

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

ELECTRODINÁMICA ESPINORIAL GENERALIZADA

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN FÍSICA

ELABORADO POR:

DANIEL EDUARDO SOTO BARRIENTOS

 0000-0003-2363-8018

ASESOR:

Dr. ORLANDO LUIS PEREYRA RAVINEZ

 0000-0002-4143-8813

LIMA - PERÚ

2024

Citar/How to cite	Soto Barrientos [1]
Referencia/Reference	[1] D. Soto Barrientos, “ <i>Electrodinámica Espinorial Generalizada</i> ” [Tesis de pregrado]. Lima, (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2024.
Estilo/Style: IEEE (2020)	

Citar/How to cite	(Soto, 2024)
Referencia/Reference	Soto, D. (2024). <i>Electrodinámica Espinorial Generalizada</i> [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI.
Estilo/Style: APA (7ma ed.)	

Agradecimientos

Agradezco tener el apoyo emocional de mi familia que me ha permitido seguir en este camino: *La Física Teórica*. También agradezco al profesor B.M. Pimentel por mostrarme tal camino, e igualmente al profesor O. Pereyra por su apoyo en este trabajo.

Resumen

En esta tesis calculamos la sección de choque diferencial de la dispersión de dos fermiones de diferentes masas y de cargas iguales a la carga del electrón. El desarrollo se ha realizado dentro del marco de una teoría clásica de campos, es decir, en donde el campo de Dirac cumple el rol de la función de onda de los fermiones. Además, se ha considerado que la interacción electromagnética entre fermiones es mediada por el campo electromagnético de Podolsky. En este electromagnetismo se modifica el propagador electromagnético, lo que es equivalente a introducir un fotón de masivo, cuya masa se conoce como masa de Podolsky: m_P . Es así que los resultados se presentarán en términos de esta masa.

Abstract

In this thesis we will calculate the differential cross section for the scattering of two fermion with different mass and equal electric charge of the electron. The development has been done within the framework of a classical field theory, i.e. the Dirac field takes the role of wave function of the fermions. Also, we have considered that the interaction between the fermions is mediated by the Podolsky's electromagnetic field. In this electromagnetism the electromagnetic propagator has been modified, this is equivalent to the introduction of a massive photon, whose mass is called Podolsky's mass: m_P . It is so that the results will be presented in terms of this mass.

Tabla de Contenido

Resumen	iv
Abstract	v
I. Introducción	1
II. Electromagnetismo de Bopp-Podolsky	6
A. Introducción	6
B. Electrostática generalizada	7
B.1. Generalización de la ley de Coulomb	9
B.2. Generalización de la ley de Gauss	12
C. Electromagnetismo de Maxwell generalizado	15
C.1. Electromagnetismo de Podolsky	21
C.2. Condición de fijación de calibre	27
D. Propagadores electromagnéticos	31
D.1. Propagador electromagnético retardado	33
D.2. Propagador electromagnético de frecuencias positivas y negativas . . .	36
D.3. Propagador electromagnético de Feynman	38
III. Espinores de Dirac	41
A. Introducción	41

B.	Ecuación de Weyl	42
B.1.	Representación espinorial del grupo de Lorentz	47
B.2.	Espinores de Weyl	49
C.	Ecuación de Dirac	52
C.1.	Ecuación relativista de primer orden con término de masa	54
C.2.	Soluciones de la ecuación de Dirac	57
C.3.	Propagador espinorial	64
IV. Interacción electromagnética entre espinores de Dirac		70
A.	Introducción	70
B.	Formalismo lagrangiano de la teoría libre	71
B.1.	Transformaciones $U(1)$ globales	73
B.2.	Espacio de estados	74
C.	Formalismo lagrangiano de la teoría en interacción	77
C.1.	Transformaciones $U(1)$ locales	78
C.2.	Teoría en interacción	80
V. Dispersión		83
A.	Introducción	83
B.	Matriz S	84
B.1.	Elementos de la matriz S	86
B.2.	Elementos de la matriz S en la dispersión de espinores de Dirac	89
C.	Sección de choque	92

C.1.	Sección de choque total	95
C.2.	Sección de choque y las variables de Mandelstan	99
C.3.	Sección de choque diferencial en el centro de masas	104
C.4.	Sección de choque diferencial a altas energías	107
VI Conclusiones y perspectivas		110
Bibliografía		112
Anexos		115
A.	Teoría clásica de campos de orden arbitrario	115
A.1.	Funcional acción y lagrangiana	115
A.2.	Principio de Hamilton	121

Capítulo I

Introducción

Muchos sistemas físicos se pueden describir en términos de átomos y moléculas. Teniendo en cuenta que la interacción entre estos se da en virtud de la interacción electromagnética, podemos afirmar que a la escala de estos cuerpos tal interacción es la dominante. Más aún, se observa que tal interacción también está presente a escala macroscópica. Tal es así, que la primera ley entre cuerpos electricamente cargados es obtenida por Coulomb en 1785 [1], mediante su balanza de torsión encuentra que la fuerza entre dichos cuerpos cargados es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre estos. En su tratado sobre electricidad y magnetismo, Maxwell, en 1891 [2], destaca que el error de la medición directa vía una balanza de torsión es considerable. Luego, en un experimento con dos cáscaras esféricas conductoras concéntricas encuentra que si la potencia 2 de la ley obtenida por Coulomb es modificada por $2 \pm q$, entonces $q < 1/21600$. Siguiendo un esquema similar, en 1936 [3], Plimpton y Lawton encontraron la cota: $q < 2 \times 10^{-9}$.

Debemos hacer notar que en los experimentos considerados encima, las dimensiones y las distancias entre los cuerpos están en la escala de centímetros. Luego, podemos suponer que la ley de interacción entre los cuerpos a escalas mucho menores no necesariamente es la misma. Esta suposición fue asumida por Yukawa en 1934 [4], para explicar que en el modelo de Heisenberg y Fermi del núcleo atómico, la transición entre los estados asociados al neutrón y protón debe ser mediada por una partícula masiva. Y, explica que esta asunción es equivalente a modificar el potencial eléctrico coulombiano por un factor de caída exponencial, k . Volviendo al experimento de las cáscaras conductoras, ahora con cinco de estas, Bartlett *et al.* encuentran en 1970 [5], que si se considera una interacción del tipo propuesto por Yukawa, el factor de caída exponencial debe estar acotado según: $k \leq 1 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$.

Si hacemos una lectura del experimento de Bartlett en el marco de la propuesta de

Yukawa, el resultado es que la interacción electromagnética es mediada por una partícula de masa¹ $m_k \leq 3 \times 10^{-46} g$. Considerar que la interacción electromagnética sea mediada por una partícula masiva evita los problemas de autoenergía infinita. Sin embargo, a escala macroscópica dicho modelo predice una intensidad de interacción mucho menor a la esperada, debido a su caída exponencial. Landé, en 1941 [6], propone un modelo de autoenergía finita considerando la interacción eléctrica como una combinación entre la interacción coulombiana y la dada por Yukawa. Preservando así el carácter coulombiano a escala macroscópica y del tipo Yukawa a escala microscópica, en donde interpreta que la interacción es mediada por un mesón de masa $\frac{3}{2} \times 137$ veces la masa del electrón.

En 1900, en el capítulo VI del libro *Aether and Matter* [7], Larmor muestra que las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell pueden obtenerse a partir de un principio de mínima acción. Más adelante, en 1904 [8], Lorentz demuestra que dichas ecuaciones son invariantes bajo cierto conjunto de transformaciones. Luego, en 1905 [9], Einstein afirma que las ecuaciones de Maxwell forma parte de las teorías físicas que siguen los principios de la relatividad especial. Posteriormente, en su generalización de la relatividad especial, publicado entre 1915 y 1916 [10], Einstein describe las ecuaciones de movimiento en término de tensores. Así, Eddington, en 1924 [11], nos presenta el principio variacional de Larmor en el marco de un formalismo lagrangiano descrito en término de tensores asociados a las transformaciones de Lorentz. Así, una teoría del electromagnetismo que contempla las ideas de Yukawa y Landé, debe ser presentada dentro del formalismo lagrangiano. En donde la lagrangiana de la teoría debe construirse como una contracción de tensores de Lorentz y además debe ser invariante por transformaciones de calibre, tal como apuntó Weyl, en 1929 [12]. El descubrimiento de tal teoría del electromagnetismo fue dado por Bopp en 1940 [13] y, posteriormente, por Podolsky en 1942 [14]. En donde, introducen una densidad lagrangiana dependiente de derivadas de segundo orden de los potenciales electromagnéticos.

La teoría de interacción electromagnética introducida por Podolsky fue dada en el ámbito de la teoría cuántica de campos, en donde se introduce un fotón de masa m_P , el cuál debería tener un efecto regulador sobre las divergencias ultravioletas. Tal efecto se consigue solo al

¹Se ha tenido en cuenta que:

$$m_k = k \frac{\hbar}{c}$$

con $\hbar = 1,054571817 \times 10^{-34} J.s$, $c = 299792458 m.s^{-1}$ y $k = 1 \times 10^{-8} cm^{-1}$.

considerar sobre los potenciales electromagnéticos una condición de Lorentz generalizada, justificada por Pimentel y Galvão en 1988 [15]. La teoría cuántica de esta interacción electromagnética es conocida como: Electrodinámica Cuántica Generalizada (GQED₄). La primera estimación de la masa de Podolsky se encontró en la influencia de la GQED₄, a temperatura finita, sobre la ley de Stefan-Boltzmann. Con los datos de la radiación cósmica de fondo a una temperatura de 2,725 K, en 2010 [16], Pimentel, Bonin y Bufalo encontraron que: $m_P \geq 4$ meV. Poco después, Cuzinatto *et al* en 2011 [17], en el régimen de altas energías, encontraron correcciones del estado fundamental del átomo de hidrógeno, que permite deducir para la masa de Podolsky la cota: $m_P \geq 35,51$ MeV.

El formalismo de las Integrales de Caminos de la GQED₄, fue implementado por Pimentel, Zambrano y Bufalo en 2011 [18]. En tal formalismo se desarrollaron las expresiones de las ecuaciones de Schwinger-Dyson-Fradkin del propagador fotónico y fermiónico, y del vértice, además encuentran que la autoenergía del electrón es finita. Posteriormente, en 2012 [19], en el estudio de la renormalizabilidad de la GQED₄ calculan el momento magnético del electrón en término de la masa de Podolsky, encontrando que: $m_P \geq 37,595$ GeV. Por otro lado, dentro del rigor de la teoría de distribuciones, la GQED₄ ha sido estudiada en el marco de la Teoría de Perturbación Causal. En tal abordaje, en 2014 [20] Pimentel, Bufalo y Soto, calcularon la sección de choque diferencial de la dispersión electrón-positrón, y se estimó que: $m_P \geq 370$ GeV.

Toda teoría cuántica de campos tiene como precedente una teoría clásica de campos, la cual pasa por un proceso de cuantización. Sin embargo, a pesar del nombre, en una teoría clásica de campos se tienen elementos de una teoría cuántica, cuando se interpretan los campos como funciones de onda. Así, en este trabajo desarrollaremos la teoría de interacción electromagnética de Podolsky entre fermiones desde el punto de vista de una teoría clásica de campos. Es decir, los campos de Dirac serán las funciones de onda de esos fermiones, los cuales van a interactuar vía el campo electromagnético de Podolsky.

Esta tesis surge en inspiración del libro *Relativistic Quantum Mechanics*, de James Bjorken y Sidney Drell [21], En esta referencia encontramos la teoría de perturbaciones del propagador, que nos permite encontrar el campo de Dirac asintóticamente libre. Más aún, en este

libro se muestra que sin la necesidad de cuantizar los campos, es posible calcular amplitudes de transición a nivel de árbol. En esta tesis consideramos el campo de Podolsky como mediador de la interacción electromagnética, y el formalismo lagrangiano para la obtención de la teoría en interacción, es decir, la *Electrodinámica Espinorial Generalizada*. Es así que esta tesis está organizada de la siguiente manera:

- En el *capítulo 2*, introducimos el electromagnetismo de Podolsky a partir de la generalización del potencial electrostático. Se modifica el potencial coulombiano agregándole el potencial de Yukawa, obteniendo así un potencial finito en todo el espacio, incluso en la posición de una carga puntual. Esto nos lleva a la modificación de la ley de Gauss eléctrica, que se generaliza en la primera ecuación del electromagnetismo de Podolsky. Con el fin de encontrar las ecuaciones del electromagnetismo de Podolsky se establece el formalismo lagrangiano. Además, introduciendo la condición de Lorentz generalizada, se derivan los propagadores electromagnéticos: retardado, de frecuencias positiva y negativa, y de Feynman.
- En el *capítulo 3*, se construye la ecuación de Dirac a partir de las ecuaciones de los campos de Weyl izquierdo y derecho, para esto partimos de la representación fundamental del grupo de Lorentz. Encontramos las soluciones de la ecuación de Dirac como autofunciones del operador hamiltoniano y helicidad, siendo estos observables compatibles. También se encuentra el propagador de Feynman espinorial y su rol en la propagación de las soluciones de frecuencias positivas y negativas.
- En el *capítulo 4*, dentro del marco del formalismo lagrangiano y mediante el principio de invariancia por transformaciones de calibre $U(1)$ encontramos la teoría de campos de Dirac en interacción electromagnética. Considerando el grupo de simetría $U(1)$ global se obtiene el espacio de estados de los fermiones de Dirac asintóticamente libres. Mientras que con $U(1)$ local y la prescripción de acoplamiento mínimo obtenemos la lagrangiana de la teoría en interacción.
- En el *capítulo 5*, se encuentra la formulación perturbativa de la matriz S , los estados dispersados son asintóticamente libres y son representados por campos de Dirac de frecuencia positiva. Se calcula la sección de choque considerando las funciones de onda

como paquetes concentrados en un cierto valor del momento lineal. Presentamos los resultados en términos de las variables de Mandelstan, es decir, en forma invariante relativista. En particular, calculamos la sección de choque diferencial de fermiones de diferente masa en el régimen de altas energías.

- En el *capítulo 6*, se presentan las conclusiones y perspectivas de esta tesis.

Capítulo II

Electromagnetismo de Bopp-Podolsky

En este capítulo generalizamos las leyes del electromagnetismo de Maxwell. Con este propósito, empezamos con la generalización de la ley de Coulomb, lo que nos permite tener un límite electrostático de los resultados generales. Luego, dentro del formalismo lagrangiano, se obtendrán las ecuaciones del electromagnetismo generalizado de Bopp-Podolsky. Tales ecuaciones de Euler-Lagrange corresponden a la de teorías de orden superior. Finalmente, se encuentran los propagadores electromagnéticos correspondientes.

A. Introducción

La teoría de Maxwell del campo electromagnético establece el comportamiento de las componentes del campo eléctrico y magnético. Es decir, es formada por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y acopladas de seis funciones, en donde se deben introducir los términos fuente, las condiciones iniciales y de frontera. Este sistema de ecuaciones se consiguen expresar en la forma de dos ecuaciones escalares y dos vectoriales, siendo los términos fuente la cantidad escalar densidad de carga y la cantidad vectorial densidad de corriente.

Como toda teoría física, las leyes de electromagnetismo se expresan respecto a un cierto sistema de referencia. Es decir, las ecuaciones y las componentes de los campos no son idénticas en cualquier referencial. Sin embargo, el carácter universal de las leyes físicas exige la existencia de transformaciones entre los referenciales de tal forma que permitan la equivalencia de las ecuaciones de los campos, establecidas en diferentes referenciales. En la teoría de la relatividad especial, las leyes físicas son equivalentes en forma y contenido entre diferentes referenciales inerciales, y son las transformaciones de Lorentz las que dejan invariantes tales leyes. Al aplicar las transformaciones de Lorentz a las ecuaciones de la teoría de Maxwell,

estas resultan invariantes, y se dice que la teoría es relativista. Además, la forma en que se expresan las ecuaciones se dicen ser covariantes.

Por otro lado, la teoría de Maxwell también puede expresarse como un sistema de ecuaciones de segundo orden de cuatro funciones, conocidas como potenciales electromagnéticos. Estos potenciales definen las componentes del campo eléctrico y magnético. Sin embargo, aun que estos últimos son únicos, no lo son los potenciales electromagnéticos. Existe un conjunto de potenciales que cumplen con las mismas ecuaciones, y estos potenciales se relacionan mediante la adición de derivadas de campos escalares, y tales relaciones se conocen como transformaciones de calibre. Además, se dice que hay una libertad de calibre en la definición de los potenciales.

En resumen, podemos afirmar que la teoría de Maxwell se expresa como ecuaciones de segundo orden de los potenciales electromagnéticos que tienen como propiedades fundamentales: ser invariantes relativistas e invariantes por transformaciones de calibre. Si se fijan estas propiedades y no el orden de las ecuaciones, podemos generalizar la teoría de Maxwell introduciendo adecuadamente derivadas de orden superior de los potenciales. Así, surge la primera generalización de la teoría de Maxwell conocida como : *electromagnetismo de Podolsky*.

B. Electrostática generalizada

En el estudio de un sistema físico debemos identificar los cuerpos que lo conforman y las interacciones entre estos. Así, en primer lugar debemos de establecer las condiciones en las que un cuerpo se considera libre de interacciones con otros cuerpos. Siguiendo las leyes de Newton, este estado libre se refiere a un movimiento rectilíneo y uniforme respecto a un sistema de referencia inercial. Luego, si sobre dicho cuerpo actúa una fuerza, entonces el estado libre de este se modifica, es decir, acelera.

Para poder establecer la ley que rige la expresión de la fuerza que actúa sobre un cuerpo debemos de tomar una simplificación del sistema. Esto consiste en considerar dos cuerpos cuyas dimensiones son mucho menores que la distancia que los separan, es decir, idealmente asumimos que los cuerpos son puntuales, y serán llamados *partículas*. Los diversos tipos

de fuerzas dependen de las características intrínsecas de las partículas. Entre ellas, la carga eléctrica, que esta presente en casi todas las partículas. Si respecto a cierto sistema de referencia inercial consideramos que en la posición $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ se encuentra una partícula con carga q y en $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3)$ una con carga q_1 , entonces, la expresión de la fuerza eléctrica que actúa sobre la primera carga es dada como sigue¹:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{q_1 q}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}, \quad (1)$$

esta relación es conocida como la *ley de Coulomb*.

Además, observamos que para cualquier valor no nulo de la carga q , sobre esta siempre actúa una fuerza debido a la presencia de la carga q_1 . Luego, a esta última se le asocia el campo vectorial:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}, \quad (2)$$

el cual recibe el nombre de *campo eléctrico*. Así, la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga q ubicada en $\vec{x}$ se puede expresar como:

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x}). \quad (3)$$

En general, siguiendo el principio de superposición, si se tiene un sistema discreto de cargas puntuales $\{q_j\}$ ubicadas en $\{\vec{y}_j\}$, entonces, el campo eléctrico resultante en el punto $\vec{x}$ se expresará como sigue:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{y}_j|^3} (\vec{x} - \vec{y}_j). \quad (4)$$

Mientras que para un sistema continuo de cargas, esta adopta la forma:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}, \quad (5)$$

siendo $\rho(\vec{y})$ la densidad de carga en el punto $\vec{y}$.

Por otro lado, fijadas las cargas de un sistema, se acerca a este una carga q muy distante, hasta el punto $\vec{x}$. Se observa que el trabajo realizado para conseguirlo no depende de la

¹Se está considerando un sistema de unidades tales que las constantes de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética en el vacío, ϵ_0 y μ_0 , respectivamente, están normalizadas a 1.

trayectoria escogida, afirmandose que la fuerza eléctrica es conservativa. Entonces, se define la energía potencial en el punto $\vec{x}$, como igual al trabajo realizado, además, esta cantidad puede escribirse como:

$$\mathcal{E}_q = qV(\vec{x}) , \quad (6)$$

donde $V(\vec{x})$ es conocido como *potencial eléctrico*. Para un sistema discreto, el potencial eléctrico adopta la forma:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{y}_j|} , \quad (7)$$

y, para un sistema continuo, la forma:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} . \quad (8)$$

Así, en cualquier caso, se encuentra que la relación entre el potencial eléctrico y el campo eléctrico es dada como sigue:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x}) . \quad (9)$$

Finalmente, observemos que recuperamos el caso discreto a partir del caso continuo, si en esta hacemos la sustitución:

$$\rho(\vec{y}) = \sum_j q_j \delta(\vec{y} - \vec{y}_j) , \quad (10)$$

además, en el caso discreto el potencial eléctrico (7) diverge cuando es evaluado en los puntos donde se encuentran las cargas. Sin embargo, en el caso continuo el potencial (8) es bien definido en cualquier punto del espacio.

B.1. Generalización de la ley de Coulomb

Para un sistema formado por una sola carga q_1 , cuya posición sea el origen de coordenadas, se tiene el potencial eléctrico:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1}{|\vec{x}|} , \quad (11)$$

de aquí, vemos que el módulo de este es cada vez mayor al aproximarse al origen $\vec{x} = 0$, e indeterminado en este punto. Este hecho puede dar origen a problemas de divergencias, los

cuales deben ser regularizados. También es posible eliminar tales problemas al proponer que cerca del origen el potencial es del tipo Yukawa,

$$V_Y(\vec{x}) = b \frac{1}{4\pi} \frac{q_1}{|\vec{x}|} e^{-\frac{|\vec{x}|}{a}}, \quad (12)$$

donde a es un parámetro real con unidades de longitud y b es un parámetro real adimensional. Además, ya que alejado del origen, el potencial debe seguir siendo del tipo coulombiano,

$$V_C(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1}{|\vec{x}|}, \quad (13)$$

se propone que el potencial eléctrico sea una superposición entre V_C y V_Y , según:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1}{|\vec{x}|} \left(1 + b e^{-\frac{|\vec{x}|}{a}} \right), \quad (14)$$

vemos que este es finito para todo $\vec{x}$ si $b = -1$. Por lo tanto, el potencial eléctrico generalizado es dado como:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1}{|\vec{x}|} \left(1 - e^{-\frac{|\vec{x}|}{a}} \right). \quad (15)$$

Así, de la expresión del potencial de Coulomb generalizado (15) y de su relación con el campo eléctrico (9), se encuentra que la forma generalizada de esta es:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} q_1 \left[\frac{1 - e^{-|\vec{x}|/a}}{|\vec{x}|^2} - \frac{e^{-|\vec{x}|/a}}{a |\vec{x}|} \right] \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}. \quad (16)$$

Entonces, según (3), la fuerza eléctrica generalizada ejercida sobre la carga q ubicada en $\vec{x}$, es dada como:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{qq_1}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-|\vec{x}|/a}}{|\vec{x}|^2} - \frac{e^{-|\vec{x}|/a}}{a |\vec{x}|} \right] \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad (17)$$

esta relación se conoce como la *ley de Coulomb generalizada*. Teniendo en cuenta la expresión en serie de la exponencial,

$$e^{-|\vec{x}|/a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{|\vec{x}|^n}{a^n}, \quad (18)$$

se tendrá que:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{qq_1}{4\pi a^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+2)} \frac{|\vec{x}|^n}{a^n} \right) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad (19)$$

es decir,

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{qq_1}{4\pi a^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{|\vec{x}|}{a} + \frac{1}{8} \frac{|\vec{x}|^2}{a^2} - \dots \right) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad (20)$$

de aquí, se concluye que la intensidad de esta es finita para todo $\vec{x}$.

Finalmente, para un sistema discreto de cargas $\{q_j\}$ ubicadas en $\{\vec{x}_j\}$, se tiene que el potencial eléctrico generalizado es dado como:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \left(1 - e^{-|\vec{x} - \vec{x}_j|/a} \right), \quad (21)$$

observando que es bien definido incluso si es evaluado en los puntos donde se encuentran las cargas². Siendo la energía potencial aditiva, tendremos que para este sistema de cargas $\{q_j\}$, la energía de interacción electrostática es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq k} \frac{q_j q_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|} \left(1 - e^{-|\vec{x}_j - \vec{x}_k|/a} \right). \quad (22)$$

Reagrupando esta relación e incluyendo los sumandos con $j = k$, encontramos que:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \sum_j q_j \sum_k \frac{q_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|} \left(1 - e^{-|\vec{x}_j - \vec{x}_k|/a} \right) - \frac{1}{8\pi} \sum_j q_j^2 \frac{1}{a}, \quad (23)$$

la cual puede reescribirse como:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_j q_j V(\vec{x}_j) - \sum_j \mathcal{E}_j, \quad (24)$$

donde $V(\vec{x}_j)$ son solo potenciales evaluados en la posición donde se encuentran las cargas, mientras que las cantidades:

$$\mathcal{E}_j = \frac{q_j^2}{8\pi a}, \quad (25)$$

se identifican como las autoenergías de dichas cargas. Es claro que en el límite $a \rightarrow 0^+$, estas cantidades divergen y deben regularizarse o removerse.

²Se define el potencial en la posición de las cargas como:

$$V(\vec{x}_j) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_j} V(\vec{x}),$$

y, obtenemos:

$$V(\vec{x}_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{q_j}{a}.$$

B.2. Generalización de la ley de Gauss

Usualmente podemos expresar la energía de interacción en términos del campo eléctrico, si se tiene en cuenta la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) , \quad (26)$$

la cual, al sustituir en la relación entre el campo y el potencial eléctrico (9), es equivalente a la ecuación de Poisson del potencial eléctrico:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}) . \quad (27)$$

En particular, según la ecuación (10), para una carga q_1 ubicada en el origen, esta ecuación adopta la forma:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = -q_1 \delta(\vec{x}) . \quad (28)$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que para un par de funciones diferenciables f, g se cumple la siguiente propiedad:

$$\nabla^2 (fg) = (\nabla^2 f) g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g , \quad (29)$$

y, si f es una función radial, además, se cumplirán las relaciones:

$$\nabla f = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (30)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) , \quad (31)$$

con $r = |\vec{x}|$. Así, para el potencial generalizado (15), se tiene que:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi} \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) (1 - e^{-r/a}) + 2 \frac{q_1}{4\pi} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \nabla (1 - e^{-r/a}) + \frac{q_1}{4\pi} \frac{1}{r} \nabla^2 (1 - e^{-r/a}) , \quad (32)$$

siendo,

$$\nabla e^{-r/a} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \frac{1}{a} e^{-r/a} \quad (33)$$

$$\nabla^2 e^{-r/a} = -\frac{1}{ar^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 e^{-r/a} \right) = -\frac{2}{ar} e^{-r/a} + \frac{1}{a^2} e^{-r/a} , \quad (34)$$

y, teniendo en cuenta las relaciones:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \frac{1}{r^2} \quad (35)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{x}) , \quad (36)$$

se obtiene que:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = -q_1 \delta(\vec{x}) \left(1 - e^{-r/a} \right) - \frac{q_1}{4\pi a^2} \frac{1}{r} e^{-r/a} , \quad (37)$$

en donde, se debe observar que³:

$$\delta(\vec{x}) \left(1 - e^{-r/a} \right) = 0 . \quad (38)$$

Por lo tanto, se cumple la relación,

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = -\frac{q_1}{4\pi a^2} \frac{1}{r} e^{-r/a} , \quad (39)$$

la cual no puede identificarse como la ecuación de Poisson (28). Así, la ley de Gauss (26) no será válida en la electrostática generalizada. Por lo que, debemos modificar o generalizar la ley de Gauss.

