

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**“MOVIMIENTO DE UN DIPOLLO ELÉTRICO REAL EN LA PRESENCIA
DE UN CAMPO ELÉCTRICO EXTERNO”**

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO
EN CIENCIAS EN FÍSICA

ELABORADO POR:

FERNANDO CHIRINOS VILLARUEL

ASESOR:

MSc. EDGARD VIDALON VIDALON

LIMA-PERÚ

2024

Agradecimientos

Agradezco infinitamente al Profesor Edgard Vidalon Vidalon mi asesor de Tesis de Maestria por todas las interesantes discusiones que me ayudaron a comprender diversos aspectos de la Dinámica del cuerpo rígido, como también en la redacción del presente trabajo y en el apoyo de la elaboración de los programas que se usaron para desarrollar la presente Tesis. Agradezco también a la Facultad de Ciencias, a mis amigos colegas de la Universidad. Quiero agradecer a todas las personas y organismos que hicieron posible el estudio de Maestria en la Facultad de Ciencias y en especial a los profesores que me dictaron los cursos en la Maestria, por las facilidades de horario de dictado de clases. En especial agradecer a mis padres, mis hermanos mi esposa y mis hijos por el apoyo incondicional en todo.

Antecedentes

En la presente tesis se estudia el movimiento de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico producido por diversas configuraciones eléctricas. Como se sabe en los cursos de antegrado es más familiar si estudiamos la interacción de dos dipolos eléctricos es para aplicar a modelos de moléculas dipolares considerando la Mecánica Cuántica como se menciona en [1].

Pero existen artículos donde se analizan experimentos donde hay movimientos de dipolos eléctricos en la presencia de campos magnéticos. [2].

Estudiar el movimiento de un dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico no es frecuente en los cursos de antegrado, pero en ciertas investigaciones como en el artículo [3] se estudia el movimiento de partículas neutras que tienen un momento dipolar eléctrico permanente con el fin de confinar en un región del espacio (se dice que el dipolo está en una trampa eléctrica). El análisis de este movimiento es usando la Física Clásica.

También se puede analizar una trampa para dipolos eléctricos en el texto tal como [4]. En el artículo [5] se estudia la dinámica de un dipolo eléctrico en presencia de un campo electromagnético. Además de estudiar el estado de equilibrio entre dos dipolos eléctricos, no es frecuente en los cursos de antegrado. La primera referencia está en un problema de electromagnetismo mencionado en el texto de Teoría Electromagnética del Dr A. Talledo [6].

En otro [7] analiza el confinamiento de partículas neutras que tienen un momento dipolar eléctrico permanente. También se muestran evidencia experimentales que nanocristales de celulosa tiene un momento dipolar eléctrico permanente [8]. Finalmente en ciertas investigaciones incluso se estudian movimientos de cuadrupolos en campos eléctricos [9] Al desarrollar el presente trabajo se halla que algunos de los ángulos de Euler del dipolo móvil tiene comportamiento periódico en forma semejante al movimiento de un sólido simétrico [10]

Justificación

En general el estudio clásico del movimiento de un dipolo eléctrico en la presencia de un campo eléctrico (debido a otro dipolo) se justifica por los motivos.

1. Investigar y difundir las propiedades de este movimiento, que no se estudia en antegradado. En investigación a nivel post-grado no es tan frecuente analizar el movimiento del dipolo eléctrico en cambio el movimiento de un dipolo magnético es estudiado con más frecuencia incluso a nivel clásico [11], y también se presenta en los libros de Mecánica [12].

2. Podemos posteriormente aplicar estas propiedades a un sistema físico como una red cubica simple de moléculas, todas las cuales se comportan como un dipolo elemental con centro de masa fijo en los vértices de la red con el fin de explicar su movimiento de oscilación bajo un punto de vista clásico.

Con la asimilación de los conceptos del presente trabajo se puede hacer análisis y modificaciones de investigaciones del movimiento de un dipolo eléctrico como mencionado en el artículo Trampa electromagnética para partículas polares [13] .

Es obvio la importancia del estudio de los dipolos eléctricos por que no solo se aplica al estudio de ciertos tipos enlaces de moléculas, sino también podemos aplicar la teoría del movimiento de los dipolos a fenómenos como el siguiente:

Sabemos que las moléculas de agua se comportan como un dipolo. Si se aplica un campo eléctrico externo a las moléculas de agua en este experimento muestra que la temperatura del agua disminuye porque que las moléculas dejan de vibrar debido al alineamiento con el campo eléctrico externo [14].

3. La interacción de un campo eléctrico con una molécula o un cristal provoca efectos espectrales que a menudo pueden relacionarse fácilmente con parámetros importantes de la

distribución de carga. Las influencias del campo eléctrico en los espectros se denominan efectos Stark, y en este fenómeno la atención se centra en el espectro óptico (visible y ultravioleta). Los cambios espectrales inducidos por el campo a menudo conducen a nuevos conocimientos sobre el dipolo molecular y los momentos superiores de la distribución de carga, las capacidades de polarización de los estados electrónicos excitados y los parámetros que describen las interacciones intermoleculares en los cristales [3].

Resumen

En los cursos de antegrado se estudia con detalle el movimiento de una partícula sometida a fuerzas centrales, el movimiento de un cuerpo rígido (como el trompo) o se calcula los campos eléctricos (magnéticos) producidos por dipolos eléctricos (magnéticos) en puntos lejanos. El análisis de la interacción entre dos dipolos eléctricos es siempre estudiado desde un punto de vista cuántico y para un estudio clásico se tiene como problemas estáticos .

El objetivo del presente trabajo es estudiar el movimiento de un dipolo eléctrico real (es decir se considera las dimensiones de las cargas que definen el dipolo) en un campo eléctrico generado por un dipolo elemental fijo, que a diferencia de los problemas que existen sobre este sistema de cargas el dipolo elemental fijo no está necesariamente en el eje Z , está en una dirección arbitraria. Con el objetivo de simplificar las ecuaciones se va a considerar en la mayoría de los casos que el centro de masa del dipolo eléctrico real está fijo y el movimiento es de un cuerpo rígido. Consideramos la dinámica de Lagrange y los ángulos de Euler para describir el movimiento.

En el presente trabajo usaremos también la ley de conservación de la energía y se demuestra que cuando el dipolo elemental coincide con el eje Z el movimiento es parecido al de un trompo simétrico pero cuando el dipolo móvil está en el plano YZ este tendrá dos posiciones de equilibrio. Como es evidente estos resultados fueron comprobados efectuando simulaciones numéricas. En las conclusiones se presenta la validez de los cálculos numéricos.

Para analizar la estabilidad de las posiciones de equilibrio se aplica la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Abstrat

In undergraduate courses, the motion of a particle subjected to central forces, the motion of a rigid body (such as a top) or the calculation of electric (magnetic) fields produced by electric (magnetic) dipoles at distant points are studied in detail. The analysis of the interaction between two electric dipoles is always studied from a quantum point of view and for a classical study, static problems are considered.

The objective of this work is to study the motion of a real electric dipole (that is, the dimensions of the charges that define the dipole are considered) in an electric field generated by a fixed elementary dipole, which, unlike the problems that exist on this system of charges, the fixed elementary dipole is not necessarily on the Z axis, it is on the Z axis. an arbitrary address. In order to simplify the equations, in most cases the center of mass of the real electric dipole will be considered to be fixed and the motion is that of a rigid body. We consider Lagrange dynamics and Euler angles to describe the motion.

In this work we will also use the law of conservation of energy and it is shown that when the elementary dipole coincides with the Z axis the motion is similar to that of a symmetrical top, but when the mobile dipole is in the YZ plane it will have two equilibrium positions.

As is evident, these results were verified by carrying out numerical simulations. In the conclusions, the validity of the numerical calculations is presented.

To analyze the stability of the equilibrium positions, the theory is applied. Lyapunov stability.

Índice general

Agradecimientos	II
Justificación	IV
Capítulo 1. Conceptos Generales	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Importancia del dipolo eléctrico	1
1.3. Tipos de Interacción de los dipolos	3
1.3.1. Interacción ión - dipolos	3
1.3.2. Interaccion dipolo - dipolo	4
Capítulo 2. Movimiento de un dipolo en un campo eléctrico debido a un Dipolo Elemental fijo	9
2.1. Generalidades	9
2.2. Análisis del movimiento del dipolo considerando el otro dipolo fijo en el eje Z	14
2.2.1. Potencial Efectivo	14
2.2.2. Descripción Cualitativa del Movimiento del Dipolo	17
2.2.3. Relación para las condiciones iniciales del movimiento estacionario.	19
2.3. Movimiento en un campo eléctrico debido a un Dipolo Elemental fijo ubicado en el plano YZ.	20
2.3.1. Puntos de equilibrio del Movimiento del Dipolo Móvil	22
2.3.2. Demostración de la existencia del movimiento estacionario usando las ecuaciones de Lagrange.	25
2.4. Solución numérica para el dipolo fijo en el plano YZ	26
2.5. Análisis de la estabilidad de una solución numérica.	36
2.6. Observaciones de los gráficos.	37

2.7. Conclusiones.	38
Capítulo 3. Movimiento de un dipolo en un campo debido a dos dipolos fijos ubicados en el plano YZ	39
3.1. Generalidades	39
3.2. Potencial Efectivo	41
3.2.1. Puntos de equilibrio del Movimiento del Dipolo Móvil	43
3.2.2. Demostración de la existencia del movimiento estacionario usando las ecuaciones de Lagrange.	46
3.3. Solución numérica.	47
3.4. Observaciones de los graficos	58
3.5. Conclusion	58
Capítulo 4. Movimiento de un Dipolo Eléctrico con dos esferas cargadas con centro de masa fijo en un campo Eléctrico homogéneo	59
4.1. Generalidades	60
4.2. Potencial Efectivo del dipolo	61
4.3. Descripción Cualitativa del movimiento	63
4.4. Aplicación de las ecuaciones de Lagrange	64
Capítulo 5. Conclusiones generales y trabajos posteriores	66
5.1. Conclusiones	66
5.2. Trabajos posteriores	67
5.3. Validez	67
6. APENDICES	68
Bibliografía	10

Índice de figuras

Figura 1. Molécula de agua	2
Figura 2. Interacción ion dipolos	3
Figura 3. Orientación de moléculas polares en un sólido	4
Figura 4. Material polarizado en presencia de un campo eléctrico.	5
Figura 5. Moléculas polares en presencia de un campo eléctrico.	6
Figura 6. Dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme.	7
Figura 7. Dipolo eléctrico en un campo eléctrico no uniforme.	8
Figura 8. Dipolos	9
Figura 9. Dipolo Movil	10
Figura 10. El eje X_3 coincide con el eje de simetria	11
Figura 11. Ángulos de Euler	12
Figura 12. Dipolo en el eje Z	14
Figura 13. Dipolo eléctrico en un campo eléctrico	15
Figura 14. Potencial Electrico $V(\theta)$	17
Figura 15. Movimiento de Precesión	18
Figura 16. Dipolo elemental fijo en el plano YZ	20
Figura 17. Muestra las oscilaciones del ángulo θ	28
Figura 18. Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ	29
Figura 19. Muestra que la rapidez de ψ permanece constante para el primer conjunto de datos	29
Figura 20. Muestra las oscilaciones del ángulo θ para el segundo conjunto de datos	30
Figura 21. Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ para el segundo conjunto de datos	31
Figura 22. Muestra que la rapidez de ψ permanece constante para el segundo conjunto de datos.	31
Figura 23. Muestra las oscilaciones del ángulo θ para el tercer conjunto de datos	32

Figura 24. Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ para el tercer conjunto de datos	33
Figura 25. Muestra que la rapidez de ψ permanece constante para el tercer conjunto de datos.	33
Figura 26. Muestra las oscilaciones del ángulo θ para el cuarto conjunto de datos	34
Figura 27. Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ para el cuarto conjunto de datos	35
Figura 28. Muestra que la rapidez de ψ permanece constante para el cuarto conjunto de datos.	35
Figura 29. Grafico de la perturbación D para el cuarto conjunto de datos.	37
Figura 30. Dipolos en el plano YZ	40
Figura 31. Dipolo elemental fijo en el plano YZ	42
Figura 32. Muestra las oscilaciones del ángulo θ caso I	50
Figura 33. Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ caso I	51
Figura 34. Muestra las oscilaciones del ángulo ψ caso I	51
Figura 35. Muestra las oscilaciones del ángulo θ caso II	52
Figura 36. Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ caso II	53
Figura 37. Muestra las oscilaciones del ángulo Ψ .caso II	53
Figura 38. Muestra las oscilaciones del ángulo θ caso III	54
Figura 39. Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ Caso III	55
Figura 40. Muestra las oscilaciones del ángulo Ψ caso III	55
Figura 41. Muestra las variaciones θ caso IV	56
Figura 42. Muestra las variaciones ϕ caso IV	57
Figura 43. Muestra las variaciones de ψ caso IV	57
Figura 44. Dipolo eléctrico en un campo eléctrico	59
Figura 45. Considerando el eje de simetria como uno de los ejes principales de Inercia	60
Figura 46. Sistema ión dipolo	68
Figura 47. Dipolo en el interior de un campo eléctrico	70
Figura 48. Dipolo en el sistema X' , Y' y Z'	71
Figura 49. Grafico $\theta - (t)$	79
Figura 50. Grafico $\Phi - (t)$	79
Figura 51. Grafico $\Psi - (t)$	80
Figura 52. Dipolo elemental fijo en el plano YZ	93
Figura 53. Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 1	100

Figura 54. Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 2		101
Figura 55. Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 3		101
Figura 56. Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 4		102
Figura 57. Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 5		102

Principales símbolos usados.

$X Y Z$	Sistema de referencia inercial.
m	Masa del dipolo móvil.
l	La distancia de las cargadas del dipolo movil.
K	Constante eléctrica de Coulomb en el vacío.
$\Phi(\vec{r})$	Potencial eléctrico en la posición r .
E_p	Energía potencial .
$V(\theta)$	Energía potencial efectiva .
T	Periodo.
E_k	Energía de cinética.
L	Función de Lagrange.
ω	Frecuencia angular.
θ, ϕ, ψ	angulos de Euler
$\vec{p}$	Momento dipolar del dipolo movil real.
Q_i	cargas de los dipolos.

Capítulo 1

Conceptos Generales

1.1. Generalidades

Como se menciona en el resumen del presente trabajo, deseamos estudiar el comportamiento de un dipolo eléctrico real en presencia de campos electrostáticos generados por diversas configuraciones de cargas fijas (ejemplo dipolos y cargas puntuales).

Consideramos el primer caso el dipolo real con centro de masa fijo y el otro caso con el centro de masa que se mueve en el espacio.

Como el movimiento es en tres dimensiones y el dipolo se considera como un cuerpo rígido, usaremos los ángulos de Euler para describir su movimiento. En casos simples se tendrá una ecuación para la energía mecánica donde dependerá de un sólo ángulo θ y de su derivada respecto al tiempo (velocidad angular de nutación). Al proceder así se demostrará que este ángulo tendrá un valor máximo y mínimo. Esto es posible por tener dos coordenadas cíclicas ϕ y ψ . Un caso particular de movimiento cuando hay precesión uniforme en la cual el ángulo θ es constante (movimiento estacionario).

En otros casos sólo tendrá una sola coordenada cíclica aunque se consiguen movimientos estacionarios para los ángulos θ y ϕ . Para comprobar algunos resultados aplicamos la teoría de estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias (Lyapunov), y simulación numérica.

1.2. Importancia del dipolo eléctrico

El estudio clásico de un dipolo eléctrico es necesario y a continuación se dan algunos argumentos de su importancia:

Es sabido que un momento dipolar eléctrico grande en las moléculas o átomos las convierte en

un excelente solvente.

Precisamente la molécula de agua (H_2O) se comporta como un dipolo eléctrico figura (1). Como un todo, la molécula de agua es eléctricamente neutro, no obstante, los enlaces químicos dentro de las moléculas ocasionan un desplazamiento de la carga; el resultado es una carga neta negativa en el extremo del oxígeno de la molécula, y una carga neta positiva en el extremo del hidrógeno, formando así un dipolo eléctrico tal que el efecto es equivalente al desplazamiento de un electrón de apenas $0,4\text{\AA}$ (aproximadamente el radio de un átomo de hidrógeno); sin embargo, las consecuencias de este desplazamiento son profundas.

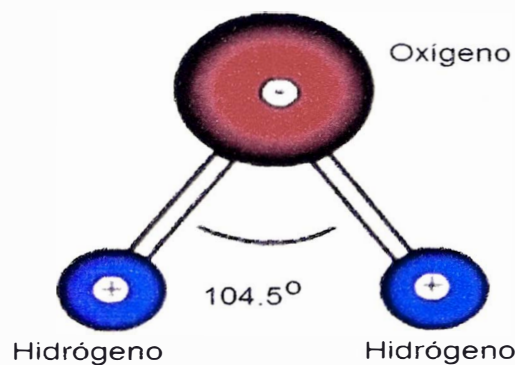


Figura 1: Molécula de agua

El agua es un magnífico solvente para las sustancias iónicas como la sal de mesa (cloruro de sodio $NaCl$), Precisamente porque la molécula de agua es un dipolo eléctrico. Cuando se disuelve en agua, la sal se disocia en un ión de sodio positivo Na^+ y un ión de cloro negativo Cl^- , los cuales tienden a ser atraídos hacia los extremos negativo y positivo, respectivamente de las moléculas de agua; esto mantiene los iones en la solución.

Si las moléculas del agua no fueran dipolos eléctricos, el agua sería un mal solvente, y casi toda la química que ocurre en soluciones acuosas sería imposible.

Esto incluye todas las reacciones bioquímicas que se realizan en las formas de vida terrestre.

En un sentido muy real, nuestra existencia como seres humanos depende de los dipolos. Existen distintos tipos de fuerzas intermoleculares como las interacciones entre las moléculas, y entre iones y moléculas, mencionemos algunas de ellas:

1.3. Tipos de Interacción de los dipolos

1.3.1. Interacción ión - dipolos

La interacción dipolo se puede observar macroscópicamente como por ejemplo en la deflexión de un chorro de agua por una barra cargada, fenómeno que ilustra la naturaleza atractiva de la interacción ion dipolo. figura (2).

Esta interacción de atracción es la principal responsable de la disolución de los compuestos iónicos en los solventes polares

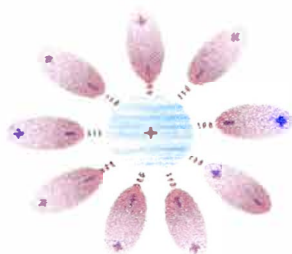


Figura 2: Interacción ion dipolos

En una especie neutra no polar, como el átomo de helio, la densidad de carga electrónica tiene simetría esférica en torno al núcleo. Si un objeto con carga eléctrica como un ión positivo, se acerca a un átomo de helio la interacción electrostática causará una redistribución de la densidad de carga.

1.3.2. Interacción dipolo - dipolo

Las interacciones moleculares del dipolo - dipolo se presentan entre moléculas polares, que poseen momentos dipolares permanentes figura (3). Su origen es electrostático y se puede comprender en términos de la ley de Coulomb. A mayor momento dipolar. La figura muestra la orientación de las moléculas polares en un sólido. En los líquidos las moléculas no están enlazadas tan rígidamente como en un sólido, pero tienden a alinearse de tal manera que en promedio las interacciones atractivas sean máximas.

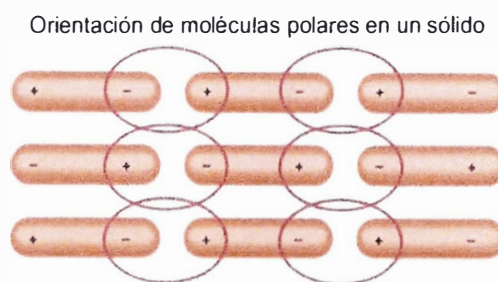


Figura 3: Orientación de moléculas polares en un sólido

Las fuerzas dipolo - dipolo constituyen lo que en química se llaman comúnmente fuerzas de Van der Waals. Estas fuerzas son todas de atracción en la naturaleza y juegan un papel importante en la determinación de las propiedades físicas de las sustancias, tales como los puntos de fusión, punto de ebullición y solubilidades.

La distancia entre moléculas en un sólido o líquido está determinada por el balance entre las fuerzas de Van der Waals de atracción entre los electrones y entre los núcleos. El enlace de hidrógeno es un tipo especial de interacción dipolo - dipolo, los enlaces de hidrógeno constituyen una poderosa fuerza en la determinación de la estructura y propiedades de muchos

compuestos.

El objetivo del presente trabajo es conocer uno de los comportamientos de las distribuciones más comunes que existe en la naturaleza que es el dipolo eléctrico.

El campo eléctrico que crea un dipolo eléctrico cambia las propiedades del medio que lo rodea este adquiere nuevas características, siendo esta distribución de carga una manifestación de las cargas fundamentales del electrón, protón y de su estructura microscópica .

Sabemos que los materiales llamados conductores deben sus propiedades eléctricas a la presencia de cargas libres en su interior y por el contrario los materiales dieléctricos también llamados aislantes o no conductores de la carga eléctrica se encuentran fuertemente ligados dando probablemente distribuciones especiales. La figura (4) ilustra una estructura microscópica de un material polarizado debido a la presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$

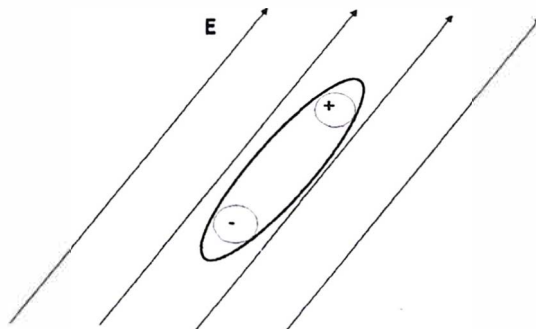


Figura 4: Material polarizado en presencia de un campo eléctrico.

Se observa en la figura (4) un desplazamiento neto de las cargas, pero a pesar de la presencia del campo eléctrico externo la carga neta del dipolo sigue siendo cero.

En la naturaleza, en ausencia de un campo eléctrico, las moléculas pueden ser polares o no polares, en el caso de las moléculas polares llamados así porque estas moléculas tienen un momento dipolar permanente $\vec{P}$ en las que el centro de las cargas positivas no coincide con el de las cargas negativas como por ejemplo lo son las moléculas de agua H_2O o la molécula CO .

En ausencia de campos eléctricos aplicados, los dipolos moleculares contenidos en cada diferencial de volumen están orientados al azar, no existiendo un momento dipolar neto y por tanto ningún campo dipolar resultante.

En presencia de un campo eléctrico figura (5), en cambio, el dieléctrico experimenta el fenómeno de polarización, si las moléculas son polares existirá una fuerza electrostática sobre el dipolo que ejercerá un momento o torque.

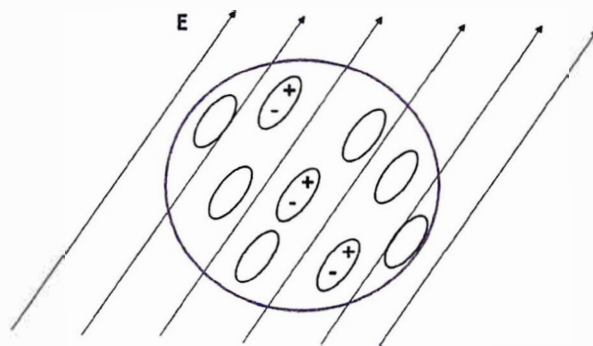


Figura 5: Moléculas polares en presencia de un campo eléctrico.

Sabemos que la fuerza exterior resultante sobre un dipolo en un campo eléctrico homogéneo es la suma de las fuerzas sobre cada una de las cargas, es evidente que la fuerza es nula.

