qquad E(a) := \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (a \in A),$$

y sea $D(\alpha) := [\alpha, \alpha^{-1}]$. Estos generadores satisfacen las relaciones:

1. $E(x)E(0)E(y) = -E(x+y)$,
2. $E(\alpha)E(\alpha^{-1})E(\alpha) = -D(\alpha)$,
3. $E(x)[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]E(\beta^{-1}x\alpha)$.

Estas relaciones, junto con las del grupo $D_2(A)$ generados por $[\alpha, \beta]$ ($[\alpha, \beta][\alpha', \beta'] = [\alpha\alpha', \beta\beta']$) implican

4. $E(0)^2 = -I$, $E(1)^3 = -I$, $E(-1)^3 = I$,
5. $E(x)^{-1} = E(0)E(-x)E(0)$,
6. $E(x)E(y)^{-1} = E(x-y)E(0)^{-1} = -E(x-y)E(0)$,
7. $E(x)E(y)^{-1}E(z) = E(x-y+z)$,
8. $E(x)E(\alpha^{-1})E(y) = E(x-\alpha)D(\alpha^{-1})E(y-\alpha)$,
9. $E(x)E(\alpha+1)E(\beta+1)E(y) = -E(x-\alpha^{-1})D(\alpha)E(-1-\alpha^{-1}-\beta^{-1})D(\beta)E(y-\beta^{-1})$.

Más aún, estos implican que el grupo $E_2(A)$ generado por todos los $E(a)$ es normal en $GE_2(A)$ y que todo elemento $A \in GE_2(A)$ puede ser expresado en la siguiente forma estándar

$$A = [\alpha, \beta]E(a_1)E(a_2)\cdots E(a_r), \tag{A.1}$$

donde $\alpha, \beta \in A^\times$, y $a_i \in A$ son tales que para $1 < i < r$, a_i no es cero ni unidad. Si $r = 2$, a_1 y a_2 no pueden ser cero ambos a la vez.

Demostración. Ver P. M. Cohn [1, Teorema 1]. □

En algunos anillos la forma estándar (ecuación A.1) es posible reducirla aplicando la ecuación (9) del teorema, pero para muchos anillos esto es imposible y así la ecuación A.1 realmente representa una forma normal para los elementos de $\mathrm{GE}_2(A)$, estos anillos se dice que tienen una *forma estándar única para* GE_2. También existen anillos tales que la única relación en $\mathrm{GE}_2(A)$ de la forma $W = I$, donde W es una palabra en forma estándar, es la relación trivial $I = I$, dichos anillos son llamados *cuasi-libres para* GE_2. Y por último, si las relaciones (1)-(3) incluyendo a las de $D_2(A)$ forman un conjunto completo de relaciones que definen $\mathrm{GE}_2(A)$, el anillo es llamado *universal para* GE_2.

Vamos a definir más precisamente éste último concepto

Definición A.2. Considere $\mathcal{GE}_2$ el grupo libre generado por los símbolos $\{\alpha, \beta\}$ con $\alpha, \beta \in A^\times$ y $\mathcal{E}(x)$ con $x \in A$ con las siguientes relaciones:

1. $\mathcal{E}(x)\mathcal{E}(0)\mathcal{E}(y) = \mathcal{D}(-1)\mathcal{E}(x+y)$ para $x, y \in A$.
2. $\mathcal{E}(\alpha)\mathcal{E}(\alpha^{-1})\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{D}(-\alpha)$ para $\alpha \in A^\times$.
3. $\mathcal{E}(x)\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}\mathcal{E}(\beta^{-1}x\alpha)$ para $x \in A$ y $\alpha, \beta \in A^\times$.
4. $\{\alpha, \beta\}\{\alpha', \beta'\} = \{\alpha\alpha', \beta\beta'\}$ para $\alpha, \beta \in A^\times$.

Donde $\mathcal{D}(\alpha) := \{\alpha, \alpha^{-1}\}$ para $\alpha \in A^\times$. Es claro que tenemos un mapa sobreyectivo $R : \mathcal{GE}_2 \to \mathrm{GE}_2$ que definido por $\{\alpha, \beta\} \mapsto [\alpha, \beta]$ y $\mathcal{E}(x) \mapsto E(x)$. Tenemos que si el mapa R es un isomorfismo tenemos que las relaciones (1)-(4) anteriores forman un conjunto de relaciones universales para GE_2, y decimos que A es *universal para* GE_2.

Como de las relaciones de la definición anterior podemos deducir los análogos de las fórmulas (4)-(9) del teorema anterior en $\mathcal{GE}_2$, también podemos generar formas estándar en éste grupo. Así, queda mucho más claro que estas 3 definiciones están relacionadas mediante las implicaciones

$$\text{Forma estándar única } \Rightarrow \text{ cuasi-libre} \Rightarrow \text{universal} \qquad (\text{ para } \mathrm{GE}_2)$$

Una primera consecuencia de este teorema es que podemos redefinir el concepto de anillo GE_2 en el caso conmutativo, en este caso, solo requerimos que E_2 sea igual a SL_2.

Corolario A.3. *Sea A un anillo conmutativo y unitario. Entonces A es un anillo GE_2 si y solamente si $E_2(A) = SL_2(A)$*

Demostración. Si $\mathrm{SL}_2(A) = \mathrm{E}_2(A)$ sea $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$. Podemos escribir

$$g = [D, 1] \begin{pmatrix} D^{-1}a & D^{-1}b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde el factor de la derecha pertenece a $\mathrm{SL}_2(A) = \mathrm{E}_2(A)$ y $D \in A^\times$ es el determinante de g, así g es generado por $D_2(A)$ y $\mathrm{E}_2(A)$ y luego pertenece a $\mathrm{GE}_2(A)$.

Recíprocamente, suponga que A es un anillo GE_2, sea $g \in \mathrm{SL}_2(A)$, luego por la premisa y el teorema anterior podemos expresar g en su forma estándar

$$g = [\alpha, \beta] E(a_1) \cdots E(a_r).$$

Tomando determinante tenemos que $\beta = \alpha^{-1}$ y luego por la relación (2) del teorema tenemos que $g \in \mathrm{E}_2(A)$. □

Un anillo GE_2 que también es universal para GE_2 es llamado *anillo* GE_2 *universal*.

Ahora enunciamos el teorema de Cohn tal como aparece en [1, Teorema 9.3].

Teorema A.4. *Sea A un anillo cuasi-libre para GE_2 y tal que $A^\times$ es abeliano, sea M el subgrupo aditivo de A generado por 12, todos los $\alpha x \alpha - x$ ($x \in A, \alpha \in A^\times$) y todos los $3(\alpha + 1)(\beta + 1)$ ($\alpha, \beta \in A^\times$); entonces*

$$\mathrm{E}_2(A)^{ab} \simeq A/M$$

mediante el homomorfismo definido por

$$E(x) \mapsto x - 3 \mod M.$$

Luego, en un siguiente artículo, Cohn debilita la condición impuesta al anillo y demuestra el mismo teorema para anillos universales para GE_2 [9, Teorema 2]. Note ahora que en el subgrupo M ya no figura el 12 como generador pues, como afirma Cohn, tenemos $3(\alpha + 1)(\beta + 1) = 12$ cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

Teorema A.5. *Sea A un anillo universal para GE_2 y tal que $A^\times$ es abeliano, sea M el*

subgrupo aditivo de A generado por todos los $\alpha x\alpha - x$ ($x \in A, \alpha \in A^\times$) y todos los $3(\alpha + 1)(\beta + 1)$ ($\alpha, \beta \in A^\times$); entonces

$$E_2(A)^{ab} \simeq A/M$$

mediante el homomorfismo definido por

$$E(x) \mapsto x - 3 \quad \text{mód } M.$$

Finalmente presentamos el objetivo final de esta tesis, la prueba de la versión conmutativa del teorema de Cohn con nuestros métodos. La prueba original se deriva fácilmente del teorema anterior y el corolario A.3.

Corolario A.6. *Sea A es un anillo GE_2 universal y conmutativo, entonces si M es el grupo generado por los elementos $\alpha^2 x - x$ ($\alpha \in A^\times$, $x \in A$) y $3(\alpha + 1)(\beta + 1)$ ($\alpha, \beta \in A^\times$).*

$$SL_2(A)^{ab} \simeq A/M$$

mediante el homomorfismo definido por

$$E(x) \mapsto x - 3 \quad \text{mód } M.$$

Ahora daremos algunos ejemplos de los conceptos estudiados arriba, algunos aparecen en estudios posteriores del artículo de Cohn.

Ejemplo A.7. Vamos a denotar por $U_0(A) = A^\times \cup \{0\}$.