En primer lugar, observemos que probada la relación⁴:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int d^3x \frac{1}{a^2 r} e^{-r/a} \varphi(r) = \varphi(0) , \quad (40)$$

para cualquier función suave φ con comportamiento asintótico polinomial. Luego, se tiene

³Sea $f(x)$ una función continua en $x = 0$, luego, se cumple:

$$\delta(x) f(x) = \delta(x) f(0) .$$

En particular, si $f(0) = 0$, entonces,

$$\delta(x) f(x) = 0 .$$

⁴Otras secuencias convergentes a la δ -Dirac y sus propiedades pueden encontrarse en [22].

que si en (39) hacemos $a \rightarrow 0^+$, recuperamos la ecuación de Poisson (28). En segundo lugar, vemos que, dada la expresión del potencial (15), la relación (39) puede expresarse como:

$$\nabla^2 V(r) = -\frac{q_1}{4\pi a^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{a^2} V(r) , \quad (41)$$

o, equivalentemente, en la forma:

$$(1 - a^2 \nabla^2) V(r) = \frac{q_1}{4\pi} \frac{1}{r} . \quad (42)$$

Luego, según (36), si en esta se toma el laplaciano se encuentra que:

$$(1 - a^2 \nabla^2) \nabla^2 V(r) = -q_1 \delta(\vec{x}) . \quad (43)$$

Esta última nos induce a proponer la *ley de Gauss generalizada*:

$$(1 - a^2 \nabla^2) \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) . \quad (44)$$

Finalmente, en un sistema continuo, de densidad de carga $\rho(\vec{x})$, se tiene la energía electrostática:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) , \quad (45)$$

y, sustituyendo el potencial eléctrico generalizado (8), puede expresarse como:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \left(1 - e^{-|\vec{x} - \vec{y}|/a}\right) . \quad (46)$$

Por otro lado, si se toma en cuenta la ley de Gauss generalizada (44), entonces $\mathcal{E}$ se escribirá como:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3x (1 - a^2 \nabla^2) \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) V(\vec{x}) , \quad (47)$$

en donde la integral es realizada en todo el espacio. Tomando la divergencia por partes y considerando la relación entre el campo eléctrico y el potencial (9), se encuentra que:

$$V (1 - a^2 \nabla^2) \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left[V \vec{E} - a^2 V \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - a^2 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) \right] + \vec{E}^2 + a^2 (\nabla \cdot \vec{E})^2 . \quad (48)$$

Usando el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\int_v d^3x \nabla \cdot \left[V \vec{E} - a^2 V \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - a^2 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) \right] = \int_{\partial v} d\vec{\sigma} \cdot \left[V \vec{E} - a^2 V \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - a^2 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) \right], \quad (49)$$

y, teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de los campos, por ejemplo al escoger una superficie esférica de radio r centrada en una distribución de carga (con carga total Q), tendremos que para r lo suficientemente grande $V \sim Q/r$, $|\vec{E}| \sim Q/r^2$, $|\nabla \cdot \vec{E}| \sim Q/r^3$ y $|\nabla (\nabla \cdot \vec{E})| \sim Q/r^4$, entonces:

$$\int_{\partial v} d\vec{\sigma} \cdot \left[V(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) - a^2 V(\vec{x}) \nabla (\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x})) - a^2 \vec{E}(\vec{x}) (\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x})) \right] = 0. \quad (50)$$

Así, la energía de interacción electrostática:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\vec{E}^2 + a^2 (\nabla \cdot \vec{E})^2 \right], \quad (51)$$

es definida positiva. En el límite $a \rightarrow 0^+$ la expresión se reduce al caso usual e igualmente cuando el campo eléctrico es constante.

C. Electromagnetismo de Maxwell generalizado

En la sección anterior se encontraron las leyes generalizadas que permiten establecer el campo eléctrico generado por un sistema de cargas en reposo. En el caso de tener un sistemas de cargas en movimiento se debe tener en consideración que la densidad de carga sea dependiente del tiempo $\rho(t, \vec{x})$, y que además, debamos considerar una densidad de corriente también dependiente del tiempo $\vec{j}(t, \vec{x})$. Dadas estas fuentes, en el electromagnetismo de Maxwell la descripción de campo eléctrico $\vec{E}(t, \vec{x})$ y magnético $\vec{B}(t, \vec{x})$, en un medio vacío,

vienen dadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}) \quad \cdots \text{ley de Gauss eléctrica} \quad (52)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t, \vec{x}) + \nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{j}(t, \vec{x}) \quad \cdots \text{ley de Ampere-Maxwell} \quad (53)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \quad \cdots \text{ley de Gauss magnética} \quad (54)$$

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t, \vec{x}) = 0 \quad \cdots \text{ley de Faraday} , \quad (55)$$

donde c es la rapidez de la luz en el vacío⁵, y, estas ecuaciones se conocen como *ecuaciones de Maxwell*.

Las ecuaciones de Maxwell también pueden expresarse en términos de los potenciales. Para esto, en primer lugar, notemos que de la tercera ecuación (54), el campo magnético puede expresarse como:

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(t, \vec{x}) , \quad (56)$$

donde $\vec{A}(t, \vec{x})$ es conocido como el potencial vectorial electromagnético. Además, al sustituir (56) en la ley de Faraday (55),

$$\nabla \times \left(\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(t, \vec{x}) \right) = 0 , \quad (57)$$

se encuentra que el campo eléctrico se puede expresar como:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(t, \vec{x}) - \nabla A^0(t, \vec{x}) , \quad (58)$$

donde $A^0(t, \vec{x})$ es conocido como potencial escalar electromagnético⁶. De (56) y (58), es claro que los campos eléctrico y magnético no cambian si los potenciales se transforman como:

$$A^0(t, \vec{x}) \rightarrow A^0(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}(t, \vec{x}) \quad (59)$$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) \rightarrow \vec{A}(t, \vec{x}) - \nabla \chi(t, \vec{x}) \quad (60)$$

⁵Ya que estamos considerando la permitividad eléctrica ε_0 y la permeabilidad magnética μ_0 , en el vacío, normalizadas a 1. Entonces,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 1 ,$$

cuyo valor se tomará en forma explícita o implícita a lo largo de esta tesis.

⁶Al comparar (9) con (58), vemos que en el caso estático, $A^0(t, \vec{x})$ debe coincidir con el potencial eléctrico $V(\vec{x})$,

donde χ es una función diferenciable. Estas relaciones son conocidas como *transformaciones de calibre* y dejan a su vez invariante las ecuaciones de Maxwell.

Para expresar las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, en primer lugar escribamos las coordenadas del espacio-tiempo como,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) , \quad (61)$$

donde la primera coordenada $x^0 = ct$ es asociada al tiempo, aunque tiene las mismas unidades que las coordenadas espaciales x^1, x^2, x^3 . Luego, se denotamos las derivadas correspondientes a estas coordenadas como:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} . \quad (62)$$

Además, con las componentes del campo eléctrico $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$ y magnético $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ se define el tensor antisimétrico:

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix} , \quad (63)$$

conocido como el *tensor de Faraday*. Igualmente, con la densidad de carga ρ y las componentes de la densidad de corriente j^1, j^2, j^3 se define la 4-corriente:

$$j^\nu = (c\rho, j^1, j^2, j^3) , \quad (64)$$

con esta cantidad, la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \vec{x}) + \nabla \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = 0 , \quad (65)$$

puede escribirse como:

$$\partial_\nu j^\nu(x) = 0 . \quad (66)$$

Así, el primer par de ecuaciones de Maxwell (52), (53) pueden escribirse como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) . \quad (67)$$

De la definición de $F^{\mu\nu}(x)$ dada en (63) y de las relaciones (56), (58) vemos que el tensor de Faraday puede expresarse como derivadas de los potenciales, según:

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) , \quad (68)$$

en donde se han introducido las derivadas:

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu , \quad (69)$$

siendo $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Luego, el primer par de las ecuaciones de Maxwell (67), resulta en una ecuación de segundo orden del 4-potencial electromagnético,

$$A^\nu = (A^0, A^1, A^2, A^3) . \quad (70)$$

En el formalismo lagrangiano de la teoría de campos, el primer par de las ecuaciones de Maxwell (67) puede obtenerse del principio de Hamilton, en donde las ecuaciones de movimiento se obtienen al sustituir en las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0 , \quad (71)$$

la lagrangiana $\mathcal{L}$ correspondiente a la teoría. Para el electromagnetismo de Maxwell, la lagrangiana es dada como:

$$\mathcal{L}_{M+I} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - A_\alpha j^\alpha , \quad (72)$$

con:

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\sigma} \eta_{\beta\rho} F^{\sigma\rho} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha , \quad (73)$$

en donde se ha introducido $\eta_{\alpha\sigma} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Además, en esta expresión se identi-

fican los términos:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (74)$$

$$\mathcal{L}_I = -A_\alpha j^\alpha, \quad (75)$$

siendo el primero la lagrangiana de Maxwell, que corresponde a la teoría libre, y, el segundo, es el término de interacción entre el campo y la fuente.

Para la lagrangiana (72), se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{M-I}}{\partial A_\nu} = -j^\nu \quad (76)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{M-I}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}, \quad (77)$$

y, sustituyendo en las ecuaciones de Euler-Lagrange (71), se obtiene la ecuación (67),

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (78)$$

El segundo par de las ecuaciones de Maxwell (54), (55) se pueden expresar en forma covariante, a partir de la identidad de Bianchi:

$$\partial_\mu F_{\sigma\rho} + \partial_\sigma F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\sigma} = 0, \quad (79)$$

la cual es equivalente a⁷:

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\mu F_{\sigma\rho} = 0, \quad (80)$$

siendo $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ los símbolos de Levi-Civita de 4 índices. Esta última relación, se puede reescribir como:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (81)$$

donde,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}, \quad (82)$$

se conoce como el *dual del tensor de Faraday*. Además, dadas las componentes del tensor de

⁷Se comprueba si se toma en cuenta que tanto $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ como $F_{\sigma\rho}$ son antisimétricos.

Faraday (63), obtenemos que:

$$\left[\tilde{F}^{\mu\nu} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (83)$$

Entonces, al expresar (81) por componentes, estos resultan ser iguales al segundo par de las ecuaciones de Maxwell (54), (55).

Finalmente, observemos que las transformaciones de calibre (59), (60) se pueden expresar como sigue:

$$A_\alpha(x) \rightarrow A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \chi(x) . \quad (84)$$

en donde cabe destacar que la transformación solo es en la forma del campo y no en el punto del espacio-tiempo donde es evaluado. Si aplicamos esta transformación a la lagrangiana (72) se obtiene:

$$\mathcal{L}'_{M+I} = \mathcal{L}_{M+I} - (\partial_\alpha \chi) j^\alpha , \quad (85)$$

la cual se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}'_{M+I} = \mathcal{L}_{M+I} - \partial_\alpha (\chi j^\alpha) + \chi \partial_\alpha j^\alpha , \quad (86)$$

y, cumpliéndose la ecuación de continuidad (66),

$$\mathcal{L}'_{M+I} = \mathcal{L}_{M+I} - \partial_\alpha \left(\frac{1}{c} \chi j^\alpha \right) . \quad (87)$$

Además, considerando que lagrangianas que difieren en una divergencia son equivalentes, afirmamos que:

$$\mathcal{L}'_{M+I} \simeq \mathcal{L}_{M+I} , \quad (88)$$

entonces, concluimos que esta lagrangiana es invariante por las transformaciones (84), conocidas como *transformaciones de calibre*.

C.1. Electromagnetismo de Podolsky

Para una teoría del electromagnetismo que nos permita obtener las leyes generalizadas de la electrostática (17) y (44), debemos de considerar una lagrangiana que contemple al menos segundas derivadas de los 4-potenciales. Es decir,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta, \partial_\alpha \partial_\sigma A_\beta] . \quad (89)$$

Para que la teoría obtenida sea invariante relativista, la construcción de esta debe ser tal que todos los tensores de Lorentz estén contraidos. Además, la teoría debe ser invariante por transformaciones de calibre (84), es decir, si se realizan las variaciones en primer orden:

$$\delta A_\beta = \partial_\beta \chi , \quad \delta \partial_\alpha A_\beta = \partial_\alpha \partial_\beta \chi , \quad \delta \partial_\alpha \partial_\sigma A_\beta = \partial_\alpha \partial_\sigma \partial_\beta \chi , \quad (90)$$

entonces, la variación en primer orden de la lagrangiana $\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} \delta A_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} \delta \partial_\alpha A_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\sigma A_\beta)} \delta \partial_\alpha \partial_\sigma A_\beta \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} \partial_\beta \chi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} \partial_\alpha \partial_\beta \chi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\sigma A_\beta)} \partial_\alpha \partial_\sigma \partial_\beta \chi , \end{aligned} \quad (91)$$

debe ser nula. Así, siendo $\partial_\beta \chi$, $\partial_\alpha \partial_\beta \chi$ y $\partial_\alpha \partial_\sigma \partial_\beta \chi$ funciones independientes, entonces, si sus coeficientes son nulos se tendrá una variación nula de la lagrangiana. En general, se busca que se cumplan las relaciones del tipo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_{n-1}} A_{\nu_n})} \partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_n} \chi = 0 . \quad (92)$$

Se observa que las funciones independientes $\partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_n} \chi$ son completamente simétricas. Entonces, en la relación buscada, solo contribuye la parte completamente simétrica de los coeficientes, es decir,

$$\left[\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{\nu_{\sigma(n-1)}} A_{\nu_{\sigma(n)}})} \right] \partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_n} \chi = 0 , \quad (93)$$

donde P_n es el grupo de permutaciones de n índices. Sin embargo, ya que $\partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_{n-1}} A_{\nu_n}$ es completamente simétrico respecto a los primeros $n-1$ índices, entonces, se repetirán $(n-1)!$

veces términos idénticos en la sumatoria. Finalmente, la relación buscada se reduce a:

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{\sigma \in Z_n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\nu_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{\nu_{\sigma(n-1)}} A_{\nu_{\sigma(n)}} \right)} \right] \partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_n} \chi = 0 , \quad (94)$$

y, se cumplirá si:

$$\sum_{\sigma \in Z_n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\nu_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{\nu_{\sigma(n-1)}} A_{\nu_{\sigma(n)}} \right)} = 0 . \quad (95)$$

donde Z_n es el grupo cíclico de n índices. Por lo tanto, la invariancia por transformaciones de calibre se consigue si se cumplen las relaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0 \quad (96)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = 0 \quad (97)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\sigma A_\beta)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \partial_\alpha A_\sigma)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\beta A_\alpha)} = 0 . \quad (98)$$

De la primera relación (96), se concluye que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de A_β . Mientras que de la segunda (97) y tercera relación (98), o su generalización (95), vemos que si la lagrangiana depende de $F_{\mu_1 \dots \mu_n}$, siendo esta una combinación lineal de las derivadas del campo A_α . Entonces, (95) se puede expresar como sigue:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu_1 \dots \mu_n}} \sum_{\sigma \in Z_n} \frac{\partial F_{\mu_1 \dots \mu_n}}{\partial \left(\partial_{\nu_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{\nu_{\sigma(n-1)}} A_{\nu_{\sigma(n)}} \right)} = 0 , \quad (99)$$

por lo que será satisfecha si:

$$\sum_{\sigma \in Z_n} \frac{\partial F_{\mu_1 \dots \mu_n}}{\partial \left(\partial_{\nu_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{\nu_{\sigma(n-1)}} A_{\nu_{\sigma(n)}} \right)} = 0 . \quad (100)$$

Así, bastará que:

$$F_{\mu_1 \dots \mu_n} = \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_{n-1}} A_{\mu_n} - \partial_{\mu_n} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{n-2}} A_{\mu_{n-1}} , \quad (101)$$

ya que:

$$\sum_{\sigma \in Z_n} \frac{\partial F_{\mu_1 \dots \mu_n}}{\partial \left(\partial_{\nu_{\sigma(1)}} \dots \partial_{\nu_{\sigma(n-1)}} A_{\nu_{\sigma(n)}} \right)} = \sum_{\sigma \in Z_n} \delta_{\mu_1}^{\nu_{\sigma(1)}} \delta_{\mu_2}^{\nu_{\sigma(2)}} \dots \delta_{\mu_{n-1}}^{\nu_{\sigma(n-1)}} \delta_{\mu_n}^{\nu_{\sigma(n)}} - \sum_{\sigma \in Z_n} \delta_{\mu_n}^{\nu_{\sigma(1)}} \delta_{\mu_1}^{\nu_{\sigma(2)}} \dots \delta_{\mu_{n-2}}^{\nu_{\sigma(n-1)}} \delta_{\mu_{n-1}}^{\nu_{\sigma(n)}} , \quad (102)$$

es idénticamente nula, por reordenamiento cíclico de la segunda sumatoria del lado derecho.

Por lo que, para que se cumpla (97) será suficiente que $\mathcal{L}$ dependa de:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha , \quad (103)$$

y, para que se cumpla (98), que $\mathcal{L}$ dependa de:

$$F_{\alpha\sigma\beta} = \partial_\alpha \partial_\sigma A_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha A_\sigma , \quad (104)$$

tensor que también puede escribirse como:

$$F_{\alpha\sigma\beta} = \partial_\alpha F_{\sigma\beta} . \quad (105)$$

Por lo tanto, de la condición de invariancia por transformación de calibre, encontramos que la densidad lagrangiana debe ser tal que:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} [F_{\alpha\beta}, \partial_\alpha F_{\sigma\beta}] . \quad (106)$$

Así, en primer lugar, debemos incluir el término correspondiente a la teoría de Maxwell,

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} , \quad (107)$$

y, para términos de segundo orden, tomamos en cuenta la antisimetría del tensor de Faraday, vemos que son solo posibles los siguientes términos de este tipo:

$$\mathcal{L}_1 = \partial_\alpha F_{\sigma\beta} \partial^\alpha F^{\sigma\beta} \quad (108)$$

$$\mathcal{L}_2 = \partial_\alpha F_{\sigma\beta} \partial^\sigma F^{\beta\alpha} \quad (109)$$

$$\mathcal{L}_3 = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} , \quad (110)$$

De la identidad de Bianchi,

$$\partial^\alpha F^{\sigma\beta} = - \left(\partial^\sigma F^{\beta\alpha} + \partial^\beta F^{\alpha\sigma} \right) , \quad (111)$$

la lagrangiana $\mathcal{L}_1$ podrá expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -\partial_\alpha F_{\sigma\beta} \left(\partial^\sigma F^{\beta\alpha} + \partial^\beta F^{\alpha\sigma} \right) \\ &= -\partial_\alpha F_{\sigma\beta} \partial^\sigma F^{\beta\alpha} - \partial_\alpha F_{\sigma\beta} \partial^\beta F^{\alpha\sigma} , \end{aligned} \quad (112)$$

y, haciendo el intercambio $\sigma \rightleftharpoons \beta$ en el último término,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -\partial_\alpha F_{\sigma\beta} \partial^\sigma F^{\beta\alpha} - \partial_\alpha F_{\beta\sigma} \partial^\sigma F^{\alpha\beta} \\ &= -\partial_\alpha F_{\sigma\beta} \partial^\sigma F^{\beta\alpha} - \partial_\alpha F_{\sigma\beta} \partial^\sigma F^{\beta\alpha} , \end{aligned} \quad (113)$$

por lo que,

$$\mathcal{L}_1 = -2\mathcal{L}_2 , \quad (114)$$

es decir, las posibilidades $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son equivalentes. Por otro lado, vemos que $\mathcal{L}_3$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= \partial_\alpha \left(F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} \right) - F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial^\sigma F_{\sigma\beta} \\ &= \partial_\alpha \left(F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} \right) - F^{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial_\alpha F_{\sigma\beta} , \end{aligned} \quad (115)$$

y, nuevamente de la identidad de Bianchi,

$$\partial_\alpha F_{\sigma\beta} = -(\partial_\sigma F_{\beta\alpha} + \partial_\beta F_{\alpha\sigma}) , \quad (116)$$

vemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= \partial_\alpha \left(F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} \right) + F^{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial_\sigma F_{\beta\alpha} + F^{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial_\beta F_{\alpha\sigma} \\ &= \partial_\alpha \left(F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} \right) - \partial^\sigma \left(F^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_{\sigma\beta} \right) + \partial^\sigma F^{\alpha\beta} \partial_\sigma F_{\alpha\beta} \\ &\quad + \partial^\sigma F^{\beta\alpha} \partial_\beta F_{\alpha\sigma} , \end{aligned} \quad (117)$$

por lo que,

$$\mathcal{L}_3 = \partial_\alpha \left(F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} \right) - \partial^\sigma \left(F^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_{\sigma\beta} \right) + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 , \quad (118)$$

es decir,

$$\mathcal{L}_3 \simeq \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 . \quad (119)$$

Finalmente, podemos afirmar que el único término independiente de segundo orden es $\mathcal{L}_3$. Así, en la generalización de la teoría de Maxwell, se considera la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{a^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} , \quad (120)$$

conocida como *lagrangiana de Podolsky*, en donde a es un parámetro real con unidades de longitud.

Si se incluye el término de interacción con una fuente j^α , entonces, la lagrangiana considerada será:

$$\mathcal{L}_{P-I} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{a^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} - A_\alpha j^\alpha \quad (121)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento, debemos considerar las ecuaciones de Eules-Lagrange para una teoría de segundo orden⁸:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} + \partial_\rho \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\mu A_\nu)} = 0 \quad (122)$$

Luego, para la lagrangiana (121) se obtienen los resultados:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{P-I}}{\partial A_\nu} = -j^\nu \quad (123)$$

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{P-I}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu (-F^{\mu\nu}) = \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad (124)$$

$$\partial_\rho \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{P-I}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho A_\nu)} = a^2 \partial_\rho \partial_\mu (\eta^{\mu\rho} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} - \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\rho}) \quad (125)$$

y, sustituyendo en las ecuaciones de Euler-Lagrange (122), obtenemos las ecuaciones:

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (126)$$

⁸Para más detalles ver el apéndice A.

en donde se ha tomado en cuenta que: $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$ y $\partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho} = 0$.

De la definición de las componentes del tensor de Faraday (63), se tiene que las componentes del campo eléctrico $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$ pueden expresarse como:

$$E^i = -F^{0i} , \quad (127)$$

mientras que las componentes del campo magnético $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ como:

$$B^k = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{ij} . \quad (128)$$

Ahora desarrollamos por componentes la ecuación de movimiento (126). Teniendo en cuenta la antisimetría del tensor de Faraday consideremos en primer lugar $\nu = 0$:

$$(1 + a^2\square) \partial_i F^{i0} = j^0 , \quad (129)$$

e identificando las componentes del campo eléctrico y la densidad de carga, se obtiene:

$$(1 + a^2\square) \nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}) , \quad (130)$$

la cual corresponde a la generalización de la ley de Gauss (52). En el límite electrostático esta se reduce a:

$$(1 - a^2\nabla^2) \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) , \quad (131)$$

tal como se encontró en (44). En segundo lugar, consideremos $\nu = k$ en (126),

$$(1 + a^2\square) \left(\partial_0 F^{0k} + \partial_j F^{jk} \right) = j^k , \quad (132)$$

identificando las componentes del campo eléctrico y magnético,

$$(1 + a^2\square) \left(-\partial_0 E^k - \varepsilon^{ijk} \partial_j B^i \right) = j^k , \quad (133)$$

reescribimos esta relación en forma vectorial,

$$(1 + a^2\square) \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t, \vec{x}) + \nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) \right] = \vec{j}(t, \vec{x}) , \quad (134)$$

observamos que esta es la generalización de la ley de Ampere-Maxwell (53). Por último, como la identidad de Bianchi solo depende de la definición del tensor de Faraday, entonces, la ley de Gauss magnética (54) y la ley de Faraday (55) se siguen cumpliendo.

C.2. Condición de fijación de calibre

El primer par de las ecuaciones del electromagnetismo de Podolsky, obtenidas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se expresa usualmente en términos del tensor de Faraday,

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu , \quad (135)$$

y, al expresar las componentes del tensor de Faraday en términos del 4-potencial electromagnético,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu , \quad (136)$$

se encuentra que las componentes del 4-potencial cumplen con la ecuación:

$$(1 + a^2 \square) (\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu(x) = j^\nu(x) . \quad (137)$$

Es posible resolver las ecuaciones (137) vía el método de la función de Green. Para esto, en primer lugar se define a la función de Green $G_{\nu\alpha}(x - y)$ como aquella que cumpla con la ecuación:

$$(1 + a^2 \square) (\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) G_{\mu\alpha}(x - y) = \delta^\nu_\alpha \delta(x - y) . \quad (138)$$

Entonces, la solución de las ecuaciones de movimiento se escribirá como:

$$A_\mu(x) = A_\mu^0(x) + \int d^4y G_{\mu\alpha}(x - y) j^\alpha(y) , \quad (139)$$

donde $A_\mu^0(x)$ es la solución de la teoría libre, es decir, cuando $j^\nu(x) = 0$.

Así, bastará resolver la ecuación de la función de Green (138), cuya solución se puede

expresar en función de su transformada de Fourier $\hat{G}_{\mu\alpha}(k)$,

$$G_{\mu\alpha}(x-y) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{G}_{\mu\alpha}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} . \quad (140)$$

Además, teniendo en cuenta que la δ -Dirac también puede expresarse en función de su transformada de Fourier,

$$\delta(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-y)} . \quad (141)$$

Al reemplazar estas expresiones en (138), la función $\hat{G}_{\mu\alpha}(k)$ debe cumplir con la ecuación;

$$(2\pi)^2 [1 - a^2(k \cdot k)] [-(k \cdot k) \eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] \hat{G}_{\mu\alpha}(k) = \delta^\nu_\alpha . \quad (142)$$

Para que exista una solución de (142), el determinante de:

$$E^{\mu\nu}(k) \equiv -(k \cdot k) \eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu , \quad (143)$$

debe ser no nulo. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \det[E^{\mu\nu}(k)] &= \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} E^{0\alpha}(k) E^{1\beta}(k) E^{2\mu}(k) E^{3\nu}(k) \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \left(-(k \cdot k) \eta^{0\alpha} + k^0 k^\alpha \right) \left(-(k \cdot k) \eta^{1\beta} + k^1 k^\beta \right) \\ &\quad \times \left(-(k \cdot k) \eta^{2\mu} + k^2 k^\mu \right) \left(-(k \cdot k) \eta^{3\nu} + k^3 k^\nu \right) , \end{aligned} \quad (144)$$

puede expandirse como:

$$\begin{aligned} \det[E^{\mu\nu}(k)] &= (k \cdot k)^4 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{0\alpha} \eta^{1\beta} \eta^{2\mu} \eta^{3\nu} \\ &\quad - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k^0 k^\alpha \eta^{1\beta} \eta^{2\mu} \eta^{3\nu} - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{0\alpha} k^1 k^\beta \eta^{2\mu} \eta^{3\nu} \\ &\quad - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{0\alpha} \eta^{1\beta} k^2 k^\mu \eta^{3\nu} - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{0\alpha} \eta^{1\beta} \eta^{2\mu} k^3 k^\nu \\ &\quad + (k \cdot k)^2 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha k^\beta k^0 k^1 \eta^{2\mu} \eta^{3\nu} + \dots , \end{aligned} \quad (145)$$

observandose que en los últimos términos se tienen producto de k 's, los cuales son simétricos, contraídos con $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$. Por lo que los últimos términos son idénticamente nulos, luego, el

determinante se reduce a:

$$\begin{aligned}
\det [E^{\mu\nu} (k)] &= (k \cdot k)^4 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{0\alpha} \eta^{1\beta} \eta^{2\mu} \eta^{3\nu} \\
&\quad - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k^0 k^\alpha \eta^{1\beta} \eta^{2\mu} \eta^{3\nu} - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{0\alpha} k^1 k^\beta \eta^{2\mu} \eta^{3\nu} \\
&\quad - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{0\alpha} \eta^{1\beta} k^2 k^\mu \eta^{3\nu} - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{0\alpha} \eta^{1\beta} \eta^{2\mu} k^3 k^\nu ,
\end{aligned} \tag{146}$$

siendo $\eta^{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$, entonces,

$$\begin{aligned}
\det [E^{\mu\nu} (k)] &= (k \cdot k)^4 \varepsilon_{0123} \eta^{00} \eta^{11} \eta^{22} \eta^{33} \\
&\quad - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{0123} k^0 k^0 \eta^{11} \eta^{22} \eta^{33} - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{0123} \eta^{00} k^1 k^1 \eta^{22} \eta^{33} \\
&\quad - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{0123} \eta^{00} \eta^{11} k^2 k^2 \eta^{33} - (k \cdot k)^3 \varepsilon_{0123} \eta^{01} \eta^{11} \eta^{22} k^3 k^3 ,
\end{aligned} \tag{147}$$

siendo $\varepsilon_{0123} = 1$ y $\eta^{\mu\nu} = \text{diag} (1, -1, -1, -1)$, entonces,

$$\det [E^{\mu\nu} (k)] = -(k \cdot k)^4 + (k \cdot k)^3 \left[(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2 \right] , \tag{148}$$

Así, se encuentra que:

$$\det [E^{\mu\nu} (k)] = 0 , \tag{149}$$

de aquí, no es posible encontrar una función $\hat{G}_{\mu\alpha} (k)$ que cumpla la ecuación (142).

