

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LA ECUACIÓN ESTACIONARIA DEL
CALOR EN UNA PLACA CIRCULAR CON DIFERENTES
DEPENDENCIAS DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA**

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN FÍSICA**

ELABORADA POR:

JAIME JEAN PAUL CARREÑO LA ROSA

 0009-0007-9828-8733

ASESOR:

Dr. ALEJANDRO DANIEL PAREDES CABREL

 0000-0003-0120-5211

LIMA - PERÚ

2025

Citar/How to cite	Carreño La Rosa [1]
Referencia/Reference	[1] J. Carreño La Rosa. “Estudio numérico de la ecuación estacionaria del calor en una placa circular con diferentes dependencias de la conductividad térmica” [Tesis de pregrado]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2025.
Estilo/Style: IEEE (2020)	

Citar/How to cite	(Carreño, 2025)
Referencia/Reference	Carreño, J. (2025). Estudio numérico de la ecuación estacionaria del calor en una placa circular con diferentes dependencias de la conductividad térmica. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI.
Estilo/Style: APA (7ma ed.)	

Dedicatoria

*A mi madre, Lupe, por su gran esfuerzo, dedicación y
comprensión. Gracias por brindarme tu apoyo en los
momentos más difíciles.*

*A mi hermana, Zuleyka, quien día a día me impulsa a
seguir adelante.*

*Son el principal motivo por el cual puedo alcanzar mis
objetivos.*

Agradecimientos

Agradezco profundamente al profesor Alejandro Paredes Cabrel por su invaluable apoyo, disposición y paciencia durante la elaboración de esta tesis. También le agradezco por las largas conversaciones y consejos, tanto en el ámbito académico como en la vida misma.

Asimismo, agradezco a Carlo, Jose y Michael; juntos enfrentamos los momentos más difíciles de la carrera, siempre dispuestos a brindarnos una mano.

Muchas gracias.

Resumen

En este trabajo se resuelve numéricamente la ecuación del calor en estado estacionario para una placa circular, sin fuentes internas y con condición de contorno de Dirichlet. Se resuelve el problema para tres casos: conductividad térmica constante, conductividad térmica dependiente de la temperatura y conductividad térmica con dependencia radial. El primer caso considera una conductividad térmica constante, lo que reduce el problema a la ecuación de Laplace. Para este caso, se propone un método numérico que consiste en aplicar una expansión de Fourier y el método de diferencias finitas. Se realiza una comparación entre la solución analítica y numérica, validando así el método propuesto. El segundo caso considera una conductividad térmica dependiente de la temperatura, lo que resulta en una ecuación diferencial no lineal. Para este caso, se aplica una transformación de Kirchhoff a la ecuación, obteniendo una expresión conocida que permite aplicar el método numérico utilizado en el primer caso. El tercer caso considera una conductividad térmica con dependencia radial, lo que también modifica la ecuación diferencial. En este último caso, la placa circular se modela como la unión de diferentes materiales con conductividad térmica constante, para luego aplicar un método numérico similar al del primer caso.

Abstract

In this work, the steady-state heat equation for a circular plate is solved numerically, considering non internal heat sources and Dirichlet boundary conditions. The problem is addressed for three cases: constant thermal conductivity, temperature-dependent thermal conductivity, and radially dependent thermal conductivity. The first case considers a constant thermal conductivity, which reduces the problem to Laplace's equation. In this case, a numerical method is proposed which consists of applying a Fourier expansion and the finite difference method. A comparison between the analytical and numerical solutions is performed, thereby validating the proposed method. The second case considers temperature-dependent thermal conductivity, resulting in a nonlinear differential equation. In this case, a Kirchhoff transformation is applied to the equation, obtaining a known expression that allows applying the numerical method used in the first case. The third case considers a radially dependent thermal conductivity, which also modifies the differential equation. In this last case, the circular plate is modeled as the union of different materials with constant thermal conductivity, and a numerical method similar to the one used in the first case is then applied.

Tabla de Contenido

Resumen	v
Abstract	vi
Introducción	xx
Capítulo I: Parte introductoria del trabajo	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Pregunta, Hipótesis y Objetivo	3
Capítulo II: Conceptos previos	6
2.1 Calor y flujo térmico	6
2.2 Ley de Fourier	7
2.3 Ecuación del Calor	10
2.4 Condiciones de Contorno (CC)	15
2.5 Expansión de Fourier (EF)	18
2.6 Operadores en Coordenadas polares	20
2.7 Método de Diferencias Finitas (DF)	22
2.8 Solución Numérica de un sistema lineal complejo	30
2.9 Condiciones de contorno en el objeto de estudio	31
Capítulo III: Conductividad térmica constante	33

3.1	Soluciones analíticas	38
3.2	Solución numérica	42
3.2.1	Discretización de la ecuación del calor	42
3.2.2	Solución con 2 puntos en la dirección radial	45
3.2.3	Solución con n puntos en la dirección radial	51
3.3	Análisis de errores	54
Capítulo IV: Conductividad térmica dependiente de la temperatura		58
4.1	Dependencia con la temperatura	59
4.2	Desarrollo de la ecuación del calor	61
4.3	Transformación de Kirchhoff	62
4.4	Solución numérica	65
4.4.1	Primera solución	67
4.4.2	Segunda solución	71
Capítulo V: Conductividad térmica con dependencia radial		75
5.1	Solución analítica para un medio	76
5.1.1	Solución en un disco	76
5.1.2	Solución en un anillo	78
5.2	Solución analítica para dos medios	80
5.2.1	Problema unidimensional	81
5.2.2	Problema de un disco y un anillo	83
5.2.3	Problema de dos anillos	87
5.3	Solución numérica para dos medios en contacto	93
5.3.1	Problema unidimensional	93
5.3.2	Caso de dos anillos	98
5.3.3	Caso de un disco y un anillo	107
5.4	Solución numérica	110
5.5	Análisis de solución	116
5.5.1	Solución para una CC constante	117
5.5.2	Soluciones para la PCCD	119

5.5.3 Soluciones para la SCCD	123
Conclusiones	129
Bibliografía	134
Anexos	136

Lista de Tablas

Tabla 2.1:	Aproximaciones de la primera y segunda derivada por diferencias finitas hacia adelante. Se presentan dos expresiones por cada derivada, las cuales corresponden a un orden de truncamiento diferente.	28
Tabla 2.2:	Aproximaciones de la primera y segunda derivada por diferencias finitas hacia atrás. Se presentan dos expresiones por cada derivada, las cuales corresponden a un orden de truncamiento diferente.	29
Tabla 2.3:	Aproximaciones de la primera y segunda derivada por diferencias finitas centradas. Se presentan dos expresiones por cada derivada, las cuales corresponden a un orden de truncamiento diferente.	29
Tabla 3.1:	Rango de valores para los parámetros n_r y m_{max} , donde el programa LSPC presenta un error acotado y que decrece apropiadamente. . . .	57

Lista de Figuras

Figura 1.1:	Imagen del fuselaje de un avión comercial. Imagen tomada de OneAir (2023).	2
Figura 1.2:	Modelado del recubrimiento del fuselaje de un avión comercial. Imagen tomada de Nagesh et al. (2018).	2
Figura 1.3:	Representación de un cilindro hueco.	3
Figura 1.4:	Representación esquemática del objeto de estudio considerado, inicialmente.	4
Figura 1.5:	Representación esquemática del objeto de estudio del trabajo. . . .	4
Figura 2.1:	Representación esquemática del flujo térmico a través de una superficie perpendicular a la dirección de transferencia de energía.	7
Figura 2.2:	Representación esquemática de los ejes principales en un material anisótropo.	9
Figura 2.3:	Procesos de transferencia de calor por conducción, convección y radiación térmica. Imagen tomada de Bergman et al. (2011).	10
Figura 2.4:	Representación esquemática de los flujos térmicos a través del volumen de control diferencial (VCD).	11
Figura 2.5:	Representación de coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z)	21
Figura 2.6:	Discretización en n puntos del dominio $[a, b]$	23
Figura 2.7:	Representación de una aproximación de orden cero y el teorema del valor medio para la derivada.	24

Figura 2.8:	Gráfica de la aproximación de la primera derivada por diferencia finita hacia adelante.	26
Figura 2.9:	Gráfica de la aproximación de la primera derivada por diferencia finita hacia atrás.	27
Figura 2.10:	Gráfica de aproximación de la primera derivada por diferencia finita centrada.	28
Figura 2.11:	Representación esquemática de la geometría circular y CC del medio.	31
Figura 2.12:	Gráfico de la función de la PCCD.	32
Figura 2.13:	Gráfico de la función de la SCCD	32
Figura 3.1:	Diagrama esquemático de una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$	33
Figura 3.2:	Mapa de calor para la solución analítica de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, con la PCCD. En una placa circular de radio $R = 1$	41
Figura 3.3:	Mapa de calor para la solución analítica de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, con la SCCD. Considerando la sumatoria hasta un índice m igual a 100, en una placa circular de radio $R = 1$	42
Figura 3.4:	Discretización a lo largo de la dirección radial tomando n_r puntos. Esta discretización no incluye el centro ($r_0 = 0$) ni el contorno ($r_{n_r+1} = R$) de la placa circular.	44
Figura 3.5:	Discretización a lo largo de la dirección radial tomando un $n_r = 2$. .	45
Figura 3.6:	Puntos arbitrarios más próximos considerados en el promedio para obtener el valor de $T(r_0, \theta)$	46
Figura 3.7:	Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, con la PCCD. Considerando un valor de $n_r = 2$, en una placa circular de radio $R = 1$, y una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar. . . .	51

Figura 3.8:	Mapa de calor para la solución de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, en una placa circular de radio $R = 1$, con la PCCD. (a) Solución numérica considerando un valor de $m_{max} = 5$ y diferentes valores de $n_r = 3, 7, 15, 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar. (b) Solución analítica obtenida en la subsección 3.1.	53
Figura 3.9:	Mapa de calor para la solución de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, en una placa circular de radio $R = 1$, con la SCCD. (a) Solución numérica considerando un valor de $m_{max} = 5$ y diferentes valores de $n_r = 3, 7, 15, 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar. (b) Solución analítica obtenida en la subsección 3.1.	54
Figura 3.10:	Calculo de las normas del vector error en función del parámetro m_{max} , para diferentes valores de n_r . Calculo realizado con las soluciones para la SCCD. El gráfico se encuentra en escala logarítmica.	55
Figura 3.11:	Valor del exponente s como una función de n_r , luego de ajustar la norma del vector error a $b \cdot m_{max}^s$. Considerando las normas del vector error al variar el valor de m_{max} de 10 a 40, para un valor fijo de n_r	56
Figura 4.1:	Diagrama esquemático de una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$ y conductividad térmica dependiente de la temperatura, $k(T)$	58
Figura 4.2:	Gráfico de la transformación de Kirchhoff aplicada a la condición de contorno, Ec. (4.36).	68
Figura 4.3:	Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la variable U , con condición de contorno de la Ec. (4.36), en una placa circular de radio $R = 1$. Considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.	68

Figura 4.4:	Mapa de calor para la solución numérica de la Ec. (4.1). Con conductividad térmica dependiente de la temperatura, dada en la Ec. (4.27) y condición de contorno de la Ec. (4.35), en una placa circular de radio $R = 1$. Solución obtenida al aplicar la transformación inversa de la Ec. (4.34) a la solución para U	69
Figura 4.5:	Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la temperatura (caso de conductividad térmica constante), en una placa circular de radio $R = 1$, con la CC de la Ec. (4.35). Considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.	70
Figura 4.6:	Perfil radial de temperaturas para un ángulo fijo de la solución a la ecuación estacionaria del calor sin fuentes internas. Considerando el problema de conductividad térmica constante y dependiente de la temperatura. Considerando la condición de contorno de la Ec. (4.35).	70
Figura 4.7:	Gráfico de la transformación de Kirchhoff aplicada a la condición de contorno, Ec. (4.38).	72
Figura 4.8:	Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la variable U , con condición de contorno de la Ec. (4.38), en una placa circular de radio $R = 1$. Considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.	72
Figura 4.9:	Mapa de calor para la solución numérica de la Ec. (4.1). Con conductividad térmica dependiente de la temperatura, dada en la Ec. (4.27) y condición de contorno de la Ec. (4.37), en una placa circular de radio $R = 1$. Solución obtenida al aplicar la transformación inversa de la Ec. (4.34) a la solución para U	73

Figura 4.10:	Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la temperatura (caso de conductividad térmica constante), en una placa circular de radio $R = 1$, con la CC de la Ec. (4.37). Considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.	73
Figura 4.11:	Perfil radial de temperaturas para un ángulo fijo de la solución a la ecuación estacionaria del calor sin fuentes internas. Considerando el problema de conductividad térmica constante y dependiente de la temperatura. Considerando la condición de contorno de la Ec. (4.37).	74
Figura 5.1:	Diagrama esquemático de una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$ y conductividad térmica con dependencia radial, $k(r)$.	75
Figura 5.2:	Diagrama esquemático de un disco de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$	77
Figura 5.3:	Diagrama esquemático de un anillo de radio interior R_1 y radio exterior R_2 , con condiciones de contorno de Dirichlet, $T(R_1, \theta) = f_1(\theta)$ y $T(R_2, \theta) = f_2(\theta)$	78
Figura 5.4:	Diagrama esquemático del problema unidimensional para dos materiales de conductividades térmicas diferentes, con condiciones de contorno de Dirichlet T_l y T_r	81
Figura 5.5:	Diagrama esquemático del problema de un disco y un anillo, de conductividades térmicas diferentes, con condición de contorno de Dirichlet $f(\theta)$	84
Figura 5.6:	Diagrama esquemático del problema de dos anillos, de conductividades térmicas diferentes, con condiciones de contorno de Dirichlet $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$	88
Figura 5.7:	Discretización de la variable longitudinal x en 5 puntos. Problema unidimensional para dos materiales de conductividades térmicas diferentes, con condiciones de contorno de Dirichlet T_l y T_r	94

Figura 5.8:	Discretización de la variable radial r en 5 puntos. Problema de dos anillos de conductividades térmicas diferentes, con condiciones de contorno de Dirichlet $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$	98
Figura 5.9:	Diagrama esquemático de los dominios de las funciones T_1 y T_2 en la variable radial r , para un ángulo fijo $\theta = \varepsilon$. Donde $T(r) = T(r, \varepsilon)$	102
Figura 5.10:	Representación esquemática de la equivalencia de los coeficientes de Fourier aplicados en diferentes puntos de la discretización.	105
Figura 5.11:	Discretización de la variable radial r en 5 puntos. Problema de un disco y un anillo de conductividades térmicas diferentes, con condición de contorno de Dirichlet $f(\theta)$	107
Figura 5.12:	Diagrama esquemático de un disco y varios anillos en contacto, para modelar una placa circular de conductividad térmica con dependencia radial. Placa circular de radio R con condición de contorno de Dirichlet $f(\theta)$	110
Figura 5.13:	Diagrama esquemático de la conductividad térmica, representada por una función escalonada, debido al modelo planteado.	111
Figura 5.14:	Diagrama esquemático de como se aproxima la conductividad térmica, considerando varios materiales, a una función continua.	112
Figura 5.15:	Discretización de la variable radial r en $2n + 1$ puntos. Problema de un disco y varios anillos de conductividades térmicas diferentes.	113
Figura 5.16:	Solución numérica al problema de conductividad térmica constante, considerando los parámetros $n_r = 30$, $m_{max} = 10$ y la condición de contorno f_C en la ejecución del programa LSPC. (a) Mapa de calor. (b) Perfil de temperatura radial en un ángulo fijo de 90°	117
Figura 5.17:	Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_C y conductividad térmica $k_1(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor. (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_1	118

- Figura 5.18: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante, considerando los parámetros $n_r = 30$, $m_{max} = 10$ y la condición de contorno f_P en la ejecución del programa LSPC. (a) Mapa de calor. (b) Perfil de temperatura radial en un ángulo fijo de 90° 119
- Figura 5.19: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_P y conductividad térmica $k_1(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_1 . 120
- Figura 5.20: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_P y conductividad térmica $k_2(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_2 . 121
- Figura 5.21: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_P y conductividad térmica $k_3(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_3 . 122
- Figura 5.22: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 40$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_P y conductividad térmica $k_3(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_3 . 123
- Figura 5.23: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante, considerando los parámetros $n_r = 30$, $m_{max} = 10$ y la condición de contorno f_S en la ejecución del programa LSPC. (a) Mapa de calor. (b) Perfil de temperatura radial en un ángulo fijo de 90° 124

- Figura 5.24: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_S y conductividad térmica $k_1(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_1 . 125
- Figura 5.25: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_S y conductividad térmica $k_2(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_2 . 126
- Figura 5.26: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_S y conductividad térmica $k_3(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_3 . 127
- Figura 5.27: Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , para la condición de contorno f_P . (a) Problema de conductividad térmica constante, considerando los parámetros $n_r = 30$, $m_{max} = 10$ en la ejecución del programa LSPC. (b) Problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$ y $k_1(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. 128
- Figura 5.28: Solución numérica al problema de conductividad térmica y condición de contorno constantes. Parámetros de solución dados en la Fig. 5.16. 131
- Figura 5.29: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial y condición de contorno no constante f_C . Parámetros de solución dados en la Fig. 5.17. 131
- Figura 5.30: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante y condición de contorno no constante. Parámetros de solución dados en las Fig. 5.18 y 5.23. 132

Figura 5.31: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante y con dependencia radial, con condición de contorno no constante f_P . (a) Parámetros de solución dados en la Fig. 5.18. (b) Parámetros de solución dados en la Fig. 5.19.	133
---	-----

Introducción

Cuando se busca resolver de forma numérica problemas que involucren trabajar sobre una región circular, se generan complicaciones. Esto debido a que, si se quiere usar uno de los métodos más conocidos y sencillos (diferencias finitas en coordenadas cartesianas), se emplea una discretización rectangular de la región formando una malla de puntos. Estos puntos de la malla no coincidirán con el contorno de la región que se busca modelar, lo que fuerza a tomar otras consideraciones o métodos con tal de obtener una solución. Al tener en cuenta ello, en este trabajo se busca desarrollar un método numérico que permita resolver la ecuación estacionaria del calor en una placa circular con condición de contorno de Dirichlet, bajo diferentes dependencias de la conductividad térmica del medio. Los diferentes casos de conductividad térmica se abordan en capítulos separados, donde cada problema se resuelve de manera similar, manteniendo el enfoque del método numérico propuesto. Por ello, el contenido del trabajo se estructura en 5 capítulos, los cuales se detallan a continuación.

En el capítulo I se presenta la parte introductoria del trabajo, donde se detallan las generalidades que establecen el punto de partida de la investigación. Asimismo, se plantea la pregunta de investigación, que define el problema a resolver, y se formulan las hipótesis que guiarán su desarrollo. Finalmente, se establecen los objetivos del estudio.

En el capítulo II se revisan los conceptos previos necesarios para el desarrollo del trabajo. Se abordan los conceptos físicos relacionados con el transporte de calor, como el flujo térmico, la ley de Fourier y la ecuación del calor. También se tratan los

conceptos matemáticos, como la expansión de Fourier y los operadores diferenciales en coordenadas polares. Finalmente, se revisan los aspectos numéricos, como el método de diferencias finitas y la solución numérica de sistemas lineales complejos.

En el capítulo III se resuelve el problema de conductividad térmica constante, el cual permite obtener una solución analítica. Para obtener una solución numérica, se propone un método que combina la expansión de Fourier y el método de diferencias finitas. Este método se implementa en un programa en Fortran 90, que proporciona la solución numérica al problema planteado en el capítulo.

En el capítulo IV se resuelve el problema de conductividad térmica dependiente de la temperatura. En este caso, el problema resulta ser no lineal, por lo que se aplica la transformación de Kirchhoff. Esta transformación conduce a una expresión conocida, que puede resolverse utilizando el método desarrollado en el capítulo III.

En el capítulo V se resuelve el problema de conductividad térmica con dependencia radial. En este caso, se modela la dependencia radial mediante un conjunto de materiales en contacto, cada uno con una conductividad térmica constante pero diferente. Esto permite aplicar un método similar al del capítulo III, con el cual se puede obtener una solución. Este método también se implementa en un programa en Fortran 90.

Capítulo I

Parte introductoria del trabajo

1.1. Generalidades

En la ciencia e ingeniería de materiales, se ha llevado a cabo una gran cantidad de estudios para la fabricación de materiales que presenten propiedades físicas particulares, para la elaboración de diferentes máquinas y/o equipos. Esto condujo a la elaboración de los *materiales compuestos*, los cuales se forman cuando dos o más materiales se utilizan juntos para obtener una combinación de propiedades que no se pueden lograr de otra manera. Los materiales compuestos se pueden seleccionar para alcanzar combinaciones no usuales de rigidez, peso, densidad, desempeño a altas temperaturas, resistencia a la corrosión, dureza o conductividad (Askeland, 2017). Este tipo de materiales se pueden clasificar en tres grupos con base en la forma de los materiales: con partículas, con fibras y laminares. Por ejemplo, el concreto que es una mezcla de cemento y grava es un material particulado; mientras que la fibra de vidrio, que consta de fibras incrustadas en un polímero, es un compuesto reforzado con fibras y por último; el triplay o madera contrachapada, que es la unión de capas alternas de chapa de madera, es un compuesto laminar.

Estos compuestos tienen aplicación en diferentes industrias, como es el caso de la aviación. En el cual, previamente a la utilización de los materiales compuestos, los fabricantes producían aviones en los que se empleaban aluminio y acero, ya que estos metales ofrecen mayor estabilidad y protección. Luego, los aviones militares fueron

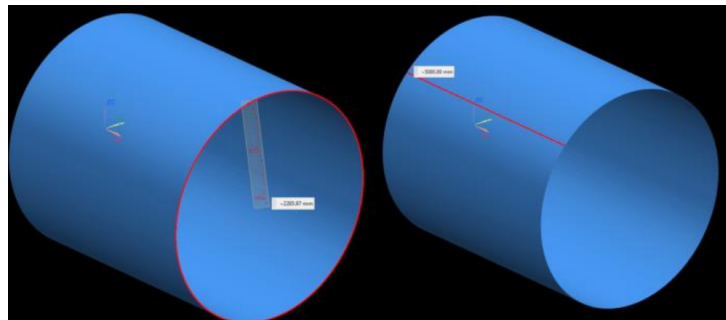
los primeros en emplear los materiales compuestos, para posteriormente usarse en el ámbito comercial (Smith, 2015). Si nos centramos en la estructura de un avión, nos encontramos que de todos los elementos estructurales, el fuselaje es uno de los más esenciales. El fuselaje viene a ser el cuerpo del avión, el cual proporciona el espacio para la tripulación, los pasajeros o para la bodega de carga (ver Fig. 1.1); además, es el armazón al que se adhieren otras partes fundamentales, como pueden ser las alas o el tren de aterrizaje.

Figura 1.1: Imagen del fuselaje de un avión comercial. Imagen tomada de OneAir (2023).



Ahora, centrándonos en el fuselaje de un avión comercial como el de la Fig. 1.1, se puede observar que su estructura se asemeja a un cilindro. Esto permitiría hacer un estudio más sencillo de las diferentes propiedades que presenta dicha estructura; como en el caso de Nagesh et al. (2018), el cual investiga la integridad estructural del fuselaje de un avión. En dicho trabajo, el recubrimiento del fuselaje de un avión es modelado por un cilindro como se muestra en la Fig. 1.2.

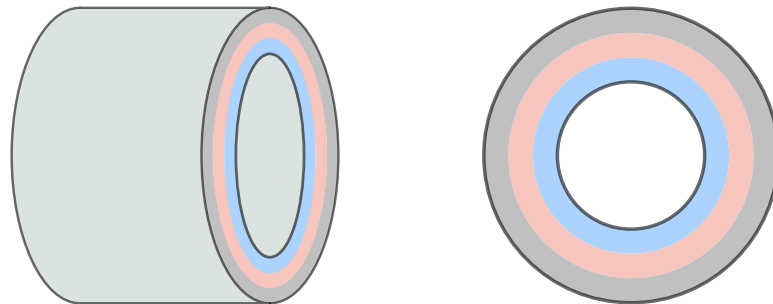
Figura 1.2: Modelado del recubrimiento del fuselaje de un avión comercial. Imagen tomada de Nagesh et al. (2018).



Como se mencionó, los materiales compuestos pueden emplearse para elaborar los recubrimientos de aviones. Estos recubrimientos son principalmente materiales compuestos laminares, que en el caso de Nagesh et al. (2018) consta de la unión de tres materiales.

Si se busca hacer un estudio térmico, se tiene que cada material presenta una capacidad para transferir el calor, denominado conductividad térmica k . Pero cuando se tiene un material compuesto laminar el cual es la unión de materiales individuales, se puede asumir que k va a variar conforme se cruza el material compuesto. De esta forma, teniendo en cuenta que el recubrimiento del fuselaje de un avión comercial se puede modelar por un cilindro hueco (el cual es un material compuesto laminar) y asumiendo que presenta simetría axial, se puede considerar a este recubrimiento como un material en el cual la conductividad térmica k varía radialmente. Si a lo largo del fuselaje, el recubrimiento no cambia y las condiciones son las mismas, el estudio térmico se podría realizar en un área transversal (ver Fig. 1.3). Es decir, la región de estudio sería un disco anular, al cual se le establecen las condiciones para su estudio.

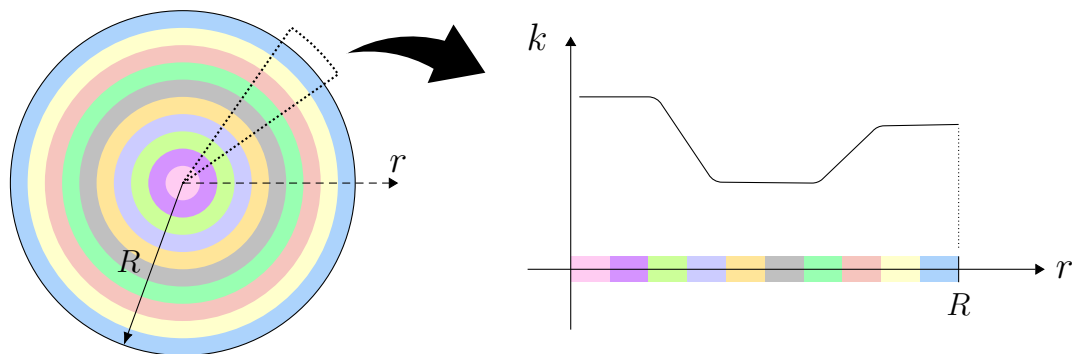
Figura 1.3: Representación de un cilindro hueco.



1.2. Pregunta, Hipótesis y Objetivo

Al finalizar la sección anterior, se estableció como objeto de estudio un disco anular, que representa el material compuesto laminar usado como recubrimiento del fuselaje de un avión. Además, se menciona que, dicho recubrimiento se puede considerar como un material en el cual la conductividad térmica k presenta una dependencia radial, como se ilustra en la Fig. 1.4.

Figura 1.5: Representación esquemática del objeto de estudio del trabajo.



4

Se han establecido, la ecuación que se busca resolver, el objeto de estudio (el cual presenta una conductividad térmica con dependencia radial), y la condición de contorno. Pero este problema es un caso muy específico, por este motivo se propone realizar un estudio progresivo, partiendo de un caso general donde la conductividad térmica k es una constante, luego se considerará un caso donde k dependa de la temperatura y por último, el caso de k con dependencia radial. Con ello, se puede plantear:

- **Pregunta de investigación:** ¿Se puede desarrollar un método numérico para resolver la ecuación del calor estacionaria en una placa circular con condición de contorno de Dirichlet, en diferentes casos: k constante, k dependiente de la temperatura y k con dependencia radial?
- **Hipótesis del trabajo:** Para el caso de k constante, se supone que una expansión de Fourier de la función temperatura permite reducir el problema bidimensional a uno unidimensional. Dejando este problema unidimensional preparado para aplicar el método de diferencias finitas. En el caso de k dependiente de la temperatura, se tendría una ecuación diferencial parcial no lineal, para la cual se supone que a partir de una transformación adecuada, se puede eliminar la no linealidad y posteriormente aplicar el método numérico del primer caso. Para el caso de k con dependencia radial, se asume que esta dependencia se puede aproximar por un conjunto de discos anulares, de conductividades térmicas constantes pero diferentes, en los cuales se aplica un método similar a los casos anteriores; para luego acoplarlos por una condición de interfase.
- **Objetivo de la tesis:** Desarrollar un método numérico que permita resolver la ecuación del calor estacionaria en una placa circular con condición de contorno de Dirichlet, para tres casos particulares; por medio de la expansión de Fourier y el método de diferencias finitas.

Capítulo II

Conceptos previos

En este capítulo se abordan los conceptos físicos, matemáticos y numéricos necesarios para el desarrollo del presente trabajo. Se inicia con una breve deducción de la ecuación del calor, basada en la ley de Fourier, la cual establece la relación entre el flujo térmico y la temperatura. Posteriormente se repasan las condiciones de contorno, indispensables para describir el comportamiento del sistema en los límites de un dominio y obtener soluciones. Además, se revisan conceptos matemáticos claves, como la expansión de Fourier, la cual cumple un rol importante en el enfoque analítico y es una pieza fundamental del método numérico propuesto. Asimismo, se repasan conceptos numéricos, tales como el método de diferencias finitas y la solución numérica a un sistema lineal complejo, que permiten la aplicación del método numérico que se utilizará en este trabajo. Por último se presentan las condiciones de contorno para el objeto de estudio, que se usarán en los diferentes casos a resolver.

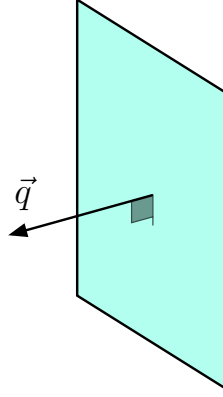
2.1. Calor y flujo térmico

Se denomina *Calor* (Q) a la energía transferida o intercambiada, desde una región de mayor temperatura hacia una región de menor temperatura (Hahn and Özisik, 2012), por lo cual se expresa en unidades de energía, $[Q] = J$. Por otro lado, se define al *flujo térmico* ($\vec{q}$) como la cantidad de energía transferida en determinada dirección por

unidad de tiempo y por unidad de área perpendicular a la dirección de transferencia,

$$[q] = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}. \quad (2.1)$$

Figura 2.1: Representación esquemática del flujo térmico a través de una superficie perpendicular a la dirección de transferencia de energía.



El flujo térmico tiene una dirección de transferencia, por lo que es una magnitud vectorial y puede ser expresado en diferentes sistemas coordenados. Por ejemplo, en el sistema cartesiano, se representa de la siguiente manera

$$\vec{q} = q_x \hat{i} + q_y \hat{j} + q_z \hat{k}. \quad (2.2)$$

Debido a esto es posible determinar la cantidad de calor que atraviesa una superficie S , durante un intervalo de tiempo t , en función del flujo térmico. Esto puede calcularse mediante la siguiente expresión

$$Q = \int_0^t dt \int_S \vec{q} \cdot \vec{ds}. \quad (2.3)$$

2.2. Ley de Fourier

Las leyes de la naturaleza nos ofrecen una descripción aceptada de los fenómenos naturales, basándose en comportamientos observados. Según Joseph Fourier, acerca de los fenómenos naturales, «Las causas primarias nos son desconocidas, pero están

sujetas a leyes simples y constantes, que pueden ser descubiertas por la observación » (Fourier, 2009). Estas leyes se consideran generales porque su aplicación no depende del medio específico, como la ley de acción y reacción, o la ley de gravedad de Newton. Caso contrario, algunas situaciones requieren leyes específicas para un medio particular, llamadas leyes particulares o relaciones constitutivas, como la ley de Hooke o la ley de Ohm.

La ley particular que describe la relación entre el flujo térmico $\vec{q}$ y la temperatura T , es conocida como la *ley de Fourier*. En un medio homogéneo e isótropo (donde la conductividad térmica no depende de la dirección), la ley de Fourier puede expresarse de la siguiente forma

$$\vec{q} = -k\vec{\nabla}T. \quad (2.4)$$

Donde el factor k es una propiedad física de la materia, que indica la capacidad de la sustancia para conducir el calor, a la cual se le denomina *conductividad térmica*,

$$[k] = \frac{J}{m.s.K} = \frac{W}{m.K}. \quad (2.5)$$

Sin embargo, existen existen materiales naturales y sintéticos en los que la conductividad térmica varía con la dirección. Por ejemplo, en el tronco de un árbol, la conductividad térmica puede variar con la dirección; específicamente, las conductividades térmicas a lo largo y a través de las vetas son diferentes. En los materiales laminares, como el grafito y el disulfuro de molibdeno, la conductividad térmica a lo largo y a través de las laminaciones puede diferir significativamente. A este tipo de materiales se le conoce como anisótropos. Por lo tanto, en el caso general de medios anisótropos, las componentes del flujo térmico se consideran una combinación lineal de las componentes del gradiente de temperatura. Por lo tanto, la ley de Fourier puede expresarse de la siguiente forma

$$\vec{q} = -\hat{k}\vec{\nabla}T, \quad (2.6)$$

donde $\hat{k}$ es una matriz. Se puede representar de forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x T \\ \partial_y T \\ \partial_z T \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

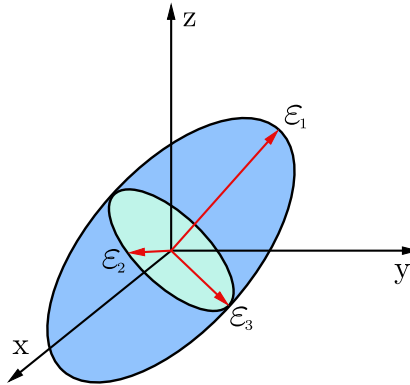
El elemento $[k_{nl}]$ es la conductividad térmica en la dirección $\hat{n}$, debido a un gradiente de temperatura en la dirección $\hat{l}$. La matriz conductividad térmica $\hat{k}$ para un material anisótropo y homogéneo es simétrico; y los elementos de la diagonal son reales positivos (Hahn and Özisik, 2012).

Del álgebra lineal se conoce que, una matriz simétrica k de coeficientes reales, siempre es diagonalizable ortogonalmente. Es decir, que existe una matriz diagonal k_D , tal que

$$k_D = P^T k P, \quad (2.8)$$

donde P es la matriz que contiene los autovectores ortonormales de la matriz k . Estos autovectores vienen a ser los ejes principales de la matriz k_D (Anton, 2014), los cuales conforman el sistema de coordenadas intrínseco del material. De esta forma, la matriz k_D correspondería a la matriz conductividad térmica en este sistema intrínseco. Los ejes principales $\hat{\varepsilon}_1$, $\hat{\varepsilon}_2$ y $\hat{\varepsilon}_3$ (ver Fig. 2.2), son las direcciones en las que el material tiende a conducir el calor, independientemente de las coordenadas del laboratorio.

Figura 2.2: Representación esquemática de los ejes principales en un material anisótropo.

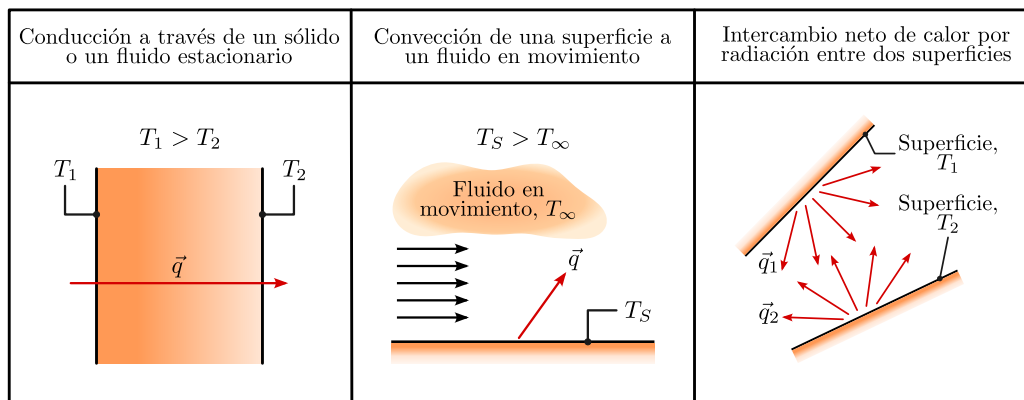


2.3. Ecuación del Calor

Existen tres procesos o mecanismos de transferencia de calor que son: conducción, convección y radiación. Cada uno describe una forma diferente en que la energía es transferida entre cuerpos o medios debido a la diferencia de temperatura, como se ilustra en la Fig. 2.3. Estos procesos se distinguen por las características del medio y las condiciones en las que se da.

El proceso denominado conducción se refiere a la transferencia de calor que se produce a través de un medio estacionario, el cual puede ser un sólido o un fluido, en el cual existe un gradiente de temperatura. Por el contrario, el proceso de convección se refiere a la transferencia de calor que se producirá entre una superficie y un fluido en movimiento cuando estos se encuentran a diferentes temperaturas. Por último, el proceso de radiación térmica se refiere a la emisión de energía, en forma de ondas electromagnéticas, de todas las superficies a cierta temperatura. Por lo tanto, en ausencia de un medio intermedio, se produce una transferencia de calor por radiación entre dos superficies a diferentes temperaturas.

Figura 2.3: Procesos de transferencia de calor por conducción, convección y radiación térmica. Imagen tomada de Bergman et al. (2011).



Si uno se centra en analizar el proceso de transferencia de calor por conducción, el objetivo principal es determinar la distribución de temperaturas en un medio, como resultado de las condiciones impuestas en su contorno. Es decir, se busca conocer la temperatura en función de la posición en el medio, y para encontrar dicha temperatura

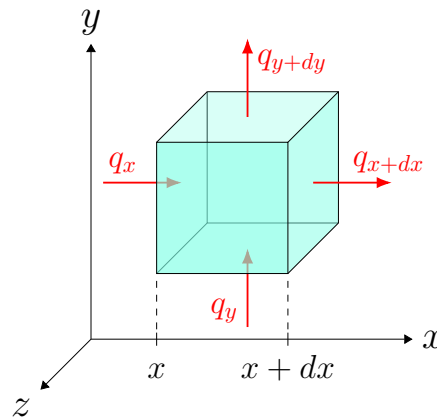
es necesaria la ecuación que describa el proceso. Para ello se define un *volumen de control diferencial*¹, en el cual se identifican los procesos de transferencia de energía de interés. De esto resulta una ecuación diferencial, cuya solución para unas condiciones de contorno establecidas previamente, proporciona la distribución de temperaturas en el medio. A esta ecuación se le denomina *ecuación diferencial de la conducción del calor*, a menudo llamada, *ecuación del calor*.

Para obtener esta ecuación diferencial, se considera un medio homogéneo en el que no hay movimiento de masa, ni radiación y además es no deformable. Luego, el primer paso es definir el volumen de control diferencial (VCD) como se observa en la Fig. 2.4. El volumen y la masa correspondiente, contenida en el VCD, están definidos respectivamente como

$$dV = dx \, dy \, dz \quad \text{y} \quad dm = \rho \, dx \, dy \, dz, \quad (2.9)$$

donde ρ es la densidad del medio, de conductividad térmica $\hat{k}$ y calor específico a volumen constante c_v . El siguiente paso es considerar que en el VCD, existe una transferencia de calor por conducción, la cual ocurrirá a través de cada una de las caras del VCD. El flujo térmico por conducción, perpendicular a la cara en la posición x (plano yz), se indica mediante el término q_x . De igual forma para el resto de flujos térmicos correspondientes a cada cara del VCD, como se observa en la Fig. 2.4.

Figura 2.4: Representación esquemática de los flujos térmicos a través del volumen de control diferencial (VCD).



¹Se denomina volumen de control a una región del espacio físico que se selecciona para analizar.