1. Para cualquier anillo A la forma normal trivial (con sus condiciones) es posible solo cuando $r \geq 4$.

$$[\alpha, \beta]E(a_1) \cdots E(a_r) = I \qquad (\alpha, \beta \in A^\times), \qquad a_i \notin U_0(A) \qquad 1 < i < r,$$

para cualquier anillo A requiere observar los valores bajos de r. Claramente cuando $r = 0$ tenemos $\alpha = \beta = 1$. El caso $r = 1$ es imposible pues tendríamos

$$[\alpha, \beta] = E(a_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

y esto nos da que $\alpha = 0$ que es absurdo. Cuando $r = 2$ tenemos

$$[\alpha, \beta]E(a_1) = E(a_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Lo que nos da $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$ ($\beta \in A^\times$) y también $\alpha = \beta = -1$. Para $r = 3$ tenemos

$$[\alpha, \beta]E(a_1) = (E(a_2)E(a_3))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -a_2 \\ a_3 & a_2a_3 - 1 \end{pmatrix}$$

que nos da $a_2a_3 = 1$ y así $a_2 \in A^\times$ que contradice la condición de la forma normal.

2. Un anillo local que no es un cuerpo no puede ser cuasi-libre. Por lo anterior, debemos verificar la forma normal a partir de $r = 4$, veamos que aquí es justamente donde encontramos soluciones a la ecuación $W = I$. Por facilidad, la ecuación será escrita así

$$[\alpha, \beta] = E(a_1)E(a_2)E(a_3)E(a_4)$$

de ahí tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3a_4 - a_1a_2 - a_3a_4 - a_1a_4 + 1 &= \alpha \\ a_1a_2a_3 - a_1 - a_2 &= 0 \\ a_2a_3a_4 - a_2 - a_4 &= 0 \\ a_2a_3 - 1 &= -\beta \end{aligned}$$

Si elegimos entonces elementos no nulos $a_2, a_3 \in \mathfrak{m}$ donde $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de A tenemos que $a_2, a_3 \notin U_0(A)$ y $\beta = 1 - a_2a_3 \in A^\times$. Ahora, las dos ecuaciones centrales del sistema anterior nos da $a_1\beta + a_3 = 0$ y $\beta a_4 + a_2 = 0$ que determinan únicamente a_1 y a_4. Es mas, es claro que a_1 y a_4 definidos así son elementos no nulos de $\mathfrak{m}$. Luego, la primera ecuación del sistema nos da $\alpha = 1+z$ con $z \in \mathfrak{m}$, y así $\alpha \in A^\times$.

Con todo esto, podemos concluir que de hecho A no es cuasi-libre. Sin embargo, Conh demostró que: *Todo anillo local es un anillo GE_2 universal [1, Teorema 4.1]*.

3. Anillos discretamente normados: Una norma en un anillo A es un mapa $|\cdot| : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface o siguiente:

a) $|x| = 0$ si y solamente si $x = 0$.

b) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in A$.

c) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in A$.

Note que las condiciones implican que A no puede tener divisores de cero, es decir si $xy = 0$ entonces por (c) $0 = |0| = |xy| = |x||y|$ de lo cual tenemos por (a) que $x = 0$ o $y = 0$. decimos ahora que la norma es discreta si además de lo anterior se cumple

d) $|x| \geq 1$ para todo $x \neq 0$ donde la igualdad se da solo si $x \in A^{\times}$.

e) No existe ningún $x \in A$ tal que $1 < |x| < 2$.

Con estas definiciones tenemos que *todo anillo A discretamente normado es cuasi-libre para GE_2, y luego es universal para GE_2* [1, Teorema 5.2].

4. Sea $\mathcal{O}_d$ el anillo de enteros del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ con entero libre de cuadrados. El anillo $\mathcal{O}_d$ con $d < 0$ es sin duda un anillo normado precisamente usando la raíz cuadrada de la norma N heredada del cuerpo numérico. Para que sea discretamente normado necesitamos que la condición (d) en el ejemplo anterior sea satisfecha, para ello necesitamos que

$$1 < N(a) < 4$$

para ningún $a \in A$. La condición (e) es entonces satisfecha todos los d excepto

$$d = -1, -2, -3, -7, -11$$

como es sabido, estos son justamente los d donde el anillo de enteros es un dominio euclídeo con norma euclídea precisamente $|a| = \sqrt{N(a)}$ (y como sabemos, los dominios euclídeos son precisamente anillos GE_2). Entonces los casos restantes satisfacen (e) y son entonces anillos discretamente normados. Luego, por el ítem anterior, son cuasi-libres, y por tanto, universales para GE_2. Cohn nos da algo más en [1, Teorema 6.1]: *El anillo $\mathcal{O}_d$ ($d < 0$) no es anillo GE_2 a menos que $d = -1, -2, -3, -7, -11$*

5. Con respecto al ejemplo anterior Cohn demuestra en [9, Observaciones, p. 162-163] que los casos $d = -1, -3$ también son universales para GE_2 y los casos restantes $d = -2, -7, -11$ no lo son, mas solamente debemos añadir una relación para tener un conjunto de relaciones universales para GE_2.

6. En particular, para el caso de $\mathcal{O}_{-5}$ del ejemplo 4, tenemos que este es cuasi-libre para GE_2, luego es universal para GE_2. Un estudio posterior por Pere Menal nos da el resultado [10, Corolario 2.6] que dice *A tiene forma estándar única para GE_2 si y solo si A es universal para GE_2 y $S(A)$ es un anillo de división*, donde $S(A) = \langle A^\times \rangle$ es el subgrupo aditivo de A generado por las unidades de A. Como $\mathcal{O}_{-5}^\times = \{\pm 1\}$ entonces $S(\mathcal{O}_{-5}) = \mathbb{Z}$ que no es un anillo de división. Así concluimos que $\mathcal{O}_{-5}$ es cuasi-libre para GE_2 pero no tiene forma estándar única para GE_2.

7. El caso de $\mathcal{O}_d$ con $d > 0$ tenemos que $\mathcal{O}_d^\times$ es infinito, en este caso L. N. Vaserstein en [11, p. 321, Teorema] demostró que $E_2(\mathcal{O}_d) = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$, lo cual por el corolario A.3 tenemos que $\mathcal{O}_d$ es un anillo GE_2.

8. Sea A un anillo unitario tal que $k := A^\times \cup \{0\}$ es un cuerpo, una *función grado* es una función $f : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ que satisface:

   a) $d(a) = -\infty$ si y solo si $a = 0$,

   b) $d(a) = 0$ si y solo si $a \in A^\times$

   c) $d(a - b) \leq$ máx$\{d(a), d(b)\}$ para todo $a, b \in A$,

   d) $d(ab) = d(a) + d(b)$ para todo $a, b \in A$.

   Entonces A se convierte en un anillo discretamente normado si definimos $|a| := 2^{d(a)}$. Por ejemplo, los anillos de polinomios sobre un cuerpo en cualquier numero de indeterminadas, y las álgebras asociativas libres (anillos de polinomios en indeterminadas no conmutativas) son de esta forma.

9. Un K-anillo sobre un anillo unitario K es un anillo A con un homomorfismo canónico $\theta : K \to A$. El siguiente resultado de Cohn dice: *Si k es un cuerpo, todo k-anillo con una función grado tiene una única forma estándar para GE_2* [1, Teorema 7.1].

10. Un anillo discretamente ordenado es un anillo R que es totalmente ordenado, tal que

$$\text{para cualquier } a \in A \text{ si } a > 0, \text{ entonces } a \geq 1.$$

    Con esta definición tenemos [1, Teorema 8.2]: *Sea A un anillo discretamente ordenado. Entonces A es universal para GE_2*. Este es el caso del anillo $\mathbb{Z}$ de los números

enteros. Más aún, si A es discretamente ordenado, $A[x]$ es también discretamente ordenado tomando como elementos positivos a los polinomios con coeficiente director positivo. Luego $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ es discretamente ordenado y luego es universal para GE_2.

