

Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias



TESIS

“Optimización Robusta Aplicada a Problemas de Energía”

Para obtener el Título Profesional de Licenciado en
Matemática

Elaborado por:

Americo Andres Chulluncuy Reynoso



0009-0005-3365-7978

Asesor:

Dr. Eladio Teófilo Ocaña Anaya



0000-0001-5960-7366

LIMA-PERÚ

2025

Citar/How to cite	Chulluncuy Reynoso [1]
Referencia/Reference	[1] A. Chulluncuy Reynoso, <i>Optimización Robusta Aplicada a Problemas de Energía</i> [Tesis de pregrado]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2025.
Estilo/Style:	IEEE

Citar/How to cite	(Chulluncuy Reynoso, 2025)
Referencia/Reference	Chulluncuy Reynoso, A. (2025). <i>Optimización Robusta Aplicada a Problemas de Energía</i> . [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio Institucional UNI.
Estilo/Style:	APA (7ma ed.)

Dedicatoria

*Dedico este trabajo a mi familia, por su apoyo constante e incondicional. Este logro no
habría sido posible sin ellos.*

Agradecimientos

Quiero expresar mis sinceros agradecimientos a todas las personas que, de una u otra manera, contribuyeron de forma significativa a la realización de esta tesis. En primer lugar a mi asesor de tesis, Eladio, por su paciencia, guía y constante motivación a lo largo de todo el proceso. Extiendo mi gratitud a mis profesores y amigos, quienes compartieron sus conocimientos y experiencias, los cuales han sido fundamentales para mi desarrollo profesional. También agradezco a la Universidad Nacional de Ingeniería por proporcionarme los recursos y el ambiente necesario para llevar a cabo esta investigación.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento más especial a mi familia, por su apoyo incondicional y respaldo en los momentos más decisivos.

Resumen

La optimización robusta es un campo de investigación emergente que proporciona herramientas para abordar problemas de optimización en los que existen variaciones e incertidumbres en los datos. Su capacidad para gestionar estas fluctuaciones la convierte en una herramienta clave en la toma de decisiones y la planificación de sistemas complejos. Este trabajo aborda los principios fundamentales, las herramientas y las técnicas de la optimización robusta, y explora su aplicación en el ámbito de la gestión energética, donde la incertidumbre es un factor común. Un ejemplo claro de esto son las fuentes de energía renovable, como la solar y la eólica, cuya generación está sujeta a variaciones naturales debido a las condiciones climáticas. Para lograr una gestión eficiente de la oferta y demanda de energía, es esencial que la generación y distribución se adapten a diversas condiciones y escenarios.

Comenzamos presentando los diferentes conceptos de robustez propuestos en la literatura, seguido de un análisis detallado de la formulación de problemas de optimización robusta que incorporan conjuntos de incertidumbre asociados a los datos, así como sus respectivas reformulaciones. Además, se examinan diversos algoritmos robustos diseñados para resolver eficientemente estos problemas, incluyendo métodos de descomposición y técnicas de corte.

Mediante ejemplos ilustrativos del sector eléctrico, se analizan los métodos principales para modelar la incertidumbre: la optimización estocástica y la optimización robusta. Se resalta cómo ambos enfoques pueden complementarse en la modelación de problemas energéticos. Asimismo, se enfatiza la importancia de diferenciar entre la incertidumbre de corto plazo y la de largo plazo.

Finalmente, se desarrolla un caso de estudio en el sector eléctrico, donde el problema se plantea utilizando un modelo de optimización estocástica robusta ajustable. Debido a la complejidad asociada con la resolución directa de esta formulación, el problema es reformulado y abordado mediante un procedimiento de descomposición tipo Benders.

Palabras clave – Optimización robusta, soluciones robustas, algoritmos de optimización robusta, problemas de energía.

Abstract

Robust optimization is an emerging field of research that provides tools to address optimization problems involving variations and uncertainties in data. Its ability to manage these fluctuations makes it a key tool in decision-making and the planning of complex systems. This work addresses the fundamental principles, tools, and techniques of robust optimization and explores its application in energy management, where uncertainty is a common factor. A clear example of this is renewable energy sources, such as solar and wind, whose generation is subject to natural variations due to weather conditions. To achieve efficient management of energy supply and demand, it is essential for generation and distribution to adapt to various conditions and scenarios.

We begin by presenting the different concepts of robustness proposed in the literature, followed by a detailed analysis of the formulation of robust optimization problems that incorporate uncertainty sets associated with data, as well as their respective reformulations. Additionally, we examine various robust algorithms designed to efficiently solve these problems, including decomposition methods and cutting techniques.

Through illustrative examples from the electrical sector, the main methods for modeling uncertainty are analyzed: stochastic optimization and robust optimization. The complementarity of both approaches in modeling energy problems is highlighted. Moreover, the importance of distinguishing between short-term and long-term uncertainty is emphasized.

Finally, a case study in the electrical sector is developed, where the problem is formulated using an adjustable robust stochastic optimization model. Due to the complexity of directly solving this formulation, the problem is reformulated and addressed using a Benders decomposition approach.

Keywords – Robust optimization, robust solutions, robust optimization algorithms, energy problems.

Tabla de Contenido

Resumen	v
Abstract	vii
I. Introducción	1
A. Motivación	1
B. Objetivos generales	2
1) Objetivos específicos	2
C. Organización de la tesis	2
II. Optimización en ambientes de incertidumbre	4
A. Introducción a la robustez en problemas de optimización	4
B. Principales modelos de robustez	6
1) Robustez estricta	6
2) Robustez restringida por cardinalidad	7
3) Robustez ajustable	7
4) Robustez ligera	8
5) Robustez basada en arrepentimiento	9
C. Optimización Estocástica	9
1) Optimización estocástica de dos etapas	10
2) Optimización estocástica multietapa	13
D. Optimización Robusta	16
1) Optimización robusta de una etapa	16
2) Optimización robusta ajustable	18
3) Optimización estocástica robusta ajustable	21
E. Representación de la incertidumbre	25
1) Escenarios	25
2) Conjuntos de incertidumbre	25
3) Incertidumbre presupuestaria	26
III. Optimización robusta estricta	28
A. Optimización lineal robusta	29

1) Formulación	29
2) Conjuntos de incertidumbre poliedrales	31
3) Conjuntos de incertidumbre cónico lineal	34
B. Optimización convexa robusta	38
1) Restricciones cónicas de segundo orden robustas	40
2) Restricciones semidefinidas robustas	46
IV. Optimización robusta ajustable	50
A. Optimización robusta lineal de dos etapas	51
1) Formulación funcional	51
2) Formulación anidada	52
3) Complejidad de los problemas lineales robustos de dos etapas	56
4) Algoritmos basados en oráculos	57
5) Descomposición de Benders	58
6) Generación de columnas y restricciones	61
B. Modelos de optimización robusta ajustable	62
1) Incertidumbre a corto y largo plazo	63
2) Formulación y solución del modelo	64
3) Planificación de expansión de transmisión	65
V. Aplicación a un Problema de Energía	73
A. Caso de estudio	73
1) Formulación del problema	74
2) Reformulación del problema	75
3) Solución del problema	79
B. Análisis y discusión de resultados	80
1) Comparación de costos del modelo ARSO y determinista	80
2) Impacto de la incertidumbre en el modelo ARSO	82
3) Análisis de las soluciones del modelo ARSO y el modelo determinista	83
4) Convergencia del algoritmo de Benders para modelos ARSO	84
VI. Conclusiones y perspectivas	86
A. Conclusiones	86
B. Perspectivas para trabajos futuros	86
VII. Referencias Bibliográficas	86
Anexos	89

Lista de Tablas

Tabla I:	Resultados del caso de estudio bajo diferentes configuraciones	83
Tabla II:	Soluciones del problema determinista asociado con el modelo ARSO. . .	84
Tabla III:	Soluciones óptimas de las variables operativas y flujos por escenarios. .	5

Lista de Figuras

Figura I:	Conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$	31
Figura II:	Ejemplos de conos en $\mathbb{R}^3$	34
Figura III:	Incertidumbre elipsoidal y región factible de la restricción robusta. . .	38
Figura IV:	Región factible nominal (rojo) y robusta (celeste).	44
Figura V:	Región factible de la restricción robusta (3.24).	46
Figura VI:	Región factible de una restricción robusta semidefinida positiva. . . .	48
Figura VII:	Esquema de un problema robusto de dos etapas.	51
Figura VIII:	Caso de estudio de la planificación de expansión de transmisión. . . .	74
Figura IX:	Comparación del costo ARSO y determinístico (caso simétrico).	81
Figura X:	Comparación del costo ARSO y determinístico (caso asimétrico). . . .	82
Figura XI:	Convergencia del Algoritmo 5 para el caso de estudio.	84
Figura XII:	No convergencia del Algoritmo 5 para el caso de estudio.	85

I. Introducción

En la vida real, rara vez disponemos de datos perfectos o información precisa sobre el futuro. Por lo que es esencial saber cómo abordar problemas en un entorno caracterizado por la incertidumbre y la variabilidad. La teoría de optimización estocástica permite abordar problemas de optimización con parámetros aleatorios que siguen distribuciones específicas [1].