Para encontrar el campo vía el método de la función de Green, debemos modificar la ecuación (137). Con este fin, observemos que tal ecuación se puede reescribir como:

$$(1 + a^2 \square) \square A^\nu (x) - \partial^\nu \left[(1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu \right] (x) = j^\nu (x) . \tag{150}$$

De aquí, vemos que si se asume la *condición generalizada de Lorentz*:

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu (x) = 0 , \tag{151}$$

entonces, la ecuación (137) se reduce a:

$$(1 + a^2 \square) \square A^\nu(x) = j^\nu(x) \quad (152)$$

Para confirmar que siempre es posible asumir la condición (151), tengamos en cuenta la invariancia de la teoría por transformaciones de calibre,

$$A'_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) = A'_\mu(x) + \partial_\mu f(x) , \quad (153)$$

entonces,

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu A'^\mu(x) = (1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu(x) - (1 + a^2 \square) \square f(x) , \quad (154)$$

Así, partiendo de un campo $A'^\mu(x)$ que no necesariamente cumple (151), realizamos la transformación de calibre escogiendo un campo escalar $f(x)$ tal que:

$$(1 + a^2 \square) \square f(x) = - (1 + a^2 \square) \partial_\mu A'^\mu(x) , \quad (155)$$

por lo que, el campo transformado $A^\mu(x)$ sí cumple con la condición (151).

Ahora, la función de Green correspondiente a la ecuación (152), debe cumplir con la ecuación:

$$(1 + a^2 \square) \square G_{\mu\alpha}(x - y) = \eta_{\mu\alpha} \delta(x - y) , \quad (156)$$

y, entonces, su transformada de Fourier debe cumplir con:

$$-(2\pi)^2 [1 - a^2 (k \cdot k)] (k \cdot k) \hat{G}_{\mu\alpha}(k) = \eta_{\mu\alpha} . \quad (157)$$

Así, la transformada de la función de Green será:

$$\hat{G}_{\mu\alpha}(k) = -\eta_{\mu\alpha} (2\pi)^{-2} \frac{1}{[1 - a^2 (k \cdot k)] (k \cdot k)} . \quad (158)$$

Finalmente, introducimos el parámetro

$$m_a \equiv \frac{1}{a} , \quad (159)$$

conocido como *masa de Podolsky*. Luego, la función $\hat{G}_{\mu\alpha}(k)$ se puede reescribir como:

$$\hat{G}_{\mu\alpha}(k) = -\eta_{\mu\alpha} (2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_a^2} \right) . \quad (160)$$

donde $k^2 = k \cdot k$. Además, si se introducen las definiciones:

$$\omega_0 \equiv |\vec{k}| , \quad \omega_{m_a} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m_a^2} , \quad (161)$$

entonces, la función de Green se reescribirá como:

$$\hat{G}_{\mu\alpha}(k) = -\eta_{\mu\alpha} (2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k_0^2 - \omega_0^2} - \frac{1}{k_0^2 - \omega_{m_a}^2} \right) , \quad (162)$$

o, en forma equivalente, como:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\mu\alpha}(k) = & -\eta_{\mu\alpha} (2\pi)^{-2} \frac{1}{(k_0 - \omega_0)(k_0 - (-\omega_0))} \\ & + \eta_{\mu\alpha} (2\pi)^{-2} \frac{1}{(k_0 - \omega_{m_a})(k_0 - (-\omega_{m_a}))} . \end{aligned} \quad (163)$$

Es claro que esta función tiene los polos:

$$k_0 = \pm\omega_0 , \quad k_0 = \pm\omega_{m_a} , \quad (164)$$

es decir, $\hat{G}_{\mu\alpha}(k)$ es singular para dichos valores.

D. Propagadores electromagnéticos

Según el principio de causalidad: *la causa precede al efecto*. En un sistema físico se entiende que las cantidades observadas en un cierto instante se dan a causa de la propagación de las interacciones que ocurren entre las partes del sistema o debido a un agente externo. Sin embargo, en una teoría no relativista no hay ninguna restricción en la rapidez de propagación

de una interacción, por lo que las cantidades observadas se explican incluyendo interacciones que ocurren en el mismo instante de medición.

En una teoría relativista, debemos tomar en cuenta el segundo postulado de la relatividad especial: *la rapidez de la luz, en el vacío, es la misma en cualquier marco de referencia inercial*. Esto implica que no es posible encontrar referenciales inerciales con movimiento relativo que supere la rapidez de la luz. Así, cualquier interacción se debe propagar con una rapidez máxima igual a la rapidez de la luz. La combinación del principio de causalidad y los postulados de la relatividad especial, resulta en la conocida *causalidad relativista*.

En el caso de un sistemas de cargas y corrientes, la interacción considerada es la electro-magnética. Luego, de la expresión de los potenciales electromagnéticos,

$$A_\mu(x) = \int d^4y G_{\mu\alpha}(x-y) j^\alpha(y) , \quad (165)$$

se observa que la propagación es dada por la función de Green $G_{\mu\alpha}(x-y)$. Además, se observa que la integración considera todos los valores posibles de y^0 , incluso para aquellos mayores a x^0 . Es decir, se contempla contribuciones al campo provenientes del futuro.

Las contribuciones del futuro en cantidades observables son prohibidas por el principio de causalidad. Sin embargo, los potenciales electromagnéticos $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ no son cantidades físicas, sino lo son el campo eléctrico y magnético,

$$\vec{E}(x) = -\partial_0 \vec{A}(x) - \nabla A^0(x) \quad (166)$$

$$\vec{B}(x) = \nabla \times \vec{A}(x) . \quad (167)$$

Dado que la función de Green se expresa como:

$$G_{\mu\alpha}(x-y) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{G}_{\mu\alpha}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} , \quad (168)$$

en donde,

$$\hat{G}_{\mu\alpha}(k) = -\eta_{\mu\alpha} (2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k_0^2 - \omega_0^2} - \frac{1}{k_0^2 - \omega_{m_a}^2} \right) , \quad (169)$$

es decir, se tienen contribuciones concentradas en:

$$\omega_0 = |\vec{k}| \quad (170)$$

$$\omega_{m_a} = \sqrt{\vec{k}^2 + m_a^2} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m_a^2} . \quad (171)$$

Luego, de estas relaciones de dispersión, la propagación se dá con rapidez:

$$\frac{d\omega_0}{d|\vec{k}|} = 1 \quad (172)$$

$$\frac{d\omega_{m_a}}{d|\vec{k}|} = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{\vec{k}^2 + m_a^2}} < 1 , \quad (173)$$

Por lo tanto, la interacción electromagnética se propaga con una rapidez menor o igual a la rapidez de la luz.

Muy lejos de la fuente, los campos cumplen con la ecuación:

$$(1 + a^2 \square) \square A_\mu(x) = 0 , \quad (174)$$

la cual tiene como soluciones independientes a los paquetes de onda de frecuencia positiva:

$$A_\mu^{(+)}(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \, a_\mu(k) e^{-ik \cdot x} |_{k^0 > 0} , \quad (175)$$

y de frecuencia negativa,

$$A_\mu^{(-)}(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \, a_\mu(k) e^{-ik \cdot x} |_{k^0 < 0} . \quad (176)$$

Las cuales pueden resultar de la propagación de interacciones en el pasado y/o futuro. Todas estas posibilidades son las que analizaremos a continuación.

D.1. Propagador electromagnético retardado

En el sentido del principio de causalidad, la propagación debe ser desde el pasado hacia el presente. Con este fin definiremos el propagador retardado en el k -espacio: $\hat{D}_{\mu\alpha}^R(k)$, como

el resultado de dislocar los polos de la transformada de Fourier de la función de Green,

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\mu\alpha}(k) &= -\eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \frac{1}{(k_0 - \omega_0)(k_0 - (-\omega_0))} \\ &\quad + \eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \frac{1}{(k_0 - \omega_{m_a})(k_0 - (-\omega_{m_a}))} ,\end{aligned}\quad (177)$$

según,

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 - i0^+ \quad (178)$$

$$-\omega_0 \rightarrow -\omega_0 - i0^+ \quad (179)$$

$$\omega_{m_a} \rightarrow \omega_{m_a} - i0^+ \quad (180)$$

$$-\omega_{m_a} \rightarrow -\omega_{m_a} - i0^+ , \quad (181)$$

donde 0^+ denota a un valor no negativo mucho menor a 1. Es decir, en el k -espacio, el propagador retardado es dado como:

$$\begin{aligned}\hat{D}_{\mu\alpha}^R(k) &= -\eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \frac{1}{[k_0 - (\omega_0 - i0^+)] [k_0 - (-\omega_0 - i0^+)]} \\ &\quad + \eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \frac{1}{[k_0 - (\omega_{m_a} - i0^+)] [k_0 - (-\omega_{m_a} - i0^+)]} ,\end{aligned}\quad (182)$$

simplificando,

$$\hat{D}_{\mu\alpha}^R(k) = -\eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} - \frac{1}{k^2 - m_a^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \right) . \quad (183)$$

Del resultado obtenido se identifican el propagador escalar retardado de masa nula:

$$\hat{D}_0^R(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} , \quad (184)$$

y el propagado retardado de masa m_a ,

$$\hat{D}_{m_a}^R(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - m_a^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} . \quad (185)$$

Además, la transformada inversa de estos propagadores son dados como⁹:

$$D_0^R(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{y}\|} \delta(x^0-y^0-\|\vec{x}-\vec{y}\|) \quad (186)$$

$$D_{m_a}^R(x-y) = \frac{\theta(x^0-y^0)}{2\pi} \left[\delta((x-y)^2) - \frac{m_a}{2} \frac{\theta((x-y)^2)}{\sqrt{x^2}} J_1\left(m_a \sqrt{(x-y)^2}\right) \right] , \quad (187)$$

donde J_1 es la función de Bessel de primer orden. Se observa que el propagador escalar D_0^R es no nulo si:

$$\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{x^0-y^0} = 1 , \quad (188)$$

es decir, D_0^R propaga la emisión del campo desde un punto $y = (y_0, \vec{y})$ hasta otro $x = (x_0, \vec{x})$ en el futuro, $x_0 > y_0$, con una rapidez igual a la rapidez de la luz. Mientras que $D_{m_a}^R$ es no nulo si:

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad , \quad x^0 > y^0 , \quad (189)$$

equivalentemente,

$$\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{x^0-y^0} \leq 1 , \quad (190)$$

es decir, D_0^R propaga la emisión del campo con una rapidez menor o igual a la rapidez de la luz.

Finalmente, podemos concluir que el propagador electromagnético retardado,

$$D_{\mu\alpha}^R(x-y) = \eta_{\mu\alpha} [D_0^R(x-y) - D_{m_a}^R(x-y)] , \quad (191)$$

propaga las interacciones desde el pasado al presente, con una rapidez máxima igual a la de la luz. Cumpliendo con el principio de causalidad relativista.

⁹Estos propagadores pueden derivarse a partir de la función de Pauli-Jordan, cuya deducción puede encontrarse en [23].

D.2. Propagador electromagnético de frecuencias positivas y negativas

Consideremos el propagador escalar retardado de masa m en el k -espacio,

$$\hat{D}_m^R(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} , \quad (192)$$

vemos que este se puede escribir como:

$$\hat{D}_m^R(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{1}{k_0 - (\omega_m - i0^+)} - \frac{1}{k_0 - (-\omega_m - i0^+)} \right) . \quad (193)$$

donde $\omega_m = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Ahora, expresemos en propagador escalar en el espacio de configuraciones,

$$D_m^R(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{D}_m^R(k) e^{-ik \cdot x} , \quad (194)$$

es decir,

$$\begin{aligned} D_m^R(x) &= -(2\pi)^{-4} \int d^3k \frac{1}{2\omega_m} \left(\int dk_0 \frac{1}{k_0 - \omega_m + i0^+} e^{-i(k_0 - \omega_m)x^0} \right) e^{-i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ &\quad + (2\pi)^{-4} \int d^3k \frac{1}{2\omega_m} \left(\int dk_0 \frac{1}{k_0 + \omega_m + i0^+} e^{-i(k_0 + \omega_m)x^0} \right) e^{i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} , \end{aligned} \quad (195)$$

en donde, identificamos las expresiones de la función de paso,

$$\theta(\pm z) = (2\pi)^{-1} \int dk \frac{i}{\pm k + i0^+} e^{-ikz} , \quad (196)$$

y, encontramos que $D_m^R(x)$ se puede expresar como:

$$D_m^R(x) = \theta(x^0) (2\pi)^{-3} \left(i \int d^3k \frac{1}{2\omega_m} e^{-i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - i \int d^3k \frac{1}{2\omega_m} e^{i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) . \quad (197)$$

Por otro lado, de las propiedad de la δ -Dirac: $f(x) \delta(x - y) = f(y) \delta(x - y)$, vemos que se cumple la relación:

$$\frac{1}{2\omega_m} e^{\mp i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \int dk_0 \frac{1}{2\omega_m} \delta(k_0 \mp \omega_m) e^{-ik \cdot x} , \quad (198)$$

por lo que, $D_m^R(x)$ se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} D_m^R(x) = & \theta(x^0) (2\pi)^{-2} \int d^4k \left(\frac{i}{2\pi} \right) \frac{\delta(k_0 - \omega_m)}{2\omega_m} e^{-ik \cdot x} \\ & + \theta(x^0) (2\pi)^{-2} \int d^4k \left(-\frac{i}{2\pi} \right) \frac{\delta(k_0 + \omega_m)}{2\omega_m} e^{-ik \cdot x}, \end{aligned} \quad (199)$$

De aquí, se introducen las definiciones de los propagadores de frecuencia positiva y negativa en el espacio de configuraciones, según:

$$D_m^{(\pm)}(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{D}_m^{(\pm)}(k) e^{-ik \cdot x}, \quad (200)$$

en donde $\hat{D}_m^{(\pm)}(k)$ son sus correspondientes versiones en el k -espacio,

$$\hat{D}_m^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \frac{\delta(k_0 \mp \omega_m)}{2\omega_m}. \quad (201)$$

Así, el propagador escalar retardado se expresa como:

$$D_m^R(x) = \theta(x^0) D_m^{(+)}(x) + \theta(x^0) D_m^{(-)}(x) \quad (202)$$

Volviendo al propagador electromagnético retardado ,

$$D_{\mu\alpha}^R(x-y) = \eta_{\mu\alpha} [D_0^R(x-y) - D_{m_a}^R(x-y)] , \quad (203)$$

de los resultados previos, vemos que esta se puede expresar como:

$$\begin{aligned} D_{\mu\alpha}^R(x-y) = & \eta_{\mu\alpha} \theta(x^0 - y^0) \left[D_0^{(+)}(x-y) - D_{m_a}^{(+)}(x-y) \right] \\ & + \eta_{\mu\alpha} \theta(x^0 - y^0) \left[D_0^{(-)}(x-y) - D_{m_a}^{(-)}(x-y) \right], \end{aligned} \quad (204)$$

En esta expresión queda en evidencia que este propagador propaga causalmente contribuciones al campo, tanto a la parte de frecuencias positivas como a la de frecuencias negativas.

D.3. Propagador electromagnético de Feynman

Como se ha visto la propagación de contribuciones a la parte de frecuencias positivas o negativas de un campo, pueden ser tanto desde el pasado al presente como del futuro al presente. Podemos plantearnos ahora el problema de construir un propagador que propague contribuciones de frecuencias positivas del pasado al presente, y de frecuencias negativas del futuro al presente. Tal propagador se conoce como el *propagador de Feynman*, y se construye dislocando los polos de la función de Green,

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\mu\alpha}(k) = & -\eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \frac{1}{(k_0 - \omega_0)(k_0 - (-\omega_0))} \\ & + \eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \frac{1}{(k_0 - \omega_{m_a})(k_0 - (-\omega_{m_a}))} ,\end{aligned}\quad (205)$$

según,

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 - i0^+ \quad (206)$$

$$-\omega_0 \rightarrow -\omega_0 + i0^+ \quad (207)$$

$$\omega_{m_a} \rightarrow \omega_{m_a} - i0^+ \quad (208)$$

$$-\omega_{m_a} \rightarrow -\omega_{m_a} + i0^+ , \quad (209)$$

obteniendo:

$$\begin{aligned}\hat{D}_{\mu\alpha}^F(k) = & -\eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \frac{1}{[k_0 - (\omega_0 - i0^+)] [k_0 - (-\omega_0 + i0^+)]} \\ & + \eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \frac{1}{[k_0 - (\omega_{m_a} - i0^+)] [k_0 - (-\omega_{m_a} + i0^+)]} .\end{aligned}\quad (210)$$

Simplificando la expresión,

$$\hat{D}_{\mu\alpha}^F(k) = -\eta_{\mu\alpha}(2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k^2 + i0^+} - \frac{1}{k^2 - m_a^2 + i0^+} \right) , \quad (211)$$

en donde identificamos el propagador escalar de Feynman de masa nula,

$$\hat{D}_0^F(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 + i0^+} , \quad (212)$$

y, de masa m_a ,

$$\hat{D}_{m_a}^F(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - m_a^2 + i0^+} , \quad (213)$$

Así, el propagador de Feynman en el k -espacio es dado como:

$$\hat{D}_{\mu\alpha}^F(k) = \eta_{\mu\alpha} \left[\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k) \right] . \quad (214)$$

Por otro lado, podemos reescribir el propagador de Feynman de masa m ,

$$\hat{D}_m^F(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0^+} , \quad (215)$$

como:

$$\hat{D}_m^F(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{2\omega_m} \left(\frac{1}{k_0 - (\omega_m - i0^+)} - \frac{1}{k_0 - (-\omega_m + i0^+)} \right) . \quad (216)$$

Ahora, expresemos este propagador en el espacio de configuraciones,

$$D_m^F(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \, \hat{D}_m^F(k) e^{-ik \cdot x} , \quad (217)$$

es decir,

$$\begin{aligned} D_m^F(x) = & -(2\pi)^{-4} \int d^3k \frac{1}{2\omega_m} \left(\int dk_0 \frac{1}{k_0 - \omega_m + i0^+} e^{-i(k_0 - \omega_m)x^0} \right) e^{-i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ & - (2\pi)^{-4} \int d^3k \frac{1}{2\omega_m} \left(\int dk_0 \frac{1}{k_0 + \omega_m + i0^+} e^{-i(k_0 + \omega_m)x^0} \right) e^{i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} , \end{aligned} \quad (218)$$

en donde, identificamos las expresiones de la función de paso:

$$\theta(\pm z) = (2\pi)^{-1} \int dk \frac{i}{\pm k + i0^+} e^{-ikz} , \quad (219)$$

así,

$$\begin{aligned} D_m^F(x) = & \theta(x^0) (2\pi)^{-3} i \int d^3k \frac{1}{2\omega_m} e^{-i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ & + \theta(-x^0) (2\pi)^{-3} i \int d^3k \frac{1}{2\omega_m} e^{i\omega_m x^0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} , \end{aligned} \quad (220)$$

y, dado que:

$$\frac{1}{2\omega_m} e^{\mp i\omega_m x^0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \int dk_0 \frac{1}{2\omega_m} \delta(k_0 \mp \omega_m) e^{-ik\cdot x}, \quad (221)$$

entonces, escribimos el propagador de Feynman como:

$$\begin{aligned} D_m^F(x) &= \theta(x^0) (2\pi)^{-2} \int d^4k \left(\frac{i}{2\pi} \right) \frac{\delta(k_0 - \omega_m)}{2\omega_m} e^{-ik\cdot x} \\ &\quad - \theta(-x^0) (2\pi)^{-2} \int d^4k \left(-\frac{i}{2\pi} \right) \frac{\delta(k_0 + \omega_m)}{2\omega_m} e^{-ik\cdot x}. \end{aligned} \quad (222)$$

Visto que los propagadores de de frecuencias positivas y negativas en el k -espacio son dados como:

$$\hat{D}_m^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \frac{\delta(k_0 \mp \omega_m)}{2\omega_m}, \quad (223)$$

escribimos el propagador de Feynman en términos de estos,

$$D_m^F(x) = \theta(x^0) D_m^{(+)}(x) - \theta(-x^0) D_m^{(-)}(x). \quad (224)$$

Finalmente, volvemos al propagador de Feynman electromagnético,

$$D_{\mu\alpha}^F(x-y) = \eta_{\mu\alpha} [D_0^F(x-y) - D_{m_a}^F(x-y)], \quad (225)$$

el cual ahora podemos expresarlo como:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\alpha}^F(x-y) &= \eta_{\mu\alpha} \theta(x^0 - y^0) \left[D_m^{(+)}(x-y) - D_{m_a}^{(+)}(x-y) \right] \\ &\quad - \eta_{\mu\alpha} \theta(-x^0 + y^0) \left[D_m^{(-)}(x-y) - D_{m_a}^{(-)}(x-y) \right]. \end{aligned} \quad (226)$$

de aquí, es claro que este propaga las contribuciones de frecuencias positivas desde el pasado al presente y las de frecuencias negativas del futuro al presente.

Capítulo III

Espinores de Dirac

En este capítulo se introducirá la ecuación de Dirac y sus soluciones a partir del estudio de las representaciones fundamentales del grupo de Lorentz en un espacio complejo. Además, se tendrá como criterio que las ecuaciones sean de primer orden e invariantes por transformación de paridad. Así, partiremos de los campos de Weyl, derecho e izquierdo, y sus ecuaciones para la construcción de la ecuación de Dirac. Para la solución de esta última en el espacio de momentos, se introducirá el operador helicidad. Así, junto al hamiltoniano, se obtendrán las soluciones según su energía y espín.

A. Introducción

Para sistemas físicos cuyas dimensiones se encuentran en la escala de moléculas o menores a esta, la descripción de estos debe darse en el marco de una teoría cuántica, es decir, las predicciones son probabilísticas. Estas probabilidades o amplitudes de probabilidad se expresan en términos de la función de onda. Así, la dinámica del sistema cuántico viene dada por la ecuación de onda, que en el caso no relativista es la conocida ecuación de Schrödinger,

$$i\partial_0\psi(x) = \hat{H}\psi(x) \ , \quad (1)$$

donde se ha considerado $\hbar = 1$, además de $c = 1$ en la primera componente de $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. En general, se tiene en el hamiltoniano $\hat{H}$, operadores diferenciales de segundo orden correspondientes al término cinético. Además, se muestra que esta teoría es no relativista.

En una teoría relativista se deben seguir los postulados de la relatividad especial, es decir, la ecuación que obedece la función de onda debe ser invariante por las transformaciones de

Lorentz. Siendo las transformaciones de Lorentz lineales, entonces todas las derivadas de la ecuación de onda deben ser del mismo orden. Para en el caso de primer orden, Dirac encuentra la ecuación:

$$i\partial_0\psi(x) = (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi(x) \quad (2)$$

donde $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ y β son adecuadas matrices 4×4 relacionadas al álgebra de Clifford¹.

Por otro lado, del experimento de Stern-Gerlach queda en evidencia que las partículas fermiónicas, como el electrón, interactúan con un campo magnético externo, por lo que estas deben tener un momento magnético intrínseco. Es decir, las partículas fermiónicas tienen un momento angular intrínseco o *espín*. Además, se sabe que para cada fermión existe una partícula fermiónica de iguales característica salvo el signo de su carga eléctrica. Tal como es el caso del electrón y el positrón, y se dice que esta última es la antipartícula de la primera.

Por último observemos que la función de onda nos permite encontrar la distribución de probabilidades de la posición de una partícula. En principio, esta debe ser de una sola componente. Sin embargo, el campo de Dirac contiene cuatro componentes. Se encuentra que con estas cuatro componentes se da cuenta de las funciones de onda del par partícula-antipartícula y del espín de cada una de estas.

B. Ecuación de Weyl

Cuando se describe sistemas físicos desde los marcos de referencia de observadores inerciales en movimiento relativo, se observa que si la rapidez de tal movimiento relativo es comparable con la rapidez de la luz, entonces, asunciones de aspectos fundamentales de la naturaleza del espacio y el tiempo no son más válidos. En particular, destacamos el hecho que eventos simultáneos en un referencial no lo son en otro, lo que está directamente relacionado a que la interacción no se propague instantáneamente.

La discrepancia entre los resultados dados por los diferentes observadores, como la longitud de una barra o la frecuencia de radiación emitida, se concilia si se toma en consideración como

¹La definición del álgebra de Clifford y su relación con la teoría de espinores puede encontrarse en [24].

longitud fundamental del espacio-tiempo entre los eventos de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) y $(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ como:

$$\Delta s = (x^0 - x_0^0)^2 - (x^1 - x_0^1)^2 - (x^2 - x_0^2)^2 - (x^3 - x_0^3)^2 , \quad (3)$$

lo que nos lleva a la existencia de transformaciones de coordenadas entre los referenciales,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu , \quad (4)$$

que deja invariante tal longitud. Equivalentemente, estas transformaciones dejan invariante el producto interno de un espacio de Minkowski 4-dimensional, definido por la métrica:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 , & \mu = \nu = 0 \\ -1 , & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 , & \mu \neq \nu = 0 . \end{cases} \quad (5)$$

En el espacio de Minkowski, el producto de cualquier par de 4-vectores $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ e $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$,

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu , \quad (6)$$

permanece invariante por transformaciones (4), si:

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\mu_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} , \quad (7)$$

que en forma matricial, se expresa como,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta , \quad (8)$$

donde $[\Lambda]_{\mu,\alpha} = \Lambda^\mu_\alpha$ y $[\eta]_{\mu,\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Además, el conjunto de todas las matrices Λ que cumplen con la relación (8),

$$O(1, 3) = \{ \Lambda \in M(4, \mathbb{C}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \} , \quad (9)$$

junto a la multiplicación de matrices forman el *grupo de Lorentz*, cuyos elementos se conocen como transformaciones de Lorentz de las coordenadas.

En el grupo de Lorentz $O(1, 3)$ encontramos, en particular, el subgrupo de las transformaciones discretas:

$$D = \{I_4, P, T, PT\} , \quad (10)$$

donde I_4 es la matriz identidad, $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ es la transformación de paridad y $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ de inversión temporal. Luego, todo elemento del grupo de Lorentz $O(1, 3)$ puede obtenerse como el producto de una transformación discreta por un elemento de las transformaciones continuas:

$$SO^\uparrow(1, 3) = \{\Lambda \in O(1, 3) / \Lambda_0^0 \geq 1 \wedge \det \Lambda = 1\} , \quad (11)$$

siendo este un grupo continuo, conocido como *grupo de Lorentz ortocrono y propio*.