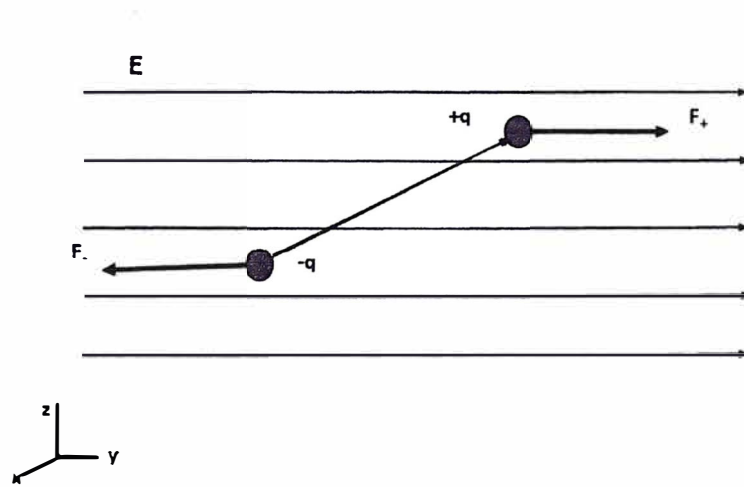


Figura 6: Dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme.

Para el campo homogéneo, la fuerza resultante

$$F_- + F_+ = 0 \quad (1.1)$$

Pero si el campo externo no es uniforme los cálculos son complicados

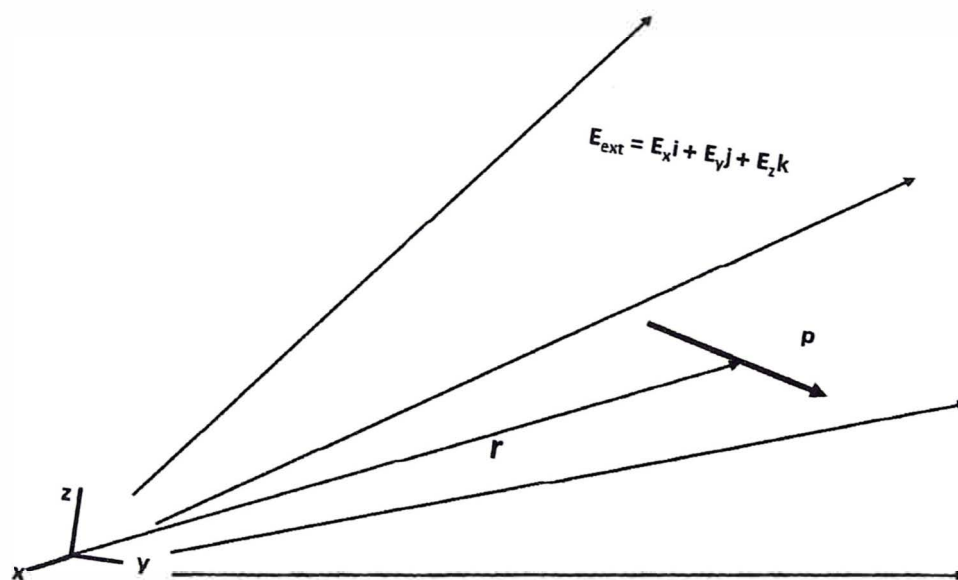


Figura 7: Dipolo eléctrico en un campo eléctrico no uniforme.

Capítulo 2

Movimiento de un dipolo en un campo eléctrico debido a un Dipolo Elemental fijo

2.1. Generalidades

En el presente capítulo se considera el siguiente sistema de cuerpos cargados:

1. Un dipolo elemental fijo de momento dipolar $\vec{p}_1$ que está en el plano YZ (formando un ángulo α con el eje Z) y con centro geométrico que coincide con el origen de coordenadas del sistema de referencia inercial XYZ.

El momento dipolar será representado entonces por $\vec{p}_1$.

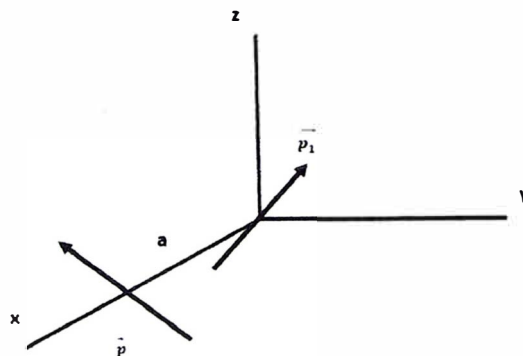


Figura 8: Dipolos

2. Otro dipolo eléctrico móvil $\vec{p}$ que está formado por cargas $-Q$ y Q distribuidas en dos regiones esféricas (con densidad de carga uniforme) Estas esferas tienen la misma masa y radio, estando además unidos por una varilla de masa despreciable de longitud l .
Luego su momento dipolar es:

$$\vec{p} = Q \vec{l} \quad (2.1)$$

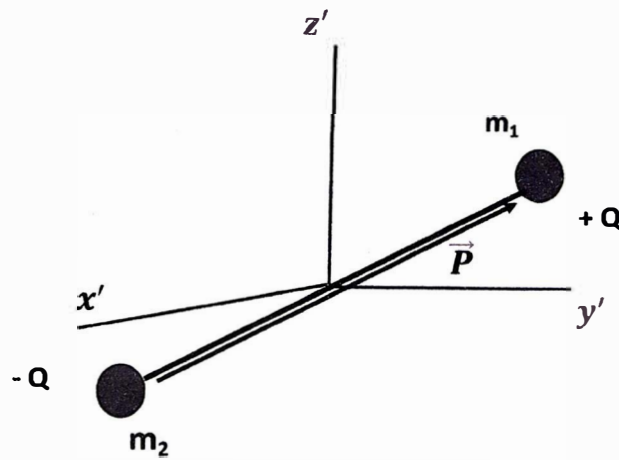


Figura 9: Dipolo Movil

El centro de este dipolo que está en el eje X a una distancia a del origen de coordenadas y como se dijo anteriormente, se mueve como un cuerpo rígido.

Ligado a este cuerpo se tiene un sistema de ejes $X_1X_2X_3$ con origen de coordenadas coincidente con el centro de masa del dipolo móvil tal como se muestra en la Figura (10).

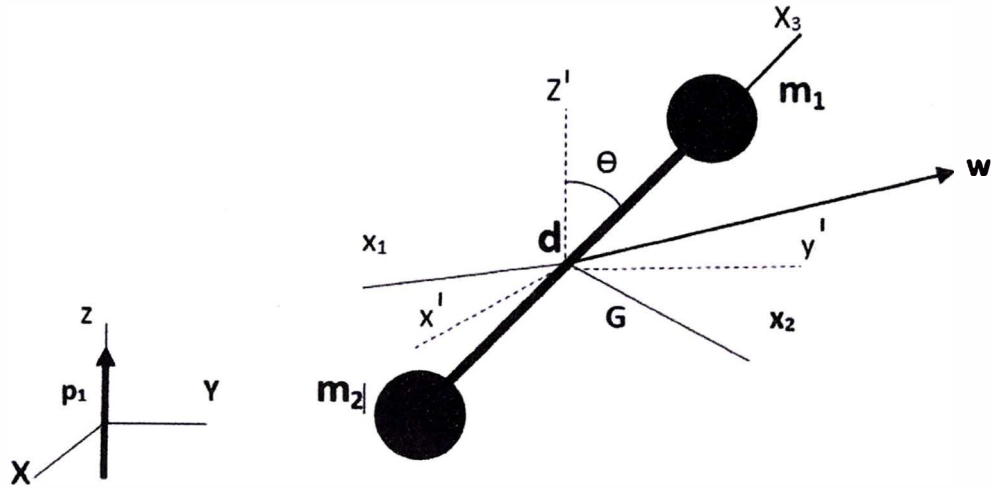


Figura 10: El eje X_3 coincide con el eje de simetría

Tal que el eje X_3 coincide con la recta que pasa por el centro de las esferas. Por lo tanto, los momentos de inercia respecto a rectas perpendiculares (serán denotados por I_1, I_2) al eje de simetría son iguales.

Como sabemos cuando se estudia un cuerpo rígido se considera dos bases de vectores:

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}. \quad (2.2)$$

$$B_L = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}. \quad (2.3)$$

Esta última ligada al cuerpo rígido (figura 10).

Como se dijo denotaremos por I_k como el momento principal de inercia con respecto al eje X_i . Además se va a considerar que:

$$I \equiv I_1 = I_2 \quad (2.4)$$

Con lo mencionado anteriormente tendremos en cuenta los siguientes casos :

1. Dipolo fijo coincidente con el eje Z.
2. Dipolo fijo en el plano YZ.

En todos los casos el campo eléctrico externo que se considera será para puntos lejanos como se sabe la expresión correspondiente para calcular el campo eléctrico es :

$$\vec{E} = k \left(\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_1}{r^3} \right) \quad (2.5)$$

donde $\vec{p}_1$ es el momento dipolar. También consideramos que la energía potencial, ver [7], que tiene un dipolo móvil en el campo eléctrico externo es

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(r) \quad (2.6)$$

Aplicaremos la dinámica de Lagrange para describir el movimiento considerando como coordenadas generalizadas a los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ (figura 11) como se presenta en el libro [15] . Es decir:

$$q_1 = \theta \quad (2.7)$$

$$q_2 = \phi \quad (2.8)$$

$$q_3 = \psi \quad (2.9)$$

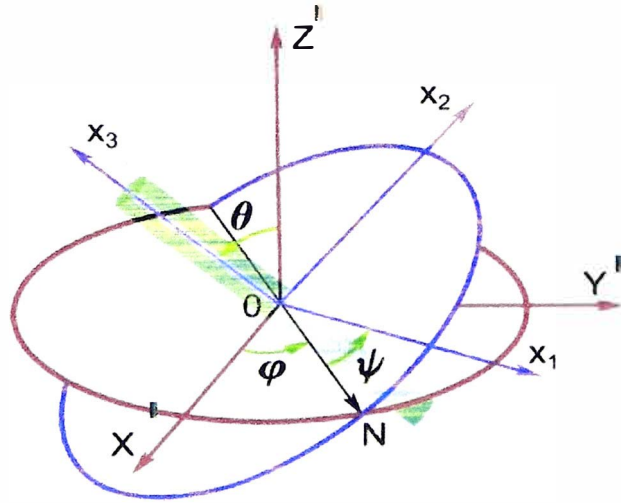


Figura 11: Ángulos de Euler

También consideramos las ecuaciones entre las componentes w_1, w_2 y w_3 de la velocidad angular ver [16] con respecto a la base ligada al dipolo móvil en función de los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ :

$$w_1 = \dot{\phi} \sin\psi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\psi \quad (2.10)$$

$$w_2 = \dot{\phi} \cos\psi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\psi \quad (2.11)$$

$$w_3 = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \quad (2.12)$$

Estas ecuaciones permitirán expresar la energía cinética en función de los ángulos de Euler.

Por otra parte, mencionamos que en esta investigación teórica:

- a) Solo hay fuerzas eléctricas.
- b) No se considera la radiación emitida por las cargas de los dipolos eléctricos cuando están en movimiento porque se consideran que las velocidades no son relativistas.
- c) En todo movimiento la distribución de cargas del dipolo móvil se mantiene constante.
- d) No se conserva el momento angular debido a los torques de las fuerzas eléctricas.
- e) El eje de rotación no necesariamente coincide con el eje de simetría.

El objetivo como se dijo anteriormente es hallar las posiciones de equilibrio respecto para los ángulos de Euler y si es posible obtener una ecuación para la energía mecánica de tal modo que dependerá del ángulo de Euler θ y de la velocidad angular de nutación $\dot{\theta}$.

Es evidente que no se conserva el Momentum Angular debido a las fuerzas eléctricas. El método de análisis es semejante al caso del estudio del movimiento de un sólido simétrico ver [12].

En el apéndice (4) consideramos el campo producido por dos dipolos coincidentes con el eje Y y el eje Z para demostrar que el movimiento es semejante al último caso (2).

2.2. Análisis del movimiento del dipolo considerando el otro dipolo fijo en el eje Z

2.2.1. Potencial Efectivo

Como consideramos que el eje de rotación del dipolo $\vec{p}$ (figura 12) pasa por el centro de masa, tenemos que la energía cinética de rotación del cuerpo rígido es:

$$E_k = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (2.13)$$

de las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) se transforma en :

$$E_k = \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (2.14)$$

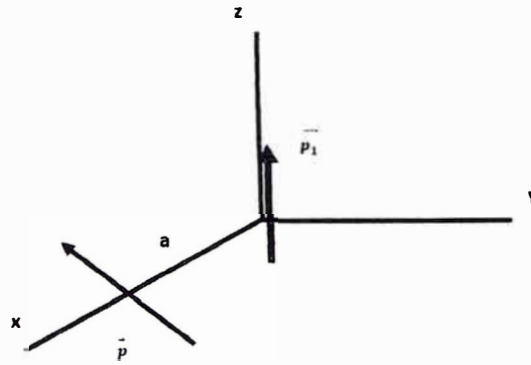


Figura 12: Dipolo en el eje Z

Como el centro de masa del dipolo móvil $\vec{p}$ está en el punto $(a, 0, 0)$ se tiene que la posición del dipolo

$$\vec{r} = a\vec{i} \quad (2.15)$$

además

$$\vec{p}_1 = p_1 \vec{k} \quad (2.16)$$

luego en la ecuación 2.5 obtenemos la intensidad del campo eléctrico:

$$\vec{E} = k \left(-\frac{\vec{p}_1}{a^3} \right) \quad (2.17)$$

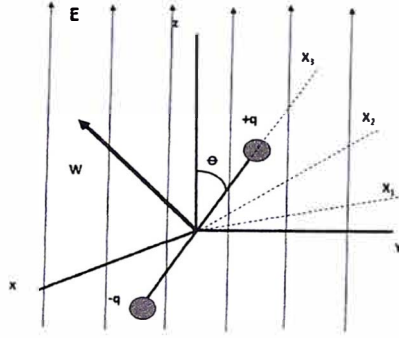


Figura 13: Dipolo eléctrico en un campo eléctrico .

en la ecuación de la energía potencial eléctrica 2.6 obtenemos

$$Ep = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.18)$$

por otra parte sabemos (figura 13) que la relación del vector unitario $\vec{e}_3$ ver [17] (que coincide con el eje de simetría del dipolo móvil) con los vectores unitarios paralelos al sistema de referencia XYZ esta dado por

$$\vec{e}_3 = \sin\theta \sin\phi \vec{i} - \sin\theta \cos\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \quad (2.19)$$

Luego el momento del dipolo móvil (recordar que su centro geométrico está fijo) es:

$$\vec{p} = p(\sin\theta \sin\phi \vec{i} - \sin\theta \cos\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}) \quad (2.20)$$

La energía potencial

$$Ep = \frac{k p p_1 \cos\theta}{a^3} \quad (2.21)$$

por lo tanto, la energía potencial se puede expresar de la forma:

$$Ep = A \cos\theta \quad (2.22)$$

donde

$$A = \frac{k p p_1}{a^3} \quad (2.23)$$

Luego la energía mecánica es:

$$Em = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 + A \cos\theta \quad (2.24)$$

Por otra parte, el Lagrangiano es:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sen^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - A \cos \theta \quad (2.25)$$

observamos que las coordenadas generalizadas ψ y ϕ son cíclicas, luego sus respectivos momentos generalizados p_ψ y p_ϕ son constantes, Aplicando sus definiciones tenemos:

$$p_\psi = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (2.26)$$

$$p_\phi = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta + I \dot{\phi} \sen^2 \theta \quad (2.27)$$

De estas dos últimas ecuaciones se demuestra que: $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ satisfacen

$$\dot{\phi}(t) = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sen^2 \theta} \quad (2.28)$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{p_\psi}{I_3} - \left[\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sen^2 \theta} \right] \cos \theta \quad (2.29)$$

Estas ecuaciones permitirán hallar ϕ y ψ si conocemos $\theta = \theta(t)$.

Luego es fácil demostrar que la ecuación para la energía mecánica se transforman en:

$$E_m = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \sen^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2 I_3} + A \cos \theta \quad (2.30)$$

Observamos que la energía mecánica depende sólo del ángulo θ y su derivada $\dot{\theta}$.

Recordemos que los momentos generalizados p_ϕ y p_ψ se conservan a pesar que depende de los ángulos de euler y sus derivadas. Por otra parte podemos escribir la anterior relación (2.30) como:

$$E_m - \frac{p_\psi^2}{2 I_3} = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \sen^2 \theta} + A \cos \theta. \quad (2.31)$$

definiendo la energía mecánica prima

$$E'_m \equiv E_m - \frac{p_\psi^2}{2 I_3} \quad (2.32)$$

de la ecuación 2.31 y 2.32 hallamos

$$E'_m = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \sen^2 \theta} + A \cos \theta \quad (2.33)$$

es obvio que la magnitud física E'_m se conserva, si definimos como el potencial efectivo:

$$V(\theta) \equiv \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \sen^2 \theta} + A \cos \theta \quad (2.34)$$

la relación 2.33 se transforma en:

$$E'_m = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + V(\theta) \quad (2.35)$$

Expresión que nos servirá luego para realizar una descripción cualitativa del movimiento del dipolo.

2.2.2. Descripción Cualitativa del Movimiento del Dipolo

Como es evidente el término $\frac{I\dot{\theta}^2}{2}$ es mayor o igual que cero luego de la relación (2.35).

$$V(\theta) \leq E'_m. \quad (2.36)$$

De la inecuación última y la gráfica de la función $V(\theta)$ ver figura (14) que es parecido al potencial efectivo de un cuerpo rigido simétrico. [12]. se concluye que varias propiedades que suceden en el movimiento del dipolo son semejantes al movimiento de un cuerpo rígido simétrico.

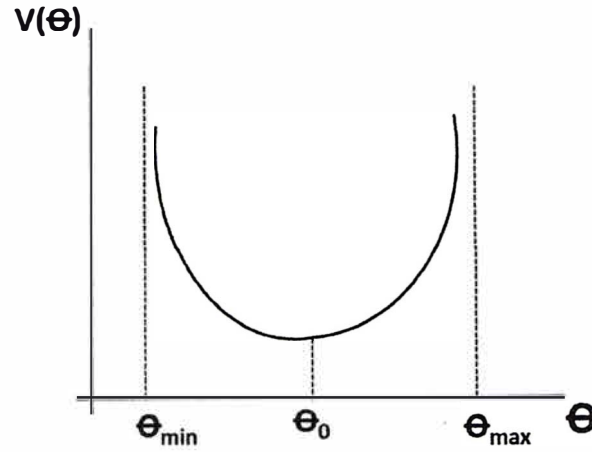


Figura 14: Potencial Electrico $V(\theta)$

Una de las más importantes propiedades es que el ángulo θ está acotado, es decir, existe θ_{min} y θ_{max} tal que:

$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}. \quad (2.37)$$

De esta inecuación se deduce que hay un mínimo en la función potencial efectivo. Representemos el valor del ángulo θ_{crit} .

Un caso particular es cuando se cumple

$$V_{min}(\theta) = E'_m \quad (2.38)$$

Por lo tanto se cumple que

$$\theta_{min} = \theta_{max} = \theta_{crit} \quad (2.39)$$

luego también encontramos un movimiento estacionario o de precesión uniforme. (velocidad angular de precesión $\dot{\phi}(t) = \text{constante}$ ver figura 15)

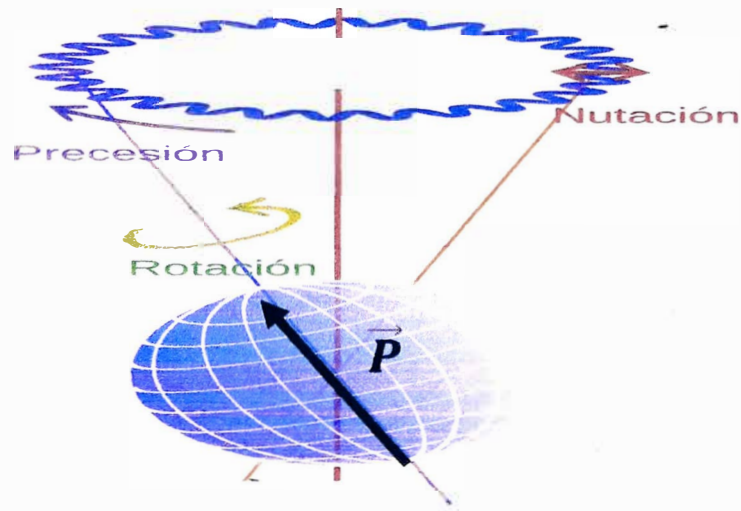


Figura 15: Movimiento de Precesión

En este caso de las ecuaciones 2.28 y 2.29 se consigue que

$$\dot{\phi}(t) = \text{constante} \quad (2.40)$$

$$\dot{\psi}(t) = \text{constante} \quad (2.41)$$

o bien

$$\phi(t) = \dot{\phi}(0) t + \phi(0) \quad (2.42)$$

$$\psi(t) = \dot{\psi}(0) t + \psi(0) \quad (2.43)$$

Para calcular θ_{min} y θ_{max} en cualquier caso se considera la relación:

$$E'_m = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I \sin^2\theta} + A \cos\theta \quad (2.44)$$

esta se transforma en una ecuación cúbica. Pero debemos hallar previamente las constantes de movimiento p_ϕ , p_ψ , E'_m .

La constante E'_m se puede obtener usando la ecuación

$$Em' = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + A \cos \theta \quad (2.45)$$

Este procedimiento de hallar los ángulos máximos y mínimos es semejante cuando se estudia el movimiento de un cuerpo rígido simétrico.

2.2.3. Relación para las condiciones iniciales del movimiento estacionario.

Para poder obtener las ecuaciones de movimiento aplicamos las ecuaciones de Lagrange al lagrangiano:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - A \cos \theta \quad (2.46)$$

De las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.47)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange para la variable θ , ϕ , ψ reemplazando el Lagrangiano (2.46) en la ecuación (2.47)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \psi} \quad (2.50)$$

Obtenemos:

$$I\ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + A \sin \theta = 0 \quad (2.51)$$

$$\ddot{\phi} (I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\theta (I - I_3) - I_3 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta = 0 \quad (2.52)$$

$$\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta = 0 \quad (2.53)$$

que pueden resolverse numéricamente.