Por otro lado, la optimización robusta es otra metodología diseñada para tratar la incertidumbre en los parámetros de un problema de optimización. El modelo básico de optimización robusta no requiere conocer la distribución, sólo supone que los parámetros inciertos pertenecen a un conjunto conocido, denominado conjunto de incertidumbre. La optimización robusta tiene como objetivo encontrar el mejor conjunto de decisiones con respecto al peor de los casos [2].

A. Motivación

El desarrollo de los modelos de optimización robusta está impulsado por la necesidad de tomar decisiones basada en riesgos, es decir, en situaciones donde una especificación incorrecta de los datos puede impactar significativamente en el problema. Por ejemplo en una sala de operaciones es importante considerar los peores escenarios, ya que una decisión incorrecta puede poner en peligro vidas.

El sector eléctrico es otro ámbito donde la toma de decisiones bajo incertidumbre es común. A nivel de operación de un sistema eléctrico las decisiones incluyen la programación y el despacho de las instalaciones de producción para abastecer la demanda de electricidad. A nivel de planificación de operación, las decisiones incluyen la adquisición de combustible (carbón, gas natural, nuclear) para producir energía eléctrica y el mantenimiento de los componentes del sistema (líneas, transformadores e instalaciones de producción). En el nivel de planificación de la expansión, las decisiones incluyen el refuerzo y la expansión de la red, tanto de transmisión como de distribución y la construcción de nuevas instalaciones productivas.

Debido a la creciente integración de instalaciones de producción dependientes del clima, en la mayoría de situaciones éstas decisiones deben tomarse en condiciones de alta incertidumbre, lo que hace que la capacidad de producción sea incierta. Por ello, resulta fundamental estudiar y comprender la teoría de la optimización robusta para representar de manera precisa la incertidumbre en modelos de toma de decisiones bajo condiciones inciertas, especialmente en el ámbito de los problemas del sector eléctrico.

B. Objetivos generales

El objetivo de la tesis es investigar las bases teóricas de la optimización robusta y su aplicación en problemas de gestión de energía.

1) Objetivos específicos

- Describir las aplicaciones de las técnicas de la optimización robusta con ejemplos sencillos relacionados con el sector eléctrico tales como la gestión de la demanda energética, la planificación de la generación de energía, la operación de redes eléctricas y la expansión de la transmisión.
- Estudiar las formas de modelar la incertidumbre así como reconocer fuentes de incertidumbre asociadas a problemas energéticos.
- Formular un modelo robusto que refleje el problema energético y la incertidumbre asociada.
- Aplicar técnicas de optimización robusta para encontrar soluciones óptimas o satisfactorias que sean resistentes a la incertidumbre mediante el uso de software de optimización y algoritmos específicos.
- Evaluar y comparar el rendimiento de las soluciones obtenidas mediante optimización robusta en diferentes escenarios de incertidumbre con las soluciones del modelo determinista.

C. Organización de la tesis

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

El Capítulo II introduce las principales metodologías para abordar problemas en ambientes de incertidumbre: la optimización estocástica y la optimización robusta. Estas metodologías se ilustran mediante ejemplos sencillos relacionados con el sector energético.

El Capítulo III aborda la optimización robusta estática. En este capítulo, se estudia la optimización lineal robusta y se analiza cómo obtener reformulaciones de estos problemas considerando conjuntos de incertidumbre poliedrales y cónicos. Además, se examinan problemas de optimización convexa robusta.

El Capítulo IV desarrolla el estudio teórico de la optimización robusta ajustable. Se establece la formulación y las propiedades de los problemas de optimización robusta de dos etapas. Asimismo, se presentan algoritmos basados en oráculos, descomposición de Benders,

generación de columnas y restricciones, que permiten resolver dichos problemas. También se analizan modelos de optimización robusta ajustable.

El Capítulo V presenta una aplicación en el ámbito energético, específicamente en un problema de expansión de generación. En este capítulo, se aplican las herramientas desarrolladas a lo largo del trabajo para resolver el problema de manera efectiva.

Finalmente, el Capítulo de conclusiones expone los principales resultados obtenidos y plantea posibles perspectivas futuras de investigación.

II. Optimización en ambientes de incertidumbre

La optimización en un entorno de incertidumbre permite abordar problemas complejos en los que no se puede predecir con certeza cómo se desarrollarán los eventos o cuáles serán los valores exactos de los parámetros.

Esta incertidumbre puede surgir en una variedad de contextos. Por ejemplo, en problemas relacionados con la gestión de recursos naturales o la planificación energética, la incertidumbre en las condiciones futuras es un factor importante y puede tener un impacto significativo en los resultados. La optimización en un ambiente de incertidumbre permite desarrollar estrategias que sean robustas y resistentes a los cambios imprevistos.

En el presente Capítulo se introducen los conceptos básicos y modelos de la optimización robusta y se presenta un resumen de los principales enfoques existentes para abordar problemas de optimización bajo incertidumbre: la optimización estocástica y la optimización robusta. Para facilitar la comprensión de ambos enfoques, se incluyen ejemplos simples relacionados con el sector energético, así como algunas observaciones sobre la dificultad computacional de estos modelos.

A. Introducción a la robustez en problemas de optimización

Cuando se toman decisiones en problemas que involucren ambigüedad, errores en los parámetros o incertidumbre en el proceso y su entorno, es importante determinar si la solución propuesta es robusta. Una solución robusta debe ser factible para cualquier escenario posible de parámetros e incertidumbre, manteniendo su factibilidad cercana a la condición de optimalidad. Este enfoque da lugar a los siguientes conceptos fundamentales:

- **Incertidumbre en la factibilidad de la solución.** Idealmente, se busca que la solución sea factible para cualquier valor de los parámetros analizados. Sin embargo, garantizar esta factibilidad presenta dos desafíos principales. En primer lugar, existe un coste computacional significativo al considerar todos los valores posibles de los parámetros. En segundo lugar, existe un deterioro en la calidad de la solución: cuanto más exigente sea la factibilidad con respecto a los parámetros, mayor será la probabilidad de alejarse del óptimo. Por lo tanto, existe un equilibrio entre la factibilidad y la calidad

de la solución, que depende del problema específico que se esté resolviendo. La elección del conjunto de incertidumbre juega un papel crucial en la viabilidad de resolver el problema y en la calidad de la solución obtenida.

- **Incetidumbre en el valor objetivo de la función.** Dependiendo del conjunto de incertidumbre seleccionado, la optimización de la solución puede verse alterada. En este contexto, la optimización robusta busca obtener una solución que se desempeñe adecuadamente en diferentes escenarios. Sin embargo, no todos los escenarios requieren el mismo tratamiento en términos de optimización. En la literatura, se han desarrollado diversos conceptos de robustez para abordar esta problemática, entre los cuales destacan: robustez estricta [2], robustez restringida por cardinalidad [3], robustez ajustable [4], robustez ligera [5], robustez basada en arrepentimiento [6].
- **Incetidumbre en el problema de optimización.** En problemas reales, es común enfrentarse a perturbaciones en los datos de entrada o a parámetros estimados de manera inexacta. Un problema de optimización con restricciones puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & F(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{P}$$

donde, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ describe un problema con n variables y m restricciones, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función objetivo, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es el espacio de búsqueda. Para formalizar la incertidumbre en el problema se asume que $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$ representa un escenario posible. Así, el problema de optimización considerando la incertidumbre $\boldsymbol{\xi}$ se representa por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ \text{s.a.} \quad & F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{P[\boldsymbol{\xi}]}$$

sin embargo, en la mayoría de los casos, el valor exacto de $\boldsymbol{\xi}$ no se conoce. Por ello, en optimización robusta, se asume que $\boldsymbol{\xi}$ pertenece a un conjunto de incertidumbre $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^K$ dado.