La búsqueda de campos relativistas, se inicia con la definición de una representación fundamental de $SO^\uparrow(1, 3)$, la cual debe ser no trivial y actuar sobre un espacio cuya dimensión sea la menor posible. Por otro lado, el número de parámetros reales que determinan los elementos de $SO^\uparrow(1, 3)$ son 6, siendo 3 de estos asociados a las rotaciones y los otros 3 a los *boost* de Lorentz. Así, teniendo en cuenta que los elementos del espacio de las matrices complejas 2×2 son determinadas por 8 parámetros reales, entonces, la representación fundamental del grupo de Lorentz puede estar contenida en dicho espacio.

Como la representación fundamental debe actuar sobre un espacio de matrices complejas 2×2 , y estas deben relacionarse a las transformaciones de Lorentz de las coordenadas. Entonces, con las coordenadas del espacio-tiempo (x^0, x^1, x^2, x^3) , la matriz identidad $I_2 \doteq \sigma_0$ y las matrices de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \quad (12)$$

se define el arreglo:

$$\underline{x} = \sigma_\mu x^\mu = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix} . \quad (13)$$

Además, vemos que este es hermitico,

$$\underline{x}^\dagger = \underline{x} , \quad (14)$$

y, su determinante se puede expresar como:

$$\det \underline{x} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu . \quad (15)$$

Igualmente, para el arreglo $\underline{x}'$, definido con las coordenadas x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 , se siguen cumpliendo estas relaciones,

$$\underline{x}'^\dagger = \underline{x}' \quad (16)$$

$$\det \underline{x}' = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu . \quad (17)$$

Si las coordenadas que definen el arreglo $\underline{x}'$, son el resultado de una transformación de Lorentz (4), entonces es claro que el determinante se mantiene invariante. Además, podemos observar que la hermiticidad también se mantiene si entre $\underline{x}$ y $\underline{x}'$ se impone la relación:

$$\underline{x}' = A \underline{x} A^\dagger , \quad (18)$$

donde A debe ser una matriz no singular. Para que esta relación refleje una transformación de Lorentz, la matriz A debe ser determinada por los 6 parámetros reales del grupo $SO^\uparrow(1, 3)$. Ya que, en general, el grupo $SL(n, \mathbb{C})$ de las matrices complejas $n \times n$ de determinante 1, tiene dimensión²:

$$\dim SL(n, \mathbb{C}) = 2(n^2 - 1) . \quad (19)$$

Por lo tanto, $A \in SL(2, \mathbb{C})$.

Para mostrar la relación explícita entre una matriz $\Lambda \in SO^\uparrow(1, 3)$ y una $A \in SL(2, \mathbb{C})$ se

²Las propiedades de este grupo y otros grupos de Lie pueden encontrarse en [25].

consideran las matrices,

$$\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) \quad (21)$$

$$\sigma^\mu = \eta^{\mu\nu} \sigma_\nu \quad (22)$$

$$\bar{\sigma}^\mu = \eta^{\mu\nu} \bar{\sigma}_\nu . \quad (23)$$

Luego, teniendo en cuenta que las matrices de Pauli cumplen con la relación:

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} I_2 , \quad (24)$$

podemos afirmar que:

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2\eta_{\mu\nu} I_2 , \quad (25)$$

de aquí,

$$\text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu\nu} . \quad (26)$$

Con esta propiedad, se consigue probar³ que las coordenadas del espacio-tiempo se consiguen expresar como:

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}^\mu \underline{x}) , \quad (27)$$

igualmente, para algún otro referencial:

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}^\mu \underline{x}') . \quad (28)$$

En esta última, reenplazamos $\underline{x}'$ de la relación (18),

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}^\mu A \underline{x} A^\dagger) = \frac{1}{2} \text{tr} (A^\dagger \bar{\sigma}^\mu A \underline{x}) , \quad (29)$$

y, de la definición (13) de la matriz $\underline{x}$, se obtiene:

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} (A^\dagger \bar{\sigma}^\mu A \sigma_\alpha x^\alpha) = \frac{1}{2} \text{tr} (A^\dagger \bar{\sigma}^\mu A \sigma_\alpha) x^\alpha . \quad (30)$$

³Dado que:

$$\frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}^\mu \underline{x}) = \eta^{\mu\alpha} \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\alpha \underline{x}) = \eta^{\mu\alpha} \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\alpha \sigma_\beta) x^\beta = \eta^{\mu\alpha} \frac{1}{2} (2\eta_{\alpha\beta}) x^\beta = x^\mu$$

Finalmente, comparando la transformación de Lorentz de las coordenadas:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} , \quad (31)$$

con (30), encontramos que las componentes de un elemento Λ de $SO^{\uparrow}(1, 3)$, pueden expresarse como:

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \frac{1}{2} \text{tr} \left(A^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} A \sigma_{\alpha} \right) . \quad (32)$$

Así, según el resultado obtenido, concluimos que para cada $A \in SL(2, \mathbb{C})$ se define una transformación de Lorentz $\Lambda \in SO^{\uparrow}(1, 3)$. Sin embargo, es claro que esta misma transformación es obtenida también por la matriz $-A$. Lo que implica que el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ cubre doblemente el grupo de Lorentz $SO^{\uparrow}(1, 3)$, es decir:

$$SO^{\uparrow}(1, 3) \simeq SL(2, \mathbb{C}) / \{I_2, -I_2\} . \quad (33)$$

Por lo tanto, cualquier representación del grupo de Lorentz será una representación del grupo $SL(2, \mathbb{C})$, y, a esta se le conoce como la representación fundamental del grupo de Lorentz.

B.1. Representación espinorial del grupo de Lorentz

Se tiene que una representación fundamental debe actuar sobre un espacio complejo 2-dimensional: V . Al igual que las transformaciones de Lorentz son entendidas como isometrías sobre el espacio de Minkowski M . Consideraremos en V el producto interno $\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, simpléctico, es decir, el producto de $u, v \in V$ es dado como:

$$\langle u, v \rangle = u^{\top} \varepsilon v , \quad (34)$$

donde la métrica es representada por la matriz:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (35)$$

Así, las transformaciones buscadas serán isometrías sobre el espacio V .

Si A representa una isometría en (V, ε) , entonces para cualquier par de vectores $u, v \in V$ se debe cumplir que:

$$\langle Au, Av \rangle = (Au)^\top \varepsilon (Av) = u^\top (A^\top \varepsilon A) v , \quad (36)$$

es decir,

$$A^\top \varepsilon A = \varepsilon , \quad (37)$$

y, se dice que A es una transformación simpléctica, por lo que es un elemento del grupo simpléctico: $Sp(2, \mathbb{C})$.

Para encontrar la relación de estas transformaciones simpléticas con las de $SL(2, \mathbb{C})$, expresemos A como:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} , \quad (38)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Luego, reemplazando en (37), se observa que la relación:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \\ \beta\gamma - \alpha\delta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} , \quad (39)$$

se cumple, si y solo si,

$$1 = \alpha\delta - \beta\gamma = \det A , \quad (40)$$

es decir, $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Por lo tanto, podemos afirmar que:

$$Sp(2, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C}) . \quad (41)$$

Así, cualquier representación del grupo de Lorentz será una representación del grupo $Sp(2, \mathbb{C})$.

Por otro lado, tomando la conjugación compleja a (37),

$$(A^*)^\top \varepsilon A^* = \varepsilon , \quad (42)$$

y, se observa que A^* también cumple con la relación (37) y (40). Luego, se afirma que A^*

representa a la misma transformación que A representaba en $Sp(2, \mathbb{C})$. Además, como:

$$A^\dagger \varepsilon A^* = \varepsilon \rightarrow A^* = \varepsilon^{-1} (A^\dagger)^{-1} \varepsilon , \quad (43)$$

podemos afirmar A^* y $(A^\dagger)^{-1}$ son equivalentes. A su vez, también concluimos que A y A^* son representaciones inequivalentes de una misma transformación de $Sp(2, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C})$, al menos que⁴ $A^\dagger = A^{-1}$.

B.2. Espinores de Weyl

Se tiene que sobre el espacio complejo 2-dimensional V actúan dos representaciones inequivalentes de las transformaciones de Lorentz: $SL(2, \mathbb{C})$. Más aún, si $A \in SL(2, \mathbb{C})$ es una representación de una transformación de Lorentz, entonces, $(A^\dagger)^{-1} \in SL(2, \mathbb{C})$ es una representación inequivalente de esta.

Así, en primer lugar, definimos el campo de Weyl izquierdo⁵,

$$\psi_L : M \rightarrow V , \quad (44)$$

como funciones evaluadas en el espacio de Minkowski 4-dimensional M y a valor de elementos del espacio complejo 2-dimensional V ,

$$\psi_L(x) = \begin{bmatrix} \psi_{1,L}(x) \\ \psi_{2,L}(x) \end{bmatrix} , \quad (45)$$

donde $\psi_{1,L}(x), \psi_{2,L}(x)$ son funciones complejas de una sola componente. Luego, se escoge $\psi_L(x)$ de tal manera que se transforme por Lorentz como:

$$\psi_L(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'_L(x') = (A^\dagger)^{-1} \psi_L(x) . \quad (46)$$

en donde debemos notar que se han transformado tanto las coordenadas $x \rightarrow x'$, como la forma de las funciones $\psi_L \rightarrow \psi'_L$.

⁴Este caso corresponde al de grupos unitarios. En este caso, nos referimos a $SU(2)$, que es un subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$.

⁵La definición de los espinores de Weyl y propiedades adicionales pueden encontrarse en [26].

A continuación, buscamos la ecuación invariante relativista más simple para ψ_L . Con este fin, se introduce el operador:

$$\underline{\partial} \equiv \sigma_\mu \partial^\mu = \begin{bmatrix} \partial^0 + \partial^3 & \partial^1 - i\partial^2 \\ \partial^1 + i\partial^2 & \partial^0 - \partial^3 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

donde $\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Observamos que este operador se transforma por Lorentz como:

$$\underline{\partial}' = \sigma_\nu \partial'^\nu = \sigma_\nu \Lambda^\nu_\mu \partial^\mu. \quad (48)$$

Además, de la transformación por Lorentz (18) del arreglo $\underline{x}$:

$$\underline{x}' = A \underline{x} A^\dagger = A (\sigma_\mu x^\mu) A^\dagger = (A \sigma_\mu A^\dagger) x^\mu, \quad (49)$$

y, por definición del arreglo transformado,

$$\underline{x}' = \sigma_\nu x'^\nu = \sigma_\nu \Lambda^\nu_\mu x^\mu, \quad (50)$$

encontramos la relación:

$$\sigma_\nu \Lambda^\nu_\mu = A \sigma_\mu A^\dagger. \quad (51)$$

Luego de reemplazar esta relación en (48), se obtiene la transformación de Lorentz del operador $\underline{\partial}$:

$$\underline{\partial}' = A \sigma_\mu A^\dagger \partial^\mu = A \underline{\partial} A^\dagger. \quad (52)$$

Por lo tanto, para el espinor izquierdo ψ_L se propone la ecuación de movimiento:

$$\underline{\partial} \psi_L(x) = 0, \quad (53)$$

en donde el lado izquierdo se transforma como:

$$\underline{\partial}' \psi'_L(x') = A \underline{\partial} A^\dagger \left[(A^\dagger)^{-1} \psi_L(x) \right] = A \underline{\partial} \psi_L(x). \quad (54)$$

por lo que, concluimos que la ecuación de movimiento (53) es invariante por transformaciones de Lorentz continuas.

Por otro lado, el campo de Weyl derecho,

$$\psi_R : M \rightarrow V , \quad (55)$$

se define de tal manera que este se transforme como:

$$\psi_R(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'_R(x') = A\psi_R(x) . \quad (56)$$

Para este, se introduce el operador:

$$\bar{\partial} \equiv \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu = \begin{bmatrix} \partial^0 - \partial^3 & -\partial^1 + i\partial^2 \\ -\partial^1 - i\partial^2 & \partial^0 + \partial^3 \end{bmatrix} , \quad (57)$$

donde $\bar{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$. Vemos que:

$$\bar{\partial}' = \bar{\sigma}_\nu \partial'^\nu = \bar{\sigma}_\nu \Lambda^\nu_\mu \partial^\mu . \quad (58)$$

Teniendo en cuenta la definición (35) de la métrica ε , se encuentra la relación:

$$\bar{\sigma}_\nu = \varepsilon \sigma_\nu^\top \varepsilon^{-1} . \quad (59)$$

Así,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}' &= \varepsilon \sigma_\nu^\top \varepsilon^{-1} \Lambda^\nu_\mu \partial^\mu = \varepsilon (\sigma_\nu \Lambda^\nu_\mu)^\top \varepsilon^{-1} \partial^\mu = \varepsilon (A \sigma_\mu A^\dagger)^\top \varepsilon^{-1} \partial^\mu = \varepsilon A^* \sigma_\mu^\top A^\top \varepsilon^{-1} \partial^\mu \\ &= (\varepsilon A^* \varepsilon^{-1}) (\varepsilon \sigma_\mu^\top \varepsilon^{-1}) (\varepsilon A^\top \varepsilon^{-1}) \partial^\mu \\ &= (A^\dagger)^{-1} (\bar{\sigma}_\mu) (A^{-1}) \partial^\mu , \end{aligned} \quad (60)$$

es decir, el operador $\bar{\partial}$ se transforma por Lorentz como:

$$\bar{\partial}' = (A^\dagger)^{-1} \bar{\partial} A^{-1} . \quad (61)$$

Por lo tanto, para el espinor derecho ψ_R se propone la ecuación de movimiento:

$$\bar{\partial} \psi_R(x) = 0 , \quad (62)$$

en donde el lado izquierdo se transforma como:

$$\bar{\partial}' \psi_R'(x') = (A^\dagger)^{-1} \bar{\partial} A^{-1} (A \psi_R(x)) = (A^\dagger)^{-1} \bar{\partial} \psi_R(x) . \quad (63)$$

Así, afirmamos que (62) es invariante por transformaciones de Lorentz continuas.

Finalmente, escribamos por componente las ecuaciones de movimiento (53), (62) de los campos de Weyl,

$$(\sigma_0 \partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \nabla) \psi_L(x^0, \vec{x}) = 0 \quad (64)$$

$$(\sigma_0 \partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \nabla) \psi_R(x^0, \vec{x}) = 0 , \quad (65)$$

donde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Observamos que, por separado, son invariantes por transformaciones del subgrupo continuo del grupo de Lorentz. Sin embargo, si realizamos una transformación de paridad, $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$, sobre estas ecuaciones:

$$(\sigma_0 \partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \nabla) \psi_L'(x^0, -\vec{x}) = 0 \quad (66)$$

$$(\sigma_0 \partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \nabla) \psi_R'(x^0, -\vec{x}) = 0 , \quad (67)$$

se observa que estas ya no son invariantes por separado sino en conjunto. Luego, la función de onda buscada debe considerar tanto el campo izquierdo como derecho de Weyl.

C. Ecuación de Dirac

La ecuación relativista de una función de onda debe ser invariante por las transformaciones del grupo de Lorentz. Luego, si partimos de la relación relativista de energía E y momento lineal $\vec{p}$ de una partícula de masa m ,

$$-E^2 + \vec{p}^2 + m^2 = 0 , \quad (68)$$

y, realizamos las identificaciones:

$$E \rightarrow i\partial_0 \quad (69)$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\nabla, \quad (70)$$

encontramos la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0. \quad (71)$$

La ecuación de Klein-Gordon es invariante relativista por construcción y se espera que cualquier función de onda de una partícula libre de masa m cumpla con esta. La solución de tal ecuación se expresa en términos de su transformada de Fourier,

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4p \, \hat{\varphi}(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (72)$$

además, como esta debe cumplir con la ecuación (71), se debe tener que:

$$(p^2 - m^2) \hat{\varphi}(p) = 0, \quad (73)$$

donde $p^2 = p \cdot p$, y cuya solución no trivial es:

$$\hat{\varphi}(p) = \hat{a}(p) \delta(p^2 - m^2). \quad (74)$$

Así, teniendo en cuenta la propiedad de la δ -Dirac:

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E} [\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)], \quad (75)$$

en donde se ha introducido la definición $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, integramos (72) en la variable p_0 y el campo de Klein-Gordon adopta la forma:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E}} [b(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + d^*(\vec{p}) e^{ip \cdot x}]_{p_0=E}. \quad (76)$$

En general, campos que representen funciones de onda de una partícula de masa m deben

tener la forma (76).

C.1. Ecuación relativista de primer orden con término de masa

En la sección anterior encontramos que los campos de Weyl izquierdo ψ_L y derecho ψ_R cumplen con las ecuaciones:

$$\underline{\partial}\psi_L(x) = 0 \quad (77)$$

$$\bar{\partial}\psi_R(x) = 0, \quad (78)$$

respectivamente. Es claro que no se tiene el término de masa en ninguna de estas. Para incluir el término de masa debemos tener en cuenta que bajo las transformaciones Lorentz los términos del lado izquierdo se transforman como:

$$\underline{\partial}'\psi'_L(x') = A\underline{\partial}\psi_L(x) \quad (79)$$

$$\bar{\partial}'\psi'_R(x') = (A^\dagger)^{-1}\bar{\partial}\psi_R(x), \quad (80)$$

mientras que los campos según:

$$\psi'_L(x') = (A^\dagger)^{-1}\psi_L(x) \quad (81)$$

$$\psi'_R(x') = A\psi_R(x). \quad (82)$$

Por lo que para incluir los términos de masa y preservar la invariancia relativista, debemos considerar términos cruzados de los campos izquierdo y derecho. Así, se propone:

$$i\underline{\partial}\psi_L(x) - m\psi_R(x) = 0 \quad (83)$$

$$i\bar{\partial}\psi_R(x) - m\psi_L(x) = 0, \quad (84)$$

en donde $\underline{\partial} = \sigma_\mu \partial^\mu$, $\bar{\partial} = \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu$, y, se ha introducido el parámetro real m que representa a la masa de una partícula, y el factor imaginario i que permite que el operador actuante sobre el campo sea hermítico.

En primer lugar, verificamos que las ecuaciones (83), (84) son invariantes relativistas, ya

que:

$$i\bar{\partial}'\psi_L'(x') - m\psi_R'(x') = A[i\bar{\partial}\psi_L(x) - m\psi_R(x)] , \quad (85)$$

y,

$$i\bar{\partial}'\psi_R'(x') - m\psi_L'(x') = (A^\dagger)^{-1}[i\bar{\partial}\psi_R(x) - m\psi_L(x)] . \quad (86)$$

En segundo lugar, escribamos por componentes las ecuaciones (83), (84),

$$i(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \nabla)\psi_L(x^0, \vec{x}) - m\psi_R(x^0, \vec{x}) = 0 \quad (87)$$

$$i(\sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \nabla)\psi_R(x^0, \vec{x}) - m\psi_L(x^0, \vec{x}) = 0 , \quad (88)$$

y, al realizar sobre estas la transformación de paridad, $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$,

$$i(\sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \nabla)\psi_L'(x^0, -\vec{x}) - m\psi_R'(x^0, -\vec{x}) = 0 \quad (89)$$

$$i(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \nabla)\psi_R'(x^0, -\vec{x}) - m\psi_L'(x^0, -\vec{x}) = 0 , \quad (90)$$

queda en evidencia que la invariancia bajo esta transformación se cumple en forma conjunta.

Así, expresamos las ecuaciones (83), (84) en forma conjunta:

$$\left(i \begin{bmatrix} 0 & \bar{\partial} \\ \bar{\partial} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_L(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (91)$$

o, en su forma equivalente, al introducir las definiciones de los operadores $\bar{\partial}$, $\bar{\partial}$ se obtiene:

$$\left(i \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{bmatrix} \partial^\mu - m \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_L(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (92)$$

De aquí, es natural introducir un arreglo con ambos espinores de Weyl:

$$\tilde{\psi}(x) \equiv \begin{bmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_L(x) \end{bmatrix} , \quad (93)$$

conocido como campo biespinorial, y las matrices:

$$\tilde{\gamma}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{bmatrix} , \quad (94)$$

en donde, dada las definiciones de las matrices $\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y $\bar{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$, y de las propiedades de las matrices de Pauli⁶, se verifica que las $\tilde{\gamma}'$ s matrices cumplen con la relación:

$$\{\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu\} \equiv \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\nu + \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}_\mu = 2\eta_{\mu\nu} I_4 , \quad (95)$$

que define el llamado *álgebra de Clifford*.

Por lo tanto, las ecuaciones de los espinores de Weyl (83), (84) se pueden expresar en forma compacta como:

$$(i\tilde{\gamma}_\mu \partial^\mu - m) \tilde{\psi}(x) = 0 . \quad (96)$$

En forma equivalente, si definimos las $\tilde{\gamma}'$ s matrices con índices superiores,

$$\tilde{\gamma}^\mu = \eta^{\mu\nu} \tilde{\gamma}_\nu , \quad (97)$$

podemos reescribir esta ecuación como:

$$(i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu - m) \tilde{\psi}(x) = 0 . \quad (98)$$

y, análogo a (95) se cumplirá el álgebra de Clifford:

$$\tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_4 . \quad (99)$$

Además, debemos notar que transformaciones unitarias de las $\tilde{\gamma}'$ s matrices,

$$\tilde{\gamma}^\mu \rightarrow \gamma^\mu = U \tilde{\gamma}^\mu U^{-1} \quad (100)$$

⁶En particular, se ha tomado en cuenta la propiedad:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} I_2 .$$

en donde U es una matriz unitaria, también cumplen con el álgebra Clifford, es decir, las nuevas γ' s matrices cumplen con la relación:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_4 , \quad (101)$$

y, el campo transformado,

$$\psi(x) = U \tilde{\psi}(x) , \quad (102)$$

con la ecuación:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (103)$$

conocida como *ecuación de Dirac*. En general, debemos tener en cuenta que en:

$$\psi(x) = U \tilde{\psi}(x) = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_L(x) \end{bmatrix} , \quad (104)$$

es decir, se combinan los espinores derecho e izquierdo de Weyl en cada componentes de ψ , aún así se sigue denominando a este campo como biespinor, que a su vez es conocido como *campo de Dirac*.

C.2. Soluciones de la ecuación de Dirac

Dada la ecuación de Dirac,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 , \quad (105)$$

y, dado que las γ' s matrices cumplen con el álgebra de Clifford:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} I_4 , \quad (106)$$

entonces, al aplicar $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)$ por la izquierda de la ecuación de Dirac, se obtiene:

$$(-\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu - m^2) \psi(x) = 0 , \quad (107)$$

en donde se tiene la contracción:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu) \\
&= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu \\
&= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \\
&= \square ,
\end{aligned} \tag{108}$$

por lo que el campo de Dirac ψ también cumple con la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \psi(x) = 0 . \tag{109}$$

Así, la solución de la ecuación de Dirac también es solución de la ecuación de Klein-Gordon, entonces la solución de la ecuación de Dirac será de la forma:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4p \, \delta(p^2 - m^2) \tilde{\psi}(p) e^{-ip \cdot x} . \tag{110}$$

Luego, teniendo en cuenta la propiedad:

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E} [\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)] \tag{111}$$

en donde se ha introducido la definición $E \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, tendremos que:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, \frac{1}{2E} \tilde{\psi}(E, \vec{p}) e^{-i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\
&\quad + (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, \frac{1}{2E} \tilde{\psi}(-E, \vec{p}) e^{-i(-Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} ,
\end{aligned} \tag{112}$$

haciendo el cambio de variable $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en la segunda integral,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, \frac{1}{2E} \tilde{\psi}(E, \vec{p}) e^{-i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\
&\quad + (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, \frac{1}{2E} \tilde{\psi}(-E, -\vec{p}) e^{i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} .
\end{aligned} \tag{113}$$

Del resultado obtenido, se identifican dos soluciones independientes de la ecuación de

Dirac,

$$\psi^{(+)}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) e^{-i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (114)$$

$$\psi^{(-)}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}) e^{i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (115)$$

en donde:

$$\tilde{\psi}^{(\pm)}(\vec{p}) = \frac{1}{2E} \tilde{\psi}^{(\pm)}(\pm E, \pm \vec{p}), \quad (116)$$

serían los correspondientes campos de Dirac en el p -espacio. Además, tales soluciones se llaman *soluciones de frecuencia positiva y negativa*, respectivamente.

Si desarrollamos las contracciones $\gamma^\mu \partial_\mu$ de la ecuación de Dirac y aplicamos a las soluciones de frecuencia positiva y negativa,

$$(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m) \psi^{(\pm)}(x) = 0, \quad (117)$$

encontramos que sus contrapartes en el p -espacio, cumplen con las ecuaciones:

$$(\gamma^0 E - \gamma^i p^i - m) \tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) = 0 \quad (118)$$

$$(-\gamma^0 E + \gamma^i p^i - m) \tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}) = 0. \quad (119)$$

Aplicando γ^0 por la izquierda,

$$\left((\gamma^0)^2 E - \gamma^0 \gamma^i p^i - m \gamma^0 \right) \tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) = 0 \quad (120)$$

$$\left(-(\gamma^0)^2 E + \gamma^0 \gamma^i p^i - m \gamma^0 \right) \tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}) = 0 \quad (121)$$

y, del álgebra de Clifford:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_4 \xrightarrow{\mu=\nu=0} (\gamma^0)^2 = I, \quad (122)$$

podemos reescribir estas ecuaciones como:

$$(E - \gamma^0 \gamma^i p^i - m \gamma^0) \tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) = 0 \quad (123)$$

$$(-E + \gamma^0 \gamma^i p^i - m \gamma^0) \tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}) = 0, \quad (124)$$

ahora introducimos las matrices:

$$\beta = \gamma^0 \quad (125)$$

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} , \quad (126)$$

y, las ecuaciones de los campos de Dirac de frecuencia posiiva y negativa adoptan la forma:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta) \tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) = E \tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) \quad (127)$$

$$(-\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta) \tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}) = -E \tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}) . \quad (128)$$

La forma de las ecuaciones encontradas nos inducen a introducir el operador hamiltoniano,

$$H(\vec{p}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta , \quad (129)$$

para el cual $\tilde{\psi}^{(\pm)}(\vec{p})$ resultan ser sus autofunciones,

$$H(\pm\vec{p}) \tilde{\psi}^{(\pm)}(\vec{p}) = \pm E \tilde{\psi}^{(\pm)}(\vec{p}) , \quad (130)$$

Además, E sería el correspondiente autovalor de $\tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p})$ y $-E$ el correspondiente a $\tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p})$. Lo que permite asociar estas funciones a partículas de energía positiva y negativa, respectivamente.