La primera ley de la termodinámica, relaciona la variación de la energía interna U , el intercambio de calor Q y el trabajo realizado W por un sistema; y puede formularse como

$$dU = dQ - dW. \quad (2.10)$$

Ahora, debido a que el medio es no deformable, este no ejerce trabajo de expansión. Por este motivo la Ec. (2.10) queda reducida a la siguiente expresión,

$$dU = dQ. \quad (2.11)$$

El intercambio de calor dQ del sistema, puede separarse en dos términos: el calor intercambiado con el exterior dQ_S y el calor aportado por fuentes internas dQ_V (o calor absorbido por sumideros internos), resultando

$$dU = dQ_S + dQ_V. \quad (2.12)$$

Como dQ_S representa el calor intercambiado del sistema con el exterior, se tiene que considerar el calor entrante y saliente del VCD, los cuales pueden ser expresados en términos del flujo térmico por conducción, correspondiente a cada cara del VCD. De esta forma, el calor que ingresa a través de la cara en la posición x , está dado por

$$dQ_x = q_x dA_x dt \quad (2.13)$$

$$dQ_x = q_x dy dz dt. \quad (2.14)$$

De igual forma, se obtiene el calor que sale a través de la cara en la posición $x + dx$,

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz dt. \quad (2.15)$$

Además, al aplicar el desarrollo de Taylor hasta el primer orden de q_{x+dx} , se tiene

$$q_{x+dx} = q_x + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right) dx. \quad (2.16)$$

Reemplazando la Ec. (2.16) en (2.15), el calor saliente dQ_{x+dx} resulta

$$dQ_{x+dx} = \left(q_x + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right) dx \right) dy \, dz \, dt. \quad (2.17)$$

Luego, el calor intercambiado con el exterior en la dirección $\hat{i}$, dQ_{S_x} , se obtiene de restar el calor que ingresa con el calor que sale del VCD, en dicha dirección. Entonces, de las Ec. (2.14) y (2.17), se tiene que dQ_{S_x} está dado por

$$dQ_{S_x} = dQ_x - dQ_{x+dx} \quad (2.18)$$

$$dQ_{S_x} = \left(-\frac{\partial q_x}{\partial x} \right) dx \, dy \, dz \, dt. \quad (2.19)$$

De manera análoga, para las direcciones $\hat{j}$ y $\hat{k}$, se obtiene

$$dQ_{S_y} = \left(-\frac{\partial q_y}{\partial y} \right) dx \, dy \, dz \, dt, \quad (2.20)$$

$$dQ_{S_z} = \left(-\frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \, dt. \quad (2.21)$$

Recordando que dQ_S es el calor intercambiado con el exterior, este viene a ser la suma de los calores intercambiados con el exterior en cada dirección. Es decir,

$$dQ_S = dQ_{S_x} + dQ_{S_y} + dQ_{S_z}, \quad (2.22)$$

donde luego de reemplazar las Ec. (2.19), (2.20) y (2.21), resulta

$$dQ_S = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \, dt \quad (2.23)$$

$$dQ_S = (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) \, dV \, dt. \quad (2.24)$$

Ahora, denotando con q_v al calor suministrado por unidad de volumen y tiempo debido a las fuentes internas en el volumen diferencial dV , se tiene que dQ_V está dado por

$$dQ_V = q_v \, dV \, dt. \quad (2.25)$$

Por otro lado, la cantidad de calor dQ necesaria para elevar la temperatura de una masa dm de un material, a volumen constante, en un dT , está dada por

$$dQ = c_v \, dm \, dT. \quad (2.26)$$

Entonces, de la Ec. (2.26) y debido a que en este caso la variación de energía interna dU , es igual al intercambio de calor del sistema dQ (Ec. 2.11), se tiene que

$$dU = c_v \, \rho \, dV \, dT. \quad (2.27)$$

De esta forma, al reemplazar las Ec. (2.24), (2.25) y (2.27), en (2.11), resulta

$$c_v \, \rho \, dV \, dT = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) \, dV \, dt + q_v \, dV \, dt \quad (2.28)$$

$$c_v \, \rho \, dT = [-(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + q_v] \, dt. \quad (2.29)$$

Ahora, debido a que la temperatura T depende de la posición y del tiempo, su diferencial total, dT , está dado por

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt. \quad (2.30)$$

Teniendo en cuenta que el diferencial dx es igual a $\frac{dx}{dt}dt$, de igual forma para dy y dz , se tiene

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \frac{dx}{dt} dt + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \frac{dy}{dt} dt + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) \frac{dz}{dt} dt + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt. \quad (2.31)$$

Donde se puede distinguir el producto escalar entre el gradiente de la temperatura ∇T , y la velocidad del medio $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$. Reescribiendo la expresión

$$dT = \left[\nabla T \cdot \vec{v} + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) \right] dt. \quad (2.32)$$

Ya que el medio no presenta movimiento de masa, la velocidad $\vec{v}$ es cero, resultando

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt. \quad (2.33)$$

Finalmente, reemplazando la Ec. (2.33) en (2.29), se tiene

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt = [- (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + q_v] dt \quad (2.34)$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = - (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + q_v \quad (2.35)$$

Donde, por la ley de Fourier (Ec. 2.6), la ecuación se reescribe como

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = [\vec{\nabla} \cdot (\hat{k} \vec{\nabla} T)] + q_v. \quad (2.36)$$

Esta última ecuación es la “*Ecuación diferencial de la conducción del calor a volumen constante*”, que describe la variación de la temperatura en un punto dentro del medio.

Para un régimen estacionario sin fuentes internas de calor, se convierte en la siguiente ecuación homogénea

$$\vec{\nabla} \cdot (\hat{k} \vec{\nabla} T) = 0. \quad (2.37)$$

Además que para un medio isótropo, la ecuación se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2.38)$$

2.4. Condiciones de Contorno (CC)

Una vez que se tiene la ecuación del calor, se busca resolverla con el fin de obtener la distribución de temperaturas en el medio. Para poder obtener una solución, se requiere establecer las condiciones de contorno (CC) del medio. Si a la región que ocupa el medio en estudio se le denota como Ω , y al contorno de dicha región como $\partial\Omega$, las CC

especifican la temperatura o el flujo de calor en $\partial\Omega$. A continuación se presentan las diferentes CC descritas en Hahn and Özisik (2012).

1. *Condición de contorno de primer tipo (Temperatura)*. También conocida como condición de contorno de Dirichlet. En este caso se establece el valor de la temperatura en el contorno $\partial\Omega$. Esto es,

$$T|_{\partial\Omega} = f(\bar{r}, t) \quad (2.39)$$

donde $f(\bar{r}, t)$ es una distribución de temperatura en el contorno que es, en general, una función de posición y tiempo.

2. *Condición de contorno de segundo tipo (Flujo térmico)*. También conocida como condición de contorno de Neumann. En este caso se establece el valor del flujo térmico en el contorno $\partial\Omega$. Esto es,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = f(\bar{r}, t) \quad (2.40)$$

donde $\partial T/\partial n$ es la derivada a lo largo de la normal al contorno, trazada hacia el exterior. Además $f(\bar{r}, t)$ es un flujo térmico que por lo en general, es una función de posición y tiempo. El caso especial de flujo térmico cero en el contorno,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.41)$$

(perfectamente aislado o adiabático) es llamado *condición de contorno homogénea de segundo tipo*.

3. *Condición de contorno de tercer tipo (Convección)*. Esta es la condición para la convección, en la cual el contorno se encuentra en contacto con un fluido, esto es,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = h [T|_{\partial\Omega} - T_{\infty}]. \quad (2.42)$$

Donde T_{∞} es la temperatura ambiente del fluido. El caso especial donde la temperatura

del fluido es cero ($T_\infty = 0$), dada por

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = h T|_{\partial\Omega}, \quad (2.43)$$

es llamada *condición de contorno homogénea de tercer tipo*.

En adición a las tres condiciones de contorno mencionadas, otra condición de contorno es también considerada. Cuando se tienen dos materiales sólidos de conductividades térmicas diferentes (k_1 y k_2) y se encuentran en contacto, estos presentan un contorno común. Si la región que ocupa el material de conductividad térmica k_1 es denotada por Ω_1 , su contorno es denotado por $\partial\Omega_1$. Y de igual manera, la región que ocupa el material de conductividad térmica k_2 se denota como Ω_2 y su contorno $\partial\Omega_2$. El contorno común puede entenderse como la intersección de $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$, es decir, $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \partial\Omega_C$. En este contorno común $\partial\Omega_C$, para un caso particular, se cumplen dos condiciones y juntas se les denomina *condiciones de contorno de interfase*.

4. **Condición de contorno de interfase.** Considerando el caso de dos materiales de conductividades térmicas k_1 y k_2 en contacto, se le denotará como T_1 a la distribución de temperaturas en el material de conductividad térmica k_1 y como T_2 para el material de conductividad térmica k_2 . Entonces, para el caso ideal de contacto térmico perfecto entre dos materiales se tienen las siguientes condiciones,

$$T_1|_{\partial\Omega_C} = T_2|_{\partial\Omega_C} \quad (2.44)$$

y

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{\partial\Omega_C} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{\partial\Omega_C} \quad (2.45)$$

donde la Ec. (2.44) es la continuidad de la temperatura y la Ec. (2.45) es la continuidad del flujo térmico en la interfase (i.e. conservación de la energía).

2.5. Expansión de Fourier (EF)

La expansión o desarrollo de Fourier es una serie infinita que converge a una función periódica. Se tienen 4 formas de realizar una expansión de Fourier, dependiendo de las condiciones que presente la función a desarrollar (Mañas, 2015). A partir de estas condiciones se escoge la expansión más adecuada.

1. **Serie de exponenciales:** Para toda función real $u(x) \in L^2([a, b])$, que cumple

$$u(a) = u(b), \quad (2.46)$$

se puede expandir en la forma

$$u(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^m e^{imwx}, \quad w := \frac{2\pi}{b-a}. \quad (2.47)$$

Donde el coeficiente C^m es una constante, en general compleja, que está dada por

$$C^m = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-imwx} u(x) dx. \quad (2.48)$$

Este coeficiente presenta una propiedad importante, que relaciona los coeficientes de índices negativos C^{-m} con los coeficientes de índices positivos C^m correspondientes. Para hallar dicha relación, se parte de la expresión dada para el coeficiente C^{-m} , de la cual se tiene

$$C^{-m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-i(-m)wx} u(x) dx \quad (2.49)$$

$$C^{-m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b (e^{-imwx})^* u(x) dx \quad (2.50)$$

$$C^{-m} = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-imwx} u(x) dx \right)^*. \quad (2.51)$$

La integral a la cual se le está aplicando el conjugado complejo, corresponde al coefi-

ciente C^m , resultando que

$$C^{-m} = (C^m)^*. \quad (2.52)$$

2. Serie de senos y cosenos: Para toda función real $u(x) \in L^2([a, b])$, que cumple con las condiciones

$$u(a) = u(b) \quad \text{y} \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_a = \left. \frac{du}{dx} \right|_b, \quad (2.53)$$

puede expandirse en la forma

$$u(x) = \frac{\alpha^0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^m \cos(mwx) + \beta^m \sin(mwx)), \quad w := \frac{2\pi}{b-a}. \quad (2.54)$$

Donde los coeficientes se determinan mediante las “fórmulas de Euler”

$$\alpha^m = \frac{2}{b-a} \int_a^b \cos(mwx) u(x) dx, \quad m \geq 0; \quad (2.55)$$

$$\beta^m = \frac{2}{b-a} \int_a^b \sin(mwx) u(x) dx, \quad m \geq 1. \quad (2.56)$$

3. Serie de senos: Para toda función real $u(x) \in L^2([a, b])$, que cumple con

$$u(a) = 0 = u(b), \quad (2.57)$$

puede expandirse en la forma

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta^m \sin\left(\frac{mw}{2}(x-a)\right), \quad w := \frac{2\pi}{b-a}. \quad (2.58)$$

Donde el coeficiente β^m es una constante que está dada por

$$\beta^m = \frac{2}{b-a} \int_a^b \sin\left(\frac{mw}{2}(x-a)\right) u(x) dx, \quad m \geq 1. \quad (2.59)$$

4. Serie de cosenos: Para toda función real $u(x) \in L^2([a, b])$, que cumple con las

condiciones

$$u(a) = u(b) \quad \text{y} \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_a = 0 = \left. \frac{du}{dx} \right|_b, \quad (2.60)$$

puede desarrollarse en la forma

$$u(x) = \frac{\alpha^0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \cos\left(\frac{mw}{2}(x-a)\right), \quad w := \frac{2\pi}{b-a}. \quad (2.61)$$

Donde el coeficiente α^m es una constante que está dada por

$$\alpha^m = \frac{2}{b-a} \int_a^b \cos\left(\frac{mw}{2}(x-a)\right) u(x) dx, \quad m \geq 0. \quad (2.62)$$

2.6. Operadores en Coordenadas polares

Normalmente cuando se busca representar posiciones o un sistema físico, se usa el sistema coordenado cartesiano, ya que presenta la ventaja de que los vectores unitarios ($\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$) son constantes (en dirección y magnitud) y perpendiculares entre sí. Esto hace que elaborar dicha representación sea más sencilla. Desafortunadamente, este sistema coordenado no se ajusta bien a todos los problemas físicos para su resolución. Como cuando se tiene un problema de temperaturas en un disco plano, en el que una propiedad térmica del material varía radialmente. En este tipo de situaciones, no es favorable el uso de las coordenadas cartesianas y sería conveniente un sistema en el cual la distancia radial a un punto sea considerada una coordenada. De esta forma, se escogería el sistema coordenado polar.

Al escoger un sistema coordenado, se debe tener en cuenta que si se trabaja con operadores diferenciales, estos se expresan diferente. Por este motivo, se va a ver como se expresan los operadores diferenciales en diferentes sistemas coordenados. Para ello, se usará la teoría de coordenadas curvilíneas ortogonales vistas en Arfken et al. (2011).

Se considera un sistema curvilíneo arbitrario con coordenadas (u, v, w) , las cuales están relacionadas con las coordenadas cartesianas (x, y, z) , esto es

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w). \quad (2.63)$$

Para cada coordenada q ($q = u, v, w$) se tiene un factor de escala h_q , dada por

$$h_q = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2}. \quad (2.64)$$

Este factor de escala sirve para expresar los operadores diferenciales en el nuevo sistema coordenado curvilíneo. Los operadores diferenciales conocidos como el gradiente ($\vec{\nabla}\psi$), divergencia ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$) y laplaciano ($\nabla^2\psi$), están dados por

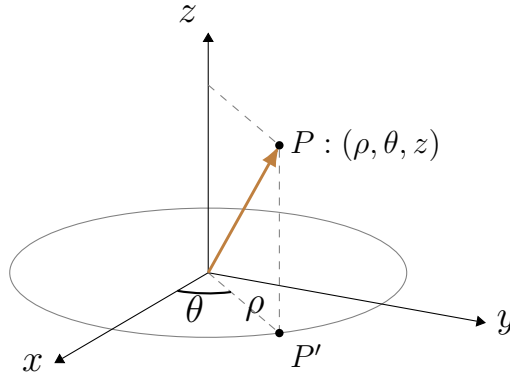
$$\vec{\nabla}\psi = \frac{1}{h_u} \frac{\partial\psi}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial\psi}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial\psi}{\partial w} \vec{e}_w, \quad (2.65)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial(h_v h_w F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(h_u h_w F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(h_u h_v F_w)}{\partial w} \right], \quad (2.66)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial\psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial\psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial\psi}{\partial w} \right) \right]. \quad (2.67)$$

Para los objetivos del trabajo se requieren los operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas, donde las coordenadas son (ρ, θ, z) , representadas en la Fig. 2.5.

Figura 2.5: Representación de coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) .



Luego, las coordenadas cilíndricas se relacionan con las coordenadas cartesianas por medio de

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z. \quad (2.68)$$

De las expresiones anteriores y por medio de la Ec. (2.64), se obtienen los factores de

escala para este sistema coordenado,

$$h_\rho = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 + (0)^2} = 1, \quad (2.69)$$

$$h_\theta = \sqrt{(-\rho \sin \theta)^2 + (\rho \cos \theta)^2 + (0)^2} = \rho, \quad (2.70)$$

$$h_z = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = 1. \quad (2.71)$$

Finalmente, reemplazando en las Ec. (2.65), (2.66) y (2.67), se tienen los operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_z, \quad (2.72)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (2.73)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (2.74)$$

Cuando se necesita trabajar en el plano $z = 0$, se tendrá una función escalar (ψ) o vectorial ($\vec{F}$) en coordenadas polares (donde solo dependen de ρ y θ). Entonces los operadores diferenciales en coordenadas polares, se obtienen anulando la coordenada z de las expresiones anteriores, pues la función no depende de esta. Es decir,

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta, \quad (2.75)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}, \quad (2.76)$$

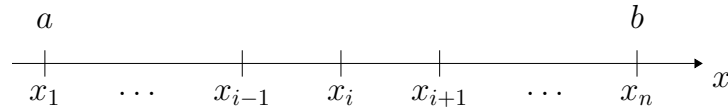
$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (2.77)$$

2.7. Método de Diferencias Finitas (DF)

El método de diferencias finitas es uno de los más simples para aproximar las derivadas de funciones. Para poder obtener estas aproximaciones el primer paso es

revisar la serie de Taylor, la cual es de gran valor en el estudio de los métodos numéricos. Esta serie proporciona un medio para predecir el valor de una función en un punto, en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto (Chapra, 2015). Si se tiene una variable independiente x en el dominio $[a, b]$, se puede realizar una discretización² a dicho dominio tomando n puntos. Los puntos tomados pueden denotarse como $\{x_1 = a, x_2, \dots, x_n = b\}$, aunque la numeración puede variar. En la Fig. 2.6 se ilustra la discretización del dominio $[a, b]$.

Figura 2.6: Discretización en n puntos del dominio $[a, b]$.



Para una función $f(x)$ de clase $\mathcal{C}^n$ en el intervalo que contiene a x_i y $x_{i+1} = x_i + h$ (donde h es denominado tamaño de paso o incremento), el valor de la función en x_{i+1} está dada por la serie de Taylor que se muestra a continuación

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n, \quad (2.78)$$

donde R_n es el término residual, que equivale a todos los términos desde el $n + 1$ hasta el infinito y está definido por

$$R_n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \quad (2.79)$$

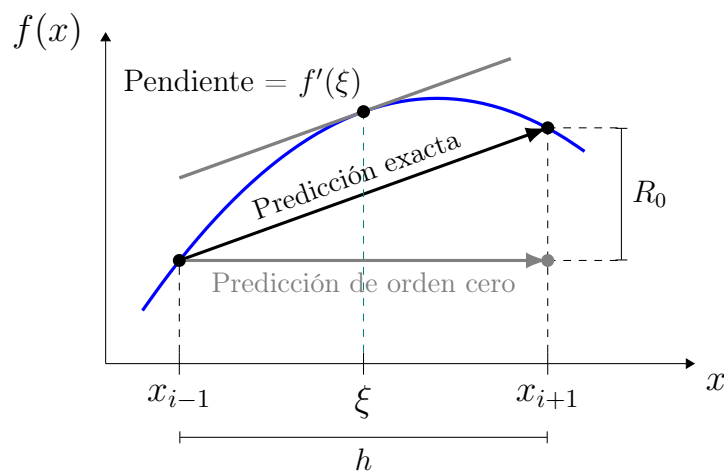
El subíndice n indica que éste es el residuo de la aproximación de n -ésimo orden, mientras que t es una variable muda. Esta expresión es sólo una manera, denominada forma integral, de expresar el término residual. Entonces a partir del teorema del valor medio para integrales, se obtiene la siguiente expresión para el término residual,

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{(n+1)}. \quad (2.80)$$

²La discretización es el proceso de transformar una variable de valor continuo en discreta mediante la creación de un conjunto de intervalos contiguos o un conjunto de puntos, que abarca el rango de valores de la variable.

Donde ξ es un valor de x que se encuentra en algún punto entre x_i y x_{i+1} , el cual es muy importante ya que da una evaluación exacta del error. Por ejemplo, si se hace una aproximación de orden cero, se tendría que $f(x_{i+1}) = f(x_i) + R_0$, donde $R_0 = f'(\xi)h$. De esta forma se tiene que la predicción de orden cero difiere por R_0 de una predicción exacta, como se muestra en la Fig. 2.7. Teniendo en cuenta el teorema del valor medio para la derivada, si una función es de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo de x_i a x_{i+1} , entonces existe al menos un punto ξ en la función que tiene una pendiente que es paralela a la línea que une $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$, como también se observa en la Fig. 2.7.

Figura 2.7: Representación de una aproximación de orden cero y el teorema del valor medio para la derivada.



En el caso de tener un polinomio de orden n , la serie de Taylor de n -ésimo orden será exacta, es decir, R_n será cero. Para otras funciones, que cumplan la condición para la serie de Taylor, como las funciones senoidales, no es posible obtener una estimación exacta con una cantidad finita de términos. Cada uno de los términos contribuye a la aproximación del valor, por más pequeña que sea dicha contribución. La determinación de cuantos términos son necesarios para obtener una “aproximación razonable” se basa en el término residual R_n de la serie. Se debe tener en cuenta que la expresión para el término residual presenta un par de inconvenientes: el valor de ξ no se conoce, solo se sabe que está entre x_i y x_{i+1} ; además, se requiere la $(n + 1)$ -ésima derivada de $f(x)$ y para ello se necesita conocer la función $f(x)$, pero si se conoce $f(x)$ no hay motivo para hacer una aproximación mediante la serie de Taylor. Y a pesar de estos

inconvenientes, la expresión para R_n (Ec. 2.80) es útil para la evaluación de los errores de truncamiento, debido al control que se tiene sobre el término h de la ecuación. Por este motivo, la Ec. (2.80) usualmente se expresa como

$$R_n = \mathcal{O}(h^{n+1}), \quad (2.81)$$

donde la nomenclatura $\mathcal{O}(h^{n+1})$ indica que el error de truncamiento es de orden h^{n+1} , lo que significa que el error es proporcional al incremento h elevado a la $(n + 1)$ -ésima potencia. Aunque esta nomenclatura no da alguna idea de la magnitud de las derivadas que acompañan a h^{n+1} , es muy útil para evaluar un error comparativo de los métodos numéricos que se basan en la serie de Taylor. Por ejemplo, si se tiene un error de truncamiento $\mathcal{O}(h)$ y el incremento h se reduce a la mitad, entonces el error de truncamiento también se reduce a la mitad. En cambio, si el error de truncamiento es $\mathcal{O}(h^2)$ y el incremento se reduce a la mitad, entonces el error se reducirá a la cuarta parte.

Si se toma una aproximación de la función $f(x)$, en el punto $x_{i+1} = x_i + h$, hasta el primer orden, de la Ec. (2.78) se obtiene

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + R_1. \quad (2.82)$$

Despejando $f'(x_i)$ de la ecuación anterior, se tiene

$$f'(x_i) = \underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}_{\text{Aproximación de 1º orden}} - \underbrace{\frac{R_1}{h}}_{\text{Error de truncamiento}}. \quad (2.83)$$

Teniendo en cuenta la expresión completa para el término residual R_1 (Ec. 2.80) y la nomenclatura $\mathcal{O}$ (visto en la Ec. 2.81), el error de truncamiento se puede expresar como

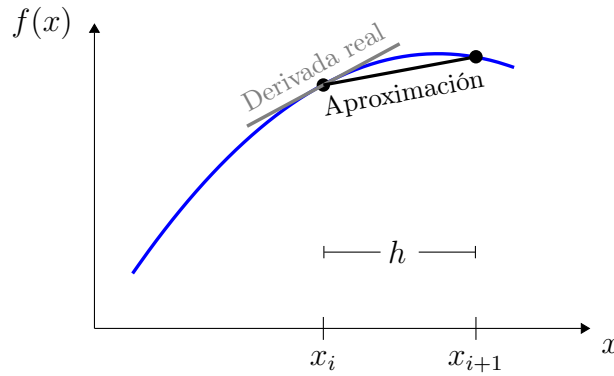
$$-\frac{R_1}{h} = -\frac{f''(\xi)}{2!}h = \mathcal{O}(h). \quad (2.84)$$

De esta forma la Ec. (2.83) se reescribe como

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (2.85)$$

A este método para obtener las aproximaciones de las derivadas a partir de las series de Taylor se le conoce como *diferencias finitas*. Por esto, a esta última ecuación se le llama primera diferencia finita hacia adelante de primer orden. Se le denomina “hacia adelante” porque usa puntos en i e $i + 1$ para estimar la derivada (ver Fig. 2.8), y “de primer orden” debido al error de truncamiento $\mathcal{O}(h)$. Esta diferencia finita solo es una de las que pueden desarrollarse a partir de la serie de Taylor para aproximar derivadas numéricamente.

Figura 2.8: Gráfica de la aproximación de la primera derivada por diferencia finita hacia adelante.



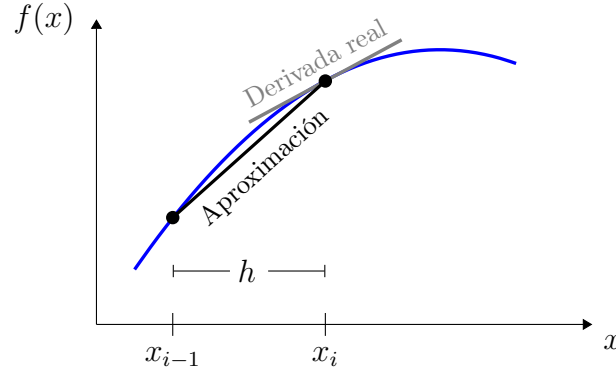
Al desarrollar la serie de Taylor para aproximar la función $f(x)$, en el punto $x_{i-1} = x_i - h$, hasta el primer orden se puede obtener la primera diferencia finita hacia atrás de primer orden

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i) h + R_1, \quad (2.86)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (2.87)$$

De manera análoga al caso anterior se denomina “hacia atrás” porque usa puntos en i e $i - 1$ para estimar la derivada (ver Fig. 2.9), y de primer orden por el error de truncamiento $\mathcal{O}(h)$.

Figura 2.9: Gráfica de la aproximación de la primera derivada por diferencia finita hacia atrás.



Además, se puede desarrollar una mejor aproximación de la primera derivada incluyendo términos de orden superior en la serie de Taylor. Considerando una aproximación de $f(x)$ para un punto anterior $x_{i-1} = x_i - h$ y otra para un punto posterior $x_{i+1} = x_i + h$; ambos hasta el segundo orden, se tiene

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!}h^3, \quad (2.88)$$

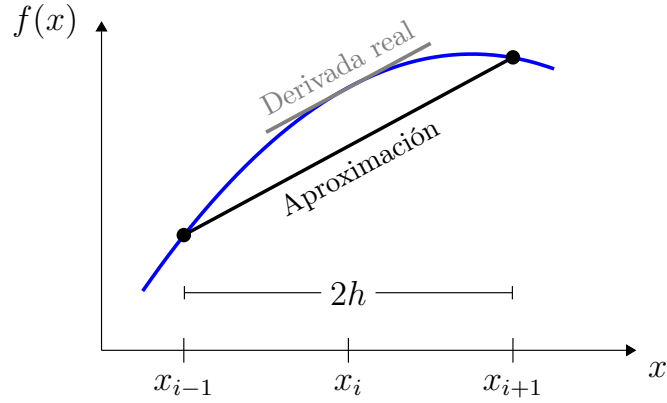
$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}h^3. \quad (2.89)$$

Restando las ecuaciones anteriores y despejando $f'(x_i)$ se obtiene

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.90)$$

A esta aproximación se le denomina primera diferencia finita centrada de segundo orden. Llamada así porque se toman puntos igualmente espaciados ($i - 1$ e $i + 1$) alrededor del punto de interés i , como se observa en la Fig. 2.10. Se debe tener en cuenta que para este caso el error de truncamiento es de orden dos, $\mathcal{O}(h^2)$, a diferencia de las aproximaciones hacia adelante y hacia atrás, que presentan un error de orden uno, $\mathcal{O}(h)$. El cual brinda una mejor aproximación.

Figura 2.10: Gráfica de aproximación de la primera derivada por diferencia finita centrada.



De esta forma es posible obtener aproximaciones a derivadas de ordenes superiores, así como errores de truncamiento de mayor orden. Por este motivo, se presentan tablas con las aproximaciones de la primera y segunda derivada para diferentes órdenes de errores de truncamiento. Las aproximaciones mostradas son para diferencias finitas hacia adelante (Tabla 2.1), hacia atrás (Tabla 2.2) y centradas (Tabla 2.3), ya que serán de suma importancia a lo largo del trabajo.

Tabla 2.1: Aproximaciones de la primera y segunda derivada por diferencias finitas hacia adelante. Se presentan dos expresiones por cada derivada, las cuales corresponden a un orden de truncamiento diferente.

Primera derivada	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$\mathcal{O}(h)$
	$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$\mathcal{O}(h^2)$
Segunda derivada	$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$\mathcal{O}(h)$
	$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$\mathcal{O}(h^2)$

Tabla 2.2: Aproximaciones de la primera y segunda derivada por diferencias finitas hacia atrás. Se presentan dos expresiones por cada derivada, las cuales corresponden a un orden de truncamiento diferente.

Primera derivada	$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$\mathcal{O}(h)$
	$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$\mathcal{O}(h^2)$
Segunda derivada	$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$	$\mathcal{O}(h)$
	$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^2}$	$\mathcal{O}(h^2)$

Tabla 2.3: Aproximaciones de la primera y segunda derivada por diferencias finitas centradas. Se presentan dos expresiones por cada derivada, las cuales corresponden a un orden de truncamiento diferente.

Primera derivada	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$	$\mathcal{O}(h^2)$
	$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$	$\mathcal{O}(h^4)$
Segunda derivada	$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$	$\mathcal{O}(h^2)$

2.8. Solución Numérica de un sistema lineal complejo

En esta sección se busca una forma numérica de resolver un sistema lineal de variable compleja, usando de referencia el artículo de Edalatpour et al. (2015). Sea el sistema

$$Az = b, \quad (2.91)$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $z, b \in \mathbb{C}^n$. Se puede reescribir el sistema con matrices reales como

$$(M + iN)(x + iy) = b_1 + ib_2, \quad (2.92)$$

donde $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $x, y, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$. Entonces se puede desarrollar de la siguiente forma

$$Mx + iMy + iNx + i^2Ny = b_1 + ib_2 \quad (2.93)$$

$$(Mx - Ny) + i(Nx + My) = b_1 + ib_2. \quad (2.94)$$

Igualando las partes real e imaginaria de ambos términos de la ecuación, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} Mx - Ny = b_1 \\ Nx + My = b_2. \end{cases} \quad (2.95)$$

Expresando este sistema de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} M & -N \\ N & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

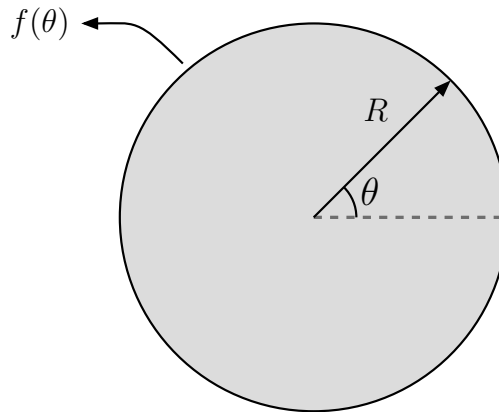
Finalmente se tiene un sistema lineal real, el cual puede ser resuelto de forma numérica con algún método iterativo conocido.

2.9. Condiciones de contorno en el objeto de estudio

Los conceptos físicos, matemáticos y numéricos presentados en las secciones anteriores desempeñarán un papel fundamental en el estudio analítico y numérico de la ecuación estacionaria del calor. En general, esta ecuación tiene la capacidad de representar una amplia variedad de problemas. Por lo tanto, en esta sección se plantean las condiciones de contorno que se desarrollan en los capítulos posteriores, con el objetivo de abordar los casos de interés en el trabajo.

La ecuación del calor estacionaria, sin fuentes internas, presenta una expresión general como se pudo observar en la Ec. (2.37). Para poder obtener una solución numérica a esta ecuación, es necesario describir la geometría del medio donde se va a resolver, y también proporcionar las condiciones de contorno (CC). En el capítulo I se planteó que el medio (objeto de estudio) es una placa circular de radio R , la cual puede describirse en un sistema coordenado polar. Luego, en la sección 2.4 se observaron diferentes tipos de CC, y la que se usa en este trabajo es la CC de Dirichlet. Esto significa que la función temperatura $T(r, \theta)$, tiene un valor fijo en el contorno de la placa circular, $T(R, \theta) = f(\theta)$ (ver Fig. 2.11).

Figura 2.11: Representación esquemática de la geometría circular y CC del medio.

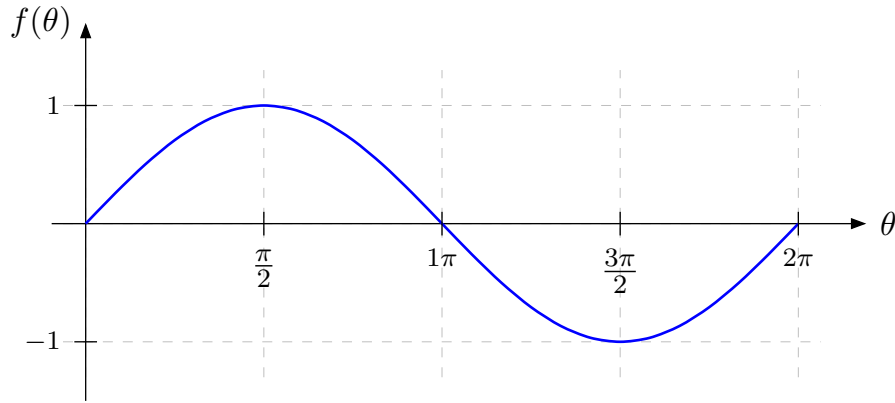


Al momento de escoger las CC de Dirichlet $f(\theta)$, se debe tener en cuenta que deben cumplir con que $f(0) = f(2\pi)$, debido a la geometría del problema. Por este motivo y con el fin de tener diferentes casos para analizar los resultados, se plantean dos $f(\theta)$.

Se denominará **primera condición de contorno de Dirichlet** o PCCD, a una CC matemáticamente sencilla que permita hacer un seguimiento al método numérico. La PCCD está dada por la Ec. (2.97) y su gráfica se observa en la Fig. 2.12.

$$f(\theta) = \sin \theta. \quad (2.97)$$

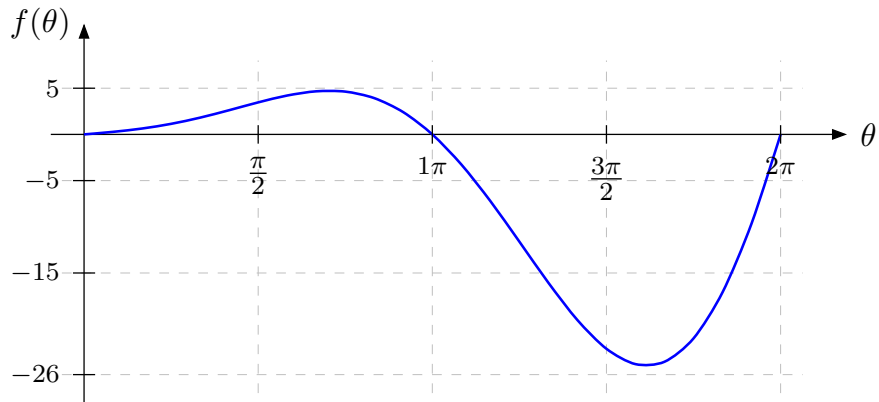
Figura 2.12: Gráfico de la función de la PCCD.



Se denominará **segunda condición de contorno de Dirichlet** o SCCD, a una CC un poco más compleja, para poder mostrar las capacidades del código implementado. La SCCD está dada por la Ec. (2.98) y su gráfica se observa en la Fig. 2.13.

$$f(\theta) = (1 + \theta^2) \sin \theta. \quad (2.98)$$

Figura 2.13: Gráfico de la función de la SCCD .

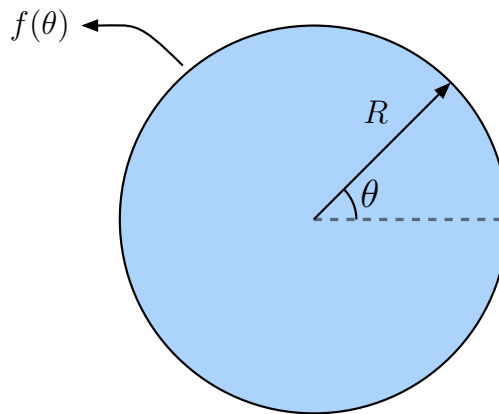


Capítulo III

Conductividad térmica constante

En este capítulo se busca resolver el primer caso planteado en la sección 1.2. El problema se centra en hallar una solución numérica a la ecuación del calor en estado estacionario y sin fuentes internas, en una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$. Lo particular de este capítulo es la conductividad térmica constante k de la placa. Esta descripción se puede visualizar en la Fig. 3.1.

Figura 3.1: Diagrama esquemático de una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$.



Por la descripción del problema, la ecuación a resolver es la ecuación de Laplace para la temperatura (Ec. 2.38), la cual se puede expresar en diferentes sistemas coordenados. Teniendo en cuenta que el medio es una placa circular, es conveniente trabajar en coordenadas polares. Entonces de acuerdo con la Ec. (2.77), la ecuación de Laplace

puede reescribirse como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.1)$$

A partir de este punto se puede comenzar con el desarrollo del método numérico, ya que es la finalidad del trabajo. Pero la intención es que el resultado numérico que se obtenga posteriormente, pueda ser comparado. A continuación se presentará un desarrollo detallado para obtener la solución analítica a la Ec. (3.1), a partir de lo descrito en Boyce (2012).

Visto que la Ec. (3.1) es una ecuación diferencial parcial lineal, se aplica el método de separación de variables. Dicho método consiste en asumir que la función temperatura $T(r, \theta)$ se puede expresar como el producto de dos funciones de una variable, es decir,

$$T(r, \theta) = \mathfrak{R}(r)\Theta(\theta). \quad (3.2)$$

Luego, al reemplazar la Ec. (3.2) en (3.1), se tiene que las derivadas respecto a cada variable solo afectan a las funciones correspondientes. Por este motivo la Ec. (3.1) se puede reescribir como sigue

$$\mathfrak{R}''\Theta + \frac{1}{r}\mathfrak{R}'\Theta + \frac{1}{r^2}\mathfrak{R}\Theta'' = 0 \quad (3.3)$$

$$r^2\mathfrak{R}''\Theta + r\mathfrak{R}'\Theta + \mathfrak{R}\Theta'' = 0 \quad (3.4)$$

$$r^2\frac{\mathfrak{R}''}{\mathfrak{R}} + r\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0 \quad (3.5)$$

$$r^2\frac{\mathfrak{R}''}{\mathfrak{R}} + r\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}} = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (3.6)$$

En esta última ecuación, a cada lado de la igualdad se tienen las funciones y sus derivadas, correspondientes a una misma variable. De esta forma, es posible igualar cada uno de los términos de la ecuación a una constante λ , es decir,

$$r^2\frac{\mathfrak{R}''}{\mathfrak{R}} + r\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}} = \lambda = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (3.7)$$

De esta expresión se obtienen dos ecuaciones diferenciales de una variable, las cuales se encuentran relacionadas por medio de la constante λ ,

$$r^2\Re'' + r\Re - \lambda\Re = 0, \quad (3.8)$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \quad (3.9)$$

Para hallar la solución de las Ec. (3.8) y (3.9), es necesario evaluar qué valores puede tomar la constante λ . Esto presenta tres casos, cuando λ es menor que cero, cuando λ es igual a cero y cuando λ es mayor que cero.

Caso 1, cuando λ es menor que cero. En este caso, para indicar que λ es un número negativo, se puede expresar como $\lambda = -\mu^2$, donde $\mu > 0$ para evitar problemas de signos más adelante. De esta forma, la Ec. (3.8) se reescribe como

$$\Theta'' - \mu^2\Theta = 0. \quad (3.10)$$

Cuya solución está dada por

$$\Theta(\theta) = \gamma_1 e^{\mu\theta} + \gamma_2 e^{-\mu\theta}, \quad (3.11)$$

donde γ_1 y γ_2 son constantes. Además, teniendo en cuenta que la función $T(r, \theta)$ es periódica respecto a la variable θ , la función $\Theta(\theta)$ también debe ser periódica, con periodo 2π . Es decir, se debe cumplir que $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. De esto,

$$\gamma_1 e^{\mu\theta} + \gamma_2 e^{-\mu\theta} = \gamma_1 e^{\mu(\theta+2\pi)} + \gamma_2 e^{-\mu(\theta+2\pi)} \quad (3.12)$$

$$\gamma_1 e^{\mu\theta} + \gamma_2 e^{-\mu\theta} = \gamma_1 e^{\mu\theta} e^{\mu 2\pi} + \gamma_2 e^{-\mu\theta} e^{-\mu 2\pi} \quad (3.13)$$

$$\gamma_1 e^{\mu\theta} (1 - e^{\mu 2\pi}) + \gamma_2 e^{-\mu\theta} (1 - e^{-\mu 2\pi}) = 0. \quad (3.14)$$

Debido a que, en general, los términos $[e^{\mu\theta}(1 - e^{\mu 2\pi})]$ y $[e^{-\mu\theta}(1 - e^{-\mu 2\pi})]$ son valores diferentes de cero, se concluye que las constantes γ_1 y γ_2 deben ser cero. De ser así, se tendría que $T(r, \theta) = 0$ (solución trivial) y eso no es lo que se busca. Por lo tanto λ no puede ser un número negativo.

Caso 2, cuando λ es igual a cero. En este caso, al reemplazar $\lambda = 0$ en la Ec. (3.9), se obtiene la ecuación $\Theta'' = 0$, cuya solución es

$$\Theta(\theta) = \omega_1 + \omega_2\theta, \quad (3.15)$$

donde ω_1 y ω_2 son constantes. Luego, teniendo en cuenta la periodicidad de la función como en el caso 1, se debe cumplir que $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. Resultando,

$$\omega_1 + \omega_2\theta = \omega_1 + \omega_2(\theta + 2\pi) \quad (3.16)$$

$$\omega_2 = 0. \quad (3.17)$$

De esto, se tiene que la función $\Theta(\theta)$ es igual a la constante ω_1 . Además, al reemplazar el valor de λ en la Ec. (3.8), se obtiene una ecuación de Euler,

$$r^2\Re'' + r\Re' = 0. \quad (3.18)$$

Para la cual, después de aplicar un cambio de variable ($r = e^u$), se tiene que la solución a la ecuación diferencial es

$$\Re(r) = \nu_1 + \nu_2 \ln(r). \quad (3.19)$$

Al analizar la función $\Re(r)$, se observa que $\ln(r) \rightarrow -\infty$, cuando $r \rightarrow 0^+$; por lo cual, la solución diverge para $r = 0$. Entonces ν_2 debe ser cero y con esto

$$\Re(r) = \nu_1. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la función resultante para este caso es

$$T(r, \theta) = \omega_1\nu_1 = A. \quad (3.21)$$

Caso 3, cuando λ es mayor que cero. En este caso, para indicar que λ es un número positivo, se puede expresar como $\lambda = \mu^2$, donde $\mu > 0$. De esta forma, las Ec.