El problema incierto correspondiente a $(P[\boldsymbol{\xi}])$ es una familia de problemas parametrizados, denotada como:

$$\{(P[\boldsymbol{\xi}]) : \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}\} \tag{2.1}$$

El objetivo de la optimización robusta es transformar esta familia de problemas en un único problema de optimización, denominado contraparte robusta. La complejidad y

el tratamiento del problema dependen en gran medida de la elección del conjunto de incertidumbre. En la literatura, los conjuntos de incertidumbre más comunes incluyen:

- Incertidumbre finita: $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$
- Incertidumbre basada en intervalos: $\mathcal{U} = |\xi_1 - \bar{\xi}_1| \times \dots \times |\xi_k - \bar{\xi}_k|$
- Incertidumbre basada en normas: $\mathcal{U} = \{\xi \in \mathbb{R}^k : \|\xi - \bar{\xi}\| \leq \Gamma\}$
- Incertidumbre poliedral: $\mathcal{U} = \text{conv}\{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$
- Incertidumbre por restricciones (constraint-wise) : $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$, donde, $\mathcal{U}_i$ afecta únicamente a la i -ésima restricción.

B. Principales modelos de robustez

En esta sección se definen los principales tipos de robustez presentes en la literatura, utilizados para abordar problemas de optimización bajo incertidumbre. Además, se presenta la formulación matemática de cada modelo en su versión robusta.

1) Robustez estricta

También conocida como robustez minmax, este concepto tiene su origen en el trabajo pionero de Soyster [7]. Una solución $\mathbf{x} \in X$ para el problema con incertidumbre (2.1), se considera estrictamente robusta si $\mathbf{x}$ es factible para todos los escenarios posibles de $\mathcal{U}$, es decir, si satisface:

$$F(\mathbf{x}, \xi) \leq 0, \forall \xi \in \mathcal{U}.$$

La contraparte robusta [2] del problema incierto (2.1) se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \max_{\xi \in \mathcal{U}} \quad & f(\mathbf{x}, \xi) \\ \text{s.a.} \quad & F(\mathbf{x}, \xi) \leq 0, \forall \xi \in \mathcal{U}, \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

En la robustez estricta, todos los escenarios se consideran posibles y decisivos. Este enfoque es particularmente relevante en sistemas críticos donde no se puede tolerar ningún tipo de fallo, como en el diseño de aviones o en el manejo de centrales nucleares.

2) Robustez restringida por cardinalidad

Una forma de relajar la robustez estricta consiste en restringir el espacio de incertidumbre. La robustez restringida por cardinalidad se basa en la premisa de que es poco probable que todos los parámetros de incertidumbre cambien simultáneamente en el análisis del peor caso. Por lo tanto, es posible limitar la cardinalidad del espacio de incertidumbre, permitiendo que solo algunos parámetros varíen mientras los demás se modelan con sus valores representativos.

Siguiendo el trabajo de Bertsimas y Sim [3], consideremos que $(x_1, \dots, x_n)$ es una solución y que $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$ es una restricción del problema de optimización. Dado el conjunto de incertidumbre $\mathcal{U} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : a_i \in [\bar{a}_i - d_i, \bar{a}_i + d_i], i = 1, \dots, n\}$, la robustez restringida por cardinalidad puede expresarse como:

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_i x_i + \max_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=\Gamma} \sum_{i \in I} d_i |x_i| \leq b$$

Es importante notar que, cuando $\Gamma = 0$, la restricción coincide con la del problema nominal. Al variar $\text{var}\Gamma$ en el rango $\{1, \dots, n\}$, se introduce flexibilidad para ajustar el nivel de conservadurismo de la solución. Esta metodología fue posteriormente extendida a problemas de optimización combinatoria en [8].

3) Robustez ajustable

Otra forma de relajar el espacio de incertidumbre en la robustez estricta es dividir el espacio en grupos de variables. El primer grupo, conocido como variables “here and now”, corresponde a aquellas que deben ser evaluadas antes de conocer el escenario $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ (variables de primera etapa). El segundo grupo, incluye las variables que pueden determinarse una vez que el escenario $\boldsymbol{\xi}$ ha sido revelado (variables de segunda etapa).

sea $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, el cual puede descomponerse como, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, donde $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ y $\mathbf{y} \in Y \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, con $n_1 + n_2 = n$. Aquí, $\mathbf{x}$ representa las variables de primera etapa mientras que $\mathbf{y}$ corresponde a las variables de segunda etapa. Así, el problema de optimización se puede formular como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \quad & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \\ \text{s.a.} \quad & F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \leq \mathbf{0} \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y \end{aligned}$$

En la robustez ajustable se asume que los parámetros $\boldsymbol{\xi}$ se realizan después de que han tomado

las decisiones de primera etapa $\mathbf{x}$, pero antes de determinar las decisiones de segunda etapa Y . Por lo tanto, el conjunto Y depende de $\mathbf{x}$ y $\boldsymbol{\xi}$, lo cual se denota como $Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. Una vez fijada la variable de primera etapa $\mathbf{x} \in X$, se debe garantizar que, para cualquier escenario $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$, exista un $\mathbf{y} \in Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ tal que $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \leq \mathbf{0}$. La contraparte robusta ajustable [4], para el problema se define como:

$$\min_{\mathbf{x} \in X, t} \{t : \exists \mathbf{y} \in Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \leq t\} \quad (2.2)$$

Esta formulación puede reformularse como:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \min_{\mathbf{y} \in Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.3)$$

El concepto de robustez ajustable fue introducido en el trabajo de Ben-Tal et al. [4] en el contexto de problemas de programación lineal con incertidumbre. Posteriormente el concepto ha sido aplicado en la selección de portafolios y en sistemas de energía.

4) Robustez ligera

Conocido en la literatura como light robustness, es una forma diferente de relajar el concepto de robustez estricta. Este concepto, considera como hipótesis que si resolvemos el problema nominal y obtenemos una solución aceptable, podemos concentrarnos en encontrar soluciones que no estén muy lejos de la solución óptima nominal y que sean factibles. La formulación de este modelo viene dada por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}} \quad & \sum_{i=1}^m w_i \gamma_i \\ \text{s.a.} \quad & f(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \leq f^*(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + \rho \\ & F(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \leq \mathbf{0} \\ & F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \boldsymbol{\gamma} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U} \\ & \mathbf{x} \in X, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

El concepto de robustez ligera fue introducido por Fischetti y Monaci [9]. El objetivo principal de esta definición es establecer un equilibrio entre la robustez de la solución y su calidad. Para lograr esto, se introduce un parámetro de relajación, denotado como ρ , que restringe la solución a mantenerse dentro de cierta proximidad de la solución óptima del caso nominal representada por $f^*(\bar{\boldsymbol{\xi}})$. Adicionalmente, se incorpora el parámetro $\boldsymbol{\gamma}$, el cual permite flexibilizar las restricciones del problema, facilitando así la obtención de soluciones que, aunque cercanas al caso nominal, sean más robustas frente a incertidumbres.

5) Robustez basada en arrepentimiento

Conocida como regret robustness, este es otro concepto de robustez ampliamente estudiado en la literatura. Al igual que la robustez estricta, se fundamenta en el análisis del peor caso; sin embargo, su enfoque difiere en la función objetivo que se optimiza. En este caso, la función objetivo está dada por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \quad & f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - f^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \text{s.a.} \quad & F(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde, $f^*(\boldsymbol{\xi})$ representa el valor óptimo del problema $(P[\boldsymbol{\xi}])$, es decir, el valor óptimo que se habría obtenido en el problema nominal si el escenario real $\boldsymbol{\xi}$ se hubiera conocido de antemano. Este enfoque de robustez es particularmente útil en contextos donde la incertidumbre está presente únicamente en la función objetivo y no en las restricciones. Para un análisis más detallado de sus aplicaciones, se recomienda consultar el trabajo de Kouvelis y Yu [10].

C. Optimización Estocástica

Un problema de programación estocástica tiene la siguiente forma general [1]:

$$\min_{\mathbf{x} \in X(\boldsymbol{\xi})} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}}[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})],$$

donde, $\mathbf{x}$ representa las variables de decisión, $X(\boldsymbol{\xi})$ es el conjunto factible, $\boldsymbol{\xi}$ es el vector de parámetros inciertos, $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ es la función objetivo y $\mathbb{E}$ es el operador de esperanza matemática. En el siguiente ejemplo se ilustra la formulación y solución de un problema de programación estocástico .