Un cálculo interesante es hallar que ecuaciones cumplen las condiciones iniciales para un movimiento de precesión uniforme (es decir θ es constante y los otros ángulos son proporcionales al tiempo). Se consigue de la primera ecuación diferencial:

$$I_3 \dot{\phi}(0) \dot{\psi}(0) + (I_3 - I) \dot{\phi}^2(0) \cos \theta_o + A = 0 \quad (2.54)$$

Las condiciones iniciales que debe de cumplir la ecuación anterior para un movimiento de precesión o movimiento estacionario es decir

$$\theta(t) = \theta(0) \quad (2.55)$$

$$\phi(t) = \dot{\phi}(0)t + \phi(0) \quad (2.56)$$

$$\psi(t) = \dot{\psi}(0)t + \psi(0) \quad (2.57)$$

2.3. Movimiento en un campo eléctrico debido a un Dipolo Elemental fijo ubicado en el plano YZ.

Ahora consideremos el caso particular que el dipolo fijo está en el plano YZ tal que:

$$u_x = 0, u_y = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.58)$$

Entonces el vector $\vec{p}_1$ esta dado por:

$$\vec{p}_1 = \frac{p_1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k}) \quad (2.59)$$

Y el momento dipolar $\vec{p}$ de la ecuación 2.20 esta dado por:

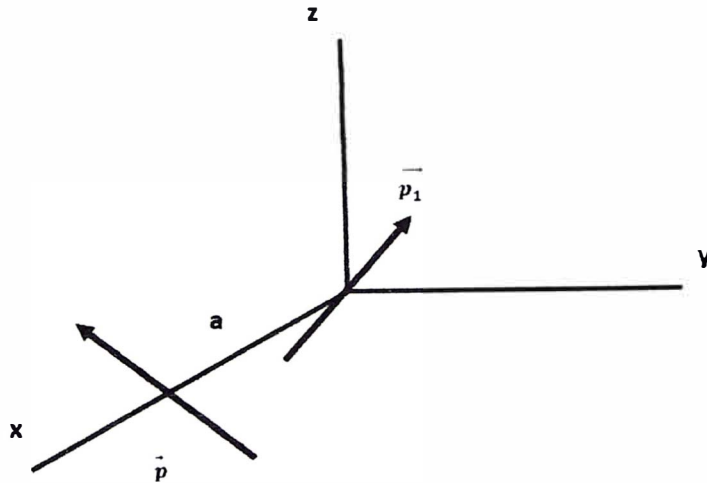


Figura 16: Dipolo elemental fijo en el plano YZ

$$\vec{p} = p(\sin\theta \sin\phi \vec{i} - \sin\theta \cos\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}) \quad (2.60)$$

De la ecuación 2.6 procediendo al subcapítulo anterior se obtiene la energía potencial para este caso.

$$E_p = \frac{k p p_1 (-\sin\theta \cos\phi + \cos\theta)}{a^3 \sqrt{2}} \quad (2.61)$$

por lo tanto, la energía potencial se puede expresar de la forma:

$$E_p = A (-\sin\theta \cos\phi + \cos\theta) \quad (2.62)$$

donde

$$A = \frac{k p p_1}{a^3 \sqrt{2}} \quad (2.63)$$

La energía cinética E_k es como en el subcapítulo anterior

Luego la energía mecánica es:

$$E_m = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 + A (-\sin\theta \cos\phi + \cos\theta) \quad (2.64)$$

Por otra parte, el lagrangiano es:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 - A (-\sin\theta \cos\phi + \cos\theta) \quad (2.65)$$

Observamos que solo la coordenada generalizada ψ es cíclica, luego su momento generalizado p_ψ , es constante, aplicando la definición del momentum generalizado $p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$ tenemos

$$p_\psi = I_3(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) \quad (2.66)$$

por lo tanto

$$(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) = \frac{p_\psi}{I_3} \quad (2.67)$$

De la relación (2.12) y de esta última ecuación la componente de la velocidad angular w_3 es también una constante del movimiento, y será usada para mostrar la validez de la presente investigación. Como la otra coordenada p_ϕ no es cíclica, no podemos repetir el análisis anterior que se hizo cuando el dipolo fijo estaba en el eje Z. Sin embargo, aún podemos hacer un análisis cualitativo del movimiento, mediante la última ecuación podemos transformar la ecuación de la energía mecánica

$$E_m = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 + A (-\sin\theta \cos\phi + \cos\theta) \quad (2.68)$$

en la siguiente ecuación

$$E_m = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + A (-\sin\theta \cos\phi + \cos\theta) \quad (2.69)$$

luego

$$E_m - \frac{p_\psi^2}{2I_3} = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + A(-\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \quad (2.70)$$

definiendo la energía mecánica prima

$$E'_m \equiv E_m - \frac{p_\psi^2}{2I_3} \quad (2.71)$$

es obvio que la magnitud física E'_m ver ecuación (2.71) se conserva, si representamos la energía potencial como:

$$Ep(\theta, \phi) \equiv A(-\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \quad (2.72)$$

tenemos

$$E'_m = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + Ep(\theta, \phi) \quad (2.73)$$

de la ecuación 2.70 y 2.71 hallamos

$$E'_m = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + A(-\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \quad (2.74)$$

2.3.1. Puntos de equilibrio del Movimiento del Dipolo Móvil

Como es evidente el término:

$$\frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \quad (2.75)$$

es mayor o igual que cero luego de la relación 2.73

$$Ep(\theta, \phi) \leq E'_m \quad (2.76)$$

luego el movimiento es tal que la energía potencial (que es una función de dos variables) es menor o igual que la energía prima.

Ahora usaremos un análisis semejante al que se hizo para hallar los puntos de equilibrio del movimiento del oscilador anisotrópico (ver apéndice II), que es calcular los valores críticos de la energía potencial, luego sí se cumple que la energía mecánica del oscilador $E_m = Ep_{min}$ entonces la partícula esta en equilibrio estable (por ser mínimo la función energía potencial). En general si una energía potencial $Ep(x, y)$ tiene máximos y mínimos y además

$$E_m = Ep_{max} \quad (2.77)$$

ó

$$E_m = Ep_{min} \quad (2.78)$$

estará la partícula en equilibrio, es decir los puntos críticos serán puntos de equilibrio, por lo tanto en nuestro caso, para calcular estos puntos de equilibrio determinamos los puntos críticos de la función $Ep(\theta, \phi)$, tomando la gradiente de la energía potencial e igualando a cero, es decir

$$\frac{\partial Ep}{\partial \theta} = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial Ep}{\partial \phi} = 0 \quad (2.80)$$

de donde

$$\cos\theta \cos\phi + \sin\theta = 0 \quad (2.81)$$

$$\sin\theta \sin\phi = 0 \quad (2.82)$$

Recordar que estamos considerando el caso particular que el dipolo fijo está en el plano YZ tal que

como el ángulo de Euler θ es diferente de cero 0 y de π tenemos

$$\sin\phi = 0 \quad (2.83)$$

luego

$$\phi = 0, \pi \quad (2.84)$$

Consideremos el primer caso: $\phi = 0$ de la ecuación 2.81 se consigue

$$\cos\theta + \sin\theta = 0 \quad (2.85)$$

luego

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \quad (2.86)$$

Aplicando la teoría de máximos y mínimos de funciones de dos variables ver[18] debemos hallar las segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta^2} = A(\sin\theta \cos\phi - \cos\theta) \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \phi^2} = A(\sin\theta \cos\phi) \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta \partial \phi} = A \cos\theta \sin\phi \quad (2.89)$$

Para el primer valor crítico se halla que al evaluar en $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\phi = 0$ la función

$$F(\theta, \phi) = \frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta^2} \frac{\partial Ep^2}{\partial \phi^2} - \left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta \partial \phi} \right)^2 \quad (2.90)$$

es tal que

$$F\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) = A^2 \quad (2.91)$$

es decir es positivo luego como la función

$$G(\theta, \phi) = \frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta^2} \quad (2.92)$$

al ser evaluada

$$G\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (2.93)$$

Como es un número positivo usando la teoría de máximos o mínimos de una función de dos variables hay un mínimo luego estos puntos son de equilibrio estable.

Considerando el otro punto crítico $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \pi$ tenemos que

$$F\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) = A^2 \quad (2.94)$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) = -\frac{A}{\sqrt{2}} \quad (2.95)$$

Como es un número negativo usando la teoría mencionada hay un máximo, luego estos puntos son de equilibrio inestable.

En general cuando está el sistema en posición estable o inestable, podemos decir que tiene un movimiento estacionario porque los primeros ángulos de Euler son constantes y de la ecuación 2.57 el otro ángulo ψ es proporcional al tiempo, es decir, una posible solución es:

$$\theta(t) = \theta(0) \quad (2.96)$$

$$\phi(t) = \phi(0) \quad (2.97)$$

$$\psi(t) = \dot{\psi}(0)t + \psi(0) \quad (2.98)$$

$$\dot{\theta}(t) = 0 \quad (2.99)$$

$$\dot{\phi}(t) = 0 \quad (2.100)$$

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}(0) \quad (2.101)$$

El caso más interesante es cuando

$$E'_m \approx Ep_{min} \quad (2.102)$$

Es evidente que los valores críticos de las dos primeras coordenadas generalizadas deben cumplir

$$\theta(t) \approx \theta(0) \quad (2.103)$$

$$\phi(t) \approx \phi(0) \quad (2.104)$$

Si

$$E'_m \approx Ep_{max} \quad (2.105)$$

es evidente que $\theta(t)$ y $\phi(t)$ se aleja de las condiciones iniciales.

2.3.2. Demostración de la existencia del movimiento estacionario usando las ecuaciones de Lagrange.

Usamos las ecuaciones de Lagrange y el Lagrangiano del dipolo eléctrico móvil:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - A(-\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \quad (2.106)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange tenemos:

$$I\ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - A(-\cos \theta \cos \phi - \sin \theta) = 0 \quad (2.107)$$

$$\ddot{\phi}(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\theta (I - I_3) - I_3 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta - A(\sin \theta \sin \phi) = 0 \quad (2.108)$$

$$\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta = 0 \quad (2.109)$$

que pueden resolverse numéricamente.

Reemplazando las soluciones estacionarias en estas ecuaciones se consigue

$$\cos \theta \cos \phi + \sin \theta = 0 \quad (2.110)$$

$$\sin \theta \sin \phi = 0 \quad (2.111)$$

Es decir, para que exista movimiento estacionario se cumple

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \phi = 0 \quad (2.112)$$

o

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \phi = \pi \quad (2.113)$$

Este resultado es consistente con el método de hallar la gradiente de la energía potencial e igualar a cero. En ambos métodos se tiene que el ángulo ψ no interviene, es decir para que este en equilibrio el dipolo móvil, este ángulo queda indeterminado para una posición de equilibrio.

Para ilustrar estos resultados debemos resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento y estas ecuaciones se consiguen al despejar las segundas derivadas de las ecuaciones (2.107), (2.108) y (2.109) obteniendo

$$\ddot{\theta} = \frac{(I - I_3) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta}{I} + \frac{A(\sin(\theta) + \cos(\theta)\cos(\phi))}{I_1} \quad (2.114)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(-2I + I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta}}{I \sin \theta} + \frac{A \sin(\phi)}{I \sin(\theta)} \quad (2.115)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I \dot{\phi} \dot{\theta} \sin^2 \theta - (-2I + I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos^2 \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta}{I \sin \theta} + \frac{A \sin(\phi) \cos \theta}{I \sin(\theta)} \quad (2.116)$$

2.4. Solución numérica para el dipolo fijo en el plano YZ .

Para resolver las ecuaciones diferenciales 2.114, 2.115, y 2.116 se despeja las segundas derivadas de los ángulos de Euler y haciendo el cambio de variable:

$$x_1 = \theta \quad (2.117)$$

$$x_2 = \phi \quad (2.118)$$

$$x_3 = \psi \quad (2.119)$$

$$x_4 = \dot{\theta} \quad (2.120)$$

$$x_5 = \dot{\phi} \quad (2.121)$$

$$x_6 = \dot{\psi} \quad (2.122)$$

conseguimos 6 ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_4 \quad (2.123)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \quad (2.124)$$

$$\dot{x}_3 = x_6 \quad (2.125)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(\alpha - 1)x_5^2 \cos(x_1) \sin(x_1) - x_5 x_6 \sin(x_1)}{\alpha} + \frac{A(\sin(x_1) + \cos(x_1) \cos(x_2))}{I_1} \quad (2.126)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{\alpha x_4 x_6 + (-2\alpha + 1)x_4 x_5 \cos(x_1)}{\alpha \sin(x_1)} - \frac{A}{I_1 \sin(x_1)} (\sin(x_2)) \quad (2.127)$$

$$\dot{x}_6 = x_4 x_6 \sin(x_1) - \cos(x_1) \frac{(x_4 x_6 + (-2\alpha + 1)x_4 x_5 \cos(x_1))}{\alpha \sin(x_1)} + \frac{A \cos(x_1) \sin(x_2)}{I_1 \sin(x_1)} \quad (2.128)$$

donde

$$\alpha = \frac{I}{I_3} \quad (2.129)$$

Las ecuaciones diferenciales se resolvieron usando el método de Runge-Kutta de orden 4 con un paso de $h = 10^{-3}$ y mediante el programa delphy para efectuar los cálculos numéricos se considera una molécula que se comporta como un dipolo eléctrico. Según las referencias el valor de los momentos dipolares son del orden 10^{-30} C.m entonces consideramos una distancia entre los centros de los dipolos fijos y el móvil del orden de $0,1mm$ y recordando el valor de la constante eléctrica, de la ecuación (2.63) se tiene

$$A = 10^{-39} J \quad (2.130)$$

el momento de inercia de la molécula de agua se conoce y lo usaremos para tener un orden del momento de inercia teniendo un valor aproximado de

$$I = 10^{-37} kg.m^2 \quad (2.131)$$

Si consideramos las moléculas como dos esferas tangentes se demuestra facilmente

$$\alpha = 0,28 \quad (2.132)$$

El intervalo de tiempo es de 0 a 1000 segundos y las unidades están en el sistema internacional y la mayoría de los gráficos mostrados (que se halla con el paquete Origin 2022) corresponde a la función θ y ϕ .

El primer conjunto de 6 gráficos se obtiene considerando las condiciones iniciales (que se puede considerar como una perturbación pequeña de los valores de θ y ϕ en la posición de equilibrio). a la última condición $x_6(0)$ se le dio tres valores distintos, es decir $x_6(0) = 5,730 \text{ grados/s}$.

1. CASO I .

Primer conjunto de datos					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$	$x_6(0)$
136^0	0^0	0^0	0 grados /s	0 grados /s	$5,730 \text{ grados /s}$

Cuadro 1: Tabla de condiciones iniciales

que le corresponde los tres primeros graficos.

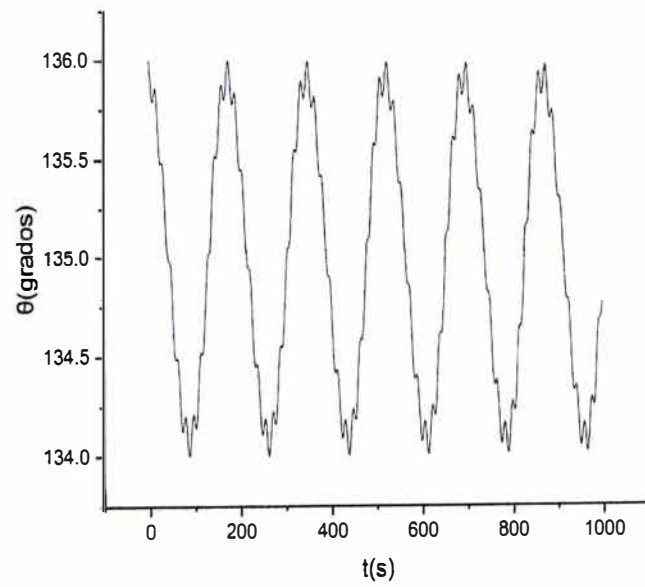


Figura 17: Muestra las oscilaciones del ángulo θ

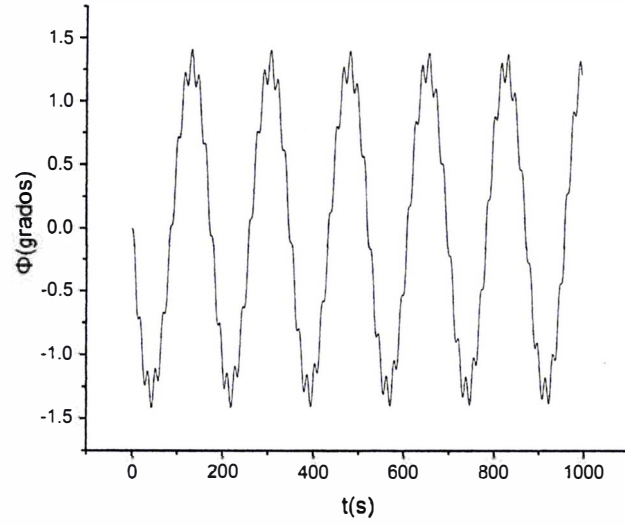


Figura 18: Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ

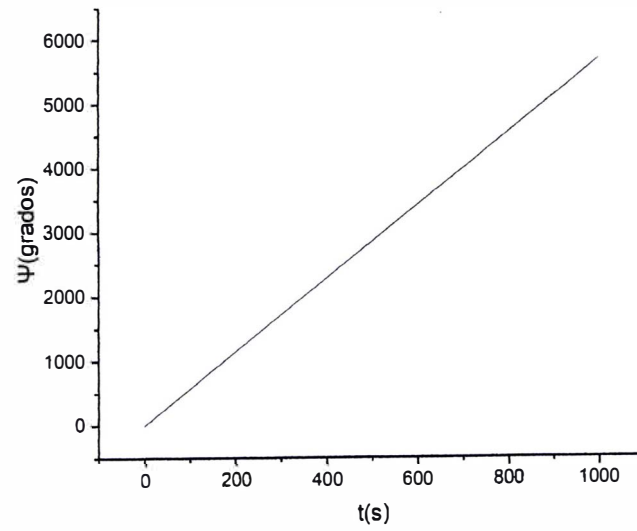


Figura 19: Muestra que la rapidez de ψ permanece constante para el primer conjunto de datos

2. CASO II.

Segundo conjunto de datos					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$	$x_6(0)$
136^0	0^0	0^0	0 grados/s	0 grados/s	$8,59 \text{ grados/s}$

Cuadro 2: Tabla de condiciones iniciales

que le corresponde los gráficos que se muestran.

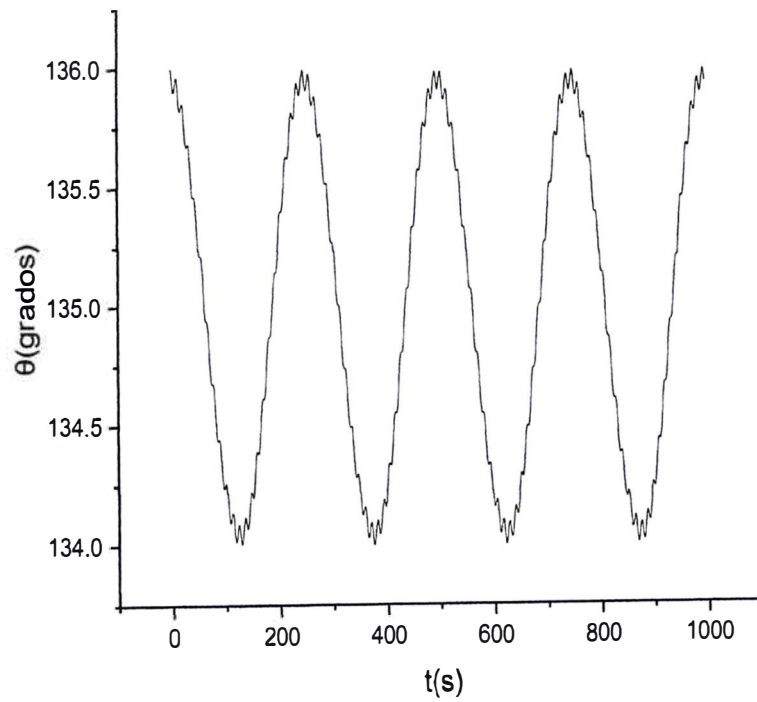


Figura 20: Muestra las oscilaciones del ángulo θ para el segundo conjunto de datos

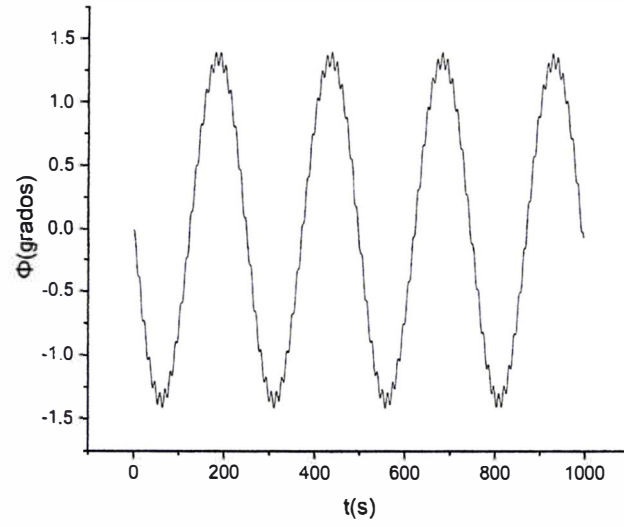


Figura 21: Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ para el segundo conjunto de datos

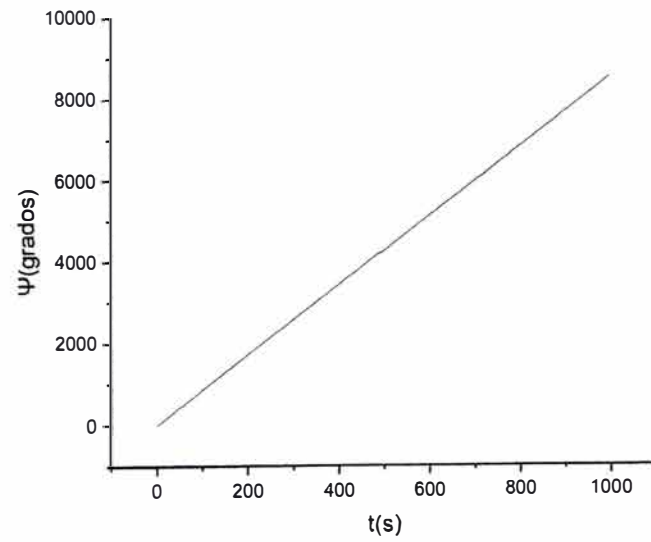


Figura 22: Muestra que la rapidez de ψ permanece constante para el segundo conjunto de datos.

3. CASO III.

Tercer conjunto de datos					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$	$x_6(0)$
136^0	0^0	0^0	0 grados/s	0 grados/s	$10,31 \text{ grados/s}$

Cuadro 3: Tabla de condiciones iniciales

Que le corresponden los gráficos siguientes :

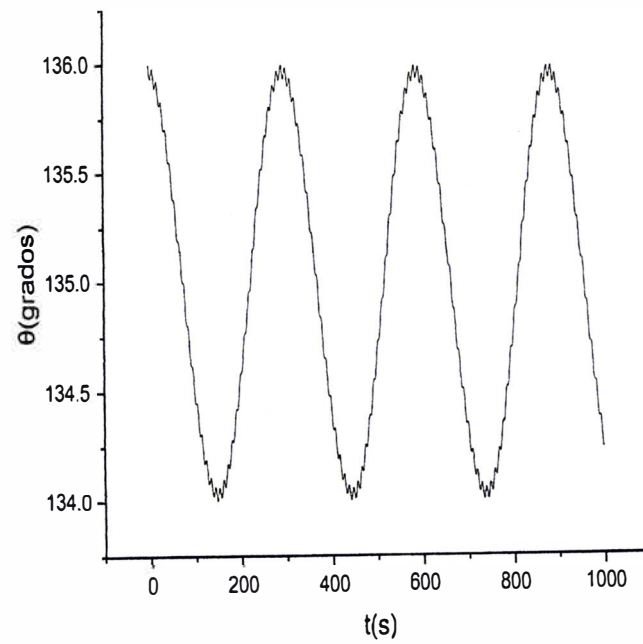


Figura 23: Muestra las oscilaciones del ángulo θ para el tercer conjunto de datos

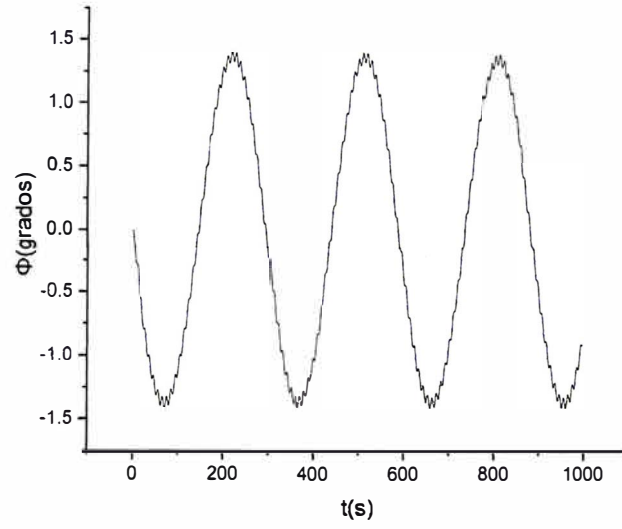


Figura 24: Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ para el tercer conjunto de datos

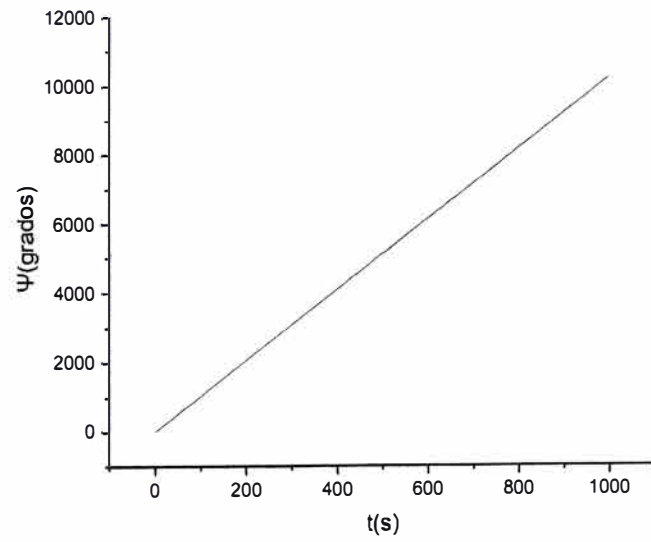


Figura 25: Muestra que la rapidez de ψ permanece constante para el tercer conjunto de datos.