11. Un ejemplo de la teoría K, las matrices elementales $E_{12}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $E_{21}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ satisfacen las siguientes propiedades para $i, j \in \{1, 2\}$ con $i \neq j$:

    a) $E_{ij}(x)E_{ij}(y) = E_{ij}(x + y)$ para todo $x, y \in A$.

    b) $W_{ij}(u)E_{ji}(r)W_{ij}(u)^{-1} = E_{ij}(-uru)$ para $u \in A^\times$ y $r \in A$.

    donde $W_{ij}(u) = E_{ij}(u)E_{ji}(-u^{-1})E_{ij}(u)$. Entonces definimos el grupo de Steinberg $\mathrm{St}(2, A)$ de orden 2 como el grupo generado por los símbolos $x_{12}(r)$ y $x_{21}(s)$ con $r, s \in A$ sujeto a las relaciones

    a) $x_{ij}(x)x_{ij}(y) = x_{ij}(x + y)$ para todo $x, y \in A$.

    b) $w_{ij}(u)w_{ji}(r)w_{ij}(u)^{-1} = x_{ij}(-uru)$ para $u \in A^\times$ y $r \in A$.

    donde $w_{ij}(u) = x_{ij}(u)x_{ji}(-u^{-1})x_{ij}(u)$. Obviamente tenemos un mapa sobreyectivo $\mathrm{St}(2, A) \to E_2(A)$, $x_{ij}(a) \mapsto E_{ij}(a)$. El núcleo $K_2(2, A)$ de este mapa es llamado el segundo K_2-grupo inestable de orden 2. Considere ahora el elemento $h_{ij}(u) := w_{ij}(u)w_{ij}(-1)$ para $u \in A^\times$ (note que sus imágenes en $E_2(A)$ serían matrices diagonales), no es difícil mostrar que $h_{ij}(u)^{-1} = h_{ji}(u)$ [2, Corolario A.5]. Ahora, si $u, v \in A^\times$ conmutan, definimos el símbolo de Steinberg $\{u, v\}_{ij} = h_{ij}(uv)h_{ij}(u)^{-1}h_{ij}(v)^{-1}$ que cae en el centro de $\mathrm{St}(2, A)$ (el cálculo no es difícil, inténtalo!). También es sencillo probar que $\{u, v\}_{ji} = \{v, u\}_{ij}^{-1}$. Luego podemos retirar los subíndices y definir

$$\{v, u\} := \{v, u\}_{12} = h_{12}(uv)h_{12}(u)^{-1}h_{12}(u)^{-1}.$$

    Para un anillo conmutativo A sea $C(2, A)$ el subgrupo de $K_2(2, A)$ generado por los símbolos de Steinberg $\{u, v\}$. Keith Dennis afirma (y recientemente K. Hutchinson da una prueba de este hecho [2, Teorema A.14]) que: *Un anillo conmutativo A es universal para GE_2 si y solo si $C(2, A) = K_2(2, A)$.*

12. Con respecto al ejemplo anterior tenemos que $K_2(2, \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right])$ es generado por símbolos de Steinberg si y solo si $p = 2, 3$. Luego por el teorema de Dennis del ejemplo anterior tenemos que $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ es universal para GE_2 si y solo si $p = 2, 3$.

B. El teorema de Cohn: Caso conmutativo

Ahora abordaremos el caso conmutativo, note cómo se vinculan los conceptos creados por Cohn con los conceptos dados aquí, estos últimos vienen de las ideas del profesor Hutchinson. Para toda esta sección A será un anillo conmutativo y unitario.

1. El complejo de vectores unimodulares

Considere el vector columna $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in A^2$ es llamado *unimodular* si $u_1A + u_2A = A$. Equivalentemente $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ Es llamado unimodular si existe $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tal que la matriz $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ es invertible. Note que la matriz $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ es invertible si solo si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ es una base de A^2.

Para cualquier entero no negativo n, sea $X_n(A^2)$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto de todas las $(n+1)$-tuplas $(\langle \boldsymbol{v_0} \rangle, \cdots, \langle \boldsymbol{v_n} \rangle)$, donde cada $v_i \in A^2$ es unimodular y dos vectores distintos $\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j}$ son una base de A^2, y $\langle \boldsymbol{v} \rangle \subset A^2$ denota la recta generada por el vector $\boldsymbol{v}$, i.e. $\langle \boldsymbol{v} \rangle = A\boldsymbol{v}$.

Tenemos que $GL_2(A)$ (respectivamente SL_2(A)) actúa sobre $X_l(A^2)$ por la izquierda diagonalmente y entonces tenemos un $GL_2(A)$-módulo izquierdo (respectivamente un $SL_2(A)$-módulo izquierdo) de un modo natural. Si fuese necesario convertiremos esta acción por izquierda en una acción por derecha definiendo $m \cdot g := g^{-1}m$.

Ahora, vamos a definir el *l-ésimo operador diferencial* para $l \geq 1$

$$\partial_l : X_l(A^2) \to X_{l-1}(A^2)$$

como una suma alternada de *operadores de cara* que eliminan i-ésima componente de

los generadores (análogo a la homología singular en topología algebraica). Sea $\partial_0 = \epsilon : X_0(A^2) \to \mathbb{Z}$ el mapa de ampliación definido por $\sum_i n_i(\langle \boldsymbol{v_{0,i}} \rangle) \mapsto \sum_i n_i$. Es fácil verificar que el siguiente diagrama

$$X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}: \qquad \cdots \longrightarrow X_2(A^2) \xrightarrow{\partial_2} X_1(A^2) \xrightarrow{\partial_1} X_0(A^2) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \tag{B.1}$$

Es un complejo de cadenas. Decimos que el complejo anterior es exacto en dimensión $< k$ si el complejo

$$X_k(A^2) \xrightarrow{\partial_k} X_{k-1}(A^2) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} X_1(A^2) \xrightarrow{\partial_1} X_0(A^2) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

es exacto. El siguiente teorema conecta la naturaleza del anillo con el "nivel de exactitu" del complejo, es un resultado del profesor Kevin Hutchinson cuya prueba puede consultar en [2, Teorema 3.3 y Corolario 7.2].

Teorema B.1 (Hutchinson)**.** *Sea A un anillo conmutativo y unitario.*

1. *El complejo $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ es exacto en dimensión < 1 si y solo si A es un anillo GE_2.*
2. *Si A es un anillo GE_2 universal, entonces $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ es exacto en dimensión < 2.*

Observación B.2. De hecho, Hutchinson calcula H_0 y H_1 del complejo $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ para cualquier anillo conmutativo y unitario A. Para más detalles puede consultar [12, Teorema 5.3].

Presentamos un resultado mas debido a Hutchinson, cuya prueba puede consultar en [12, Teorema 5.2]. Dicha proposición nos da muchos ejemplos de anillos que satisfacen las condiciones del teorema B.1, antes necesitamos una definición.

Definición B.3. Un anillo conmutativo y unitario A es llamado local si tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m}$, el cuerpo residual de un anillo local es el anillo cociente $A/\mathfrak{m}$.

Proposición B.4. *Sea A un anillo local con cuerpo residual k (el cual incluye el caso donde $A = k$ es un cuerpo), entonces $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ es exacto en dimensión $< |k|$.*

2. El anillo de Grothendieck-Witt

Ahora estudiaremos un objeto interesante que aparecerá en nuestros cálculos, el anillo de *Grothendieck-Witt* de un anillo unitario A. Este estructura aplicada a cuerpos es usada

para la clasificación de formas cuadráticas. Para eso vamos considerar el grupo $\mathcal{G}_A := A^\times/A^{\times 2}$ de las clases cuadráticas de A, y luego su anillo de grupo $\mathbb{Z}\mathcal{G}_A$. Considere el mapa de ampliación $\bar{\epsilon} : \mathbb{Z}\mathcal{G}_A \to \mathbb{Z}$, el núcleo $\mathcal{I}_A$ es llamado *ideal de ampliación* y es generado por elementos $\langle\langle a\rangle\rangle := \langle a\rangle - 1$. Por otro lado considere el conjunto $\mathcal{W}_A := \{a \in A^\times : a(1-a) \in A^\times\}$.

Considere el complejo de vectores unimodulares $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ (ecuación B.1), denotamos por $Z_i(A^2) = \ker(\partial_i)$ al núcleo del diferencial ∂_i, y por $B_i(A^2) = \mathrm{im}(\partial_{i+1})$. El grupo $\mathrm{GW}(A) := H_0(\mathrm{SL}_2(A), Z_1(A^2)) \simeq Z_1(A^2)_{\mathrm{SL}_2(A)}$ es llamado *anillo de Grothendieck-Witt* del anillo A.

Ahora, la inclusión $Z_1(A^2) \hookrightarrow X_1(A^2)$ induce un homomorfismo

$$\mathrm{GW}(A) \to H_0(\mathrm{SL}_2(A), X_1(A^2)).$$

Mas $\mathrm{SL}_2(A)$ actúa transitivamente sobre los generadores de $X_1(A^2)$, i.e. tienen una única orbita $(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0})$ donde $\boldsymbol{\infty}$ es representado por el vector $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{0}$ es representado por $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Luego $X_1(A^2) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(A)}}^{\mathrm{SL}_2(A)}\mathbb{Z}$ y no es difícil verificar que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(A)}((\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0})) = T(A)$, donde

$$T(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in A^\times \right\}.$$

Tampoco es difícil ver que $T(A) \simeq A^\times$. Así tenemos, usando el lema de Shapiro, el isomorfismo $H_0(\mathrm{SL}_2(A), X_1(A^2)) \simeq H_0(T(A), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Luego en realidad la inclusión induce el llamado *mapa de ampliación* $\epsilon : \mathrm{GW}(A) \to \mathbb{Z}$, cuyo núcleo es el ideal $I(A)$ llamado *ideal fundamental* de $\mathrm{GW}(A)$.