Ejemplo II.1. *Consideremos un productor de electricidad que ofrece energía x a un mercado eléctrico. Asumiendo que su nivel de producción puede ser 3 o 10 y que el costo por unidad de producción es 5. Una vez que la oferta de producción se envía al mercado, se revela el precio a pagar al productor. Supongamos que este precio u es 4 o 7 con igual probabilidad $\frac{1}{2}$. Para maximizar su ganancia, el productor necesita resolver el siguiente problema*

$$\max_{x \in \{3, 10\}} z = \frac{1}{2}(x(4 - 5)) + \frac{1}{2}(x(7 - 5)).$$

El primer término de la función objetivo corresponde a la realización del precio de mercado $\xi = 4$, este es el primer escenario que ocurre con probabilidad $\frac{1}{2}$. El segundo término de la

función objetivo corresponde a la realización del precio del mercado $\xi = 7$. Este es el segundo escenario que también ocurre con probabilidad $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la función objetivo corresponde al valor esperado de la ganancia del productor. El problema anterior es equivalente a:

$$\max_{x \in \{3,10\}} \quad z = \frac{1}{2}x,$$

cuya solución (estocástica) óptima es $x = 10$, con un valor objetivo de $z = 5$.

Además del modelo anterior, existen dos metodologías adicionales que son relevantes en la práctica: la optimización estocástica en dos etapas y la optimización estocástica multietapa. A continuación describimos cada una de estas metodologías.

1) Optimización estocástica de dos etapas

El enfoque se divide en dos etapas. En la primera etapa se toman las decisiones iniciales (considerando los posibles escenarios) que son independientes de la incertidumbre futura, sin conocimiento de los resultados específicos que ocurrirán en el futuro. En la segunda etapa se revelan eventos inciertos que impactan el problema, como la demanda del mercado, las condiciones climáticas o los precios de los productos. Con base en estos eventos, se toman decisiones adicionales específicas para cada escenario observado.

Un problema de optimización estocástica de dos etapas tiene la siguiente forma:

$$\min_{\mathbf{x}^1 \in X^1} f^1(\mathbf{x}^1) + \mathbb{E}_{\xi^1}[z_{\xi^1}^1]$$

donde : $z_{\xi^1}^1 = \min_{\mathbf{x}_{\xi^1}^2 \in X^2(\xi^1)} f^2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}_{\xi^1}^2).$

El vector $\mathbf{x}^1 \in X^1$ representa las variables de decisión de la primera etapa perteneciente al conjunto factible X^1 , $f(\mathbf{x}^1)$ es la parte de la función objetivo relacionada con el vector de las variables de decisión de la primera etapa, $\mathbf{x}_{\xi^1}^2$ es el vector de variables de decisión de la segunda etapa dentro del conjunto factible $X^2(\xi^1)$, que toma valores óptimos una vez que los parámetros inciertos han tomado valores específicos, $f^2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}_{\xi^1}^2)$ es la parte de la función objetivo relacionada con el vector de variables de decisión de la segunda etapa y $\mathbb{E}_{\xi^1}[z_{\xi^1}^1]$ es el valor esperado de la parte de la función objetivo específicamente relacionada con el vector de variables de decisión de la segunda etapa.

El enfoque de dos etapas se puede utilizar en el ámbito de los sistemas eléctricos para modelar un problema de producción diaria de unidades generadoras, considerando la demanda horaria de electricidad como un parámetro incierto.

La primera etapa representa las decisiones de programación al principio del día que involucra poner en marcha y/o detener las unidades generadoras. Teniendo en cuenta que la puesta en

marcha de unidades suele ser costosa, estas decisiones deben tomarse con prudencia. Por lo tanto, la primera etapa está representada por:

$$\min_{\mathbf{x}^1 \in X^1} f(\mathbf{x}^1).$$

La segunda etapa representa todas las posibles condiciones de operación (escenarios) relacionadas a la realización real de la demanda de electricidad a lo largo de las horas del día. Cada escenario de la segunda etapa está representado por:

$$z_{\xi^1}^1 = \min_{\mathbf{x}_{\xi^1}^2 \in X^2(\xi^1)} f^2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}_{\xi^1}^2).$$

El efecto de todos los escenarios en promedio se suma a la función objetivo a través del término $\mathbb{E}_{\xi^1}[z_{\xi^1}^1]$, dando lugar a la siguiente representación:

$$\min_{\mathbf{x}^1 \in X^1} f^1(\mathbf{x}^1) + \mathbb{E}_{\xi^1}[z_{\xi^1}^1].$$

El objetivo es minimizar el costo de programación de la primera etapa más el costo esperado de operación de la segunda etapa.

Ejemplo II.2. *Consideremos un planificador de transmisión que tenga la opción de construir solo uno de dos líneas de transmisión alternativas de capacidad 2 o 4 para conectar los nodos eléctricos 1 y 2. El costo de construcción por unidad para la línea es 1. En el nodo 1 se encuentra un generador de capacidad ilimitada y costo de producción 5 por unidad, mientras que en el nodo 2 otro generador también de capacidad ilimitada y costo de producción de 10 por unidad está disponible. La demanda se ubica en el nodo 2 y puede tomar el valor de , 3 o 5, con probabilidades iguales a 1/2. El modelo de programación estocástica de dos etapas para que el planificador de transmisión decida qué línea de transmisión construir es:*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{2,4\}} 1x + \min_{y_1, y_2 \geq 0} & \frac{1}{2} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 3 \end{aligned}$$

donde x representa la capacidad de la línea de transmisión a construir, $y_1^{(1)}$ y $y_2^{(1)}$ representan la producción de las unidades en los nodos 1 y 2 respectivamente, si la demanda es $d = 3$ (primer escenario), $y_1^{(2)}$ y $y_2^{(2)}$ representan la producción de las unidades en los nodos 1 y 2 respectivamente, si la demanda es $d = 5$ (segundo escenario).

El primer término de minimización del problema anterior corresponde al costo de

inversión en la instalación de transmisión, mientras que el segundo corresponde al costo esperado de operación sobre los dos escenarios posibles, cada uno con una probabilidad de $\frac{1}{2}$. Las restricciones relevantes para la operación real del sistema eléctrico en ambos escenarios incluyen el balance de energía y el límite de transmisión. El problema anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{2,4\}; y_1, y_2 \geq 0} \quad & 1x + \frac{1}{2} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 3 \\ & y_1^{(1)} \leq x \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = 5 \\ & y_1^{(2)} \leq x \end{aligned}$$

Debido a la simplicidad de este problema, se puede resolver mediante enumeración como se muestra a continuación.

- Primero consideramos que el planificador construye la línea de capacidad 2, es decir, $x = 2$. Entonces, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad & z = 2 + \frac{1}{2} [5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)}] + \frac{1}{2} [5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)}] \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 3 \\ & y_1^{(1)} \leq 2 \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = 5 \\ & y_1^{(2)} \leq 2, \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1^{(1)} = 2, y_2^{(1)} = 1, y_1^{(2)} = 2, y_2^{(2)} = 3$ y $z = 32$.

- Consideremos ahora que el planificador construye la línea de capacidad $x = 4$. Entonces, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad & z = 4 + \frac{1}{2} [5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)}] + \frac{1}{2} [5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)}] \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 3 \\ & y_1^{(1)} \leq 4 \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = 5 \\ & y_1^{(2)} \leq 4, \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1^{(1)} = 3, y_2^{(1)} = 0, y_1^{(2)} = 4, y_2^{(2)} = 1$ y $z = 26.5$.

Finalmente, considerando las dos alternativas de inversión $x = 2$ y $x = 4$, y el hecho de que el planificador busca obtener el costo total mínimo (costo de inversión más costo de operación),

la solución es $x = 4$, $y_1^{(1)} = 3$, $y_2^{(1)} = 0$, $y_1^{(2)} = 4$, $y_2^{(2)} = 1$ y $z = 26.5$. El planificador construye la línea más grande porque en promedio es la mejor.