(3.8) y (3.9) se reescriben como

$$r^2 \mathfrak{R}'' + r \mathfrak{R}' - \mu^2 \mathfrak{R} = 0 \quad (3.22)$$

$$\Theta'' + \mu^2 \Theta = 0. \quad (3.23)$$

Partiendo de la Ec. (3.22), la solución a esta ecuación de Euler es la siguiente

$$\mathfrak{R}(r) = \delta_1 r^\mu + \delta_2 r^{-\mu} \quad (3.24)$$

donde δ_1 y δ_2 son constantes. Mientras que la solución para la Ec. (3.23) es

$$\Theta(\theta) = \phi_1 \cos(\mu\theta) + \phi_2 \sin(\mu\theta) \quad (3.25)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son constantes. Luego, teniendo en cuenta que se debe cumplir la periodicidad de la función, $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, se tiene

$$\delta_1 \cos(\mu\theta) + \delta_2 \sin(\mu\theta) = \delta_1 \cos(\mu\theta + \mu 2\pi) + \delta_2 \sin(\mu\theta + \mu 2\pi). \quad (3.26)$$

De esto se deduce que μ necesariamente es un entero positivo n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Entonces reemplazando $\mu = n$ en las Ec. (3.24) y (3.25), se tiene que la función T depende del parámetro n . Por lo tanto, la solución de la función $T_n(r, \theta) = \mathfrak{R}_n(r) \Theta_n(\theta)$, cuando λ es mayor que cero, es la siguiente

$$T_n(r, \theta) = (\delta_{1n} r^n + \delta_{2n} r^{-n}) (\phi_{1n} \cos(n\theta) + \phi_{2n} \sin(n\theta)) \quad (3.27)$$

$$T_n(r, \theta) = (C_n r^n + E_n r^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n r^n + F_n r^{-n}) \sin(n\theta), \quad (3.28)$$

donde $C_n = \delta_{1n} \phi_{1n}$, $D_n = \delta_{1n} \phi_{2n}$, $E_n = \delta_{2n} \phi_{1n}$ y $F_n = \delta_{2n} \phi_{2n}$, son constantes. Posteriormente, al analizar la función $\mathfrak{R}(r)$ se observa que $r^{-n} \rightarrow -\infty$, cuando $r \rightarrow 0^+$; y se tiene que la solución diverge para $r = 0$. Entonces δ_{2n} debe ser cero y con esto

$$\mathfrak{R}(r) = \delta_{1n} r^n. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, la función resultante para este caso es

$$T(r, \theta) = \delta_{1n} \phi_{1n} r^n \cos(n\theta) + \delta_{1n} \phi_{2n} r^n \sin(n\theta) \quad (3.30)$$

$$T(r, \theta) = C_n r^n \cos(n\theta) + D_n r^n \sin(n\theta). \quad (3.31)$$

Finalmente, se tiene un conjunto de soluciones fundamentales para el problema. Entonces asumiendo que $T(r, \theta)$ puede ser expresado como una combinación lineal de estas soluciones, la solución general del problema es

$$T(r, \theta) = A + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n r^n \cos(n\theta) + D_n r^n \sin(n\theta)]. \quad (3.32)$$

Sin embargo, aún no se conocen los coeficientes A , C_n y D_n . Para ello se debe usar la condición de contorno de Dirichlet escogida. Reemplazando $T(R, \theta) = f(\theta)$, se tiene

$$f(\theta) = A + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n R^n \cos(n\theta) + D_n R^n \sin(n\theta)]. \quad (3.33)$$

Esta expresión puede reescribirse de tal forma que sea idéntica a la expansión de Fourier en senos y cosenos (Ec. 2.54), ya que los coeficientes de dicha expansión son conocidos. Esto es posible tomando $A = \alpha_0/2$, $C_n R^n = \alpha_n$ y $D_n R^n = \beta_n$, resultando

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)]. \quad (3.34)$$

Donde los valores de α_n y β_n se calculan a partir de

$$\alpha_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) f(\theta) d\theta, \quad n \geq 0; \quad (3.35)$$

$$\beta_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta) d\theta, \quad n \geq 1. \quad (3.36)$$

3.1. Soluciones analíticas

En esta sección se hallaran soluciones analíticas a la ecuación de Laplace para la temperatura, en coordenadas polares (Ec. 3.1). Estas soluciones se hallan a partir de

las condiciones de contorno establecidas en la sección 2.9. Como la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas polares está dada en la Ec. (3.32), para obtener las soluciones analíticas faltarían hallar los coeficientes que se desconocen en la ecuación. Estos coeficientes se obtienen a partir de las Ec. (3.35) y (3.36).

1. Solución analítica a partir de la PCCD. Para obtener los coeficientes correspondientes a esta CC, se tiene que reemplazar la Ec. (2.97) en las ecuaciones ya mencionadas. Hallando α_n , se tiene

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \sin \theta \, d\theta \quad (3.37)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\sin((n+1)\theta) + \sin((1-n)\theta)] \, d\theta \quad (3.38)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)] \, d\theta \quad (3.39)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{-\cos((n+1)\theta)}{(n+1)} \right] \Big|_0^{2\pi} - \left[\frac{-\cos((n-1)\theta)}{(n-1)} \right] \Big|_0^{2\pi} \right\}. \quad (3.40)$$

Debido al denominador $(n-1)$, se deduce que esta solución es válida para valores de n diferente de uno. Luego, al momento de evaluar los límites de integración se obtiene que $\alpha_n = 0$ para $n \neq 1$. De esto, y como $\alpha_n = C_n R^n$, se tiene que

$$C_n = 0, \quad n \neq 1. \quad (3.41)$$

Para el caso donde $n = 1$, se reemplaza directamente en la Ec. (3.35)

$$C_1 R = \alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \quad (3.42)$$

$$C_1 = 0. \quad (3.43)$$

De estos dos últimos resultados, se tiene que el valor del coeficiente C_n es cero, para

todo valor de n . Posteriormente, de manera análoga para hallar β_n , se tiene

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta \quad (3.44)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos((n+1)\theta) - \cos((1-n)\theta)] d\theta \quad (3.45)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos((n+1)\theta) - \cos((n-1)\theta)] d\theta \quad (3.46)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{-\cos((n+1)\theta)}{(n+1)} \right] \Big|_0^{2\pi} - \left[\frac{-\cos((n-1)\theta)}{(n-1)} \right] \Big|_0^{2\pi} \right\}. \quad (3.47)$$

Del mismo modo, debido al denominador, esta solución es válida para valores de n diferentes de uno. Luego, evaluando los límites de integración se obtiene que $\beta_n = 0$ para $n \neq 1$. De esto, y como $\beta_n = D_n R^n$, se tiene que

$$D_n = 0, \quad n \neq 1. \quad (3.48)$$

Para el caso donde $n = 1$, se reemplaza directamente en la Ec. (3.36)

$$D_1 R = \beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin \theta d\theta \quad (3.49)$$

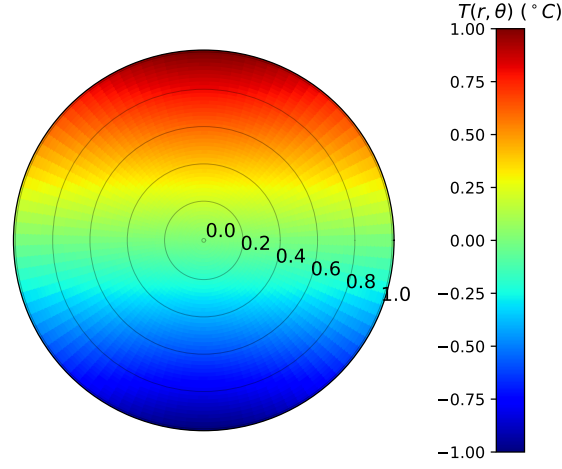
$$D_1 = \frac{1}{R}. \quad (3.50)$$

De esto último se tiene que D_1 es el único coeficiente diferente de cero. Entonces, reemplazando D_1 en la Ec. (3.32), la solución a la ecuación de Laplace en una placa circular, con la PCCD, es

$$T(r, \theta) = \frac{r}{R} \sin \theta. \quad (3.51)$$

Esta solución indica el valor de la temperatura en cada punto de la placa circular, y se puede representar gráficamente en un mapa de calor. Como se observa en la Fig. 3.2, para una placa circular de radio $R = 1$.

Figura 3.2: Mapa de calor para la solución analítica de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, con la PCCD. En una placa circular de radio $R = 1$.

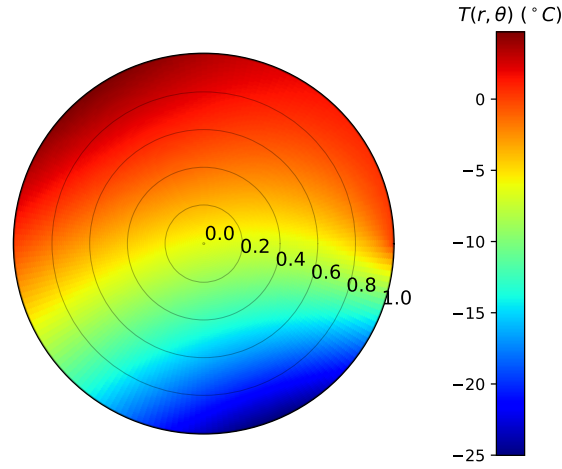


2. Solución analítica a partir de la SCCD. Para obtener los coeficientes correspondientes a esta CC, se tiene que reemplazar la Ec. (2.98) en las ecuaciones ya mencionadas. Realizando un análisis similar a la CC anterior, se tiene que la solución a la ecuación de Laplace en una placa circular, con la SCCD, es

$$T(r, \theta) = -2\pi + r \left(-\pi \cos \theta + \left(\frac{3 + 8\pi^2}{6} \right) \sin \theta \right) + \sum_{m=2}^{\infty} r^m \left(\frac{4\pi}{m^2 - 1} \cos(m\theta) + \frac{8m}{(1 - m^2)^2} \sin(m\theta) \right). \quad (3.52)$$

En este caso, se tiene que la solución es una sumatoria infinita. Para poder representar gráficamente esta solución en un mapa de calor, se considera una sumatoria hasta un índice m suficientemente grande, debido a que numéricamente no se puede tomar este tipo de sumatorias infinitas. De esta forma se puede tener una buena aproximación, como se observa en la Fig. 3.3, que considera la sumatoria hasta un índice m igual a 100, para una placa circular de radio $R = 1$.

Figura 3.3: Mapa de calor para la solución analítica de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, con la SCCD. Considerando la sumatoria hasta un índice m igual a 100, en una placa circular de radio $R = 1$.



3.2. Solución numérica

En esta sección se busca resolver la ecuación de Laplace de forma numérica para una placa circular. Para ello, se desarrolla un método numérico que permita obtener una solución. Este método se basa en la hipótesis planteada en la sección 1.2. Se asume que una expansión de Fourier de la función temperatura permite reducir la ecuación del calor de un problema bidimensional a uno unidimensional. Esto deja el problema unidimensional preparado para aplicar el método de diferencias finitas, obteniendo un sistema de ecuaciones algebraicas. Al desarrollo matemático en la aplicación de la expansión de Fourier y diferencias finitas se le podría denominar una discretización de la ecuación del calor. Posteriormente, queda resolver el sistema de ecuaciones algebraicas, cuya solución permite reconstruir la función temperatura en diferentes puntos (r, θ) en la placa circular. De esta forma, se obtiene la distribución de temperaturas.

3.2.1. Discretización de la ecuación del calor

Como se mencionó en la sección 2.9, debido a la geometría del objeto de estudio, este puede describirse en coordenadas polares. Asimismo, se puede expresar la función temperatura $T(r, \theta)$, la cual es periódica respecto a la variable θ . Por este motivo, se

puede realizar una expansión de Fourier en serie de exponenciales respecto a θ (como se explica en la sección 2.5), esto es

$$T(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^m(r) e^{im\theta}. \quad (3.53)$$

Donde el coeficiente C^m es, en general, un número complejo. Además, este debe ser función de la variable r , pues la función temperatura depende de dos variables y la expansión se realizó respecto a la variable θ . El índice m es un número entero, usualmente denominado *modo*. Seguidamente, al reemplazar la Ec. (3.53) en (3.1), se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^m(r) e^{im\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^m(r) e^{im\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^m(r) e^{im\theta} = 0 \quad (3.54)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{im\theta} \frac{\partial^2}{\partial r^2} C^m(r) + \frac{e^{im\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial r} C^m(r) - \frac{m^2}{r^2} e^{im\theta} C^m(r) \right) = 0 \quad (3.55)$$

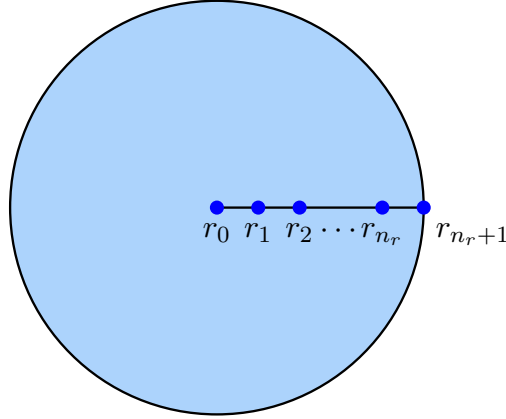
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^2}{dr^2} C^m(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} C^m(r) - \frac{m^2}{r^2} C^m(r) \right) e^{im\theta} = 0. \quad (3.56)$$

Donde la Ec. 3.56 puede entenderse como una combinación lineal de los elementos en el conjunto de exponenciales $\{\exp(im\theta)\}$. Además, ya que dicho conjunto es linealmente independiente, el término entre paréntesis debe ser cero para cada modo (valor de m), es decir,

$$\frac{d^2}{dr^2} C^m(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} C^m(r) - \frac{m^2}{r^2} C^m(r) = 0; \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (3.57)$$

Esta última ecuación, la cual también depende del modo m , es una ecuación diferencial para el coeficiente $C^m(r)$, que solo depende de la variable r . Entonces, debido a la expansión de Fourier se tiene que el problema bidimensional se redujo a uno unidimensional, el cual puede ser resuelto mediante el método numérico de diferencias finitas. Por este motivo, ahora solo se necesita discretizar la dirección radial. Para ello, se toman n_r puntos a lo largo de la dirección radial, como se muestra en la Fig. 3.4. Esta discretización radial no incluye el centro ($r_0 = 0$) ni el contorno ($r_{n_r+1} = R$) de la placa circular.

Figura 3.4: Discretización a lo largo de la dirección radial tomando n_r puntos. Esta discretización no incluye el centro ($r_0 = 0$) ni el contorno ($r_{n_r+1} = R$) de la placa circular.



El paso entre dos puntos radiales consecutivos r_j y r_{j+1} , es $h = R/(n_r + 1)$. Por esta razón se tiene que $r_1 = h$, $r_2 = 2h$, ..., $r_{n_r} = n_r h$. Por simplicidad, se considera la siguiente notación $C^m(r_j + bh) = C_{j+b}^m$. Luego, se aplican las aproximaciones por diferencias finitas centradas de segundo orden (ver Tabla 2.3) en la Ec. (3.57). De esto, al aplicarse para el punto r_j , se obtiene

$$\frac{C_{j+1}^m - 2C_j^m + C_{j-1}^m}{h^2} + \frac{1}{r_j} \frac{C_{j+1}^m - C_{j-1}^m}{2h} - \frac{m^2}{r_j^2} C_j^m = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{1}{h^2} C_{j+1}^m - \frac{2}{h^2} C_j^m + \frac{1}{h^2} C_{j-1}^m + \frac{1}{2r_j h} C_{j+1}^m - \frac{1}{2r_j h} C_{j-1}^m - \frac{m^2}{r_j^2} C_j^m = 0 \quad (3.59)$$

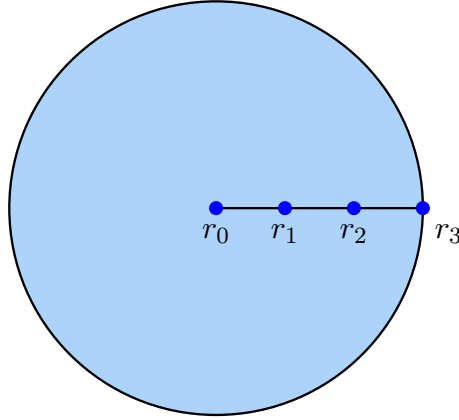
$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_j h} \right] C_{j-1}^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_j^2} \right] C_j^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_j h} \right] C_{j+1}^m = 0. \quad (3.60)$$

La Ec.(3.60) es una expresión algebraica que aproxima las derivadas de C^m en el punto r_j . Esta aproximación incluye también los términos de C^m en los puntos r_{j-1} y r_{j+1} . Debido a esto, es posible armar un sistema de ecuaciones, que permita obtener una solución numérica para los coeficientes C_j^m . Como se puede observar, la cantidad de ecuaciones e incógnitas va a depender del valor de n_r que se escoja. Además que para cada modo m se tendrá un sistema de ecuaciones diferente. Por este motivo, en la siguiente subsección se busca obtener una solución numérica al problema considerando un valor de $n_r = 2$.

3.2.2. Solución con 2 puntos en la dirección radial

En esta sección se busca analizar el procedimiento a seguir en una solución numérica general. Por este motivo, se resuelve numéricamente el problema para un valor de $n_r = 2$, considerando solo la PCCD. Siguiendo la discretización realizada en la Fig. 3.4, para el caso de una placa de radio $R = 1$ con $n_r = 2$ (ver Fig. 3.5), se tiene que $r_0 = 0$, $r_1 = h$, $r_2 = 2h$ y $r_3 = 3h$, donde $h = 1/3$.

Figura 3.5: Discretización a lo largo de la dirección radial tomando un $n_r = 2$.



Para esta discretización, el problema se resolverá en los puntos r_1 y r_2 . Ya que los coeficientes de la expansión de Fourier en el punto r_3 se conocen por la condición de contorno establecida. Además, se tiene que en el punto r_0 no es posible resolver el problema, ya que en la Ec. (3.60) se obtendría un valor indefinido. Por lo tanto, al aplicar la Ec. (3.60) en los puntos r_1 y r_2 , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

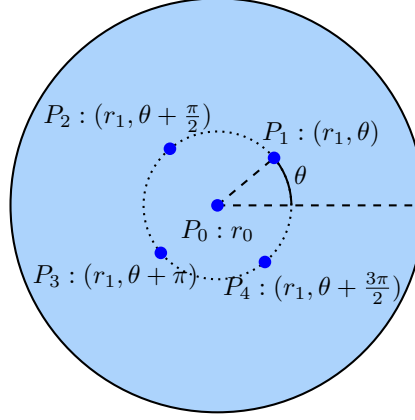
$$\underline{r_1}: \quad \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h^2} \right] C_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{1h^2} \right] C_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h^2} \right] C_2^m = 0, \quad (3.61)$$

$$\underline{r_2}: \quad \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{4h^2} \right] C_1^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{4h^2} \right] C_2^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{4h^2} \right] C_3^m = 0. \quad (3.62)$$

Dicho sistema de ecuaciones presenta tres incógnitas (C_0^m , C_1^m y C_2^m), debido a que los coeficientes C_3^m son conocidos, como se mencionó anteriormente. Entonces, para tener un sistema de ecuaciones consistente, se necesita una ecuación adicional. Esto es posible si se obtiene una relación entre los coeficientes C_0^m y C_1^m . En ese sentido, se

plantea obtener esta relación considerando el valor de $T(r_0, \theta)$ como un promedio de cuatro puntos arbitrarios más próximos. Como se observa en la Fig. 3.6.

Figura 3.6: Puntos arbitrarios más próximos considerados en el promedio para obtener el valor de $T(r_0, \theta)$.



Para este caso, se consideran los valores de $T(P_1)$, $T(P_2)$, $T(P_3)$ y $T(P_4)$,

$$T(P_0) = \frac{1}{4} (T(P_1) + T(P_2) + T(P_3) + T(P_4)) \quad (3.63)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_0^m e^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} (1 + e^{im\pi/2} + e^{im\pi} + e^{im3\pi/2}) C_1^m e^{im\theta} \quad (3.64)$$

$$4C_0^m = \underbrace{(1 + e^{im\pi/2} + e^{im\pi} + e^{im3\pi/2})}_{\alpha_m} C_1^m \quad (3.65)$$

$$4C_0^m = \alpha_m C_1^m. \quad (3.66)$$

Donde el valor α_m depende del modo m ,

$$\alpha_m = \begin{cases} 4; & m \bmod 4 = 0 \\ 0; & m \bmod 4 \neq 0. \end{cases} \quad (3.67)$$

De esta forma, la Ec. (3.66) completa un sistema de ecuaciones consistente,

$$(4)C_0^m + (-\alpha_m)C_1^m + (0)C_2^m = 0, \quad (3.68)$$

$$\left(\frac{1}{2h^2}\right)C_0^m + \left(\frac{-2-m^2}{h^2}\right)C_1^m + \left(\frac{3}{2h^2}\right)C_2^m = 0, \quad (3.69)$$

$$(0)C_0^m + \left(\frac{3}{4h^2}\right)C_1^m + \left(\frac{-8-m^2}{4h^2}\right)C_2^m = \left(\frac{-5}{4h^2}\right)C_3^m. \quad (3.70)$$

El cual se puede expresar de forma matricial como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} 4 & -\alpha_m & 0 \\ \frac{1}{2h^2} & \frac{-2-m^2}{h^2} & \frac{3}{2h^2} \\ 0 & \frac{3}{4h^2} & \frac{-8-m^2}{4h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^m \\ C_1^m \\ C_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-5}{4h^2}C_3^m \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Luego, para hallar el valor de C_3^m , se debe realizar la expansión de Fourier en exponenciales de la PCCD. Para la cual se obtiene que

$$C_3^m = \begin{cases} i/2; & \text{si } m = -1 \\ 0; & \text{si } m \neq -1, 1 \\ -i/2; & \text{si } m = 1. \end{cases} \quad (3.72)$$

Teniendo en cuenta los valores de los coeficientes C_3^m y que $h = 1/3$, la ecuación matricial resultante es

$$\begin{bmatrix} 4 & -\alpha_m & 0 \\ \frac{9}{2} & 9(-2-m^2) & \frac{27}{2} \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{9(-8-m^2)}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^m \\ C_1^m \\ C_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-45}{4}C_3^m \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Entonces, si se resuelve un sistema lineal para cada valor de $m \in \mathbb{Z}$, se obtienen los valores de los coeficientes C_j^m y pueden ser reemplazados en la Ec. (3.53). Sin embargo, es posible reducir el cálculo para valores de $m \geq 0$, debido a que $T(r, \theta)$ es una función real y se cumple que $C_j^{-m} = C_j^{m*}$ (Ec. 2.52). Por este motivo, a continuación se resuelven algunos sistemas lineales para $m \geq 0$.

1. Para el modo $m = 0$, el sistema resultante es el siguiente,

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ \frac{9}{2} & -18 & \frac{27}{2} \\ 0 & \frac{27}{4} & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^0 \\ C_1^0 \\ C_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Para hallar una solución, se aplica el método de eliminación de Gauss, esto es

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & -18 & \frac{27}{2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} & -18 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\frac{1}{4}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & -18 & \frac{27}{2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} & -18 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{f_2 - \frac{9}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-27}{2} & \frac{27}{2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} & -18 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\frac{-2}{27}f_2} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} & -18 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{f_3 - \frac{27}{4}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-45}{4} & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\frac{-4}{45}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Posterior a ello, se obtiene el sistema reducido

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^0 \\ C_1^0 \\ C_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Despejando y reemplazando, se obtienen los tres coeficientes para $m = 0$,

$$C_0^0 = 0, \quad C_1^0 = 0, \quad C_2^0 = 0. \quad (3.76)$$

2. Para el modo $m = 1$, el sistema resultante es el siguiente,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & -27 & \frac{27}{2} \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{-81}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^1 \\ C_1^1 \\ C_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{45}{8}i \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Para hallar una solución, se aplica el método de eliminación de Gauss

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & -27 & \frac{27}{2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{-81}{4} & \frac{45}{8}i \end{array} \right) &\xrightarrow{\frac{1}{4}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & -27 & \frac{27}{2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{-81}{4} & \frac{45}{8}i \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 - \frac{9}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-27}{2} & \frac{27}{2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{-81}{4} & \frac{45}{8}i \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{-1}{27}f_2} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{-81}{4} & \frac{45}{8}i \end{array} \right) &\xrightarrow{f_3 - \frac{27}{4}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-135}{8} & \frac{45}{8}i \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{-8}{135}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-45}{135}i \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema reducido

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^1 \\ C_1^1 \\ C_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{3}i \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Despejando y reemplazando, se obtienen los tres coeficientes para $m = 1$,

$$C_0^1 = 0, \quad C_1^1 = -\frac{1}{6}i, \quad C_2^1 = -\frac{1}{3}i. \quad (3.79)$$

3. Para el modo $m = 2$, el sistema resultante es el siguiente,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & -54 & \frac{27}{2} \\ 0 & \frac{27}{4} & -27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^2 \\ C_1^2 \\ C_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Aplicando el mismo procedimiento que para $m = 0$ y $m = 1$. Se obtiene,

$$C_0^2 = 0, \quad C_1^2 = 0, \quad C_2^2 = 0. \quad (3.81)$$

De la misma forma, es posible calcular el resto de coeficientes C_j^m . Obteniéndose

un conjunto de coeficientes,

$$\begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 \\ C_0^1 & C_1^1 & C_2^1 \\ C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 \\ C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Estos coeficientes tienen que reemplazarse en la Ec. (3.53), para los correspondientes valores r_j . Aunque se puede notar que en este caso solo se van a tener dos coeficientes diferentes de cero, C_1^1 y C_2^1 . Por este motivo, las funciones reconstruidas son

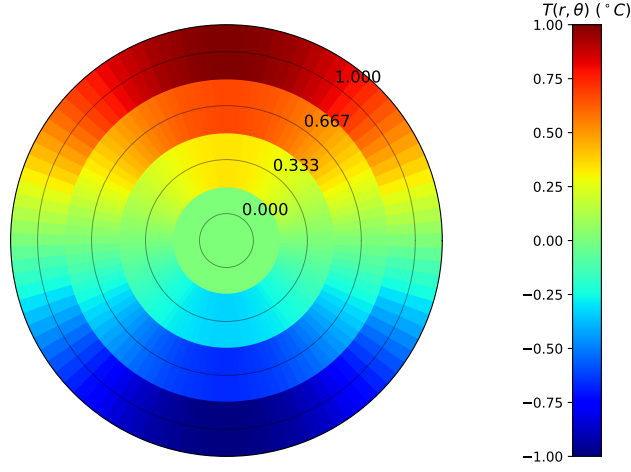
$$T(r_0, \theta) = 0, \quad (3.83)$$

$$T(r_1, \theta) = C_1^1 e^{i\theta} + C_1^{1*} e^{-i\theta}, \quad (3.84)$$

$$T(r_2, \theta) = C_2^1 e^{i\theta} + C_2^{1*} e^{-i\theta}. \quad (3.85)$$

Esta reconstrucción brinda tres funciones dependientes de la variable θ , pero cada función es para un valor de r_j ($j = 0, 1, 2$). Por ende, la solución numérica puede entenderse como una solución aproximada para la variable r (ya que se obtienen soluciones en puntos discretos), pero analítica en la variable θ (ya que se puede obtener una solución en cualquier punto de su dominio). Entonces con ayuda de un programa, se obtiene la temperatura T sobre un conjunto de puntos a partir de las funciones obtenidas. Estos valores de temperatura se pueden graficar en un mapa de calor. Como se observa en la Fig. 3.7, donde para cada función se tomaron 100 puntos en la variable θ .

Figura 3.7: Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, con la PCCD. Considerando un valor de $n_r = 2$, en una placa circular de radio $R = 1$, y una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.



3.2.3. Solución con n puntos en la dirección radial

En la sección anterior se analizó el procedimiento a seguir para obtener una solución numérica. Aunque solo se tomaron dos puntos en la dirección radial, ayudó a resolver detalles no previstos, como el caso del centro en la placa circular. Ahora, en esta sección se busca obtener una solución numérica general, para un valor arbitrario de n_r (visto en la Fig. 3.4) en una placa circular de radio $R = 1$.

De forma análoga al caso anterior, se resolverá en los puntos $r_1, r_2, \dots, r_{n_r}$. Esto debido a que en el punto r_0 no es posible resolver y los coeficientes de la expansión de Fourier en r_{n_r+1} son conocidos. Entonces, aplicando la Ec. (3.60), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\underline{r_1} : \quad \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2(1h)h} \right] C_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{(1h)^2} \right] C_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2(1h)h} \right] C_2^m = 0, \quad (3.86)$$

$$\underline{r_2} : \quad \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2(2h)h} \right] C_1^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{(2h)^2} \right] C_2^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2(2h)h} \right] C_3^m = 0, \quad (3.87)$$

$\vdots$

$$\underline{r_{n_r}} : \quad \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2(n_r h)h} \right] C_{n_r-1}^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{(n_r h)^2} \right] C_{n_r}^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2(n_r h)h} \right] C_{n_r+1}^m = 0. \quad (3.88)$$

Este sistema consta de $n_r + 1$ variables y n_r ecuaciones, por lo que no es consistente. Entonces, para completar un sistema consistente se considera la relación entre C_0^m y C_1^m , obtenida en la sección anterior (Ec. 3.66). De esta forma, se tiene un sistema de ecuaciones consiste para un modo m fijo, el cual puede reescribirse de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 4 & -\alpha_m & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h^2} & \frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h^2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{4h^2} & \frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{4h^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{(n_r h)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^m \\ C_1^m \\ C_2^m \\ \vdots \\ C_{n_r}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \left(\frac{-1}{h^2} - \frac{1}{2n_r h^2} \right) C_{n_r+1}^m \end{bmatrix}. \quad (3.89)$$

Debido a que, en general, los coeficientes C_j^m son complejos, el sistema lineal de ecuaciones (para un modo m fijo) es complejo. Por este motivo, se aplica el método descrito en la sección 2.8, resultando en un sistema lineal real, que puede ser resuelto numéricamente mediante el método SOR (Sucesive Over Relaxation). Posterior a ello, la solución sería reemplazada en la Ec. (3.53). Los sistemas lineales se resuelven para valores de $m \geq 0$, debido a que $T(r, \theta)$ es una función real y se cumple que $C_j^{-m} = C_j^{m*}$. De manera que, la Ec. (3.53) se reescribe como

$$T(r_j, \theta) = C_j^0 + \sum_{m=1}^{\infty} (C_j^m e^{im\theta} + C_j^{m*} e^{-im\theta}). \quad (3.90)$$

Por razones computacionales, la sumatoria de la Ec. (3.90) no puede ser evaluada para infinitos modos. En consecuencia, es necesario truncar esta sumatoria en m hasta un valor establecido m_{max} . Esto es,

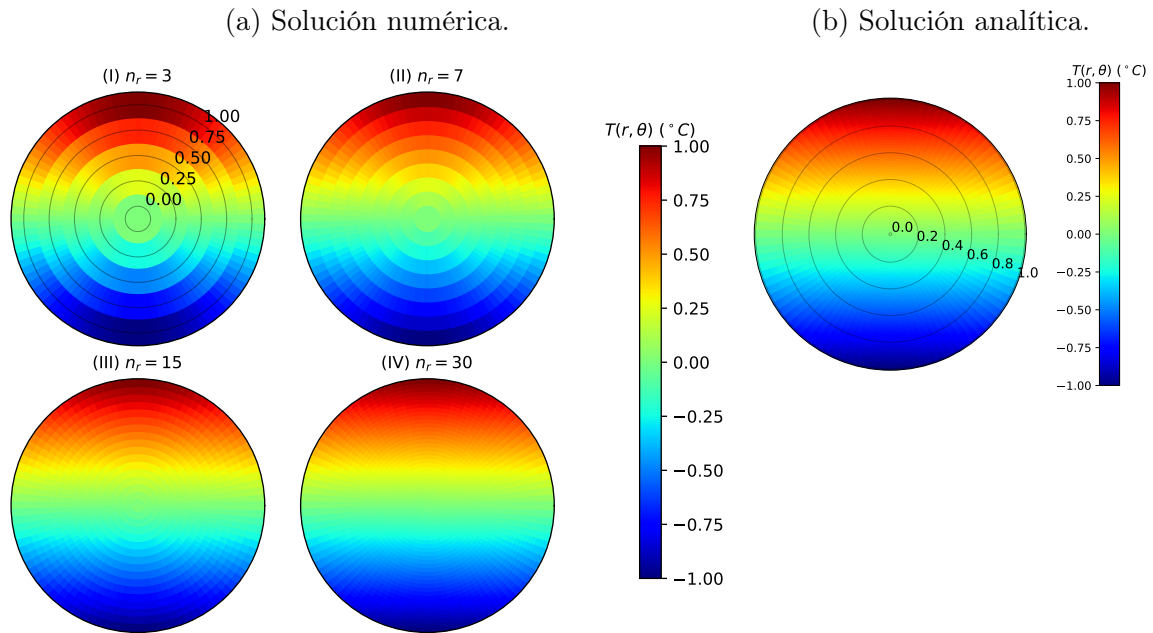
$$T(r_j, \theta) = C_j^0 + \sum_{m=1}^{m_{max}} (C_j^m e^{im\theta} + C_j^{m*} e^{-im\theta}). \quad (3.91)$$

De esta forma se restringe la cantidad de sistemas lineales a resolver. Entonces es posible obtener la temperatura en ciertos puntos de la placa circular con la Ec. (3.91), donde los coeficientes $\{C_j^m\}$ ($m = 0, \dots, m_{max}$ y $j = 0, \dots, n_r$) se obtienen al resolver

el sistema lineal en la Ec. (3.89).

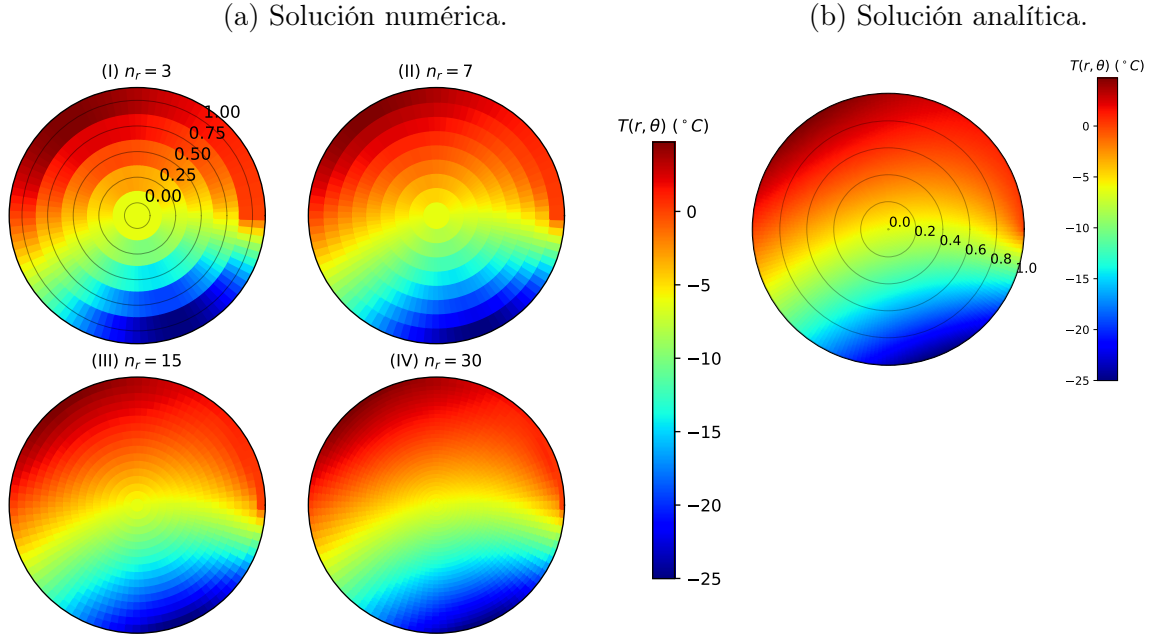
Hasta este punto de la sección se ha descrito el método numérico desarrollado a partir de la hipótesis propuesta. Este método de solución se implementó en un programa en Fortran 90 denominado *Laplace Solver in Polar Coordinates* (LSPC), disponible en Github (Carreño, 2024a). Al ejecutar el programa para obtener la solución al problema con cierta CC, es necesario indicar los parámetros establecidos en el método (n_r y m_{max}). Para cada par de valores ingresados una solución es obtenida, la cual puede ser representada en un mapa de calor. Con el fin de observar que la solución numérica se aproxima a la solución analítica, el programa se ejecutó para diferentes parámetros. Esta similitud visual entre la solución numérica y analítica, es una muestra cualitativa de que el método numérico presenta una buena correspondencia. Como se observa en la Fig. 3.8, que muestran las soluciones numéricas y analítica para la PCCD.

Figura 3.8: Mapa de calor para la solución de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, en una placa circular de radio $R = 1$, con la PCCD. (a) Solución numérica considerando un valor de $m_{max} = 5$ y diferentes valores de $n_r = 3, 7, 15, 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar. (b) Solución analítica obtenida en la subsección 3.1.



De igual manera, en la Fig. 3.9 se muestran las soluciones numéricas y analítica para la SCCD.

Figura 3.9: Mapa de calor para la solución de la ecuación de Laplace para la temperatura en coordenadas polares, en una placa circular de radio $R = 1$, con la SCCD. (a) Solución numérica considerando un valor de $m_{max} = 5$ y diferentes valores de $n_r = 3, 7, 15, 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar. (b) Solución analítica obtenida en la subsección 3.1.



3.3. Análisis de errores

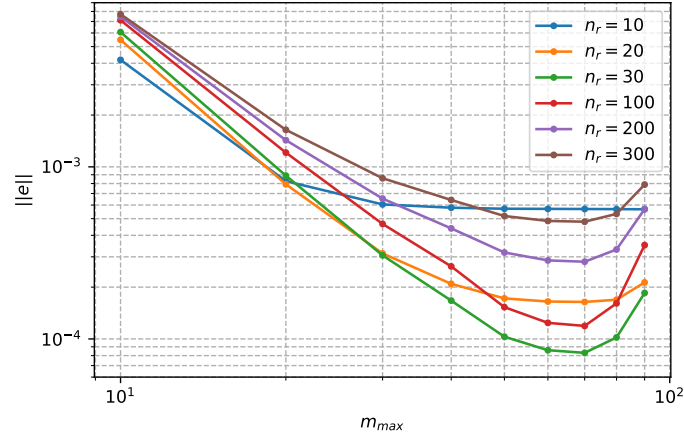
En la sección anterior, se presentaron los mapas de calor de las soluciones analíticas y numéricas para las dos condiciones de contorno establecidas. Estos mapas de calor son una muestra cualitativa de que las soluciones numéricas se acercan a las analíticas. Y a pesar de la buena correspondencia entre ambas soluciones, estas difieren. Por este motivo, se busca cuantificar la diferencia entre estas soluciones. Debido a que el método propuesto depende de dos parámetros, la cuantificación dependerá de estos, n_r y m_{max} . Para obtener ello, es necesario definir el vector solución analítica U y el vector solución numérica u . Las componentes de los vectores U y u , corresponden a los valores de las soluciones analíticas y numéricas en los puntos discretizados del dominio (r_i, θ_i) , respectivamente. Por lo tanto, los componentes del vector error $e = [e_1, e_2, \dots, e_N]$ (donde N es el número de puntos en la discretización del dominio) están definidos por

$e_i = U_i - u_i$. Es posible calcular la 1-norma del vector error (LeVeque, 2007) como,

$$\|e\| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_i|. \quad (3.92)$$

La 1-norma cuantifica el error entre la solución analítica y numérica. Para poder hacer un análisis de cómo varía el error de la solución numérica, en función de los parámetros n_r y m_{max} , se calculan las soluciones numéricas con la SCCD, para diferentes valores de los parámetros. En la Fig. 3.10 se muestra la norma del vector error como una función del parámetro m_{max} , manteniendo el parámetro n_r fijo.

Figura 3.10: Calculo de las normas del vector error en función del parámetro m_{max} , para diferentes valores de n_r . Calculo realizado con las soluciones para la SCCD. El gráfico se encuentra en escala logarítmica.



En la Fig. 3.10 puede observarse que para valores de n_r en el rango de 10 a 20, la norma no decrece completamente. Mientras que en el rango de $n_r \in [30, 100]$, la norma decrece linealmente (en escala logarítmica, por simple inspección) hasta un valor de m_{max} alrededor de 40. Para valores mayores de m_{max} , la norma incrementa. Finalmente en el rango de $n_r \in [200, 300]$, la norma también decrece hasta un valor de m_{max} alrededor de 40, pero este decrecimiento no se ajusta a la tendencia lineal como en el rango previo. Por este motivo, se puede establecer que el rango de parámetros donde el error decrece linealmente es $n_r \in [30, 100]$ y $m_{max} \in [10, 40]$. Entonces tomando la norma del error en el rango establecido de m_{max} , para un valor fijo de n_r (dentro de su rango establecido), es posible ajustar el valor de la norma a $b \cdot m_{max}^s$, donde b y s

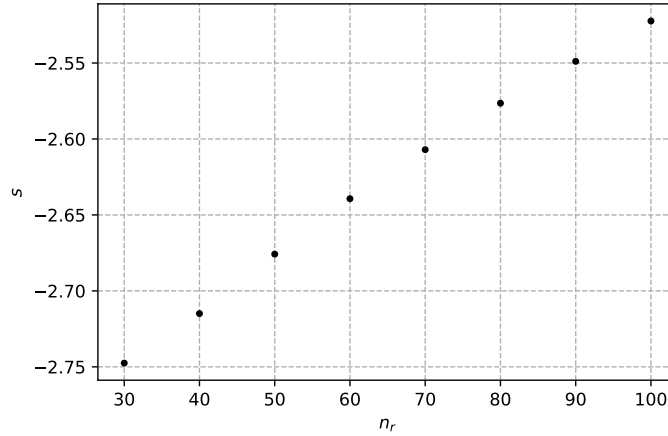
son constantes. El exponente s , en escala logarítmica se convierte en la pendiente de una recta, ya que

$$\|e\| = b \cdot m_{max}^s \quad (3.93)$$

$$\ln(\|e\|) = s \cdot \ln(m_{max}) + \ln(b). \quad (3.94)$$

Como se mencionó, el exponente s en escala logarítmica representa la pendiente de una recta que relaciona la norma del vector error con el valor de m_{max} (como se observa en la Ec. 3.94). De esta forma, se obtiene un ajuste de recta, con su respectivo valor de s , para cada valor del parámetro n_r .

Figura 3.11: Valor del exponente s como una función de n_r , luego de ajustar la norma del vector error a $b \cdot m_{max}^s$. Considerando las normas del vector error al variar el valor de m_{max} de 10 a 40, para un valor fijo de n_r .



En la Fig. 3.11 se observa que el valor de s incrementa cuando incrementa el valor de n_r . Pero debido a que el valor de s es negativo, cuando este incrementa, la recta (en escala logarítmica) presenta una menor pendiente (inclinación). Por lo tanto, cuando el valor de n_r incrementa, la norma del vector error decrece más lento como una función de m_{max} . De esta forma, para valores más altos de n_r no ayudaría el hecho de considerar un valor grande de m_{max} , pues el error no disminuiría considerablemente.

De este análisis se puede concluir que el método desarrollado e implementado en el programa LSPC presenta un error acotado y que decrece apropiadamente (sigue una tendencia lineal en escala logarítmica, como se puede apreciar en la Fig. 3.10), para

los valores de n_r y m_{max} dados en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Rango de valores para los parámetros n_r y m_{max} , donde el programa LSPC presenta un error acotado y que decrece apropiadamente.