Por otro lado, las soluciones de frecuencias positivas y negativas pueden expresarse como los arreglos en pares:

$$\tilde{\psi}^{(\pm)}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_I^{(\pm)}(\vec{p}) \\ \tilde{\psi}_{II}^{(\pm)}(\vec{p}) \end{bmatrix} , \quad (131)$$

además, en la representación de Dirac, las γ 's matrices se expresan como:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix} , \quad \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} , \quad (132)$$

entonces, en tal representación:

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} , \quad \beta = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix} . \quad (133)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones de autovalores:

$$(\pm \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta) \tilde{\psi}^{(\pm)}(\vec{p}) = E \tilde{\psi}^{(\pm)}(\vec{p}) , \quad (134)$$

se obtiene:

$$\left(\pm \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_I^{(\pm)}(\vec{p}) \\ \tilde{\psi}_{II}^{(\pm)}(\vec{p}) \end{bmatrix} = \pm E \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_I^{(\pm)}(\vec{p}) \\ \tilde{\psi}_{II}^{(\pm)}(\vec{p}) \end{bmatrix} . \quad (135)$$

Así, los pares de componentes de las soluciones de frecuencias positivas y negativas cumplen con el sistema de ecuaciones:

$$\pm (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \tilde{\psi}_{II}^{(\pm)}(\vec{p}) + m \tilde{\psi}_I^{(\pm)}(\vec{p}) = \pm E \tilde{\psi}_I^{(\pm)}(\vec{p}) \quad (136)$$

$$\pm (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \tilde{\psi}_I^{(\pm)}(\vec{p}) - m \tilde{\psi}_{II}^{(\pm)}(\vec{p}) = \pm E \tilde{\psi}_{II}^{(\pm)}(\vec{p}) , \quad (137)$$

es decir, tales pares de componentes se relacionan según:

$$\tilde{\psi}_I^{(\pm)}(\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E \mp m} \tilde{\psi}_{II}^{(\pm)}(\vec{p}) , \quad (138)$$

o, equivalentemente:

$$\tilde{\psi}_{II}^{(\pm)}(\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E \pm m} \tilde{\psi}_I^{(\pm)}(\vec{p}) . \quad (139)$$

Escogiendo esta última, se obtienen las relaciones:

$$\tilde{\psi}_I^{(-)}(\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \tilde{\psi}_{II}^{(-)}(\vec{p}) \quad (140)$$

$$\tilde{\psi}_{II}^{(+)}(\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \tilde{\psi}_I^{(+)}(\vec{p}) . \quad (141)$$

Así, encontramos que los campos de Dirac de frecuencias positivas y negativas, en el p -espacio,

se pueden expresar en términos de solo uno de los pares de sus componentes, según:

$$\tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_I^{(+)}(\vec{p}) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \tilde{\psi}_I^{(+)}(\vec{p}) \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$\tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \tilde{\psi}_{II}^{(-)}(\vec{p}) \\ \tilde{\psi}_{II}^{(-)}(\vec{p}) \end{bmatrix}. \quad (143)$$

Hasta ahora hemos conseguido expresar las soluciones en términos de pares independientes caracterizados por los autovalores de $H(\pm\vec{p})$. Sin embargo, ya que son cuatro las componentes del campo de Dirac, se deben tener cuatro soluciones independientes. Para mostrar este hecho, se introduce el operador helicidad:

$$S(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \cdot \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}, \quad (144)$$

el cual es hermítico y conmuta con $H(\vec{p})$:

$$[H(\vec{p}), S(\vec{p})] = 0. \quad (145)$$

Entonces, por propiedad de operadores hermíticos, $H(\vec{p})$ y $S(\vec{p})$ tienen los mismos autovectores. Además, como:

$$S^2(\vec{p}) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad (146)$$

es claro que el espectro de $S(\vec{p})$ es formado por 1 y -1 .

Así, las soluciones de frecuencias positivas y negativas cumplen con la ecuación de autovalores:

$$S(\vec{p}) \tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) = \pm \tilde{\psi}^{(+)}(\vec{p}) \quad (147)$$

$$S(\vec{p}) \tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}) = \pm \tilde{\psi}^{(-)}(\vec{p}), \quad (148)$$

es decir, las componentes independientes de (142), (143) deben cumplir con las relaciones:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \tilde{\psi}_I^{(+)}(\vec{p}) = \pm \tilde{\psi}_I^{(+)}(\vec{p}) \quad (149)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \tilde{\psi}_I^{(+)}(\vec{p}) = \pm \tilde{\psi}_I^{(+)}(\vec{p}) , \quad (150)$$

donde $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = (n_1, n_2, n_3)$. Resolviendo estas ecuaciones, se encuentran las soluciones ortonormales⁷ $u_+(\vec{p}), u_-(\vec{p}), v_+(\vec{p}), v_-(\vec{p})$ tales que cumplen con el sistema de ecuaciones:

$$H(\vec{p}) u_+(\vec{p}) = E u_+(\vec{p}) \quad (151)$$

$$H(-\vec{p}) u_-(\vec{p}) = -E u_-(\vec{p}) \quad (152)$$

$$H(\vec{p}) v_+(\vec{p}) = E v_+(\vec{p}) \quad (153)$$

$$H(-\vec{p}) v_-(\vec{p}) = -E v_-(\vec{p}) \quad (154)$$

$$S(\vec{p}) v_s(\vec{p}) = s v_s(\vec{p}) \quad (155)$$

$$S(\vec{p}) v_s(\vec{p}) = s v_s(\vec{p}) , \quad (156)$$

con $s = \pm 1$. Las cantidades $u_+(\vec{p}), u_-(\vec{p}), v_+(\vec{p}), v_-(\vec{p})$ se conocen como espinores de Dirac en el p -espacio. El primer par se refiere a las de frecuencia positiva y el segundo a las de frecuencias negativas, mientras que el subíndice hace referencia a su helicidad.

Finalmente, la forma general de las soluciones de la ecuación de Dirac, es dada como:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p \left[b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + d_s^*(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right]_{p_0=E} \quad (157)$$

en donde $b_s(\vec{p}), d_s^*(\vec{p})$ son funciones complejas. Es claro que, las ondas planas:

$$u_s(\vec{p}) e^{-i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} , v_s(\vec{p}) e^{-i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (158)$$

también son soluciones de la ecuación de Dirac. Por lo que la solución (157) es una superposición de estas, conocida como solución paquete de onda. Más aún, de (157) se identifican los paquetes de frecuencias positivas,

$$\psi^{(+)}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p \left[b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \right]_{p_0=E} , \quad (159)$$

⁷Esta y otras propiedades de los biespinores pueden encontrarse en [27].

y, negativas,

$$\psi^{(-)}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p \left[d_s^*(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right]_{p_0=E} . \quad (160)$$

C.3. Propagador espinorial

Si consideramos en la ecuación de Dirac una fuente $J(x)$,

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \psi(x) = J(x) , \quad (161)$$

esta tiene una solución de la forma:

$$\psi(x) = \int d^4y S(x-y) J(y) , \quad (162)$$

en donde la función de Green $S(x-y)$ debe satisfacer la ecuación:

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) S(x-y) = \delta(x-y) . \quad (163)$$

Expresando la δ -Dirac y la función de Green en términos de sus transformadas de Fourier:

$$\delta(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (164)$$

$$S(x-y) = (2\pi)^{-2} \int d^4p \hat{S}(p) e^{-ip \cdot (x-y)} , \quad (165)$$

encontramos que la transformada de la función de Green $\hat{S}(p)$ debe cumplir con la ecuación:

$$(\gamma^\nu p_\nu - m) \hat{S}(p) = (2\pi)^{-2} . \quad (166)$$

Aplicando por la izquierda $\gamma^\mu p_\mu + m$,

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) (\gamma^\nu p_\nu - m) \hat{S}(p) = (2\pi)^{-2} (\gamma^\mu p_\mu + m) , \quad (167)$$

y, teniendo en cuenta que:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p^2 , \quad (168)$$

conseguimos despejar $\hat{S}(p)$, teniendo esta la forma:

$$\hat{S}(p) = (2\pi)^{-2} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2} , \quad (169)$$

donde $p^2 = p \cdot p$.

Al igual que el caso electromagnético podemos tener diferentes casos para la propagación de las contribuciones de frecuencias positivas y negativas. De estas escogemos que las de frecuencias (energía) positivas se propaguen del pasado al presente. Además, debido a que las de frecuencias (energía) negativas no pueden representar a funciones de onda de un partícula, escogemos que estas se propaguen del futuro al presente. Por lo tanto, tomamos en consideración el propagador de Feynman: $\hat{S}^F(p)$, el cual se obtiene al dislocar los polos según:

$$E \rightarrow E - i0^+ \quad (170)$$

$$-E \rightarrow -E + i0^+ , \quad (171)$$

luego,

$$\hat{S}^F(p) = (2\pi)^{-2} \frac{\gamma \cdot p + m}{[p_0 - (E - i0^+)] [p_0 - (-E + i0^+)]} , \quad (172)$$

es decir,

$$\hat{S}^F(p) = (2\pi)^{-2} \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2 + i0^+} . \quad (173)$$

Identificando el propagador de Feynman escalar de masa m ,

$$\hat{D}_m^F(p) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0^+} , \quad (174)$$

el propagador de Feynman espinorial en el p -espacio, se puede expresar como:

$$\hat{S}^F(p) = -(\gamma \cdot p + m) \hat{D}_m^F(p) . \quad (175)$$

Así, en el espacio de configuraciones

$$S^F(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4p \hat{S}^F(p) e^{-ip \cdot x} , \quad (176)$$

este propagador se expresará como:

$$S^F(x) = -(2\pi)^{-2} \int d^4p (\gamma \cdot p + m) \hat{D}_m^F(p) e^{-ip \cdot x} . \quad (177)$$

Dado que el propagador adopta la forma:

$$S^F(x) = -(i\gamma \cdot \partial + m) D_m^F(x) , \quad (178)$$

y, que el propagador escalar es tal que:

$$D_m^F(x) = \theta(x^0) D_m^{(+)}(x) - \theta(-x^0) D_m^{(-)}(x) , \quad (179)$$

entonces, queda claro que se tendrá la propagación deseada de las soluciones de frecuencia positiva y negativa. Más aún, como:

$$S^F(x) = -\theta(x^0) (i\gamma \cdot \partial + m) D_m^{(+)}(x) + \theta(-x^0) (i\gamma \cdot \partial + m) D_m^{(-)}(x) , \quad (180)$$

y, teniendo en cuenta las expresiones de los propagadores escalares de frecuencia positiva y negativa,

$$D_m^{(\pm)}(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4p \hat{D}_0^{(\pm)}(p) e^{-ip \cdot x} , \quad (181)$$

con,

$$\hat{D}^{(\pm)}(p) = \pm \frac{i}{2\pi} \frac{\delta(p_0 \mp E)}{2E} , \quad (182)$$

encontramos que:

$$(i\gamma \cdot \partial + m) D_m^{(+)}(x) = i(2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \left(\frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2m} \right) e^{-i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} . \quad (183)$$

Igualmente, podemos mostrar que:

$$(i\gamma \cdot \partial + m) D_m^{(-)}(x) = -i(2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \left(\frac{-\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2m} \right) e^{-i(-Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} , \quad (184)$$

en esta última hacemos el cambio de variable de integración $p^i \rightarrow -p^i$, es decir, será equiva-

lente a:

$$(i\gamma \cdot \partial + m) D_m^{(-)}(x) = -i (2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \left(\frac{-\gamma^0 E + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2m} \right) e^{i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} . \quad (185)$$

En los resultado obtenidos (183), (185) se identifican los operadores proyeción:

$$\Lambda^{(+)}(\vec{p}) = \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2m} \quad (186)$$

$$\Lambda^{(-)}(\vec{p}) = \frac{-\gamma^0 E + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2m} , \quad (187)$$

lo que permite expresar (183), (185) como:

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m) D_m^{(+)}(x) = i (2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \Lambda^{(+)}(\vec{p}) e^{-i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (188)$$

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m) D_m^{(-)}(x) = -i (2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \Lambda^{(-)}(\vec{p}) e^{i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} . \quad (189)$$

Así, el propagador espinorial de Feynman (180), se puede escribir como:

$$\begin{aligned} S^F(x) &= -i\theta(x^0) (2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \Lambda^{(+)}(\vec{p}) e^{-i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\ &\quad -i\theta(-x^0) (2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \Lambda^{(-)}(\vec{p}) e^{i(Ex^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} . \end{aligned} \quad (190)$$

Por último, calculemos la integral:

$$\begin{aligned} &i \int d^3y S^F(x-y) \gamma^0 \psi^{(+)}(y) \\ &= \theta(x^0 - y^0) (2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \Lambda^{(+)}(\vec{p}) \gamma^0 e^{-i(E_p x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \int d^3y e^{i(E_p y^0 - \vec{p} \cdot \vec{y})} \psi^{(+)}(y) \\ &\quad + \theta(x^0 - y^0) (2\pi)^{-3} \int d^3p \left(\frac{m}{E} \right) \Lambda^{(-)}(\vec{p}) \gamma^0 e^{i(E_p x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \int d^3y e^{-i(E_p y^0 - \vec{p} \cdot \vec{y})} \psi^{(+)}(y) , \end{aligned} \quad (191)$$

y, dada la forma de las soluciones de frecuencias positivas (159), se tiene :

$$\begin{aligned}
\int d^3 y \, e^{i(E_p y^0 - \vec{p} \cdot \vec{y})} \psi^{(+)}(y) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3 q \, b_s(\vec{q}) u_s(\vec{q}) e^{i(E_p - E_q) y^0} \int d^3 y e^{-i(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{y}} \\
&= (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3 q \, b_s(\vec{q}) u_s(\vec{q}) e^{i(E_p - E_q) y^0} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \\
&= (2\pi)^{3/2} \sum_{s=\pm 1} b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) , \tag{192}
\end{aligned}$$

y, también que:

$$\begin{aligned}
\int d^3 y \, e^{-i(E_p y^0 - \vec{p} \cdot \vec{y})} \psi^{(+)}(y) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3 q \, b_s(\vec{q}) u_s(\vec{q}) e^{-i(E_p + E_q) y^0} \int d^3 y e^{i(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{y}} \\
&= (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3 q \, b_s(\vec{q}) u_s(\vec{q}) e^{-i(E_p + E_q) y^0} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} + \vec{q}) \\
&= (2\pi)^{3/2} \sum_{s=\pm 1} b_s(-\vec{p}) u_s(-\vec{p}) e^{-2iE_p y^0} . \tag{193}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&i \int d^3 y \, S^F(x - y) \gamma^0 \psi^{(+)}(y) \\
&= \theta(x^0 - y^0) (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3 p \, \left(\frac{m}{E}\right) b_s(\vec{p}) \Lambda^{(+)}(\vec{p}) \gamma^0 u_s(\vec{p}) e^{-i(E_p x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\
&\quad + \theta(x^0 - y^0) (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3 p \, \left(\frac{m}{E}\right) b_s(-\vec{p}) \Lambda^{(-)}(\vec{p}) \gamma^0 u_s(-\vec{p}) e^{-2iE_p y^0} e^{i(E_p x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} , \tag{194}
\end{aligned}$$

en donde:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(+)}(\vec{p}) \gamma^0 u_s(\vec{p}) &= \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2m} \gamma^0 u_s(\vec{p}) \\
&= \frac{E + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m}{2m} u_s(\vec{p}) \\
&= \frac{E u_s(\vec{p}) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) u_s(\vec{p})}{2m} , \tag{195}
\end{aligned}$$

igualmente,

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(-)}(\vec{p}) \gamma^0 u_s(-\vec{p}) &= \frac{-\gamma^0 E + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2m} \gamma^0 u_s(-\vec{p}) \\
&= \frac{-E - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m}{2m} u_s(-\vec{p}) \\
&= \frac{-E u_s(-\vec{p}) + (-\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) u_s(-\vec{p})}{2m} , \tag{196}
\end{aligned}$$

y, dado que $u_s(\pm\vec{p})$ cumple con la ecuación de autovalores:

$$(\pm\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) u_s(\pm\vec{p}) = E u_s(\pm\vec{p}) , \quad (197)$$

encontramos que:

$$i \int d^3y S^F(x-y) \gamma^0 \psi^{(+)}(y) = \theta(x^0 - y^0) (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-i(E_p x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} . \quad (198)$$

Finalmente, hemos mostrado que se cumple la relación:

$$i \int d^3y S^F(x-y) \gamma^0 \psi^{(+)}(y) = \theta(x^0 - y^0) \psi^{(+)}(x) , \quad (199)$$

que explica claramente la acción causal del propagador de Feynman espinorial sobre las soluciones de frecuencias positivas. Es posible obtener una relación similar para las de frecuencia negativa,

$$-i \int d^3y S^F(x-y) \gamma^0 \psi^{(-)}(y) = \theta(y^0 - x^0) \psi^{(-)}(x) . \quad (200)$$

siendo en este caso un efecto acausal.

Capítulo IV

Interacción electromagnética entre espinores de Dirac

En este capítulo se definirá la interacción electromagnética entre espinores de Dirac. Para esto se tomará en cuenta el formalismo lagrangiano del campo de Dirac. Con tal fin, en primer lugar, se construirá la lagrangiana de la teoría libre del campo de Dirac, posteriormente se verifica que esta es invariante por transformaciones globales $U(1)$. Tales transformaciones representan el hecho que las funciones de onda no son unívocamente determinados, salvo una fase. Por último, la extensión local de estas transformaciones nos llevará a la introducción del campo electromagnético.

A. Introducción

Las propiedades que podemos asignarle a la materia provienen en primer lugar de la observación. Esta es en general, una acción activa sobre la materia, es decir, se interactúa con esta. En muchos casos, a pesar de no conocer con exactitud las interacción que pueden ocurrir, es posible dar cuenta de sus propiedades. Sin embargo, es claro que cuanto menor sean las dimensiones de la materia mayor será su modificación cuando interactúe con el instrumento de medición.

Así, a escalas de la materia en donde podemos llamarlas de partículas, debemos de establecer la interacción entre estas. Establecido que la materia puede ser eléctricamente cargada, entonces, también se tendrán partículas con carga eléctrica. En el caso en que no se tiene en cuenta esta propiedad, la descripción cuántica de la partícula relativista es dada por la ecuación de Dirac:

$$i\partial_0\psi(x) = (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi(x) . \quad (1)$$

Entonces, en presencia de la interacción electromagnética, esta ecuación debe modificarse.

Hasta ahora, para poder establecer la ecuación de onda nos hemos guiado de los postulados de la relatividad especial. Es decir, del grupo de simetría de Poincaré. Esta simetría se manifiesta en la invariancia de la ecuación de onda y en las leyes de conservación asociadas. Si nos basamos únicamente en esta simetría, tendríamos varias posibilidades para modificar la ecuación de onda.

En el caso de la materia eléctricamente cargada, se ha observado que la carga eléctrica se conserva. Por lo que para partículas cargadas se debe seguir manteniendo esta ley de conservación. Por otro lado, es claro que la ecuación de onda resulta ser invariante por una transformación de fase,

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\varepsilon} \psi(x) . \quad (2)$$

Estas dos observaciones deben estar relacionadas a un grupo de simetría. Lo que será el punto de partida en la búsqueda de la forma de la interacción electromagnética.

B. Formalismo lagrangiano de la teoría libre

En el formalismo lagrangiano de la teoría de campos relativista, la lagrangiana es una función real invariante por transformaciones de Lorentz, es decir, debe ser un escalar real de Lorentz. En el caso de la teoría libre del campo de Dirac,

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[\psi(x), \partial_\alpha \psi(x)] , \quad (3)$$

siendo $\psi(x)$ una función de 4 componentes. Para construir escalares es necesario introducir los campos conjugados: $\bar{\psi}(x)$. Además, la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 , \quad (4)$$

debe derivarse de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0 , \quad (5)$$

y, a su vez, derivarse la ecuación del campo conjugado según:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0 , \quad (6)$$

Para obtener la ecuación del campo conjugado, tomemos la conjugación hermítica de la ecuación de Dirac,

$$(-i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m) = 0 , \quad (7)$$

es decir, se tiene la ecuación:

$$\psi^\dagger \left(i\gamma^{\mu\dagger} \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) = 0 \quad (8)$$

donde $\overleftarrow{\partial}_\mu$ opera sobre las funciones a su izquierda. Además, siendo siempre posible considerar una representación unitaria de las γ 's matrices,

$$\gamma^{\mu\dagger} = (\gamma^\mu)^{-1} , \quad (9)$$

y, del álgebra de Clifford (101),

$$\gamma^0 \gamma^0 = I , \gamma^k \gamma^k = -I , \gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0 , \quad (10)$$

encontramos que:

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 . \quad (11)$$

Así, (8) se expresará como:

$$\psi^\dagger \left(i\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) = 0 , \quad (12)$$

y, aplicando γ^0 por la derecha,

$$\psi^\dagger \gamma^0 \left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) = 0 \quad (13)$$

en donde, identificamos el campo conjugado de Dirac como:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 \quad (14)$$

el cual cumple con la ecuación

$$\bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu + m \right) = 0 \quad (15)$$

también conocida como *ecuación de Dirac del campo conjugado*.

Finalmente, es posible verificar que las ecuaciones de Dirac (4) y (15) se obtienen si consideramos la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (16)$$

donde $A \overleftrightarrow{\partial} B \equiv A (\partial B) - (\partial A) B$, tal lagrangiana es conocida como la *lagrangiana de Dirac*.

B.1. Transformaciones $U(1)$ globales

Al igual que en la teoría no relativista, la función de onda no es completamente determinada, salvo una fase. Luego, la teoría debe ser invariante por la transformación:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\varepsilon} \psi(x) , \quad (17)$$

y, dada la relación con el campo conjugado (14), este se transforma como:

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\varepsilon} \bar{\psi}(x) . \quad (18)$$

La invariancia de la teoría se confirma a través de la invariancia de las ecuaciones (4) y (15) de estos campos, respectivamente, y de la lagrangiana de Dirac (16).

Del primer teorema de Noether¹, se tiene que a todo grupo de simetría se le asocia corrientes conservadas. Expresando las transformaciones de fase como:

$$\begin{bmatrix} \psi'(x) \\ \bar{\psi}'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-i\varepsilon) & 0 \\ 0 & \exp(i\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \end{bmatrix} , \quad (19)$$

¹Más detalles del teorema de Noether y de las leyes de conservación se pueden encontrar en [28].

se identifica una representacion global del grupo de simetría $U(1)$,

$$U(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \exp(-i\varepsilon) & 0 \\ 0 & \exp(i\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

cuyo único generador,

$$X = i \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad (21)$$

será:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Así, del primer teorema de Noether la corriente conservada,

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \varphi^A)} [-iX]^A_B \varphi^B \quad (23)$$

con $\varphi^1 = \psi$ y $\varphi^2 = \bar{\psi}$, será:

$$j^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi + i \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})}. \quad (24)$$

Siendo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \psi)} (\bar{\psi} \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi - \partial_\alpha \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi) = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} (\bar{\psi} \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi - \partial_\alpha \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi) = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi, \quad (26)$$

encontramos la corriente:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (27)$$

B.2. Espacio de estados

Dado que la corriente (27) es localmente conservada, se cumple la ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (28)$$

la cual se puede reescribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} j^0 = -\nabla \cdot \vec{j} . \quad (29)$$

Integrando esta expresión en todo el espacio y usando el teorema de Gauss,

$$\frac{d}{dx^0} \int d^3x j^0(x^0, \vec{x}) = - \int d\vec{s} \cdot \vec{j}(x^0, \vec{x}) , \quad (30)$$

además, considerando que el comportamiento asintótico para el campo de Dirac y sus derivadas,

$$\psi(x^0, \vec{x}), \partial_\mu \psi(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0 , \quad (31)$$

obtenemos la carga conservada::

$$Q = \int d^3x j^0(x^0, \vec{x}) . \quad (32)$$

donde j^0 es la densidad de carga.

De las relaciones (27) y (14), vemos que la densidad de carga es dada como:

$$j^0(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) = \psi^\dagger(x) \psi(x) . \quad (33)$$

Luego, es claro que esta cantidad es definida positiva. Por lo que es posible definir un espacio de estados $\mathcal{H}$, en donde el producto interno es dado por:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int d^3x \bar{\psi}_1(x) \gamma^0 \psi_2(x) = \int d^3x \psi_1^\dagger(x) \psi_2(x) . \quad (34)$$

Ahora consideremos las soluciones de la ecuación de Dirac: ψ_1 y ψ_2 , tales que²:

$$\psi_1^\dagger(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{r=\pm 1} \int d^3p \left[d_{1,r}(\vec{p}) v_r^\dagger(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{1,r}^*(\vec{p}) u_r^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right] \quad (35)$$

$$\psi_2(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p' \left[b_{2,s}(\vec{p}') u_s(\vec{p}') e^{-ip' \cdot x} + d_{2,s}^*(\vec{p}') v_s(\vec{p}') e^{ip' \cdot x} \right] , \quad (36)$$

²En las siguientes relaciones se tomará en forma implícita que: $p_0 = E$ y $p'_0 = E'$.

entonces, el producto de estos campos de Dirac será:

$$\begin{aligned}
& (\psi_1, \psi_2) \\
&= \sum_{r,s=\pm 1} \int d^3 p d^3 p' (2\pi)^{-3} \int d^3 x \left[d_{1,r}(\vec{p}) b_{2,s}(\vec{p}') v_r^\dagger(\vec{p}) u_s(\vec{p}') e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} e^{-i(p_0+p'_0)x^0} \right] \\
&+ \sum_{r,s=\pm 1} \int d^3 p d^3 p' (2\pi)^{-3} \int d^3 x \left[d_{1,r}(\vec{p}) d_{2,s}^*(\vec{p}') v_r^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}') e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} e^{-i(p_0-p'_0)x^0} \right] \\
&+ \sum_{r,s=\pm 1} \int d^3 p d^3 p' (2\pi)^{-3} \int d^3 x \left[b_{1,r}^*(\vec{p}) b_{2,s}(\vec{p}') u_r^\dagger(\vec{p}) u_s(\vec{p}') e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} e^{i(p_0-p'_0)x^0} \right] \\
&+ \sum_{r,s=\pm 1} \int d^3 p d^3 p' (2\pi)^{-3} \int d^3 x \left[b_{1,r}^*(\vec{p}) d_{2,s}^*(\vec{p}') u_r^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}') e^{-i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} e^{i(p_0+p'_0)x^0} \right] .
\end{aligned} \tag{37}$$

Identificando la δ -Dirac:

$$\delta(\vec{q}) = (2\pi)^{-3} \int d^3 x e^{\pm i\vec{q}\cdot\vec{x}} , \tag{38}$$

e integrando en las variables p'^1, p'^2, p'^3 ,

$$\begin{aligned}
(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{r,s=\pm 1} \int d^3 p \left[d_{1,r}(\vec{p}) b_{2,s}(-\vec{p}') v_r^\dagger(\vec{p}) u_s(-\vec{p}') e^{-2ip_0x^0} \right] \\
&+ \sum_{r,s=\pm 1} \int d^3 p \left[d_{1,r}(\vec{p}) d_{2,s}^*(\vec{p}') v_r^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}') \right] \\
&+ \sum_{r,s=\pm 1} \int d^3 p \left[b_{1,r}^*(\vec{p}) b_{2,s}(\vec{p}') u_r^\dagger(\vec{p}) u_s(\vec{p}') \right] \\
&+ \sum_{r,s=\pm 1} \int d^3 p \left[b_{1,r}^*(\vec{p}) d_{2,s}^*(-\vec{p}') u_r^\dagger(\vec{p}) v_s(-\vec{p}') e^{2ip_0x^0} \right] .
\end{aligned} \tag{39}$$

Dado que:

$$u_r^\dagger(\vec{p}) u_s(\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) = \delta_{rs} \tag{40}$$

$$u_r^\dagger(\vec{p}) v_s(-\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p}) u_s(-\vec{p}) = 0 , \tag{41}$$

finalmente, obtenemos:

$$(\psi_1, \psi_2) = \sum_{r=\pm 1} \int d^3 p \left[b_{1,r}^*(\vec{p}) b_{2,r}(\vec{p}) + d_{1,r}(\vec{p}) d_{2,r}^*(\vec{p}) \right] . \tag{42}$$

En particular, para soluciones de frecuencia positiva, tendremos que:

$$\left(\psi^{(+)}, \psi^{(+)}\right) = \sum_{r=\pm 1} \int d^3p \, |b_r(\vec{p})|^2 , \quad (43)$$

mientras que para soluciones de frecuencia negativa,

$$\left(\psi^{(-)}, \psi^{(-)}\right) = \sum_{r=\pm 1} \int d^3p \, |d_r(\vec{p})|^2 . \quad (44)$$

Ambos casos están bien definidos y tienen en cuenta las componentes de helicidad $+1$ y -1 .

Si estos paquetes de onda están normalizados, se deben cumplir las relaciones:

$$\int d^3p \, \left(|b_+(\vec{p})|^2 + |b_-(\vec{p})|^2\right) = 1 \quad (45)$$

$$\int d^3p \, \left(|d_+(\vec{p})|^2 + |d_-(\vec{p})|^2\right) = 1 . \quad (46)$$

C. Formalismo lagrangiano de la teoría en interacción

Para las teorías libres del campo de Dirac y del electromagnetismo de Podolsky, se han obtenido las lagrangianas:

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (47)$$

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{a^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial^\sigma F_{\sigma\beta} , \quad (48)$$

respectivamente. En la construcción de estas lagrangianas se ha tenido en cuenta que los campos están asociados a representaciones del grupo de Lorentz, y que tales lagrangianas son escalares de Lorentz.