2) Optimización estocástica multietapa

Se utiliza para abordar problemas con incertidumbre donde se deben tomar decisiones secuenciales en múltiples etapas o momentos a lo largo del tiempo. Este enfoque es útil en situaciones en las que las decisiones tomadas en etapas posteriores pueden influir en los resultados y las condiciones futuras del problema.

Un problema de optimización multietapa generaliza el problema de optimización de dos etapas y tiene la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}^1 \in X^1} \quad & f^1(\mathbf{x}^1) + \mathbb{E}_{\xi^1}[z_{\xi^1}^1], \\ \text{donde} \quad & z_{\xi^1}^1 = \min_{\mathbf{x}_{\xi^1}^2 \in X^2(\xi^1)} f^2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}_{\xi^1}^2) + \mathbb{E}_{\xi^2}[z_{\xi^2}^2], \\ \text{donde} \quad & z_{\xi^2}^2 = \min_{\mathbf{x}_{\xi^2}^3 \in X^3(\xi^2)} f^3(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}_{\xi^1}^2, \mathbf{x}_{\xi^2}^3) + \mathbb{E}_{\xi^3}[z_{\xi^3}^3], \\ & \vdots \\ \text{donde} \quad & z_{\xi^{r-1}}^{r-1} = \min_{\mathbf{x}_{\xi^{r-1}}^r \in X^r(\xi^{r-1})} f^r(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}_{\xi^1}^2, \mathbf{x}_{\xi^2}^3, \dots, \mathbf{x}_{\xi^{r-1}}^r). \end{aligned}$$

Las variables de decisión en la etapa i están representadas por el vector $\mathbf{x}_{\xi^{i-1}}^i \in X^i(\xi^{i-1})$. La función objetivo del subproblema en la etapa i , $z_{\xi^{i-1}}^{i-1}$, incluye el costo real incurrido en la etapa i , que es $f^i(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}_{\xi^1}^2, \mathbf{x}_{\xi^2}^3, \dots, \mathbf{x}_{\xi^{i-1}}^i)$ y el costo esperado en las etapas futuras, $\mathbb{E}_{\xi^i}[z_{\xi^i}^i]$.

La optimización multietapa se puede utilizar para modelar la programación de producción semanal de la generación de instalaciones de un sistema de energía eléctrica. En dicho problema tenemos siete etapas correspondientes a los siete días de la semana. Justo antes del domingo representamos la programación de las unidades de producción para abastecer la demanda horaria durante toda la semana, sabiendo que dichas decisiones de programación se pueden ajustar justo antes de cada día del resto de días de la semana. La operación del domingo se representa entonces considerando la demanda como un parámetro incierto. Esto corresponde a la primera etapa:

$$\min_{\mathbf{x}^1 \in X^1} \quad f^1(\mathbf{x}^1) + \mathbb{E}_{\xi^1}[z_{\xi^1}^1].$$

Justo antes del lunes y conociendo la realización de la demanda horaria a lo largo del domingo, representamos los reajustes de programación para abastecer la demanda horaria a lo largo de los días restantes de la semana, sabiendo que en la programación resultante las decisiones se

pueden reajustar justo antes de cada día de los días restantes de la semana (martes a sábado), representamos la operación del lunes considerando el horario de la demanda como parámetro incierto. Esto corresponde a la segunda etapa:

$$z_{\xi^1}^1 = \min_{x_{\xi^1}^2 \in X^2(\xi^1)} f^2(x^1, x_{\xi^1}^2) + \mathbb{E}_{\xi^2}[z_{\xi^2}^2].$$

El proceso anterior para el lunes se repite para martes, miércoles, jueves y viernes. Finalmente, antes del sábado y conociendo la realización de la demanda de domingo a viernes, representamos los ajustes de programación para abastecer la demanda horaria durante todo el sábado. La operación del sábado se representa entonces considerando el horario de la demanda como parámetro incierto. Esto corresponde a la séptima etapa:

$$z_{\xi^6}^6 = \min_{x_{\xi^6}^7 \in X^7(\xi^6)} f^7(x^1, x_{\xi^1}^2, x_{\xi^1}^2, \dots, x_{\xi^6}^7).$$

El objetivo es minimizar el costo de programación del domingo más el costo de ajuste de la reprogramación (lunes a sábado) más los costos esperados de operación de atender la carga incierta durante toda la semana .

Ejemplo II.3. *Consideremos un planificador de la capacidad de generación que al comienzo del primer período de planificación tiene la opción de construir una de dos unidades solares alternativas de capacidad 2 o 3 para abastecer una demanda, que en este primer período sólo puede tomar dos valores 3 o 5, con igual probabilidad $\frac{1}{2}$.*

Al comienzo del segundo período de planificación, el planificador tiene la opción de construir de nuevo una de dos unidades solares alternativas de capacidad 2 o 3. Además, sabemos que si la demanda en el período de planificación inicial es 3, éste se incrementará en 2 con probabilidad 1 en el segundo período; y si es 5, aumentará en 3 con probabilidad 1 en el segundo período. El costo de construcción por unidad de la unidad solar es 1 y su costo de operación por unidad es 0 en ambos períodos de planificación.

Además, una unidad de generación de capacidad ilimitada y costo de operación de 10 por unidad está disponible. Un modelo de programación estocástica de tres etapas para abordar

el problema anterior tiene la forma:

$$\begin{aligned}
& \min_{x_1 \in \{2,3\}} 1x_1 + \min_{\substack{y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \geq 0 \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)} \geq 0}} \frac{1}{2} \left(10y_2^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(10y_2^{(2)} \right) + \\
& \quad \text{s.a.} \quad y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 3 \\
& \quad y_1^{(1)} \leq x_1 \\
& \quad y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = 5 \\
& \quad y_1^{(2)} \leq x_1 \\
\\
& \min_{\substack{x_2^{(1)} \in \{2,3\} \\ x_2^{(2)} \in \{2,3\}}} \frac{1}{2} \left(1x_2^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(1x_2^{(2)} \right) + \min_{\substack{y_3^{(1)}, y_4^{(1)} \geq 0 \\ y_3^{(2)}, y_4^{(2)} \geq 0}} \frac{1}{2} \cdot 1 \left(10y_4^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \left(10y_4^{(2)} \right) \\
& \quad \text{s.a.} \quad y_3^{(1)} + y_4^{(1)} = 5 \\
& \quad y_3^{(1)} \leq x_1 + x_2^{(1)} \\
& \quad y_3^{(2)} + y_4^{(2)} = 8 \\
& \quad y_3^{(2)} \leq x_1 + x_2^{(2)},
\end{aligned}$$

Este problema es equivalente a

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathcal{X}} 1x_1 + \frac{1}{2} \cdot 10y_2^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot 10y_2^{(2)} + \frac{1}{2} \cdot 1x_2^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot 1x_2^{(2)} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10y_4^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10y_4^{(2)} \\
& \quad \text{s.a.} \quad x_1 \in \{2, 3\} \\
& \quad y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 3 \\
& \quad y_1^{(1)} \leq x_1 \\
& \quad y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = 5 \\
& \quad y_1^{(2)} \leq x_1 \\
& \quad x_2^{(1)} \in \{2, 3\} \\
& \quad x_2^{(2)} \in \{2, 3\} \\
& \quad y_3^{(1)} + y_4^{(1)} = 5 \\
& \quad y_3^{(1)} \leq x_1 + x_2^{(1)} \\
& \quad y_3^{(2)} + y_4^{(2)} = 8 \\
& \quad y_3^{(2)} \leq x_1 + x_2^{(2)}
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{X} := \{x_1; y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}; x_2^{(1)}, x_2^{(2)}; y_3^{(1)}, y_4^{(1)}, y_3^{(2)}, y_4^{(2)}\}$$

La solución óptima del problema de programación lineal entera mixta anterior se obtuvo utilizando el solver Gurobi y el lenguaje de programación Julia. La solución óptima

requiere que el planificador construya al comienzo del primer período del horizonte de planificación una planta solar de capacidad $x_1 = 3$, y al comienzo del segundo período del horizonte de planificación una planta solar de capacidad $x_2^{(1)} = 2$ si la demanda en el primer periodo es 3, y una planta solar de capacidad $x_2^{(2)} = 3$ si la demanda en el segundo periodo es 5.