Ahora explicaremos los términos “anillo” e “ideal” dados a los objetos $\mathrm{GW}(A)$ y $I(A)$ respectivamente, y lo primero que debemos notar es que $\mathcal{G}_A$ actúa por conjugación (ejemplo B.16) sobre la homología de $\mathrm{SL}_2(A)$ con coeficientes en $X_i(A^2)$ para cualquier i y en todos sus subgrupos, en particular actúa en $\mathrm{GW}(A)$ y por consiguiente sobre $I(A)$, para ello, identificamos las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$ con cada $a \in A^\times$, luego note que conjugar cualquier matriz en $\mathrm{GL}_2(A)$ con $x^2 \in A^\times$ es lo mismo que conjugar por una matriz $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(A)$

y como la conjugación por estos últimos nos da una acción trivial tenemos una acción de $\mathcal{G}_A = A^\times/A^{\times 2}$ (vea el ejemplo B.16).

Ahora considere el complejo

$$X_3(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \xrightarrow{\overline{\partial}_3} X_2(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \xrightarrow{\overline{\partial}_2} B_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \to 0.$$

Note que este viene inducido por una parte del complejo de vectores unimodulares (ecuación B.1). Si definimos $\overline{\mathsf{GW}}(A) = \mathsf{coker}(\overline{\partial}_3)$ tenemos el mapa $\overline{\mathsf{GW}}(A) \xrightarrow{\overline{\partial}_2} B_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)}$, componiendo este con el mapa inducido por la inclusión $B_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \xrightarrow{\overline{\mathsf{inc}}} Z_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)}$, tenemos el mapa natural

$$\overline{\mathsf{GW}}(A) \to \mathsf{GW}(A)$$

Lema B.5. *Sea A un anillo conmutativo y unitario, tenemos el isomorfismo de $\mathcal{G}_A$-módulos:*

$$\overline{GW}(A) \simeq \frac{\mathbb{Z}\mathcal{G}_A}{\langle\{\langle\langle x\rangle\rangle\langle\langle 1-x\rangle\rangle : x \in \mathcal{W}_A\}\rangle}$$

Demostración. Las órbitas de la acción de $\mathsf{SL}_2(A)$ sobre $X_2(A^2)$ son representadas por elementos de la forma $(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}, \boldsymbol{a})$, pero en $X_2(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)}$, el lema B.17 nos da el isomorfismo $\mathbb{Z}\mathcal{G}_A \simeq X_2(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)}$. Ahora, las órbitas de la acción de $\mathsf{SL}_2(A)$ sobre $X_3(A^2)$ son representadas por elementos de la forma $(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{ax}) \in X_3(A^2)$, donde $\langle a\rangle \in \mathcal{G}_A$ y $x \in \mathcal{W}_A$. El diferencial $\overline{\partial}_3$ mapea este elemento justamente en $-\langle a\rangle\langle\langle x\rangle\rangle\langle\langle 1-x\rangle\rangle$. □

Observación B.6. Si en el elemento $-\langle a\rangle\langle\langle x\rangle\rangle\langle\langle 1-x\rangle\rangle$ hacemos $a := a' + b'$ y $b := b'$ obtenemos $\langle a'\rangle + \langle b'\rangle - \langle a'+b'\rangle(1 + \langle a'b'\rangle)$. Luego si A es un cuerpo con característica diferente de 2 el grupo $\overline{\mathsf{GW}}(A)$ coincide con la presentación del anillo de Grothendieck-Witt clásico de las formas bilineales simétricas sobre A [13, Teorema 4.1].

Ahora, no es difícil mostrar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathsf{GW}}(A) & \longrightarrow & \mathsf{GW}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\epsilon}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} \\ \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} \end{array}$$

es conmutativo, con lo que tenemos el morfismo de $\mathcal{G}_A$-módulos $\overline{I}(A) \to I(A)$.

Note que podemos transportar la estructura de anillo de $\mathbb{Z}\mathcal{G}_A$ a $\overline{\mathsf{GW}}(A)$ y en ciertos casos a $\mathsf{GW}(A)$, de ahí el nombre de ‘’anillo”. El siguiente lema nos ayuda a medir que tan cerca

estamos de una buena representación de GW(A).

Lema B.7. *Considere el complejo $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ para un anillo A, si A es tal que el complejo anterior es exacto en dimensión < 2 entonces los mapas $\overline{GW}(A) \to GW(A)$ y $\overline{I}(A) \to I(A)$ son sobreyectivos. Más aún, si el complejo $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ es exacto en dimensión < 3 entonces estos mapas son isomorfismos.*

Demostración. Considere la secuencia exacta $0 \to B_1(A^2) \to Z_1(A^2) \to H_1(X_\bullet(A^2)) \to 0$, tomando co-invariantes tenemos

$$B_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \to Z_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \to H_1(X_\bullet(A^2))_{\mathsf{SL}_2(A)} \to 0$$

mas componiendo con el mapa $\overline{\mathsf{GW}}(A) \xrightarrow{\overline{\partial}_2} B_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)}$ tenemos la secuencia exacta

$$\overline{\mathsf{GW}}(A) \to \mathsf{GW}(A) \to H_1(X_\bullet(A^2))_{\mathsf{SL}_2(A)} \to 0$$

si consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \overline{\mathsf{GW}}(A) & \longrightarrow & \mathsf{GW}(A) & \longrightarrow & H_1(X_\bullet(A^2))_{\mathsf{SL}_2(A)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\epsilon}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

del “lema de la serpiente” A.2 tenemos la secuencia exacta

$$\overline{I}(A) \to I(A) \to H_1(X_\bullet(A^2))_{\mathsf{SL}_2(A)} \to 0$$

Luego tenemos que si el complejo $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ es exacto en dimensión < 2 tenemos que los mapas $\overline{\mathsf{GW}}(A) \to \mathsf{GW}(A)$ y $\overline{I}(A) \to I(A)$ son sobreyectivos. Ahora considere que el complejo $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ es exacto en dimensión < 3, considere entonces la secuencia exacta

$$X_3(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \xrightarrow{\overline{\partial}_3} X_2(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \xrightarrow{\overline{\partial}_2} Z_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} \longrightarrow 0,$$

que es inducida por la secuencia exacta (por hipótesis)

$$X_3(A^2) \xrightarrow{\partial_3} X_2(A^2) \xrightarrow{\partial_2} Z_1(A^2) \longrightarrow 0,$$

y así es fácil por el teorema de isomorfismo y la exactitud de la secuencia que

$$\overline{\mathsf{GW}}(A) = \mathsf{coker}(\overline{\partial}_2) \simeq Z_1(A^2)_{\mathsf{SL}_2(A)} = \mathsf{GW}(A).$$

□

3. La sucesión espectral principal y el teorema de Cohn

Considere la siguiente parte del complejo de vectores unimodulares (ecuación B.1)

$$0 \longrightarrow Z_1(A^2) \hookrightarrow X_1(A^2) \xrightarrow{\partial_1} X_0(A^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Luego si el complejo de vectores unimoduares(ecuación B.1) es exacto en dimensión < 1 entonces el complejo anterior es exacto. En este caso, el teorema B.1 nos da una sucesión espectral $E^1_{p,q}(A) \Rightarrow H_{p+q}(\mathsf{SL}_2(A), \mathbb{Z})$ donde

$$E^1_{p,q}(A) = \begin{cases} H_q(\mathsf{SL}_2(A), X_p(A^2)), & p = 0, 1 \\ H_q(\mathsf{SL}_2(A), Z_1(A^2)), & p = 2 \\ 0, & p > 2 \end{cases}$$

A partir de aquí vamos a asumir que A satisface la propiedad de que el complejo de vectores unimodulares (ecuación B.1) es exacto en dimensión < 1, esto se cumple por ejemplo en el caso de un anillo GE_2.