Si ahora se desea construir la lagrangiana de la teoría en interacción esta tendrá la forma:

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_P , \quad (49)$$

donde la lagrangiana de interacción $\mathcal{L}_I$ también debe ser un escalar de Lorentz, construido

con los campos de la teoría, es decir,

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}, A_\beta, \partial_\alpha A_\beta, \partial_\alpha \partial_\sigma A_\beta] . \quad (50)$$

Vemos que pueden construirse más de un posible término de interacción. Sin embargo, del electromagnetismo con fuentes, la lagrangiana de interacción debe ser de la forma:

$$\mathcal{L}_I = -A_\alpha j^\alpha , \quad (51)$$

donde j^α debe ser un campo vectorial de Lorentz, construido con los campos de Dirac y sus derivadas.

El problema se reduce a construir un campo vectorial de Lorentz:

$$j^\alpha = j^\alpha [\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}] . \quad (52)$$

A pesar de esta reducción, aún se tendrían más de una opción. Por lo que sería necesario introducir criterios adicionales en la teoría. En particular, podría ser suficiente la invariancia por transformaciones de calibre, que en la teoría de interacción no solo se transformaría el campo electromagnético sino también el campo de Dirac.

C.1. Transformaciones $U(1)$ locales

A diferencia del caso global, en el caso local consideramos que las transformaciones de fase pueden darse a valores distintos en cada punto del espacio-tiempo. Es decir,

$$\begin{bmatrix} \psi'(x) \\ \bar{\psi}'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-i\varepsilon(x)) & 0 \\ 0 & \exp(i\varepsilon(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \end{bmatrix} \quad (53)$$

en donde $\varepsilon(x)$ es una función real. Así, para cada punto x del espacio-tiempo se tiene la transformación unitaria:

$$U(\varepsilon(x)) = \begin{bmatrix} \exp(-i\varepsilon(x)) & 0 \\ 0 & \exp(i\varepsilon(x)) \end{bmatrix} , \quad (54)$$

en donde nuevamente se tiene el generador:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (55)$$

Ahora consideremos que $|\varepsilon(x)| \ll 1$, entonces, la variación de la lagrangiana de Durac en primer orden se puede escribir como:

$$\delta \mathcal{L}_D = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \varphi^A)} [-iX]^A_B \varphi^B \right) \varepsilon + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \varphi^A)} [-iX]^A_B \varphi^B \right) \partial_\mu \varepsilon , \quad (56)$$

siendo $\varphi^1 = \psi$ y $\varphi^2 = \bar{\psi}$, y se identifica la cantidad:

$$j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \varphi^A)} [-iX]^A_B \varphi^B = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) , \quad (57)$$

la cual era la corriente conservada de la transformación global. Así, la variación en primer orden se puede reescribir como:

$$\delta \mathcal{L}_D = (\partial_\mu j^\mu) \varepsilon + j^\mu \partial_\mu \varepsilon . \quad (58)$$

En el caso de transformaciones locales se tiene que la lagrangiana de la teoría libre del campo de Dirac no es invariante, Por otro lado, si para el campo vectorial $A_\mu(x)$ se considera la transformación:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q} \partial_\mu \varepsilon(x) , \quad (59)$$

donde q es una constante real, se encontró que:

$$\delta \mathcal{L}_P = 0 . \quad (60)$$

Por lo que, en una teoría invariante por transformaciones $U(1)$ locales, se debe tener que:

$$\delta \mathcal{L}_D + \delta \mathcal{L}_I = 0 . \quad (61)$$

C.2. Teoría en interacción

Para una teoría invariante por transformaciones de calibre, debemos considerar una lagrangiana de la forma:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}, A_\mu), \quad (62)$$

cuya variación en primer orden será:

$$\delta \mathcal{L}' = \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\mu \varphi^A)} [-iX]^A_B \varphi^B + \frac{1}{q} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\mu} \right) \partial_\mu \varepsilon. \quad (63)$$

Así, esta nueva teoría será invariante siempre que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\mu \varphi^A)} [-iX]^A_B \varphi^B + \frac{1}{q} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\mu} = 0. \quad (64)$$

Para poder garantizar que se cumpla la relación (64), consideramos una teoría descrita por la lagrangiana:

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}''(\varphi^A, \nabla_\mu \varphi^A), \quad (65)$$

en donde se ha introducido el operador ∇_μ como sigue:

$$\nabla_\mu \varphi^A \equiv \partial_\mu \varphi^A - q A_\mu [-iX]^A_B \varphi^B. \quad (66)$$

Dado que, localmente los campos de Dirac se transforman como:

$$\varphi'^A(x) = [\exp(-i\varepsilon(x)X)]^A_B \varphi^B(x) \quad (67)$$

y, el campo electromagnético según:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q} \partial_\mu \varepsilon(x), \quad (68)$$

entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\nabla'_\mu \varphi'^A(x) &= \partial_\mu \varphi'^A(x) - q A'_\mu(x) [-iX]^A_B \varphi'^B(x) \\
&= [\exp(-i\varepsilon(x)X)]^A_B \left[\partial_\mu \varphi^B(x) + \partial_\mu \varepsilon(x) [-iX]^B_C \varphi^C(x) \right] \\
&\quad - q A_\mu [-iX]^A_B [\exp(-i\varepsilon(x)X)]^B_C \varphi^C(x) \\
&\quad - \partial_\mu \varepsilon(x) [-iX]^A_B [\exp(-i\varepsilon(x)X)]^B_C \varphi^C(x) ,
\end{aligned} \tag{69}$$

además, como:

$$\begin{aligned}
[-iX]^A_B [\exp(-i\varepsilon(x)X)]^B_C &= [-iX \exp(-i\varepsilon(x)X)]^A_C \\
&= [(\exp(-i\varepsilon(x)X))(-iX)]^A_C \\
&= [\exp(-i\varepsilon(x)X)]^A_B [-iX]^B_C ,
\end{aligned} \tag{70}$$

es decir,

$$\nabla'_\mu \varphi'^A(x) = [\exp(-i\varepsilon(x)X)]^A_B \left[\partial_\mu \varphi^B(x) - q A_\mu [-iX]^B_C \varphi^C(x) \right] . \tag{71}$$

Por lo que, la derivada ∇_μ de los campos se transforma como:

$$\nabla'_\mu \varphi'^A(x) = [\exp(-i\varepsilon(x)X)]^A_B \nabla_\mu \varphi^B(x) , \tag{72}$$

y, en tal sentido, se dice que ∇_μ es una *derivada covariante*.

Ya que la lagrangiana $\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_D(\phi^A, \partial_\mu \phi^A)$ es invariante por transformaciones $U(1)$ cuando $\varepsilon(x) = \varepsilon$ es constante, entonces, se propone la lagrangiana:

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_D(\psi, \bar{\psi}, \nabla_\mu \psi, \nabla_\mu \bar{\psi}) \tag{73}$$

para una teoría invariante por transformaciones de calibre locales $U(1)$. Así, dado el generador de $U(1)$ (55), tendremos las derivadas covariantes (66),

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + iq A_\mu \psi \tag{74}$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - iq A_\mu \bar{\psi} . \tag{75}$$

Por lo tanto, siguiendo el *acoplamiento mínimo* (73), la lagrangiana de Dirac se transformará en:

$$\mathcal{L}'' = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu . \quad (76)$$

Por construcción, la lagrangiana $\mathcal{L}''$ es invariante por transformaciones $U(1)$ locales. Igualmente, la lagrangiana de Podolsky $\mathcal{L}_P$ es invariante por tales transformaciones. Por lo tanto, en una teoría en interacción podemos considerar la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{GQED} = \mathcal{L}'' + \mathcal{L}_P , \quad (77)$$

es decir,

$$\mathcal{L}_{GQED} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\mu F^{\mu\sigma}\partial^\nu F_{\nu\sigma} , \quad (78)$$

conocida como *lagrangiana de la electrodinámica de Dirac-Podolsky*. Finalmente, debemos señalar que en el límite $a \rightarrow 0$, se tiene que:

$$\mathcal{L}_{GQED} \rightarrow \mathcal{L}_{QED} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} , \quad (79)$$

es decir, la teoría se reduce a la de la electrodinámica espinorial usual.

Capítulo V

Dispersión

En este capítulo calcularemos la sección de choque diferencial de la dispersión de espinores de Dirac de diferente masa e igual carga. Por lo que, previamente encontraremos la matriz S para tal caso. Los elementos de la matriz S se definirán como las amplitudes de transición de estados asintóticamente libres, mucho antes y después de la colisión.

A. Introducción

En un proceso de dispersión se identifican dos elementos: la partícula a ser dispersada y el blanco. La colisión de la partícula con el blanco debe dar lugar a cambios en el estado de la partícula. Para estimar tal cambio de estado, debemos de conocer las características de la colisión, es decir, la interacción entre la partícula dispersada y el blanco.

En el caso que la partícula y el blanco sean eléctricamente cargados, la colisión consistirá en la interacción electromagnética entre estos. Es claro que cuanto más se aproximen estos elementos, más intensa será la interacción. Inversamente, mientras mayor sea la separación la interacción se hará cada vez menor. Aunque esta no desaparezca, podemos asumir que la partícula a dispersarse se encuentra en un estado libre cuando está muy alejada del blanco.

El estado cuántico de una partícula es determinado por la función de onda asociada a esta. En el caso que la función de onda sea un espinor de Dirac, tendremos como características de la partícula, su masa, momento lineal y helicidad. Además, en interacción electromagnética, tendremos también su carga. Si inicialmente, mucho antes de la colisión, la partícula se encuentra en su estado libre determinado por la función de onda $\psi_i(y)$. Entonces, durante

la colisión, esta función de onda cambiará a:

$$\psi_i(x) = \int d^4y \mathbf{S}^F(x-y) \psi_i(y) , \quad (1)$$

donde $\mathbf{S}^F$ será el propagador espinorial, y, en general, será diferente al de la teoría libre S^F . Luego de obtener la función de onda mucho después de la colisión, resta calcular las transiciones a cualquier estado libre final.

B. Matriz S

Vamos a considerar que la partícula a ser dispersada es una con carga eléctrica igual a la del electrón:

$$q = -e , \quad (2)$$

donde e es el valor absoluto de la carga del electrón. Luego, en el formalismo lagrangiano debemos de considerar la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\mu F^{\mu\sigma} \partial^\nu F_{\nu\sigma} . \quad (3)$$

Así, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0 , \quad (4)$$

se obtiene la ecuación de movimiento:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + e\gamma^\mu A_\mu(x)) \psi(x) = 0 . \quad (5)$$

Por definición, el propagador de Feynman $\mathbf{S}^F(x-y)$ para la ecuación encontrada, debe cumplir con:

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m + e\gamma^\mu A_\mu(x)) \mathbf{S}^F(x-y) = \delta^{(4)}(x-y) \quad (6)$$

equivalentemente,

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \mathbf{S}^F(x - y) = \delta^{(4)}(x - y) - e\gamma^\mu A_\mu(x) \mathbf{S}^F(x - y) . \quad (7)$$

Ahora reescribamos el lado derecho introduciendo una δ -Dirac,

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \mathbf{S}^F(x - y) = \int d^4z \delta^{(4)}(x - z) \left[\delta^{(4)}(z - y) - e\gamma^\mu A_\mu(z) \mathbf{S}^F(z - y) \right] . \quad (8)$$

Además, recordemos que si $S^F(x - z)$ es el propagador espinorial de la teoría libre, esta cumple con la ecuación:

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) S^F(x - z) = \delta^{(4)}(x - z) , \quad (9)$$

en donde debemos tener en cuenta que las derivadas son respecto a la variable x . Así,

$$\begin{aligned} & (i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \mathbf{S}^F(x - y) \\ &= \int d^4z (i\gamma^\nu \partial_\nu - m) S^F(x - z) \left[\delta^{(4)}(z - y) - e\gamma^\mu A_\mu(z) \mathbf{S}^F(z - y) \right] \\ &= (i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \int d^4z S^F(x - z) \left[\delta^{(4)}(z - y) - e\gamma^\mu A_\mu(z) \mathbf{S}^F(z - y) \right] , \end{aligned} \quad (10)$$

por lo que:

$$\mathbf{S}^F(x - y) = \int d^4z S^F(x - z) \left[\delta^{(4)}(z - y) - e\gamma^\mu A_\mu(z) \mathbf{S}^F(z - y) \right] . \quad (11)$$

Finalmente, podemos afirmar que el propagador espinorial $\mathbf{S}^F(x - y)$ cumple con la ecuación integral:

$$\mathbf{S}^F(x - y) = S^F(x - y) - e \int d^4z S^F(x - z) \gamma^\mu A_\mu(z) \mathbf{S}^F(z - y) \quad (12)$$

Por último, en términos del propagador, el campo de Dirac es expresado como:

$$\Psi(x) = \int d^4y \mathbf{S}^F(x - y) \psi(y) , \quad (13)$$

equivalentemente,

$$\Psi(x) = \psi(x) - e \int d^4 z S^F(x-z) \gamma^\mu A_\mu(z) \Psi(z) \quad (14)$$

donde $\psi(x)$ es el campo de Dirac de la teoría libre.

B.1. Elementos de la matriz S

Si en cierto instante se tiene que una partícula se encuentra en el estado Ψ_i , entonces la amplitud de transición hacia el estado ψ_f en dicho instante es:

$$A_{fi} = (\psi_f, \Psi_i) . \quad (15)$$

Al considerar que los estados son asintóticamente libres, tendremos que el producto interno entre los estados es el dado en tal espacio. Además, en tal caso la amplitud de transición se identifica como las componentes de la matriz S ,

$$A_{fi} \rightarrow S_{fi} = (\psi_f, \Psi_i) = \int d^3 x \bar{\psi}_f(x) \gamma^0 \Psi_i(x) . \quad (16)$$

Dada la solución de la teoría en interacción (14), se tendrá que:

$$S_{fi} = \int d^3 x \bar{\psi}_f(x) \gamma^0 \psi_i(x) - e \int d^3 x \bar{\psi}_f(x) \gamma^0 \int d^4 z S^F(x-z) \gamma^\mu A_\mu(z) \Psi_i(z) , \quad (17)$$

reordenando la última integral,

$$S_{fi} = \int d^3 x \bar{\psi}_f(x) \gamma^0 \psi_i(x) - e \int d^4 z \left[\int d^3 x \bar{\psi}_f(x) \gamma^0 S^F(x-z) \right] \gamma^\mu A_\mu(z) \Psi_i(z) , \quad (18)$$

en donde las funciones iniciales y finales se toman de un conjunto ortonormal del espacio de estados. Así,

$$S_{fi} = \delta_{fi} - e \int d^4 z \left[\int d^3 x \bar{\psi}_f(x) \gamma^0 S^F(x-z) \right] \gamma^\mu A_\mu(z) \Psi_i(z) . \quad (19)$$

adicionalmente, vamos a considerar que la función de onda final corresponde solo a la parte de frecuencia positiva.

Ahora tengamos en cuenta que en la teoría libre (199),

$$\theta(z^0 - x^0) \psi^{(+)}(z) = i \int d^3x S^F(z - x) \gamma^0 \psi^{(+)}(x) , \quad (20)$$

entonces, tendremos que cuando $z^0 \rightarrow +\infty$,

$$\psi_f(z) = i \int d^4x S^F(z - x) \psi_f(x) , \quad (21)$$

de aquí,

$$\bar{\psi}_f(z) = -i \int d^4x \psi_f^\dagger(x) S^{F\dagger}(z - x) \gamma^0 , \quad (22)$$

es decir,

$$\bar{\psi}_f(z) = -i \int d^4x \bar{\psi}_f(x) \gamma^0 S^{F\dagger}(z - x) \gamma^0 . \quad (23)$$

Además, de (176) y (173), el propagador de la teoría libre se puede escribir como:

$$S^F(z - x) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i0^+} e^{ip \cdot (z - x)} , \quad (24)$$

y, entonces, su adjunto será:

$$S^{F\dagger}(z - x) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{\gamma^{\mu\dagger} p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i0^+} e^{-ip \cdot (z - x)} . \quad (25)$$

Luego,

$$\gamma^0 S^{F\dagger}(z - x) \gamma^0 = (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i0^+} e^{-ip \cdot (z - x)} , \quad (26)$$

y, dado que la representación de las matrices de Dirac, es unitaria,

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \rightarrow \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu , \quad (27)$$

se tendrá que:

$$\begin{aligned}
\gamma^0 S^{F\dagger}(z-x) \gamma^0 &= (2\pi)^{-4} \int d^4 p \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i0^+} e^{-ip \cdot (z-x)} \\
&= (2\pi)^{-4} \int d^4 p \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i0^+} e^{ip \cdot (x-z)} \\
&= S^F(x-z) .
\end{aligned} \tag{28}$$

Por lo tanto, (23) es equivalente a:

$$\bar{\psi}_f(z) = -i \int d^4 x \bar{\psi}_f(x) S^F(x-z) , \tag{29}$$

y el elemento de la matriz S (19), se expresará como:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + ie \int d^4 z \bar{\psi}_f(z) \gamma^\mu A_\mu(z) \Psi_i(z) . \tag{30}$$

Por otro lado, desarrollando la expresión para el campo $\Psi = \Psi_i$ (14) en forma recursiva:

$$\begin{aligned}
&\Psi_i(y_1) \\
&= \psi_i(y_1) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-e)^{n-1} \int d^4 y_2 \cdots d^4 y_n S^F(y_1 - y_2) \gamma^\mu A_\mu(y_2) S^F(y_2 - y_3) \\
&\quad \times \cdots S^F(y_{n-1} - y_n) \gamma^\mu A_\mu(y_n) \psi_i(y_n) , \tag{31}
\end{aligned}$$

entonces, los elementos de la matriz S (30), pueden expresarse en la forma perturbativa:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \delta_{fi} - i(-e) \int d^4 y_1 \bar{\psi}_f(y_1) \gamma^\mu A_\mu(y_1) \psi_i(y_1) \\
&\quad - i \sum_{n=2}^{\infty} (-e)^n \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_n \bar{\psi}_f(y_1) \gamma^\mu A_\mu(y_1) S^F(y_1 - y_2) \gamma^\mu A_\mu(y_2) S^F(y_2 - y_3) \\
&\quad \times \cdots \times S^F(y_{n-1} - y_n) \gamma^\mu A_\mu(y_n) \psi_i(y_n) . \tag{32}
\end{aligned}$$

De la serie perturbativa de la matriz S , se observa que la primera contribución no trivial

es:

$$S_{fi} = -i(-e) \int d^4x \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi_i(x) , \quad (33)$$

en donde hemos tenido en cuenta que inicialmente el espinor es descrito por las soluciones de frecuencias positivas. Resta expresar los potenciales electromagnéticos para finalmente encontrar la matriz S .

B.2. Elementos de la matriz S en la dispersión de espinores de Dirac

En el caso de la interacción electromagnética de dos partículas de carga $-e$ con masas m_1 y m_2 , se debe considerar la teoría dada por la lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_1 - m_1 \bar{\psi}_1 \psi_1 + e \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_1 A_\mu \\ & + \frac{i}{2} \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_2 - m_2 \bar{\psi}_2 \psi_2 + e \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_2 A_\mu \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\mu F^{\mu\sigma} \partial^\nu F_{\nu\sigma} , \end{aligned} \quad (34)$$

luego, de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} + \partial_\rho \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho A_\nu)} = 0 , \quad (35)$$

en donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = e \bar{\psi}_1 \gamma^\nu \psi_1 + e \bar{\psi}_2 \gamma^\nu \psi_2 \quad (36)$$

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad (37)$$

$$\partial_\rho \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\rho A_\nu)} = a^2 \partial_\rho \partial_\mu (\eta^{\mu\rho} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} - \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\rho}) , \quad (38)$$

se encuentra que el campo electromagnético se obtiene de las ecuaciones:

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu , \quad (39)$$

donde la corriente eléctrica tiene dos contribuciones:

$$j^\nu = -e \bar{\psi}_1 \gamma^\nu \psi_1 - e \bar{\psi}_2 \gamma^\nu \psi_2 , \quad (40)$$

en donde la primera contribución corresponde a la propia partícula dispersada, de masa m_1 , y, la segunda contribución corresponde a la partícula blanco, de masa m_2 .

Consideraremos en la primera contribución no trivial de la matriz S (33),

$$S_{fi} = -i(-e) \int d^4x_1 \bar{\psi}_{1f}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi_{1i}(x_1) \quad (41)$$

que el campo electromagnético,

$$A_\mu(x_1) = \int d^4x_2 D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) j^\nu(x_2) , \quad (42)$$

solo corresponde a la generada por la partícula de masa m_2 .

Dadas las consideraciones asumidas, para la partícula dispersada consideramos las ondas planas de frecuencia positiva:

$$\psi_{1i}(x_1) = (2\pi)^{-3/2} u(s_i, \vec{p}_i) e^{-ip_i \cdot x_1} \quad (43)$$

$$\bar{\psi}_{1f}(x_1) = (2\pi)^{-3/2} \bar{u}(s_f, \vec{p}_f) e^{ip_f \cdot x_1} , \quad (44)$$

con $p_i^2 = p_f^2 = m_1^2$. Mientras que en la corriente,

$$j^\nu(x_2) = -e \bar{\psi}_{2f}(x_2) \gamma^\nu \psi_{2i}(x_2) \quad (45)$$

consideramos la primera contribución no trivial, dada por las ondas planas de frecuencia positiva de la partícula blanco:

$$\psi_{2i}(x_2) = (2\pi)^{-3/2} u(\sigma_i, \vec{q}_i) e^{-iq_i \cdot x_2} \quad (46)$$

$$\bar{\psi}_{2f}(x_2) = (2\pi)^{-3/2} \bar{u}(\sigma_f, \vec{q}_f) e^{iq_f \cdot x_2} , \quad (47)$$

en donde $q_i^2 = q_f^2 = m_2^2$.

Así, los elementos de la matriz S (41), pueden expresarse como:

$$S_{fi} = -ie^2 \int d^4x_1 d^4x_2 D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}_{1f}(x_1) \gamma^\mu \psi_{1i}(x_1) \bar{\psi}_{2f}(x_2) \gamma^\nu \psi_{2i}(x_2) , \quad (48)$$

e, introduciendo las ondas planas de frecuencia positiva, esta se reescribe como:

$$S_{fi} = -ie^2 (2\pi)^{-6} \int d^4x_1 d^4x_2 D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{u}(s_f, \vec{p}_f) \gamma^\mu u(s_i, \vec{p}_i) \bar{u}(\sigma_f, \vec{q}_f) \gamma^\nu u(\sigma_i, \vec{q}_i) \times e^{i(p_f - p_i) \cdot x_1 + i(q_f - q_i) \cdot x_2} . \quad (49)$$

Identificamos en la expresión (49) las integrales de la forma:

$$J(P, Q) = \int d^4x_1 d^4x_2 D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) e^{iP \cdot x_1 + iQ \cdot x_2}, \quad (50)$$

haciendo los cambios de variables:

$$x_1 = x + \frac{1}{2}y \quad (51)$$

$$x_2 = x - \frac{1}{2}y, \quad (52)$$

estas integrales adoptan la forma:

$$J(P, Q) = \int d^4x e^{i(P+Q) \cdot x} \int d^4y D_{\mu\nu}^F(y) e^{i(P-Q) \cdot y/2}. \quad (53)$$

Reconociendo la δ -Dirac,

$$\delta(P + Q) = (2\pi)^{-4} \int d^4x e^{i(P+Q) \cdot x}, \quad (54)$$

y, la transformada de Fourier,

$$\hat{D}_{\mu\nu}^F\left(\frac{P-Q}{2}\right) = (2\pi)^{-2} \int d^4y D_{\mu\nu}^F(y) e^{i(P-Q) \cdot y/2}, \quad (55)$$

se obtiene que:

$$J(P, Q) = (2\pi)^4 \delta(P + Q) (2\pi)^2 \hat{D}_{\mu\nu}^F\left(\frac{P-Q}{2}\right), \quad (56)$$

y, como:

$$\delta(x + y) f(y) = \delta(x + y) f(-x), \quad (57)$$

finalmente,

$$J(P, Q) = (2\pi)^6 \delta(P + Q) \hat{D}_{\mu\nu}^F(P), \quad (58)$$

Así, volviendo a las componentes de la matriz S (49), esta se puede expresar como:

$$S_{fi} = \delta(p_f + q_f - p_i - q_i) \mathcal{M} , \quad (59)$$

donde:

$$\mathcal{M} = -ie^2 \hat{D}_{\mu\nu}^F(p_f - p_i) \bar{u}(s_f, \vec{p}_f) \gamma^\mu u(s_i, \vec{p}_i) \bar{u}(\sigma_f, \vec{q}_f) \gamma^\nu u(\sigma_i, \vec{q}_i) , \quad (60)$$

y, la aparición de δ -Dirac en (59), refleja el hecho de la conservación de la energía y momento lineal.