D. Optimización Robusta

La optimización robusta es apropiada para identificar decisiones óptimas bajo incertidumbre si éstas decisiones conllevan a importantes consecuencias, por lo tanto la protección contra las malas decisiones es imprescindible. Por ejemplo, decidir invertir en una infraestructura eléctrica es importante debido a su elevado costo y la dificultad para modificarlo en el futuro. La optimización robusta permite el control del riesgo (robustez), lo que hace posible adaptar las decisiones que debemos tomar a un nivel de robustez deseado (protección) [2].

En general el tamaño de un problema estocástico depende del número de escenarios considerados lo que lo hace complejo computacionalmente. Los problemas de optimización robustos son generalmente manejables ya que sus tamaños en general no dependen de la precisión de la descripción de la incertidumbre.

1) Optimización robusta de una etapa

Un problema de optimización robusta de una etapa puede expresarse como:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

donde, el vector $\mathbf{x}$ representa las variables de decisión y el vector $\boldsymbol{\xi}$ representa los parámetros inciertos. El operador de maximización interno indica que deseamos estar protegidos contra la peor realización de los parámetros inciertos $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$. Para la realización de la peor incertidumbre, buscamos minimizar la función objetivo $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ para obtener el vector de variables de decisión (robusta) óptima $\mathbf{x}^* \in X$.

Un problema de optimización robusta de una sola etapa también puede formularse como un problema max-min, es decir:

$$\max_{\mathbf{x} \in X} \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tag{2.6}$$

En el ámbito energético, se puede utilizar un problema de optimización robusto para modelar la estrategia de oferta de un productor de electricidad en el mercado. El productor presenta un conjunto de cantidades y precios correspondientes al mercado y luego el operador del

mercado identifica la cantidad que debe producir cada productor y el precio correspondiente por hora. La estrategia de oferta a identificar está representada por $\mathbf{x} \in X$. Por lo tanto, los precios del mercado son parámetros inciertos descritos por $\xi \in \mathcal{U}$. El productor generalmente desea que su estrategia de oferta no conduzca a una pérdida, es decir, el productor desea estar protegido contra los precios de equilibrio del mercado que resultan en una pérdida para él. Así, el productor busca maximizar su beneficio anticipando el peor resultado de precio (acotado por el conjunto de incertidumbre $\xi \in \mathcal{U}$) que lleva a un beneficio mínimo. Por lo tanto, el problema a resolver tiene la forma del problema de optimización robusta (2.6).

El siguiente ejemplo proporciona la formulación y solución de un problema de optimización robusto simple relacionado con la oferta en un mercado eléctrico.

Ejemplo II.4. *Consideremos el mismo problema analizado en el Ejemplo II.1, es decir, un productor de electricidad que ofrece su producción x a un mercado de electricidad. Asumamos que su nivel de producción puede ser 3 o 10 y su costo unitario de producción es 5. Una vez presentada la oferta de producción se obtiene el precio que se pagará al productor u con valores 4 o 7. Para determinar una oferta de optimización robusta x , el productor necesita resolver el siguiente problema:*

$$\max_{x \in \{3,10\}} \min_{\xi \in \{4,7\}} z = x(\xi - 5),$$

donde, z representa el beneficio del productor. El problema puede ser resuelto por enumeración como se muestra a continuación.

- Si el productor decide producir $x = 3$, el problema resultante es:

$$\min_{\xi \in \{4,7\}} z = 3(\xi - 5),$$

cuya solución es $\xi = 4$ con valor objetivo $z = -3$.

- Si el productor decide producir $x = 10$, el problema resultante es:

$$\min_{\xi \in \{4,7\}} z = 10(\xi - 5),$$

cuya solución es $\xi = 4$ con función objetivo $z = -10$.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y el hecho de que el productor busca maximizar su beneficio, la solución robusta óptima es $x = 3$, con un valor objetivo de $z = -3$.

En el modelo estocástico sin riesgo descrito en el Ejemplo II.1 el problema correspondiente a resolver es:

$$\max_{x \in \{3, 10\}} z = \frac{1}{2}(x(4 - 5)) + \frac{1}{2}(x(7 - 5)),$$

cuya solución estocástica (sin riesgo) es $x = 10$, con un valor objetivo de $z = 5$.

Finalmente, realizamos un análisis de escenarios para caracterizar ambas soluciones, la estocástica y la robusta.

- Consideremos primero la solución robusta $x = 3$. Si el precio resulta ser $\xi = 4$, la ganancia del productor se convierte en $z = 3(4 - 5) = -3$. Si el precio es $\xi = 7$, la ganancia del productor se convierte en $z = 3(7 - 5) = 6$.
- Consideremos ahora la solución estocástica $x = 10$. Si el precio resulta ser $\xi = 4$, la ganancia del productor se convierte en $z = 10(4 - 5) = -10$. Si el precio es $\xi = 7$, la ganancia del productor se convierte en $z = 10(7 - 5) = 20$.

Concluimos que la solución robusta ($x = 3$) protege al productor contra una gran pérdida ($z = -10$), pero le impide lograr una gran ganancia ($z = 20$). Por otro lado, la solución estocástica ($x = 10$) permite al productor lograr una gran ganancia ($z = 20$), pero no evita que incurra en una gran pérdida ($z = -10$). En promedio, la solución estocástica es una mejor opción ($\frac{1}{2}(20 - 10) = 5$) que el robusto ($\frac{1}{2}(-3 + 6) = \frac{3}{2}$), pero no protege al productor de una potencial gran pérdida (-10), mientras que la solución robusta sí, pues, la pérdida máxima es -3 .

2) Optimización robusta ajustable

El trabajo de Ben-Tal et al. [4], introduce modelos de optimización robusta ajustable. Muchas veces, una vez que la incertidumbre se realiza, es posible tomar decisiones para controlar el efecto de la incertidumbre. Por ejemplo, la cantidad que una fábrica producirá el próximo mes puede modelarse en función de la cantidad vendida en el mes actual, por lo tanto, ciertas variables de decisión se pueden ajustar posteriormente de acuerdo con una regla de decisión, que es función de los datos inciertos. Un problema de optimización robusta ajustable puede formularse de la siguiente manera:

$$\min_{x \in X} \max_{\xi \in \mathcal{U}} \min_{y \in Y(x, \xi)} f(x, y, \xi). \quad (2.7)$$

En esta formulación podemos observar que un problema de optimización robusta ajustable consta de tres niveles:

- El primer nivel representa una estrategia de planificación previa a la realización de la incertidumbre y busca minimizar el valor de la función objetivo. Las variables de decisión están representadas por el vector $x \in X$.

- El segundo nivel representa la realización de la incertidumbre en el peor de los casos dentro de un conjunto de incertidumbre, por lo tanto busca maximizar el valor de la función objetivo. Las variables que describen los parámetros inciertos están representadas por el vector $\xi \in \mathcal{U}$.
- El tercer nivel representa las acciones operativas destinadas a mitigar los efectos de la incertidumbre una vez que esta se ha materializado. Por lo tanto, en esta etapa, se busca minimizar el valor de la función objetivo. Las variables de decisión en este nivel están representadas por el vector $y \in Y(x, \xi)$.

Se desea minimizar el valor de la función objetivo bajo la realización de la peor incertidumbre dentro del conjunto robusto $\mathcal{U}$. Escribiendo las restricciones de forma explícita, la formulación (2.7) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \min_x \max_{\xi \in \mathcal{U}} \min_y \quad & f(x, y, \xi) \\ \text{s.a.} \quad & F_Y(x, y, \xi) \leq 0 \\ \text{s.a.} \quad & F_X(x) \leq 0 \end{aligned}$$

La optimización robusta ajustable se puede utilizar para modelar un problema de inversión en transmisión con incertidumbre en la demanda. En el primer nivel, el planificador toma decisiones de inversión respecto al refuerzo y ampliación del sistema de transmisión buscando el mínimo costo total (costo de inversión más costo de operación) para abastecer la demanda futura de electricidad. Esto está representado por el vector de decisión $x \in X$. Luego, la demanda incierta se realiza de la peor manera posible dentro de un conjunto de incertidumbre buscando el costo total máximo, lo que está representado por $\xi \in \mathcal{U}$. Finalmente, el operador reacciona de la mejor manera posible para abastecer la demanda al mínimo costo, lo cual se representa por $y \in Y(x, \xi)$. El objetivo general es minimizar la inversión más el costo de operación bajo la peor realización de la demanda.