En todos estos gráficos mostramos los valores de los dos primeros ángulos de Euler que

oscilan alrededor de la posición de equilibrio.

4. CASO IV.

A continuación mostramos una simulación con las siguientes condiciones iniciales:

Cuarto conjunto de datos					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$	$x_6(0)$
136^0	0^0	0^0	0 grados/s	0 grados/s	$13,1 \text{ grados/s}$

Cuadro 4: Tabla de condiciones iniciales

En los graficos siguientes se muestran que hay oscilaciones sólo para θ y para ϕ .

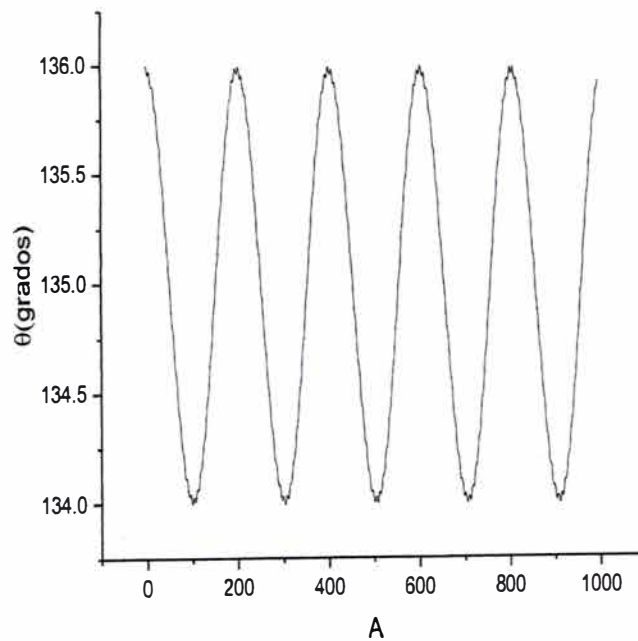


Figura 26: Muestra las oscilaciones del ángulo θ para el cuarto conjunto de datos

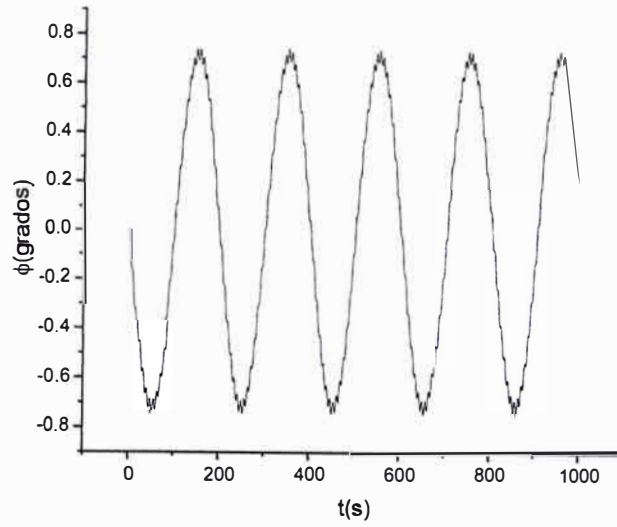


Figura 27: Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ para el cuarto conjunto de datos

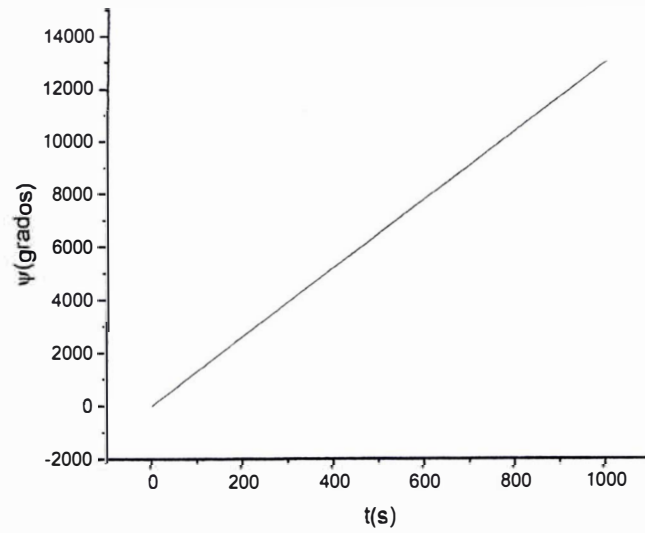


Figura 28: Muestra que la rapidez de ψ permanece constante para el cuarto conjunto de datos.

2.5. Análisis de la estabilidad de una solución numérica.

Se hizo otra solución para efectuar una introducción al estudio de la estabilidad de las soluciones numéricas (perturbando las condiciones iniciales).

Un método para estudiar la estabilidad de una solución numérica como la anterior es hallar otra solución modificando ('perturbando') las condiciones iniciales con valores aproximados, y hallar el incremento de una variable generalizada por ejemplo la variación del ángulo θ graficando la función:

$$D = \ln(|\Delta(\theta)|) \quad (2.133)$$

Según el criterio mencionado en el libro Mecánica [19] si la función D es

1. Negativa, la solución numérica es estable.
2. Positiva, la solución numérica es inestable si es mucho mayor que 1 se dice que es caótica la solución.

Para hallar esta función D se considera las últimas condiciones (caso IV) y las nuevas soluciones que se hallan considerando.

Condiciones iniciales					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$\dot{x}_1(0)$	$\dot{x}_2(0)$	$\dot{x}_3(0)$
136,1°	0°	0°	0 grados/s	0 grados/s	13,2 rad/s

Cuadro 5: Tabla de condiciones iniciales

Al graficar la función D (figura 29) observamos para ciertos intervalos que la función es positiva, luego la solución numérica es inestable para las condiciones iniciales consideradas.

Para estimar el error en el método numérico se calcula el momento generalizado correspondiente al ángulo ψ que se debe de conservar y al hallar numéricamente el error es aceptable (ver apendice VII). Este mismo resultado se obtuvo en todas las simulaciones que se hizo en este presente trabajo.

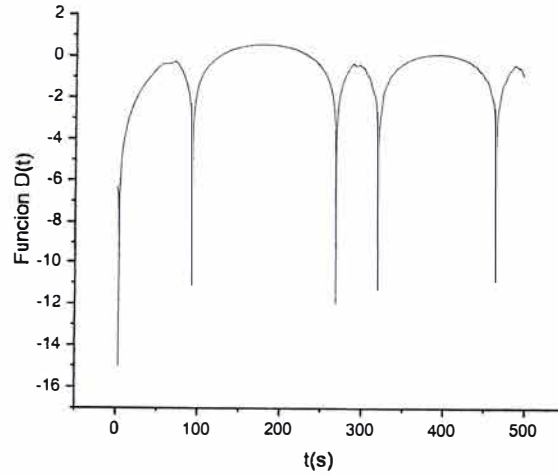


Figura 29: Grafico de la perturbación D para el cuarto conjunto de datos.

2.6. Observaciones de los gráficos.

Se tiene que:

- a) Si las condiciones iniciales son próximas a las condiciones de equilibrio estable de los ángulos θ y ϕ , estas funciones del tiempo oscilan alrededor de un punto de equilibrio. Estas observaciones se consiguen de las Figuras 17, 18 y 19 .
- b) Cuando la velocidad angular inicial $\dot{\psi}$ aumenta la variación de los ángulos θ y ϕ , se hace mas regular.
- c) Observamos que las soluciones numéricas analizadas en la pagina (23) son estables, estos cálculos son una introducción a la estabilidad de Lyapunov de soluciones numéricas con el que se encontrara soluciones caóticas. En el **apendice (VI)** se usa la teoría de Lyapunov y linealizando los segundos miembros de las ecuaciones se comprueba los valores estacionarios estables e inestables que se hallaron.
- d) De los gráficos que se muestran en las Figuras 17-20-23-26 se observan que la función $\theta(t)$ son oscilantes que aproximadamente se repiten en un intervalo del orden de 200 s pero no podemos afirmar que son funciones periodicas.

- e) De la observación anterior se puede decir lo mismo para los gráficos de las Figuras 18-21-24-27.

2.7. Conclusiones.

- a) Cuando el dipolo fijo coincide con el Eje Z, el movimiento del dipolo real es igual al de un sólido simétrico, por lo tanto, puede tener movimiento de precesión uniforme.
- b) Cuando el dipolo fijo está en cualquier dirección en el espacio, la coordenada generalizada ϕ no es cíclica y no podemos aplicar el mismo procedimiento que se hace cuando se estudia a un sólido simétrico.
- c) Para la posición particular del dipolo fijo tenemos dos posiciones de equilibrio uno estable y el otro inestable estas propiedades se comprueban al efectuar las simulaciones numéricas, observando que si modificamos ligeramente los valores del ángulo θ , se tiene que los dos primeros ángulos oscilan alrededor de los valores de equilibrio.
- d) Existe una solución numérica que es inestable cuando el tiempo se acerca a los 200 segundos, pero no podemos mencionar aún de caos.
- e) Que se puede obtener propiedades del movimiento de un sistema mecánico aun sin usar el concepto de potencial efectivo. Se deja para futuras investigaciones linealizar las ecuaciones de movimiento y estudiar el movimiento para cualquier orientación del dipolo fijo.

Capítulo 3

Movimiento de un dipolo en un campo debido a dos dipolos fijos ubicados en el plano YZ

3.1. Generalidades

En el presente capítulo se considera el siguiente sistema de cuerpos cargados:

1. Dos dipolos elementales fijos que están en el plano YZ y con centro geométrico que coincide con el origen de coordenadas del sistema de referencia inercial XYZ.

El momento dipolar será representado por $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ (figura 30).

2. Otro dipolo eléctrico móvil $\vec{p}$ que está formado por cargas $-Q$ y Q distribuidas en dos regiones esféricas (con densidad de carga uniforme) como en el capítulo II, estas esferas tienen la misma masa y radio, estando unidos por una varilla de masa despreciable de longitud l .

Luego su momento dipolar es

$$\vec{p} = Q\vec{l} \quad (3.1)$$

También en este capítulo el centro de este dipolo tiene coordenadas $(a, 0, 0)$ y se mueve como un cuerpo rígido.

Ligado a este cuerpo se tiene un sistema de ejes $X_1X_2X_3$ con origen de coordenadas coincidente con el centro de masa del dipolo móvil (figura 10).

Aplicaremos la dinámica de Lagrange para describir el movimiento donde las coordenadas generalizadas son :

$$q_1 = \theta \quad (3.2)$$

$$q_2 = \phi \quad (3.3)$$

$$q_3 = \psi \quad (3.4)$$

Como se afirmó anteriormente, el eje X_3 coincide con la recta que pasa por el eje del dipolo . Por lo tanto, los momentos de inercia respecto a rectas perpendiculares serán denotados por I_1, I_2 cumpliendo

$$I_1 = I_2 \quad (3.5)$$

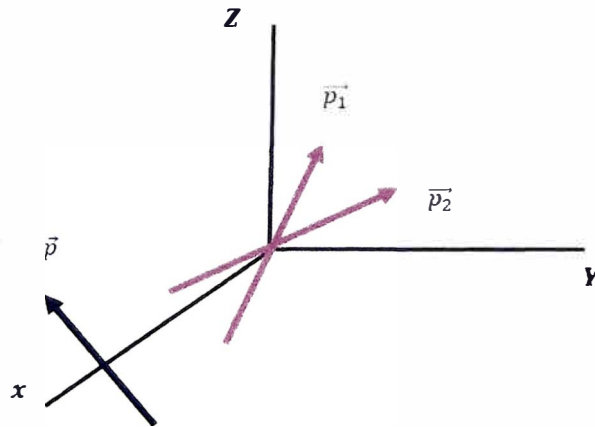


Figura 30: Dipolos en el plano YZ

En el apéndice (IV) consideramos el campo producido por dos dipolos coincidentes con el eje Y y el eje Z respectivamente para demostrar que el movimiento es semejante a este dipolo estudiado en este capítulo.

En todos los casos el campo eléctrico externo que se considera será para puntos lejanos y como se sabe la expresión correspondiente para calcular el campo eléctrico es :

$$\vec{E} = k \left(\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_1}{r^3} \right) \quad (3.6)$$

donde $\vec{p}_1$ es el momento dipolar. También consideramos, que la energía potencial es

$$Ep = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (3.7)$$

También aplicaremos las ecuaciones de las componentes de la velocidad angular con respecto a la base ligada al dipolo móvil y los ángulos de Euler. Teniendo en cuenta las consideraciones de la pagina (13)

Es evidente que no se conserva el momentum angular debido a las fuerzas eléctricas. El método de análisis es semejante al segundo caso del capitulo anterior.

3.2. Potencial Efectivo

Como consideramos que el eje de rotación pasa por el centro de masa, tenemos que la energía cinética del cuerpo rígido es:

$$E_k = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (3.8)$$

que se transforma en :

$$E_k = \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (3.9)$$

Usando las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12)

Como el centro de masa del dipolo móvil está en el punto $(a, 0, 0)$ se tiene que la posición esta dado por:

$$\vec{r} = a \vec{i} \quad (3.10)$$

además para los dos dipolos $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ que se encuentran fijos en el plano YZ tenemos:

que el dipolo $\vec{p}_1$ forma un ángulo α con el eje Y y $\vec{p}_2$ forma un ángulo β con el eje Y podemos expresar los momentos dipolares respectivamente como :

$$\vec{p}_1 = lQ \vec{u}_1 = lQ [\cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{k}] \quad (3.11)$$

$$\vec{p}_2 = lQ \vec{u}_2 = lQ [\cos \beta \vec{j} + \sin \beta \vec{k}] \quad (3.12)$$

Si determinamos el campo eléctrico total debido a los dipolos $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ en la posición $\vec{r}$ tenemos

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (3.13)$$

$$\vec{E} = k \left(\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_1}{r^3} \right) + k \left(\frac{3(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_2}{r^3} \right) \quad (3.14)$$

como $\vec{r}$ es perpendicular a los dipolos $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ tenemos

$$\vec{E} = k \left(-\frac{\vec{p}_1}{a^3} \right) + k \left(-\frac{\vec{p}_2}{a^3} \right) \quad (3.15)$$

$$\vec{E} = -\frac{k}{a^3} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \quad (3.16)$$

De las ecuaciones 3.11 y 3.12 podemos expresar el campo eléctrico resultante de la forma

$$\vec{E} = -\frac{klQ}{a^3} [(\cos \alpha + \cos \beta) \vec{j} + (\sin \alpha + \sin \beta) \vec{k}] \quad (3.17)$$

Y el momento dipolar $\vec{p}$ de la ecuación (2.20) esta dado por:

$$\vec{p} = p (\sin \theta \sin \phi \vec{i} - \sin \theta \cos \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) \quad (3.18)$$

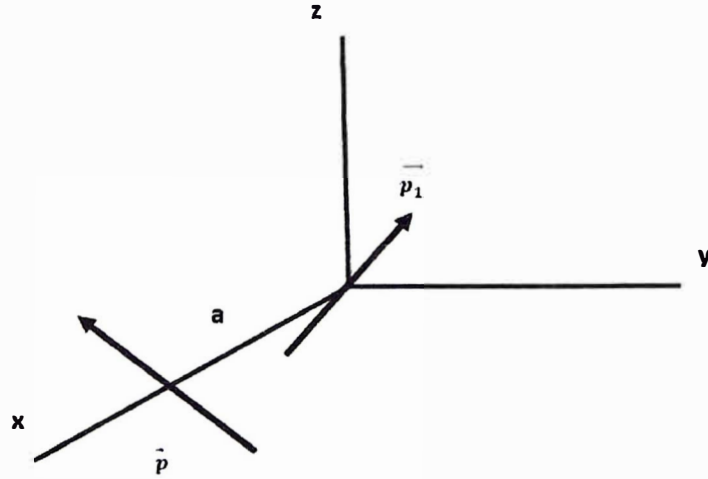


Figura 31: Dipolo elemental fijo en el plano YZ

Reemplazando en la ecuación (2.9) es decir

$$Ep = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (3.19)$$

$$Ep = -(p (\sin \theta \sin \phi \vec{i} - \sin \theta \cos \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k})) \cdot \left(-\frac{klQ}{a^3} [(\cos \alpha + \cos \beta) \vec{j} + (\sin \alpha + \sin \beta) \vec{k}] \right) \quad (3.20)$$

$$Ep = \frac{klQp}{a^3} [(\cos \alpha + \cos \beta)(-\sin \theta \cos \phi) + (\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \theta)] \quad (3.21)$$

Haciendo

$$A = (\cos \alpha + \cos \beta) \quad (3.22)$$

$$B = (\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta) \quad (3.23)$$

$$M = \frac{klQp}{a^3} \quad (3.24)$$

La energía potencial es

$$Ep = M(-A \sin \theta \cos \phi + B \cos \theta) \quad (3.25)$$

Luego el Lagrangiano

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - M(-A \sin \theta \cos \phi + B \cos \theta) \quad (3.26)$$

Para simplificar los calculos supongamos que A, B son positivos.

3.2.1. Puntos de equilibrio del Movimiento del Dipolo Móvil

Es obvio que en este capitulo se cumple la ecuación 2.75 El término:

$$\frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) \quad (3.27)$$

es mayor o igual que cero por lo tanto. 2.20

$$Ep(\theta, \phi) \leq E'_m \quad (3.28)$$

Por lo tanto el movimiento es tal que la energía potencial (que es una función de dos variables) es menor o igual que la energía prima.

Ahora usaremos un análisis semejante al capitulo anterior, que es calcular los valores críticos de la energía potencial, luego sí

$$E'_m = Ep_{max} \quad (3.29)$$

o

$$E'_m = Ep_{min} \quad (3.30)$$

estos puntos críticos serán puntos de equilibrio, es decir, para calcular estos puntos de equilibrio determinamos los puntos críticos de la función $Ep(\theta, \phi)$, tomando la gradiente de la, energía potencial e igualando a cero, es decir

$$\frac{\partial Ep}{\partial \theta} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial Ep}{\partial \phi} = 0 \quad (3.32)$$

de donde

$$A \cos \theta \cos \phi + B \text{sen} \theta = 0 \quad (3.33)$$

$$A \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi = 0 \quad (3.34)$$

como el ángulo de Euler θ es diferente de cero 0 y de π

$$\operatorname{sen} \phi = 0 \quad (3.35)$$

luego

$$\phi = 0, \pi \quad (3.36)$$

Si $\phi = 0$ de la ecuación (3.33) se consigue

$$A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (3.37)$$

luego

$$\tan \theta = -\frac{A}{B} \quad (3.38)$$

De la teoría de máximos y mínimos de funciones de dos variables hay que hallar las segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta^2} = M(A \operatorname{sen} \theta \cos \phi - B \cos \theta) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \phi^2} = M A \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta \partial \phi} = A M \cos \theta \operatorname{sen} \phi \quad (3.41)$$

Para el primer valor $\phi = 0$ de las ecuaciones (3.39), (3.40) y (3.41)

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta^2} = M(A \operatorname{sen} \theta - B \cos \theta) \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \phi^2} = M A \operatorname{sen} \theta \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta \partial \phi} = 0 \quad (3.44)$$

De la ecuación (3.38) y como θ es menor que π este ángulo está en el segundo cuadrante, es fácil demostrar usando trigonometría elemental que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.45)$$

$$\cos \theta = -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.46)$$

Reemplazando (3.45) y (3.46) en (3.42) y (3.43) obtenemos

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \theta^2} = M \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \phi^2} = \frac{M A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.48)$$

Si definimos

$$F(\theta, \phi) = \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial \phi^2} - \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \phi} \right)^2 \quad (3.49)$$

Tendremos

$$F(\theta, 0) = A^2 M^2 \quad (3.50)$$

es decir es positivo luego como la segunda derivada $\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}$ es positivo entonces podemos afirmar que hay un mínimo en el ángulo θ que cumple la ecuación (3.38) y $\phi = 0$ luego estos ángulos nos dan una posición de equilibrio estable.

Considerando el otro caso $\phi = \pi$ tenemos que

$$\tan \theta = \frac{A}{B} \quad (3.51)$$

Procediendo en forma semejante al analisis anterior que hay un máximo en el ángulo θ (que cumple la ecuación (3.37) y $\phi = \pi$ luego estos ángulos nos dan una posición de equilibrio inestable.

Como en el caso del capitulo I cuando está el sistema en posición de equilibrio estable, podemos decir que tiene un movimiento estacionario luego

$$\theta(t) = \theta(0) \quad (3.52)$$

$$\phi(t) = \phi(0) \quad (3.53)$$

$$\psi(t) = \dot{\psi}(0) t + \psi(0) \quad (3.54)$$

$$\dot{\theta}(t) = 0 \quad (3.55)$$

$$\dot{\phi}(t) = 0 \quad (3.56)$$

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}(0) \quad (3.57)$$

El caso más interesante es cuando

$$E'_m \approx E_{p_{min}} \quad (3.58)$$

Notar que las funciones $\theta(t)$, $\phi(t)$ oscilan alrededor del punto de equilibrio estable.

3.2.2. Demostración de la existencia del movimiento estacionario usando las ecuaciones de Lagrange.

Rigurosamente se hallan puntos críticos para la energía potencial que depende de los dos primeros ángulos de Euler. Para demostrar que son puntos de equilibrio, usamos las ecuaciones de Lagrange y el Lagrangiano del dipolo eléctrico móvil:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - M(-A \sin \theta \cos \phi + B \cos \theta) \quad (3.59)$$

De las ecuaciones de Lagrange tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.60)$$

Para el ángulo θ obtenemos :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin 2\theta) - I_3 \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) + M(A \cos \theta \cos \phi + B \sin \theta) \quad (3.62)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I \dot{\theta} \quad (3.63)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I \ddot{\theta} \quad (3.64)$$

Reemplazando (3.62) y (3.64) en la ecuación (3.61) obtenemos:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 \sin 2\theta) - \frac{I_3}{I} \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) + \frac{M}{I}(A \cos \theta \cos \phi + B \sin \theta) \quad (3.65)$$

De forma similar aplicando las ecuaciones de lagrange para la variable ϕ obtenemos :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad (3.66)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \right) = -M(A \sin \theta \sin \phi) \quad (3.67)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = I(\dot{\phi} \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta \quad (3.68)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \ddot{\phi}(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin 2\theta \left(I - \frac{I_3}{2} \right) + I_3 \cos \theta \ddot{\psi} - I_3 \sin \theta \dot{\psi} \dot{\theta} \quad (3.69)$$

Reemplazando (3.67) y (3.68) en la ecuación (3.66) obtenemos:

$$\ddot{\phi} = \frac{I_3 \sin \theta \dot{\theta} \dot{\psi} - I_3 \cos \theta \ddot{\psi} - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin 2\theta (I - \frac{I_3}{2}) - M(A \sin \theta \sin \phi)}{(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)} \quad (3.70)$$

De forma similar, aplicando las ecuaciones de Lagrange para la variable ψ reemplazando la ecuación pero recordando el analisis semejante al caso anterior tenemos que no es necesario hallar la tercera ecuación.