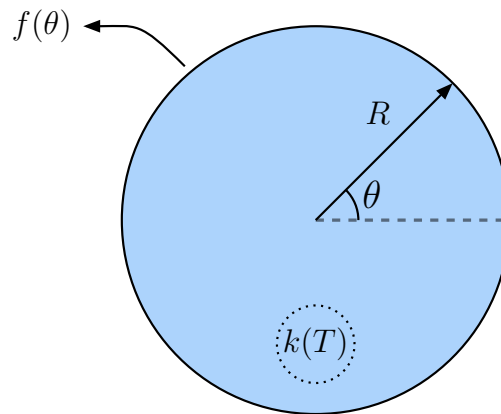
Parámetro	Rango
n_r	30 - 100
m_{max}	10 - 40

Capítulo IV

Conductividad térmica dependiente de la temperatura

En este capítulo se busca resolver el segundo caso planteado en la sección 1.2. El problema se centra en hallar una solución numérica a la ecuación del calor en estado estacionario y sin fuentes internas, en una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$. Lo particular de este capítulo es la conductividad térmica dependiente de la temperatura, $k(T)$, de la placa. Esta descripción se puede visualizar en la Fig. 4.1.

Figura 4.1: Diagrama esquemático de una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$ y conductividad térmica dependiente de la temperatura, $k(T)$.



Por este motivo, según la descripción del problema, la ecuación a resolver sería la Ec. (2.37). Aunque antes de comenzar el planteamiento de alguna solución, se describe

esta dependencia de la conductividad térmica con la temperatura, para luego establecer algún caso particular. Donde la ecuación a resolver sería la siguiente,

$$\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) = 0. \quad (4.1)$$

4.1. Dependencia con la temperatura

La conductividad térmica es una propiedad que depende de la estructura física de la materia, la cual está relacionada con estado físico en el que se encuentra. La dependencia de esta propiedad puede estudiarse en los diferentes estados de la materia, como en el caso de los sólidos, líquidos y gaseosos. En general, la conductividad térmica para un sólido es mayor que la de un líquido, y este último mayor que la de un gas. Y aunque es posible estudiar la dependencia con la temperatura de la conductividad térmica en los diferentes estados de la materia, se prioriza estudiar un caso donde se tenga una expresión sencilla que relacione ambas magnitudes. Esto con el fin de tener una situación que se ajuste al problema planteado en este capítulo. Por este motivo se estudia el caso de un gas, ya que por medio de la teoría de los gases ideales es posible obtener una expresión sencilla para la conductividad térmica. En contraste a un sólido, en el que pueden influir diversos efectos con diferentes relevancias y tener expresiones diversas; mientras que en un líquido las interacciones moleculares resultan más complejas, así como los mecanismos físicos que explican la conductividad térmica en este estado (Bergman et al., 2011).

Entonces, centrándose en el caso mencionado, por medio de la teoría cinética de los gases es posible comprender los efectos de la temperatura, presión y composición química en la conductividad térmica de un gas. Según esta teoría, la conductividad térmica guarda una relación directamente proporcional con la densidad del gas ρ , la velocidad molecular media $\bar{c}$ y el camino libre medio λ_{mfp} , que representa la distancia promedio recorrida por un portador de energía antes de experimentar una colisión.

Esto se expresa mediante la siguiente relación,

$$k \approx \frac{1}{3} c_v \rho \bar{c} \lambda_{mfp}. \quad (4.2)$$

En el caso de un gas ideal, el camino libre medio puede expresarse como

$$\lambda_{mfp} = \frac{K_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 p}, \quad (4.3)$$

donde K_B es la constante de Boltzman, d el diámetro de la molécula de gas y p la presión. Analizando esta expresión, se observa que el camino libre medio tiende a reducirse en condiciones de altas presiones o bajas temperaturas. Además, presenta una dependencia con el diámetro de la molécula, siendo más probable que las moléculas de mayor tamaño experimenten colisiones (mientras que para las moléculas más pequeñas, es menos probable). La velocidad molecular media $\bar{c}$, también puede ser calculada a partir de la teoría cinética de los gases. Entonces la Ec. (4.2) puede ser expresada finalmente como

$$k = \frac{9\gamma - 5}{4} \frac{c_v}{\pi d^2} \sqrt{\frac{\mathcal{M} K_B T}{N_a \pi}}, \quad (4.4)$$

donde el parámetro γ es la razón de calores específicos ($\gamma = c_p/c_v$), $\mathcal{M}$ el peso molecular y N_a el número de Avogadro. La Ec. (4.4) se puede emplear para estimar la conductividad térmica del gas, aunque se han desarrollado modelos más precisos. De esta forma, se obtiene una expresión sencilla que relaciona la conductividad térmica con la temperatura, $k(T)$.

Ahora, se tiene en cuenta que a lo largo del trabajo el proceso de transferencia de calor considerado es la conducción, mediante la cual se obtiene la ecuación del calor y posteriormente las soluciones numéricas. Sin embargo, en este caso, se usa una expresión correspondiente a la de un gas, en el que el proceso de conducción no es su principal mecanismo de transferencia de calor. Para un gas, los procesos con mayor relevancia pueden ser otros, pero en primera aproximación, se puede considerar solo a la conducción, con el objetivo de usar la expresión obtenida de la conductividad térmica en el problema planteado del capítulo.

4.2. Desarrollo de la ecuación del calor

En esta sección se busca la expresión de la ecuación del calor estacionaria, considerando que la conductividad térmica presenta una dependencia con la temperatura. Esto hace que la ecuación del calor cambie, puesto que las derivadas parciales afectan a una función de la variable dependiente, convirtiéndose en una ecuación diferencial no lineal. De esta forma, la ecuación no solo presenta un Laplaciano aplicado a la temperatura, sino una expresión adicional. Entonces, al desarrollar la ecuación del calor (Ec. 2.36) considerando que la conductividad térmica es una función de la temperatura $k(T)$, se tiene

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} T + q_v. \quad (4.5)$$

Donde se asume que el término de generación de calor, q_v , es independiente de la temperatura. Además, de manera general, $\vec{\nabla} k$ puede expresarse como

$$\vec{\nabla} k = \frac{dk}{dT} \vec{\nabla} T. \quad (4.6)$$

De esta forma, luego de reemplazar en la Ec. (4.5), la ecuación resultante es

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \frac{dk}{dT} (\vec{\nabla} T)^2 + q_v. \quad (4.7)$$

La Ec. (4.7) representa, de manera general, la ecuación del calor para un medio en el cual la conductividad térmica varía en función de la temperatura. Como se puede apreciar, esta es una ecuación no lineal y en este caso, no posee una solución analítica. Por este motivo, se busca abordar numéricamente la resolución de la ecuación, teniendo en cuenta que el objetivo es obtener una solución a la ecuación del calor en estado estacionario y sin fuentes internas, lo que también conlleva a un problema no lineal.

En un primer intento, como se puede observar en el anexo A, se propuso aplicar una expansión de Fourier a las funciones de temperatura y conductividad térmica, para

posteriormente reemplazarlas en la ecuación estacionaria sin fuentes internas de calor (Ec. 2.36). Luego de reemplazar las expansiones de Fourier, se obtiene una ecuación que presenta dos sumatorias, y cuyos índices están asociados a los coeficientes de las expansiones de Fourier para T y k . Seguidamente se busca una relación entre estos coeficientes, por medio de unas propiedades de los coeficientes de Fourier, demostradas en el anexo B. Una vez que se tiene la relación mencionada, es posible obtener un coeficiente común para poder trabajar la ecuación. Visto que en dicha ecuación existe un producto de exponenciales, fue posible reconocer un conjunto de expresiones linealmente independiente, que permite obtener un sistema de ecuaciones. Dicho sistema se podría resolver si fuera un sistema consistente, es decir, tener la misma cantidad de ecuaciones e incógnitas. Aunque este no era el caso, puesto que se tenían más incógnitas que ecuaciones. Entonces había que buscar una manera de formar un sistema que presente el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Para ello, Se revisaron diferentes opciones, aunque ninguna con éxito, por lo que no se pudo completar un método numérico con el procedimiento seguido en dicho anexo.

Por este motivo, se tuvo que buscar otro método para poder resolver el problema planteado. En esa búsqueda, se encontró el método que se desarrolla a continuación, el cual permite llegar a una ecuación más sencilla de resolver.

4.3. Transformación de Kirchhoff

Debido a la complejidad que presenta la no linealidad de la ecuación que se busca resolver en este capítulo, se buscó una forma de abordarla. Así, se encontró que para este tipo de problemas es usual aplicar una transformación que facilite la obtención de una solución en casos específicos, como se muestra en Givoli (1993).

Cuando las propiedades térmicas de un material, como la conductividad térmica, varían con la temperatura, pero son independientes de la posición, la ecuación del calor mantiene la expresión general que se muestra en la Ec. (4.5). En tales casos se puede utilizar la transformación de Kirchhoff, que permite retirar la conductividad térmica del operador diferencial de la ecuación al realizar un cambio de variable dependiente,

en este caso la temperatura T (Özişik, 1989).

Para ello, se define una nueva variable, a partir de la variable dependiente, de la siguiente forma

$$U = \int_{T_0}^T \frac{k(T')}{k_0} dT', \quad (4.8)$$

donde $U = U(T)$, $T = T(r, t)$ y k_0 es el valor de la conductividad térmica en T_0 . A esta transformación, se le conoce como *transformación de Kirchhoff*. Por medio de esta transformación, la variable dependiente T de la ecuación del calor, se podrá transformar en la nueva variable U . Permitiendo así, que la conductividad térmica quede fuera del operador diferencial, como se mencionó anteriormente. Para ello, se necesitan obtener algunas relaciones que faciliten la transformación de variable en la ecuación.

La primera relación necesaria, se obtiene al tomar la derivada parcial de la nueva variable U respecto a t . Resultando,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{T_0}^T \frac{k(T')}{k_0} dT' \right) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k(T)}{k_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k(T_0)}{k_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{k_0} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.11)$$

La segunda relación a determinar es el gradiente de la variable U . A partir de la expresión para el gradiente en coordenadas curvilíneas, tal como se describe en la sección 2.6, se deduce

$$\vec{\nabla} U = \frac{1}{h_u} \frac{\partial U}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial U}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial U}{\partial w} \vec{e}_w \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{1}{h_u} \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial w} \vec{e}_w \quad (4.13)$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial T} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial T}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial T}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial T}{\partial w} \vec{e}_w \right) \quad (4.14)$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial T} \vec{\nabla} T \quad (4.15)$$

$$\vec{\nabla}U = \frac{k}{k_0}\vec{\nabla}T. \quad (4.16)$$

La tercera y última relación que se busca obtener es el Laplaciano de la variable U . Para ello, a partir de la relación anterior y las expresiones dadas en la sección 4.2,

$$\nabla^2U = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}U) \quad (4.17)$$

$$\nabla^2U = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k}{k_0}\vec{\nabla}T \right) \quad (4.18)$$

$$\nabla^2U = \frac{k}{k_0}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}T) + \vec{\nabla}T \cdot \frac{\vec{\nabla}k}{k_0} \quad (4.19)$$

$$\nabla^2U = \frac{k}{k_0}\vec{\nabla}^2T + \vec{\nabla}T \cdot \left(\frac{dk}{dt} \frac{\vec{\nabla}T}{k_0} \right) \quad (4.20)$$

$$\nabla^2U = \frac{1}{k_0} \left[k\nabla^2T + \frac{dk}{dT}(\vec{\nabla}T \cdot \vec{\nabla}T) \right] \quad (4.21)$$

$$\nabla^2U = \frac{1}{k_0} \left(k\nabla^2T + \frac{dk}{dT}(\vec{\nabla}T)^2 \right). \quad (4.22)$$

Entonces, a partir de la primera y la tercera relación obtenidas, es posible reescribir la Ec. (4.7) en términos de la nueva variable U , como se muestra a continuación

$$\rho c_v \frac{k_0}{k} \frac{\partial U}{\partial t} = k_0 \nabla^2U + q_v \quad (4.23)$$

$$\frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla^2U + \frac{q_v}{k_0} \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla^2U + \frac{q_v}{k_0}. \quad (4.25)$$

Donde α es la difusividad térmica y es proporcional a la conductividad térmica k . Por este motivo la difusividad térmica es función de la temperatura; por lo tanto la Ec. (4.25) sigue siendo una ecuación no lineal. Aunque es una expresión más simple, ya que no se tiene una función de la variable dependiente dentro del operador diferencial. Por esto, asumiendo que la variación de α es pequeña, la Ec. (4.25) se transforma en una ecuación diferencial lineal de la conducción del calor, que puede ser resuelto con las técnicas habituales, siempre que las condiciones de contorno del problema a resolver

también se transformen.

En este capítulo el objetivo es obtener una solución en estado estacionario y sin fuentes internas de calor. Por lo cual, la Ec. (4.25) se verá reducida a una ecuación de Laplace para la nueva variable U , es decir,

$$\nabla^2 U = 0. \quad (4.26)$$

De esta forma, se obtiene una ecuación idéntica al del capítulo III, con la diferencia que la variable es U . Entonces, el método numérico para resolver la Ec. (4.26) sería el mismo, teniendo en cuenta que se tiene que realizar una transformación previa de las condiciones de contorno hacia la nueva variable. En dicha transformación se encuentra la influencia de la dependencia con la temperatura de la conductividad térmica. Luego de obtener una solución para U , es necesario retornar a la variable de interés que es la temperatura, invirtiendo la transformación realizada en un inicio. De esta forma es posible eliminar la no linealidad de la ecuación y obtener una solución al problema planteado.

4.4. Solución numérica

Hasta este punto se han revisado dos formas de obtener una solución al problema del capítulo. En la sección 4.2, se indica un primer intento de solución a partir de aplicar la expansión de Fourier a la conductividad térmica y la temperatura. En la sección 4.3 se repasó la transformación de Kirchhoff, la cual permite eliminar la no linealidad de la ecuación del calor, haciendo posible resolver el problema por medio del método numérico planteado en el capítulo anterior. Por este motivo, en esta sección se busca resolver el problema con ayuda de la transformación de Kirchhoff, y para ello es necesario conocer la dependencia que presenta la conductividad térmica con la temperatura.

En la Sección 4.1 se presentó un caso particular en la cual se mostraba la dependencia de la conductividad térmica en función de la temperatura. Esta expresión depende

de diferentes parámetros, los cuales se mantienen constantes y es por este motivo que la expresión general puede escribirse como,

$$k = B\sqrt{T}, \quad (4.27)$$

donde B es una constante. Entonces al tener la forma en la cual la conductividad térmica varía en función de la temperatura, se tiene que encontrar la expresión final de la transformación de Kirchhoff. Para ello se considera que para la temperatura T_0 , el valor de la conductividad térmica correspondiente k_0 es $B\sqrt{T_0}$. Por medio de la Ec. (4.8), la nueva variable U está dada por

$$U = \int_{T_0}^T \frac{B\sqrt{T'}}{B\sqrt{T_0}} dT' \quad (4.28)$$

$$U = \int_{T_0}^T \frac{B\sqrt{T'}}{B\sqrt{T_0}} dT' \quad (4.29)$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_{T_0}^T \sqrt{T'} dT' \quad (4.30)$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{\sqrt{T'}^3}{3/2} \right) \Big|_{T_0}^T \quad (4.31)$$

$$U = \frac{2}{3\sqrt{T_0}} \left(\sqrt{T}^3 - \sqrt{T_0}^3 \right) \quad (4.32)$$

$$U = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{T^3}{T_0}} - T_0 \right) \quad (4.33)$$

La Ec. (4.33) permite realizar la transformación de la variable T a la nueva variable U . La cual sirve para transformar las condiciones de contorno necesarias para resolver la ecuación de Laplace para la variable U . Si en esta ecuación, se despeja la variable T , resulta

$$T = \sqrt[3]{T_0 \left(\frac{3U}{2} + T_0 \right)^2}. \quad (4.34)$$

Esta última expresión permite retornar de la nueva variable U a la variable T . Puesto

que el método numérico a usarse, brinda una solución a la ecuación de Laplace para la variable U , es necesario transformar estos valores a la variable de interés T .

De esta forma se tienen las expresiones necesarias para continuar con la obtención de la solución numérica. Recordar que estas expresiones (transformaciones) son exclusivas para las conductividades térmicas que tienen la forma de la Ec. (4.27). El siguiente paso, como se mencionó anteriormente, sería transformar las condiciones de contorno hacia la nueva variable U , para posteriormente resolver la ecuación de Laplace. La condición de contorno para este problema sigue siendo una CC de Dirichlet, aunque en esta situación no se puedan usar las condiciones de contorno planteadas anteriormente (PCCD y SCCD). Esto debido a que dichas CC están dadas para trabajar con grados Celsius ($^{\circ}C$), mientras que la expresión para la conductividad térmica está dada para valores de temperatura en Kelvins (K). Por tal motivo, es necesario plantear una condición de contorno que permita trabajar en esta escala. A continuación se presentan dos casos.

4.4.1. Primera solución

En esta primera solución, la CC a considerarse va a ser el equivalente en Kelvins a la PCCD, para mantener una función conocida. Esta es la siguiente

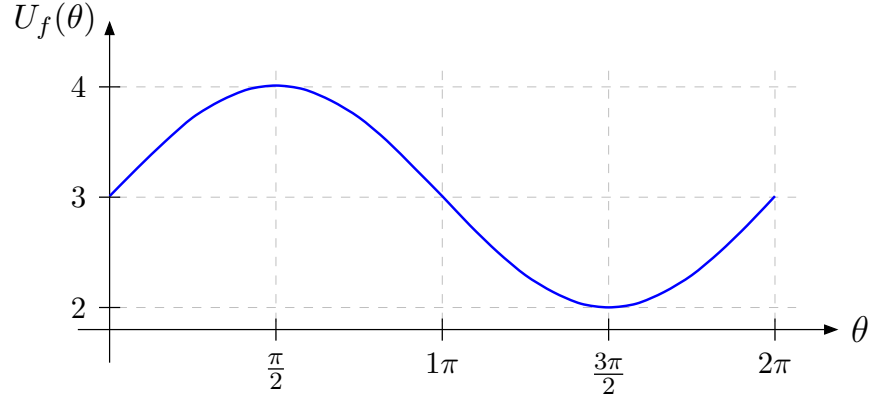
$$f(\theta) = \text{sen } \theta + 273. \quad (4.35)$$

Dada la condición de contorno, se puede continuar con la transformación a la nueva variable U , por medio de la Ec. (4.33). Fijando el valor de la temperatura T_0 en $270\text{ }K$, la transformación de la condición de contorno resulta

$$U_f = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{(\text{sen } \theta + 273)^3}{270}} - 270 \right). \quad (4.36)$$

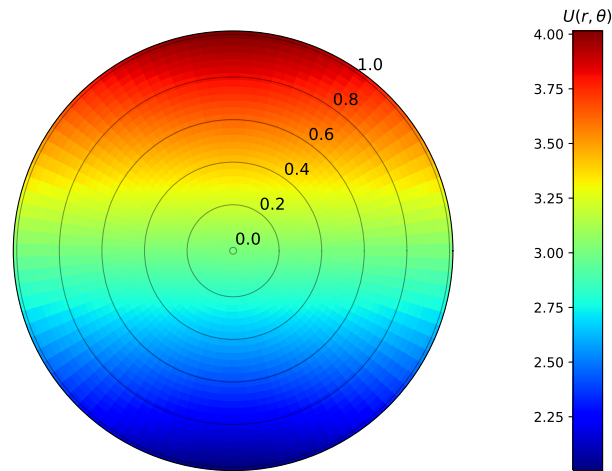
Debido a la geometría del problema, la condición de contorno en esta nueva variable también debería cumplir con que $U_f(0) = U_f(2\pi)$. Lo cual se cumple y esto se puede observar en la Fig. 4.2.

Figura 4.2: Gráfico de la transformación de Kirchhoff aplicada a la condición de contorno, Ec. (4.36).



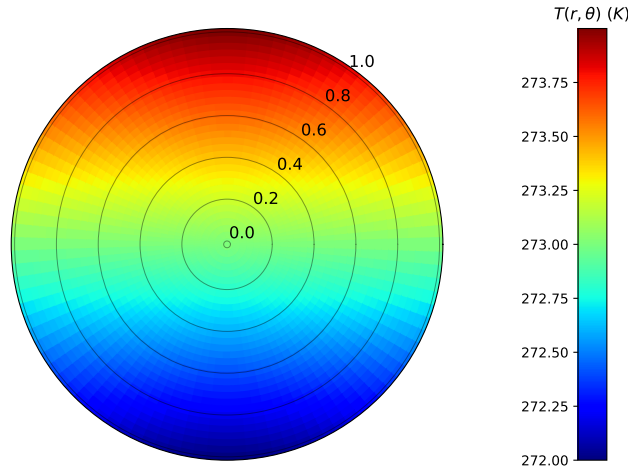
Con esto, ya es posible obtener una solución numérica a la ecuación de Laplace para la variable U (Ec. 4.26), mediante la aplicación del método numérico previamente desarrollado en la sección 3.2. Este método ya se encuentra implementado en el programa LSPC, en el cual se ingresa la condición de contorno U_f . Al ejecutar dicho programa, es necesario ingresar dos parámetros, que para cierto rango de valores, se muestra una mayor eficiencia. De esta forma se obtiene una solución numérica a la ecuación de Laplace para la variable U , considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$. Esta solución se muestra en el mapa de calor de la Fig. 4.3.

Figura 4.3: Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la variable U , con condición de contorno de la Ec. (4.36), en una placa circular de radio $R = 1$. Considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.



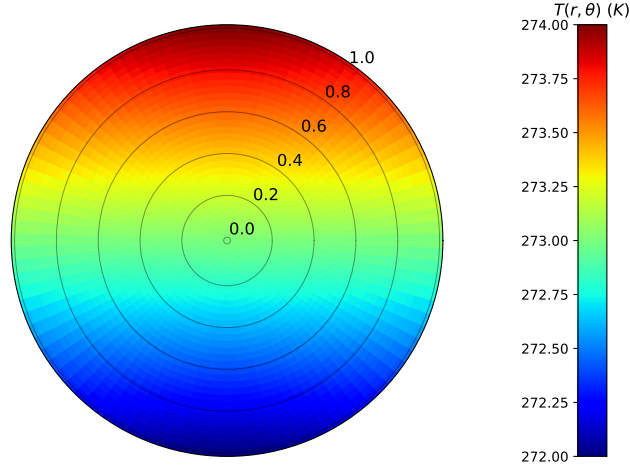
La solución mostrada en la Fig. 4.3 no es la solución final, puesto que como ya se mencionó anteriormente, la variable de interés es la temperatura T . Para ello, se aplica una transformación inversa a los valores obtenidos de U para retornar a la variable T , por medio de la Ec. (4.34). De esta forma se obtiene la solución a la Ec. (4.1) con una conductividad térmica que su dependencia con la temperatura tiene la forma de la Ec. (4.27), para la condición de contorno de la Ec. 4.35. Esta distribución de temperaturas se muestra en la Fig. 4.4.

Figura 4.4: Mapa de calor para la solución numérica de la Ec. (4.1). Con conductividad térmica dependiente de la temperatura, dada en la Ec. (4.27) y condición de contorno de la Ec. (4.35), en una placa circular de radio $R = 1$. Solución obtenida al aplicar la transformación inversa de la Ec. (4.34) a la solución para U .



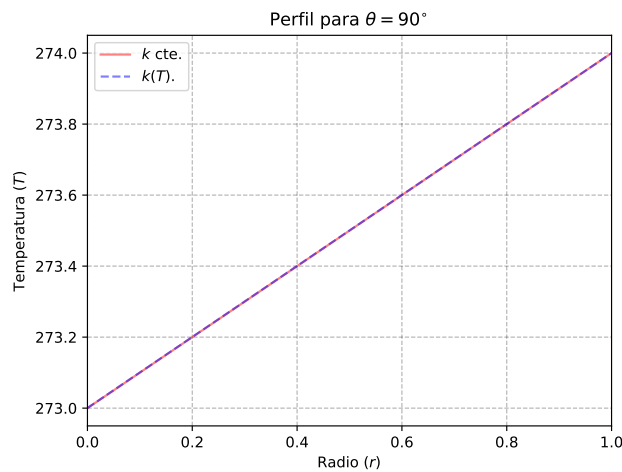
De esta forma, se puede obtener una solución al problema planteado del capítulo; sin embargo, si uno compara esta solución obtenida para una conductividad térmica dependiente de la temperatura, con una solución al problema de conductividad térmica constante para una misma condición de contorno, no se apreciaría mucha diferencia en los mapas de calor. Esto debido a que la distribución de temperaturas es muy similar. Con el propósito de ilustrar esto, en la Fig. 4.5 se observa la solución al problema de conductividad térmica constante (Ec. 2.38), considerando la condición de contorno de la Ec. (4.35). La cual se obtuvo usando el programa LSPC con los parámetros $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$.

Figura 4.5: Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la temperatura (caso de conductividad térmica constante), en una placa circular de radio $R = 1$, con la CC de la Ec. (4.35). Considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.



Como se mencionó, no se aprecia una diferencia entre las Fig. 4.4 y 4.5. Por esta razón, para poder visualizar mejor alguna diferencia se puede graficar el perfil radial de temperatura para un ángulo fijo. En la Fig. 4.6 se observa los perfiles radiales de temperatura para las soluciones con conductividad térmica constante y dependiente de la temperatura.

Figura 4.6: Perfil radial de temperaturas para un ángulo fijo de la solución a la ecuación estacionaria del calor sin fuentes internas. Considerando el problema de conductividad térmica constante y dependiente de la temperatura. Considerando la condición de contorno de la Ec. (4.35).



En la Fig. 4.6 no se observa una diferencia entre el perfil radial de las soluciones a los problemas. Esto indicaría de que no hay una influencia de la conductividad térmica y su dependencia con la temperatura, para la distribución de temperaturas en el estado estacionario. Sin embargo, habría que analizar la condición de contorno usada, puesto que si se calcula el valor de la conductividad térmica correspondiente, en este rango de temperaturas, se observaría una variación muy pequeña. Esto haría que el problema se aproxime al caso de conductividad térmica constante y no se aprecie diferencia alguna. Por lo tanto se tendría que trabajar en un rango de temperaturas donde la conductividad térmica presente una variación relativamente grande.

4.4.2. Segunda solución

Debido a que en la primera solución no se observa una influencia de la conductividad térmica y su dependencia con la temperatura, en esta segunda solución se plantea una condición de contorno que permita una mayor variación de la conductividad térmica. Por este motivo, aunque se trate de un caso extremo, la condición de contorno en este caso es la siguiente

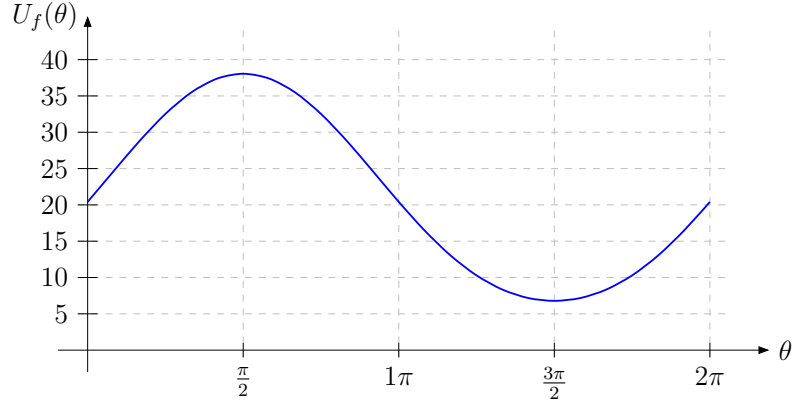
$$f(\theta) = 5 \sen \theta + 10. \quad (4.37)$$

Entonces, fijando el valor de la temperatura T_0 en $1\ K$, la transformación de la condición de contorno a la nueva variable U , por medio de la Ec. (4.33), resulta

$$U_f = \frac{2}{3} \left(\sqrt{(5 \sen \theta + 10)^3 - 1} \right). \quad (4.38)$$

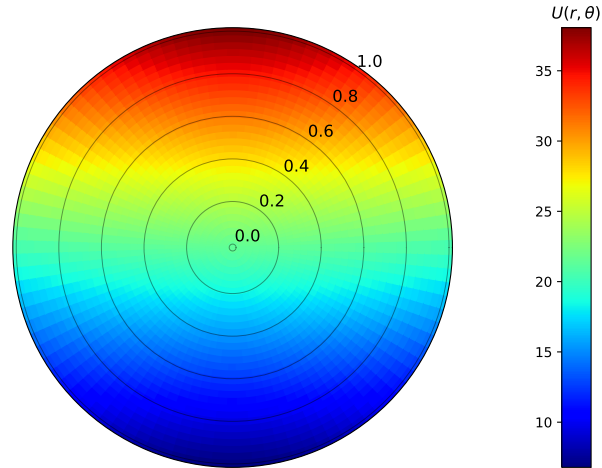
Debido a la geometría del problema, la condición de contorno en esta nueva variable también debería cumplir con que $U_f(0) = U_f(2\pi)$. Lo cual se cumple y esto se puede observar en la Fig. 4.7.

Figura 4.7: Gráfico de la transformación de Kirchhoff aplicada a la condición de contorno, Ec. (4.38).



Luego de ingresar la condición de contorno U_f en el programa LSPC, se obtiene la solución numérica a la ecuación de Laplace para la variable U , considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$ en la ejecución del programa. Esta solución se muestra en el mapa de calor de la Fig. 4.8.

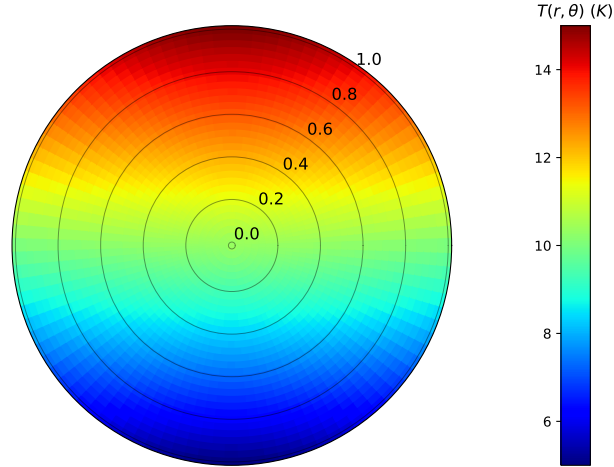
Figura 4.8: Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la variable U , con condición de contorno de la Ec. (4.38), en una placa circular de radio $R = 1$. Considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.



Entonces, aplicando una transformación inversa a los valores obtenidos de U , por medio de la Ec. (4.34), se retorna a la variable T . De esta forma, se obtiene la solución a la Ec. (4.1) con una conductividad térmica que su dependencia con la temperatura

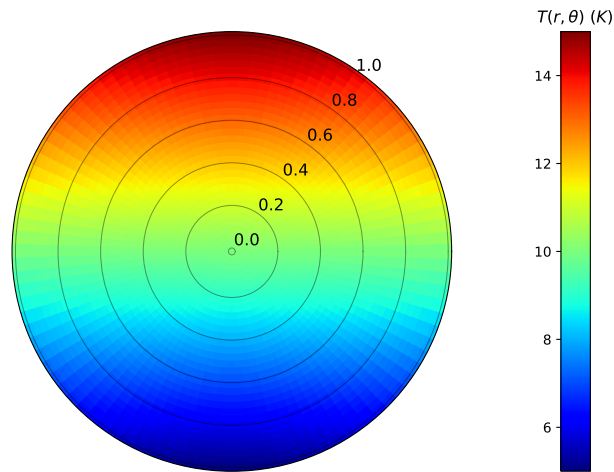
tiene la forma de la Ec. (4.27), para la condición de contorno de la Ec. (4.37). Esta solución se muestra en la Fig. 4.9.

Figura 4.9: Mapa de calor para la solución numérica de la Ec. (4.1). Con conductividad térmica dependiente de la temperatura, dada en la Ec. (4.27) y condición de contorno de la Ec. (4.37), en una placa circular de radio $R = 1$. Solución obtenida al aplicar la transformación inversa de la Ec. (4.34) a la solución para U .



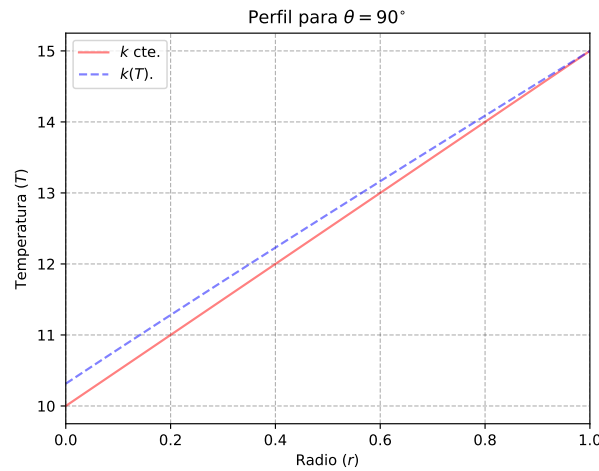
Con el fin de mostrar una comparación como en el caso anterior, en la Fig. 4.10 se observa la solución al problema de conductividad térmica constante (Ec. 2.37), considerando la condición de contorno de la Ec. (4.37). La cual se obtuvo usando el programa LSPC con los parámetros $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$.

Figura 4.10: Mapa de calor para la solución numérica de la ecuación de Laplace para la temperatura (caso de conductividad térmica constante), en una placa circular de radio $R = 1$, con la CC de la Ec. (4.37). Considerando un valor de $m_{max} = 10$ y $n_r = 30$, con una discretización de 100 puntos en la variable θ para graficar.



A diferencia del caso anterior, en las Fig. 4.9 y 4.10 se puede observar una ligera variación en la parte media e inferior de la placa. Por esta razón, para visualizar mejor la diferencia, en la Fig. 4.11 se muestran los perfiles radiales de temperatura para las soluciones con conductividad térmica constante y dependiente de la temperatura, para un ángulo fijo.

Figura 4.11: Perfil radial de temperaturas para un ángulo fijo de la solución a la ecuación estacionaria del calor sin fuentes internas. Considerando el problema de conductividad térmica constante y dependiente de la temperatura. Considerando la condición de contorno de la Ec. (4.37).



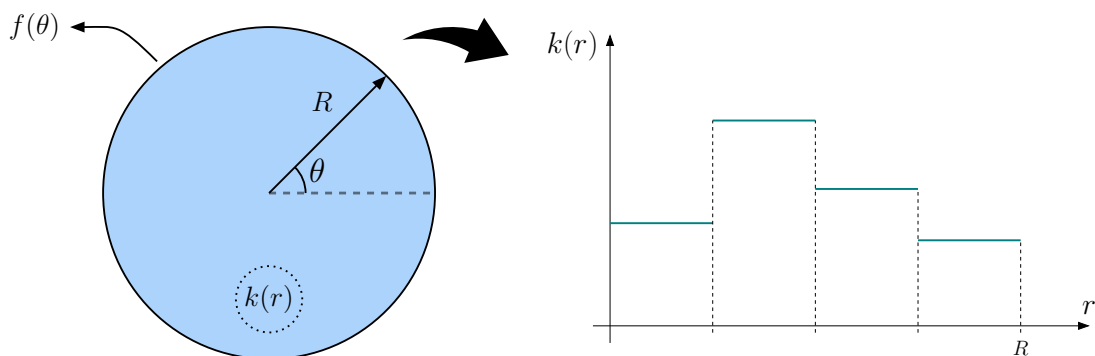
En la Fig. 4.11 se observa una diferencia entre los perfiles radiales de temperatura. A diferencia del caso anterior, se muestra la influencia de la conductividad térmica y su dependencia con la temperatura. Esto debido a que la condición de contorno se encuentra en un rango donde se evidencia una variación en la conductividad térmica. De esta forma, se tiene que el problema de conductividad térmica dependiente de la temperatura puede reducirse, por medio de la transformación de Kirchhoff, a un problema ya conocido que puede ser resuelto numéricamente por el método desarrollado en el capítulo anterior.

Capítulo V

Conductividad térmica con dependencia radial

En este capítulo se busca resolver el tercer y último caso planteado en la sección 1.2. El problema se centra en hallar una solución numérica a la ecuación del calor en estado estacionario y sin fuentes internas de calor, en una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$. Lo particular de este capítulo es la conductividad térmica con dependencia radial, $k(r)$, de la placa. Esta descripción se puede visualizar en la Fig. 5.1.

Figura 5.1: Diagrama esquemático de una placa circular de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$ y conductividad térmica con dependencia radial, $k(r)$.



En esta situación, se tiene que k es una función de la variable r , por lo cual la ecuación a resolver es diferente a la de los capítulos anteriores. Según la descripción

del problema, la ecuación a resolver sería la Ec. (2.37), resultando en

$$\vec{\nabla} \cdot (k(r)\vec{\nabla}T) = 0. \quad (5.1)$$

En este caso, se complica la obtención de una solución analítica general, puesto que la forma de la ecuación diferencial va a depender de la función conductividad térmica, $k(r)$. Por este motivo, la finalidad es obtener una solución numérica, basada en la tercera hipótesis de la sección (1.2), donde se propone usar un conjunto de materiales de conductividad térmica constante. Para ello se resuelven diferentes casos particulares, los cuales serán de gran importancia, ya que el método de solución general es un acople de los mismos.

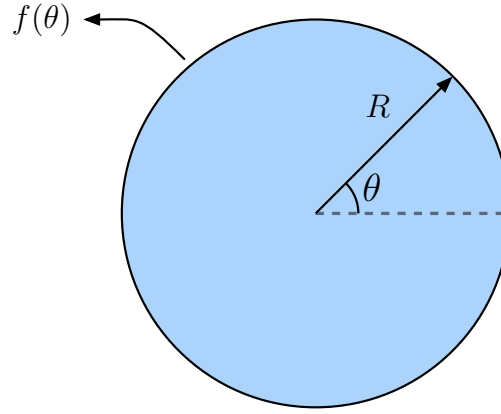
5.1. Solución analítica para un medio

En esta sección se aborda la resolución de dos problemas, que presentan medios de conductividad térmica constante. Estos problemas proporcionan una base para la resolución de los casos que involucren dos medios, los cuales se verán en secciones posteriores. Específicamente, se busca obtener las soluciones analíticas a la ecuación del calor en estado estacionario sin fuentes internas (ecuación de Laplace para la temperatura), en una placa circular (disco) y un disco anular (anillo).

5.1.1. Solución en un disco

En este problema se resuelve la ecuación de Laplace para la temperatura en un disco de radio R y conductividad térmica constante, con condición de contorno de Dirichlet $T(R, \theta) = f(\theta)$. Como se puede visualizar en la Fig. 5.2.

Figura 5.2: Diagrama esquemático de un disco de radio R con CC de Dirichlet $f(\theta)$.



Este problema fue resuelto en el capítulo III, por lo tanto no será necesario realizar el desarrollo completo. Entonces, de acuerdo a dicho desarrollo, la solución general para un disco es

$$T(r, \theta) = A + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n r^n \cos(n\theta) + D_n r^n \sin(n\theta)], \quad (5.2)$$

donde A , C_n y D_n son constantes. Para obtener los valores de estas constantes y poder completar la solución, se emplea la condición de contorno establecida $f(\theta)$. Esto es

$$f(\theta) = A + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n R^n \cos(n\theta) + D_n R^n \sin(n\theta)]. \quad (5.3)$$

Al igual que en dicho capítulo, esta última ecuación se reescribe de tal forma que sea idéntica a la expansión de Fourier en senos y cosenos (Ec. 2.54),

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)]. \quad (5.4)$$

De esta manera, las constantes α_0 , α_n y β_n pueden calcularse por medio de las Ec. (3.35) y (3.36). De este modo, es posible determinar los coeficientes de la solución

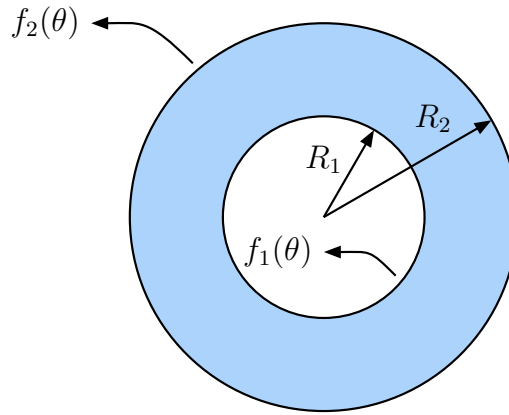
general, a partir de

$$\begin{cases} A &= \alpha_0/2 \\ C_n R^n &= \alpha_n \\ D_n R^n &= \beta_n. \end{cases} \quad (5.5)$$

5.1.2. Solución en un anillo

En este problema se resuelve la ecuación de Laplace para la temperatura en un anillo de radio interior R_1 , radio exterior R_2 y conductividad térmica constante, con condiciones de contorno de Dirichlet, $T(R_1, \theta) = f_1(\theta)$ y $T(R_2, \theta) = f_2(\theta)$. Como se puede visualizar en la Fig. 5.3.

Figura 5.3: Diagrama esquemático de un anillo de radio interior R_1 y radio exterior R_2 , con condiciones de contorno de Dirichlet, $T(R_1, \theta) = f_1(\theta)$ y $T(R_2, \theta) = f_2(\theta)$.



El procedimiento para obtener la solución analítica al problema en un anillo es similar al del disco. La diferencia para este problema es que no se anulan términos de las soluciones, ya que en el caso del disco se analiza la situación cuando $r \rightarrow 0^+$, mientras que para el anillo no se presenta esta condición. De acuerdo a esto, la solución general para un anillo es

$$T(r, \theta) = A + B \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n r^n + E_n r^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n r^n + F_n r^{-n}) \sin(n\theta)], \quad (5.6)$$

donde A , B , C_n , D_n , E_n y F_n son constantes. Para obtener los valores de estas constantes y completar la solución se deben emplear las condiciones de contorno $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$.