Ejemplo II.5. *Retomemos el Ejemplo II.2 donde el planificador de expansión de transmisión tiene la opción de construir solo una de dos líneas de transmisión alternativas de capacidad 2 o 4 para conectar los nodos eléctricos 1 y 2. El costo de construcción por unidad para las líneas de transmisión es 1. En el nodo 1 se dispone de un generador de capacidad ilimitada y costo unitario de producción de 5, mientras que en el nodo 2 se dispone de otro generador de capacidad ilimitada y costo unitario de producción de 10. La demanda se ubica en el nodo 2 y puede tomar únicamente dos valores, 3 o 5. Un modelo robusto para que el planificador de*

transmisión decida qué línea de transmisión construir es:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{2,4\}} \quad & \max_{d \in \{3,5\}} \quad \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad z = 1x + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + y_2 = d \\ & y_1 \leq x \end{aligned}$$

donde x representa la capacidad de la línea de transmisión a construir, d la demanda desconocida y y_1, y_2 la producción de las unidades en los nodos 1 y 2, respectivamente. Dado la simplicidad de este problema, lo podemos resolver mediante enumeración:

- Consideremos primero que el planificador construye la línea de capacidad $x = 2$. Luego, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{d \in \{3,5\}} \quad & \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad z = 2 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + y_2 = d \\ & y_1 \leq 2 \end{aligned}$$

- Si la demanda es $d = 3$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad & z = 2 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + y_2 = 3 \\ & y_1 \leq 2 \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1 = 2, y_2 = 1$ y $z = 22$.

- Por otro lado, si la demanda es $d = 5$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad & z = 2 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + y_2 = 5 \\ & y_1 \leq 2 \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1 = 2, y_2 = 3$ y $z = 42$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y el hecho de que en este nivel se busca el costo máximo (realización de la incertidumbre), la solución en el caso de $x = 2$ es $d = 5$ y $z = 42$.

- Consideremos ahora el caso que el planificador construye la línea de capacidad $x = 4$.

Entonces, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{d \in \{3,5\}} \quad & \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad z = 4 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + y_2 = d \\ & y_1 \leq 4 \end{aligned}$$

Para resolver este problema consideramos los dos posibles valores para d .

- Si la demanda $d = 3$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad & z = 4 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + y_2 = 3 \\ & y_1 \leq 4 \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1 = 3$, $y_2 = 0$ y $z = 19$.

- Por otro lado, si la demanda es $d = 5$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, y_2 \geq 0} \quad & z = 4 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + y_2 = 5 \\ & y_1 \leq 4 \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ y $z = 34$

Considerando los resultados anteriores y el hecho de que en este nivel se busca el costo máximo (realización de la incertidumbre), la solución en el caso de $x = 4$ es $d = 5$ y $z = 34$.

Finalmente, considerando las dos alternativas de inversión $x = 2$ y $x = 4$, y que el planificador busca el costo mínimo, la solución es $x = 4$, $d = 5$, $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ y $z = 34$. Por lo tanto el planificador construye la línea de transmisión más grande para protegerse contra el alto costo del generador en el nodo 2.

3) Optimización estocástica robusta ajustable

Los modelos de optimización estocástica robusta ajustable combinan la protección robusta y el modelado de escenarios estocásticos. Un problema de este tipo tiene la siguiente forma [11]

$$\min_{x \in X} \max_{\xi \in \mathcal{U}} \min_{y \in Y(x, \xi, \zeta)} \mathbb{E}_{\zeta}[f(x, y, \xi, \zeta)].$$

Podemos observar que el problema involucra tres niveles: El primer nivel, con variables de decisión $\mathbf{x}$, representa una estrategia de planificación previa a la realización de la incertidumbre y busca minimizar la función objetivo. El segundo nivel representa la realización de la incertidumbre ξ a largo plazo de la peor manera posible dentro de un conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$, por lo tanto, busca maximizar la función objetivo. El tercer nivel representa las acciones de mitigación una vez que se materializa la incertidumbre a largo plazo e involucra una serie de condiciones operativas inciertas a corto plazo representadas por el vector de parámetros inciertos ζ , por lo tanto, se busca minimizar la función objetivo respecto a las variables $\mathbf{y} \in Y(\mathbf{x}, \xi, \zeta)$. La función objetivo es el valor esperado del objetivo sobre los parámetros de incertidumbre a corto plazo en el vector ζ bajo la peor realización de incertidumbre a largo plazo ξ dentro del conjunto robusto $\mathcal{U}$.

La planificación de expansión de transmisión de un sistema eléctrico compuesto de fuentes renovables (unidades eólicas y solares) se puede modelar utilizando optimización estocástica robusta ajustable. En este caso la incertidumbre a largo plazo está relacionada con la carga máxima en el año objetivo (por ejemplo, 10 años en el futuro), mientras que la incertidumbre a corto plazo se refiere a la evolución diaria de la carga neta (carga real menos la producción renovable incierta). En el primer nivel, el planificador modela las decisiones de inversión en líneas de transmisión, representadas por $\mathbf{x} \in X$, anticipando la realización de la peor incertidumbre a largo plazo (carga máxima) y las subsiguientes mejores reacciones del operador para diferentes condiciones de operación. El segundo nivel representa la realización de la incertidumbre a largo plazo en el peor de los casos dentro del conjunto de incertidumbre $\xi \in \mathcal{U}$. El tercer nivel representa las acciones de mitigación una vez que la incertidumbre a largo plazo se revela e involucra una serie de condiciones operativas inciertas a corto plazo representadas por el vector de parámetros inciertos ζ . Por tanto, el tercer nivel busca minimizar la función objetivo. Las variables de decisión en este nivel están representadas por el vector $\mathbf{y} \in Y(\mathbf{x}, \xi, \zeta)$. La función objetivo representa el costo de inversión más el costo de operación esperado sobre las condiciones de operación dictadas por la incertidumbre a corto plazo.

El siguiente ejemplo ilustra la formulación y solución de un problema de optimización estocástica robusta ajustable relacionado con la planificación de expansión de generación.

Ejemplo II.6. *Consideremos un planificador de capacidad de generación que tiene la opción de construir solo uno de dos unidades eólicas alternativas de capacidad 2 o 4 para satisfacer una demanda que puede tomar solo dos valores, 3 o 5. El costo de construcción por unidad de la unidad eólica es 1 y su costo de operación por unidad es 0. Además, se dispone de una unidad de generación de capacidad ilimitada y costo de operación de 10 por unidad. Cualquiera que sea la unidad eólica que se construya, operará bajo dos condiciones (escenarios), a $\frac{3}{4}$ ó a $\frac{1}{4}$ de capacidad, con igual probabilidad de $\frac{1}{2}$.*

Un modelo de optimización estocástica robusta adaptativa para que el planificador de la capa-

ciudad de generación decida qué unidad eólica construir es:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{2,4\}} \quad & \max_{d \in \{3,5\}} \quad \min_{y^{(1)}, y^{(2)} \geq 0} \quad z = \frac{1}{2} \left(10y^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(10y^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y^{(1)} + \frac{3}{4}x = d \\ & y^{(2)} + \frac{1}{4}x = d \end{aligned}$$

donde x representa la capacidad de la unidad eólica a construir, d la demanda desconocida, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, la producción de la unidad de capacidad ilimitada si la demanda es $d = 3$ (escenario 1) y si la demanda es $d = 5$ (escenario 2), respectivamente. Dado la simplicidad de este problema, se puede resolver por enumeración.

- Consideremos primero que el planificador construye una unidad eólica de capacidad $x = 2$. Entonces, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{d \in \{3,5\}} \quad & \min_{y^{(1)}, y^{(2)} \geq 0} \quad z = \frac{1}{2} \left(10y^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(10y^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y^{(1)} + \frac{3}{4}2 = d \\ & y^{(2)} + \frac{1}{4}2 = d. \end{aligned}$$

Para resolver este problema consideramos los dos valores para d , 3 y 5.

- Si la demanda es $d = 3$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_{y^{(1)}, y^{(2)} \geq 0} \quad & z = \frac{1}{2} \left(10y^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(10y^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y^{(1)} + \frac{3}{2} = 3 \\ & y^{(2)} + \frac{1}{2} = 3, \end{aligned}$$

cuya solución es $y^{(1)} = \frac{3}{2}$, $y^{(2)} = \frac{5}{2}$ y $z = 20$.