Si reemplazamos las soluciones constantes en las ecuaciones de movimiento anteriores se consiguen las ecuaciones anteriores (3.33) y (3.34)

3.3. Solución numérica.

Para resolver numéricamente debemos de despejar las segundas derivadas de los ángulos de Euler obteniendo:

$$\ddot{\theta} = \frac{(I - I_3) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta}{I} + M \frac{B \sin(\theta) + A \cos(\theta) \cos(\phi)}{I_1} \quad (3.71)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(-2I + I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta}}{I \sin \theta} + M \frac{A \sin(\phi)}{I \sin(\theta)} \quad (3.72)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I \dot{\phi} \dot{\theta} \sin^2 \theta - (-2I + I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos^2 \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta}{I \sin \theta} - M \frac{A \sin(\phi) \cos \theta}{I \sin(\theta)} \quad (3.73)$$

Que se resolveran numéricamente por el metodo de Runge Kutta de orden 4.
y haciendo el cambio de variable:

$$x_1 = \theta \quad (3.74)$$

$$x_2 = \phi \quad (3.75)$$

$$x_3 = \psi \quad (3.76)$$

$$x_4 = \dot{\theta} \quad (3.77)$$

$$x_5 = \dot{\phi} \quad (3.78)$$

$$x_6 = \dot{\psi} \quad (3.79)$$

conseguimos 6 ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_4 \quad (3.80)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \quad (3.81)$$

$$\dot{x}_3 = x_6 \quad (3.82)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(\alpha - 1)x_5^2 \cos(x_1) \sen(x_1) - x_5 x_6 \sen(x_1)}{\alpha} + M \frac{(B \sen(x_1) + A \cos(x_1) \cos(x_2))}{I_1} \quad (3.83)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{\alpha x_4 x_6 + (-2\alpha + 1)x_4 x_5 \cos(x_1)}{\alpha \sen(x_1)} + \frac{MA}{I_1} (\sen(x_2)) \quad (3.84)$$

$$\dot{x}_6 = x_4 x_6 \sen(x_1) - \cos(x_1) \frac{(x_4 x_6 + (-2\alpha + 1)x_4 x_5 \cos(x_1))}{\alpha \sen(x_1)} + \frac{A \cos(x_1) \sen(x_2)}{I_1 \sen(x_1)} \quad (3.85)$$

donde

$$\alpha = \frac{I}{I_3} \quad (3.86)$$

Las ecuaciones diferenciales se resolvieron usando el método de Runge-Kutta de orden 4 y mediante el programa delphy Para efectuar los cálculos numéricos se tomaron los parámetros.

$$A = 1,707 \quad (3.87)$$

$$B = 0,707 \quad (3.88)$$

$$M = 0,5 J \quad (3.89)$$

$$I_1 = 1,0 Kg.m^2 \quad (3.90)$$

$$\alpha = 0,75 \quad (3.91)$$

El intervalo de tiempo es de 0 a 200 segundos y las unidades están en el sistema internacional y la mayoría de los gráficos mostrados corresponde a la función θ y ϕ .

El primer conjunto de 6 gráficos se obtiene considerando las condiciones iniciales mostradas en el cuadro 8 (que se puede considerar como una perturbación pequeña de los valores de θ y ϕ en la posición de equilibrio).

a la última condición $\dot{x}_3(0)$ o $x_6(0)$ se le dio tres valores distintos, es decir:

1. CASO I.

Primer conjunto de datos					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$	$x_6(0)$
113^0	0^0	0^0	0 grados/s	0 grados/s	$11,45 \text{ grados/s}$

Cuadro 6: Tabla de condiciones iniciales

que le corresponde los tres primeros graficos.

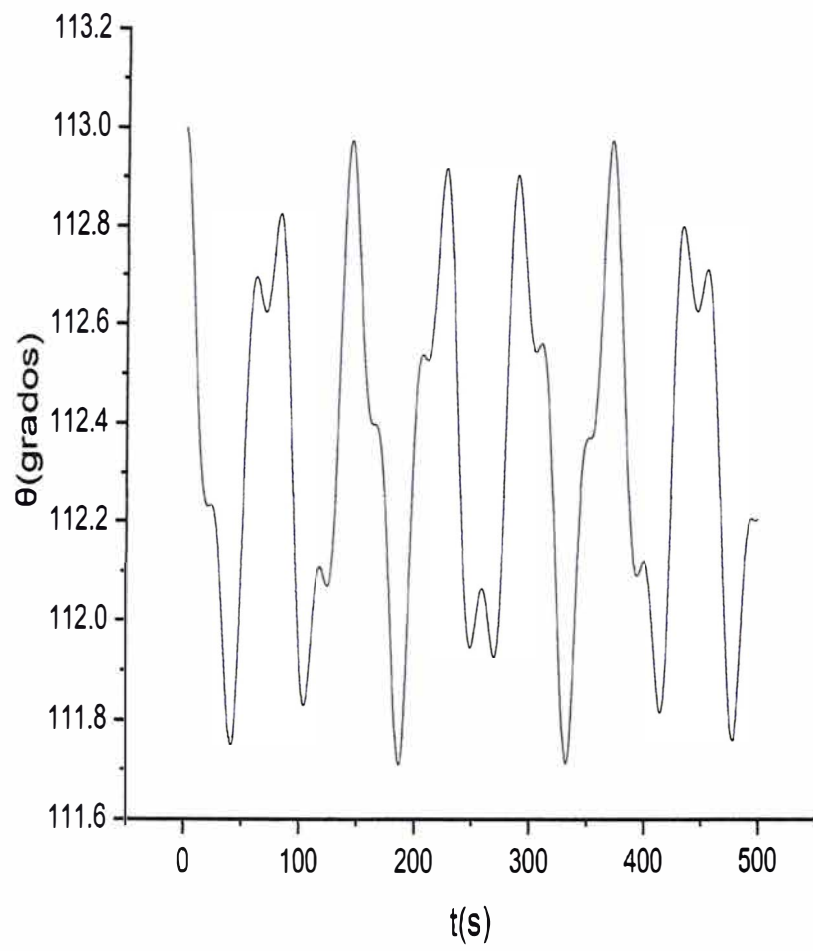


Figura 32: Muestra las oscilaciones del ángulo θ caso I

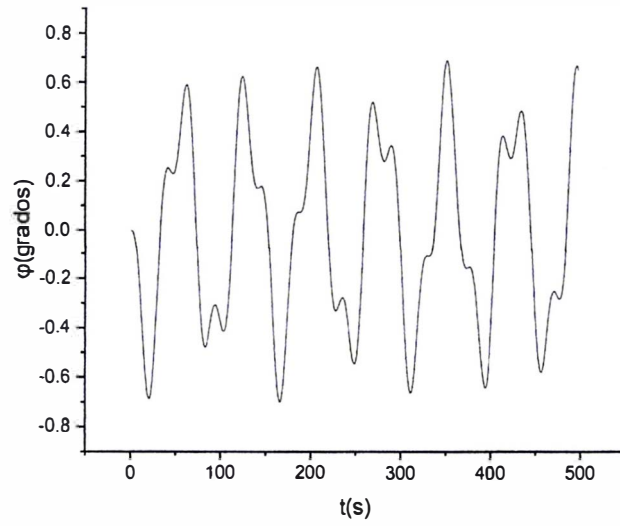


Figura 33: Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ caso I

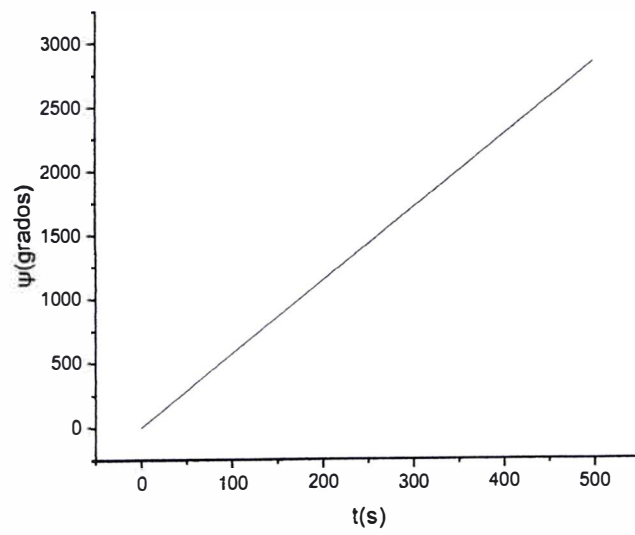


Figura 34: Muestra las oscilaciones del ángulo ψ caso I

2. CASO II.

Primer conjunto de datos					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$	$x_6(0)$
113^0	0^0	0^0	0 grados/s	0 grados/s	$11,45 \text{ grados/s}$

Cuadro 7: Tabla de condiciones iniciales

que le corresponde los gráficos que se muestran.

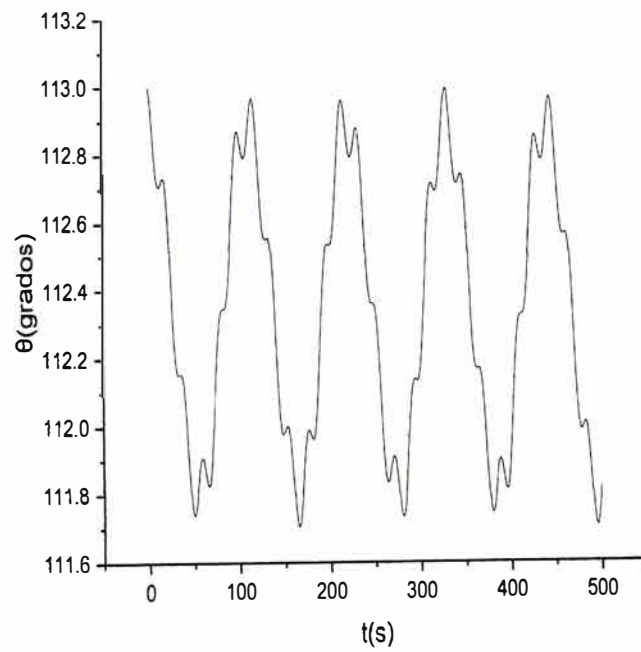


Figura 35: Muestra las oscilaciones del ángulo θ caso II

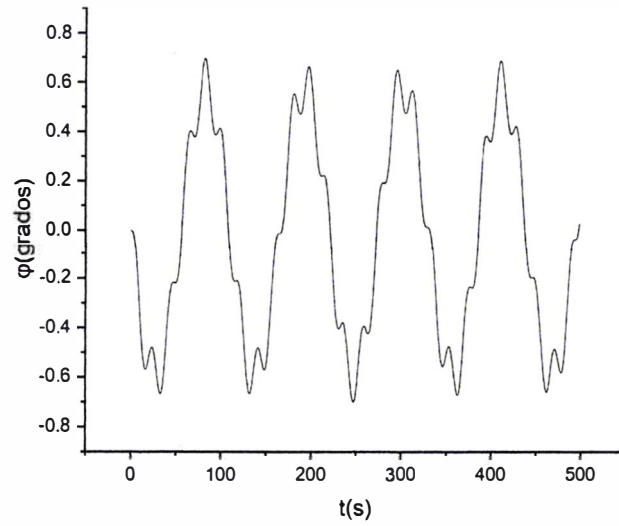


Figura 36: Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ caso II

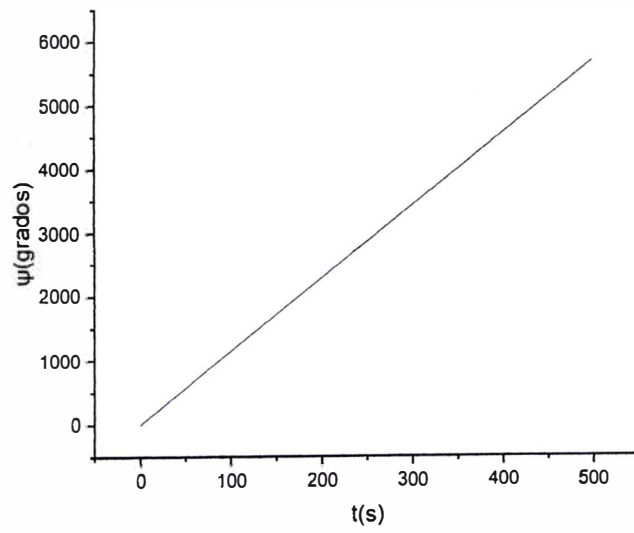


Figura 37: Muestra las oscilaciones del ángulo Ψ . caso II

3. CASO III.

Primer conjunto de datos					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$	$x_6(0)$
113^0	0^0	0^0	0 grados/s	0 grados/s	$28,64 \text{ grados/s}$

Cuadro 8: Tabla de condiciones iniciales

que le corresponden los gráficos siguientes :

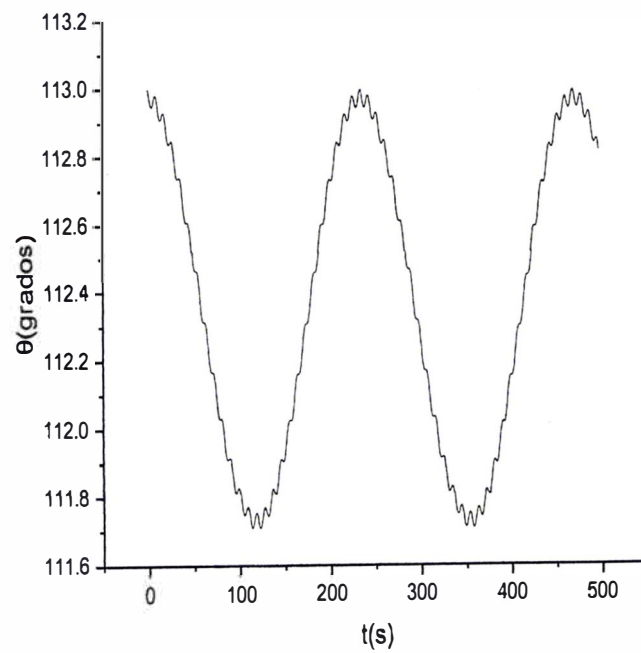


Figura 38: Muestra las oscilaciones del ángulo θ caso III

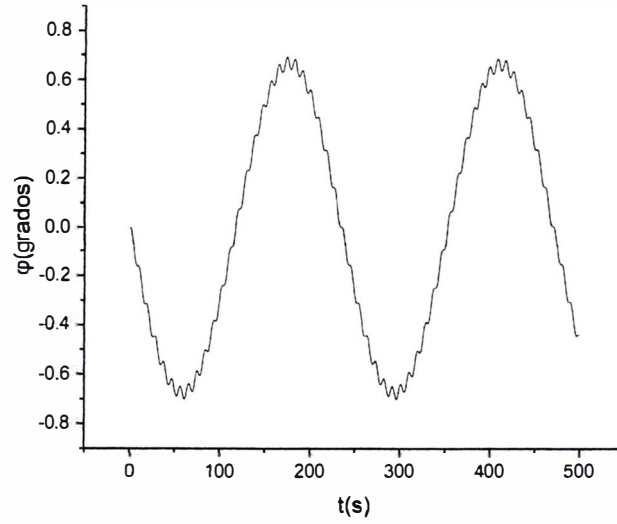


Figura 39: Muestra las oscilaciones del ángulo ϕ Caso III

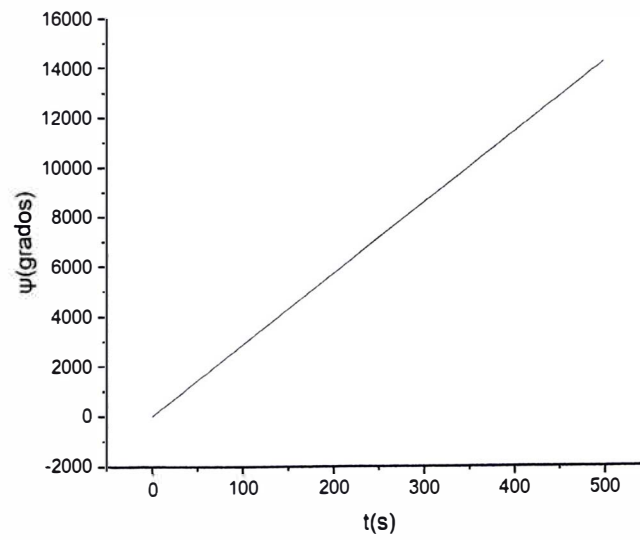


Figura 40: Muestra las oscilaciones del ángulo Ψ caso III

En todos estos gráficos mostramos que los valores de los dos primeros ángulos de Euler

oscilan alrededor de la posición de equilibrio.

4. CASO IV.

A continuación mostramos una simulación con las siguientes condiciones iniciales:

Primer conjunto de datos					
$x_1(0)$	$x_2(0)$	$x_3(0)$	$x_4(0)$	$x_5(0)$	$x_6(0)$
30^0	40^0	0^0	0 grados/s	0 grados/s	$85,94 \text{ grados/s}$

Cuadro 9: Tabla de condiciones iniciales

Se muestran en los siguientes graficos

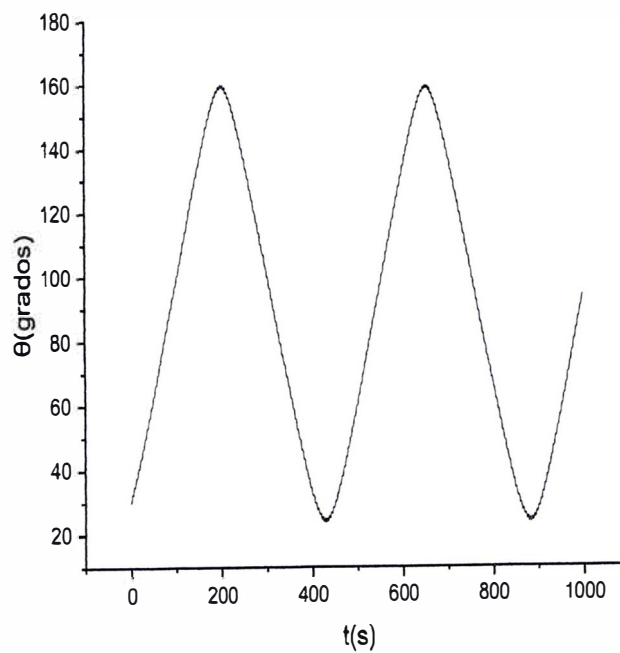


Figura 41: Muestra las variaciones θ caso IV

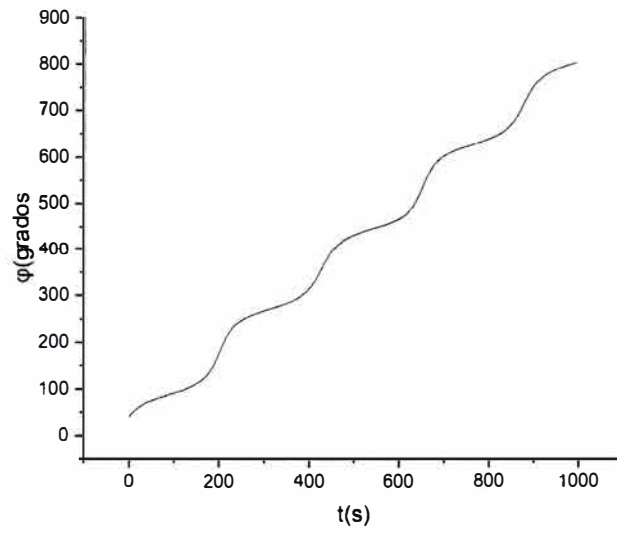


Figura 42: Muestra las variaciones ϕ caso IV

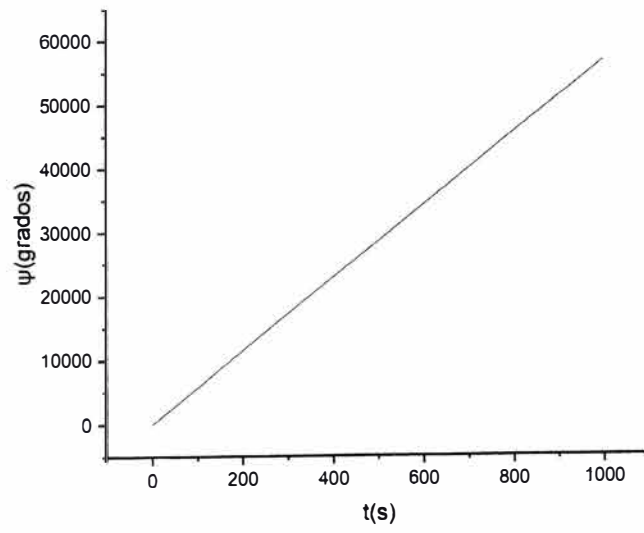


Figura 43: Muestra las variaciones de ψ caso IV

3.4. Observaciones de los graficos

Se tiene que: En este capitulo se observa para diversas condiciones iniciales (aunque el valor del primer ángulo $\theta = 136^0$ es del capitulo (II)) los ángulos θ y ϕ muestran oscilaciones. El ultimo ángulo ψ crece casi linealmente pero con otras condiciones iniciales muestran oscilaciones. Las oscilaciones del primer ángulo se parecen a la combinación lineal de dos movimientos armonicos. De los calculos teóricos se tiene que hay dos posiciones de equilibrio estable y el otro inestable.

3.5. Conclusion

La principal conclusion es que el campo eléctrico generado por dos dipolos eléctricos fijos equivale al campo eléctrico generado por un solo dipolo. En ambos casos como en el capitulo II se tiene dos puntos de equilibrio.

Capítulo 4

Movimiento de un Dipolo Eléctrico con dos esferas cargadas con centro de masa fijo en un campo Eléctrico homogéneo

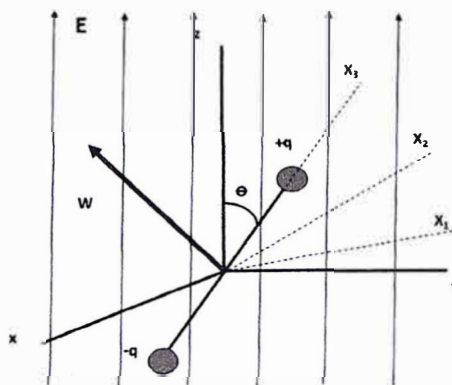


Figura 44: Dipolo eléctrico en un campo eléctrico .

4.1. Generalidades

Con el fin de hacer comparaciones con el capítulo II y III estudiaremos el movimiento del dipolo considerando:

1. Que es un cuerpo rígido formado por dos esferas del mismo radio con igual masa M .
2. El centro de masa del dipolo es fijo y coincide con el origen de coordenadas. Esto sucede para $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ Estamos considerando también $\vec{r}_{CM} = \vec{V}_{CM} = \vec{0}$
3. Se conserva la energía mecánica.
4. El eje de rotación pasa por el centro de masa .
5. Existe un campo eléctrico homogéneo.