Entonces, partiendo por la condición de contorno correspondiente al radio interior R_1 , se tiene

$$f_1(\theta) = A + B \ln(R_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n R_1^n + E_n R_1^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n R_1^n + F_n R_1^{-n}) \sin(n\theta)] . \quad (5.7)$$

Esta ecuación, puede reescribirse para que sea idéntica a la expansión en senos y cosenos,

$$f_1(\theta) = \frac{\alpha_0^1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n^1 \cos(n\theta) + \beta_n^1 \sin(n\theta)] . \quad (5.8)$$

Donde α_0^1 , α_n^1 y β_n^1 son constantes, para las cuales el superíndice indica que estos valores corresponden a la condición de contorno $f_1(\theta)$. Estas constantes pueden calcularse por medio de las Ec. (3.35) y (3.36). De esta forma, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B \ln(R_1) &= \alpha_0^1/2 \\ C_n R_1^n + E_n R_1^{-n} &= \alpha_n^1 \\ D_n R_1^n + F_n R_1^{-n} &= \beta_n^1 . \end{cases} \quad (5.9)$$

Considerando que el índice n toma una cantidad finita de términos, se tendría un sistema de $2n + 1$ ecuaciones para un total de $4n + 2$ incógnitas. Por ello, es necesario continuar con la condición de contorno correspondiente al radio interior R_2 , con la cual se obtiene

$$f_2(\theta) = A + B \ln(R_2) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n R_2^n + E_n R_2^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n R_2^n + F_n R_2^{-n}) \sin(n\theta)] . \quad (5.10)$$

Para luego reescribir la ecuación de forma idéntica a la expansión de Fourier en senos y cosenos,

$$f_2(\theta) = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n^2 \cos(n\theta) + \beta_n^2 \sin(n\theta)] . \quad (5.11)$$

Donde α_0^2 , α_n^2 y β_n^2 son constantes, para las cuales el superíndice indica que estos valores corresponden a la condición de contorno $f_2(\theta)$. Estas constantes pueden calcularse por

medio de las Ec. (3.35) y (3.36), brindando las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} A + B \ln(R_2) &= \alpha_0^2/2 \\ C_n R_2^n + E_n R_2^{-n} &= \alpha_n^2 \\ D_n R_2^n + F_n R_2^{-n} &= \beta_n^2. \end{cases} \quad (5.12)$$

Con esto último se tendrían $2n+1$ ecuaciones adicionales para el sistema, que constaría de $4n+2$ ecuaciones para un total de $4n+2$ incógnitas (A , B , C_n , D_n , E_n y F_n). De esta forma se tendría un sistema consistente para obtener los coeficientes de la solución general,

$$\begin{cases} A + B \ln(R_1) &= \alpha_0^1/2 \\ A + B \ln(R_2) &= \alpha_0^2/2 \\ C_n R_1^n + E_n R_1^{-n} &= \alpha_n^1 \\ D_n R_1^n + F_n R_1^{-n} &= \beta_n^1 \\ C_n R_2^n + E_n R_2^{-n} &= \alpha_n^2 \\ D_n R_2^n + F_n R_2^{-n} &= \beta_n^2. \end{cases} \quad (5.13)$$

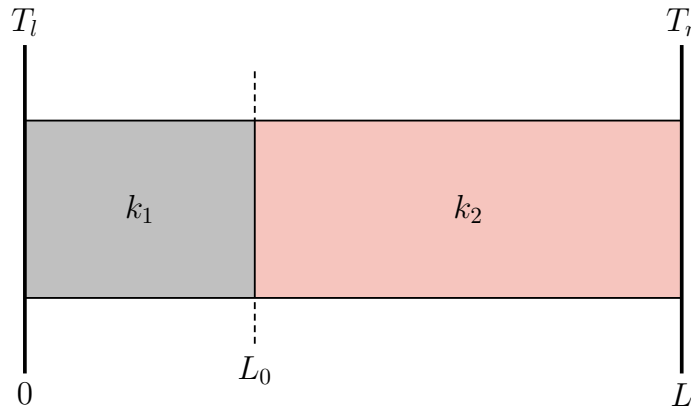
5.2. Solución analítica para dos medios

En la sección anterior, se obtuvieron soluciones analíticas a la ecuación del calor estacionaria en un medio de conductividad térmica constante, específicamente para el caso de un disco y el de un anillo. En esta sección se busca ampliar el análisis al considerar la presencia de dos medios en contacto, cada uno con su propia conductividad térmica constante. Esta nueva configuración es una pieza fundamental en la hipótesis planteada para la solución numérica del problema principal. Por este motivo se busca resolver de forma analítica tres problemas particulares que involucren dos medios en contacto. Primero se tendrá un problema unidimensional, que ayudará a entender como resolver estos casos de dos materiales (medios). Luego se tendrá el problema de dos anillos, y por último el problema de un disco y un anillo. El resolver estos problemas de forma analítica permitirá entender mejor el problema y brindará una secuencia en el proceso de obtener una solución numérica.

5.2.1. Problema unidimensional

Como se mencionó anteriormente, con la finalidad de entender como se resuelven los problemas que involucran dos materiales en contacto, se plantea resolver un problema unidimensional. El problema consiste en obtener la distribución de temperaturas en un sistema de dos materiales de conductividades térmicas constantes, sin fuentes internas y en estado estacionario. Considerando que estos materiales se encuentran en contacto térmico perfecto (sección 2.4). El sistema total presenta una longitud L y el primer medio una longitud L_0 . En los extremos del sistema se tienen condiciones de contorno de Dirichlet, $T(x = 0) = T_l$ y $T(x = L) = T_r$. Esta descripción se puede visualizar en la Fig. 5.4.

Figura 5.4: Diagrama esquemático del problema unidimensional para dos materiales de conductividades térmicas diferentes, con condiciones de contorno de Dirichlet T_l y T_r .



Debido a que cada material presenta una conductividad térmica constante, es posible estudiar cada material por separado. Es decir, se puede resolver la ecuación de Laplace unidimensional para cada material, y luego se debe tener en cuenta las condiciones de interfase.

Solución en el primer material. Se considera al material que se extiende de 0 a L_0 y de conductividad térmica k_1 . Se resuelve la ecuación de Laplace unidimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T_1(x) = 0. \quad (5.14)$$

Cuya solución es

$$T_1(x) = Ax + B, \quad (5.15)$$

donde A y B son constantes. Luego, teniendo en cuenta que la condición de contorno para este material es $T(0) = T_l$, se deduce que $B = T_l$. Por ello, la función $T_1(x)$ se reescribe como

$$T_1(x) = Ax + T_l. \quad (5.16)$$

Solución en el segundo material. Se considera al material que se extiende de L_0 a L y de conductividad térmica k_2 . Se resuelve la ecuación de Laplace unidimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T_2(x) = 0. \quad (5.17)$$

Cuya solución es

$$T_2(x) = Cx + D, \quad (5.18)$$

donde C y D son constantes. Considerando la condición de contorno para este material $T(L) = T_r$, se deduce que $D = T_r - CL$. Por esto, la función $T_2(x)$ se reescribe como

$$T_2(x) = Cx + T_r - CL. \quad (5.19)$$

Condiciones de interfase. Ahora se debe tener en cuenta las condiciones para el caso ideal de contacto térmico perfecto entre dos superficies, visto en la sección 2.4. Entonces, aplicando la condición de continuidad del flujo térmico en la interfase,

$$-k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{L_0^-} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{L_0^+} \quad (5.20)$$

$$k_1 A = k_2 C. \quad (5.21)$$

De esta forma se tiene que una constante de la función de temperatura de un medio, es proporcional a una constante de la función temperatura del otro medio,

$$\frac{k_1}{k_2} A = C. \quad (5.22)$$

Luego, al aplicar la condición de continuidad de la temperatura, se tiene

$$T_1(L_0) = T_2(L_0) \quad (5.23)$$

$$AL_0 + T_l = C(L_0 - L) + T_r. \quad (5.24)$$

Donde al reemplazar la relación obtenida anteriormente,

$$AL_0 + T_l = \frac{k_1}{k_2}A(L_0 - L) + T_r \quad (5.25)$$

$$(T_l - T_r) = -\frac{A}{k_2} [k_1(L - L_0) - k_2L_0] \quad (5.26)$$

$$A = \frac{-k_2(T_l - T_r)}{k_1(L - L_0) - k_2L_0}. \quad (5.27)$$

Con esto, se obtiene la constante C ,

$$C = \frac{-k_1(T_l - T_r)}{k_1(L - L_0) - k_2L_0}. \quad (5.28)$$

Una vez que se tienen las constantes correspondientes, se reemplazan para obtener las funciones temperatura de cada material. Previo a ello, se define la constante μ ,

$$\mu = \frac{(T_l - T_r)}{k_1(L - L_0) - k_2L_0}. \quad (5.29)$$

Finalmente, la distribución de temperaturas, está dada por

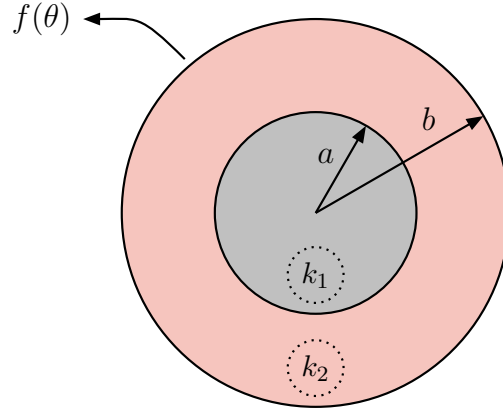
$$T(x) = \begin{cases} -k_2\mu x + T_l & ; \quad 0 \leq x \leq L_0 \\ -k_1\mu(x - L) + T_r & ; \quad L_0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (5.30)$$

5.2.2. Problema de un disco y un anillo

El problema consiste en obtener la distribución de temperaturas en estado estacionario, en un sistema de dos materiales de conductividades térmicas diferentes, donde no se presentan fuentes internas de calor. La configuración de los materiales es un disco

de radio $r_d = a$ y conductividad térmica k_1 , en contacto térmico perfecto con un anillo de radio interior $r_i = a$, radio exterior $r_e = b$ y conductividad térmica k_2 . Este sistema presenta una condición de contorno de Dirichlet, $T(b, \theta) = f(\theta)$. Esta descripción del problema se puede visualizar en la Fig. 5.5.

Figura 5.5: Diagrama esquemático del problema de un disco y un anillo, de conductividades térmicas diferentes, con condición de contorno de Dirichlet $f(\theta)$.



Debido a que cada material presenta una conductividad térmica constante, es posible estudiar cada material por separado. En este caso, por la geometría del problema la ecuación a resolver es la ecuación de Laplace en coordenadas polares en cada material, y posteriormente tener en cuenta las condiciones de contorno e interfase.

Solución en el primer material. Se considera al material de conductividad térmica k_1 , es decir, el disco. La solución a la ecuación de Laplace en un disco se obtuvo en la sección 5.1. Por ello, la función temperatura en el primer material está dada por

$$T_1(r, \theta) = A^1 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^1 r^n \cos(n\theta) + D_n^1 r^n \sin(n\theta)] . \quad (5.31)$$

Donde A^1 , C_n^1 y D_n^1 son constantes, para las cuales el superíndice indica que estos valores corresponden a la solución en el primer material.

Solución en el segundo material. Se considera al material de conductividad térmica k_2 , es decir, el anillo. La solución a la ecuación de Laplace en un anillo se

obtuvo en la sección 5.1. Por ello, la función temperatura en el segundo material es

$$T_2(r, \theta) = A^2 + B^2 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^2 r^n + E_n^2 r^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^2 r^n + F_n^2 r^{-n}) \sin(n\theta)] . \quad (5.32)$$

Donde A^2 , B^2 , C_n^2 , D_n^2 , E_n^2 y F_n^2 son constantes, para las cuales el superíndice indica que estos valores corresponden al segundo material. Ahora, se debe tener en cuenta que para este material se tiene la condición de contorno $T(b, \theta) = f(\theta)$, de esto se tiene

$$f(\theta) = A^2 + B^2 \ln(b) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^2 b^n + E_n^2 b^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^2 b^n + F_n^2 b^{-n}) \sin(n\theta)] . \quad (5.33)$$

Similar al caso de un material, esto se puede reescribir de tal forma que sea idéntico al desarrollo de Fourier en senos y cosenos. Esto es,

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] , \quad (5.34)$$

donde los valores α_0 , α_n y β_n se pueden calcular, por medio de las Ec. (3.35) y (3.36).

Resultando el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} A^2 + B^2 \ln(b) &= \alpha_0/2 \\ C_n^2 b^n + E_n^2 b^{-n} &= \alpha_n \\ D_n^2 b^n + F_n^2 b^{-n} &= \beta_n . \end{cases} \quad (5.35)$$

Considerando que los índices n de las sumatorias, toman una misma cantidad finita de términos, se tendría un sistema de $2n + 1$ ecuaciones. Aunque teniendo en cuenta la cantidad de constantes para las dos funciones de temperatura, se tiene un total de $6n + 3$ incógnitas.

Condiciones de interfase. Para los materiales en contacto de este problema, se considera el caso ideal de contacto térmico perfecto, visto en la sección 2.4. Entonces, aplicando la condición de continuidad de la temperatura

$$T_1(a, \theta) = T_2(a, \theta), \quad (5.36)$$

reemplazando las soluciones obtenidas en las Ec. (5.31) y (5.32), resulta

$$A^1 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^1 a^n \cos(n\theta) + D_n^1 a^n \sin(n\theta)] = A^2 + B^2 \ln(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^2 a^n + E_n^2 a^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^2 a^n + F_n^2 a^{-n}) \sin(n\theta)]. \quad (5.37)$$

Pasando a restar y agrupando, se tiene

$$[A^1 - A^2 - B^2 \ln(a)] + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^1 a^n - C_n^2 a^n - E_n^2 a^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^1 a^n - D_n^2 a^n - F_n^2 a^{-n}) \sin(n\theta)] = 0. \quad (5.38)$$

De esta forma, debido a que el conjunto de funciones $\{1, \sin(n\theta), \cos(n\theta)\}$ es linealmente independiente, se deduce que los términos que acompañan a las funciones $\sin(n\theta)$ y $\cos(n\theta)$, así como el término independiente, deben ser igual a 0. Por lo cual, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} A^1 - A^2 + B^2 \ln(a) &= 0 \\ C_n^1 a^n - C_n^2 a^n - E_n^2 a^{-n} &= 0 \\ D_n^1 a^n - D_n^2 a^n - F_n^2 a^{-n} &= 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Con esto, se tendrían $2n + 1$ ecuaciones adicionales para el sistema, con lo cual se tendrían $4n + 2$ ecuaciones para un total de $6n + 3$ incógnitas. Ahora, aplicando la condición de continuidad del flujo térmico en la interfase

$$-k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=a^-} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=a^+}, \quad (5.40)$$

reemplazando las funciones temperatura y derivando, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nk_1 C_n^1 a^{n-1} \cos(n\theta) + nk_1 D_n^1 a^{n-1} \sin(n\theta)] = \frac{k_2 B^2}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nk_2 C_n^2 a^{n-1} - nk_2 E_n^2 a^{-n-1}) \cos(n\theta) + (nk_2 D_n^2 a^{n-1} - nk_2 F_n^2 a^{-n-1}) \sin(n\theta)]. \quad (5.41)$$

Pasando a restar y agrupando

$$\left[\frac{k_2 B^2}{a} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} n \left[(k_1 C_n^1 a^{n-1} - k_2 C_n^2 a^{n-1} + k_2 E_n^2 a^{-n-1}) \cos(n\theta) + \right. \\ \left. (k_1 D_n^1 a^{n-1} - k_2 D_n^2 a^{n-1} + k_2 F_n^2 a^{-n-1}) \sin(n\theta) \right] = 0. \quad (5.42)$$

De esta forma, debido a que el conjunto de funciones $\{1, \sin(n\theta), \cos(n\theta)\}$ es linealmente independiente, se tienen términos que deben ser igual a 0. Por lo cual, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} B^2 & = 0 \\ k_1 C_n^1 a^{n-1} - k_2 C_n^2 a^{n-1} + k_2 E_n^2 a^{-n-1} & = 0 \\ k_1 D_n^1 a^{n-1} - k_2 D_n^2 a^{n-1} + k_2 F_n^2 a^{-n-1} & = 0. \end{cases} \quad (5.43)$$

Con esto último se tendrían $2n + 1$ ecuaciones adicionales al sistema, que constaría de $6n + 3$ ecuaciones para un total de $6n + 3$ incógnitas. De esta forma se tiene un sistema consistente para obtener los coeficientes de las soluciones generales,

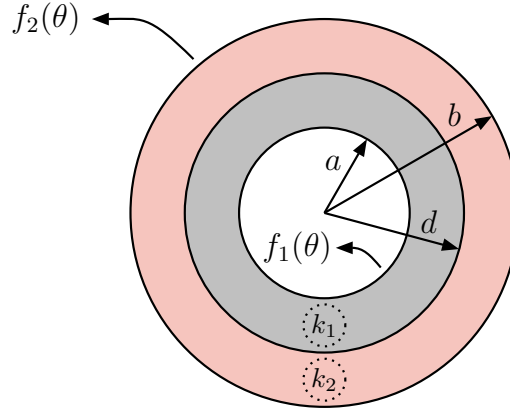
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\ln(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\ln(b) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^n & 0 & -a^n & 0 & -a^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n & 0 & -a^n & 0 & -a^{-n} \\ 0 & 0 & 0 & k_1 a^{n-1} & 0 & -k_2 a^{n-1} & 0 & k_2 a^{-n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 a^{n-1} & 0 & -k_2 a^{n-1} & 0 & k_2 a^{-n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^n & 0 & b^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^n & 0 & b^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ B^2 \\ C_n^1 \\ D_n^1 \\ C_n^2 \\ D_n^2 \\ E_n^2 \\ F_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_0/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

5.2.3. Problema de dos anillos

El problema consiste en obtener la distribución de temperaturas en estado estacionario, en un sistema de dos materiales de conductividades térmicas diferentes, donde no se presentan fuentes internas de calor. La configuración de los materiales es un anillo de radio interior $r_{1i} = a$, radio exterior $r_{1e} = d$ y conductividad térmica k_1 ,

en contacto térmico perfecto con otro anillo de radio interior $r_{2i} = d$, radio exterior $r_{2e} = b$ y conductividad térmica k_2 . Este sistema presenta dos condiciones de contorno de Dirichlet, $T(a, \theta) = f_1(\theta)$ y $T(b, \theta) = f_2(\theta)$. Esta descripción del problema se puede visualizar en la Fig. 5.6.

Figura 5.6: Diagrama esquemático del problema de dos anillos, de conductividades térmicas diferentes, con condiciones de contorno de Dirichlet $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$.



Debido a que cada material presenta una conductividad térmica constante, es posible estudiar cada material por separado. En este caso, por la geometría del problema la ecuación a resolver en cada material es la ecuación de Laplace en coordenadas polares, y posteriormente tener en cuenta las condiciones de contorno e interfase.

Solución en el primer material. Se considera al material de conductividad térmica k_1 , es decir, el anillo de radio interior $r_{1i} = a$ y radio exterior $r_{1e} = d$. La solución a la ecuación de Laplace en un anillo se obtuvo en la sección 5.1. Por ello, la función temperatura en el primer material está dada por

$$T_1(r, \theta) = A^1 + B^1 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^1 r^n + E_n^1 r^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^1 r^n + F_n^1 r^{-n}) \sin(n\theta)] . \quad (5.45)$$

Donde A^1 , B^1 , C_n^1 , D_n^1 , E_n^1 y F_n^1 son constantes, para las cuales el superíndice indica que estos valores corresponden al primer material. Ahora, se debe tener en cuenta que para este material se tiene la condición de contorno en el radio interior, $T(a, \theta) = f_1(\theta)$,

$$f_1(\theta) = A^1 + B^1 \ln(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^1 a^n + E_n^1 a^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^1 a^n + F_n^1 a^{-n}) \sin(n\theta)] . \quad (5.46)$$

Similar al caso de un material, esto se puede reescribir de tal forma, que sea idéntico al desarrollo de Fourier en senos y cosenos. Esto es,

$$f_1(\theta) = \frac{\alpha_0^1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n^1 \cos(n\theta) + \beta_n^1 \sin(n\theta)] . \quad (5.47)$$

Donde los valores de α_0^1 , α_n^1 y β_n^1 (el superíndice indica que corresponden a la condición de contorno del primer material) pueden calcularse por medio de las Ec (3.35) y (3.36). Resultando el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} A^1 + B^1 \ln(a) &= \alpha_0^1/2 \\ C_n^1 a^n + E_n^1 a^{-n} &= \alpha_n^1 \\ D_n^1 a^n + F_n^1 a^{-n} &= \beta_n^1. \end{cases} \quad (5.48)$$

Considerando que el índice n de la sumatoria, toma una cantidad finita de términos, se tendrían un sistema de $2n + 1$ ecuaciones. Aunque aún falta la solución en el segundo material, hasta el momento se tienen $4n + 2$ incógnitas.

Solución en el segundo material. Se considera al material de conductividad térmica k_2 , es decir, el anillo de radio interior $r_{2i} = d$ y radio exterior $r_{2e} = b$. La solución a la ecuación de Laplace en una anillo se obtuvo en la sección 5.1. Por ello, la función temperatura en el segundo material está dada por

$$T_2(r, \theta) = A^2 + B^2 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^2 r^n + E_n^2 r^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^2 r^n + F_n^2 r^{-n}) \sin(n\theta)] . \quad (5.49)$$

Donde A^2 , B^2 , C_n^2 , D_n^2 , E_n^2 y F_n^2 son constantes, para las cuales el superíndice indica que estos valores corresponden al segundo material. Ahora, se debe tener en cuenta que para este material se tiene la condición de contorno en el radio exterior, $T(b, \theta) = f_2(\theta)$,

$$f_2(\theta) = A^2 + B^2 \ln(b) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^2 b^n + E_n^2 b^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^2 b^n + F_n^2 b^{-n}) \sin(n\theta)] . \quad (5.50)$$

Similar al caso de un material, esto se puede reescribir de tal forma, que sea idéntico

al desarrollo de Fourier en senos y cosenos. Esto es,

$$f_2(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)]. \quad (5.51)$$

Donde los valores de α_0^2 , α_n^2 y β_n^2 (el superíndice indica que corresponden a la condición de contorno del segundo material) pueden calcularse por medio de las Ec. (3.35) y (3.36). Resultando el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} A^2 + B^2 \ln(b) &= \alpha_0^2/2 \\ C_n^2 b^n + E_n^2 b^{-n} &= \alpha_n^2 \\ D_n^2 b^n + F_n^2 b^{-n} &= \beta_n^2. \end{cases} \quad (5.52)$$

Considerando que el índice n de la sumatoria, toma la misma cantidad finita de términos a la solución en el primer material, se tendrían $2n + 1$ ecuaciones adicionales al sistema. Teniendo en cuenta que con la solución en este material la cantidad de incógnitas aumenta, el sistema tendría $4n + 2$ ecuaciones, para un total de $8n + 4$ incógnitas.

Condiciones de interfase. Para los materiales en contacto de este problema, se considera el caso ideal de contacto térmico perfecto, visto en la sección 2.4. Entonces, aplicando la condición de continuidad de la temperatura

$$T_1(d, \theta) = T_2(d, \theta), \quad (5.53)$$

reemplazando las soluciones obtenidas de las Ec. (5.45) y (5.49), resulta

$$\begin{aligned} A^1 + B^1 \ln(d) \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^1 d^n + E_n^1 d^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^1 d^n + F_n^1 d^{-n}) \sin(n\theta)] = \\ A^2 + B^2 \ln(d) + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^2 d^n + E_n^2 d^{-n}) \cos(n\theta) + (D_n^2 d^n + F_n^2 d^{-n}) \sin(n\theta)]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Pasando a restar y agrupando, se tiene

$$\begin{aligned} [A^1 + B^1 \ln(d) - A^2 - B^2 \ln(d)] + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n^1 d^n + E_n^1 d^{-n} - C_n^2 d^n - E_n^2 d^{-n}) \cos(n\theta) + \\ (D_n^1 d^n + F_n^1 d^{-n} - D_n^2 d^n - F_n^2 d^{-n}) \sin(n\theta)] = 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

De esta forma, debido a que el conjunto de funciones $\{1, \sin(n\theta), \cos(n\theta)\}$ es linealmente independiente, se deduce que los términos que acompañan a las funciones $\sin(n\theta)$ y $\cos(n\theta)$, así como el término independiente, deben ser igual a 0. Por lo cual, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} A^1 + B^1 \ln(d) - A^2 + B^2 \ln(d) = 0 \\ C_n^1 d^n + E_n^1 d^{-n} - C_n^2 d^n - E_n^2 d^{-n} = 0 \\ D_n^1 d^n + F_n^1 d^{-n} - D_n^2 d^n - F_n^2 d^{-n} = 0. \end{cases} \quad (5.56)$$

Con esto, se tendrían $2n + 1$ ecuaciones adicionales para el sistema, con lo cual serían $6n + 3$ ecuaciones para un total de $8n + 4$ incógnitas. Ahora aplicando la condición de continuidad del flujo térmico en la interfase

$$-k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=d^-} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=d^+}, \quad (5.57)$$

reemplazando las funciones temperatura y derivando, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{k_1 B^1}{d} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nk_1 C_n^1 d^{n-1} - nk_1 E_n^1 d^{-n-1}) \cos(n\theta) + \\ (nk_1 D_n^1 d^{n-1} - nk_1 F_n^1 d^{-n-1}) \sin(n\theta)] = \\ \frac{k_2 B^2}{d} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nk_2 C_n^2 d^{n-1} - nk_2 E_n^2 d^{-n-1}) \cos(n\theta) + \\ (nk_2 D_n^2 d^{n-1} - nk_2 F_n^2 d^{-n-1}) \sin(n\theta)]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Pasando a restar y agrupando

$$\left[\frac{k_1 B^1}{d} 2 - \frac{k_2 B^2}{d} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} n \left[(k_1 C_n^1 d^{n-1} - k_1 E_n^1 d^{-n-1} - k_2 C_n^2 d^{n-1} + k_2 E_n^2 d^{-n-1}) \cos(n\theta) + \right. \\ \left. (k_1 D_n^1 d^{n-1} - k_1 F_n^1 d^{n-1} - k_2 D_n^2 d^{n-1} + k_2 F_n^2 d^{-n-1}) \sin(n\theta) \right] = 0. \quad (5.59)$$

De esta forma, debido a que el conjunto de funciones $\{1, \sin(n\theta), \cos(n\theta)\}$ es linealmente independiente, se tienen términos que deben ser igual a 0. Por lo cual, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} k_1 B^1 - k_2 B^2 & = 0 \\ k_1 C_n^1 d^{n-1} - k_1 E_n^1 d^{-n-1} - k_2 C_n^2 d^{n-1} + k_2 E_n^2 d^{-n-1} & = 0 \\ k_1 D_n^1 d^{n-1} - k_1 F_n^1 d^{n-1} - k_2 D_n^2 d^{n-1} + k_2 F_n^2 d^{-n-1} & = 0. \end{cases} \quad (5.60)$$

Con esto último se tendrían $2n + 1$ ecuaciones adicionales al sistema, que constaría de $8n + 4$ ecuaciones para un total de $8n + 4$ incógnitas. De esta forma se tiene un sistema consistente para obtener los coeficientes de las soluciones generales. Este sistema puede expresarse de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} M_{4 \times 4} & 0_{4 \times 8} \\ 0_{8 \times 4} & N_{8 \times 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}_{12 \times 1}, \quad (5.61)$$

donde

$$u^T = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & B^1 & B^2 & C_n^1 & C_n^2 & D_n^1 & D_n^2 & E_n^1 & E_n^2 & F_n^1 & F_n^2 \end{bmatrix}, \quad (5.62)$$

$$v^T = \begin{bmatrix} \alpha_0^1/2 & \alpha_0^2/2 & 0 & 0 & \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \beta_n^1 & \beta_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ln(a) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ln(b) \\ 1 & -1 & \ln(d) & -\ln(d) \\ 0 & 0 & k_1 & -k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.64)$$

$$N = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & a^{-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 & 0 & 0 & b^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 & 0 & 0 & a^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^n & 0 & 0 & 0 & b^{-n} \\ d^{-n} & -d^{-n} & 0 & 0 & d^{-n} & d^{-n} & 0 & 0 \\ k_1 d^{n-1} & -k_2 d^{n-1} & 0 & 0 & -k_1 d^{n-1} & k_2 d^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^{-n} & -d^{-n} & 0 & 0 & d^{-n} & d^{-n} \\ 0 & 0 & k_1 d^{n-1} & -k_2 d^{n-1} & 0 & 0 & -k_1 d^{n-1} & k_2 d^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

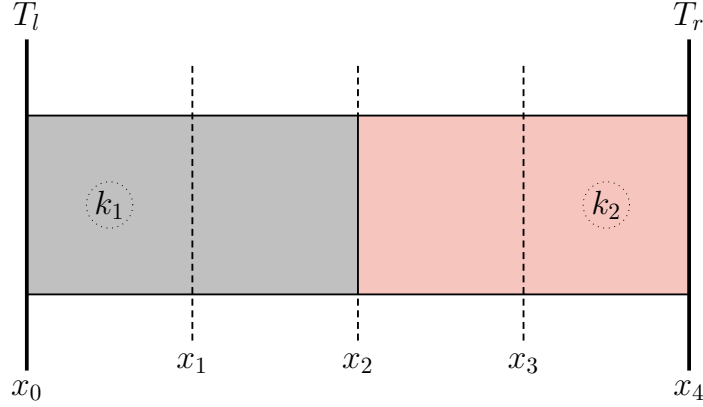
5.3. Solución numérica para dos medios en contacto

En la sección anterior se hallaron las soluciones analíticas a tres problemas particulares que involucran dos materiales en contacto. En dicha sección se puede observar un procedimiento que se repite en todos los casos, que consiste en determinar las soluciones generales para cada material de conductividad térmica constante, considerando las condiciones de contorno correspondientes, de ser el caso. Posteriormente se establecen las relaciones entre las soluciones, por medio de las condiciones de interfase. Este enfoque proporciona una guía clara para abordar estos problemas de forma numérica. Por este motivo, en esta sección se busca resolver de forma numérica los tres problemas particulares de la sección 5.2, que involucran dos medios en contacto. Estos son: el problema unidimensional, el problema de dos anillos y por último, el problema de un disco y un anillo. Estos desarrollos serán de gran importancia, puesto que el método para resolver el problema principal es un acople de los mismos.

5.3.1. Problema unidimensional

Al igual que para las soluciones analíticas, con la finalidad de analizar el procedimiento numérico a seguir en los problemas posteriores, se plantea resolver el problema unidimensional, descrito en la subsección 5.2.1. A diferencia de la descripción inicial, convenientemente para el desarrollo numérico se va a considerar que los materiales presentan el mismo tamaño. Con esto, se discretiza la variable longitudinal x en 5 puntos (x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4) como se observa en la Fig. 5.7.

Figura 5.7: Discretización de la variable longitudinal x en 5 puntos. Problema unidimensional para dos materiales de conductividades térmicas diferentes, con condiciones de contorno de Dirichlet T_l y T_r .



De acuerdo al procedimiento observado en los desarrollos analíticos, primero se busca obtener las soluciones para cada material de conductividad térmica constante. Para ello es necesario resolver la ecuación que describe el problema, en este caso la ecuación de Laplace. Entonces, considerando una función temperatura en cada material, se tiene a $T^1(x)$ para el material de conductividad térmica k_1 y a $T^2(x)$ para el material de conductividad térmica k_2 , donde los superíndices en las funciones indican al material que pertenecen. De esta forma, la ecuación de Laplace a resolver es la siguiente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T^q(x) = 0, \quad (5.66)$$

donde el índice q puede ser 1 o 2, dependiendo del material. Como se busca una solución numérica, se aplican las aproximaciones por diferencias finitas centradas de segundo orden, que se encuentran en la Tabla 2.3. De esto, al aplicarse la aproximación en el punto $x = x_j$, se obtiene

$$\frac{1}{h^2} (T_{j-1}^q - 2T_j^q + T_{j+1}^q) = 0, \quad (5.67)$$

donde $T^q(r_j + nh) = T_{j+n}^q$. Esta última ecuación será aplicada solo en los puntos x_1 y x_3 , ya que los valores de temperatura en los puntos x_0 y x_4 se conocen por la condición de contorno. Además, los puntos involucrados donde se aplica la ecuación, tanto los puntos

anterior y posterior al mismo, deben pertenecer al mismo material. Esto no se cumple en el punto x_2 , debido a que pertenece a la interfase, donde en caso de aplicarse la ecuación se tomarían puntos que corresponden a diferentes materiales y que se encontrarían fuera del dominio de las funciones temperatura $T^q(x)$. Entonces, aplicando la ecuación en los puntos mencionados, considerando al material que pertenecen, se tiene

$$\begin{aligned}\underline{x_1}: \quad T_0^1 - 2T_1^1 + T_2^1 &= 0, \\ \underline{x_3}: \quad T_2^2 - 2T_3^2 + T_4^2 &= 0.\end{aligned}\tag{5.68}$$

Con esto, se tendría un sistema de 2 ecuaciones para un total de 4 variables (T_1^1 , T_2^1 , T_2^2 y T_3^2), ya que T_0^1 y T_4^2 son valores conocidos por la condición de contorno. Por lo tanto faltarían dos ecuaciones adicionales para tener un sistema consistente. Luego, se tiene en cuenta que para los materiales en contacto del problema, se considera el caso ideal de contacto térmico perfecto, visto en la sección 2.4. Entonces, aplicando la condición de continuidad de la temperatura, se tiene

$$T_1(x_2) = T_2(x_2)\tag{5.69}$$

$$T_2^1 = T_2^2\tag{5.70}$$

$$T_2^1 - T_2^2 = 0.\tag{5.71}$$

Con esto se tendría 1 ecuación adicional para el sistema, con lo cual serían 3 ecuaciones para un total de 4 variables. Ahora, aplicando la condición de continuidad del flujo térmico en la interfase, se tiene

$$-k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x_2^-} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{x_2^+}.\tag{5.72}$$

Cuando se intenta aproximar las derivadas por diferencias finitas centradas, surge la

necesidad de usar puntos que no existen para las funciones. Esto es,

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x_2} = \frac{1}{2h} (T_{j+1}^1 - T_{j-1}^1)_{j=2} = \frac{1}{2h} (T_3^1 - T_1^1), \quad (5.73)$$

$$\left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{x_2} = \frac{1}{2h} (T_{j+1}^2 - T_{j-1}^2)_{j=2} = \frac{1}{2h} (T_3^2 - T_2^2), \quad (5.74)$$

donde T_3^1 y T_1^2 corresponden a valores de temperatura en puntos que están fuera del dominio de cada función. Motivo por el cuál se busca otra forma de aproximar numéricamente los flujos en la interfase.

Teniendo en cuenta que se busca una solución en estado estacionario y que no hay fuentes internas de calor, se puede deducir que para el caso unidimensional el flujo térmico a lo largo de cada material es constante. De esta forma se tiene que el flujo térmico en el punto x_2 , para el primer material, es igual al flujo térmico en el punto x_1 . Así mismo, el flujo térmico en el punto x_2 , para el segundo material, es igual al flujo térmico en el punto x_3 . Por este razón, la condición de continuidad del flujo térmico en la interfase, para este caso unidimensional, puede reescribirse como

$$-k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x_1} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{x_3}. \quad (5.75)$$

Donde, al aplicarse las aproximaciones por diferencias finitas centradas, se tiene

$$\frac{k_1}{2h} (T_2^1 - T_0^1) = \frac{k_2}{2h} (T_4^2 - T_2^2) \quad (5.76)$$

$$k_1 T_2^1 + k_2 T_2^2 = k_1 T_0^1 + k_2 T_4^2. \quad (5.77)$$

Con esto último se tendría 1 ecuación adicional al sistema, que constaría de 4 ecuaciones para un total de 4 incógnitas. De esta forma se tiene un sistema consistente para obtener

los valores de temperatura en los puntos x_i ,

$$\begin{cases} -2T_1^1 + T_2^1 & = & -T_0^1 \\ T_2^1 - T_2^2 & = & 0 \\ k_1 T_2^1 + k_2 T_2^2 & = & k_1 T_0^1 + k_2 T_4^2 \\ T_2^2 - 2T_3^2 & = & -T_4^2. \end{cases} \quad (5.78)$$

Ahora, otra forma en la que se puede abordar el problema de la continuidad del flujo térmico es el no considerar diferencias finitas centradas en la interfase. En cambio, se plantea usar la aproximación por diferencias finitas hacia atrás para la derivada por la izquierda, y la aproximación por diferencias finitas hacia adelante para la derivada por derecha, ambas de segundo orden. De acuerdo a esto, la condición de continuidad del flujo térmico quedaría expresada como

$$-k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x_2^-} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{x_2^+} \quad (5.79)$$

$$\frac{k_1}{2h} (T_{j-2}^1 - 4T_{j-1}^1 + 3T_j^1)_{j=2} = \frac{k_2}{2h} (-3T_j^2 + 4T_{j+1}^2 - T_{j+2}^2)_{j=2} \quad (5.80)$$

$$k_1 (T_0^1 - 4T_1^1 + 3T_2^1) = k_2 (-3T_2^2 + 4T_3^2 - T_4^2) \quad (5.81)$$

$$-4k_1 T_1^1 + 3k_1 T_2^1 + 3k_2 T_2^2 - 4k_2 T_3^2 = - (k_1 T_0^1 + k_2 T_4^2). \quad (5.82)$$

Con esto último, también se tendría 1 ecuación adicional al sistema, conformando un sistema consistente que permita obtener los valores de temperatura en los puntos x_i ,

$$\begin{cases} -2T_1^1 + T_2^1 & = & -T_0^1 \\ T_2^1 - T_2^2 & = & 0 \\ -4k_1 T_1^1 + 3k_1 T_2^1 + 3k_2 T_2^2 - 4k_2 T_3^2 & = & - (k_1 T_0^1 + k_2 T_4^2) \\ T_2^2 - 2T_3^2 & = & -T_4^2. \end{cases} \quad (5.83)$$

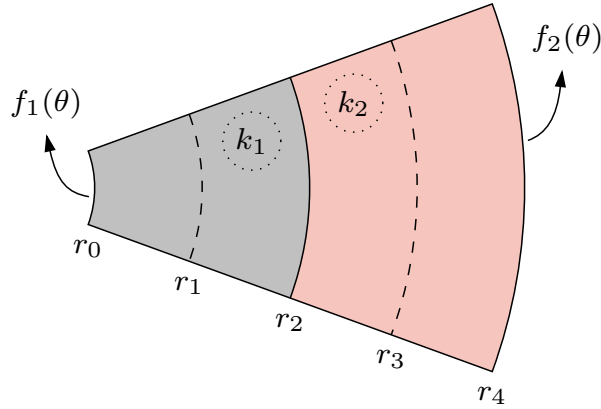
Es así que se presentan dos formas de abordar el problema en el desarrollo numérico de la continuidad del flujo térmico. La primera resulta limitada, ya que solo puede aplicarse para el problema unidimensional; mientras que la segunda resulta ser más

versátil, ya que no está ligada a alguna particularidad. Por ello, esta última es la que será usada en los problemas posteriores.

5.3.2. Caso de dos anillos

En esta sección se plantea resolver de forma numérica el problema de dos anillos en contacto, descrito en la subsección 5.2.3. A diferencia de la descripción inicial, convenientemente para este desarrollo numérico, se va considerar que ambos anillos tienen el mismo *ancho radial*¹. Con esto, similar al caso unidimensional, se discretiza la variable radial r en 5 puntos (r_0, r_1, r_2, r_3 y r_4) como se observa en la Fig. 5.8.

Figura 5.8: Discretización de la variable radial r en 5 puntos. Problema de dos anillos de conductividades térmicas diferentes, con condiciones de contorno de Dirichlet $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$.