C. Sección de choque

Se define la probabilidad de transición como:

$$p_{fi} = |S_{fi}|^2 . \quad (61)$$

Debido a la δ -Dirac en la expresión (59) de la amplitud de dispersión, este cálculo no tendrá un resultado bien definido. Por lo que debemos tener en cuenta paquetes de onda en la definición de la amplitud de dispersión:

$$S_{fi} \rightarrow S_{fi} = \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 \varphi_f^*(\vec{p}_3, \vec{p}_4) S_{fi}(p_1, p_2, p_3, p_4) \varphi_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) , \quad (62)$$

en donde, tomaremos en cuenta un conjunto completo de paquetes de ondas finales:

$$\sum_f \varphi_f^*(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \varphi_f(\vec{p}_3', \vec{p}_4') = \delta(\vec{p}_3 - \vec{p}_3') \delta(\vec{p}_4 - \vec{p}_4') . \quad (63)$$

Así, tomando en cuenta todos los estados finales posibles en la probabilidad de transición

(61), y dada la expresión (59), se tendrá que:

$$\begin{aligned}
& \sum_f p_{fi} \\
&= \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \mathcal{M}(p_1, p_2, p_3, p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
&\quad \times \mathcal{M}^*(p'_1, p'_2, p_3, p_4) \delta(p'_1 + p'_2 - p_3 - p_4) \varphi_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \varphi_i^*(\vec{p}'_1, \vec{p}'_2) .
\end{aligned} \tag{64}$$

y, desagregando los paquetes de onda para cada espinor de Dirac inicial:

$$\varphi_i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \varphi_1(\vec{p}_1) \varphi_2(\vec{p}_2) , \tag{65}$$

Reescribimos la probabilidad de transición como:

$$\begin{aligned}
& \sum_f p_{fi} \\
&= \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \mathcal{M}(p_1, p_2, p_3, p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
&\quad \times \mathcal{M}^*(p'_1, p'_2, p_3, p_4) \delta(p'_1 + p'_2 - p_3 - p_4) \varphi_1(\vec{p}_1) \varphi_2(\vec{p}_2) \varphi_1^*(\vec{p}'_1) \varphi_2^*(\vec{p}'_2) .
\end{aligned} \tag{66}$$

Ahora consideramos que los paquetes de onda φ_1, φ_2 sean nulos para valores de momentos distintos a $\vec{p}_{1i}, \vec{p}_{2i}$, respectivamente. Además, tomando a $\mathcal{M}$ como una función suave,

$$\begin{aligned}
& \sum_f p_{fi} \\
&= \int d^3 p_3 d^3 p_4 |\mathcal{M}(p_{1i}, p_{2i}, p_3, p_4)|^2 \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 \delta(p'_1 + p'_2 - p_3 - p_4) \\
&\quad \times \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \varphi_1(\vec{p}_1) \varphi_2(\vec{p}_2) \varphi_1^*(\vec{p}'_1) \varphi_2^*(\vec{p}'_2) .
\end{aligned} \tag{67}$$

Ahora, analicemos la integral:

$$I(p) = \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 \delta(p'_1 + p'_2 - p_3 - p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ \times \varphi_1(\vec{p}_1) \varphi_2(\vec{p}_2) \varphi_1^*(\vec{p}'_1) \varphi_2^*(\vec{p}'_2) , \quad (68)$$

donde $p = p_3 + p_4$. Además, dado que la δ -Dirac puede expresarse como la transformada:

$$\delta(p) = (2\pi)^{-4} \int e^{\pm i p x} d^4 x , \quad (69)$$

tendremos que:

$$I(p) = (2\pi)^{-8} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 \\ \times e^{-i(p_1 + p_2 - p) \cdot x_1} e^{i(p'_1 + p'_2 - p) \cdot x_2} \varphi_1(\vec{p}_1) \varphi_2(\vec{p}_2) \varphi_1^*(\vec{p}'_1) \varphi_2^*(\vec{p}'_2) , \quad (70)$$

reagrupando,

$$I(p) = (2\pi)^{-8} \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{i p (x_1 - x_2)} \int d^3 p_1 \varphi_1(\vec{p}_1) e^{-i p_1 \cdot x_1} \int d^3 p_2 \varphi_2(\vec{p}_2) e^{-i p_2 \cdot x_1} \\ \times \int d^3 p'_1 \varphi_1^*(\vec{p}'_1) e^{i p'_1 \cdot x_2} \int d^3 p'_2 \varphi_2^*(\vec{p}'_2) e^{i p'_2 \cdot x_2} . \quad (71)$$

e identificando los paquetes de onda en el espacio de configuraciones:

$$\tilde{\varphi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \varphi_1(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} . \quad (72)$$

Finalmente,

$$I(p) = (2\pi)^{-2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \tilde{\varphi}_1(x_1) \tilde{\varphi}_2(x_1) \tilde{\varphi}_1^*(x_2) \tilde{\varphi}_2^*(x_2) e^{i p (x_1 - x_2)} , \quad (73)$$

la cual se encuentra claramente normalizada,

$$\int d^4 p I(p) = (2\pi)^2 \int d^4 x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 . \quad (74)$$

Ya que los momentos iniciales de encuentran concentrados en $\vec{p}_{1i}$, $\vec{p}_{2i}$, entonces, $p =$

$p_3 + p_4 = p_1 + p_2 \approx p_{1i} + p_{2i}$. Así, podemos considerar a $I(p)$ como una distribución de soporte $p_{1i} + p_{2i}$, lo que posibilita que esta sea de la forma:

$$I(p) = \delta(p - p_{1i} - p_{2i}) (2\pi)^2 \int d^4x \, |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 . \quad (75)$$

Concluimos que la probabilidad de transición (67) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \sum_f p_{fi} &= \int d^3p_3 d^3p_4 \, |\mathcal{M}(p_{1i}, p_{2i}, p_3, p_4)|^2 \delta(p - p_{1i} - p_{2i}) \\ &\quad \times (2\pi)^2 \int d^4x \, |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 . \end{aligned} \quad (76)$$

C.1. Sección de choque total

Dado que la segunda partícula es el blanco, luego, en su referencial de reposo se tendrá el paquete de onda correspondiente:

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \phi_2(\vec{x}) . \quad (77)$$

Mientras que la primera partícula se dirige a esta con una velocidad $\vec{v}$, luego, para esta se tiene el paquete de onda:

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \phi_1(\vec{x} + \vec{v}t) . \quad (78)$$

Como realmente se tiene un haz de partículas incidentes, separadas lo suficiente para que no interactúen entre sí. Entonces, debemos considerar el promedio sobre un área πR^2 ,

$$|\tilde{\varphi}_1(x)|^2 \rightarrow \frac{1}{\pi R^2} \int_{|\vec{x}_{1\perp}|} d^2x_{1\perp} \, |\phi_1(\vec{x} + \vec{x}_{1\perp} + \vec{v}t)|^2 , \quad (79)$$

donde la integral es dada en una región transversal a la velocidad. Por lo tanto,

$$\int d^4x \, |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 \rightarrow \frac{1}{\pi R^2} \int_{|\vec{x}_{1\perp}|} d^2x_{1\perp} \int d^4x \, |\phi_1(\vec{x} + \vec{x}_{1\perp} + \vec{v}t)|^2 |\phi_2(\vec{x})|^2 , \quad (80)$$

integrando la variable temporal y tomando en cuenta la invariancia por traslación de las integrales espaciales,

$$\int d^4x \, |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 \rightarrow \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{|\vec{v}|} \int_{|\mathbf{x}_{1\perp}|} d^3x_1 \int d^3x \, |\phi_1(\vec{x} + \vec{x}_1)|^2 |\phi_2(\vec{x})|^2 . \quad (81)$$

Por último, siendo los paquetes de onda normalizados,

$$\int d^4x \, |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 \rightarrow \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{|\vec{v}|} . \quad (82)$$

Finalmente, la probabilidad de transición (76) se puede expresar como:

$$\sum_f p_{fi}(R) = \frac{1}{\pi R^2} \left[(2\pi)^2 \frac{1}{|\vec{v}|} \int d^3p_3 d^3p_4 \, |\mathcal{M}(p_{1i}, p_{2i}, p_3, p_4)|^2 \delta(p - p_{1i} - p_{2i}) \right] , \quad (83)$$

e, identificamos el término dentro del corchete como el área eficaz de interacción;

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \pi R^2 \sum_f p_{fi}(R) \\ &= (2\pi)^2 \frac{1}{|\vec{v}|} \int d^3p_3 d^3p_4 \, |\mathcal{M}(p_{1i}, p_{2i}, p_3, p_4)|^2 \delta(p - p_{1i} - p_{2i}) \end{aligned} \quad (84)$$

es decir, esta es la *sección de choque total*.

En un referencial tal que la partícula blanco tiene una velocidad $\vec{v}_2$ colineal a la velocidad de la partícula a ser dispersada $\vec{v}_1$, se tendrá que la velocidad relativa pasa a ser:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 . \quad (85)$$

Luego, dadas las 4-velocidades de las partículas:

$$u_1 = \gamma_1(1, \vec{v}_1) \quad (86)$$

$$u_2 = \gamma_2(1, \vec{v}_2) , \quad (87)$$

donde $\gamma_{1,2}$ es el factor de Lorentz, y, tendremos que:

$$u_1 \cdot u_1 = \gamma_1^2 (1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) = 1 \quad (88)$$

$$u_2 \cdot u_2 = \gamma_2^2 (1 - \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) = 1 \quad (89)$$

$$u_1 \cdot u_2 = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) , \quad (90)$$

Luego, podemos reescribir:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= [(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)]^{1/2} \\ &= (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^{1/2} , \end{aligned} \quad (91)$$

como:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= (2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}u_1 \cdot u_2 - \gamma_1^{-2} - \gamma_2^{-2})^{1/2} \\ &= \frac{(2\gamma_1\gamma_2u_1 \cdot u_2 - \gamma_2^2 - \gamma_1^2)^{1/2}}{\gamma_1\gamma_2} \\ &= \frac{\{2\gamma_1\gamma_2u_1 \cdot u_2 - [1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2)]\gamma_1^2\gamma_2^2 - 1\}^{1/2}}{\gamma_1\gamma_2} , \end{aligned} \quad (92)$$

desarrollando $u_1 \cdot u_2$,

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \frac{\{2\gamma_1^2\gamma_2^2(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - [1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2)]\gamma_1^2\gamma_2^2 - 1\}^{1/2}}{\gamma_1\gamma_2} \\ &= \frac{\{\gamma_1^2\gamma_2^2[1 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2)] - 1\}^{1/2}}{\gamma_1\gamma_2} , \end{aligned} \quad (93)$$

y, como $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son colineales,

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 , \quad (94)$$

por lo que:

$$|\vec{v}| = \frac{[\gamma_1^2\gamma_2^2(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - 1]^{1/2}}{\gamma_1\gamma_2} , \quad (95)$$

equivalentemente,

$$|\vec{v}| = \frac{[\gamma_1^2\gamma_2^2(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - 1]^{1/2}}{\gamma_1\gamma_2(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)} . \quad (96)$$

Finalmente, identificamos $u_1 \cdot u_2$, obteniendo:

$$|\vec{v}| = \frac{\left[(u_1 \cdot u_2)^2 - 1 \right]^{1/2}}{u_1 \cdot u_2} (1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) . \quad (97)$$

Además, dadas las definiciones de los 4-momentos:

$$p_i = m_1 u_1 = (\gamma_1 m_1, \gamma_1 m_1 \vec{v}_1) = (E_1, \vec{p}_i) \quad (98)$$

$$q_i = m_2 u_2 = (\gamma_2 m_2, \gamma_2 m_2 \vec{v}_2) = (E_2, \vec{q}_i) , \quad (99)$$

tendremos que:

$$|\vec{v}| = \frac{\left[(p_i \cdot q_i)^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2}}{p_i \cdot q_i} \left[1 - \left(\frac{\gamma_1 m_1 \vec{v}_1}{\gamma_1 m_1} \right) \cdot \left(\frac{\gamma_2 m_2 \vec{v}_2}{\gamma_2 m_2} \right) \right] , \quad (100)$$

es decir,

$$|\vec{v}| = \frac{\left[(p_i \cdot q_i)^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2}}{p_i \cdot q_i} \left(1 - \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{q}_i}{E_1 E_2} \right) . \quad (101)$$

Finalmente, siendo,

$$p_i \cdot q_i = E_1 E_2 - \vec{p}_i \cdot \vec{q}_i , \quad (102)$$

obtenemos que el módulo de la velocidad relativa $|\vec{v}|$, se puede expresar como:

$$|\vec{v}| = \frac{\left[(p_i \cdot q_i)^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2}}{E_1(p_i) E_2(q_i)} . \quad (103)$$

Así, podemos reescribir la sección de choque total en un referencial arbitrario,

$$\begin{aligned} \sigma &= (2\pi)^2 \frac{E_1(p_i) E_2(q_i)}{\sqrt{(p_i \cdot q_i)^2 - m_1^2 m_2^2}} \\ &\quad \sum_{s_f \sigma_f} \int d^3 p_2 d^3 q_2 \left| \mathcal{M}_{s_i \sigma_i s_f \sigma_f}(p_i, q_i, p_2, q_2) \right|^2 \delta(p_2 + q_2 - p_i - q_i) , \end{aligned} \quad (104)$$

donde Ω es el ángulo sólido entre los momentos.

C.2. Sección de choque y las variables de Mandelstan

Dada la relación entre la amplitud de transición y $\mathcal{M}$ (59), podemos llamar a esta última también de amplitud de transición. Luego,

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} , \quad (105)$$

será la densidad de probabilidad de transición. De la expresión (60), tendremos que:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= e^4 \left[\hat{D}_{\mu\nu}^{*F} (p_f - p_i) u_{\sigma_i}^\dagger(\vec{q}_i) \gamma^{\nu\dagger} \bar{u}_{\sigma_f}^\dagger(\vec{q}_f) u_{s_i}^\dagger(\vec{p}_i) \gamma^{\mu\dagger} \bar{u}_{s_f}^\dagger(\vec{p}_f) \right] \\ &\quad \times \left[\hat{D}_{\alpha\beta}^F (p_f - p_i) \bar{u}_{s_f}(\vec{p}_f) \gamma^\alpha u_{s_i}(\vec{p}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\vec{q}_f) \gamma^\beta u_{\sigma_i}(\vec{q}_i) \right] . \end{aligned} \quad (106)$$

Identificando los biespinores conjugados y las propiedades de las γ 's matrices,

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0 ; \quad \bar{u}^\dagger = \gamma^0 u ; \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 ; \quad \gamma^0 \gamma^0 = 1 , \quad (107)$$

reescribimos la densidad de probabilidad de transición, como:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= e^4 \left[\hat{D}_{\mu\nu}^{*F} (p_f - p_i) \bar{u}_{\sigma_i}(\vec{q}_i) \gamma^\nu u_{\sigma_f}(\vec{q}_f) \bar{u}_{s_i}(\vec{p}_i) \gamma^\mu u_{s_f}(\vec{p}_f) \right] \\ &\quad \times \left[\hat{D}_{\alpha\beta}^F (p_f - p_i) \bar{u}_{s_f}(\vec{p}_f) \gamma^\alpha u_{s_i}(\vec{p}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\vec{q}_f) \gamma^\beta u_{\sigma_i}(\vec{q}_i) \right] . \end{aligned} \quad (108)$$

En la expresión de la sección de choque (104), se ha tomado en cuenta todas las posibles helicidades finales. Si no se tienen los valores específicos de las helicidades iniciales, consideramos el promedio:

$$\sum_{s_f \sigma_f} |\mathcal{M}|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{s_i \sigma_i} \sum_{s_f \sigma_f} |\mathcal{M}|^2 . \quad (109)$$

y, denotaremos a este último como $|\mathcal{M}|^2$. Además, reordenando los productos en (108) y

usando las propiedades de los espinores. Más detalles sobre estas propiedades se encuentran en [27].,

$$\sum_s u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m_1}{2E_1} \quad (110)$$

$$\sum_\sigma u_\sigma(\vec{q}) \bar{u}_\sigma(\vec{q}) = \frac{\gamma^\mu q_\mu + m_2}{2E_2} , \quad (111)$$

encontramos que el promedio de la densidad de probabilidad de transición $|\mathcal{M}|^2$, es dado como:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{64E_1(p_i) E_2(q_i) E_1(p_f) E_2(q_f)} \\ &\times \hat{D}_{\mu\nu}^{*F}(p_f - p_i) \hat{D}_{\alpha\beta}^F(p_f - p_i) \\ &\times \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m_1) \gamma^\alpha (\not{p}_i + m_1)] \text{tr} [\gamma^\nu (\not{q}_f + m_2) \gamma^\beta (\not{q}_i + m_2)] . \end{aligned} \quad (112)$$

en donde se ha introducido la notación: $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. En el caso del electromagnetismo de Podolsky, el propagador electromagnético en el espacio de momentos es de la forma:

$$\hat{D}_{\mu\nu}^F(k) = \eta_{\mu\nu} \left(\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k) \right) , \quad (113)$$

luego, (112) se reescribe como:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{64E_1(p_i) E_2(q_i) E_1(p_f) E_2(q_f)} \\ &\times \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (p_f - p_i) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (p_f - p_i) \\ &\times \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m_1) \gamma^\alpha (\not{p}_i + m_1)] \text{tr} [\gamma^\nu (\not{q}_f + m_2) \gamma^\beta (\not{q}_i + m_2)] , \end{aligned} \quad (114)$$

y, realizando las contracciones con el tensor métrico,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{64E_1(p_i) E_2(q_i) E_1(p_f) E_2(q_f)} \\ &\times \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (p_f - p_i) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (p_f - p_i) \\ &\times \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m_1) \gamma^\alpha (\not{p}_i + m_1)] \text{tr} [\gamma_\mu (\not{q}_f + m_2) \gamma_\alpha (\not{q}_i + m_2)] . \end{aligned} \quad (115)$$

En esta última expresión, se identifican los términos:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (k) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (k) &= (2\pi)^{-4} \frac{1}{(k^2)^2 \left(1 - \frac{k^2}{m_a^2} \right)^2} \\
tr \left[\gamma^\mu (p_f + m_1) \gamma^\alpha (p_i + m_2) \right] &= 4 \left[p_f^\mu p_i^\alpha + p_i^\mu p_f^\alpha - \eta^{\mu\alpha} (p_f \cdot p_i - m_1^2) \right] \\
tr \left[\gamma_\mu (q_f + m_1) \gamma_\alpha (q_i + m_2) \right] &= 4 \left[q_{f\mu} q_{i\alpha} + q_{i\mu} q_{f\alpha} - \eta_{\mu\alpha} (q_f \cdot q_i - m_2^2) \right] .
\end{aligned} \tag{116}$$

donde $k = p_f - p_i$. Así,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{(2\pi)^{-4} e^4}{2E_1(p_i) E_2(q_i) E_1(p_f) E_2(q_f)} \times \frac{1}{\left((p_f - p_i)^2 \right)^2 \left(1 - \frac{(p_f - p_i)^2}{m_a^2} \right)^2} \\
&\times \left\{ [(p_f \cdot q_f) (p_i \cdot q_i) + (p_i \cdot q_f) (p_f \cdot q_i) - (q_f \cdot q_i) (p_f \cdot p_i - m_1^2)] \right. \\
&\left. + (p_f \cdot p_i - 2m_1^2) (q_f \cdot q_i - m_2^2) \right\} ,
\end{aligned} \tag{117}$$

simplificando el último término entre llaves,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{(2\pi)^{-4} e^4}{2E_1(p_i) E_2(q_i) E_1(p_f) E_2(q_f)} \times \frac{1}{(p_f - p_i)^4 \left(1 - \frac{(p_f - p_i)^2}{m_a^2} \right)^2} \\
&\times \left[(p_f \cdot q_f) (p_i \cdot q_i) + (p_i \cdot q_f) (p_f \cdot q_i) \right. \\
&\quad \left. - (q_f \cdot q_i) m_1^2 - (p_f \cdot p_i) m_2^2 + 2m_1^2 m_2^2 \right] .
\end{aligned} \tag{118}$$

En esta relación, identificamos la cantidad:

$$T = (p_f \cdot q_f) (p_i \cdot q_i) + (p_i \cdot q_f) (p_f \cdot q_i) - (q_f \cdot q_i) m_1^2 - (p_f \cdot p_i) m_2^2 + 2m_1^2 m_2^2 , \tag{119}$$

y, observamos que esta es invariante relativista. Por lo que, expresaremos esta es términos de

las variables de Mandelstan:

$$\begin{aligned}
s &= (p_i + q_i)^2 = (p_f + q_f)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_i \cdot q_i) = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_f \cdot q_f) \\
t &= (p_i - p_f)^2 = (q_i - q_f)^2 = 2m_1^2 - 2(p_f \cdot p_i) = 2m_2^2 - 2(q_f \cdot q_i) \\
u &= (p_f - q_i)^2 = (p_i - q_f)^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2(p_f \cdot q_i) = m_1^2 + m_2^2 - 2(p_i \cdot q_f) ,
\end{aligned} \tag{120}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4} \left[s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 + m_2^2)^2 \right] + \frac{1}{4} \left[u^2 - 2u(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 + m_2^2)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} t (m_1^2 + m_2^2) ,
\end{aligned} \tag{121}$$

simplificando la expresión,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4} (s^2 + u^2) - \frac{1}{2} (s + u) (m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{2} t (m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 \\
&= \frac{1}{4} (s + u)^2 - \frac{1}{2} su - \frac{1}{2} (s + u) (m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{2} t (m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 \\
&= \frac{1}{4} (s + u) [s + u - 2(m_1^2 + m_2^2)] - \frac{1}{2} su + \frac{1}{2} t (m_1^2 + m_2^2) + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 ,
\end{aligned} \tag{122}$$

Además, observemos que la suma de las variables de Mandelstan se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
s + t + u &= (p_f + q_f)^2 + (q_i - q_f)^2 + (p_i - q_f)^2 \\
&= p_f^2 + q_f^2 + q_i^2 + q_f^2 + p_i^2 + q_f^2 + 2p_f \cdot q_f - 2q_i \cdot q_f - 2p_i \cdot q_f \\
&= p_f^2 + p_i^2 + q_i^2 + 3q_f^2 + 2(p_f - q_i - p_i) \cdot q_f ,
\end{aligned} \tag{123}$$

y, dadas las relaciones:

$$\begin{aligned}
p_i^2 &= p_f^2 = m_1^2 \\
q_i^2 &= q_f^2 = m_2^2 \\
p_i + q_i &= q_f + p_f ,
\end{aligned} \tag{124}$$

la suma de las variables de Mandelstan se reduce a:

$$s + t + u = 2m_1^2 + 2m_2^2 , \quad (125)$$

entonces (122), se rescribe en términos de las variables s , t y u como:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4} (s + u) (-t) + \frac{1}{2} t (m_1^2 + m_2^2) - \frac{1}{2} su + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 \\ &= \frac{1}{4} t [2 (m_1^2 + m_2^2) - (s + u)] - \frac{1}{2} su + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 , \end{aligned} \quad (126)$$

usando una vez más la suma de las variables de Madelstan, encontramos que:

$$T = \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{2} su + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 . \quad (127)$$

Por lo tanto, la densidad de probabilidad (118) se expresará como sigue:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{(2\pi)^{-4} e^4}{8E_1(p_i) E_2(q_i) E_1(p_f) E_2(q_f)} F(s, t, u) , \quad (128)$$

donde se ha separado la parte adimensional $F(s, t, u)$, dependiente de las variables de Mandelstan, las masas de los espinores y de la masa de la masa de Podolsky,

$$F(s, t, u) = \frac{t^2 - 2su + 2(m_1^2 + m_2^2)^2}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} . \quad (129)$$

Finalmente, considerando en la sección de choque total (104), el promedio de helicidades,

$$\begin{aligned} \sigma &= (2\pi)^2 \frac{E_1(p_i) E_2(q_i)}{\sqrt{(p_i \cdot q_i)^2 - m_1^2 m_2^2}} \\ &\times \int d^3 p_f d^3 q_f |\mathcal{M}(p_i, q_i, p_f, q_f)|^2 \delta(p_f + q_f - p_i - q_i) , \end{aligned} \quad (130)$$

esta resulta en:

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{\lambda^{1/2} (s, m_2^2, m_1^2)} \int \frac{d^3 p_f}{E_1(p_f)} \frac{d^3 q_f}{E_2(q_f)} \delta(p_f + q_f - p_i - q_i) F(s, t, u) , \quad (131)$$

en donde se ha introducido la función de Kallen:

$$\lambda(s, m_1^2, m_2^2) = s^2 + (m_1^2)^2 + (m_2^2)^2 - 2sm_1^2 - 2sm_2^2 - 2m_1^2m_2^2 , \quad (132)$$

y la constante de estructura fina:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} . \quad (133)$$

C.3. Sección de choque diferencial en el centro de masas

Por definición en el referencial del centro de masas, el momento lineal será nulo, es decir::

$$\vec{p}_i + \vec{q}_i = 0 , \quad (134)$$

teniendo en cuenta esta relación, se tendrá que:

$$\begin{aligned} (p_i \cdot q_i)^2 - m_1^2 m_2^2 &= (E_1 E_2 - \vec{p}_i \cdot \vec{q}_i)^2 - (E_1^2 - \vec{p}_i^2) (E_2^2 - \vec{q}_i^2) \\ &= (E_1 E_2 + \vec{p}_i^2)^2 - (E_1^2 - \vec{p}_i^2) (E_2^2 - \vec{p}_i^2) , \end{aligned} \quad (135)$$

simplificando,

$$(p_i \cdot q_i)^2 - m_1^2 m_2^2 = (E_1 + E_2) \vec{p}_i^2 , \quad (136)$$

por lo que la sección de choque (130), se expresará como:

$$\sigma = (2\pi)^2 \frac{E_1 E_2}{\sqrt{(E_1 + E_2) |\vec{p}_i|}} \int d^3 p_f d^3 q_f |\mathcal{M}|^2 \delta(p_f + q_f - p_i - q_i) . \quad (137)$$

Descomponiendo la δ -Dirac de la energía-momento en sus partes de energía y momento,

$$\delta(p_f + q_f - p_i - q_i) = \delta(E_{1f} + E_{2f} - E_1 - E_2) \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f - \vec{p}_i - \vec{q}_i) , \quad (138)$$

y, dado que estamos considerando el referencial de centro de masas, esta se reduce a:

$$\delta(p_f + q_f - p_i - q_i) = \delta(E_{1f} + E_{2f} - E_1 - E_2) \delta(\vec{p}_f + \vec{q}_f) . \quad (139)$$

Integrando la expresión de la sección de choque (137) en las variables del momento lineal

final de la partícula blanco $\vec{q}_f$,

$$\sigma = (2\pi)^2 \frac{E_1 E_2}{\sqrt{(E_1 + E_2)} |\vec{p}_i|} \int d^3 p_f |\mathcal{M}|^2 \delta(E_{1f} + E_{2f} - E_1 - E_2) , \quad (140)$$

en esta expresión, las energías de las partículas son:

$$E_{1f} = \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_f^2} \quad (141)$$

$$E_{2f} = \sqrt{m_2^2 + \vec{q}_f^2} = \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_f^2} , \quad (142)$$

Dado que se está considerando todas posibles direcciones finales de la partícula dispersada, expresemos la integral de la sección de choque en coordenadas esféricas:

$$\sigma = (2\pi)^2 \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) |\vec{p}_i|} \int d\Omega \int_0^\infty dp_f p_f^2 |\mathcal{M}|^2 \delta(E_{1f} + E_{2f} - E_1 - E_2) , \quad (143)$$

en donde $p_f = |\vec{p}_f|$. De la propiedad de la δ -Dirac,

$$\delta[f(p_f)] = \frac{\delta(p_f - p_{0f})}{|f'(p_{0f})|} , \quad (144)$$

siendo p_{0f} el cero de $f(p_f)$, encontramos que:

$$\begin{aligned} \sigma &= (2\pi)^2 \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) |\vec{p}_i|} \int d\Omega \int_0^\infty dp_f p_f^2 |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(p_f - p_{0f})}{\frac{p_{0f}}{E_{1f}} + \frac{p_{0f}}{E_{2f}}} \\ &= (2\pi)^2 \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) |\vec{p}_i|} \int d\Omega \int_0^\infty dp_f p_f^2 |\mathcal{M}|^2 \frac{E_{1f} E_{2f}}{p_{0f} (E_{1f} + E_{2f})} \delta(p_f - p_{0f}) , \end{aligned} \quad (145)$$

aquí, el valor p_{0f} garantiza la conservación de la energía. Integrando en p_f ,

$$\sigma = (2\pi)^2 \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) |\vec{p}_i|} \int d\Omega p_{0f} |\mathcal{M}|^2 \frac{E_{1f} E_{2f}}{(E_1 + E_2)} . \quad (146)$$

Además, de la conservación de la energía, se debe cumplir la ecuación algebraica:

$$\sqrt{m_1^2 + p_{0f}^2} + \sqrt{m_2^2 + p_{0f}^2} = \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_i^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_i^2} , \quad (147)$$

encontrando que una solución de esta es:

$$p_{0f} = |\vec{p}_i| , \quad (148)$$

característico de una dispersión elástica, en donde la partícula dispersada mantiene el modulo de su momento lineal inicial, mas no necesariamente su dirección. Así, la expresión de la sección de choque (146) se reduce a::

$$\sigma = (2\pi)^2 \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2)} \int d\Omega |\mathcal{M}|^2 \frac{E_{1f} E_{2f}}{(E_1 + E_2)} . \quad (149)$$

Finalmente, en la expresión encontrada, se identifica la sección de choque diferencial en el centro de masas:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m} = (2\pi)^2 \frac{E_1 E_2 E_{1f} E_{2f}}{(E_1 + E_2)^2} |\mathcal{M}|^2 . \quad (150)$$

y, reemplazando la densidad de probabilidad (128), se obtiene:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m} = \alpha^2 \frac{F(s, t, u)}{2(E_1 + E_2)^2} . \quad (151)$$

Además, en el centro de masas la variable de Mandelstan s se reduce a:

$$s = (E_1 + E_2)^2 , \quad (152)$$

es decir, esta resulta ser el cuadrado de la energía total, también conocida como energía en el centro de masaa. Por lo tanto, la sección de choque diferencial se expresa en forma invariante, como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{F(s, t, u)}{2s} . \quad (153)$$