Como la acción de $\mathsf{SL}_2(A)$ es transitiva en $X_0(A^2)$, un representante de las órbitas al elemento (∞) cuyo estabilizador es el subgrupo $B(A)$ definido abajo, entonces tenemos por el lema B.17 que (el caso de $X_1(A)$ fue visto en la sección anterior)

$$X_0(A^2) \simeq \mathsf{Ind}_{B(A)}^{\mathsf{SL}_2(A)}\mathbb{Z}, \qquad X_1(A^2) \simeq \mathsf{Ind}_{T(A)}^{\mathsf{SL}_2(A)}\mathbb{Z}$$

donde

$$T(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in A^\times \right\},$$

y

$$B(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in A^{\times}, b \in A \right\},$$

luego usando el lema de Shapiro tenemos

$$E^1_{0,q} \simeq H_q(B(A), \mathbb{Z}), \qquad E^1_{1,q} \simeq H_q(T(A), \mathbb{Z}).$$

Lema B.8. *Los diferenciales $d^1_{1,q}$ están dados por la fórmula $d^1_{1,q} = H_q(\sigma) - H_q(\mathsf{inc})$ donde $\sigma : T(A) \to B(A)$ se define por conjugación $\sigma(X) = wXw^{-1}$ donde $w = E(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Demostración. Esto es dado por el lema B.18. En efecto, si $(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0})$ representa a la única órbita de $X_1(A^2)$ y $(\boldsymbol{\infty})$ representa la única órbita de $X_0(A^2)$ aplicando ∂_1 tenemos

$$(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}) \mapsto w(\boldsymbol{\infty}) - (\boldsymbol{\infty}).$$

Y como $w^{-1}T(A)w \cap B(A) = T(A)$, tenemos que la fórmula dada por el lema nos da

$$d^1_{1,q}(z) = \mathsf{cor}^{B(A)}_{T(A)} \circ \mathsf{res}^{T(A)}_{T(A)}(w^{-1}z) - \mathsf{cor}^{B(A)}_{T(A)} \circ \mathsf{res}^{T(A)}_{T(A)}(z) = H_q(\sigma)(z) - H_q(\mathsf{inc})(z)$$

□

Luego del lema anterior tenemos que la primera página de la sucesión espectral muestra lo siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
H_3(B(A), \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\sigma_* - \mathsf{inc}_*} & H_3(T(A)) & \xleftarrow{d^1_{2,3}} & H_3(SL_2(A), Z_1) & 0 & \cdots \\
H_2(B(A), \mathbb{Z}) & \xleftarrow{0} & \bigwedge^2 A^{\times} & \xleftarrow{d^1_{2,2}} & H_2(SL_2(A), Z_1) & 0 & \cdots \\
H_1(B(A), \mathbb{Z}) & \xleftarrow{(\cdot)^{-2}} & A^{\times} & \xleftarrow{d^1_{2,1}} & H_1(SL_2(A), Z_1) & 0 & \cdots \\
\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1_{2,0}} & \mathsf{GW}(A) & 0 & \cdots
\end{array}$$

Dada la matriz $a := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ tenemos que $H_1(\sigma)$ invierte esta matriz, luego $d^1_{1,2}$:

$\bigwedge^2 A^\times \to H_2(B(A),\mathbb{Z})$ es dado por $a\wedge b \mapsto c(a^{-1},b^{-1}) - c(a,b) = 0$ (puede ver el ejemplo B.11 para un repaso de las propiedades de $c(a,b)$). Por la misma razón el mapa $d^1_{1,1} : A^\times \to H_1(B(A),\mathbb{Z})$ es dado por $a \mapsto a^{-1}/a = a^{-2}$. Finalmente, como σ induce el mapa identidad en $H_0(T(A),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \to H_0(B(A),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, al igual que la inclusión, tenemos que $d^1_{1,0} = 0$.

Lema B.9. *El diferencial $d^1_{2,1}$ tiene como imagen $\mu_2(A) = \ker(d^1_{1,1})$, luego $E^2_{1,1} = 0$. El diferencial $d^1_{2,0}$ tiene como imagen $\mathbb{Z}$ y luego $E^2_{1,0} = 0$.*

Demostración. La imagen del mapa $d^1_{2,1}$ está contenida en $\mu_2(A) = \ker(d^1_{2,1})$ pues sabemos que las lineas horizontales son complejos. Por otro lado, considere $b \in \mu_2(A)$ y el elemento (en resolución bar) $[b]\otimes\partial_1((\boldsymbol{\infty},\mathbf{0},a)) \in \mathbf{B}_1(A)\otimes Z_1(A^2)$ que representa un elemento en $H_1(\mathrm{SL}_2(A), Z_1(A^2))$ pues es un ciclo (observe que $b := \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix} \in T(A)$ y luego pertenece al centro de $\mathrm{SL}_2(A)$). La imagen de este elemento por $d^1_{1,1}$ (que está inducido por la inclusión $Z_1(A^2) \hookrightarrow X_1(A^2)$) está representado por

$$[b]\otimes\{(\mathbf{0},\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{\infty},\mathbf{0})\} = [b]\otimes\{(g_a - h_a + 1)(\boldsymbol{\infty},\mathbf{0})\} = (g_a^{-1} - h_a^{-1} + 1)[b]\otimes(\boldsymbol{\infty},\mathbf{0})$$

donde $g_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a\end{pmatrix}$ y $h_a = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, pero este elemento a su vez es

$$d_2\otimes\mathrm{id}(\{[g_a^{-1}|b] - [b|g_a^{-1}] - [h_a^{-1}|b] + [b|h_a^{-1}]\}\otimes(\boldsymbol{\infty},\mathbf{0})) + [b]\otimes(\boldsymbol{\infty},\mathbf{0})$$

que nos da $[b]\otimes(\boldsymbol{\infty},\mathbf{0})$ en $H_1(\mathrm{SL}_2(A), X_1(A^2))$ que a su vez representa $b \in A^\times \simeq H_1(T(A),\mathbb{Z})$. Esto implica que en la siguiente página $E^2_{1,1} = 0$. De la misma forma el elemento $[]\otimes(\boldsymbol{\infty},\mathbf{0},a)$ tiene por imagen $1 \in \mathbb{Z}$ y luego $E^2_{1,0} = 0$. □

También tenemos $E^2_{0,0} = \mathbb{Z}$, $E^2_{0,1} \simeq \mathcal{G}_A \oplus H_0(A^\times, A)$ y $E^2_{0,2} = H_2(B(A),\mathbb{Z})$.

El siguiente lema nos dará una representación de $H_1(B(A),\mathbb{Z})$, esto nos ayudará con los cálculos futuros.

Lema B.10. *Para cualquier anillo A, tenemos el isomorfismo $H_1(B(A),\mathbb{Z}) \simeq A^\times \oplus H_0(A^\times, A) = A_{A^\times}$ donde la acción de $A^\times$ sobre A es dada por $a\cdot b = a^2 b$.*

Demostración. Considere la matriz $B(a,b) := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, donde $a \in$

$A^\times$ y $b \in A$. El conmutador está generado por elementos

$$[B(a,b), B(a',b')] = B(a,b)B(a',b')B(a,b)^{-1}B(a',b')^{-1} = B(1, a'b'(a^2-1) - ab(a'^2-1)).$$

Ahora considere el mapa $B(a,b) \mapsto (a, \overline{b/a})$, es claro que esto induce un mapa $H_1(B(A), \mathbb{Z}) \to A \oplus H_0(A^\times, A)$ pues $x^2 - 1 = 0$ en $H_0(A^\times, A) = A_{A^\times}$ para todo $x \in A^\times$. El mapa inverso está dado por $(a, \overline{b}) \mapsto \overline{B(a,ab)}$. Si $b - b' = z(x^2-1)$ para $b, b' \in A$ y $z \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{B(a,ab)} &= \overline{B(a, az(x^2-1) + ab')} \\
&= \overline{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B(1, z(x^2-1) + b')} \\
&= \overline{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B(1,b')B(1, z(x^2-1))} \\
&= \overline{B(a,ab')[B(x,1), B(1,z)]} \\
&= \overline{B(a,ab')}
\end{aligned}$$

Por tanto la aplicación $(a, \overline{b}) \mapsto \overline{B(a,ab)}$ está bien definida, es fácil ver que es la inversa de $\overline{B(a,b)} \mapsto (a, \overline{b/a})$. □

Ahora vamos con el teorema principal de esta tesis. Un sencillo análisis de la convergencia de sucesión espectral $E^1_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{SL}_2(A), \mathbb{Z})$ en dimensión 1 y 2 nos da:

Teorema B.11. *Sea A un anillo GE_2, tenemos la secuencia exacta*

$$H_2(B(A), \mathbb{Z}) \to H_2(\mathbf{SL}_2(A), \mathbb{Z}) \to I(A) \xrightarrow{\tau} \mathcal{G} \oplus A_{A^\times} \to H_1(\mathbf{SL}_2(A), \mathbb{Z}) \to 0$$

La composición $\overline{I}(A) \to I(A) \xrightarrow{\tau} \mathcal{G}_A \oplus A_{A^\times}$ es dada por:

$$\langle\langle a \rangle\rangle \mapsto (\langle a \rangle, \overline{3(1-a)}) = 3(\langle a \rangle, \overline{1-a}).$$