Como en los otros capítulos en este análisis el eje de simetría es uno de los ejes principales

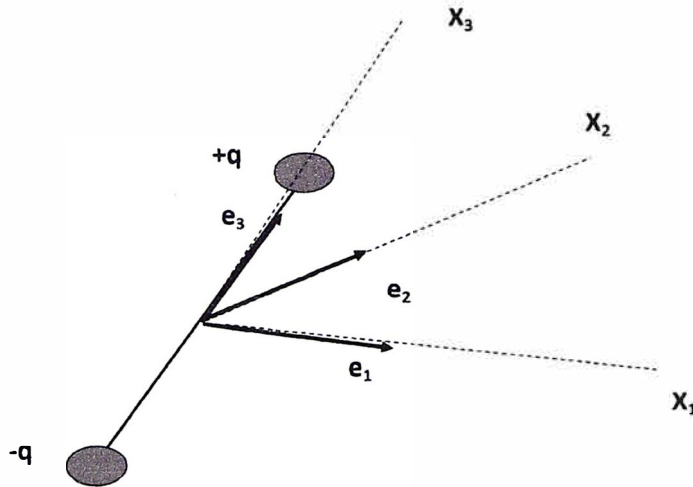


Figura 45: Considerando el eje de simetría como uno de los ejes principales de Inercia .

de inercia y lo tomaremos como eje X_3 (ver Fig 45) y también como en los capítulos anteriores consideramos dos bases:

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}. \quad (4.1)$$

$$B_L = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}. \quad (4.2)$$

Esta última ligada al cuerpo rígido.

como se dijo anteriormente por simetría los momentos principales de inercia I_1 , I_2 son iguales, definimos :

$$I \equiv I_1 = I_2 \quad (4.3)$$

Es evidente que no se conserva el Momentum Angular. El método de análisis es semejante al caso del estudio del movimiento del trompo simétrico, es decir se halla una formula para la E_M en función de θ y $\dot{\theta}$

4.2. Potencial Efectivo del dipolo

La expresión general de la energía cinética de un cuerpo rígido (cuando el eje de rotación pasa por el C.G.) está dado por:

$$E_k = \frac{mV_Q^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{I_i \omega_i^2}{2} \quad (4.4)$$

Como $Q = G = 0$ la energía cinética se reduce a lo siguiente:

$$E_k = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (4.5)$$

Considerando las ecuaciones que relacionan las componentes de la velocidad angular respecto a los ejes que se mueven con el cuerpo rígido con los ángulos de Euler (ecuaciones 2.10 , 2.11, 2.12) se tendrá que:

$$E_k = \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 \sen^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2, \quad (4.6)$$

La energía potencial (externa) es:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (4.7)$$

pero $\vec{p} = Qd \vec{e}_3$ (ver figura 48) luego:

$$E_p = -QdE \cos \theta \quad (4.8)$$

y luego la energía mecánica es:

$$E_m = \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 \sen^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - QdE \cos \theta \quad (4.9)$$

Por otra parte, el Lagrangiano es:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sen^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + QdE \cos \theta \quad (4.10)$$

al igual que los capitulos II y III las coordenadas generalizadas de ψ y ϕ son cíclicas luego p_ψ , y p_ϕ , son integrales de movimiento (constantes), aplicando sus definiciones tenemos:

$$p_\psi = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (4.11)$$

$$p_\phi = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta + I \dot{\phi} \sen^2 \theta \quad (4.12)$$

De estas dos últimas ecuaciones se demuestra que: $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ satisfacen

$$\dot{\phi}(t) = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sen^2 \theta} \quad (4.13)$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{p_\psi}{I_3} - \left[\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sen^2 \theta} \right] \cos \theta \quad (4.14)$$

Estas ecuaciones permitirán hallar ψ y ϕ si conocemos $\theta = \theta(t)$. De las ecuaciones (4.13) y (4.14) y de la ecuación de la energía mecánica (4.9) se obtiene:

$$E_m = \frac{I \dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \sen^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2 I_3} - QdE \cos \theta \quad (4.15)$$

Observamos que la energía mecánica depende solo del ángulo θ y de su derivada $\dot{\theta}$, podemos escribir la anterior relación como

$$E_m - \frac{p_\psi^2}{2 I_3} = \frac{I \dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \sen^2 \theta} - QdE \cos \theta. \quad (4.16)$$

definiendo la energía mecánica prima

$$E'_m \equiv E_m - \frac{p_\psi^2}{2 I_3} \quad (4.17)$$

de las ecuaciones (4.15) y (4.17) hallamos

$$E'_m = \frac{I \dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \sen^2 \theta} - QdE \cos \theta. \quad (4.18)$$

es obvio que la magnitud física E'_m se conserva, luego el potencial efectivo es:

$$V(\theta) \equiv \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I \sen^2 \theta} - QdE \cos \theta. \quad (4.19)$$

la relación (4.18) se transforma en:

$$E'_m = \frac{I \dot{\theta}^2}{2} + V(\theta). \quad (4.20)$$

Esta ecuación es semejante a la ecuación que relaciona el potencial efectivo de un cuerpo sólido simétrico con la energía mecánica falsa respectiva.

$$E'_m = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I \sin^2\theta} + Mgl \cos\theta. \quad (4.21)$$

Luego el grafico del potencial efectivo del cuerpo solido y el dipolo esférico son semejantes. Es decir, hay dos asintotas en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi$ por lo tanto existe un mínimo para estas funciones. La justificación de estas propiedades del grafico de la función potencial efectivo de un cuerpo solido como el trompo es mencionado en diversos textos de mecánica [12]

4.3. Descripción Cualitativa del movimiento

De la ecuación (4.20) observamos que el término $\frac{I\dot{\theta}^2}{2}$ es mayor o igual que cero, luego se cumplirá:

$$V(\theta) \leq E'_m. \quad (4.22)$$

Donde se tienen las propiedades del movimiento:

a) El ángulo θ está acotado, es decir, existe θ_{min} y θ_{max} tal que:

$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}. \quad (4.23)$$

Para calcular θ_{min} y θ_{max} se considera la relación:

$$E'_m = + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I \sin^2\theta} - QdE \cos\theta. \quad (4.24)$$

Esta ecuación se transforma en una ecuación cúbica. Pero debemos hallar previamente las constantes de movimiento p_ψ y p_ϕ y E'_m . Esta última se puede obtener de la ecuación

$$E'_m = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I \sin^2\theta} - QdE \cos\theta. \quad (4.25)$$

$$E'_m = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) - QdE \cos\theta \quad (4.26)$$

b) Además podemos deducir que la función ángulo $\theta(t)$ es periódica, (sea T el período) luego la función $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ también es periódica con el mismo período T . Esta afirmación se puede comprobar aplicando la definición de función periódica.

- c) Podemos afirmar que el eje X_3 'cabezea' o tiene un movimiento de nutación con velocidad angular $\dot{\theta}(t)$ (velocidad angular de nutación)
- d) Un caso particular de movimiento es cuando el valor de la energía mecánica prima es igual al mínimo potencial efectivo luego

$$\theta_{min} = \theta_{max} = \theta_{crit} \quad (4.27)$$

Luego también encontramos un movimiento 'estacionario', es decir el cuerpo se mueve tal que θ es fijo. Para este caso se tiene que:

$$\theta(t) = \theta_0 \quad (4.28)$$

$$\dot{\theta}(t) = 0 \quad (4.29)$$

luego de las ecuaciones (4.13) y (4.14) es fácil probar que la velocidad angular propia y de precesión son constantes, es decir

$$\phi(t) = \dot{\phi}(0) t + \phi(0) \quad (4.30)$$

$$\psi(t) = \dot{\psi}(0) t + \psi(0) \quad (4.31)$$

Pero este movimiento 'estacionario' no puede suceder para cualquiera condiciones iniciales. La semejanza de este movimiento con el caso del movimiento de un dipolo en la presencia de otro dipolo es que la función $\theta(t)$ es oscilatorio pero existe una diferencia y es que en este caso es posible que $\theta(t) = \theta_0$

4.4. Aplicación de las ecuaciones de Lagrange

Para poder obtener los ángulos de Euler en función del tiempo se debe hallar las ecuaciones diferenciales de movimiento considerando las ecuaciones de Lagrange para la función de Lagrange:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + Q d E \cos \theta \quad (4.32)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange tenemos:

$$I\ddot{\theta} + I_3\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta + (I_3 - I)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - Q d E \cos\theta = 0 \quad (4.33)$$

$$\ddot{\phi}(I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\theta (I - I_3) - I_3 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta + I_3 \ddot{\psi} \cos \theta = 0 \quad (4.34)$$

$$\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta = 0 \quad (4.35)$$

Para resolver numéricamente debemos despejar las segundas derivadas de los ángulos de Euler obteniendo

$$\ddot{\theta} = \frac{(I - I_3) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta}{I} - \frac{Q d E \cos \theta}{I} \quad (4.36)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(-2I + I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi} \dot{\theta}}{I \sin \theta} \quad (4.37)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I \dot{\phi} \dot{\theta} \sin^2 \theta - (-2I + I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos^2 \theta - I_3 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta}{I \sin \theta} \quad (4.38)$$

Un cálculo interesante es hallar que ecuaciones cumple las condiciones iniciales para un movimiento de precesión uniforme. De (4.36) se consigue:

$$I_3 \dot{\phi}(0) \dot{\psi}(0) \sin \theta_o + (I_3 - I) \dot{\phi}^2(0) \sin \theta_o \cos \theta_o + Q d E \cos \theta = 0 \quad (4.39)$$

Capítulo 5

Conclusiones generales y trabajos posteriores

5.1. Conclusiones

1. El movimiento del dipolo eléctrico es semejante al movimiento de un trompo simétrico cuando los campos eléctricos son uniformes.
2. El movimiento de precesión uniforme es estable, esta conclusión se deduce del gráfico función potencial positivo.
3. Que las ecuaciones de movimiento son no lineales.
4. Que las ecuaciones para el caso del dipolo elemental ideal ($I_3 = 0$) se puede hallar de las ecuaciones generales, mencionamos que no se pueden hallar completamente al considerar el Lagrangiano del dipolo elemental.
5. Existe siempre posiciones de equilibrio estable e inestable y se puede comprobar con la teoría de Lyapunov en esta conclusión.
6. Se puede deducir que si tenemos varios dipolos fijos con centro en el origen de coordenadas están crean un campo eléctrico y si tenemos un dipolo a una distancia lejana a este origen de coordenadas esta se mueve como si habría un solo dipolo fijo.

5.2. Trabajos posteriores

Para los trabajos posteriores se tomarán en cuenta modelos mas 'finos' de una molécula dipolar. Se debe hallar el movimiento del dipolo en cualquier punto del espacio. Pero necesitamos el potencial creado por los dipolos fijos que es posible por que son cargas puntuales.

5.3. Validez

Para determinar si la presente tesis es válida podemos analizar si las constantes de movimiento calculadas numéricamente en la simulación se conservan, es obvio que al hacer los cálculos numéricos existen errores. Una de las magnitudes físicas que se conservan es el momentum generalizado p_ψ . Se puede demostrar facilmente que esta constante de movimiento es igual a la componente de la velocidad angular w_3 (ver ecuacion 2.12 y 2.26). Estos calculos se muestran en el apéndice 7. Se muestran errores muy pequeños y en las otras simulaciones que se hicieron se encontraron errores semejantes.

Capítulo 6

APENDICES

Apéndice 1: Dipolo eléctrico en un campo eléctrico debido a una carga puntual

Introducción.

El objetivo del presente apéndice es hacer una breve análisis de un modelo que represente el sistema ión-dipolo y resolverlas para un caso particular.

En este modelo se considera el ión como una carga q fija en el origen de coordenadas y un dipolo eléctrico que se mueve en el espacio sometido a una fuerza eléctrica debido a una carga puntual q y también asumiremos que no se considera otro tipo de interacciones sobre la carga **figura (46)**

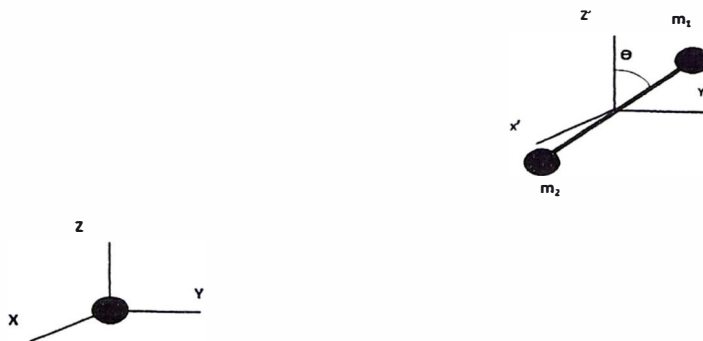


Figura 46: Sistema ión dipolo

Como en los capitulos anteriores se tiene un dipolo eléctrico formado por dos esferas eléctricas con cargas $+q$ y $-q$ distribuidas uniformemente en una esfera de radio R separados por una distancia d , este dipolo está en este caso en el interior de un campo eléctrico creado por una carga puntual $+q$ ubicado en el origen de coordenadas.

Como hemos mencionado anteriormente el origen del sistema de los ejes X_1 , X_2 y X_3 está ligado al dipolo que se encuentra en el centro de masa C.M.

El dipolo se comporta como un cuerpo rígido.

Como siempre se utilizo convencionalmente T es la energía cinética del sistema y U es la energía potencial eléctrica del dipolo en el interior de un campo eléctrico externo.

Potencial de un dipolo eléctrico.

Por energía potencial del dipolo en el campo externo queremos decir el trabajo que se debe de realizar contra el campo eléctrico externo E_{ext} para traer un dipolo desde el infinito hasta r' (donde r' es el vector de posición del centro de masa C.M. figura (47)), considerando por separado cada carga del dipolo.

Se demuestra que la energía potencial U en este dipolo en el interior de un campo eléctrico está dado por:

$$U = -qV_{EXT} \left(\vec{r}' - \frac{\vec{d}}{2} \right) + qV_{EXT} \left(\vec{r}' + \frac{\vec{d}}{2} \right) \quad (6.1)$$

si d es pequeño.

Sabiendo además que:

$$V_{EXT} \left(\vec{r}' - \frac{\vec{d}}{2} \right) = V_{EXT}(\vec{r}') - \vec{\nabla} V_{EXT} \cdot \frac{\vec{d}}{2} \quad (6.2)$$

$$V_{EXT} \left(\vec{r}' + \frac{\vec{d}}{2} \right) = V_{EXT}(\vec{r}') + \vec{\nabla} V_{EXT} \cdot \frac{\vec{d}}{2} \quad (6.3)$$

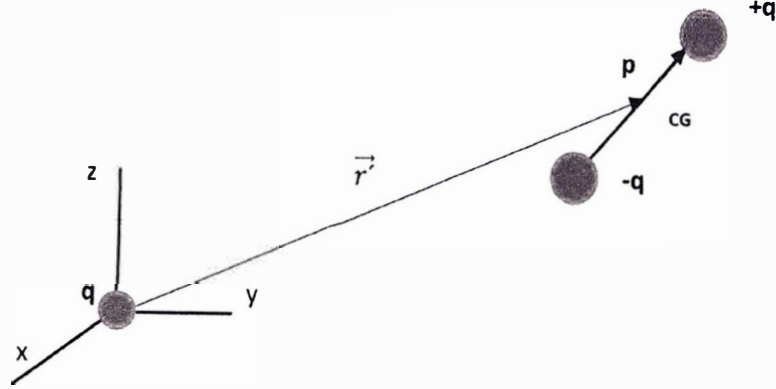


Figura 47: Dipolo en el interior de un campo eléctrico

de la ecuación (6.1) obtenemos:

$$U = -q \left[V_{EXT}(\vec{r}') - \vec{\nabla} V_{EXT} \cdot \frac{\vec{d}}{2} \right] + q \left[V_{EXT}(\vec{r}') + \vec{\nabla} V_{EXT} \cdot \frac{\vec{d}}{2} \right] \quad (6.4)$$

simplificando la ultima ecuación

$$U = \left[\vec{\nabla} V_{EXT} \cdot \vec{d} \right] q \quad (6.5)$$

luego por definicion de momento dipolar

$$U = \left[\vec{\nabla} V_{EXT} \cdot \vec{p} \right] \quad (6.6)$$

Entonces la energía potencial del dipolo estará dado por:

$$Ep = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (6.7)$$

Es decir, este resultado no solo se cumple para campos uniformes, también se aplican a campos eléctricos que dependen de las coordenadas. Luego si Θ es el ángulo entre el vector campo eléctrico $\vec{E}$ y el eje X_3 , donde $\vec{E} = \vec{E}(r)$ tenemos:

$$U = -Ep \cos \Theta \quad (6.8)$$

Como en los capitulos anteriores las masas tomamos $m_1 = m_2 = m$.

Donde

$$\cos\Theta = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_r \quad (6.9)$$

Energía cinética del dipolo.

En este modelo se asume que el eje de rotación pasa por el centro de masa.
Sea la energía cinética del dipolo T , luego

$$T = T_{TRAS} + T_{ROTA} \quad (6.10)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + \dot{Z}_G^2) + \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (6.11)$$

Donde: I_1 , I_2 e I_3 son los momentos principales de inercia del dipolo y ω_1, ω_2 y ω_3 son las componentes del vector velocidad angular a lo largo de los ejes X_1 , X_2 e X_3 .

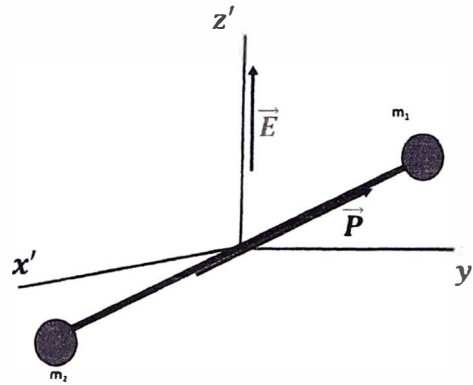


Figura 48: Dipolo en el sistema X' , Y' y Z'

Recordando que las componentes de las velocidades angulares en función de los ángulos de Euler está dado por:

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin\psi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\psi \quad (6.12)$$

$$w_2 = \dot{\phi} \cos\psi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\psi \quad (6.13)$$

$$w_3 = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \quad (6.14)$$

Por lo tanto

$$\omega_1^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \sin^2\psi + \dot{\theta}^2 \cos^2\psi + \dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \sin 2\psi \quad (6.15)$$

$$\omega_2^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + \dot{\theta}^2 \sin^2\psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \sin\psi \cos\psi \quad (6.16)$$

$$\omega_3^2 = \dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos\theta \quad (6.17)$$

Reemplazando los cuadrados de la velocidad angular en las ecuaciones (6.11) obtenemos una expresión para la energía cinética total del dipolo.

$$\begin{aligned} T = & m(\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + \dot{Z}_G^2) + \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \sin^2\psi + \dot{\theta}^2 \cos^2\psi + \dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \sin 2\psi) + \\ & + \frac{I_2}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + \dot{\theta}^2 \sin^2\psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \sin\psi \cos\psi) + \\ & + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos\theta) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Y sabiendo además que los momentos de inercia toman los valores

$$I_1 = I_2 = \frac{4mR^2}{5} + \frac{md^2}{2} = I \quad (6.19)$$

$$I_3 = \frac{4mR^2}{5} \quad (6.20)$$

Lagrangiano del Dipolo

Del Lagrangiano

$$L = T - U \quad (6.21)$$

Se tiene

$$L = m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) + Ep \cos \Theta \quad (6.22)$$

Considerando además que

$$I_1 = I_2 = I \quad (6.23)$$

Obtenemos:

$$L = m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{I}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2}(\omega_3^2) + Ep \cos \Theta \quad (6.24)$$

Para simplificar las ecuaciones consideremos que el centro de masa del dipolo se mueve cerca al plano XY y es facil probar que $\Theta + \theta = \frac{\pi}{2}$, luego $\cos \Theta = \sin \theta$ consiguiendo

$$L = m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta) + pE \sin \theta \quad (6.25)$$

Donde la magnitud del campo eléctrico esta dado por:

$$E = \frac{KQ}{r^2} \quad (6.26)$$

Usando coordenadas cartesianas

$$E = \frac{KQ}{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (6.27)$$

Finalmente tenemos el Lagrangiano.

$$L = m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta) + \frac{Kpq \sin \theta}{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \quad (6.28)$$

aplicando las ecuaciones de Lagrange para la coordenada generalizada θ obtenemos :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 \sen 2\theta) + \frac{I_3}{2} (-\dot{\phi}^2 \sen 2\theta - 2\dot{\phi} \dot{\psi} \sen \theta) + \frac{Kpq \cos \theta}{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \quad (6.29)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I \dot{\theta} \quad (6.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I \ddot{\theta} \quad (6.31)$$

Por lo tanto :

$$I \ddot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sen 2\theta \left(\frac{I_3 - I}{2} \right) + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sen \theta - \frac{Kpq \cos \theta}{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = 0 \quad (6.32)$$

De forma similar, aplicando las ecuaciones de Lagrange para la variable ϕ

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (6.33)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{I}{2} (2\dot{\phi}^2 \sen^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (2\dot{\phi} \cos^2 \theta + 2\dot{\psi} \sen \theta) \quad (6.34)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \ddot{\phi} (I \sen^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\phi} \dot{\theta} (2I \sen \theta \cos \theta) + \dot{\phi} (-2I_3 \dot{\theta} \sen \theta \cos \theta) \quad (6.35)$$

De igual manera obtenemos:

$$\ddot{\phi} (I \sen^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\phi} \dot{\theta} \sen 2\theta (I - I_3) - \dot{\phi} \dot{\psi} 2I_3 \sen \theta + \ddot{\psi} I_3 \sen \theta = 0 \quad (6.36)$$

De forma similar, aplicando las ecuaciones de Lagrange para la variable ψ obtenemos :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = 0 \quad (6.37)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{I_3}{2} (2\dot{\phi} \cos \theta + 2\dot{\psi}) \quad (6.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \ddot{\psi} I_3 + \ddot{\phi} (I_3 \cos \theta) - \dot{\phi} \dot{\theta} I_3 \sen \theta \quad (6.39)$$

Finalmente

$$\ddot{\psi}I_3 + \ddot{\phi}(I_3\cos\theta) - \dot{\phi}\dot{\theta}I_3\sin\theta = 0 \quad (6.40)$$

Para resolver numéricamente debemos de despejar las segundas derivadas de las ecuaciones anteriores :

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta (I - I_3) - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin\theta}{I} + \frac{Kpq \cos\theta}{I(X^2 + Y^2 + Z^2)} \quad (6.41)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\dot{\theta}\dot{\psi}I_3 + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta(I_3 - 2I)}{I \sin\theta} \quad (6.42)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I\dot{\theta}\dot{\phi}\sin^2\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}I_3\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos^2\theta(I_3 - 2I)}{I \sin\theta} \quad (6.43)$$

Para X

$$\frac{\partial L}{\partial X} = - \frac{2Kpq \sin\theta}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2} X \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = 2m\dot{X} \quad (6.45)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = 2m\ddot{X} \quad (6.46)$$

Luego:

$$\ddot{X} = \frac{Kpq \sin\theta}{m(X^2 + Y^2 + Z^2)^2} X \quad (6.47)$$

Para Y

$$\left(\frac{\partial L}{\partial Y} \right) = - \frac{2Kpq \sin\theta}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2} Y \quad (6.48)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) = 2m\dot{Y} \quad (6.49)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = 2m\ddot{Y} \quad (6.50)$$

De forma similar obtenemos:

$$\ddot{Y} = \frac{Kpq \operatorname{sen}\theta}{m(X^2 + Y^2 + Z^2)^2} Y \quad (6.51)$$

Para Z

$$\left(\frac{\partial L}{\partial Z}\right) = -\frac{2Kpq \operatorname{sen}\theta}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2} Z \quad (6.52)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}}\right) = 2m\dot{Z} \quad (6.53)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = 2m\ddot{Z} \quad (6.54)$$

Finalmente para Z obtenemos:

$$\ddot{Z} = \frac{Kpq \operatorname{sen}\theta}{m(X^2 + Y^2 + Z^2)^2} Z \quad (6.55)$$

Solución numérica

Recordemos que se resolverán ecuaciones de movimiento considerando el Lagrangiano

$$L = m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos\theta) - \frac{Kpq \operatorname{sen}\theta}{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \quad (6.56)$$

Haciendo los cambios de variable.