Siguiendo el procedimiento desarrollado anteriormente, correspondería resolver la ecuación que describe el problema, en este caso la ecuación de Laplace en coordenadas polares. Entonces, considerando una función temperatura en cada material, se tiene a $T_1(r, \theta)$ para el material de conductividad térmica k_1 y a $T_2(r, \theta)$ para el material de conductividad térmica k_2 . Además, teniendo en cuenta la geometría de los materiales, es posible realizar una expansión de Fourier a cada función temperatura (considerando el método desarrollado en el capítulo III). De esta forma, dichas funciones pueden

¹Se va a denominar como ancho radial a la diferencia entre el radio exterior e interior del anillo (disco anular).

expresarse como

$$T_1(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi^m(r) e^{im\theta}, \quad (5.84)$$

$$T_2(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi^m(r) e^{im\theta}. \quad (5.85)$$

Luego, se debe tener en cuenta que se resuelve la ecuación del problema para cada material. Por ello, reemplazando la función temperatura en la ecuación de Laplace en coordenadas polares, esta se reduce a una ecuación diferencial para los coeficientes de Fourier, que solo dependen la variable r . Esto es,

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi^m(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \phi^m(r) - \frac{m^2}{r^2} \phi^m(r) = 0, \quad (5.86)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi^m(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \psi^m(r) - \frac{m^2}{r^2} \psi^m(r) = 0. \quad (5.87)$$

Aplicando las aproximaciones por diferencias finitas centradas de segundo orden en el punto $r = r_j$, para cada ecuación diferencial, se tiene

$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_j h} \right] \phi_{j-1}^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_j^2} \right] \phi_j^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_j h} \right] \phi_{j+1}^m = 0, \quad (5.88)$$

$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_j h} \right] \psi_{j-1}^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_j^2} \right] \psi_j^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_j h} \right] \psi_{j+1}^m = 0, \quad (5.89)$$

donde $\phi^m(r_j + nh) = \phi_{j+n}^m$ y $\psi^m(r_j + nh) = \psi_{j+n}^m$. Cada ecuación se aplica sobre los puntos del dominio que corresponde a la función temperatura de cada material. Considerando que el punto donde se aplica la ecuación, así como el anterior y posterior al mismo, deben pertenecer al mismo material. Por ello, estas ecuaciones se aplican sobre los puntos r_1 y r_3 respectivamente. Esto es,

$$\begin{aligned} \underline{r_1} : \quad & \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_1 h} \right] \phi_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_1^2} \right] \phi_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_1 h} \right] \phi_2^m = 0, \\ \underline{r_3} : \quad & \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_3 h} \right] \psi_2^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_3^2} \right] \psi_3^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_3 h} \right] \psi_4^m = 0. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Con esto, se tendría un sistema de 2 ecuaciones para un total de 4 variables (ϕ_1^m , ϕ_2^m , ψ_2^m y ψ_3^m), ya que los coeficientes de Fourier ϕ_0^m y ψ_4^m se conocen por las condiciones de contorno. Por tal motivo, faltarían dos ecuaciones adicionales para formar un sistema consistente. Luego, se tiene en cuenta que para los materiales en contacto del problema, se considera el caso de ideal de contacto térmico perfecto, visto en la sección 2.4. Entonces, aplicando la condición de continuidad de la temperatura, resulta

$$T_1(r_2, \theta) = T_2(r_2, \theta) \quad (5.91)$$

$$\sum_m \phi_2^m e^{im\theta} = \sum_m \psi_2^m e^{im\theta}. \quad (5.92)$$

Pasando a restar y agrupando, se tiene

$$\sum_m (\phi_2^m - \psi_2^m) e^{im\theta} = 0. \quad (5.93)$$

De esta forma, debido a que el conjunto de exponenciales $\{\exp(im\theta)\}$ es linealmente independiente, se deduce que los términos que acompañan a las exponenciales deben ser igual a 0. Resultando,

$$\phi_2^m - \psi_2^m = 0. \quad (5.94)$$

Con esto se tendría 1 ecuación adicional al sistema, con lo cual serían 3 ecuaciones para un total de 4 variables. Ahora, aplicando la condición de continuidad del flujo térmico en la interfase

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r_2^-} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r_2^+}, \quad (5.95)$$

reemplazando las funciones temperatura, se tiene

$$k_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_m \phi^m(r) e^{im\theta} \right) \Big|_{r_2^-} = k_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_m \psi^m(r) e^{im\theta} \right) \Big|_{r_2^+} \quad (5.96)$$

$$k_1 \sum_m e^{im\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \phi^m(r) \right) \Big|_{r_2^-} = k_2 \sum_m e^{im\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi^m(r) \right) \Big|_{r_2^+}. \quad (5.97)$$

Pasando a restar y agrupando

$$\sum_m e^{im\theta} \left[k_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} \phi^m(r) \right)_{r_2^-} - k_2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi^m(r) \right)_{r_2^+} \right] = 0. \quad (5.98)$$

De esta forma, debido a que el conjunto de exponenciales $\{\exp(im\theta)\}$ es linealmente independiente, se tienen términos que deben ser igual a 0. Esto es,

$$k_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} \phi^m(r) \right)_{r_2^-} - k_2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi^m(r) \right)_{r_2^+} = 0. \quad (5.99)$$

En este punto se debe tener en cuenta lo desarrollado en el problema unidimensional para este tipo de derivadas en la interfase de dos materiales, donde no es posible aplicar aproximaciones por diferencias finitas centradas. Por este motivo se plantea usar la aproximación por diferencias finitas hacia atrás para la derivada por la izquierda, y la aproximación por diferencias finitas hacia adelante para la derivada por la derecha, ambas de segundo orden. De acuerdo a esto, la ecuación anterior se expresa como

$$k_1 \left(\frac{3\phi_j^m - 4\phi_{j-1}^m + \phi_{j-2}^m}{2h} \right)_{j=2} - k_2 \left(\frac{-\psi_{j+2}^m + 4\psi_{j+1}^m - 3\psi_j^m}{2h} \right)_{j=2} = 0, \quad (5.100)$$

y ya que h es un valor mayor a cero, se puede reescribir como

$$(k_1)\phi_0^m + (-4k_1)\phi_1^m + (3k_1)\phi_2^m + (3k_2)\psi_2^m + (-4k_2)\psi_3^m + (k_2)\psi_4^m = 0. \quad (5.101)$$

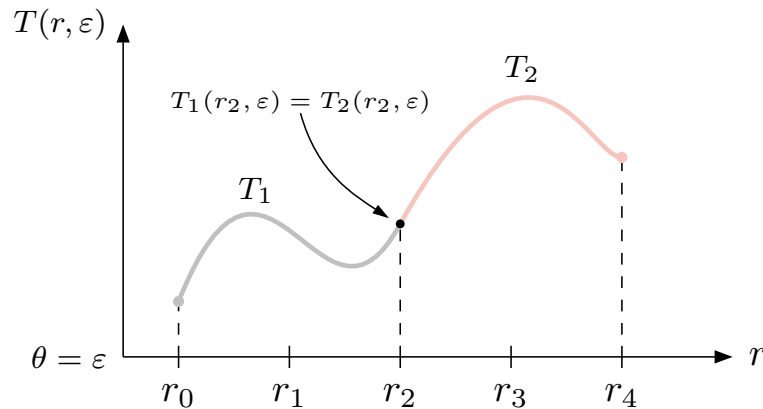
Con esto último se tendría 1 ecuación adicional al sistema, que constaría de 4 ecuaciones para un total de 4 incógnitas. De esta forma se tiene un sistema consistente para obtener los coeficientes de Fourier de índice m . Es decir, que para cada índice m se debe resolver

el siguiente sistema lineal,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_1 h} \right] \phi_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_1^2} \right] \phi_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_1 h} \right] \phi_2^m & = & 0 \\ \phi_2^m - \psi_2^m & = & 0 \\ (k_1)\phi_0^m + (-4k_1)\phi_1^m + (3k_1)\phi_2^m + (3k_2)\psi_2^m + (-4k_2)\psi_3^m + (k_2)\psi_4^m & = & 0 \\ \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_3 h} \right] \psi_2^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_3^2} \right] \psi_3^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_3 h} \right] \psi_4^m & = & 0. \end{array} \right. \quad (5.102)$$

Ahora, si se desea resolver un caso donde se tengan varios anillos (del mismo ancho radial) en contacto, es posible aplicar este mismo método. La diferencia con el caso ya resuelto, es que se tendría una cantidad de funciones temperatura igual a la cantidad de anillos, aumentando así el orden del sistema lineal obtenido. Con el objetivo de tener una notación más compacta, es posible definir una función $T(r, \theta)$ que contenga al mismo tiempo a las funciones $T_1(r, \theta)$ y $T_2(r, \theta)$. Esta nueva definición permitirá tener un sistema lineal más compacto. Para ello, se tendrán en cuenta algunos detalles sobre las funciones $T_1(r, \theta)$ y $T_2(r, \theta)$. Primero, cada función existe en un dominio diferente de la variable r , debido a que corresponden a materiales de conductividades térmicas diferentes, aunque presentan un punto común por la condición de continuidad de la temperatura. Esto puede visualizarse en la Fig. 5.9.

Figura 5.9: Diagrama esquemático de los dominios de las funciones T_1 y T_2 en la variable radial r , para un ángulo fijo $\theta = \varepsilon$. Donde $T(r) = T(r, \varepsilon)$.



Esto, ayuda a notar que las funciones no tienen puntos en común a excepción del punto r_2 . Segundo, un detalle que se puede obtener a partir de lo mencionado anteriormente y de las expansiones de Fourier realizadas a las funciones, es que los coeficientes de Fourier dependen del dominio de las funciones, ya que son estos los que llevan la dependencia radial. De esta forma, los coeficientes de Fourier ϕ^m y ψ^m no comparten puntos en común, con excepción del punto r_2 . Esto será de gran ayuda, ya que al tener claro que las funciones temperatura, así como los coeficientes de Fourier, no presentan puntos en común a excepción de uno, es posible expresar la solución de una forma general. Esto, con el objetivo de tener una notación más compacta, teniendo en cuenta la restricción de los dominios. Entonces, se puede definir una función temperatura $T(r, \theta)$ tal que

$$T(r, \theta) = \begin{cases} T_1(r, \theta); & r \in [r_0, r_2] \\ T_2(r, \theta); & r \in [r_2, r_4], \end{cases} \quad (5.103)$$

donde se cumple que $T(r_2, \theta) = T_1(r_2, \theta) = T_2(r_2, \theta)$. Además, considerando que se puede aplicar una expansión de Fourier a esta función, se tiene

$$T(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi^m(r) e^{im\theta}. \quad (5.104)$$

De este modo, al considerar las expansiones de Fourier de las funciones $T_1(r, \theta)$ y $T_2(r, \theta)$, la función temperatura se puede expresar como

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi^m(r) e^{im\theta} = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi^m(r) e^{im\theta}; & r \in [r_0, r_2] \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi^m(r) e^{im\theta}; & r \in [r_2, r_4]. \end{cases} \quad (5.105)$$

Donde, se puede deducir que los coeficientes de Fourier son los que cargan la restricción

del dominio. En general, se tiene que

$$\varphi^m(r) = \begin{cases} \phi^m(r); & r \in [r_0, r_2] \\ \psi^m(r); & r \in [r_2, r_4]. \end{cases} \quad (5.106)$$

Aquí también se cumple que $\varphi^m(r_2) = \phi^m(r_2) = \psi^m(r_2)$, por la definición de la función. La expresión $\phi^m(r_2) = \psi^m(r_2)$, resulta ser una ecuación del sistema lineal anterior, la cual ahora podría omitirse. Es así, que esta nueva forma de expresar la función temperatura $T(r, \theta)$ puede reducir la cantidad de variables y ecuaciones en el desarrollo numérico.

Por lo tanto, a continuación se desarrolla el problema de dos anillos usando la función temperatura $T(r, \theta)$ definida anteriormente. Entonces, lo primero es considerar los mismos puntos para la discretización de la variable radial r , como se muestra en la Fig. 5.8. Posterior a ello, se resuelve la ecuación de Laplace en coordenadas polares para cada material, la cual se reduce a una ecuación diferencial para los coeficientes de Fourier. Que en general, es de la siguiente forma

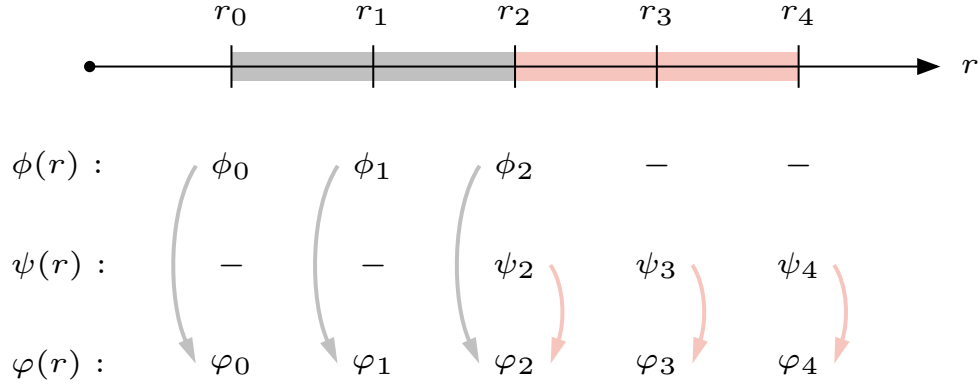
$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi^m(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\varphi^m(r) - \frac{m^2}{r^2}\varphi^m(r) = 0, \quad (5.107)$$

donde ya se tiene claro que los coeficientes $\varphi^m(r)$ van a depender del dominio en el que se trabaje. Luego, aplicando las aproximaciones por diferencias finitas centradas de segundo orden en el punto $r = r_j$, se tiene

$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_j h} \right] \varphi_{j-1}^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_j^2} \right] \varphi_j^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_j h} \right] \varphi_{j+1}^m = 0, \quad (5.108)$$

donde $\varphi^m(r_j + nh) = \varphi_{j+n}^m$. A partir de ahora, se debe tener presente que no se puede aplicar esta ecuación en cualquier punto, debido a la ya mencionada restricción del dominio. Para esto, en la Fig. 5.10 se muestra una equivalencia de los coeficientes de Fourier aplicados en los diferentes puntos de la discretización.

Figura 5.10: Representación esquemática de la equivalencia de los coeficientes de Fourier aplicados en diferentes puntos de la discretización.



Esta representación ayuda a visualizar en qué puntos de la discretización se puede aplicar la ecuación anterior, ya que los puntos considerados deben pertenecer al mismo material, como se ha mencionado repetidas veces. De esta forma, la ecuación puede aplicarse en los puntos r_1 y r_3 , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \underline{r_1}: \quad & \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_1^2} \right] \varphi_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_2^m = 0, \\ \underline{r_3}: \quad & \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_2^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_3^2} \right] \varphi_3^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_4^m = 0. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Con esto, se tendría un sistema de 2 ecuaciones para un total de 3 variables (φ_1^m , φ_2^m y φ_3^m), ya que los coeficientes de Fourier φ_0^m y φ_4^m se conocen por las condiciones de contorno. Por ello, faltaría una ecuación adicional para formar un sistema consistente. En principio, falta considerar las condiciones de interfase, aunque en esta situación ya se cumple con la continuidad de la temperatura, debido a como se define la función $T(r, \theta)$ (además de reducir la cantidad de variables en el sistema). Por este motivo, solo resta aplicar la condición de continuidad del flujo térmico en la interfase

$$-k_1 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_2^-} = -k_2 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_2^+}. \quad (5.110)$$

Reemplazando la función temperatura, se tiene

$$k_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_m \varphi^m(r) e^{im\theta} \right) \Big|_{r_2^-} = k_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_m \varphi^m(r) e^{im\theta} \right) \Big|_{r_2^+} \quad (5.111)$$

$$k_1 \sum_m e^{im\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right) \Big|_{r_2^-} = k_2 \sum_m e^{im\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right) \Big|_{r_2^+}. \quad (5.112)$$

Pasando a restar y agrupando

$$\sum_m e^{im\theta} \left[k_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right)_{r_2^-} - k_2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right)_{r_2^+} \right] = 0. \quad (5.113)$$

De esta forma, debido a que el conjunto de exponenciales $\{\exp(im\theta)\}$ es linealmente independiente, se tienen términos que deben ser igual a 0. Esto es,

$$k_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right)_{r_2^-} - k_2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right)_{r_2^+} = 0. \quad (5.114)$$

En este punto, al igual que en el procedimiento previo, se debe tener en cuenta que no es posible aplicar las aproximaciones por diferencias finitas centradas para este tipo de derivadas. Por este motivo se aplica la aproximación por diferencias finitas hacia atrás para la derivada por la izquierda, y la aproximación por diferencias finitas hacia adelante para la derivada por la derecha, ambas de segundo orden. Con ello, la ecuación anterior se expresa como

$$k_1 \left(\frac{3\varphi_j^m - 4\varphi_{j-1}^m + \varphi_{j-2}^m}{2h} \right)_{j=2} - k_2 \left(\frac{-\varphi_{j+2}^m + 4\varphi_{j+1}^m - 3\varphi_j^m}{2h} \right)_{j=2} = 0, \quad (5.115)$$

y ya que h es un valor mayor a cero, se puede reescribir como

$$(k_1)\varphi_0^m + (-4k_1)\varphi_1^m + (3k_1 + 3k_2)\varphi_2^m + (-4k_2)\varphi_3^m + (k_2)\varphi_4^m = 0. \quad (5.116)$$

Con esto último se tendría 1 ecuación adicional al sistema, que constaría de 3 ecuaciones para un total de 3 incógnitas. De esta forma se tiene un sistema consistente para obtener los coeficientes de Fourier de índice m . Es decir, que para cada índice m se debe resolver

el siguiente sistema lineal,

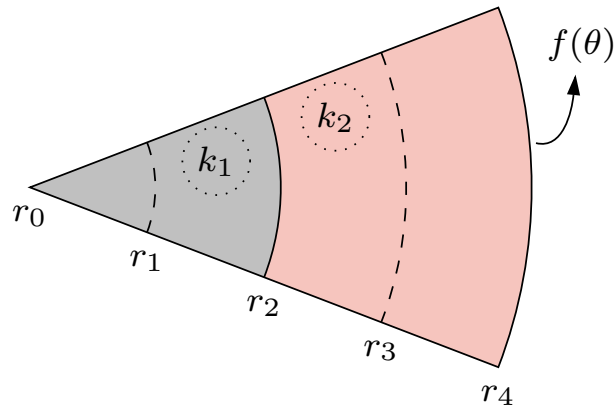
$$\begin{cases} \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_1^2} \right] \varphi_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_2^m &= 0 \\ (k_1)\varphi_0^m + (-4k_1)\varphi_1^m + (3k_1 + 3k_2)\varphi_2^m + (-4k_2)\varphi_3^m + (k_2)\varphi_4^m &= 0 \\ \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_2^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_3^2} \right] \varphi_3^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_4^m &= 0. \end{cases} \quad (5.117)$$

Como se puede observar, esta forma de resolver el problema, da lugar a un sistema lineal de menor orden. Esto será de gran ayuda en el caso de tener varios anillos, como se mencionó anteriormente, ya que dicha disposición formará parte de la solución al problema general del capítulo.

5.3.3. Caso de un disco y un anillo

En esta sección se plantea resolver de forma numérica el problema de un disco y un anillo en contacto, descrito en la subsección 5.3.3. A diferencia de la descripción inicial, convenientemente para el desarrollo numérico, se considera que el radio del disco es igual al ancho radial del anillo. Con esto, similar a los casos anteriores, se discretiza la variable radial r en 5 puntos (r_0, r_1, r_2, r_3 y r_4) como se observa en la Fig. 5.11.

Figura 5.11: Discretización de la variable radial r en 5 puntos. Problema de un disco y un anillo de conductividades térmicas diferentes, con condición de contorno de Dirichlet $f(\theta)$.



En el desarrollo numérico para el problema de dos anillos, se mostraron dos formas de solución. En una se usan dos funciones temperatura, mientras que en la otra solo

se usa una (aunque con ciertas consideraciones). La diferencia entre ambos métodos es que uno reduce el orden del sistema lineal obtenido, que para un caso más complejo es de gran ayuda. Por este motivo, se desarrolla este problema usando el segundo método descrito en la subsección anterior. Entonces, definiendo la función temperatura

$$T(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi^m(r) e^{im\theta}, \quad (5.118)$$

tal que el dominio del coeficiente de Fourier $\varphi^m(r)$, para $r \in [r_0, r_2]$ corresponde al material de conductividad térmica k_1 y para $r \in [r_2, r_4]$ corresponde al material de conductividad térmica k_2 . Para comprender esta forma de desarrollo, se debe tener en cuenta las consideraciones y explicaciones dadas en la subsección anterior.

A continuación, se resuelve la ecuación de Laplace en coordenadas polares para cada material. Esta ecuación se reduce a una ecuación diferencial para los coeficientes de Fourier. En general, es de la siguiente forma

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi^m(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi^m(r) - \frac{m^2}{r^2} \varphi^m(r) = 0. \quad (5.119)$$

Luego, aplicando las aproximaciones por diferencias finitas centradas de segundo orden en el punto $r = r_j$, resulta

$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_j h} \right] \varphi_{j-1}^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_j^2} \right] \varphi_j^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_j h} \right] \varphi_{j+1}^m = 0, \quad (5.120)$$

donde $\varphi^m(r_j + nh) = \varphi_{j+n}^m$. En este punto, se debe recordar que esta ecuación no puede aplicarse en cualquier punto, ya que todos los puntos considerados deben pertenecer al mismo material. Por esto, la ecuación puede aplicarse en los puntos r_1 y r_3 , obteniendo

$$\begin{aligned} \underline{r_1}: \quad & \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_1^2} \right] \varphi_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_2^m = 0, \\ \underline{r_3}: \quad & \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_2^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_3^2} \right] \varphi_3^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_4^m = 0. \end{aligned} \quad (5.121)$$

Con esto, se tendría un sistema de 2 ecuaciones para un total de 4 variables ($\varphi_0^m, \varphi_1^m,$

φ_2^m y φ_3^m), ya que el coeficiente de Fourier φ_4^m es conocido por la condición de contorno. Por esto, faltarían dos ecuaciones adicionales para formar un sistema consistente. El problema surge en el punto r_0 , donde no se puede aplicar la ecuación anterior debido a que se tendría un valor indefinido. Por este motivo, se va a considerar la aproximación planteada en el capítulo III. Dicha aproximación relaciona los coeficientes de Fourier φ_0^m y φ_1^m , por medio de

$$4\varphi_0^m = \alpha_m \varphi_1^m, \quad (5.122)$$

donde

$$\alpha_m = \begin{cases} 4; & m \bmod 4 = 0 \\ 0; & m \bmod 4 \neq 0. \end{cases} \quad (5.123)$$

Con esto se tendría 1 ecuación adicional al sistema, con lo cual serían 3 ecuaciones para un total de 4 variables. Ahora, faltaría considerar las condiciones de interfase, aunque en este caso ya se cumple con la continuidad de la temperatura. Entonces, solo resta aplicar la condición de continuidad del flujo térmico en la interfase, el cual se reduce a

$$k_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right)_{r_2^-} - k_2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right)_{r_2^+} = 0. \quad (5.124)$$

Luego, se aplica la aproximación por diferencias finitas hacia atrás para la derivada por la izquierda y la aproximación por diferencias finitas hacia adelante para la derivada por la derecha, ambas de segundo orden. Con ello, la ecuación anterior se expresa como

$$k_1 \left(\frac{3\varphi_j^m - 4\varphi_{j-1}^m + \varphi_{j-2}^m}{2h} \right)_{j=2} - k_2 \left(\frac{-\varphi_{j+2}^m + 4\varphi_{j+1}^m - 3\varphi_j^m}{2h} \right)_{j=2} = 0, \quad (5.125)$$

y ya que h es un valor mayor a cero, se puede reescribir como

$$(k_1)\varphi_0^m + (-4k_1)\varphi_1^m + (3k_1 + 3k_2)\varphi_2^m + (-4k_2)\varphi_3^m + (k_2)\varphi_4^m = 0. \quad (5.126)$$

Con esto último se tendría 1 ecuación adicional al sistema, que constaría de 4 ecuaciones para un total de 4 variables. De esta forma se tiene un sistema consistente para obtener

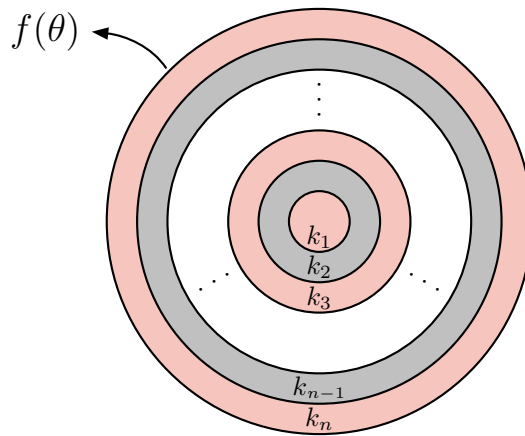
los coeficientes de Fourier de índice m . Es decir, que para cada índice m se debe resolver el siguiente sistema lineal,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 4\varphi_0^m - \alpha_m \varphi_1^m & = & 0 \\ \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_1^2} \right] \varphi_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_2^m & = & 0 \\ (k_1)\varphi_0^m + (-4k_1)\varphi_1^m + (3k_1 + 3k_2)\varphi_2^m + (-4k_2)\varphi_3^m + (k_2)\varphi_4^m & = & 0 \\ \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_2^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_3^2} \right] \varphi_3^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_4^m & = & 0. \end{array} \right. \quad (5.127)$$

5.4. Solución numérica

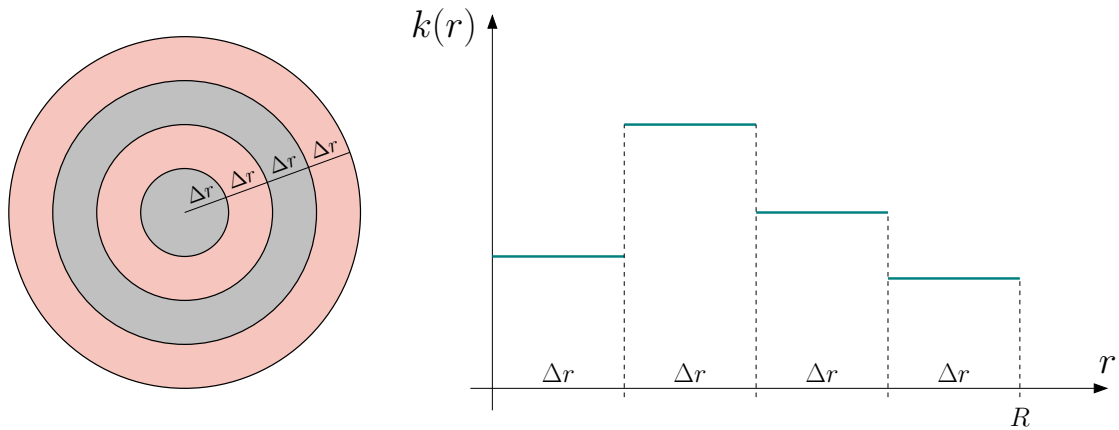
El método que se plantea para resolver el problema principal, descrito al inicio del capítulo, se basa en la hipótesis planteada en la sección 1.2. Para ello se va a considerar la placa circular de radio R como la unión de diferentes materiales en contacto térmico perfecto. La configuración de los materiales consta de un disco central y varios anillos, como se puede observar en la Fig. 5.12, donde convenientemente para el desarrollo numérico se va a considerar que tanto el radio del disco como el ancho radial de los anillos van a ser iguales. Además, todos estos materiales presentan una conductividad térmica constante, pero que es diferente entre ellos.

Figura 5.12: Diagrama esquemático de un disco y varios anillos en contacto, para modelar una placa circular de conductividad térmica con dependencia radial. Placa circular de radio R con condición de contorno de Dirichlet $f(\theta)$.



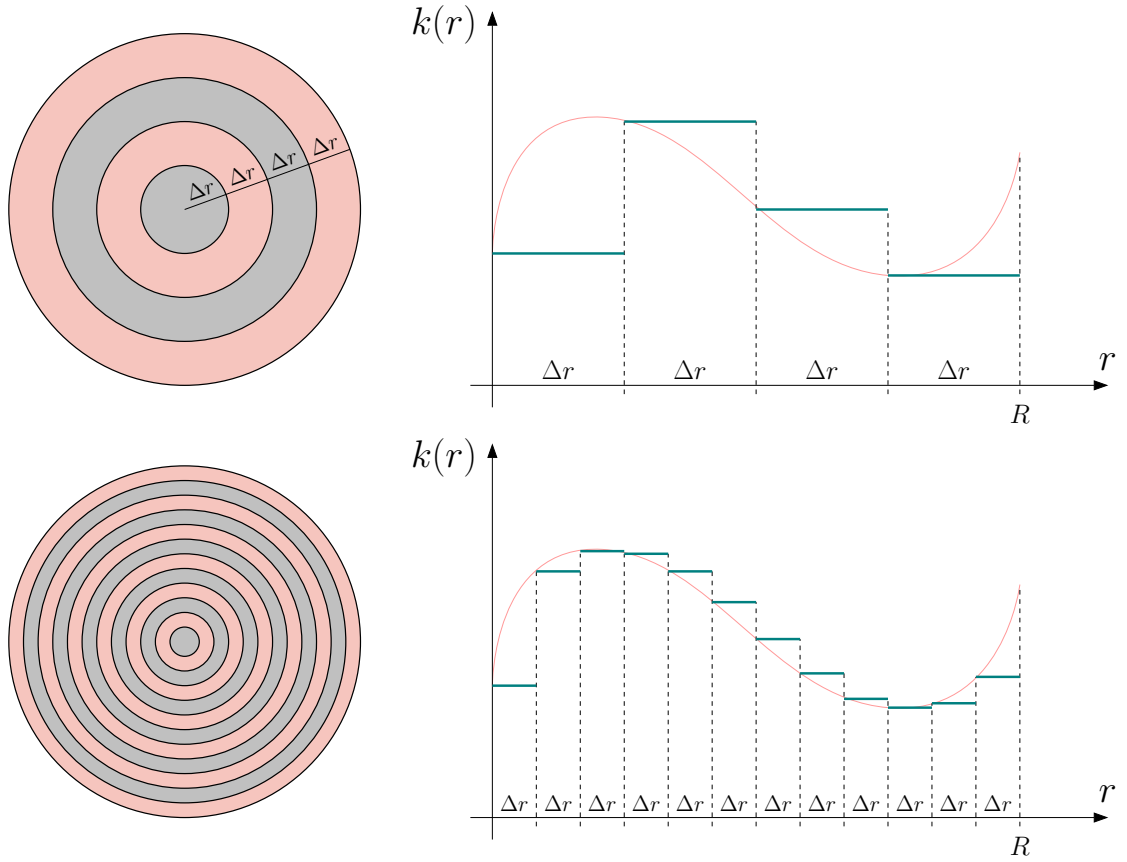
Este planteamiento permite modelar la dependencia radial de la conductividad térmica $k(r)$ para una placa circular, además de admitir diferentes tipos de funciones que representen dicha dependencia. Si se asume este planteamiento, donde cada material tiene una conductividad térmica constante y diferente, la conductividad térmica de la placa estará representada por una función escalonada, como se puede observar en la Fig. 5.13.

Figura 5.13: Diagrama esquemático de la conductividad térmica, representada por una función escalonada, debido al modelo planteado.



Además, si en este planteamiento se consideran muchos anillos, también sería posible modelar una dependencia continua de la conductividad térmica. Ya que si se consideran pocos materiales, como se puede observar en la Fig. 5.14, el perfil de la conductividad térmica no se ajusta a la función a considerar. En cambio, al aumentar el número de anillos, el perfil se acerca más a la función esperada. De esto se puede notar que para mejorar la aproximación a una conductividad térmica continua, se necesitaría añadir más anillos, ya que en este planteamiento solo se requiere un disco central.

Figura 5.14: Diagrama esquemático de como se aproxima la conductividad térmica, considerando varios materiales, a una función continua.



Hasta este punto se ha planteado el modelo para aproximar la dependencia radial de la conductividad térmica, la cual será usada para resolver el problema central del capítulo. Dicho problema consiste en resolver la ecuación del calor en estado estacionario y sin fuentes internas de calor. Donde para una conductividad térmica con dependencia radial, la ecuación es la siguiente

$$\vec{\nabla} \cdot (k(r) \vec{\nabla} T) = 0. \quad (5.128)$$

Al considerarse el modelo para aproximar la dependencia radial de la conductividad térmica, se tienen diferentes materiales de conductividad térmica constante. De esta forma, el problema consistiría en resolver de forma numérica la ecuación de Laplace

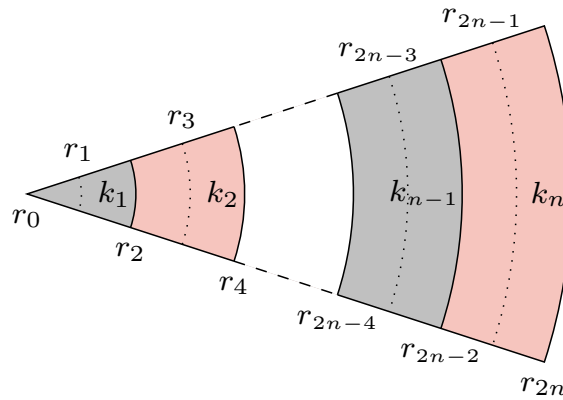
para la temperatura T_i en cada material de conductividad térmica k_i , esto es

$$\nabla^2 T_i = 0. \quad (5.129)$$

Cuyas soluciones deben acoplarse por medio de las condiciones de interfase, además de considerarse la condición de contorno y así obtener una solución al problema. Por este motivo se realizaron los análisis previos (dos anillos en contacto, y un disco y un anillo en contacto), puesto que el método para resolver el problema es un acople de los casos ya mencionados. Por lo tanto, es necesario revisar la sección 5.3 para comprender el desarrollo a continuación.

Como se mencionó al inicio de la sección, tanto el radio del disco como el ancho radial de los anillos son iguales. Con esto, y asumiendo que en total se tienen n materiales, se discretiza la variable radial r , similar a los análisis previos, como se muestra en Fig. 5.15.

Figura 5.15: Discretización de la variable radial r en $2n + 1$ puntos. Problema de un disco y varios anillos de conductividades térmicas diferentes.



A continuación, se define la función temperatura

$$T(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi^m(r) e^{im\theta}, \quad (5.130)$$

tal que el dominio del coeficiente de Fourier $\varphi^m(r)$, para $r \in [r_{2i-2}, r_{2i}]$ corresponde al material de conductividad térmica k_i , donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Ahora, se resuelve

la ecuación de Laplace en coordenadas polares para cada material. Dicha ecuación se reduce a una ecuación diferencial para los coeficientes de Fourier. En general, es de la siguiente forma

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi^m(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\varphi^m(r) - \frac{m^2}{r^2}\varphi^m(r) = 0. \quad (5.131)$$

Luego, aplicando las aproximaciones por diferencias finitas centradas de segundo orden en el punto $r = r_j$, resulta

$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_j h}\right]\varphi_{j-1}^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_j^2}\right]\varphi_j^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_j h}\right]\varphi_{j+1}^m = 0, \quad (5.132)$$

donde $\varphi^m(r_j + qh) = \varphi_{j+q}^m$. En este punto, se debe recordar que esta ecuación no puede aplicarse en cualquier punto, ya que todos los puntos considerados deben pertenecer al mismo material. Por este motivo, la ecuación puede aplicarse en los puntos r_{2i-1} (puntos impares), con lo cual se tendría un sistema de n ecuaciones para un total de $2n$ variables $(\varphi_0^m, \varphi_1^m, \varphi_2^m, \dots, \varphi_{2n-1}^m)$, ya que el coeficiente de Fourier φ_{2n}^m es conocido por la condición de contorno. Por ello, faltarían n ecuaciones adicionales para formar un sistema consistente. Debido a que en el punto r_0 no se puede aplicar la ecuación anterior, se considera la aproximación que relaciona los coeficientes de Fourier φ_0^m y φ_1^m , por medio de

$$4\varphi_0^m = \alpha_m \varphi_1^m, \quad (5.133)$$

donde

$$\alpha_m = \begin{cases} 4; & m \bmod 4 = 0 \\ 0; & m \bmod 4 \neq 0. \end{cases} \quad (5.134)$$

Con esto se tendría 1 ecuación adicional al sistema, con lo cual serían $n + 1$ ecuaciones para un total de $2n$ variables. Ahora, faltaría considerar las condiciones de interfase, aunque ya se cumple con la continuidad de la temperatura. Entonces, solo resta aplicar la condición de continuidad del flujo térmico en las interfases de los materiales,

$$-k_j \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_{2j}^-} = -k_{j+1} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_{2j}^+}, \quad (5.135)$$

donde $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Reemplazando la función temperatura, la ecuación se reduce a

$$k_j \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right)_{r_{2j}^-} - k_{j+1} \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi^m(r) \right)_{r_{2j}^+} = 0. \quad (5.136)$$

Luego, se aplica la aproximación por diferencias finitas hacia atrás para la derivada por la izquierda y hacia adelante para la derivada por la derecha, ambas de segundo orden. Con ello, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$(k_j)\varphi_{2j-2}^m + (-4k_j)\varphi_{2j-1}^m + (3k_j + 3k_{j+1})\varphi_{2j}^m + (-4k_{j+1})\varphi_{2j+1}^m + (k_{j+1})\varphi_{2j+2}^m = 0. \quad (5.137)$$

Con esto último se tendrían $n-1$ ecuaciones adicionales al sistema, que constaría de $2n$ ecuaciones para un total de $2n$ variables. De esta forma se tiene un sistema consistente para obtener los coeficientes de Fourier de índice m . Es decir, que para cada índice m se debe resolver el siguiente sistema lineal,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 4\varphi_0^m - \alpha_m \varphi_1^m & = 0 \\ \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_0^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_1^2} \right] \varphi_1^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_1 h} \right] \varphi_2^m & = 0 \\ (k_1)\varphi_0^m + (-4k_1)\varphi_1^m + (3k_1 + 3k_2)\varphi_2^m + (-4k_2)\varphi_3^m + (k_2)\varphi_4^m & = 0 \\ \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_2^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_3^2} \right] \varphi_3^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_3 h} \right] \varphi_4^m & = 0 \\ \vdots & \\ \left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_{2n-1} h} \right] \varphi_{2n-2}^m + \left[\frac{-2}{h^2} - \frac{m^2}{r_{2n-1}^2} \right] \varphi_{2n-1}^m + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_{2n-1} h} \right] \varphi_{2n}^m & = 0. \end{array} \right. \quad (5.138)$$

Debido a que, en general, los coeficientes de Fourier φ_j^m son complejos, el sistema lineal de ecuaciones es complejo. Por este motivo, se aplica el método descrito en la sección 2.8, el cual resulta en un sistema lineal real, que puede ser resuelto numéricamente mediante el método SOR. Con esto se obtendría un conjunto de coeficientes, que serían reemplazados en la Ec. (5.130). Se debe tener en cuenta que para cada índice m se debe resolver un sistema lineal, aunque es posible reducir el cálculo para valores de $m \geq 0$, debido a que $T(r, \theta)$ es una función real y se cumple que $\varphi_j^{-m} = \varphi_j^{m*}$. De este

manera, la Ec. (5.130) se reescribe como

$$T(r_j, \theta) = \varphi_j^0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_j^m e^{im\theta} + \varphi_j^{m*} e^{-im\theta}). \quad (5.139)$$

Por razones computacionales, la sumatoria anterior no puede ser evaluada hasta el infinito. En consecuencia, es necesario truncar esta sumatoria en m hasta un valor predeterminado m_{max} . Esto es,

$$T(r_j, \theta) = \varphi_j^0 + \sum_{m=1}^{m_{max}} (\varphi_j^m e^{im\theta} + \varphi_j^{m*} e^{-im\theta}). \quad (5.140)$$

De esta forma se restringe la cantidad de sistemas lineales a resolver. Y con ello, es posible obtener la temperatura en diferentes puntos, a lo largo de los diferentes materiales.

5.5. Análisis de solución

En la sección anterior se ha descrito el método numérico desarrollado a partir de la hipótesis propuesta. Este método de solución se implementó en un programa en Fortran 90 denominado *LSPC-2*, desarrollado íntegramente en este trabajo y disponible en Github (Carreño, 2024b). Este programa brinda la distribución de temperaturas en una placa circular de radio $R = 1$, con una condición de contorno de Dirichlet $f(\theta)$ y una conductividad térmica con dependencia radial $k(r)$, las cuales deben ser ingresadas antes de ejecutar el programa. Al ejecutar *LSPC-2* para obtener la solución al problema, es necesario indicar los parámetros establecidos en el método, los cuales son el valor de truncamiento de la sumatoria m_{max} y el número de materiales considerados n . Para cada par de parámetros indicados se obtiene una solución, la cual puede representarse en un mapa de calor.

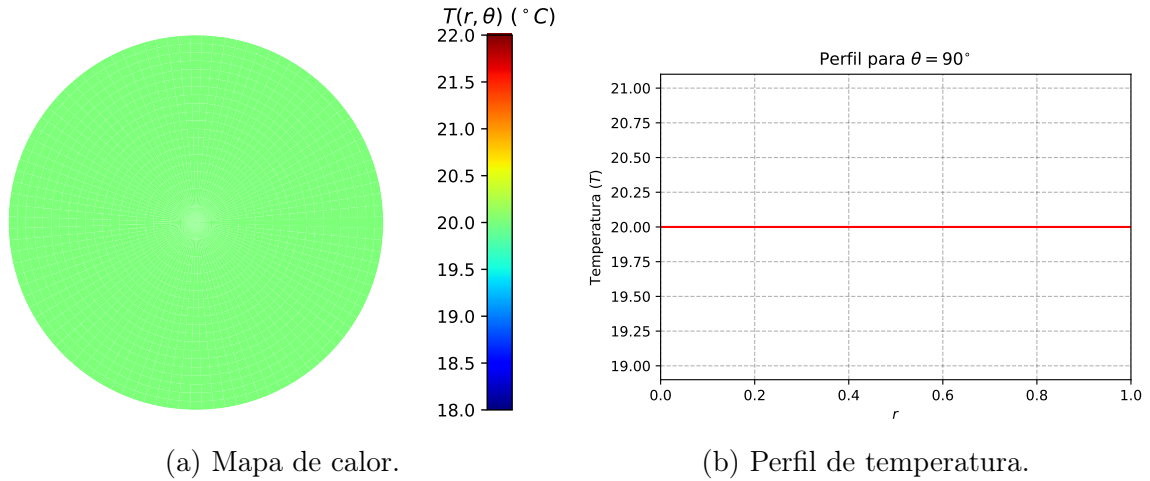
Para mostrar las soluciones y notar como afecta que la conductividad térmica presente una dependencia radial, adicional al mapa de calor de la solución, se muestra un perfil de temperatura a lo largo del radio para un ángulo fijo (en este caso se va a

considerar 90°). Por esto, se presentan las soluciones para 3 condiciones de contorno diferentes, donde se analizan diversas funciones de conductividad térmica. Dichas funciones son de prueba, ya que no necesariamente modelan la conductividad de algún material real.

5.5.1. Solución para una CC constante

En esta sección, se obtiene la solución numérica a partir de una condición de contorno constante, $f_C(\theta) = 20$. Sin embargo, para facilitar una comparación de resultados, también se presentará la solución numérica al problema de conductividad térmica constante, visto en el capítulo III, para la misma condición de contorno $f_C(\theta)$. De esta manera, se podrá observar el efecto de una conductividad térmica con dependencia radial. La Fig. 5.16 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC con los parámetros $n_r = 30$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° .

Figura 5.16: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante, considerando los parámetros $n_r = 30$, $m_{max} = 10$ y la condición de contorno f_C en la ejecución del programa LSPC. (a) Mapa de calor. (b) Perfil de temperatura radial en un ángulo fijo de 90° .