Demostración. De los lemas anteriores, tenemos algunos términos de la pagina E^2 de la

sucesión espectral

$$\begin{array}{lcccc} H_2(B(A),\mathbb{Z}) & * & * & 0 & \cdots \\ & \overset{d^2_{2,1}}{\swarrow} & & & \\ \mathcal{G}_A \oplus A_{A^\times} & 0 & * & 0 & \cdots \\ & \overset{d^2_{2,0}=\tau}{\swarrow} & & & \\ \mathbb{Z} & 0 & I(A) & 0 & \cdots \end{array}$$

Luego tenemos que

$$E^\infty_{0,1} = E^3_{0,1} = \frac{\mathcal{G}_A \oplus A_{A^\times}}{\mathsf{im}(\tau)}, \quad E^\infty_{2,0} = E^3_{2,0} = \mathsf{ker}(\tau), \quad E^\infty_{0,2} = E^3_{0,2} = \frac{H_2(B(A),\mathbb{Z})}{\mathsf{im}(d^2_{2,1})}$$

y tomando la filtración en dimensión 1

$$0 \subseteq F_0H_1 = F_1H_1 = H_1(\mathsf{SL}_2(A),\mathbb{Z})$$

tenemos la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathsf{im}(\tau) \longrightarrow \mathcal{G}_A \oplus A_{A^\times} \longrightarrow H_1(\mathsf{SL}_2(A),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \ ,$$

ahora en dimensión 2

$$0 \subseteq F_0H_2 = F_1H_1 \subseteq F_2H_2 = H_2(\mathsf{SL}_2(A),\mathbb{Z})$$

tenemos las secuencias exactas

$$0 \longrightarrow \mathsf{im}(d^2_{2,1}) \longrightarrow H_2(B(A),\mathbb{Z}) \longrightarrow F_1H_2 \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow F_1H_2 \longrightarrow H_2(\mathsf{SL}_2(A),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{ker}(\tau) \longrightarrow 0$$

juntando las secuencias tenemos la primera afirmación.

Ahora para la segunda afirmación, toma un elemento $\langle\langle a \rangle\rangle \in \overline{I}(A)$ representado por $[] \otimes \{(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}, \mathbf{1})\} \in \mathbf{B}_0(\mathsf{SL}_2(A)) \otimes X_2(A^2)$ donde $\mathbf{B}_\bullet(\mathsf{SL}_2(A))$ es la resolución bar

de $\mathbb{Z}$ como $\mathsf{SL}_2(A)$-módulo. Entonces, pasando a $I(A)$ tenemos el elemento

$$[] \otimes \{\partial_2((\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}, \mathbf{1}))\} \in \mathbf{B}_0(\mathsf{SL}_2(A)) \otimes Z_1(A^2).$$

Para obtener la imagen por el diferencial $d^2_{2,0} = \tau$ tenemos que pasar por el diagrama (revisar la observación A.10).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_1(\mathsf{SL}_2(A)) \otimes X_0(A^2) & \xleftarrow{\mathsf{Id}\otimes\partial_1} & \mathbf{B}_1(\mathsf{SL}_2(A)) \otimes X_1(A^2) \\ & & \downarrow{\scriptstyle d_1\otimes\mathsf{Id}} \\ & & \mathbf{B}_0(\mathsf{SL}_2(A)) \otimes X_1(A^2) \xleftarrow{\mathsf{Id}\otimes\mathsf{inc}} \mathbf{B}_0(\mathsf{SL}_2(A)) \otimes Z_1(A^2) \end{array}$$

luego, pasando por $\mathsf{Id} \otimes \mathsf{inc}$ tenemos

$$\begin{aligned}[ ] \otimes \{(\mathbf{0}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{a}) - (\mathbf{0}, \mathbf{1}) + (\boldsymbol{\infty}, \mathbf{1})\} &= [ ] \otimes \{g_a(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}) - h_a(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}) - g_1(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}) + h_1(\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0})\} \\ &= (g_a^{-1} - h_a^{-1} - g_1^{-1} + h_1^{-1})[ ] \otimes (\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0})\end{aligned}$$

luego $g_a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$, $h_a := \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, este último es una imagen de $d_1 \otimes \mathsf{Id}$, de hecho

$$(g_a^{-1} - h_a^{-1} - g_1^{-1} + h_1^{-1})[ ] \otimes (\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}) = d_1 \otimes \mathsf{Id}(\{[g_a^{-1}] - [h_a^{-1}] - [g_1^{-1}] + [h_1^{-1}]\} \otimes (\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}))$$

con $\{[g_a^{-1}] - [h_a^{-1}] - [g_1^{-1}] + [h_1^{-1}]\} \otimes (\boldsymbol{\infty}, \mathbf{0}) \in \mathbf{B}_1(\mathsf{SL}_2(A)) \otimes X_1(A^2)$, finalmente pasando por $\mathsf{Id} \otimes \partial_1$ tenemos

$$\{w([g_a^{-1}] - [h_a^{-1}] - [g_1^{-1}] + [h_1^{-1}]) - ([g_a^{-1}] - [h_a^{-1}] - [g_1^{-1}] + [h_1^{-1}])\} \otimes (\boldsymbol{\infty}) \in \mathbf{B}_1(\mathsf{SL}_2(A)) \otimes X_0(A^2).$$

donde $w := E(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ahora, pasando a $H_1(\mathsf{SL}_2(A), X_0(A^2))$, podemos tomar clases sobre $\mathsf{im}(d_2 \otimes \mathsf{Id})$, luego añadiendo el elemento nulo $d_2 \otimes \mathsf{Id}(([w|h_a^{-1}] - [w|g_a^{-1}] + [w|g_1^{-1}] - [w|h_1^{-1}]) \otimes (\boldsymbol{\infty}))$ tenemos

$$([wg_a^{-1}] - [wh_a^{-1}] - [wg_1^{-1}] + [wh_1^{-1}] - [g_a^{-1}] + [h_a^{-1}] + [g_1^{-1}] - [h_1^{-1}]) \otimes (\boldsymbol{\infty}),$$

otra vez adicionando el elemento nulo $d_2 \otimes \mathsf{Id}([a^{-1}h_{a^{-1}}^{-1}|wh_a^{-1}] - [h_1^{-1}|wh_1^{-1}] \otimes (\boldsymbol{\infty}))$ (note que

$z^{-1}h_{z^{-1}}^{-1} \in B(A) = \mathsf{Stab}_{\mathsf{SL}_2(A)}(\boldsymbol{\infty})$ y tome la identidad $z^{-1}h_{a^{-1}}^{-1}wh_a^{-1} = wg_a^{-1}$) tenemos

$$([a^{-1}h_{a^{-1}}^{-1}] - [h_1^{-1}] - [g_a^{-1}] + [h_a^{-1}] + [g_1^{-1}] - [h_1^{-1}]) \otimes (\boldsymbol{\infty}),$$

una vez mas añadiendo $d_2 \otimes \mathsf{Id}([h_1| - w] - [h_{a^{-1}}| - w]) \otimes (\boldsymbol{\infty}) = ([g_a^{-1}] - [h_{a^{-1}}] - [g_1^{-1}] + [h_1]) \otimes (\boldsymbol{\infty})$,

$$([a^{-1}h_{a^{-1}}^{-1}] - [h_1^{-1}] + [h_a^{-1}] - [h_1^{-1}] - [h_{a^{-1}}] + [h_1]) \otimes (\boldsymbol{\infty}). \tag{B.2}$$

Note que en $H_1(SL_2(A), X_0(A^2))$, si $g, h \in B(A)$ tenemos que

$$d_2 \otimes \mathsf{id}([g|h] \otimes (\boldsymbol{\infty})) = 0$$

y luego

$$[gh] \otimes (\boldsymbol{\infty}) = ([g] + [h]) \otimes (\boldsymbol{\infty})$$

que a su vez implica

$$[h^{-1}] \otimes (\boldsymbol{\infty}) = -[h] \otimes (\boldsymbol{\infty})$$

luego, sumando todo en la ecuación B.2 tenemos.

$$[a^{-1}h_{a^{-1}}^{-2}h_a^{-1}h_1^3] \otimes (\boldsymbol{\infty}) = \left[\begin{pmatrix} a^{-1} & -2 - a^{-2} + 3a^{-1} \\ 0 & a \end{pmatrix}\right] \otimes (\boldsymbol{\infty}) = [B(a^{-1}, -2 - a^{-2} + 3a^{-1})] \otimes (\boldsymbol{\infty})$$

y esto representa una clase en $H_1(\mathsf{SL}_2(A), X_0(A^2))/\mathsf{im}(d_{1,1}^1) \simeq \mathcal{G}_A \oplus H_0(A^\times, A) = \mathcal{G}_A \oplus A_{A^\times}$, y por el lema B.10 tenemos que el elemento es

$$(\langle a^{-1} \rangle, \overline{-2a - a^{-1} + 3}) = (\langle a \rangle, \overline{3(1-a)}).$$

□

El teorema de Cohn A.6 para el caso conmutativo, aparece como un corolario del teorema anterior.