$$X_1 = \theta \quad (6.57)$$

$$X_2 = \phi \quad (6.58)$$

$$X_3 = \psi \quad (6.59)$$

$$X_4 = \dot{\theta} \quad (6.60)$$

$$X_5 = \dot{\phi} \quad (6.61)$$

$$X_6 = \dot{\psi} \quad (6.62)$$

$$X_7 = X \quad (6.63)$$

$$X_8 = Y \quad (6.64)$$

$$X_9 = Z \quad (6.65)$$

$$X_{10} = \dot{X} \quad (6.66)$$

$$X_{11} = \dot{Y} \quad (6.67)$$

$$X_{12} = \dot{Z} \quad (6.68)$$

Se reemplazan estos cambios de variables en las ecuaciones diferenciales ordinarias, resolviendo dichas ecuaciones usando el metodo de Runge - Kutta de orden cuatro. Se consideraron los siguientes parametros

$$\alpha = \frac{I_1}{I} = 0,5 \quad (6.69)$$

$$I_1 = I_2 = I = 1,0 \, kg.m^2 \quad (6.70)$$

$$I_3 = 0,5 \, kg.m^2 \quad (6.71)$$

$$m = 1,0 \, kg \quad (6.72)$$

$$c = kqp = 10,0 \, N.m^3 \quad (6.73)$$

Primer caso

$$\theta = \frac{37\pi}{180} \, rad \quad (6.74)$$

$$\phi = \psi = 0,0 \quad (6.75)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0,0 \quad (6.76)$$

$$\dot{\psi} = 1,0 \text{ rad/s} \quad (6.77)$$

$$X = 1,0 \text{ m} \quad (6.78)$$

$$Y = Z = 0,0 \text{ m} \quad (6.79)$$

$$\dot{X} = \dot{Z} = 0,0 \text{ m/s} \quad (6.80)$$

$$\dot{Y} = 0,1 \text{ m/s} \quad (6.81)$$

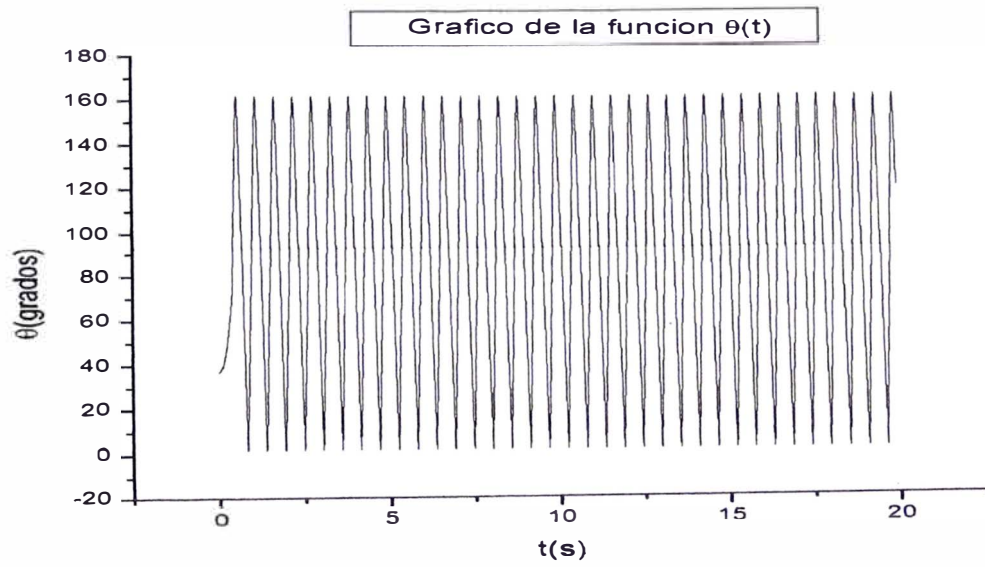


Figura 49: Grafico $\theta - (t)$

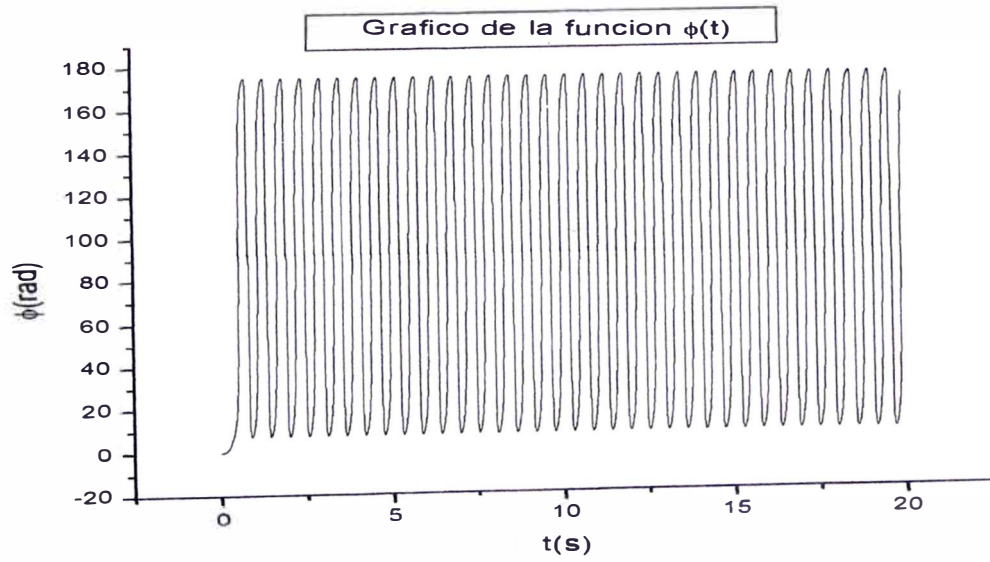


Figura 50: Grafico $\Phi - (t)$

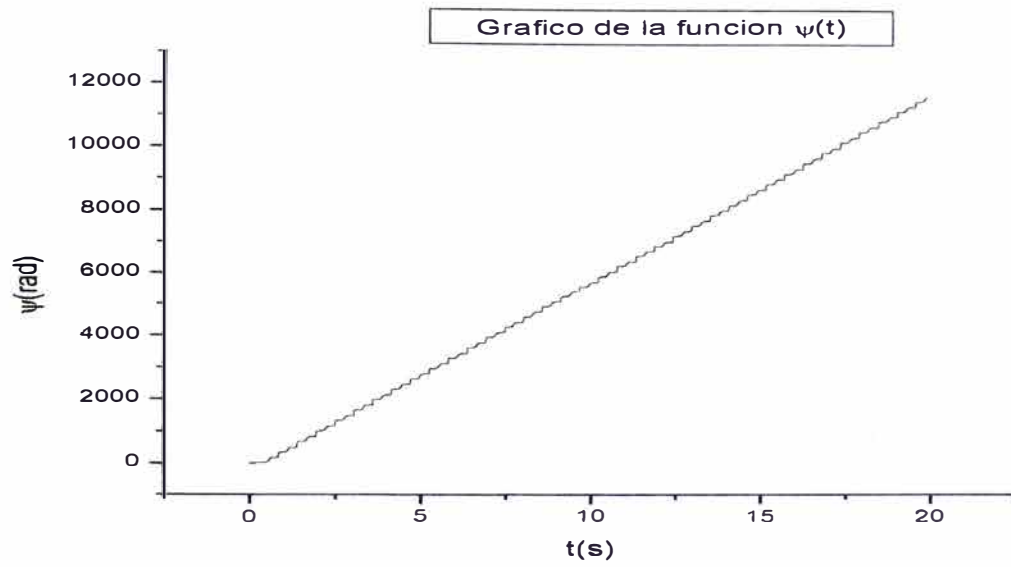


Figura 51: Grafico $\Psi - (t)$

Observaciones

De los graficos mostrados:

1. Los dos primeros ángulos de Euler tienen oscilaciones no periódicas y tienen una gran semejanza con el caso en que el segundo dipolo tiene centro de masa fijo.
2. Para cualquier condiciones iniciales, el centro de masa del dipolo se desplaza en trayectoria rectilínea. La razón de este movimiento es que la suma de todas las fuerzas externas sobre el dipolo es cero para puntos lejanos, es decir el dipolo se aleja de la carga positiva .
3. A pesar de que inicialmente el eje de rotación coincide con el eje de simetria. El ángulo θ de Euler oscila, esta propiedad del movimiento es semejante a las propiedades del movimiento de un sólido simétrico.

Conclusiones

1. De la experiencia adquirida observamos que podemos obtener ecuaciones diferenciales para sistemas eléctricos más complicados, por ejemplo: los sistemas de dos dipolos eléctricos.
2. Que el sistema de cargas estudiado es un modelo consistente con el movimiento de un dipolo eléctrico mas real alrededor del catión.
3. Que el movimiento de un dipolo eléctrico real (recordar que las cargas son cuerpos esféricos y no partículas) es parecido al movimiento de un sólido simétrico.

Apéndice 2: Puntos de equilibrio en el movimiento de un oscilador anisotrópico

Consideremos un oscilador anisotrópico que se mueve en el plano XY con energía potencial

$$E_p = \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2 \quad (6.82)$$

Como es obvio la función energía potencial tiene un mínimo que lo representamos por E_{pmin} . Para hallar la trayectoria debemos hallar la fuerza y aplicar la segunda ley de Newton y las ecuaciones son fáciles de resolver.

Si queremos conocer propiedades cualitativas de la trayectoria podemos aplicar el análisis del movimiento de una partícula en un movimiento unidimensional considerando los valores críticos de su energía potencial [20].

La energía es en este caso

$$E_m = E_k + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2 \quad (6.83)$$

donde E_k es la energía cinética y como es positiva, se cumple para todo movimiento

$$E_p \leq E_m \quad (6.84)$$

Un caso critico del movimiento es cuando

$$E_m = E_{pmin} \quad (6.85)$$

Como es evidente el valor de las coordenadas donde es mínimo, la energía potencial es un punto equilibrio estable. Luego se debe hallar los puntos críticos de la función $E_p(x, y)$ haciendo

$$\nabla E_p = 0 \quad (6.86)$$

consiguiendo $x = 0$, $y = 0$ es obvio que no es necesario el criterio de la segunda derivada para decir que en el origen de coordenadas es un mínimo y, por lo tanto, un punto de equilibrio estable. Como se sabe este resultado no es suficiente y aprovechando que se conserva el momento angular se considera el concepto de potencial efectivo se expresa la energía en función de la coordenada r y se halla la distancia máxima y mínima.

Pero si tenemos un sistema mecánico donde siempre la energía potencial depende de dos variables generalizadas q_1 , q_2 solo podemos hallar los valores donde hay punto de equilibrio estable e inestable hallando los puntos críticos.

El análisis que se hizo para el oscilador se puede generalizar para hallar propiedades más fundamentales y demostrar que hay posición de equilibrio para un sistema mecánico que tiene dos grados de libertad.

Apéndice 3: Energía potencial del dipolo móvil debido a la interacción eléctrica con el dipolo elemental fijo en dirección arbitraria .

Ahora consideramos el dipolo fijo elemental de momento dipolar $\vec{p}_1$ cuya orientación está definido por el vector unitario.

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad (6.87)$$

luego el momento dipolar es:

$$\vec{p}_1 = p_1(u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \quad (6.88)$$

por otra parte sabemos la relación del vector unitario $\vec{e}_3$ (que coincide con el eje de simetría dipolo móvil ver figura (46)) con los vectores unitarios paralelos al sistema de referencia XYZ :

$$\vec{e}_3 = \sin\theta \sin\phi \vec{i} - \sin\theta \cos\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \quad (6.89)$$

Luego el momento del dipolo móvil (recordar que su centro geométrico está fijo) es

$$\vec{p} = p(\sin\theta \sin\phi \vec{i} - \sin\theta \cos\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}) \quad (6.90)$$

Para puntos lejanos $(a,0,0)$ hallaremos el campo eléctrico mediante la fórmula (2.5) luego

$$\vec{E} = \frac{k p_1}{a^3} (2u_x \vec{i} - u_y \vec{j} - u_z \vec{k}) \quad (6.91)$$

Usando esta relación y la ecuación (2.6) se consigue la energía potencial para puntos lejanos que tiene el dipolo móvil que está en el eje X:

$$E_p = A (-2u_x \sin\theta \sin\phi + u_y \sin\theta \cos\phi + u_z \cos\theta) \quad (6.92)$$

donde

$$A = \frac{K p p_1}{a^3} \quad (6.93)$$

Es fácil demostrar que la función de lagrange es:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 - A (-2u_x \sin\theta \sin\phi + u_y \sin\theta \cos\phi + u_z \cos\theta) \quad (6.94)$$

Apéndice 4: Movimiento del dipolo eléctrico en el campo eléctrico producido por dos dipolos elementales perpendiculares.

Ahora consideramos dos dipolos elementales perpendiculares ubicados en el eje Z y eje Y tal que sus momentos dipolares son:

$$\vec{p}_1 = p_1 \vec{k} \quad (6.95)$$

$$\vec{p}_2 = p_2 \vec{j} \quad (6.96)$$

El objetivo de este apéndice es analizar la semejanza que hay con el movimiento estudiado. Usando las ecuaciones (2.5) y (2.6) tenemos la energía potencial del dipolo que se encuentra en el eje X a una distancia a .

$$E_p = A (p_1 \cos\theta - p_2 \sin\theta \cos\phi) \quad (6.97)$$

donde

$$A = \frac{k p}{a^3} \quad (6.98)$$

donde $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ son los momentos dipolares del dipolo que coincide con el eje Z y eje Y respectivamente. El otro momento dipolar es del dipolo que se halla en el eje X.

El análisis es semejante al que se hizo en el capítulo III.

Es fácil demostrar que la función de Lagrange es:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 - A(p_1 \cos\theta - p_2 \sin\theta \cos\phi) \quad (6.99)$$

aquí también observamos que solo la coordenada generalizada ψ es cíclica luego su momento generalizado p_ψ , es constantes, luego tenemos:

$$p_\psi = I_3(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) \quad (6.100)$$

es decir

$$(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) = \frac{p_\psi}{I_3} \quad (6.101)$$

por lo tanto, la energía mecánica se expresa como

$$E_m = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 + A(p_1 \cos\theta - p_2 \sin\theta \cos\phi) \quad (6.102)$$

que equivale

$$E_m - \frac{p_\psi^2}{2 I_3} = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + A(p_1 \cos\theta - p_2 \sin\theta \cos\phi) \quad (6.103)$$

si definimos como en los capítulos anteriores

$$E'_m \equiv E_m - \frac{p_\psi^2}{2 I_3} \quad (6.104)$$

se obtienen

$$E'_m = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + A(p_1 \cos \theta - p_2 \text{sen} \theta \cos \phi) \quad (6.105)$$

recordemos que la energía potencial es

$$E_p = A(p_1 \cos \theta - p_2 \text{sen} \theta \cos \phi) \quad (6.106)$$

Puntos de equilibrio del Movimiento del Dipolo.

Como es evidente aquí también se cumple que

$$E_p(\theta, \phi) \leq E'_m. \quad (6.107)$$

luego hay puntos de equilibrio, hallando los puntos críticos de $E_p(\theta, \phi)$, tomando la gradiente e igualando cero consiguiendo (para $p_1 = p_2 = p$) las ecuaciones:

$$\text{sen} \theta \text{sen} \phi = 0 \quad (6.108)$$

$$\text{sen} \theta + \cos \theta \cos \phi = 0 \quad (6.109)$$

obteniendo las mismas valores críticos hallados .

Apéndice 5: Introducción a la teoría de la estabilidad.

En este apéndice se hace una introducción a la teoría de Lyapunov [21], para aplicar luego a las posiciones de equilibrio calculadas en el capítulo II con el fin de verificar los resultados.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (6.110)$$

Una solución $\phi_i(t)$, donde

$$i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6.111)$$

del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, que satisface las condiciones iniciales $\phi_i(t_0) = \phi_{i0}$ se llama estable según Lyapunov, si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $\delta(\epsilon) > 0$, tal que para cada solución nueva $x_i(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyos valores iniciales $x_i(t_0)$ cumplan las condiciones.

$$|x_i(t_0) - \phi_{i0}| < \delta \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (6.112)$$

se verifica la desigualdad

$$|x_i(t) - \phi_i(t)| < \epsilon \quad (6.113)$$

para todos los valores $t \geq t_0$.

Si para los valores de $\delta > 0$ arbitrariamente pequeños no se cumple la igualdad anterior, la solución $\phi_i(t)$ se llama inestable. Lo anterior es una definición matemática (semejante a la definición de Límite) que se puede interpretar de manera intuitiva una solución es estable si al cambiar un poco las condiciones iniciales la nueva solución es cercana a la antigua solución.

Si además se cumple para las soluciones estables,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \phi_i(t)| = 0 \quad (6.114)$$

decimos que la solución $\phi_i(t)$, se llama asintóticamente estable. Un caso particular muy importante es analizar la estabilidad de una solución nula (llamada solución trivial o punto de reposo)

$$x_i(t) = 0 \quad (6.115)$$

de un sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (6.116)$$

donde

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \quad (6.117)$$

Se dice para el caso del punto de reposo, las definiciones de estabilidad e inestabilidad se pueden formular de la siguiente manera :

El punto de reposo $x_i(t) = 0$ que corresponde a la condiciones iniciales $x_i(0) = 0$ es estable según Lyapunov, si para cualquier $\epsilon > 0$ es posible hallar un $\delta > 0$ tal que cualquier solución $\phi_i(t)$ cuyos datos iniciales ϕ_{i0} satisfacen a la condición

$$|\phi_{i0}| < \delta \quad (6.118)$$

Se verifica la desigualdad

$$|x_i(t)| < \epsilon \quad (6.119)$$

para todos los valores $t \geq t_0$

Si para las soluciones estables se cumple la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t)| = 0, \quad (6.120)$$

la estabilidad se llama asintótica.

Rigurosamente para estudiar la estabilidad de una solución punto de reposo deberíamos aplicar la definición, o resolver las ecuaciones de movimiento para cualquier condición inicial y modificar estas condiciones iniciales haciendo que 'se acerque a cero' para determinar si la solución tiende a cero si fuera así decimos que es estable la solución trivial . Un ejemplo de resolver fácilmente es el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (6.121)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x \quad (6.122)$$

con condiciones iniciales es $x(0) = 0, \quad y(0) = 0$

La solución del sistema que satisface a las condiciones iniciales dadas es

$$x(t) = 0 \quad (6.123)$$

$$y(t) = 0 \quad (6.124)$$

Denotaremos con mayúsculas las nuevas soluciones $X(t), Y(t)$ considerando las condiciones iniciales

$$X(0) = a \quad (6.125)$$

$$Y(0) = b \quad (6.126)$$

se puede demostrar que

$$X(t) = a \cos(t) + b \sin(t), \quad (6.127)$$

$$Y(t) = -asen(t) + bcos(t). \quad (6.128)$$

Pero en general es difícil resolver y mediante el siguiente teorema sabremos cuando una solución trivial es estable o inestable.

Teoremas de la estabilidad de Puntos de Reposo

Sea un sistema de dos ecuaciones diferenciales homogéneas de coeficientes constantes

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \quad (6.129)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (6.130)$$

Como sabemos las funciones $x(t) = 0$, e $y(t) = 0$, anulan los segundos miembros de las ecuaciones (6.129) y (6.130), y son la solución punto de reposo del sistema o punto singular.

La estabilidad de la solución punto de reposo se puede determinar considerando la matriz

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (6.131)$$

de donde se tiene el polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.132)$$

sean sus raíces λ_1 y λ_2 de esta ecuación algebraica. Son posibles los casos siguientes:

1. Las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación característica son reales y distintas :
 - i) Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Punto de reposo de estabilidad asintótica (modo estable).
 - ii) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Punto de reposo inestable (modo inestable).
 - iii) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Punto de reposo inestable (punto de ensilladura).
2. Las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación característica son números complejos:

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq, \quad (6.133)$$

- i) Si $p < 0$, $q \neq 0$. Punto de reposo de estabilidad asintótica (foco estable).
- ii) Si $p > 0$, $q \neq 0$. Punto de reposo inestable (foco inestable).

iii) Si $p = 0$, $q \neq 0$. Punto de reposo estable (cent).

3. Las raíces son múltiples $\lambda_1 = \lambda_2$

a) Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Punto de reposo de estabilidad asintótica .

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Punto de reposo inestable (modo inestable) Si el valor propio es cero no se puede decir nada, en ese caso se debería resolver las ecuaciones de movimiento. Todos estos conceptos se generalizan para un sistema de ecuaciones de n dimensiones.

Ejemplo aplicación al movimiento amortiguado

Consideremos la ecuación diferencial de movimiento :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w^2x = 0 \quad (6.134)$$

Analizaremos la estabilidad de la solución punto de reposo (que equivale a que esté el oscilador en un punto de equilibrio con velocidad inicial cero), haciendo los siguientes cambios de variable

$$x = u_1 \quad (6.135)$$

$$\dot{x} = u_2 \quad (6.136)$$

Reemplazando en la ecuación del oscilador amortiguado se consigue

$$\dot{u}_1 = u_2 \quad (6.137)$$

$$\dot{u}_2 = -2\beta u_2 - w^2 u_1 \quad (6.138)$$

Obviamente, la solución trivial (punto de reposo) es $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = 0$ equivale

$$x(t) = 0 \quad (6.139)$$

$$v_x(t) = 0 \quad (6.140)$$

Para analizar la estabilidad de esta solución (Que sabemos por física elemental que es estable) hallaremos los valores propios de

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -2\beta \end{pmatrix} \quad (6.141)$$

Los valores propios son:

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - w^2} \quad (6.142)$$

$$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - w^2} \quad (6.143)$$

Luego independiente de la relación entre los parámetros w, β se puede probar que al analizar todos los casos posibles se tendrá que la solución de punto de reposo que es estable asintóticamente.

Análisis de soluciones constantes de un sistema lineales no homogéneo con terminos constantes .

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(x - x_o) + a_{12}(y - y_o) \quad (6.144)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(x - x_o) + a_{22}(y - y_o) \quad (6.145)$$

Es obvio que es solución

$$x(t) = x_o \quad (6.146)$$

$$y(t) = y_o \quad (6.147)$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = x_o \quad (6.148)$$

$$y(0) = y_o \quad (6.149)$$

para saber si es estable hacemos cambio de variable

$$u = x(t) - x_o \quad (6.150)$$

$$v = y(t) - y_o \quad (6.151)$$

obteniendo

$$\frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \quad (6.152)$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \quad (6.153)$$

luego estaríamos en el caso anterior.

Es decir analizar las soluciones constantes equivale a estudiar soluciones triviales.

Análisis de soluciones constantes de un sistema no lineales.

Consideremos el sistema de ecuaciones no lineal

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y) \quad (6.154)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y) \quad (6.155)$$

Para saber si tiene soluciones estacionarias consideramos las ecuaciones algebraicas

$$g(x, y) = 0 \quad (6.156)$$

$$f(x, y) = 0 \quad (6.157)$$

sea x_o, y_o las soluciones luego se tiene la solución estacionaria

$$x(t) = x_o \quad (6.158)$$

$$y(t) = y_o \quad (6.159)$$

para analizar la estabilidad de estas soluciones aplicamos la serie de Taylor de dos variables a esta dos funciones g, f alrededor del punto (x_o, y_o) , es decir

$$\frac{dx}{dt} = g(x_o, y_o) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o) \quad (6.160)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o) \quad (6.161)$$

simplificando

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}((x_o, y_o))(x - x_o) + \frac{\partial g}{\partial y}((x_o, y_o))(y - y_o) \quad (6.162)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o) \quad (6.163)$$

Luego hemos linealizado las ecuaciones y podemos aplicar el teorema anterior. Pero a veces no es necesario aplicar el teorema de taylor, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = (x - 1) + y(x - 1)^4 + (y - 2) \quad (6.164)$$

$$\dot{y} = (y - 2) + x^2(y - 2)^4 + 3(x - 1) \quad (6.165)$$

Es obvio que una solución estacionaria es

$$x(t) = 1 \quad (6.166)$$

$$y(t) = 2 \quad (6.167)$$

Podemos despreciar algunos términos de la ecuación si x , y están muy cerca a las soluciones constantes, luego tenemos que

$$\dot{x} = (x - 1) + (y - 2) \quad (6.168)$$

$$\dot{y} = (y - 2) + 3(x - 1) \quad (6.169)$$

Para analizar la estabilidad de $x(t) = 1$, y $y(t) = 2$ Hacemos

$$x - 1 = u \quad (6.170)$$

$$y - 2 = v \quad (6.171)$$

Entonces

$$\dot{u} = u + v \quad (6.172)$$

$$\dot{v} = 3u + v \quad (6.173)$$

Luego analizamos la estabilidad en $x(t) = 1$, y $y(t) = 2$ Equivale a estudiar la estabilidad en

$$u(t) = 0 \quad (6.174)$$

$$v(t) = 0 \quad (6.175)$$

Luego hallamos los valores propios de:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.176)$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.177)$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 3 \quad (6.178)$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{3} \quad (6.179)$$

por el teorema mencionado es inestable.

Apéndice 6: Aplicación de la teoría de estabilidad de Lyapunov al movimiento del dipolo.

En el subcapítulo 2.3 se estudio el movimiento de un dipolo con centro de masa fijo en el eje X este dipolo esta en un campo eléctrico generado por otro dipolo eléctrico fijo ubicado en el plano YZ (Ver Fig 52) .