C.4. Sección de choque diferencial a altas energías

La sección de choque diferencial encontrada (153), depende de la función invariante $F(s, t, u)$. De la expresión encontrada para esta (129), se tiene una dependencia con las tres variables de Mandelstam. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la dispersión tiene como rol principal el intercambio de energía-momento, y entonces, dada por la variable t . Además, en el referencial de centro de masas, resulta relevante la energía total del sistema, es decir, debemos tener en cuenta la variable s . Luego, en la expresión (129) de $F = F(s, t, u)$, sustituiremos la variable u usando la relación de la suma de las variables de Mandelstam,

$$u = 2(m_1^2 + m_2^2) - (s + t) , \quad (154)$$

Así,

$$F = \frac{t^2 - 4s(m_1^2 + m_2^2) + 2s(s + t) + 2(m_1^2 + m_2^2)^2}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} , \quad (155)$$

o, simplificando,

$$F = \frac{2[s - (m_1^2 + m_2^2)]^2 + 2st + t^2}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} . \quad (156)$$

Podemos reescribir esta, de tal manera que se tenga explícitamente sus tres contribuciones:

$$F = \frac{2[s - (m_1^2 + m_2^2)]^2}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} + \frac{2s}{t \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} . \quad (157)$$

Vamos a considerar un régimen de altas energías, en donde la energía del centro de masas es mucho mayor que la energía en reposo de los espinores, es decir

$$m_{1,2}^2 \ll s , \quad (158)$$

entonces,

$$F = \frac{2s^2}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} + \frac{2s}{t \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)^2} . \quad (159)$$

Por otro lado, si tal régimen de altas energías es aún mucho menor a m_a^2 , entonces, la función

invariante F se reduce a:

$$F = \left(\frac{2s^2}{t^2} + \frac{2s}{t} + 1 \right) \left(1 + 2 \frac{t}{m_a^2} \right) . \quad (160)$$

Por otro lado, en el centro de masas:

$$\vec{p}_i = -\vec{q}_i \equiv \vec{p} , \quad (161)$$

y, de la conservación de la energía-momento:

$$|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| , \quad (162)$$

además, definiendo el ángulo entre $\vec{p}_i$ y $\vec{p}_f$ como:

$$\theta \equiv \angle(\vec{p}_i, \vec{p}_f) , \quad (163)$$

podemos reescribir las variables de Mandelstam como:

$$\begin{aligned} s &= (p_i + q_i)^2 = (E_{i1} + E_{i2})^2 - (\vec{p}_i + \vec{q}_i)^2 = (E_1 + E_2)^2 \\ t &= (p_i - p_f)^2 = (E_{i1} + E_{f1})^2 - (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = -4\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} , \end{aligned} \quad (164)$$

en donde se ha tenido en cuenta que $E_{1i} = \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_i^2}$ y $E_{1f} = \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_f^2}$. Además, en el régimen de altas energías:

$$s = \left(\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} \right)^2 = 4\vec{p}^2 , \quad (165)$$

Por lo tanto, la función invariante F (160), se puede expresar en términos del ángulo de dispersión θ como:

$$F = \left(\frac{2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + 1 \right) \left[1 - 2 \left(\frac{s}{m_a^2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] . \quad (166)$$

o, equivalentemente,

$$F = \left(\frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \right) \left[1 - 2 \left(\frac{s}{m_a^2} \right) \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] . \quad (167)$$

Finalmente, en tal régimen de altas energías, la sección de choque diferencial (153) en el centro de masas, adopta la forma:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{GQED} = \frac{\alpha^2}{2s} \left(\frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \right) \left[1 - 2 \left(\frac{\sqrt{s}}{m_a} \right)^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] . \quad (168)$$

Recordemos que en el límite $m_a \rightarrow \infty$ se recupera la electrodinámica espinorial usual, y, vemos que en este mismo límite se obtiene la sección de choque diferencial:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{QED} = \frac{\alpha^2}{2s} \left(\frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \right) . \quad (169)$$

Por lo que la corrección de la electrodinámica espinorial generalizada a esta dispersión de espinores es dado como:

$$\delta \equiv \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{GQED}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{QED}} - 1 = -2 \left(\frac{\sqrt{s}}{m_a} \right)^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} . \quad (170)$$

En particular, fijada la energía del centro de masas, se tienen que para ángulos pequeños,

$$\delta = - \left(\frac{\sqrt{s}}{m_a} \right)^2 \frac{\theta^2}{2} , \quad (171)$$

la corrección será mínima. Mientras que para $\theta = \pi$,

$$\delta = -2 \left(\frac{\sqrt{s}}{m_a} \right)^2 , \quad (172)$$

la corrección será máxima,

Capítulo VI

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se ha estudiado la dispersión de dos fermiones de diferente masa e igual carga. Esto se ha realizado dentro del marco de la electrodinámica espinorial generalizada. En este marco, el campo espinorial de Dirac es la función de onda de los fermiones, y el campo electromagnético es el mediador de la interacción.

Dado que la dispersión de fermiones es debido a la interacción electromagnética, se estudió en primer lugar los diferentes propagadores del electromagnetismo generalizado. De antemano se tuvo presente que el propagador de Feynman tenía el rol deseado [29], ya que propaga los campo de frecuencia positiva y negativa de forma causal y acausal, respectivamente.

El método seguido, para el cálculo de las secciones de choque, es similar al dado por Bjorken y Drell [21]. La diferencia radica en el propagador electromagnético, que en nuestro caso incluye como polo adicional a la masa de Podolsky: m_a . En diferentes referencias se ha encontrado que m_a puede alcanzar valores de al menos de 370 GeV [20], lo que razonablemente valida el hecho de haber considerado un régimen de altas energías del centro de masas, con valores mucho menores a la masa de Podolsky.

En una teoría cuántica de campos de la electrodinámica espinorial usual: *QED*, se encuentran correcciones radiativas a los cálculos de nivel de árbol de la sección de choque [23]. Sin embargo, en nuestra propuesta, a pesar de ser un cálculo a nivel de árbol, la sección de choque encontrada ya difiere de la dada por la *QED*. Más aún, tal corrección depende tanto de la energía en el centro de masas como del ángulo de dispersión.

Se espera que nuestros resultados contribuyan al estudio de la dispersión entre electrones y muones [30]. Si bien en nuestro resultado final, hemos despreciado la masa de los fermiones,

se ha dejado abierta la posibilidad de un estudio en régimes de energía menor en donde tales masas sean preponderantes. Por otro lado, también es posible incluir nuestros resultados en el estudio de dispersión de electrones por átomos [21]. Para esta última, nos plantemos encontrar en un siguiente trabajo la dispersión coulombiana generalizada.

Otras extensiones de nuestro trabajo pueden realizarse para el estudio de la dispersión de partículas sin espín, y en ese sentido sustituiríamos el campo de Dirac por el de Klein-Gordon [21] o el de Duffin–Kemmer–Petiau [31].

Bibliografía

- [1] Coulomb, “*Memoires de l’Académie Royale des Sciences*”, (1785).
- [2] James Clerk Maxwell, “*A Treatise on Electricity and Magnetism*”, *Third edition*, Clarendon Press (1891).
- [3] S. J. Plimpton and W. E. Lawton, “*A Very Accurate Test of Coulomb’s Law of Force Between Charges*”, *Phys. Rev.* **50**, 1066 (1936).
- [4] Hideki Yukawa, “*On the Interaction of Elementary Particles. I*”, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan Volume 17* (1935).
- [5] D. F. Bartlett, P. E. Goldhagen, and E. A. Phillips, “*Experimental Test of Coulomb’s Law*”, *Phys. Rev. D* **2**, 483 (1970).
- [6] Alfred Landé, “*Finite Self-Energies in Radiation Theory. Part I*”, *Phys. Rev.* **60**, 121 (1941).
- [7] Joseph Larmor, “*Aether and Matter: a development of the dynamical relations of the aether to material systems*”, Cambridge University Press (1900).
- [8] H.A. Lorentz, “*Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light*”, *Proceeding of the Academy of Sciences of Amsterdam* (1904).
- [9] Albert Einstein, “*On the Electrodynamics of Moving Bodies*”, *Annalen der Physik* **17** (1905).
- [10] Albert Einstein, “*The Foundation of the General Theory of Relativity*”, *Annalen der Physik* **40** (1916).
- [11] A.S. Eddington, “*The Mathematical Theory of Relativity*”, *First edition*, Cambridge University Press (1924).
- [12] Hermann Weyl, “*Gravitation and the Electron*”, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15**, 323-334 (1929).
- [13] Von Fritz Bopp, “*A Linear Theory of the Electron*”, *Ann. Phys.* **430**(5), 345–384 (1940)

- [14] B. Podolsky, “*Generalized Electrodynamics. Part I-Non-Quantum*”, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
- [15] C.A.P. Galvão and B.M. Pimentel, “*The canonical struture of Podolsky generalized electrodynamics*”, Can. J. Phys. **66**, 460 (1988).
- [16] C. A. Bonin, R. Bufalo, and B. M. Pimentel, “*Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the Stefan-Boltzmann law*”, Phys. Rev D **81**, (2010) 025003.
- [17] R.R. Cuzinatto, C.A.M. de Melo, L.G. Medeiros e P.J. Pompeia, “*How can one probe Podolsky Electrodynamics?*”, Int. J. of Mod. Phys. A **26** (2011) 3641.
- [18] R. Bufalo, B.M. Pimentel e G.E.R. Zambrano, “*Path integral quantization of generalized quantum electrodynamics*, Phys. Rev. D **83**, (2011) 065023.
- [19] R. Bufalo, B.M. Pimentel e G.E.R. Zambrano, “*Renormalizability of generalized quantum electrodynamics*”, Phys. Rev. D **86**, (2012) 125023.
- [20] R. Bufalo, B.M. Pimentel, and D.E. Soto, “*Causal approach for the electron-positron scattering in generalized quantum electrodynamics*”, Phys. Rev. D **90**, (2014) 085012.
- [21] James D. Bjorken and Sidney D. Drell. “*Relativistic Quantum Mechanics*”. McGraw-Hill (1964).
- [22] I.M. Gel’fand and G.E Shilov. “*Generalized Functions: Properties and Operations*”. Volume I. Academic Press (1964).
- [23] G. Scharf. “*Finite Quantum Electrodynamics: The Causal Approach*”. Second Edition. Springer (1995).
- [24] Pertti Lounesto. “*Clifford Algebras and Spinors*”. Cambridge University Press (2001).
- [25] Giovanni Costa and Gianluigi Fogli. “*Symmetries and Group Theory in Particle Physics*”. Springer (2012).
- [26] Andreas Aste, “*Weyl, Majorana and Dirac Fields from a Unified Perspective*”, Symmetry 2016, 8(9), **87**.
- [27] Voja Radovanovic. “*Problem Book in Quantum Field Theory*”. Second Edition. Springer (2008).

- [28] Boris Kosyakov. “*Introduction to the Classical Theory of Particles and Fields*”. Springer (2007).
- [29] J.J. Sakurai. “*Advanced Quantum Mechanics*”. Addison-Wesley Publishing Company (1967).
- [30] M. Fael and M. Passera, “*Muon-Electron Scattering at Next-To-Next-To-Leading Order: The Hadronic Corrections*”, Phys. Rev. Lett. **122**, (2019) 192001.
- [31] J. Beltrán, B. M. Pimentel, and D. E. Soto, “*The causal approach proof for the equivalence of $SDKP_4$ and $SQED_4$ at tree-level*”, Int. J. of Mod. Phys. A **35** (2020) 2050042.

Anexos

A. Teoría clásica de campos de orden arbitrario

Al considerar propiedades locales de un sistema físico, es decir que dependan de cada punto del espacio y en cada instante, debemos introducir funciones cuyos valores en cada punto del espacio-tiempo estén relacionados a tales propiedades. Así, definimos los campos:

$$\varphi^A : \mathcal{M} \rightarrow V \quad \text{con } A = 1, \dots, N , \quad (1)$$

donde $\mathcal{M}$ es la colección de puntos del espacio-tiempo y V el espacio de valores que adoptan el campos. Debemos tener en cuenta que en particular el índice A también puede representar las componentes de un mismo campo.

En una teoría relativista, $\mathcal{M}$ es el espacio-tiempo de Minkowski y V es el espacio en donde actúa una representación del grupo de Lorentz L . Es decir, si $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ son las coordenadas de un punto de $\mathcal{M}$, entonces estas se transforman por un elemento del grupo de Lorentz $\Lambda \in L$ como:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu . \quad (2)$$

Luego, debe existir la transformación de los campos:

$$\varphi'^A(x') = [S(\Lambda)]^A_B \varphi^B(x) , \quad (3)$$

donde $S(\Lambda)$ debe ser un elemento de alguna representación del grupo de Lorentz.

A.1. Funcional acción y lagrangiana

En el formalismo lagrangiano de la teoría de campos, las ecuaciones de movimiento y las leyes de conservación son obtenidas a partir de principios variacionales. Estos consisten en problemas extremales de la conocida *funcional acción*, definida como sigue:

$$S[\varphi] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}[\varphi^A, \partial_{(1)}\varphi^A, \dots, \partial_{(n)}\varphi^A](x) , \quad (4)$$

donde $\partial_{(k)} = \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_k}$, Ω es una región del espacio-tiempo y $\mathcal{L}$ es la lagrangiana de la teoría. En la expresión dada, estamos considerando una teoría de orden n , es decir, la lagrangiana es construida con los campos y sus derivadas de hasta el orden n .

En los principios variacionales se considera que la acción es estacionaria bajo ciertas condiciones. En primer lugar debemos de introducir la variación de la acción en primer orden respecto a conjunto de parámetros que definen las transformaciones de las coordenadas y de los campos,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \quad (5)$$

$$\varphi'^A(x') = \varphi^A(x) + \delta \varphi^A(x) , \quad (6)$$

en donde $\delta \varphi^A(x)$ representa a la variación total del campo, es decir, se compone según:

$$\delta \varphi^A(x) = \bar{\delta} \varphi^A(x) + \partial_{\mu} \varphi^A(x) \delta x^{\mu} , \quad (7)$$

siendo $\bar{\delta} \varphi^A(x)$ la variación en la forma del campo y $\partial_{\mu} \varphi^A(x) \delta x^{\mu}$ la variación en el punto. Así, la variación de la acción será dada como:

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4 x' \mathcal{L} [\varphi'^A, \dots, \partial'_{(n)} \varphi'^A] (x') - \int_{\Omega} d^4 x \mathcal{L} [\varphi^A, \dots, \partial_{(n)} \varphi^A] (x) , \quad (8)$$

aquí Ω' es la región transformada del espacio-tiempo. La lagrangiana transformada se puede expresar como:

$$\mathcal{L} [\varphi'^A, \dots, \partial'_{(n)} \varphi'^A] (x') = \mathcal{L} [\varphi^A, \dots, \partial_{(n)} \varphi^A] (x) + \delta \mathcal{L} [\varphi^A, \dots, \partial_{(n)} \varphi^A] (x) , \quad (9)$$

y, al igual que los campos, la variación total de la lagrangiana también se compone por su variación en la forma y en el punto:

$$\delta \mathcal{L}(x) = \bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \partial_{\mu} \mathcal{L}(x) \delta x^{\mu} . \quad (10)$$

Haciendo el cambio de variable $x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$ en la primera integral de (8), es decir,

considerando en esta:

$$\Omega' \rightarrow \Omega \quad (11)$$

$$d^4x' = d^4x (1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)) , \quad (12)$$

vemos que podemos expresar la variación de la acción (8),

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x (1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)) [\mathcal{L}(x) + \bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x^\mu] - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) , \quad (13)$$

en una sola integral,

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x [\bar{\delta} \mathcal{L} + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu)] , \quad (14)$$

en donde se han considerado solo variaciones de primer orden.

La variación en la forma de la lagrangiana se dá debido a la variación de la forma del campo y sus derivadas, es decir,

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \sum_{a=0}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(a)} \varphi^A)} \bar{\delta} (\partial_{(a)} \varphi^A) , \quad (15)$$

en donde la variación en la forma y las derivadas conmutan, ya que al derivar

$$\varphi'^A(x') = \varphi^A(x) + \bar{\delta} \varphi^A(x) + \partial_\lambda \varphi^A(x) \delta x^\lambda , \quad (16)$$

respecto a x'^μ ,

$$\partial'_{\alpha} \varphi'^A(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\alpha}} \partial_{\nu} [\varphi^A(x) + \bar{\delta} \varphi^A(x) + \partial_\lambda \varphi^A(x) \delta x^\lambda] , \quad (17)$$

y, teniendo en cuenta que:

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + \delta x^{\nu} \rightarrow \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} = \delta^{\nu}_{\alpha} - \partial'_{\alpha} \delta x^{\nu} \approx \delta^{\nu}_{\alpha} - \partial_{\alpha} \delta x^{\nu} , \quad (18)$$

tendremos que:

$$\partial'_{\alpha} \varphi'^A(x') = [\partial_{\alpha} - (\partial_{\alpha} \delta x^{\nu}) \partial_{\nu}] [\varphi^A(x) + \bar{\delta} \varphi^A(x) + \partial_{\lambda} \varphi^A(x) \delta x^{\lambda}] , \quad (19)$$

considerando solo hasta términos de primer orden y haciendo el cambio $\lambda \rightarrow \nu$:

$$\begin{aligned}
\partial'_\alpha \varphi'^A(x') &= \partial_\alpha \varphi^A(x) + \partial_\alpha \bar{\delta} \varphi^A(x) + \partial_\alpha \partial_\nu \varphi^A(x) \delta x^\nu + \partial_\nu \varphi^A(x) \partial_\alpha \delta x^\nu \\
&\quad - (\partial_\alpha \delta x^\nu) \partial_\nu \varphi^A(x) \\
&= \partial_\alpha \varphi^A(x) + \partial_\alpha \bar{\delta} \varphi^A(x) + \partial_\alpha \partial_\nu \varphi^A(x) \delta x^\nu ,
\end{aligned} \tag{20}$$

vemos que:

$$\begin{aligned}
\delta \partial_\alpha \varphi^A(x) &= \partial'_\alpha \varphi'^A(x') - \partial_\alpha \varphi^A(x) \\
&= \partial_\alpha \bar{\delta} \varphi^A(x) + \partial_\alpha \partial_\nu \varphi^A(x) \delta x^\nu .
\end{aligned} \tag{21}$$

Por otro lado, por definición:

$$\delta \partial_\alpha \varphi^A(x) = \bar{\delta} \partial_\alpha \varphi^A(x) + \partial_\alpha \partial_\nu \varphi^A(x) \delta x^\nu , \tag{22}$$

comparando los últimos resultados, concluimos que:

$$\bar{\delta} (\partial_\alpha \varphi^A) = \partial_\alpha \bar{\delta} \varphi^A . \tag{23}$$

Realizando los mismos pasos para:

$$\partial'_\sigma \varphi'^A(x') = \partial_\sigma \varphi^A(x) + \bar{\delta} \partial_\sigma \varphi^A(x) + \partial_\lambda \partial_\sigma \varphi^A(x) \delta x^\lambda , \tag{24}$$

es decir, haciendo $\varphi^A \rightarrow \partial_\sigma \varphi^A$ en los resultados anteriores, obtendremos que:

$$\partial_\mu \bar{\delta} \partial_\sigma \varphi^A(x) = \bar{\delta} \partial_\mu \partial_\sigma \varphi^A(x) , \tag{25}$$

y, como ya se ha visto,

$$\bar{\delta} \partial_\sigma \varphi^A(x) = \partial_\sigma \bar{\delta} \varphi^A(x) , \tag{26}$$

por lo que:

$$\bar{\delta} (\partial_\alpha \partial_\sigma \varphi^A) = \partial_\alpha \partial_\sigma \bar{\delta} \varphi^A . \tag{27}$$

Luego, por inducción, podemos encontrar que:

$$\bar{\delta} \left(\partial_{(a)} \varphi^A \right) = \partial_{(a)} \bar{\delta} \varphi^A , \quad (28)$$

para $a = 0, 1, \dots, n$. Finalmente, la variación en la forma de la lagrangiana se puede escribir como:

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \sum_{a=0}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(a)} \varphi^A \right)} \partial_{(a)} \bar{\delta} \varphi^A . \quad (29)$$

Con el fin de encontrar las condiciones de frontera se identificarán términos de divergencia. Luego, reescribamos $\bar{\delta} \mathcal{L}$ como:

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \bar{\delta} \varphi^A + \sum_{b=1}^{n-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(b)} \varphi^A \right)} \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(n)} \varphi^A \right)} \right) \partial_{(n)} \bar{\delta} \varphi^A , \quad (30)$$

y, reescribamos el primer término del lado derecho, como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \bar{\delta} \varphi^A &= \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(a)} \varphi^A \right)} \right) \right] \bar{\delta} \varphi^A \\ &\quad - \sum_{c=1}^n (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(c)} \varphi^A \right)} \right) \bar{\delta} \varphi^A , \end{aligned} \quad (31)$$

mientras que en el segundo término:

$$I = \sum_{b=1}^{n-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(b)} \varphi^A \right)} \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A , \quad (32)$$

completamos las derivadas de productos:

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{b=1}^{n-1} \left[\sum_{c=1}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A \right)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right] \\ &\quad + \sum_{b=1}^{n-1} \left[\sum_{c=1}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A \right)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{(b)} \varphi^A \right)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right] , \end{aligned} \quad (33)$$

en esta es posible reescribir la última sumatoria en una forma compacta, según:

$$\begin{aligned}
I &= - \sum_{b=1}^{n-1} \left[\sum_{c=1}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right] \\
&\quad + \sum_{b=1}^{n-1} \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right].
\end{aligned} \tag{34}$$

Así, reemplazando en (30), vemos que $\bar{\delta} \mathcal{L}$ podrá reescribirse como:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} \mathcal{L} &= \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(a)} \varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta} \varphi^A \\
&\quad - \sum_{c=1}^n (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c)} \varphi^A)} \right) \bar{\delta} \varphi^A - \sum_{b=1}^{n-1} \left[\sum_{c=1}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right] \\
&\quad + \sum_{b=1}^{n-1} \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right] + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(n)} \varphi^A)} \right) \partial_{(n)} \bar{\delta} \varphi^A,
\end{aligned} \tag{35}$$

aquí, podemos unir las sumatorias tanto de la segunda como de la tercera línea,

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} \mathcal{L} &= \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(a)} \varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta} \varphi^A \\
&\quad + \sum_{b=0}^{n-1} \left[- \sum_{c=1}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right] \\
&\quad + \sum_{b=1}^n \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right],
\end{aligned} \tag{36}$$

haciendo en la segunda sumatoria $c \rightarrow c+1$ y $b \rightarrow b-1$:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} \mathcal{L} &= \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(a)} \varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta} \varphi^A \\
&\quad + \sum_{b=1}^n \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c+1)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c+1)} \partial_{(b-1)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b-1)} \bar{\delta} \varphi^A \right] \\
&\quad + \sum_{b=1}^n \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(c)} \partial_{(b)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b)} \bar{\delta} \varphi^A \right].
\end{aligned} \tag{37}$$

Finalmente, identificando la derivada de un producto en las dos últimas sumatorias,

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\mathcal{L} &= \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{(a)}\varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta}\varphi^A \\ &+ \partial_{(1)} \left\{ \sum_{b=1}^n \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{(1)}\partial_{(c)}\partial_{(b-1)}\varphi^A)} \right) \partial_{(b-1)} \bar{\delta}\varphi^A \right] \right\} .\end{aligned}\quad (38)$$

Finalmente, identificamos $\partial_{(1)}$ por ∂_μ en (38) :

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\mathcal{L} &= \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{(a)}\varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta}\varphi^A \\ &+ \partial_\mu \left\{ \sum_{b=1}^n \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_{(c)}\partial_{(b-1)}\varphi^A)} \right) \partial_{(b-1)} \bar{\delta}\varphi^A \right] \right\} ,\end{aligned}\quad (39)$$

y, reemplazamos en (14), obteniéndose la variación de la acción:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{(a)}\varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta}\varphi^A \\ &+ \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left\{ \sum_{b=1}^n \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_{(c)}\partial_{(b-1)}\varphi^A)} \right) \partial_{(b-1)} \bar{\delta}\varphi^A \right] - \mathcal{L}\delta x^\mu \right\} ,\end{aligned}\quad (40)$$

o, usando el teorema de Gauss, también podemos expresarla como:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{(a)}\varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta}\varphi^A \\ &+ \int_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \left\{ \sum_{b=1}^n \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_{(c)}\partial_{(b-1)}\varphi^A)} \right) \partial_{(b-1)} \bar{\delta}\varphi^A \right] - \mathcal{L}\delta x^\mu \right\} .\end{aligned}\quad (41)$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de la región en el espacio-tiempo Ω .

A.2. Principio de Hamilton

La descripción de los campos es dada por observadores inerciales. Luego, en cierto sistema de referencia inercial, SRI, se tendrá que el volumen del espacio-tiempo Ω es limitado por dos hipersuperficies $\sigma_1 = \sigma(x_1^0)$ y $\sigma_2 = \sigma(x_2^0)$ perpendiculares al eje temporal del observador, es

claro que dichas hipersuperficies son parte de $\partial\Omega$.

Así, enunciaremos el principio de Hamilton como: *de todos los campos que se pueden establecer entre σ_1 y σ_2 , solo los campos físicos son los que hacen estacionaria a la acción.*

Del enunciado, se tiene que:

$$\delta x^\mu |_{\sigma_1} = \delta x^\mu |_{\sigma_2} = 0 , \quad (42)$$

además, se entiende que los campos y sus derivadas son bien definidos en σ_1 y σ_2 , es decir:

$$\partial_{(b-1)} \bar{\delta} \varphi^A |_{\sigma_1} = \partial_{(b-1)} \bar{\delta} \varphi^A |_{\sigma_2} = 0 , \quad (43)$$

para $b = 1, \dots, n$. Sustituyendo en la variación de la acción (41) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{\Omega} d^4x \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(a)} \varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta} \varphi^A \\ & + \int_{[x_1^0, x_2^0] \times \partial V} d\sigma_\mu \left\{ \sum_{b=1}^n \left[\sum_{c=0}^{n-b} (-1)^c \partial_{(c)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_{(c)} \partial_{(b-1)} \varphi^A)} \right) \partial_{(b-1)} \bar{\delta} \varphi^A \right] - \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} , \end{aligned} \quad (44)$$

donde ∂V es el contorno del volumen espacial V donde se encuentran definidos los campos. Del enunciado, se entiende que las condiciones de contorno son características propias del sistema. Por lo tanto, ∂V es bien definido, es decir,

$$\delta x^\mu |_{\partial V} = \delta x^\mu |_{\partial V} = 0 , \quad (45)$$

y, podemos considerar que fuera de V los campos deben ser nulos. Así, se imponen las condiciones de contorno:

$$\partial_{(b-1)} \bar{\delta} \varphi^A |_{\partial V} = \partial_{(b-1)} \bar{\delta} \varphi^A |_{\partial V} = 0 , \quad (46)$$

por lo que, la variación de la acción se reduce a:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(a)} \varphi^A)} \right) \right] \bar{\delta} \varphi^A . \quad (47)$$

Finalmente, tomando en cuenta que las variaciones en la forma de los campos $\bar{\delta}\varphi^A$ son arbitrarias, se encuentra que los campos físicos deben cumplir con las *ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\sum_{a=0}^n (-1)^a \partial_{(a)} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{(a)} \varphi^A)} \right) = 0 . \quad (48)$$

En particular, para una teoría de primer orden, $n = 1$, se tienen las ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^A)} \right) = 0 , \quad (49)$$

mientras que para una teoría de segundo orden, $n = 2$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^A)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi^A)} \right) = 0 . \quad (50)$$

en donde, vemos que los índices de las derivadas del último término aparecen en orden inverso. Aunque, debido la simetría de la composición de las derivadas, tal orden no afecta el resultado.