Corolario B.12. *Sea A un anillo GE_2 y sea M el subgrupo aditivo de A generado por 12, $x(a^2-1)$ y $3(a+1)(b+1)$, donde $x \in A$, $a, b \in A^\times$. Entonces existe un mapa sobreyectivo*

$$A/M \twoheadrightarrow H_1(\mathsf{SL}_2(A), \mathbb{Z})$$

Si A es un anillo GE_2 universal (o más en general, si $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ es exacta en dimensión < 2), entonces el mapa anterior es un isomorfismo.

Demostración. Del teorema anterior tenemos el mapa sobreyectivo

$$\frac{\mathcal{G}_A \oplus A_{A^\times}}{\langle 3(\langle b\rangle, b-1) \mid b \in A^\times\rangle} \twoheadrightarrow H_1(\mathsf{SL}_2(A), \mathbb{Z}).$$

Ahora el mapa

$$\frac{A}{M} \to \frac{\mathcal{G}_A \oplus A_{A^\times}}{\langle 3(\langle b\rangle, b-1) \mid b \in A^\times\rangle}, \quad \overline{a} \mapsto \overline{(\langle 1\rangle, \overline{a})}$$

es un isomorfismo con inversa

$$\frac{\mathcal{G}_A \oplus A_{A^\times}}{\langle 3(\langle b\rangle, b-1) \mid b \in A^\times\rangle} \to \frac{A}{M}, \quad \overline{(\langle b\rangle, \overline{a})} \mapsto \overline{a - 3b + 3}.$$

Si A es un anillo GE_2 universal, entonces $X_\bullet(A^2) \to \mathbb{Z}$ es exacta en dimensión < 2 (Teorema B.1). Por tanto, el mapa natural $\overline{I}(A) \to I(A)$ es sobreyectivo. esto implica la segunda afirmación. □

Ejemplo B.13. Observe que con las hipótesis del corolario B.12, tenemos

$$A/M \simeq \frac{A_{A^\times}}{\langle 12, 3(a+1)(b+1) | a, b \in A^\times\rangle}.$$

1. Se sabe que $A = \mathbb{Z}$ es un anillo GE_2 universal por el ejemplo A.7 (10). Desde que $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$ actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ ($(-1) \cdot a = (-1)^2 a = a$ ver enunciado de B.10) y $\mathcal{G}_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^\times$, tenemos
$$H_1(\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/12.$$

2. El subanillo de $\mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ con p primo, es un dominio euclidiano y luego un anillo GE_2. Y del ejemplo A.7(12) tenemos que es universal para GE_2 si y solo si $p = 2$ ó $p = 3$. Por otro lado $A^\times = \{\pm 1, \pm p^m | m \in \mathbb{Z}\}$ y luego (observe que $p^2 - 1 | (p^m)^2 - 1$)
$$A_{A^\times} \simeq \frac{\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]}{\langle (p^m)^2 - 1\rangle} \simeq \frac{\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]}{\langle p^2 - 1\rangle} \simeq \mathbb{Z}/(p^2 - 1)$$
El último isomorfismo es una propiedad clásica de la localización (el hecho de que

conmuta con cocientes). Así por el corolario B.12 tenemos un mapa sobreyectivo

$$\frac{\mathbb{Z}/(p^2-1)}{\langle 12, 3(a+1)(b+1)|a,b\in A^\times\rangle} \twoheadrightarrow H_1(\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}\Big[\frac{1}{p}\Big]),\mathbb{Z}).$$

a) Sea $p=2$. Entonces,

$$A/M \simeq \frac{\mathbb{Z}/3}{\langle 12, 3(a+1)(b+1)|a,b\in A^\times\rangle} \simeq \mathbb{Z}/3.$$

Desde que $\mathbb{Z}\Big[\frac{1}{2}\Big]$ es un anillo GE_2 universal, del corolario B.12, tenemos el isomorfismo

$$H_1(\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}\Big[\frac{1}{2}\Big]),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3.$$

b) Sea $p=3$. Entonces, como $\mathbb{Z}\Big[\frac{1}{3}\Big]$ es un anillo GE_2 universal tenemos del corolario B.12 (note que $\pm 3^m+1$ tiene un factor 2 para todo $m\in\mathbb{Z}$, luego $3(a+1)(b+1)$ tiene factor 12 para todo $a,b\in A^\times$):

$$H_1(\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}\Big[\frac{1}{3}\Big]),\mathbb{Z}) \simeq \frac{\mathbb{Z}/8}{\langle 12\rangle} \simeq \mathbb{Z}/4.$$

c) Sea $p>3$. Entonces $12|(p^2-1)$ y (del mismo modo $\pm p^m+1$ tiene un factor 2 para todo $m\in\mathbb{Z}$, luego $3(a+1)(b+1)$ tiene factor 12 para todo $a,b\in A^\times$)

$$\frac{\mathbb{Z}/(p^2-1)}{\langle 12, 3(a+1)(b+1)|a,b\in A^\times\rangle} \simeq \mathbb{Z}/12.$$

Entonces, tenemos un mapa sobreyectivo

$$\mathbb{Z}/12 \twoheadrightarrow H_1(\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}\Big[\frac{1}{p}\Big]),\mathbb{Z}).$$

Y es sabido que este mapa es un isomorfismo, mas esto escapa al objetivo de esta tesis, puede encontrar una prueba en B. Mirzaii y E. Torres Pérez [14, Proposición 4.4].

3. Sea A un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_A$ y cuerpo residual k. Del ejemplo A.7 (2) tenemos que A es un anillo GE_2 universal.

a) Si $|k|>3$, entonces existe $a\in A^\times$ tal que $a^2-1\in A^\times$. Esto implica que $A=M$

y luego $H_1(\mathsf{SL}_2(A), \mathbb{Z}) = 0$.

b) Sea $k = \mathbb{F}_3$. Si $a \in \mathfrak{m}_A$, entonces $a-1, a-2 \in A^\times$. Desde que $a = (a-2)^{-1}((a-1)^2 - 1) \in M$, tenemos que $\mathfrak{m}_A \subseteq M$. Para mostrar la otra inclusión tomamos clases en el cuerpo residual a cada generador de M. Es claro que $12 = 0$ y $3(a+1)(b+1) = 0$ en el cuerpo residual $k = \mathbb{F}_3$, luego pertenecen al ideal $\mathfrak{m}_A$. Suponga ahora que $x(a^2-1) \notin \mathfrak{m}_A$, luego es una unidad y por ende sus factores lo son, luego $a^2 - 1 \neq 0$ en el cuerpo residual, mas si $a = 1$ ó $a = 2$ vemos que en ambos casos $a^2 - 1 = 0$, contradicción. Por tanto $x(a^2-1) \in \mathfrak{m}_A$ y $M \subseteq \mathfrak{m}_A$

$$H_1(\mathsf{SL}_2(A), \mathbb{Z}) \simeq A/\mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{Z}/3.$$

c) Ahora sea $k \simeq \mathbb{F}_2$. Considere la secuencia exacta

$$0 \to \mathfrak{m}_A/M \to A/M \to k \to 0.$$

Entonces $2 \in \mathfrak{m}_A$, $3 \in A^\times$. Más aún, para $a \in A^\times$, $a \pm 1 \in \mathfrak{m}_A$. Luego, $M \subseteq \mathfrak{m}_A^2$. Ahora si $a, b \in \mathfrak{m}_A$, entonces

$$ab = 3(a/3)b = 3\Big[((a/3)-1)+1\Big]\Big[((b-1)+1\Big] \in M.$$

Esto implica que $\mathfrak{m}_A^2 \subseteq M$ y

$$H_1(\mathsf{SL}_2(A), \mathbb{Z}) \simeq A/\mathfrak{m}_A^2.$$

Luego la secuencia exacta anterior queda

$$0 \to \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to A/\mathfrak{m}_A^2 \to k \to 0.$$

y $|H_1(\mathsf{SL}_2(A), \mathbb{Z})| = 1 + \dim_{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2)$. En particular si A es un anillo de valuación discreta (AVD), entonces $\mathfrak{m}_A$ es generado por un elemento primo y entonces tenemos que $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \simeq \mathbb{F}_2$.