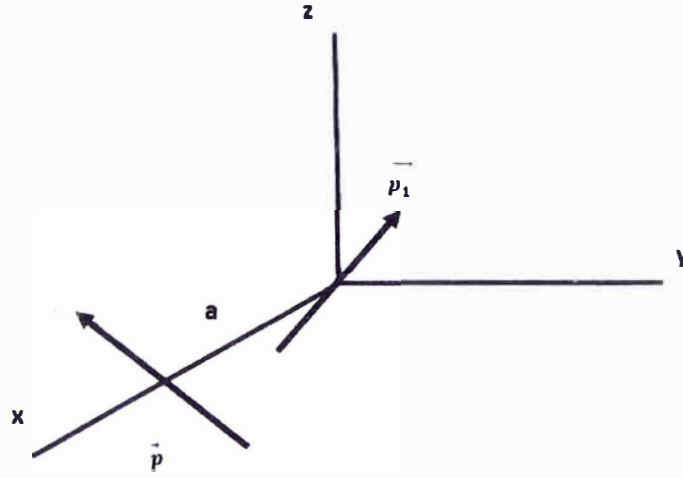


Figura 52: Dipolo elemental fijo en el plano YZ

Después de analizar los puntos críticos de su energía potencial se halló que cuando los ángulos de Euler

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \quad (6.180)$$

$$\phi = 0 \quad (6.181)$$

Corresponde a la posición de equilibrio estable. En este apéndice comprobaremos este resultado usando la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Por otra parte recordemos que el Lagrangiano es:

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - A(-\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \quad (6.182)$$

de donde tenemos el momento generalizado

$$p_{\psi} = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (6.183)$$

como es obvio este p_ψ se conserva, luego de (2.67)

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta \quad (6.184)$$

Haciendo

$$a = \frac{p_\psi}{I_3} \quad (6.185)$$

Entonces

$$\dot{\psi} = (a - \dot{\phi} \cos \theta) \quad (6.186)$$

Reemplazando la ecuación (6.186) en (2.114) y (2.115)

$$\ddot{\theta} = \frac{(I - I_3) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \dot{\phi} (a - \dot{\phi} \cos \theta) \sin \theta}{I} + \frac{A(\sin(\theta) + \cos(\theta)\cos(\phi))}{I_1} \quad (6.187)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(-2I + I_3) \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + I_3 (a - \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\theta}}{I \sin \theta} - \frac{A \sin(\phi)}{I \sin(\theta)} \quad (6.188)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\theta = X_1 \quad (6.189)$$

$$\phi = X_2 \quad (6.190)$$

$$\dot{\theta} = X_3 \quad (6.191)$$

$$\dot{\phi} = X_4 \quad (6.192)$$

Luego tenemos

$$\dot{X}_1 = X_3 \quad (6.193)$$

$$\dot{X}_2 = X_4 \quad (6.194)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \frac{x_2^2 \sin(2x_1)}{2} - \frac{x_4}{\alpha} (a - x_4 \cos(x_1)) \sin x_1 + D(\sin(x_1) + \cos x_1 \cos(x_2)) \quad (6.195)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{x_3}{\alpha} [a \csc(x_1) - x_4 \cot(x_1)] + (1 - 2\alpha) x_3 x_4 \cot(x_1) - D \sin(x_2) \csc(x_1) \quad (6.196)$$

Donde

$$\alpha = \frac{I}{I_3} \quad (6.197)$$

$$D = \frac{A}{I} \quad (6.198)$$

Representaremos a los segundos miembros del sistema de ecuaciones diferenciales como la función $g_j(x_l)$ es decir

$$g_1(x_l) = X_3 \quad (6.199)$$

$$g_2(x_l) = X_4 \quad (6.200)$$

$$g_3(x_l) = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} x_4^2 \frac{\text{sen}(2x_1)}{2} - \frac{x_4 \text{sen}(x_1)(a - x_4 \cos(x_1))}{\alpha} + D(\text{sen}(x_1) + \cos x_1 \cos(x_2)) \quad (6.201)$$

$$g_4(x_l) = \frac{x_3}{\alpha} [\text{acsc}(x_1) - \cot(x_1)] + (1 - 2\alpha)x_3x_4\cot(x_1) - D\text{sen}(x_2)\csc(x_1) \quad (6.202)$$

Rigurosamente para hallar las soluciones estacionarias (puntos de equilibrio) hacemos

$$g_k(x_l) = 0 \quad (6.203)$$

obteniendo una de las soluciones

$$x_{equil} = \frac{3\pi}{4} \quad (6.204)$$

$$x_{equi2} = 0 \quad (6.205)$$

$$x_{equi3} = 0 \quad (6.206)$$

$$x_{equi4} = 0 \quad (6.207)$$

y la otra solución es:

$$x_{equil} = \frac{\pi}{4} \quad (6.208)$$

$$x_{equi2} = \pi \quad (6.209)$$

$$x_{equi3} = 0 \quad (6.210)$$

$$x_{equi4} = 0 \quad (6.211)$$

Segun la teoría de Lyapunov debemos aplicar la serie de taylor para la función $g_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$ alrededor de los puntos de equilibrio mencionados linealizando la E.D.O. es decir

$$x_1 = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(\bar{x}_{equi})(x_j - x_{jc}) \quad (6.212)$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial g_2}{\partial x_j}(\bar{x}_{equi})(x_j - x_{jc}) \quad (6.213)$$

$$x_3 = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial g_3}{\partial x_j}(\bar{x}_{equi})(x_j - x_{jc}) \quad (6.214)$$

$$x_4 = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial g_4}{\partial x_j}(\bar{x}_{equi})(x_j - x_{jc}) \quad (6.215)$$

Efectuando las derivadas parciales para el primer punto de equilibrio

Entonces:

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (6.216)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (6.217)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{A\sqrt{2}}{I}\left(x_1 - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{a\sqrt{2}}{2\alpha}x_4 \quad (6.218)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{A\sqrt{2}}{I}x_2 + \frac{a\sqrt{2}}{\alpha}x_3 \quad (6.219)$$

ahora definimos

$$u_j = x_j - x_{equij} \quad (6.220)$$

luego se tendra

$$\dot{u}_1 = u_3 \quad (6.221)$$

$$\dot{u}_2 = u_4 \quad (6.222)$$

$$\dot{u}_3 = -\frac{A\sqrt{2}}{I}u_1 - \frac{a\sqrt{2}}{2\alpha}u_4 \quad (6.223)$$

$$\dot{u}_4 = -\frac{A\sqrt{2}}{I}u_2 + \frac{a\sqrt{2}}{\alpha}u_3 \quad (6.224)$$

para la otra posición de equilibrio se tendra siguiendo el mismo procedimiento

$$\dot{u}_1 = u_3 \quad (6.225)$$

$$\dot{u}_2 = u_4 \quad (6.226)$$

$$\dot{u}_3 = \frac{A\sqrt{2}}{I}u_1 - \frac{a\sqrt{2}}{2\alpha}u_4 \quad (6.227)$$

$$\dot{u}_4 = \frac{A\sqrt{2}}{I}u_2 + \frac{a\sqrt{2}}{\alpha}u_3 \quad (6.228)$$

De los segundos miembros del sistema de ecuaciones diferenciales se tiene las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{A\sqrt{2}}{I} & 0 & 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2\alpha} \\ 0 & -\frac{A\sqrt{2}}{I} & \frac{a\sqrt{2}}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.229)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A\sqrt{2}}{I} & 0 & 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2\alpha} \\ 0 & \frac{A\sqrt{2}}{I} & \frac{a\sqrt{2}}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.230)$$

Consideremos los parametros usados en la simulación en el subcapitulo 2.4

$$\frac{A}{I} = 0,5 \quad (6.231)$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \quad (6.232)$$

$$I_3 = 1 \quad (6.233)$$

Para el primer conjunto de datos

$$a = 0,1 \quad (6.234)$$

luego se tiene la matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,701 & 0 & 0 & -0,0943 \\ 0 & -0,701 & 0,188 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.235)$$

Obteniendo los valores propios

$$\lambda_1 = 0,77i \quad (6.236)$$

$$\lambda_2 = -0,77i \quad (6.237)$$

$$\lambda_3 = 0,91i \quad (6.238)$$

$$\lambda_4 = -0,91i \quad (6.239)$$

que significa que el movimiento es estable.

Para el Segundo caso

$$a = 1 \quad (6.240)$$

tenemos que

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,701 & 0 & 0 & -0,943 \\ 0 & -0,701 & 1,88 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.241)$$

obteniendo los valores propios

$$\lambda_1 = 0,40i \quad (6.242)$$

$$\lambda_2 = -0,40i \quad (6.243)$$

$$\lambda_3 = 1,74i \quad (6.244)$$

$$\lambda_4 = -1,74i \quad (6.245)$$

que significa también que el movimiento es estable. Finalmente consideramos

Para el tercer caso

$$a = 5 \quad (6.246)$$

tenemos que

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,701 & 0 & 0 & -4,715 \\ 0 & -0,701 & 9,43 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.247)$$

consiguiendo los valores propios

$$\lambda_1 = 0,10i \quad (6.248)$$

$$\lambda_2 = -0,10i \quad (6.249)$$

$$\lambda_3 = 6,77i \quad (6.250)$$

$$\lambda_4 = -6,77i \quad (6.251)$$

Para el caso de la solución inestable consideramos los parametros anteriores y el primer valor para **a** tenemos

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,701 & 0 & 0 & -0,0943 \\ 0 & 0,701 & 0,188 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.252)$$

los valores propios son:

$$\lambda_1 = 0,83 + 0,07i \quad (6.253)$$

$$\lambda_2 = 0,83 - 0,07i \quad (6.254)$$

$$\lambda_3 = -0,83 + 0,07i \quad (6.255)$$

$$\lambda_4 = -0,83 - 0,07i \quad (6.256)$$

Por teoría de estabilidad es inestable el movimiento. Los valores propios se hallaron usando un programa que está en[22]

Apéndice 7: Cálculo numérico del momento generalizado p_ψ .

Como sabemos en el movimiento del dipolo eléctrico se conserva la energía mecánica y el momento generalizado p_ψ (esta constante de movimiento coincide con la componente w_3) para las simulaciones consideradas en el presente tesis. Al aplicar cálculo numérico se encontró un error aceptable. En este apéndice se muestra algunos gráficos de la función $w_3(t)$, correspondientes al capítulo 2 y hallamos el error relativo. Como observamos la magnitud p_ψ fluctúa alrededor de un valor promedio y también mostramos el error relativo de cada gráfico. Como es evidente no se muestra el comportamiento de la magnitud p_ψ porque los resultados son semejantes.

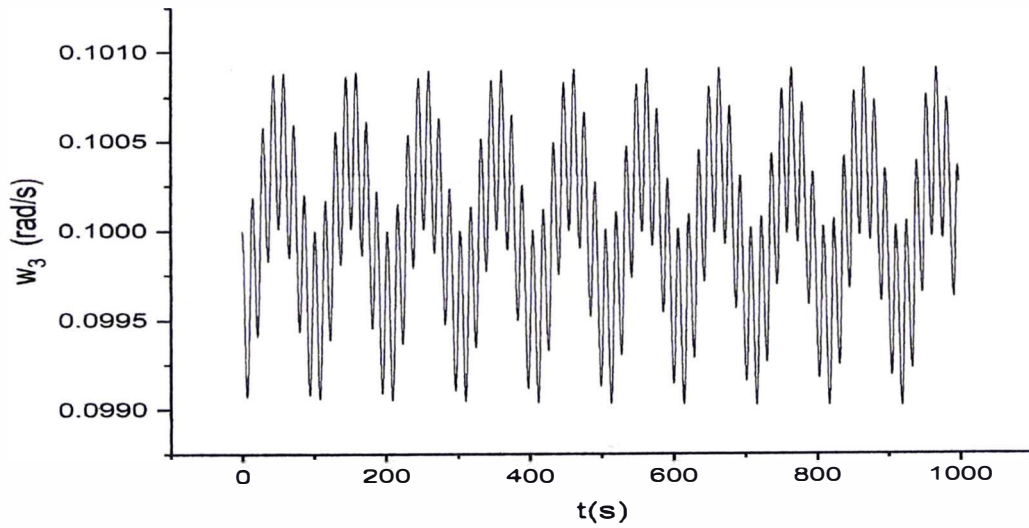


Figura 53: Muestra las oscilaciones de w_3 para el conjunto de datos del cuadro 1

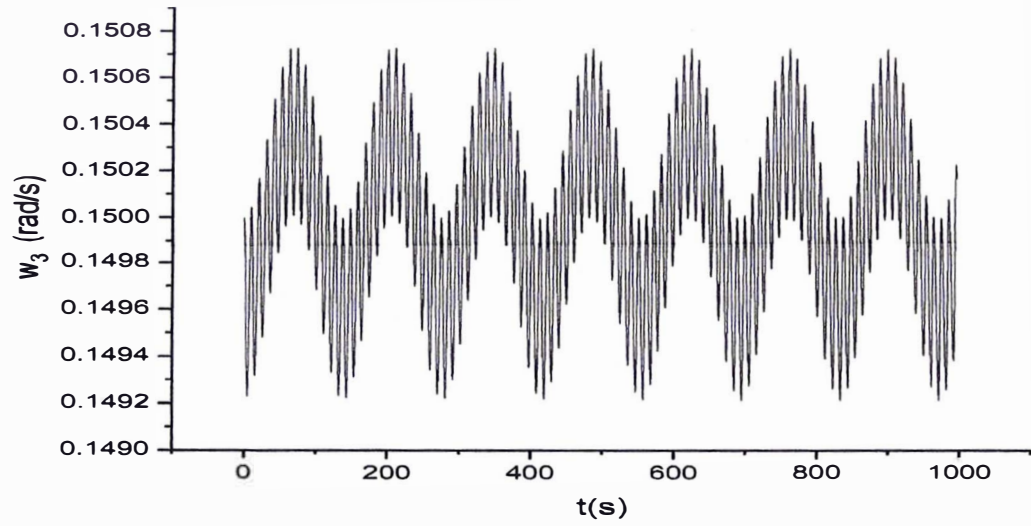


Figura 54: Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 2

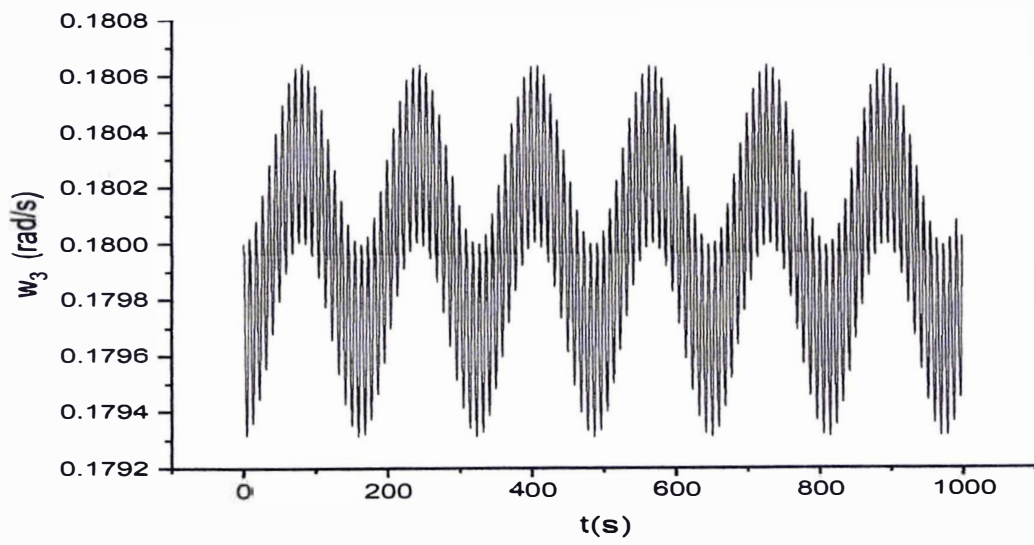


Figura 55: Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 3

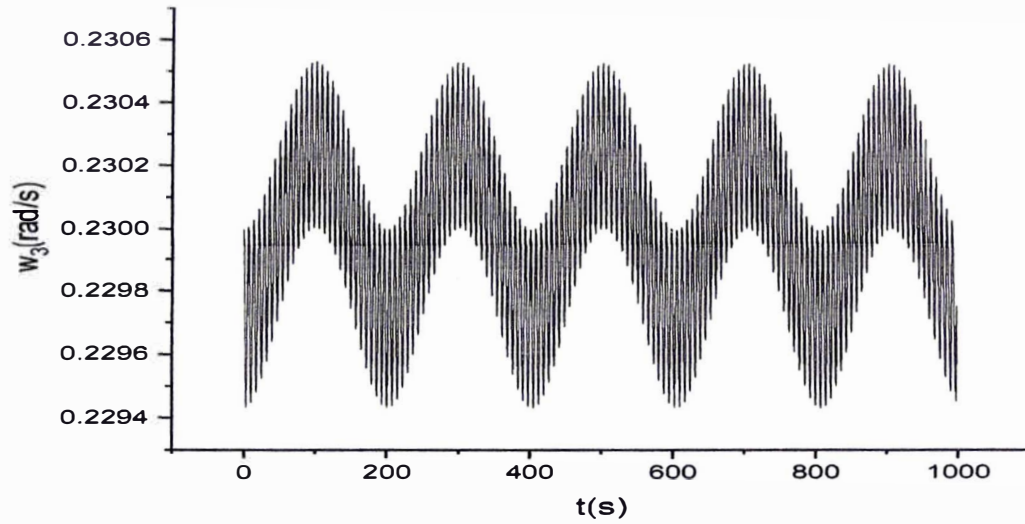


Figura 56: Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 4

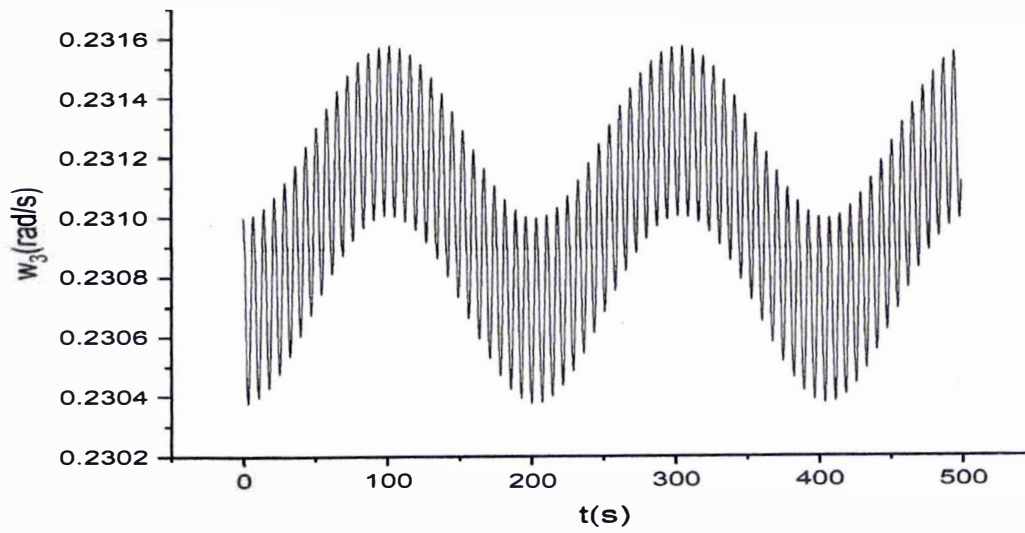


Figura 57: Muestra las oscilaciones de ω_3 para el conjunto de datos del cuadro 5

A continuación hallaremos el error relativo de la siguiente manera:

Sea ω_{3Max} y ω_{3Min} los valores máximos y mínimos de ω_3 el error relativo está definido por

$$e = \frac{\omega_{3Max} - \omega_{3Min}}{\omega_{3Prom}} \quad (6.257)$$

Considerando los gráficos $\omega_3(t)$ de las figuras 53,54,55,56 y 57 de este apéndice se halló la siguiente tabla que muestra los errores relativos.

Datos de la $\omega_3(t)$				
<i>FIGURA</i>	ω_{3Max}	ω_{3Min}	ω_{3Prom}	<i>ERROR RELATIVO %</i>
53	0,10080	0,0990	0,100	1,8
54	0,1507	0,1492	0,150	1,0
55	0,18065	0,1793	0,180	0,75
56	0,2305	0,22955	0,23	0,41
57	0,2316	0,2304	0,2310	0,51

Cuadro 10: Tabla de errores relativos

Como se observa en la tabla mostrada el error cometido es menor del 2 % y por lo tanto los cálculos numéricos son aceptables.

Apéndice 8:Análisis del Periodo de las oscilaciones de los ángulos de Euler θ y ϕ .

Considerando los gráficos de la paginas del 29 al 36 se obtiene las siguientes tablas con el fin de conseguir una relación entre el 'periodo' de los ángulos de Euler $\theta(t)$ y $\phi(t)$. Para el capitulo II tenemos la tabla

Datos de los Periodos T		
$\dot{\psi}(0)$ en grados/s	T de $\theta(t)$ en s	T de $\phi(t)$ en s
5,730	164	166
8,59	242	250
10,31	216	296
13,1	198	200

Cuadro 11: Tabla de los Periodos

Observamos que cuando aumenta la condicion inicial el 'periodo' aumenta para luego disminuir. Esta conclusión es para el conjuntos de valores de la condición inicial considerada. No se hizo un cálculo semejante para el capitulo III por que solo en un caso los ángulos θ y ϕ tiene indicios de ser periodicos. Es posible obtener más propiedades del dipolo observando los gráficos pero este análisis se deja para trabajo posteriores. Recordemos que el objetivo de obtener estos gráficos fue comprobar la estabilidad del movimiendo obtenido con la teoría de Lyapunov y análisis de la energía potencial.

Bibliografía

- [1] B. D. C. Cohen-Tannoudji y F. Laloe, *Quantum mechanics, vol 1*. John Wiley Sons, New York, 1977.
- [2] E.-á. Brunberg, “Experimental determination of electron orbits in the field of a magnetic dipole”, *Tellus*, vol. 5, n.º 2, págs. 135-156, 1953.
- [3] A. Peshkovsky y A. E. McDermott, “Dipolar interactions in molecules aligned by strong AC electric fields”, *Journal of Magnetic Resonance*, vol. 147, n.º 1, págs. 104-109, 2000.
- [4] S. Y. van de Meerakker, H. L. Bethlem y G. Meijer, “Slowing, Trapping, and Storing of Polar Molecules by Means of Electric Fields”, en *Cold Molecules*, CRC Press, 2009, págs. 541-584.
- [5] A. J. Maciejewski, M. Przybylska e Y. Yaremko, “Dynamics of a dipole in a stationary electromagnetic field”, *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 475, n.º 2229, pág. 20 190 230, 2019.
- [6] A. Talledo, “Teoría de campos electromagnéticos, 1998, Edit”, *Ciencias, Lima*,
- [7] J. D. Jackson, *Electrodinámica clásica*. 1980.
- [8] B. Frka-Petesic, B. Jean y L. Heux, “First experimental evidence of a giant permanent electric-dipole moment in cellulose nanocrystals”, *Europhysics Letters*, vol. 107, n.º 2, pág. 28 006, 2014.
- [9] R. D. Knight, “The general form of the quadrupole ion trap potential”, *International journal of mass spectrometry and ion physics*, vol. 51, n.º 1, págs. 127-131, 1983.
- [10] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mechanics and electrodynamics*. Elsevier, 2013.
- [11] J. R. Reitz et al., “Fundamentos de la teoría electromagnética”, 1996.
- [12] H. Goldstein, *Mecánica clásica*. Reverté, 2018.
- [13] M. Przybylska, A. J. Maciejewski e Y. Yaremko, “Electromagnetic trap for polar particles”, *New Journal of Physics*, vol. 22, n.º 10, pág. 103 047, 2020.

- [14] H. Sakai, S. Minemoto, H. Nanjo, H. Tanji y T. Suzuki, "Controlling the orientation of polar molecules with combined electrostatic and pulsed, nonresonant laser fields", *Physical review letters*, vol. 90, n.º 8, pág. 083001, 2003.
- [15] K. R. Seymon, *Mecánica*. Aguilar, 1979.
- [16] R. Murray, *Teoría y problemas de mecánica teórica*, 1967.
- [17] M. R. Spiegel et al., "Teoría y problemas de análisis vectorial", 1969.
- [18] N. Haaser, J. LaSalle y J. Sullivan, *A Course in Mathematical Analysis, Vol. II, Intermediate Analysis*, 1964.
- [19] J. Taylor, *Mecánica clásica*. Reverté, 2013.
- [20] W. Hauser, "Introducción a los principios de mecánica", 1969.
- [21] A. Kiseliiov, M. L. Krasnov, G. Makarenko y E. A. Bernardo, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Mir, 1968.
- [22] *MS Windows NT Kernel Description*, http://https://es.planetcalc.com/search/#google_vignette, Accessed: 2010-09-30.