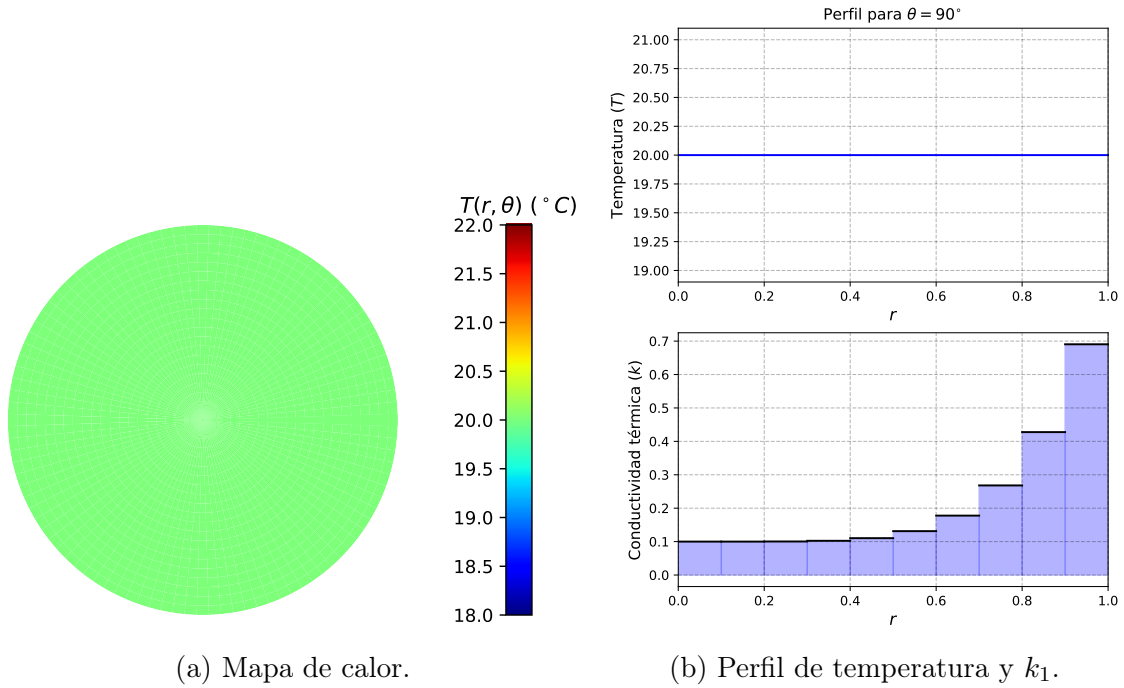


Para la solución numérica al problema del capítulo, se utilizará la conductividad térmica con dependencia radial, dada por,

$$k_1(r) = r^5 + 0.1 . \quad (5.141)$$

Esto representa una placa circular en la que su conductividad térmica aumenta conforme se aleja del centro. La Fig. 5.17 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC-2 con los parámetros $n = 10$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , así como el perfil de la función conductividad térmica k_1 .

Figura 5.17: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_C y conductividad térmica $k_1(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor. (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_1 .



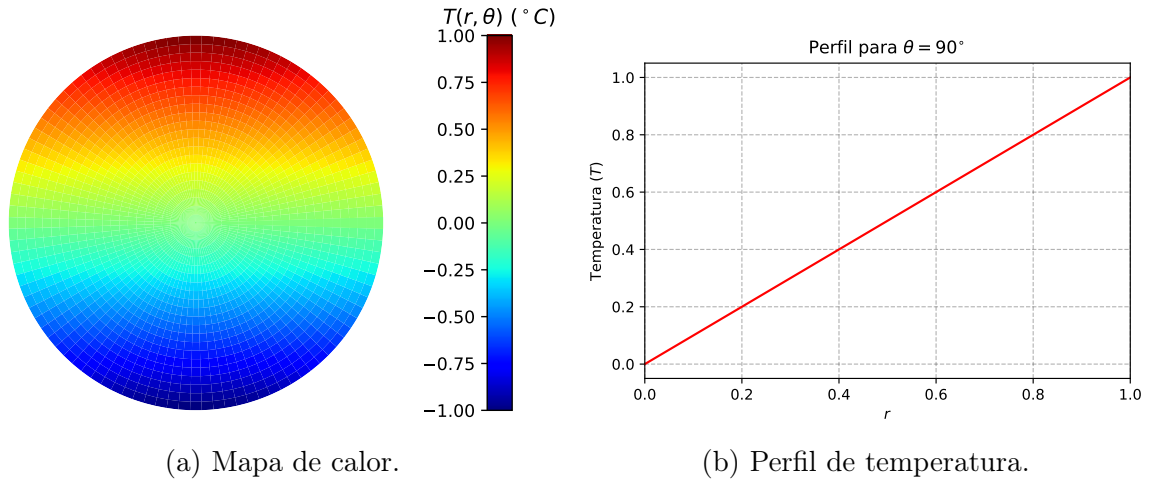
En este caso se observa que el perfil de temperatura para una conductividad térmica con dependencia radial no cambia respecto al de una conductividad térmica constante. Y para entender mejor por qué no hay un efecto de la conductividad térmica con dependencia radial, se va a analizar un ejemplo. En este ejemplo se va a considerar la evolución temporal de la temperatura en la placa circular con condición de contorno constante, el cual presenta una distribución de temperaturas inicial no constante. Es decir, que inicialmente, existe un gradiente de temperatura dentro de la placa circular. Entonces, al tener esta condición inicial, se debe tener en cuenta que se van a generar flujos térmicos entrantes y/o salientes de la placa. Esto hace que, en el tiempo, la tem-

peratura de toda la placa se modifique, menos en el contorno ya que ahí la temperatura es fija. Además, se tiene que recordar, en este caso la CC es constante y no establece un gradiente de temperatura permanente en el tiempo, dentro de la placa. Por lo tanto, al pasar el tiempo, los flujos dentro de la placa hacen que el perfil se estabilice y tienda a una función constante (con el valor de la CC) en un estado estacionario.

5.5.2. Soluciones para la PCCD

En esta sección, se obtienen las soluciones numéricas a partir de la PCCD, $f_P(\theta) = \sin(\theta)$. Sin embargo, para facilitar una comparación de resultados, también se presentará la solución numérica al problema de conductividad térmica constante, visto en el capítulo III, para la misma condición de contorno $f_P(\theta)$. De esta manera, se podrá observar el efecto de una conductividad térmica con dependencia radial. La Fig. 5.18 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC con los parámetros $n_r = 30$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° .

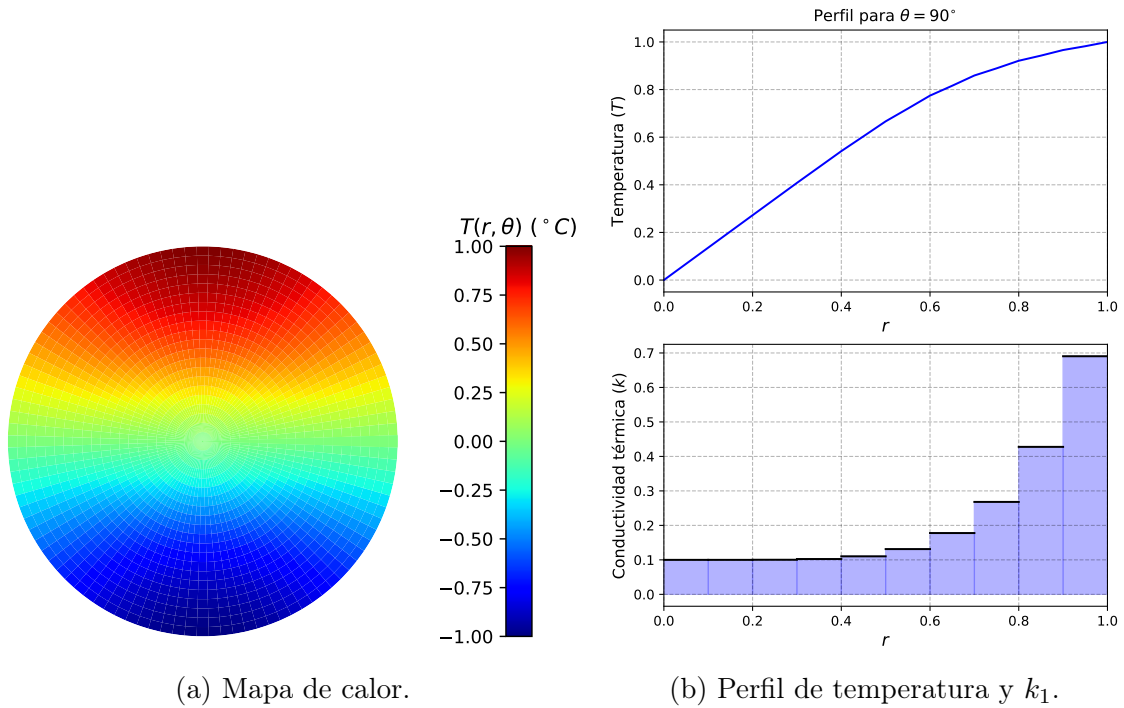
Figura 5.18: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante, considerando los parámetros $n_r = 30$, $m_{max} = 10$ y la condición de contorno f_P en la ejecución del programa LSPC. (a) Mapa de calor. (b) Perfil de temperatura radial en un ángulo fijo de 90° .



Para la solución al problema del capítulo, se van a utilizar tres conductividades térmicas con dependencia radial.

1. Conductividad térmica $k_1(r) = 0.1 + r^5$. La Fig. 5.19 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC-2 con los parámetros $n = 10$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , así como el perfil de la función conductividad térmica k_1 .

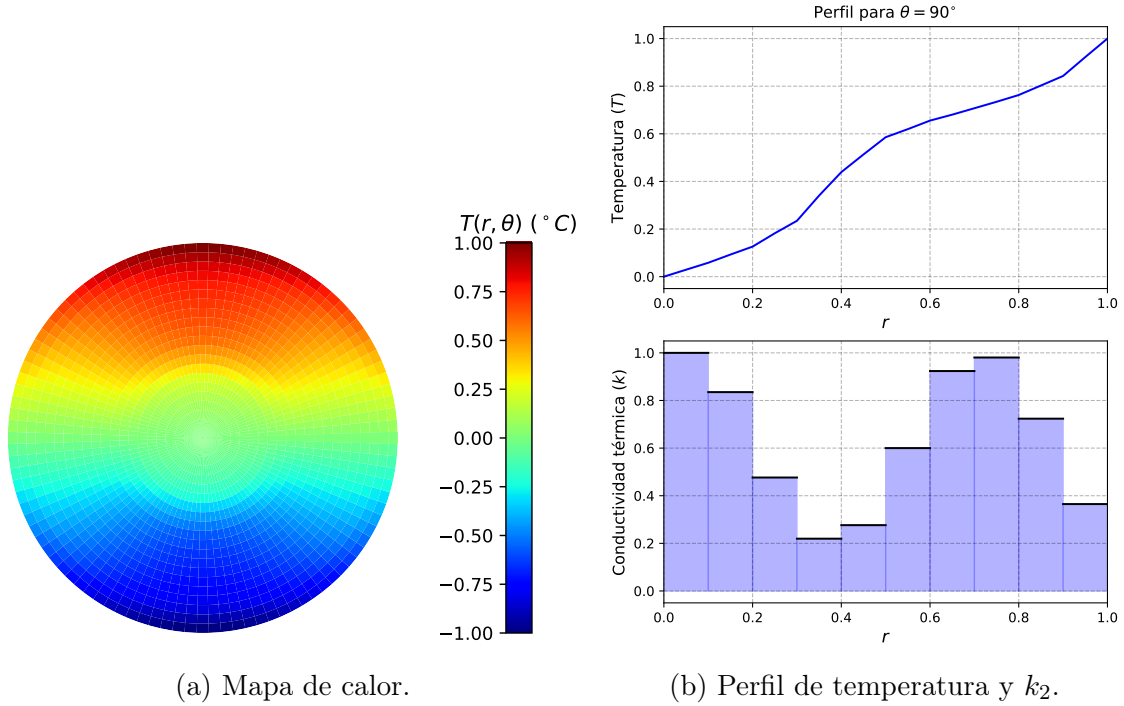
Figura 5.19: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_P y conductividad térmica $k_1(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_1 .



En este caso se observa que el perfil de temperatura para una conductividad térmica con dependencia radial es diferente al de una conductividad térmica constante. Además, se puede notar que cuando aumenta la conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un menor gradiente, caso contrario de cuando disminuye la conductividad térmica, donde el perfil de temperatura presenta un mayor gradiente.

2. Conductividad térmica $k_2(r) = 0.6 + 0.4 \cos(3\pi r)$. La Fig. 5.20 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC-2 con los parámetros $n = 10$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , así como el perfil de la función conductividad térmica k_2 .

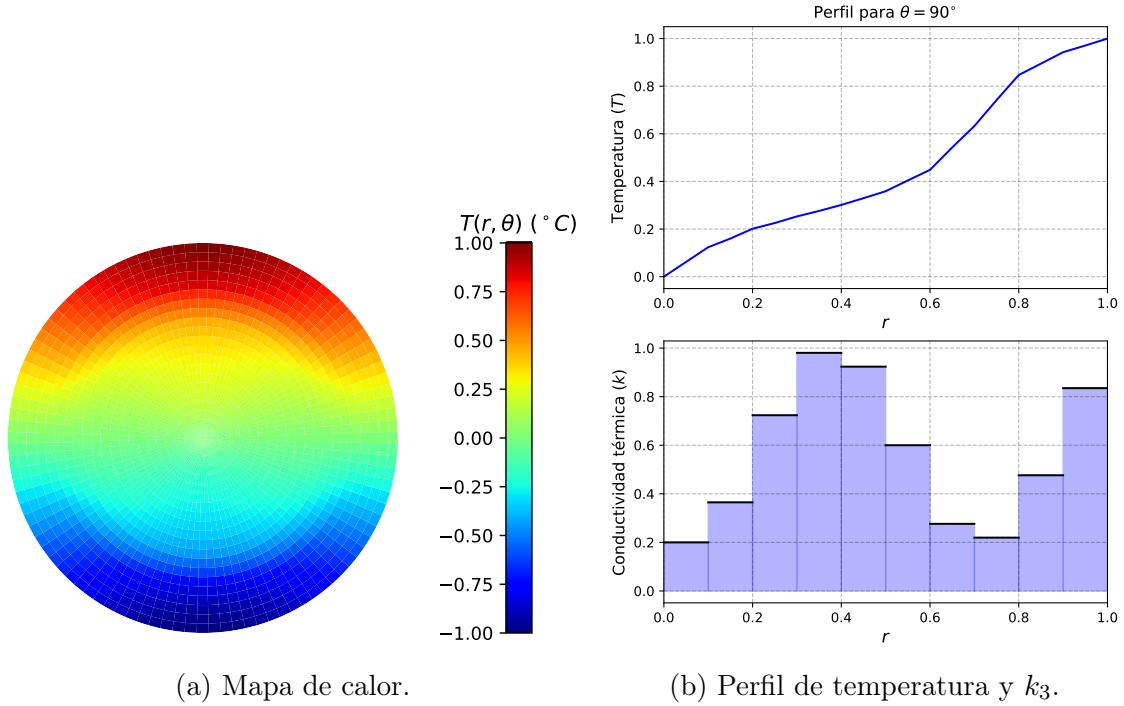
Figura 5.20: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_P y conductividad térmica $k_2(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_2 .



Se puede observar que a mayor conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un menor gradiente, mientras que a menor conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un mayor gradiente.

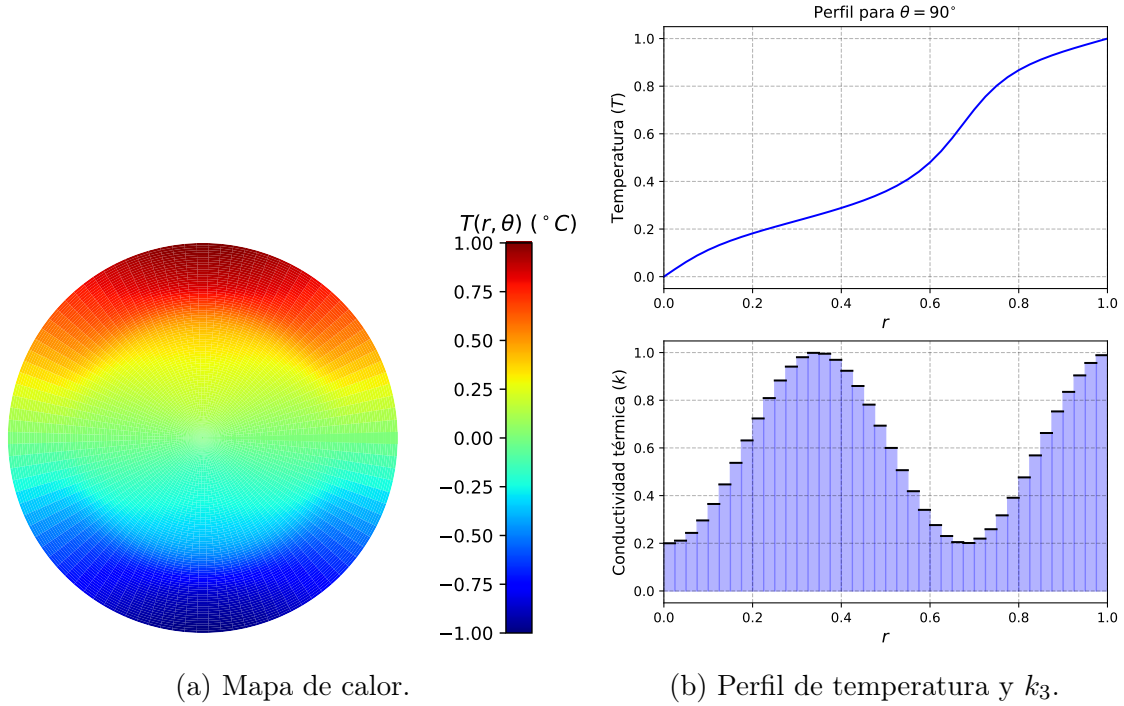
3. Conductividad térmica $k_3(r) = 0.6 + 0.4 \sin(3\pi r - 0.5\pi)$. La Fig. 5.21 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC-2 con los parámetros $n = 10$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , así como el perfil de la función conductividad térmica k_3 .

Figura 5.21: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_P y conductividad térmica $k_3(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_3 .



Se puede observar que a mayor conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un menor gradiente, mientras que a menor conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un mayor gradiente. Como también se puede notar, el perfil de la conductividad térmica resulta ser una función escalonada, pero si se aumenta el número de materiales el perfil se puede aproximar a una función continua. Por ello, la Fig. 5.22 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC-2 con los parámetros $n = 40$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , así como el perfil de la función conductividad térmica k_3 .

Figura 5.22: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 40$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_P y conductividad térmica $k_3(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_3 .

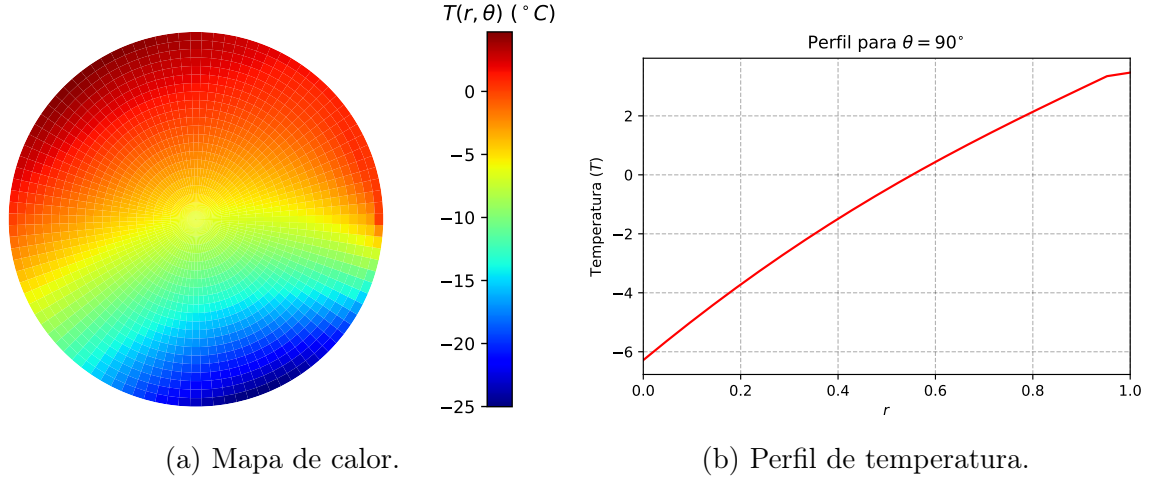


En este caso, se observa que efectivamente el perfil de la conductividad térmica se aproxima a una función continua. Además, mejora el perfil de temperatura.

5.5.3. Soluciones para la SCCD

En esta sección, se obtienen las soluciones numéricas a partir de la SCCD, $f_S(\theta) = (1 + \theta^2) \sin(\theta)$. Sin embargo, para facilitar una comparación de resultados, también se presentará la solución numérica al problema de conductividad térmica constante, visto en el capítulo III, para la misma condición de contorno $f_S(\theta)$. De esta manera, se podrá observar el efecto de una conductividad térmica con dependencia radial. La Fig. 5.23 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC con los parámetros $n_r = 30$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° .

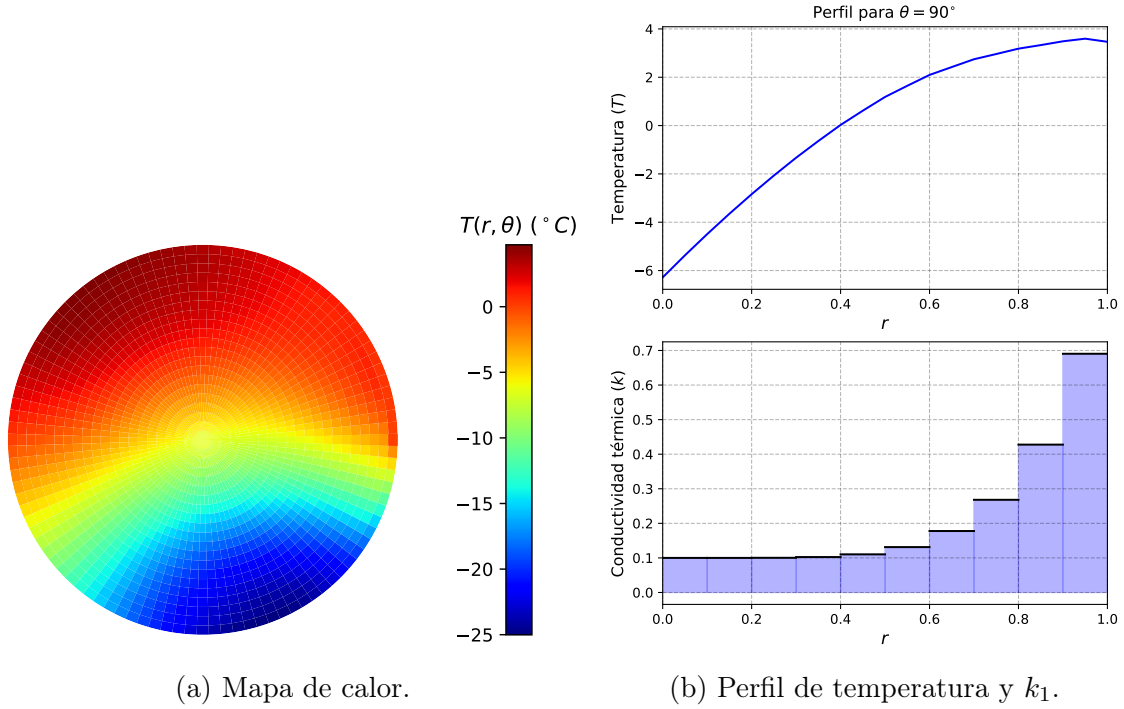
Figura 5.23: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante, considerando los parámetros $n_r = 30$, $m_{max} = 10$ y la condición de contorno f_S en la ejecución del programa LSPC. (a) Mapa de calor. (b) Perfil de temperatura radial en un ángulo fijo de 90° .



Para la solución al problema del capítulo, se van a utilizar tres conductividades térmicas con dependencia radial.

1. Conductividad térmica $k_1(r) = 0.1 + r^5$. La Fig. 5.24 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC-2 con los parámetros $n = 10$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , así como el perfil de la función conductividad térmica k_1 .

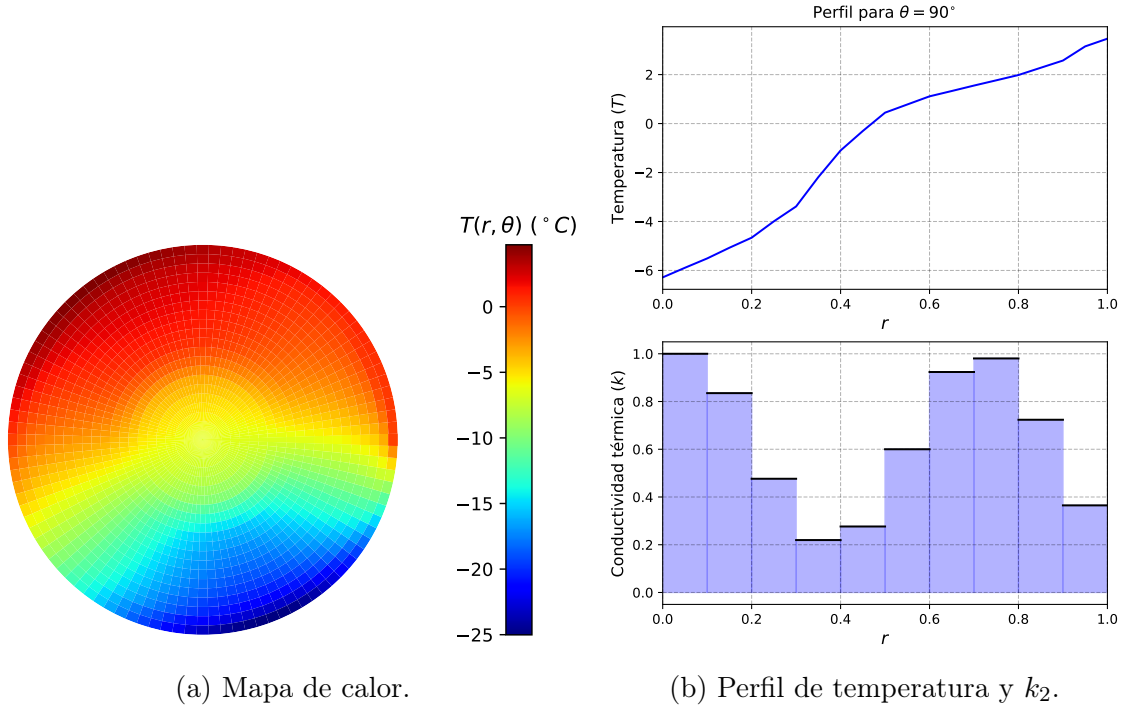
Figura 5.24: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_S y conductividad térmica $k_1(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_1 .



En este caso se observa que el perfil de temperatura para una conductividad térmica con dependencia radial es diferente al de una conductividad térmica constante. Se puede notar que cuando aumenta la conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un menor gradiente, caso contrario de cuando disminuye la conductividad térmica, donde el perfil de temperatura presenta un mayor gradiente.

2. Conductividad térmica $k_2(r) = 0.6 + 0.4 \cos(3\pi r)$. La Fig. 5.25 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC-2 con los parámetros $n = 10$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , así como el perfil de la función conductividad térmica k_2 .

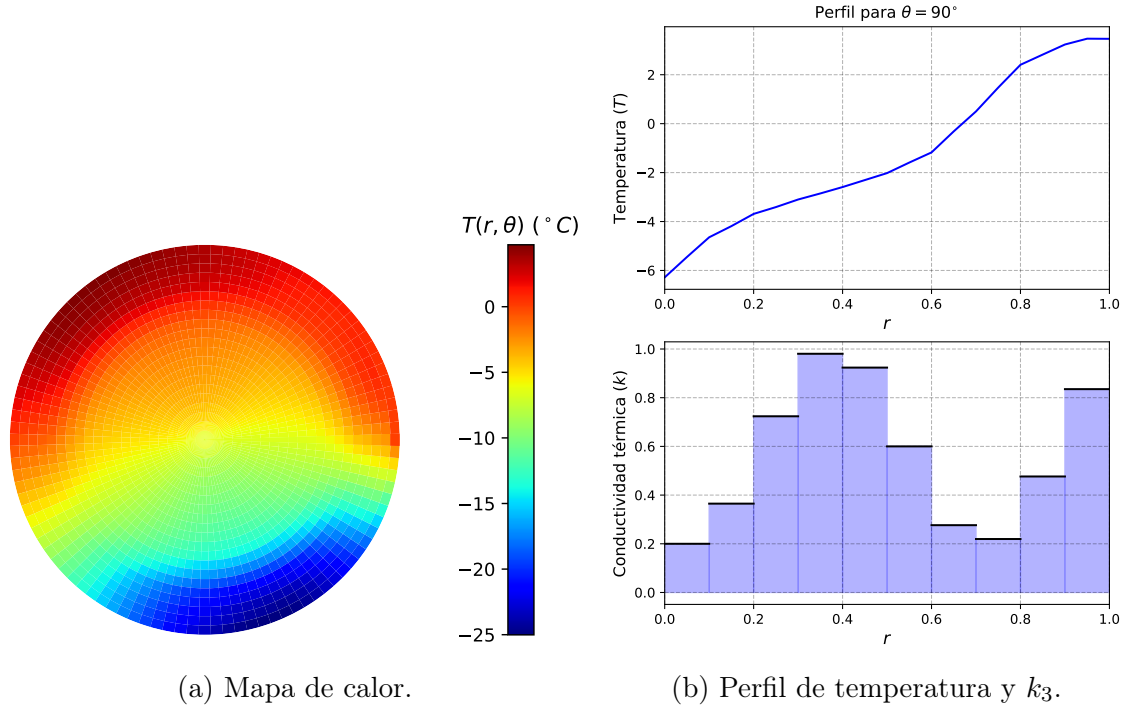
Figura 5.25: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_S y conductividad térmica $k_2(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_2 .



Se puede observar que a mayor conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un menor gradiente, mientras que a menor conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un mayor gradiente.

3. Conductividad térmica $k_3(r) = 0.6 + 0.4 \sin(3\pi r - 0.5\pi)$. La Fig. 5.26 muestra el mapa de calor obtenido al ejecutar el programa LSPC-2 con los parámetros $n = 10$ y $m_{max} = 10$. Además, se muestra el perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , así como el perfil de la función conductividad térmica k_3 .

Figura 5.26: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$, condición de contorno f_S y conductividad térmica $k_3(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2. (a) Mapa de calor, (b) Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° y función conductividad térmica k_3 .

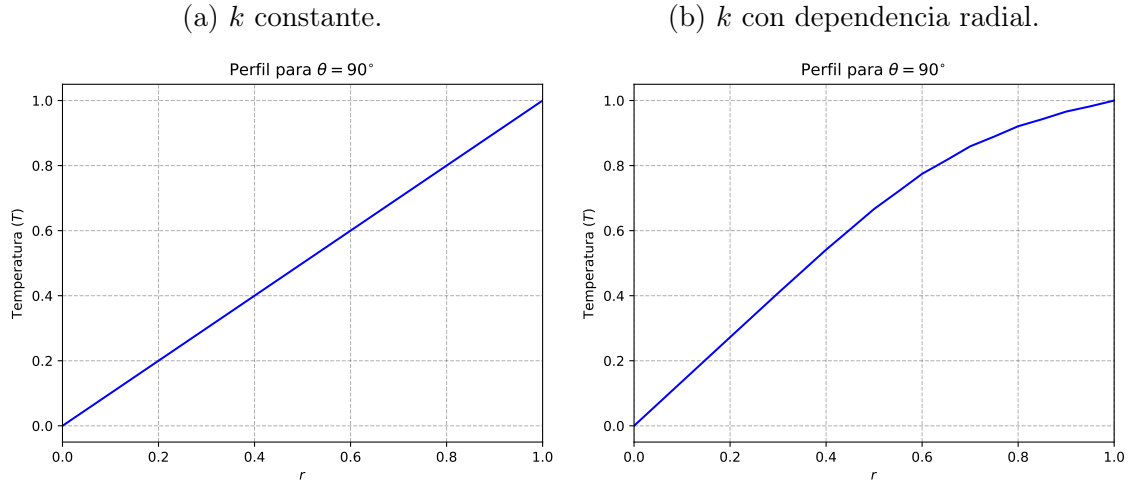


Se puede observar que a mayor conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un menor gradiente, mientras que a menor conductividad térmica, el perfil de temperatura presenta un mayor gradiente.

Luego de analizar los mapas de calor y perfiles de temperatura a ángulo fijo, se pueden apreciar algunas similitudes. En los casos de conductividad térmica constante, que representan las soluciones del capítulo III, la condición de contorno es el único factor que establece la distribución de temperaturas. Para los casos de conductividad térmica con dependencia radial (en los que la condición de contorno no es una constante), se observa una variación en los perfiles a ángulo fijo, respecto a las soluciones de conductividad térmica constante. Esta variación se puede apreciar en la Fig. 5.27, donde se presentan los perfiles de temperatura para los casos de conductividad térmica constante y con dependencia radial. Además, se observa que la condición de contorno no es el único factor que establece la distribución de temperaturas, ya que también

depende de la conductividad térmica, como se observa en los perfiles de temperatura a ángulo fijo.

Figura 5.27: Perfil de temperatura radial para un ángulo fijo de 90° , para la condición de contorno f_P . (a) Problema de conductividad térmica constante, considerando los parámetros $n_r = 30$, $m_{max} = 10$ en la ejecución del programa LSPC. (b) Problema de conductividad térmica con dependencia radial, considerando los parámetros $n = 10$, $m_{max} = 10$ y $k_1(r)$ en la ejecución del programa LSPC-2.



Cuando se menciona a la conductividad térmica de un material, se hace referencia a su capacidad para transferir el calor a través de él. A pesar de ello, cuando se resuelve el problema estacionario para un solo material de conductividad térmica constante, esta no tiene relevancia, ya que al ser constante queda fuera de la ecuación. Por lo tanto, cuando se aplica un gradiente de temperatura a un material, independientemente de su conductividad térmica (siempre y cuando sea una constante), el resultado de la distribución de temperaturas es el mismo. En cambio, si se analiza un sistema de diferentes materiales de conductividad térmica constante en contacto (que modela el problema del capítulo), la conductividad térmica toma una gran relevancia como se ha visto en los resultados. Esto es debido a una de las condiciones de interfase para el contacto térmico perfecto, la cual establece la continuidad del flujo térmico. Es decir, que el flujo térmico saliente de un material ($k_1 \vec{\nabla} T_1$) es igual al flujo térmico entrante al material en contacto ($k_2 \vec{\nabla} T_2$). Por este motivo, el gradiente de temperatura en cada material es diferente, donde para una conductividad térmica baja se debe tener un gradiente de temperatura grande y viceversa para que se cumpla con la igualdad.

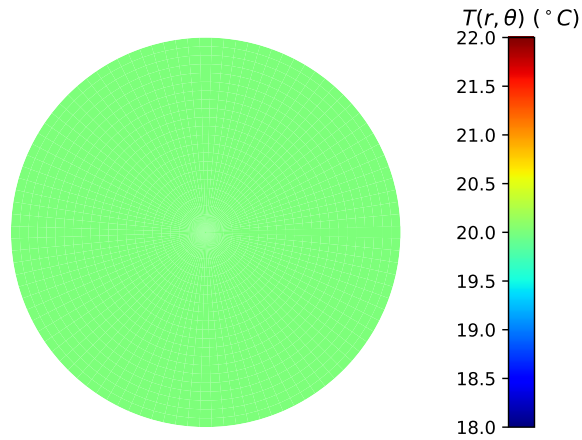
Conclusiones

- En el capítulo II se revisaron los conceptos físicos relacionados al transporte de calor como son, por ejemplo, el flujo térmico, la ley de Fourier y la ecuación del calor. También se revisaron conceptos matemáticos como la expansión de Fourier y los operadores diferenciales en coordenadas polares. Además se repasa el método de diferencias finitas, así como la forma de obtener la solución a un sistema lineal complejo.
- En el capítulo III se presenta el problema de conductividad térmica constante, para el cual se halló una solución analítica, lo que permitió hacer una comparación con la solución numérica. Para esta solución numérica, se propuso un método que aplica la expansión de Fourier a la temperatura, el cual reduce la ecuación del calor de un problema bidimensional a uno unidimensional, donde luego es posible aplicar el método de diferencias finitas. El desarrollo de este método siguió un proceso donde inicialmente se buscó la solución considerando 2 puntos en la dirección radial, lo que permitió un mejor entendimiento y consolidación del método. Posteriormente se generalizó la solución para n puntos en la dirección radial. Este método desarrollado se implementó en el programa LSPC, desarrollado en Fortran 90, el cual brinda la distribución de temperaturas en una placa circular. Por último, el programa LSPC es validado haciendo un análisis de errores, donde se muestra el rango de valores para el cual el error está acotado y decrece apropiadamente.

- En el capítulo IV se presenta el problema de conductividad térmica dependiente de la temperatura, el cual resultó ser un problema no lineal que pudo ser resuelto por medio de la transformación de Kirchhoff. Dicha transformación permitió pasar de una ecuación no lineal para la temperatura, a una ecuación lineal para una nueva variable. Esta ecuación para la nueva variable es la expresión resuelta en el capítulo III, lo que hace que pueda ser resuelto por el método ya desarrollado. Con esta solución de la nueva variable es posible retornar a la variable de interés, la temperatura. Es así que se puede resolver numéricamente el problema no lineal por medio de una transformación. Aunque no fue el único método probado, como se detalla en el anexo A, que muestra el primer intento de solución del problema.
- En el capítulo V se presentó el problema de conductividad térmica con dependencia radial. Para este problema se planteó modelar la dependencia radial por medio de un conjunto de materiales en contacto, los cuales presentan una conductividad térmica constante, pero diferente entre ellos. En los capítulos previos se usa un método que consta de aplicar la expansión de Fourier a la temperatura, el cual ayuda a reducir el problema, es por ello que se desarrolla un método muy similar al ya visto en el capítulo III, donde luego se aplica el método de diferencias finitas. Este método desarrollado se implementó en el programa LSPC-2 desarrollado en Fortran 90, el cual brinda la distribución de temperaturas a lo largo de estos materiales en contacto. Este modelo permite resolver problemas donde la conductividad térmica es una función escalonada, o aproximar el caso de una función continua. Los resultados obtenidos se pueden agrupar en 4 casos diferentes, donde se puede evaluar la influencia de la condición de contorno (CC) y la conductividad térmica (k).

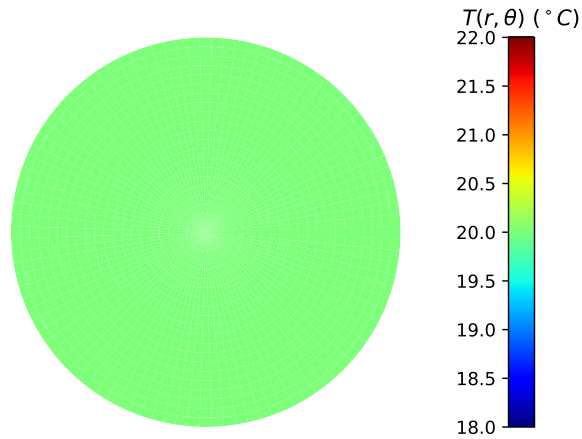
1. CC y k constante.- En este caso, la conductividad térmica no tiene relevancia en el problema (puesto que al ser constante queda fuera de la ecuación). Entonces, ya que la CC no presenta un gradiente de temperatura, el perfil de temperaturas es una constante.

Figura 5.28: Solución numérica al problema de conductividad térmica y condición de contorno constantes. Parámetros de solución dados en la Fig. 5.16.



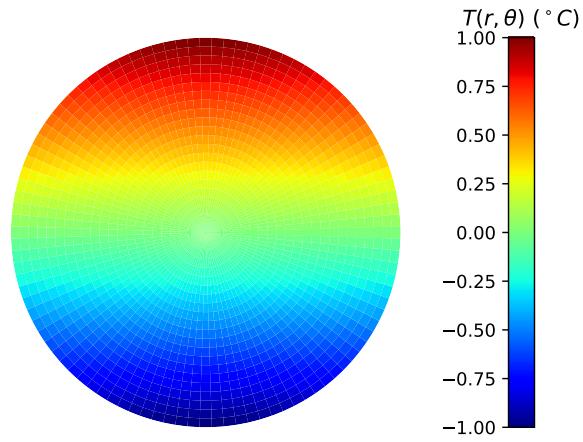
- 2. CC constante y k con dependencia radial.-** En este caso, tampoco existe un gradiente de temperatura dado por la CC, por lo que el perfil de temperatura sigue siendo constante y no se tiene influencia de la conductividad térmica con dependencia radial.

Figura 5.29: Solución numérica al problema de conductividad térmica con dependencia radial y condición de contorno no constante f_C . Parámetros de solución dados en la Fig. 5.17.

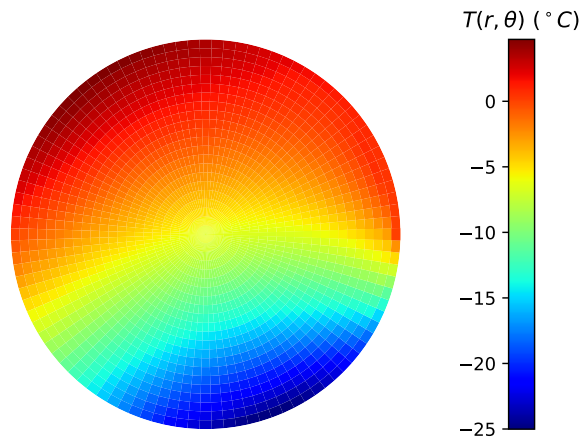


- 3. CC no constante y k constante.-** En este caso el perfil de temperaturas está determinado por la CC dada. Donde para cada CC se tiene un perfil diferente.

Figura 5.30: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante y condición de contorno no constante. Parámetros de solución dados en las Fig. 5.18 y 5.23.



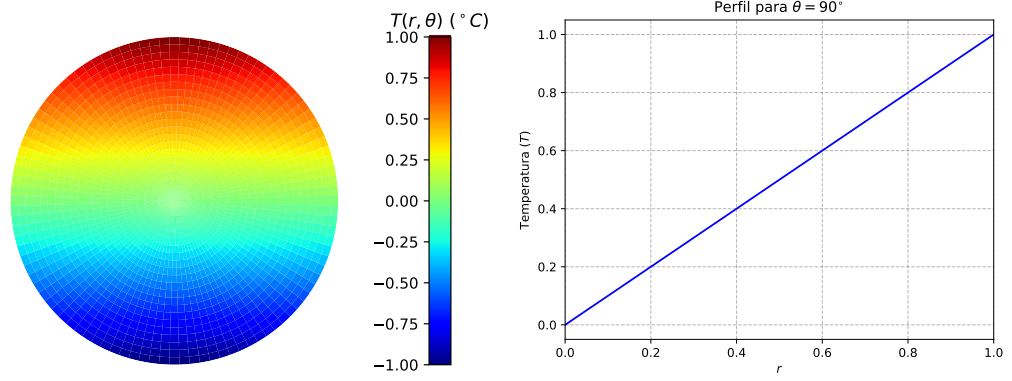
(a) Condición de contorno f_P .