Con esto tenemos que $A/\mathfrak{m}_A^2 \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ó $A/\mathfrak{m}_A^2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un ejemplo del segundo caso puede ser el anillo de los enteros 2-ádicos $\mathbb{Z}_2$, mientras que para

el primer caso tenemos el subanillo de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Z}_{(2)} := \left\{ \frac{a}{n} \in \mathbb{Q} : 2 \nmid n \right\}.$$

4. Sea $\mathcal{O}_d$ el anillo de enteros algebraicos del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, donde d es un entero libre de cuadrados. Es conocido que

$$\mathcal{O}_d = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], & d \equiv 2,3 \mod 4 \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{4}], & d \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

Cuando $d < 0$ tenemos que $\mathcal{O}_d^\times$ tiene a lo sumo 6 elementos, de hecho $\mathcal{O}_{-1}^\times = \{\pm 1, \pm i\}$, $\mathcal{O}_{-3}^\times = \{\pm 1, \pm\omega, \pm(\omega - 1)\}$ donde $i = \sqrt{-1}$ y $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ y para $d \neq 1, 3$ tenemos que $\mathcal{O}_d^\times = \{\pm 1\}$. De ejemplo A.7(4) tenemos que $\mathcal{O}_d$ es un dominio euclídeo si y solo si $d = -1, -2, -3, -7, -11$ si y solo si $\mathcal{O}_d$ es un anillo GE_2. Del A.7 (5) tenemos que $\mathcal{O}_d$ es universal para GE_2 si y solo si $d \neq -2, -7, -11$. Entonces vamos a calcular en cada caso A/M:

a) Caso $d = -1$: Tenemos $\{a^2 - 1 \mid a \in \mathcal{O}_{-1}^\times\} = \{\pm 1\}$, luego $R := \{x(a^2 - 1)| \mid x \in \mathcal{O}_{-1}, a \in \mathcal{O}_{-1}^\times\} = \{2x \mid x \in \mathcal{O}_{-1}\}$. Así tenemos que $12 \in R$ y $3(a+1)(b+1) \in R$ con $a, b \in \mathcal{O}_{-1}^\times$. Y por tanto $M = R$ y así

$$H_1(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{-1}), \mathbb{Z}) \simeq \mathcal{O}_{-1}/M = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

como grupo abeliano.

b) Caso $d = -3$: Tenemos que $\{a^2 - 1 \mid a \in \mathcal{O}_{-3}^\times\} = \{\omega - 2, -\omega - 1\}$, mas $\omega - 2 = \omega^2 - 1 = (\omega + 1)(\omega - 1)$ y as $\omega + 1 | \omega - 2$, así

$$\mathcal{O}_{-3\mathcal{O}_{-3}^\times} = \frac{\mathcal{O}_{-3}}{\langle \omega + 1 \rangle}$$

Por otro lado, tenemos que $3 = -(\omega - 2) - (-\omega - 1)$ y luego 12 y $3(a+1)(b+1)$ pertenecen a $\langle \omega + 1 \rangle$ para $a, b \in \mathcal{O}_{-3}^\times$. Y así

$$\frac{\mathcal{O}_{-3}}{M} = \frac{\mathcal{O}_{-3}}{\langle \omega + 1 \rangle} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}.$$

El último isomorfismo viene dado por $a+b\omega \mapsto \overline{a-b}$, es fácil mostrar que es inyectivo teniendo en cuenta que $(\omega+1)|3$ pues $3=(\omega+1)(2-\omega)$. La sobreyectividad es obvia.

Los casos restantes $d=-2,-7,-11$ fueron calculados por Cohn, en P. M. Cohn [9, página 162] dan la siguiente lista

$$H_1(\mathsf{SL}_2(\mathcal{O}_d),\mathbb{Z}) \simeq \mathsf{SL}_2(\mathcal{O}_d)^{\mathsf{ab}} = \begin{cases} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & d=-1 \\ \mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}, & d=-2 \\ \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}, & d=-3 \\ \mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, & d=-7 \\ \mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}, & d=-11 \end{cases}$$

Conclusiones

1. la clasificación de anillos dada por Cohn:

   a) *Con forma estándar única para* GE_2

   b) *Cuasi-libre para* GE_2

   c) *Universal para* GE_2

   Se demuestra que son diferentes según el ejemplo A.7, tenemos los anillos locales (que no son cuerpos) que son anillos universales para GE_2 pero no son cuasi-libres (2). También tenemos que $\mathcal{O}_{-5}$ es cuasi-libre pero no tiene forma estándar única para GE_2 (6). Inclusive hay anillos que no son siquiera universales para GE_2, como es el caso de $\mathcal{O}_d$ con $d = -2, -7, -11$ (aunque les falta poco según se vió en (5)).

2. Como se vio en el ejemplo A.7(4), no todos los anillos cumplen con la propiedad de ser anillos GE_2, como es el caso de los anillos de enteros $\mathcal{O}_d$ con $d < 0$ con excepción de:

$$d = -1, -2, -3, -7, -11.$$

3. Se calcula en el caso general la primera homología de E_2, mientras que en el caso conmutativo conseguimos calcular la primera homología de SL_2. Viendo de cerca, por el teorema de Hutchinson B.1 necesitamos que el complejo de vectores unimodulares sea exacto por lo menos en dimensión < 1, de otro modo la sucesión espectral convergería a la homología del complejo total correspondiente al complejo doble inducido por el complejo de vectores unimodulares

$$0 \to Z_1(A^2) \to X_1(A^2) \to X_0(A^2) \to 0.$$

   Ahora, si deseamos abordar el caso no conmutativo debemos ir mucho mas allá y

tratar con un complejo de vectores unimodulares para este caso y generalizar el teorema de Hutchinson B.1. Hutchinson demostró que la exactitud del complejo de vectores unimodulares en dimensiones bajas está fuertemente vinculada con la teoría K algebraica, justamente la homología de este complejo en dimensiones 0 y 1 nos dan respectivamente

$$\mathbb{Z}[\mathsf{E}_2(A)\backslash\mathsf{SL}_2(A)], \qquad \left(\frac{K_2(2,A)}{C(2,A)}\right)^{\mathsf{ab}}$$

Y estos grupos podemos verlos en el ejemplo A.7(11).

Cabe mencionar que se tiene un artículo (preprint) donde se hace un estudio mucho más amplio de este problema pasando directamente a la teoría K algebraica, véase [14].

Referencias Bibliográficas

[1] P. M. Cohn, “On the structure of the GL_2 of a ring,” eng, *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, vol. 30, págs. 5-53, 1966. dirección: http://eudml.org/doc/103868.

[2] K. Hutchinson, “GE_2-rings and a graph of unimodular rows,” English, *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 226, n.º 10, pág. 33, 2022, Id/No 107074, issn: 0022-4049. doi: 10.1016/j.jpaa.2022.107074.

[3] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings* (Graduate Text in Mathematics), English. New York, NY: Springer, 2001, isbn: 978-0-387-95325-0.

[4] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra* (Camb. Stud. Adv. Math.), English. Cambridge: Cambridge University Press, 1994, vol. 38, isbn: 0-521-43500-5.

[5] P. J. Hilton y U. Stammbach, *A course in homological algebra* (Grad. Texts Math.), English. Springer, Cham, 1971, vol. 4.

[6] K. S. Brown, *Cohomology of Groups* (Graduate Texts in Mathematics). Springer New York, 2012, isbn: 9781468493276.

[7] K. Hutchinson, “A new approach to Matsumoto’s theorem,” English, K-*Theory*, vol. 4, n.º 2, págs. 181-200, 1990, issn: 0920-3036. doi: 10.1007/BF00533156.

[8] S. Mac Lane, *Homology* (Class. Math.), English. Berlin: Springer-Verlag, 1995, isbn: 3-540-58662-8.

[9] P. M. Cohn, “A presentation of SL_2 for Euclidean imaginary quadratic number fields,” English, *Mathematika*, vol. 15, págs. 156-163, 1968, issn: 0025-5793. doi: 10.1112/S0025579300002515.

[10] P. Menal, “Remarks on the GL_2 of a ring,” English, *Journal of Algebra*, vol. 61, págs. 335-359, 1979, issn: 0021-8693. doi: 10.1016/0021-8693(79)90285-0.

[11] L. N. Vaserstein, “On the group SL_2 over Dedekind rings of arithmetic type,” English, *Mathematics of the USSR, Sbornik*, vol. 18, págs. 321-332, 1973, issn: 0025-5734. doi: 10.1070/SM1972v018n02ABEH001775.

[12] R. C. Coronado y K. Hutchinson, *Bloch Groups of Rings*, 2022. arXiv: 2201.04996 [math.KT].

[13] T. Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields* (Grad. Stud. Math.), English. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2005, vol. 67, isbn: 0-8218-1095-2.

[14] B. Mirzaii y E. T. Pérez, *The abelianization of the elementary group of rank two*, unpublished, 2024. arXiv: 2401.06330 [math.KT].