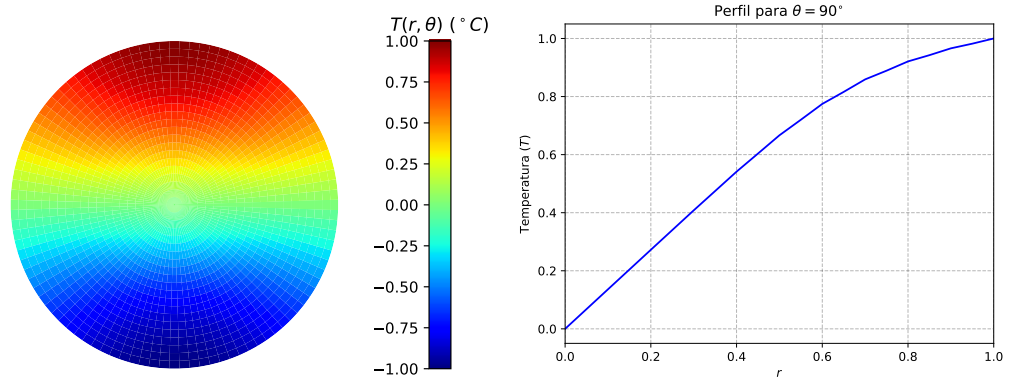
(b) Condición de contorno f_S .

4. CC no constante y k con dependencia radial.- En este caso la CC establece el gradiente de temperatura para generar el perfil, el cual se ve afectado por las conductividades térmicas de los materiales considerados.

Figura 5.31: Solución numérica al problema de conductividad térmica constante y con dependencia radial, con condición de contorno no constante f_P . (a) Parámetros de solución dados en la Fig. 5.18. (b) Parámetros de solución dados en la Fig. 5.19.



(a) Conductividad térmica constante.



(b) Conductividad térmica con dependencia radial.

Bibliografía

- Anton, H. (2014). *Elementary Linear Algebra and Applications*. Wiley, 11th edition.
- Arfken, G., Weber, H., and Harris, F. (2011). *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science.
- Askeland, Donald y Wright, W. (2017). *Ciencia e ingeniería de los materiales*. Cengage Learning, 7ma edition.
- Bergman, T., Lavine, A., and Incropera, F. (2011). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 7th Edition*. John Wiley & Sons, Incorporated.
- Boyce, W.E. DiPrima, R. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 10th Edition*. Wiley.
- Carreño, J. (2024a). LSPC. Repositorio Github. <https://github.com/JeanCLR/LSPC>.
- Carreño, J. (2024b). LSPC-2. Repositorio Github. <https://github.com/JeanCLR/LSPC-2>.
- Chapra, Steven y Canale, R. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill, 7ma edition.
- Edalatpour, V., Hezari, D., and Khojasteh Salkuyeh, D. (2015). Accelerated generalized sor method for a class of complex systems of linear equations. *Mathematical Communications*, 20:37–52.

- Fourier, J. B. J. (2009). *The Analytical Theory of Heat*. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge University Press.
- Givoli, D. (1993). Short communication, the kirchhoff transformation in finite element method. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 3:473–477. DOI: 10.1108/eb017543.
- Hahn, D. and Özisik, M. (2012). *Heat Conduction*. Wiley.
- LeVeque, R. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Mañas, Manuel y Martínez, L. (2015). Ecuaciones diferenciales II. Departamento de Física Teórica - Universidad Complutense de Madrid. <https://eprints.ucm.es/31464/1/Manuel.pdf>.
- Nagesh, A., Rashwan, O., and Abu-Ayyad, M., editors (2018). *Optimization of the Composite Airplane Fuselage for an Optimum Structural Integrity*, volume 1: Advances in Aerospace Technology of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. DOI: 10.1115/IMECE2018-88215.
- OneAir (2023). ¿Qué es el fuselaje de un avión? Grupo One Air. <https://www.oneair.es/que-es-el-fuselaje-de-un-avion/>.
- Özisik, M. (1989). *Boundary Value Problems of Heat Conduction*. Dover Publications.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill.
- Smith, B. (2015). Materials used in aircraft fuselages. AZO Materials. <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=12084>.

Anexos

Anexo A:	Primer intento de solución	1
A.1	Aplicando la expansión de Fourier	1
A.2	Relación entre coeficientes	3
A.3	Analizando la ecuación	4
Anexo B:	Desarrollo de propiedades y ecuaciones	15
B.1	Desarrollo de la Ec. (4.1)	15
B.2	Producto interno de dos funciones	18
B.3	Coficiente del producto de 2 funciones	19

Anexo A

Primer intento de solución

En este anexo se muestra el primer intento de solución al problema de la conductividad térmica dependiente de la temperatura, planteado en el capítulo IV. Este intento de solución se basó en aplicar la expansión de Fourier a la temperatura y la conductividad térmica, teniendo dos expansiones en una misma ecuación. Posterior a ello, se busca una relación entre los coeficientes de cada expansión con el fin de reescribir nuestra ecuación en términos de una sola variable. Finalmente se desarrolla la ecuación para encontrar un sistema que permita obtener una solución.

A.1. Aplicando la expansión de Fourier

Como se menciona al inicio del capítulo IV, la ecuación que describe el problema planteado es la Ec. (4.1). En esta ecuación se considera que la conductividad térmica depende de la temperatura, lo que resulta en una ecuación diferencial no lineal, por lo cual no posee una solución analítica. Por este motivo se propone un método para obtener una solución numérica, que sigue el enfoque usado en la sección 3.2.1.

Antes de continuar con ello, es fundamental conocer cual es la dependencia que presenta la conductividad térmica con la temperatura. En la sección 4.1 se presentó un caso particular donde la conductividad térmica k es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura T , dada en la Ec. (4.4). Si en esta expresión se reemplazan todos los términos que se mantienen constantes por una constante B , la ecuación se puede

reescribir como

$$k = B\sqrt{T}. \quad (\text{A.1})$$

De esta forma, ya es posible continuar con el desarrollo de una solución. Como se mencionó anteriormente, el método propuesto seguirá el enfoque de la sección 3.2.1. Por este motivo, se plantea aplicar la expansión de Fourier tanto a la temperatura como a la conductividad térmica. Esto debido a que, por la geometría del problema, ambas funciones pueden expresarse en coordenadas polares, es decir, $T(r, \theta)$ y $k(r, \theta)$, las cuales deben ser periódicas respecto a la variable θ . De este modo las expansiones resultantes son,

$$T(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{T}^l(r) e^{il\theta}, \quad (\text{A.2})$$

$$k(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m(r) e^{im\theta}. \quad (\text{A.3})$$

Donde los coeficientes $\hat{T}$ y $\hat{k}$ son, en general, números complejos. Además, estos coeficientes deben ser funciones de la variable r , ya que las funciones temperatura y conductividad térmica dependen de dos variables y las expansiones se realizaron respecto a la variable θ . Seguido a esto, corresponde reemplazar las expansiones de Fourier en la Ec. (4.1) para luego ser desarrollada. Debido a que este desarrollo resulta ser extenso, se encuentra en el anexo B.1. Finalmente la ecuación luego de reemplazar las expansiones de Fourier, se reduce a

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\hat{k}^m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{T}^l}{\partial r^2} - \frac{l^2 \hat{T}^l}{r^2} \right) + \left(\frac{\partial \hat{k}^m}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} \right) - \frac{ml \hat{k}^m \hat{T}^l}{r^2} \right] e^{im\theta} e^{il\theta}. \quad (\text{A.4})$$

A.2. Relación entre coeficientes

Al aplicar la expansión de Fourier se obtiene la Ec. (A.4), donde hay un coeficiente de Fourier para cada función, teniendo hasta el momento dos conjuntos de variables en la ecuación. En esta sección se busca reducir la cantidad de variables, por medio de alguna relación entre los coeficientes de la temperatura y conductividad térmica. Para ello, como primer paso se aplica una expansión de Fourier a ambos términos de la Ec. (A.1), que muestra la relación entre la conductividad térmica y la temperatura, resultando

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m(r) e^{il\theta} = B \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\sqrt{T}}^m(r) e^{il\theta} \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{k}^m = B \widehat{\sqrt{T}}^m. \quad (\text{A.6})$$

Realizando un cambio en la notación de $\widehat{\sqrt{T}}$ por $\hat{C}$, se tiene

$$\hat{k}^m = B \hat{C}^m. \quad (\text{A.7})$$

De esta forma, se obtiene una relación entre el coeficiente de la conductividad térmica y el coeficiente de la raíz cuadrada de la temperatura, aunque esta no es la relación que se busca. Sin embargo, es una relación importante, ya que se podría obtener una relación entre los coeficientes de la temperatura y la raíz cuadrada de la misma. Entonces, teniendo en cuenta la sección B.3, que muestra una expresión para el coeficiente de Fourier del producto de dos funciones, en el caso del producto de la raíz cuadrada de la temperatura,

$$[\widehat{\sqrt{T} \cdot \sqrt{T}}]^l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\widehat{\sqrt{T}}]^n [\widehat{\sqrt{T}}]^{l-n} \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{T}^l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}^n \hat{C}^{l-n}. \quad (\text{A.9})$$

Con esto, se obtienen los coeficientes de Fourier de la conductividad térmica y la temperatura en términos de un solo coeficiente de Fourier, de la raíz cuadrada de la temperatura, $\hat{C}$. Reduciendo así la cantidad de variables en la ecuación a resolver. Por último, al reemplazar las Ec. (A.7) y (A.9) en (A.4), se tiene

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[(B\hat{C}^m) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l^2}{r^2} \right) \hat{T}^l + \left(\frac{\partial B\hat{C}^m}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} \right) - \frac{ml(B\hat{C}^m)(\hat{T}^l)}{r^2} \right] e^{im\theta} e^{il\theta} \quad (\text{A.10})$$

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[(B\hat{C}^m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l^2}{r^2} \right) \hat{C}^m \hat{C}^{l-n} + \left(\frac{\partial B\hat{C}^m}{\partial r} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial(\hat{C}^n \hat{C}^{l-n})}{\partial r} \right) - \frac{mlB\hat{C}^m}{r^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}^m \hat{C}^{l-n} \right] e^{im\theta} e^{il\theta}. \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, la Ec. (A.4) se puede reescribir en función del coeficiente $\hat{C}$, como

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\hat{C}^m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l^2}{r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{l-n} + \left(\frac{\partial \hat{C}^m}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial(\hat{C}^n \hat{C}^{l-n})}{\partial r} \right) - \frac{ml\hat{C}^m \hat{C}^n \hat{C}^{l-n}}{r^2} \right] B e^{im\theta} e^{il\theta}. \quad (\text{A.12})$$

A.3. Analizando la ecuación

En la sección anterior se logró relacionar los coeficientes de Fourier para la temperatura y conductividad térmica, por medio de un coeficiente común $\hat{C}$, obteniendo la Ec. (A.12). Dicha ecuación cuenta con tres sumatorias, donde las de índice m y l corresponden a las expansiones de Fourier de la conductividad térmica y temperatura, respectivamente. Se resalta este aspecto ya que la ecuación presenta un producto de exponenciales, debido a estas expansiones de Fourier, y este producto se puede agrupar en una sola exponencial, donde se tendría la suma de estos dos índices. Y como los

exponenciales forman una base linealmente independiente, sería posible agrupar términos de diferentes índices para un mismo elemento de la base. Por este motivo, y para poder visualizar mejor los términos a agrupar, se define un término que consta de los índices m y l , como se muestra a continuación

$$\mathcal{Z}_l^m = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\hat{C}^m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l^2}{r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{l-n} + \left(\frac{\partial \hat{C}^m}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial (\hat{C}^n \hat{C}^{l-n})}{\partial r} \right) - \frac{ml}{r^2} \hat{C}^m \hat{C}^n \hat{C}^{l-n} \right]. \quad (\text{A.13})$$

De esta forma, al considerar este término en la Ec. (A.12), la expresión se reduce a una con menos términos, pero los suficientes para realizar un análisis. La ecuación se ve reducida a,

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{Z}_l^m e^{i\theta(m+l)}. \quad (\text{A.14})$$

Ahora, considerando que se busca agrupar términos de los diferentes índices para un mismo elemento de la base exponencial, se debe notar que dichos índices toman infinitos valores y agrupar infinitos términos en un método numérico no es posible. En consecuencia es necesario truncar las sumatorias a los rangos de $-m_{max}$ a m_{max} y de $-l_{max}$ a l_{max} . De esta forma, se tiene una cantidad finita de términos para trabajar. Además, con tal de mantener una uniformidad en el método, se puede tomar una misma cantidad de modos en los truncamientos, es decir, se puede considerar que $m_{max} = l_{max} = s$. Así, la ecuación toma la siguiente forma

$$0 = \sum_{m=-s}^s \sum_{l=-s}^s \mathcal{Z}_l^m e^{i\theta(m+l)}. \quad (\text{A.15})$$

Con esta última ecuación, se puede comenzar a agrupar términos y buscar llegar a algún sistema que permita obtener una solución. Entonces, tomando como un primer

paso el valor de $s = 1$ y desarrollando las sumatorias, se tiene

$$0 = \mathcal{Z}_{-1}^{-1}e^{i\theta(-2)} + \mathcal{Z}_0^{-1}e^{i\theta(-1)} + \mathcal{Z}_1^{-1}e^{i\theta(0)}\mathcal{Z}_{-1}^0e^{i\theta(-1)} + \\ \mathcal{Z}_0^0e^{i\theta(0)} + \mathcal{Z}_1^0e^{i\theta(1)}\mathcal{Z}_{-1}^1e^{i\theta(0)} + \mathcal{Z}_0^1e^{i\theta(1)} + \mathcal{Z}_1^1e^{i\theta(2)}. \quad (\text{A.16})$$

Al agrupar los términos que corresponden a un mismo término exponencial, resulta

$$0 = \mathcal{Z}_{-1}^{-1}e^{i\theta(-2)} + (\mathcal{Z}_0^{-1} + \mathcal{Z}_{-1}^0)e^{i\theta(-1)} + (\mathcal{Z}_1^{-1} + \mathcal{Z}_0^0 + \mathcal{Z}_{-1}^1)e^{i\theta(0)} + \\ (\mathcal{Z}_1^0 + \mathcal{Z}_0^1)e^{i\theta(1)} + \mathcal{Z}_1^1e^{i\theta(2)}. \quad (\text{A.17})$$

De esta manera, se tiene una ecuación que se puede entender como una combinación lineal de elementos de la base exponencial. Y debido a ello, esta ecuación se puede expresar como un sistema de ecuaciones, como el que se muestra a continuación

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{Z}_{-1}^{-1} \\ 0 &= \mathcal{Z}_0^{-1} + \mathcal{Z}_{-1}^0 \\ 0 &= \mathcal{Z}_1^{-1} + \mathcal{Z}_0^0 + \mathcal{Z}_{-1}^1 \\ 0 &= \mathcal{Z}_1^0 + \mathcal{Z}_0^1 \\ 0 &= \mathcal{Z}_1^1. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Así, se pueden armar sistemas de ecuaciones más grandes, dependiendo del valor que se tome para s . Aunque se debe tener en cuenta que, este ‘pequeño’ sistema solo es una abreviación del sistema total pues cada término $\mathcal{Z}_l^m$ representa una sumatoria. Por este motivo, para analizar el procedimiento a seguir, se trabaja con el sistema de ecuaciones (A.18). Entonces, lo primero a realizar es expresar de manera completa y desarrollar cada ecuación del sistema.

Para la primera ecuación $0 = \mathcal{Z}_{-1}^{-1}$, se tiene

$$0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\hat{C}^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{-1-n} + \left(\frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial (\hat{C}^n \hat{C}^{-1-n})}{\partial r} \right) - \frac{\hat{C}^{-1} \hat{C}^n \hat{C}^{-1-n}}{r^2} \right] \quad (\text{A.19})$$

$$0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hat{C}^{-1} \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \frac{\hat{C}^{-1} \hat{C}^{-1-n}}{r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + 2 \hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \hat{C}^{-1} \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{-1-n}}{\partial r^2} + \hat{C}^{-1} \hat{C}^{-1-n} \frac{\partial^2 \hat{C}^n}{\partial r^2} + \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \hat{C}^{-1-n} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} - \frac{2 \hat{C}^{-1} \hat{C}^n \hat{C}^{-1-n}}{r^2} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Para la segunda ecuación $0 = \mathcal{Z}_0^{-1} + \mathcal{Z}_{-1}^0$, se tiene

$$0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\hat{C}^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{-n} + \left(\frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial (\hat{C}^n \hat{C}^{-n})}{\partial r} \right) + \hat{C}^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{-1-n} + \left(\frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial (\hat{C}^n \hat{C}^{-1-n})}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{A.21})$$

$$0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hat{C}^0 \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \frac{\hat{C}^{-1} \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} + \frac{(\hat{C}^{-1} \hat{C}^{-n} + \hat{C}^0 \hat{C}^{-1-n})}{r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + \hat{C}^{-1} \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{-n}}{\partial r^2} + \hat{C}^0 \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{-1-n}}{\partial r^2} + (\hat{C}^{-1} \hat{C}^{-n} + \hat{C}^0 \hat{C}^{-1-n}) \frac{\partial^2 \hat{C}^n}{\partial r^2} + 2 \hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + 2 \hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} + \hat{C}^{-n} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \hat{C}^{-1-n} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} - \frac{\hat{C}^0 \hat{C}^n \hat{C}^{-1-n}}{r^2} \right]. \quad (\text{A.22})$$

Para la tercera ecuación $0 = \mathcal{Z}_0^{-1} + \mathcal{Z}_0^0 + \mathcal{Z}_{-1}^1$, se tiene

$$\begin{aligned}
0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} & \left[\hat{C}^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{1-n} + \left(\frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial(\hat{C}^n \hat{C}^{1-n})}{\partial r} \right) + \right. \\
& \frac{\hat{C}^{-1} \hat{C}^n \hat{C}^{1-n}}{r^2} + \hat{C}^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{-n} + \\
& \left(\frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial(\hat{C}^n \hat{C}^{-n})}{\partial r} \right) \hat{C}^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{-1-n} + \\
& \left. \left(\frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial(\hat{C}^n \hat{C}^{-1-n})}{\partial r} \right) + \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^n \hat{C}^{-1-n}}{r^2} \right] \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} & \left[\frac{\hat{C}^{-1} \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + \frac{\hat{C}^0 \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} + \right. \\
& \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \frac{(\hat{C}^{-1} \hat{C}^{1-n} + \hat{C}^0 \hat{C}^{-n} + \hat{C}^1 \hat{C}^{-1-n})}{r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + \\
& \hat{C}^{-1} \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{1-n}}{\partial r^2} + \hat{C}^0 \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{-n}}{\partial r^2} + \hat{C}^1 \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{-1-n}}{\partial r^2} + \\
& (\hat{C}^{1-n} \hat{C}^{-1} + \hat{C}^0 \hat{C}^{-n} + \hat{C}^1 \hat{C}^{-1-n}) \frac{\partial^2 \hat{C}^n}{\partial r^2} + 2 \hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + \\
& 2 \hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} + 2 \hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + \\
& \hat{C}^{1-n} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} + \hat{C}^{-n} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + \\
& \left. \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1-n}}{\partial r} + \hat{C}^{-1-n} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \right]. \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

Para la cuarta ecuación $0 = \mathcal{Z}_1^0 + \mathcal{Z}_0^1$, se tiene

$$0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\hat{C}^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{1-n} + \left(\frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial(\hat{C}^n \hat{C}^{1-n})}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. \hat{C}^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{-n} + \left(\frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial(\hat{C}^n \hat{C}^{-n})}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

$$0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hat{C}^0 \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} + \frac{(\hat{C}^0 \hat{C}^{1-n} + \hat{C}^1 \hat{C}^{-n})}{r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + \right. \\ \hat{C}^0 \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{1-n}}{\partial r^2} + \hat{C}^1 \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{-n}}{\partial r^2} + (\hat{C}^0 \hat{C}^{1-n} + \hat{C}^1 \hat{C}^{-n}) \frac{\partial^2 \hat{C}^n}{\partial r^2} + \\ 2\hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + 2\hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} + \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + \\ \left. \hat{C}^{1-n} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-n}}{\partial r} + \hat{C}^{-n} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} - \frac{\hat{C}^0 \hat{C}^n \hat{C}^{1-n}}{r^2} \right]. \quad (\text{A.26})$$

Para la quinta ecuación $0 = \mathcal{Z}_1^1$, se tiene

$$0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\hat{C}^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{C}^n \hat{C}^{1-n} + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial(\hat{C}^n \hat{C}^{1-n})}{\partial r} \right) - \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^n \hat{C}^{1-n}}{r^2} \right] \quad (\text{A.27})$$

$$0 = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hat{C}^1 \hat{C}^n}{r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^{1-n}}{r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} + 2\hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + \right. \\ \hat{C}^1 \hat{C}^n \frac{\partial^2 \hat{C}^{1-n}}{\partial r^2} + \hat{C}^1 \hat{C}^{1-n} \frac{\partial^2 \hat{C}^n}{\partial r^2} + \hat{C}^n \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{1-n}}{\partial r} + \\ \left. \hat{C}^{1-n} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^n}{\partial r} - \frac{2\hat{C}^n \hat{C}^{1-n} \hat{C}^1}{r^2} \right]. \quad (\text{A.28})$$

Luego de desarrollar las ecuaciones del sistema, aún queda una sumatoria adicional

que corresponde a la relación entre dos coeficientes de Fourier. De igual manera, no se puede dejar esta sumatoria infinita, por este motivo también se debe truncar. Tomando el mismo valor de los truncamientos anteriores, se tiene que $n_{\text{máx}} = s = 1$. Entonces, al desarrollar las Ec. (A.20), (A.22), (A.24), (A.26) y (A.28) el sistema de ecuaciones resultante es el siguiente,

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\hat{C}^{-1}\hat{C}^1}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} + 2 \frac{\hat{C}^{-1}\hat{C}^0}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + 2 \frac{\hat{C}^{-1}\hat{C}^{-1}}{r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + \frac{\hat{C}^{-1}\hat{C}^{-2}}{r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \\
& 6\hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + 2\hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + 2\hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} + \hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} + \\
& \hat{C}^{-2} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} + \hat{C}^{-1}\hat{C}^1 \frac{\partial^2 \hat{C}^{-2}}{\partial r^2} + 2\hat{C}^{-1}\hat{C}^0 \frac{\partial^2 \hat{C}^{-1}}{\partial r^2} + 2\hat{C}^{-1}\hat{C}^{-1} \frac{\partial^2 \hat{C}^0}{\partial r^2} + \\
& \hat{C}^{-1}\hat{C}^{-2} \frac{\partial^2 \hat{C}^1}{\partial r^2} - 4 \frac{\hat{C}^{-1}\hat{C}^{-1}\hat{C}^0}{r^2} - 2 \frac{\hat{C}^{-1}\hat{C}^1\hat{C}^{-2}}{r^2} \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\hat{C}^0\hat{C}^1}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} + 2 \left(\frac{\hat{C}^{-1}\hat{C}^0 + \hat{C}^0\hat{C}^0}{r} \right) \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + \\
& 4 \frac{\hat{C}^{-1}\hat{C}^0}{r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + \left(\frac{2\hat{C}^{-1}\hat{C}^{-1} + \hat{C}^0\hat{C}^{-2}}{r} \right) \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \hat{C}^0\hat{C}^1 \frac{\partial^2 \hat{C}^{-2}}{\partial r^2} + \\
& 2 \left(\hat{C}^{-1}\hat{C}^1 + \hat{C}^0\hat{C}^0 \right) \frac{\partial^2 \hat{C}^{-1}}{\partial r^2} + 4\hat{C}^{-1}\hat{C}^0 \frac{\partial^2 \hat{C}^0}{\partial r^2} + \left(2\hat{C}^{-1}\hat{C}^1 + \hat{C}^0\hat{C}^{-2} \right) \frac{\partial^2 \hat{C}^1}{\partial r^2} + \\
& 8\hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + 8\hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + 4\hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + 2\hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} + \\
& \hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} + \hat{C}^{-2} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} - 2 \frac{\hat{C}^0\hat{C}^0\hat{C}^{-1}}{r^2} - \frac{\hat{C}^0\hat{C}^1\hat{C}^{-2}}{r^2} \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^1}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} + \left(\frac{4\hat{C}^0 \hat{C}^1 + \hat{C}^{-1} \hat{C}^2}{r} \right) \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + \\
& \left(\frac{4\hat{C}^1 \hat{C}^{-1} + \hat{C}^0 \hat{C}^0}{r} \right) \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + \left(\frac{4\hat{C}^{-1} \hat{C}^0 + \hat{C}^1 \hat{C}^{-2}}{r} \right) \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \\
& \frac{\hat{C}^{-1} \hat{C}^{-1}}{r} \frac{\partial^2 \hat{C}^2}{\partial r^2} + \hat{C}^1 \hat{C}^1 \frac{\partial^2 \hat{C}^{-2}}{\partial r^2} + \left(4\hat{C}^0 \hat{C}^1 + \hat{C}^2 \hat{C}^{-1} \right) \frac{\partial^2 \hat{C}^{-1}}{\partial r^2} + \\
& \left(4\hat{C}^{-1} \hat{C}^1 + 2\hat{C}^0 \hat{C}^0 \right) \frac{\partial^2 \hat{C}^0}{\partial r^2} + \left(4\hat{C}^{-1} \hat{C}^0 + \hat{C}^{-2} \hat{C}^1 \right) \frac{\partial^2 \hat{C}^1}{\partial r^2} + \\
& \hat{C}^{-1} \hat{C}^{-1} \frac{\partial^2 \hat{C}^2}{\partial r^2} + \left(6\hat{C}^0 + \hat{C}^2 \right) \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + 6\hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + \\
& 10\hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + 4\hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + \left(2\hat{C}^0 + \hat{C}^{-2} \right) \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \\
& 3\hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^{-2}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + 2\hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^2}{\partial r} + \hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^2}{\partial r} \quad (\text{A.31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left(\frac{\hat{C}^0 \hat{C}^2 + 2\hat{C}^1 \hat{C}^1}{r} \right) \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + 4\hat{C}^0 \hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + \\
& 2 \left(\frac{\hat{C}^0 \hat{C}^0 + \hat{C}^1 \hat{C}^{-1}}{r} \right) \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \frac{\hat{C}^0 \hat{C}^{-1}}{r} \frac{\partial^2 \hat{C}^2}{\partial r^2} + \left(\hat{C}^0 \hat{C}^2 + 2\hat{C}^1 \hat{C}^1 \right) \frac{\partial^2 \hat{C}^{-1}}{\partial r^2} + \\
& 4\hat{C}^0 \hat{C}^1 \frac{\partial^2 \hat{C}^0}{\partial r^2} + 2 \left(\hat{C}^0 \hat{C}^0 + \hat{C}^{-1} \hat{C}^1 \right) \frac{\partial^2 \hat{C}^1}{\partial r^2} + \hat{C}^0 \hat{C}^{-1} \frac{\partial^2 \hat{C}^2}{\partial r^2} + 6\hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \\
& 2\hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^2}{\partial r} + \hat{C}^2 \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + 4\hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + 8\hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \\
& \hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^2}{\partial r} + 2\hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} - 2 \frac{\hat{C}^0 \hat{C}^0 \hat{C}^1}{r^2} - \frac{\hat{C}^0 \hat{C}^{-1} \hat{C}^2}{r^2} \quad (\text{A.32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^2}{r} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + 2 \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^1}{r} \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} + 2 \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^0}{r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \frac{\hat{C}^1 \hat{C}^{-1}}{r} \frac{\partial \hat{C}^2}{\partial r} + \\
& \hat{C}^1 \hat{C}^2 \frac{\partial^2 \hat{C}^{-1}}{\partial r^2} + 2 \hat{C}^1 \hat{C}^1 \frac{\partial^2 \hat{C}^0}{\partial r^2} + 2 \hat{C}^1 \hat{C}^0 \frac{\partial^2 \hat{C}^1}{\partial r^2} + \hat{C}^1 \hat{C}^{-1} \frac{\partial^2 \hat{C}^2}{\partial r^2} + \\
& 2 \hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^2}{\partial r} + \hat{C}^{-1} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^2}{\partial r} + \hat{C}^2 \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^{-1}}{\partial r} + 6 \hat{C}^1 \frac{\partial \hat{C}^0}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} + \\
& 2 \hat{C}^0 \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} \frac{\partial \hat{C}^1}{\partial r} - 4 \frac{\hat{C}^0 \hat{C}^1 \hat{C}^1}{r^2} - 2 \frac{\hat{C}^{-1} \hat{C}^2 \hat{C}^1}{r^2} \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

Al tener todas las ecuaciones desarrolladas para un valor de $s = 1$, luego corresponde aplicar el método de diferencias finitas para aproximar las derivadas en las ecuaciones del sistema anterior. Para ello es necesario tener una discretización de la dirección radial, como se mostró en la sección 3.2, la cual no incluye el centro ni el contorno de la placa circular. Entonces al aplicar las aproximaciones por diferencias finitas centradas a cada una de las ecuaciones del sistema, se va tener un ‘*sistema discretizado*’ de ecuaciones que pueden aplicarse en los puntos de la discretización radial. Por este motivo, si se toma una discretización para un valor de $n_r = 2$, este sistema discretizado puede aplicarse en los puntos r_1 y r_2 , ya que las diferencias finitas centradas consideran los puntos anterior y posterior a los puntos donde es aplicada la aproximación. De esta forma al aplicarse el sistema discretizado (de 5 ecuaciones) en dos puntos de la discretización, se tendrían 10 ecuaciones, en las cuales se tendrían 20 coeficientes dados en la Ec. (A.34).

$$\begin{array}{cccc}
\hat{C}_0^{-2} & \hat{C}_1^{-2} & \hat{C}_2^{-2} & \hat{C}_3^{-2} \\
\hat{C}_0^{-1} & \hat{C}_1^{-1} & \hat{C}_2^{-1} & \hat{C}_3^{-1} \\
\hat{C}_0^0 & \hat{C}_1^0 & \hat{C}_2^0 & \hat{C}_3^0 \\
\hat{C}_0^1 & \hat{C}_1^1 & \hat{C}_2^1 & \hat{C}_3^1 \\
\hat{C}_0^2 & \hat{C}_1^2 & \hat{C}_2^2 & \hat{C}_3^2
\end{array} \quad (\text{A.34})$$

Sin embargo, no todos los coeficientes serían incógnitas, puesto que los correspondientes al borde de la placa circular (de subíndice 3) serían conocidos por la condición de contorno del problema. Por consiguiente, el sistema estaría comprendido por 10 ecuaciones y 15 incógnitas. Entonces, para poder obtener una solución para los coefi-

cientes, sería necesario formar un sistema que tenga el mismo número de ecuaciones e incógnitas. A continuación se presentan tres opciones consideradas para obtener una solución.

- Primera opción, eliminar los coeficientes que se escapan de los modos (superíndices) máximos considerados, es decir, $m_{max} = l_{max} = s = 1$. Esto debido a que en el último truncamiento de la sumatoria de índice n se obtuvieron coeficientes fuera del rango. Es decir, que se eliminarían los coeficientes correspondientes a $\hat{C}^{-2}$ y $\hat{C}^2$. De esta forma, en el sistema se tendrían las incógnitas dadas en la Ec. (A.35).

$$\begin{array}{ccc} \hat{C}_0^{-1} & \hat{C}_1^{-1} & \hat{C}_2^{-1} \\ \hat{C}_0^0 & \hat{C}_1^0 & \hat{C}_2^0 \\ \hat{C}_0^1 & \hat{C}_1^1 & \hat{C}_2^1 \end{array} \quad (\text{A.35})$$

Así, el sistema estaría conformado por 10 ecuaciones y 9 incógnitas, teniendo una ecuación sobrante en el sistema. Aunque no es posible formar un sistema con el mismo número de ecuaciones e incógnitas, no es una opción viable debido a que no se pueden descartar coeficientes de manera arbitraria.

- Segunda opción, considerar la aproximación para el centro de la placa circular, que se desarrolló en la sección 3.2. Esta aproximación, Ec. (3.66), relaciona los coeficientes de Fourier para la temperatura, correspondientes a los puntos r_0 y r_1 , de la discretización radial. Aunque en esta situación se trabaja con los coeficientes $\hat{C}$, por medio de la Ec. (A.9), la aproximación puede reescribirse como

$$4\hat{T}_0^l = \alpha_l \hat{T}_1^l \quad (\text{A.36})$$

$$4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}_0^n \hat{C}_0^{l-n} = \alpha_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}_1^n \hat{C}_1^{l-n}. \quad (\text{A.37})$$

Donde, al truncar las sumatorias para un valor de $n_{max} = s = 1$, se tiene

$$4 \left(\hat{C}_0^{-1} \hat{C}_0^{l+1} + \hat{C}_0^0 \hat{C}_0^l + \hat{C}_0^1 \hat{C}_0^{l-1} \right) = \alpha_l \left(\hat{C}_1^{-1} \hat{C}_1^{l+1} + \hat{C}_1^0 \hat{C}_1^l + \hat{C}_1^1 \hat{C}_1^{l-1} \right). \quad (\text{A.38})$$

Con esto, se tiene una ecuación que va a depender de los modos l correspondientes a los coeficientes de Fourier de la temperatura. Ahora, recordando que el valor de truncamiento para l fue de $l_{max} = s = 1$, se tendría 3 ecuaciones adicionales al sistema, para $l = -1, 0, 1$. Por ende, se tendría en total 13 ecuaciones y 15 incógnitas, teniendo más incógnitas que ecuaciones. Debido a esto, no es posible formar un sistema con el mismo número de ecuaciones e incógnitas.

- Tercera opción, considerar la propiedad de los coeficientes de Fourier para las funciones reales, Ec. (2.52). Esto debido a que tanto la función temperatura como conductividad térmica, deben ser funciones reales. De esta forma, considerando los coeficientes del sistema, se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \hat{C}_0^{-1} &= (\hat{C}_0^1)^* & \hat{C}_1^{-1} &= (\hat{C}_1^1)^* & \hat{C}_2^{-1} &= (\hat{C}_2^1)^* \\ \hat{C}_0^{-2} &= (\hat{C}_0^2)^* & \hat{C}_1^{-2} &= (\hat{C}_1^2)^* & \hat{C}_2^{-2} &= (\hat{C}_2^2)^* \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Así, el sistema estaría conformado por 16 ecuaciones y 15 incógnitas, teniendo una ecuación sobrante en el sistema. Por ello, no es posible formar un sistema con el mismo número de ecuaciones e incógnitas.

Como se puede observar, se evaluaron diferentes opciones para poder formar un sistema consistente, aunque en ninguno se tuvo éxito. Es por este motivo que no se pudo completar un método numérico con el procedimiento seguido en este anexo y se tuvo que abandonar.

Anexo B

Desarrollo de propiedades y ecuaciones

En este anexo se muestran los desarrollos de algunas propiedades útiles que se usan, así como el desarrollo de ecuaciones que resultan ser extensas para presentar en el trabajo.

B.1. Desarrollo de la Ec. (4.1)

En esta sección se desarrolla y se obtiene la expresión final de la Ec. (4.1), luego de reemplazar las expansiones de Fourier de la temperatura y la conductividad térmica, dadas en las Ec. (A.2) y (A.3). Entonces, partiendo por expresar en forma vectorial $\vec{\nabla}T$, se tiene

$$\vec{\nabla}T(r, \theta) = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\theta. \quad (\text{B.1})$$

Luego, se le multiplica la conductividad térmica al gradiente de la temperatura, teniendo

$$k(r, \theta) \vec{\nabla}T(r, \theta) = \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\theta. \quad (\text{B.2})$$

Después de sustituir las expansiones de Fourier correspondientes, resulta

$$k(r, \theta) \vec{\nabla} T(r, \theta) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial T^l}{\partial r} \right) e^{il\theta} \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(il \hat{T}^l \right) e^{il\theta} \right] \hat{e}_\theta. \quad (\text{B.3})$$

Esta última expresión resulta ser un poco extensa, por ello se considera la siguiente notación vectorial

$$k \vec{\nabla} T = \vec{v} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta, \quad (\text{B.4})$$

donde los términos v_r y v_θ , están dados por

$$v_r = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} \right) e^{il\theta} \right], \quad (\text{B.5})$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(il \hat{T}^l \right) e^{il\theta} \right]. \quad (\text{B.6})$$

El siguiente paso para obtener el desarrollo completo de la Ec. (4.1), es tomar la divergencia de $\vec{v} = k \vec{\nabla} T$. Por medio de la Ec. (2.76), se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}. \quad (\text{B.8})$$

Ahora, corresponde hallar las derivadas parciales teniendo cuidado con la derivada respecto a la variable r . Esto debido a que los términos v_r y v_θ incluyen a los coeficientes de Fourier $\hat{k}$ y $\hat{T}$, los cuales son funciones de la variable r . Por lo tanto, las derivadas

parciales son

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} = & \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \hat{k}^m}{\partial r} \right) e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} \right) e^{il\theta} \right] + \\ & \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}^l}{\partial r^2} \right) e^{il\theta} \right] \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = & \frac{1}{r} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} (im\hat{k}^m) e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} (il\hat{T}^l) e^{il\theta} \right] + \\ & \frac{1}{r} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-l^2 \hat{T}^l) e^{il\theta} \right]. \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que reemplazar los términos de la Ec. (B.8),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) = & \frac{1}{r} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} \right) e^{il\theta} \right] + \\ & \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \hat{k}^m}{\partial r} \right) e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} \right) e^{il\theta} \right] + \\ & \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}^l}{\partial r^2} \right) e^{il\theta} \right] + \\ & \frac{1}{r^2} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} (im\hat{k}^m) e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} (il\hat{T}^l) e^{il\theta} \right] + \\ & \frac{1}{r^2} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-l^2 \hat{T}^l) e^{il\theta} \right] \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = & \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^m e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{T}^l}{\partial r^2} - \frac{l^2 \hat{T}^l}{r^2} \right) e^{il\theta} \right] + \\
& \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \hat{k}^m}{\partial r} \right) e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} \right) e^{il\theta} \right] - \\
& \frac{1}{r^2} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(m \hat{k}^m \right) e^{im\theta} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(l \hat{T}^l \right) e^{il\theta} \right] \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

Reescribiendo el producto de sumatorias como una sumatoria doble y luego agrupando términos se tiene,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\hat{k}^m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{T}^l}{\partial r^2} - \frac{l^2 \hat{T}^l}{r^2} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial \hat{k}^m}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \hat{T}^l}{\partial r} \right) - \frac{ml \hat{k}^m \hat{T}^l}{r^2} \right] e^{im\theta} e^{il\theta} \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

B.2. Producto interno de dos funciones

En esta sección se mostrará una variación del teorema de Parseval. Esta variación se basa en lo descrito por Rudin (1976). Se suponen dos funciones arbitrarias f y g de cuadrado integrable con un periodo P , tal que sus expansiones de Fourier están dadas por

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}^k e^{2\pi i k x / P}, \quad (\text{B.14})$$

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}^k e^{2\pi i k x / P}. \quad (\text{B.15})$$

Es posible calcular su producto interno, en función de sus coeficientes de Fourier, como se muestra a continuación

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \overline{g(x)} dx \quad (\text{B.16})$$

$$= \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}^k e^{2\pi i k x / P}} dx \quad (\text{B.17})$$

$$= \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}^k} e^{-2\pi i k x / P} dx \quad (\text{B.18})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{P} \int_0^P f(x) e^{-2\pi i k x / P} dx \right) \overline{\hat{g}^k}. \quad (\text{B.19})$$

Donde la integral dentro del paréntesis es el coeficiente $\hat{f}^k$, resultando

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}^k \overline{\hat{g}^k}. \quad (\text{B.20})$$

B.3. Coeficiente del producto de 2 funciones

En esta sección se busca obtener el coeficiente de Fourier para el producto de dos funciones. Para ello se suponen dos funciones arbitrarias f y g con un periodo P , como en la sección B.2. Con esto, el coeficiente de Fourier de $(f \cdot g)$ se calcula como

$$\widehat{[f \cdot g]}^k = \frac{1}{P} \int_0^P e^{-2\pi i k x / P} f(x) g(x) dx \quad (\text{B.21})$$

$$= \frac{1}{P} \int_0^P f(x) (e^{-2\pi i k x / P} g(x)) dx \quad (\text{B.22})$$

$$= \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \left(\overline{e^{2\pi i k x / P} g(x)} \right) dx. \quad (\text{B.23})$$

Si se considera a la función $h_k(x) = e^{2\pi i k x / P} \overline{g(x)}$, se tiene

$$\widehat{[f \cdot g]}^k = \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \overline{h_k(x)} dx = \langle f, h_k \rangle. \quad (\text{B.24})$$

Donde el producto interno $\langle f, h_k \rangle$, por medio de la Ec. (B.20), puede expresarse como una sumatoria del producto de los coeficientes de Fourier de f y h_k , resultando

$$\widehat{[f \cdot g]}^k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}^n \overline{\hat{h}_k^n}. \quad (\text{B.25})$$

Por último, se tiene que hallar la expresión del conjugado complejo de $\hat{h}_k^n$,

$$\overline{\hat{h}_k^n} = \overline{\frac{1}{P} \int_0^P e^{-2\pi i n x / P} h(x) dx} \quad (\text{B.26})$$

$$= \frac{1}{P} \int_0^P e^{2\pi i n x / P} \overline{h(x)} dx \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{1}{P} \int_0^P e^{2\pi i n x / P} (e^{-2\pi i k x / P} g(x)) dx \quad (\text{B.28})$$

$$= \frac{1}{P} \int_0^P e^{-2\pi i (k-n) x / P} g(x) dx \quad (\text{B.29})$$

$$\overline{\hat{h}_k^n} = \hat{g}^{k-n}. \quad (\text{B.30})$$

Luego, reemplazando la Ec. (B.30) en (B.25), se obtiene el coeficiente de Fourier del producto de dos funciones, en función de los coeficientes de Fourier de cada función

$$\widehat{[f \cdot g]}^k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}^n \hat{g}^{k-n}. \quad (\text{B.31})$$