- Por otro lado, si la demanda es $d = 5$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{d \in \{3,5\}} \quad & \min_{y^{(1)}, y^{(2)} \geq 0} \quad z = \frac{1}{2} \left(10y^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(10y^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y^{(1)} + \frac{3}{2} = 5 \\ & y^{(2)} + \frac{1}{2} = 5, \end{aligned}$$

cuya solución es $y^{(1)} = \frac{7}{2}$, $y^{(2)} = \frac{9}{2}$ y $z = 40$.

Considerando los resultados anteriores y el hecho que buscamos el costo máximo en este nivel (realización de la incertidumbre), la solución en el caso $x = 2$ es $d = 5$ y $z = 40$.

- Consideremos ahora que el planificador construye una unidad eólica de capacidad $x = 4$. Entonces, en este caso el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{d \in \{3,5\}} \quad & \min_{y^{(1)}, y^{(2)} \geq 0} \quad z = \frac{1}{2} \left(10y^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(10y^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y^{(1)} + \frac{3}{4}4 = d \\ & y^{(2)} + \frac{1}{4}4 = d. \end{aligned}$$

Para resolver este problema consideramos los dos valores para d , 3 y 5.

- Si la demanda es $d = 3$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min_{y^{(1)}, y^{(2)} \geq 0} \quad & z = \frac{1}{2} \left(10y^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(10y^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y^{(1)} + 3 = 3 \\ & y^{(2)} + 1 = 3, \end{aligned}$$

cuya solución es $y^{(1)} = 0$, $y^{(2)} = 2$ y $z = 10$.

- Por otro lado, si la demanda es $d = 5$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{d \in \{3,5\}} \quad & \min_{y^{(1)}, y^{(2)} \geq 0} \quad z = \frac{1}{2} \left(10y^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(10y^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y^{(1)} + 3 = 5 \\ & y^{(2)} + 1 = 5, \end{aligned}$$

cuya solución es $y^{(1)} = 2$, $y^{(2)} = 4$ y $z = 30$.

Considerando los resultados anteriores y el hecho que buscamos el costo máximo en este nivel (realización de la incertidumbre), la solución en el caso $x = 4$ es $d = 5$ y $z = 30$.

Finalmente, considerando las dos alternativas de inversión $x = 2$ y $x = 4$, y que el planificador busca el costo mínimo, la solución es $x = 4$, $d = 5$, $y^{(1)} = 2$, $y^{(2)} = 4$ y $z = 30$. El planificador construye una unidad eólica de capacidad 4 para protegerse contra el alto costo del generador con capacidad ilimitada.

E. Representación de la incertidumbre

La representación de la incertidumbre es un paso fundamental para modelar adecuadamente problemas cuyos datos o condiciones futuras son inciertas. Una forma común de representar la incertidumbre en optimización estocástica es mediante la definición de múltiples escenarios estocásticos. Cada escenario representa una posible realización de eventos inciertos.

Por otro lado, en la optimización robusta, en lugar de definir escenarios específicos, se suele establecer conjuntos que describen las incertidumbres permitidas en los datos del problema. Es importante elegir conjuntos de incertidumbre apropiados para obtener problemas robustos que se puedan resolver de forma eficiente [12].

1) Escenarios

Un escenario es una realización dada del vector de parámetros inciertos ζ que está representado por $\zeta^{(w)}$, con una probabilidad de ocurrencia $p^{(w)}$. Los escenarios deben describir todas las posibles realizaciones de incertidumbre, por lo tanto, $\sum_w p^{(w)} = 1$.

Ejemplo II.7. En el Ejemplo II.1, la incertidumbre en el precio se describe usando 2 escenarios:

$$\zeta : \begin{cases} \zeta^{(1)} = 4, & \text{con } p^{(1)} = \frac{1}{2} \\ \zeta^{(2)} = 7, & \text{con } p^{(2)} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2) Conjuntos de incertidumbre

Los conjuntos robustos generalmente se basan en restricciones de tipo caja o poliédricos. Considerando que todo parámetro incierto $\xi_i \in \mathbb{R}$ en el vector $\xi \in \mathcal{U}$ puede desviarse como máximo $\pm\Delta\xi_i$ de un valor de referencia $\bar{\xi}_i$, un conjunto robusto basado en cajas se define de la siguiente manera:

$$\xi_i \in [\bar{\xi}_i - \Delta\xi_i, \bar{\xi}_i + \Delta\xi_i,] \quad \forall i.$$

Ejemplo II.8. En el Ejemplo II.1 la incertidumbre en el precio se describe mediante el conjunto robusto: $\xi \in \{4, 7\}$.

3) Incertidumbre presupuestaria

Considerando el conjunto de incertidumbre de tipo caja anterior, se impone un presupuesto (Γ) de incertidumbre mediante la siguiente restricción [12]:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\xi_i - \bar{\xi}_i|}{\Delta \xi_i} \leq \Gamma, \quad (2.8)$$

donde Γ varía entre 0 y n . En particular, si $\Gamma = 0$, implica que no tenemos incertidumbre ya que cada parámetro incierto es igual a su valor de referencia $\bar{\xi}$, mientras que $\Gamma = n$ implica máxima incertidumbre, ya que cada parámetro incierto se desvía al máximo de su valor de referencia. Los valores intermedios de Γ representan diferentes niveles de incertidumbre.

Ejemplo II.9. Consideremos dos parámetros inciertos, ξ_1 y ξ_2 , caracterizados, respectivamente, por los siguientes conjuntos:

$$\xi_1 \in [4 - 1, 4 + 1] = [3, 5]$$

$$\xi_2 \in [6 - 1, 6 + 1] = [5, 7]$$

donde los valores de referencia para los parámetros inciertos ξ_1 y ξ_2 son $\bar{\xi}_1 = 4$ y $\bar{\xi}_2 = 6$, respectivamente. Un presupuesto de incertidumbre $\Gamma = 1$:

$$|\xi_1 - 4| + |\xi_2 - 6| \leq 1$$

permite que uno de los dos parámetros aleatorios tome uno de sus dos valores extremos.

Por otro lado, un presupuesto de incertidumbre $\Gamma = 2$:

$$|\xi_1 - 4| + |\xi_2 - 6| \leq 2$$

permite que los dos parámetros aleatorios tomen uno de sus dos valores extremos.

Finalmente, un presupuesto de incertidumbre $\Gamma = 0$:

$$|\xi_1 - 4| + |\xi_2 - 6| \leq 0$$

no permite que ninguno de los parámetros aleatorios tome sus valores extremos. Más aún sus valores son sus respectivos valores de referencia.

Cabe mencionar que la optimización robusta es particularmente apropiada para identificar decisiones óptimas en condiciones de incertidumbre si estas decisiones conllevan a consecuencias importantes y por lo tanto, es importante la protección contra malas deci-

siones. Por ejemplo, en el marco de los sistemas eléctricos, las decisiones de inversión en infraestructura eléctrica son muy importantes, pues en general son costosas y difíciles de modificar.

La optimización robusta permite controlar la robustez, permitiendo ajustar las decisiones a tomar al nivel de robustez requerido. Los problemas robustos son generalmente manejables ya que sus tamaños generalmente no dependen de la precisión de la descripción de la incertidumbre.

III. Optimización robusta estricta

Conocido también como optimización robusta estática o simplemente optimización robusta. El principio básico es buscar una decisión que sea factible frente a todas las realizaciones de los parámetros inciertos en un conjunto acotado denominado conjunto de incertidumbre. Por ejemplo, dada una restricción lineal

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b,$$

si el coeficiente $\mathbf{a}$ no se conoce con exactitud, podemos asumir que cada componente a_i de $\mathbf{a}$ cae en un intervalo $[\bar{a}_i - \delta_i, \bar{a}_i + \delta_i]$ centrado en un valor nominal $\bar{a}_i$ con alguna desviación $\delta_i \geq 0$. Por lo tanto buscamos una decisión $\mathbf{x}$ que sea factible para todas las realizaciones de $\mathbf{a}$ en el conjunto de incertidumbre $\mathcal{U} := \prod_{i=1}^n [\bar{a}_i - \delta_i, \bar{a}_i + \delta_i]$ alrededor de $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)^\top$, es decir, buscamos una solución factible robusta para el siguiente problema

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{U},$$

este tipo de restricciones se denominan restricciones estáticas con conjunto de incertidumbre determinista, debido a que la variable de decisión $\mathbf{x}$ no depende de ninguna realización particular de $\mathbf{a}$. El término conjunto de incertidumbre determinista es porque la incertidumbre en el parámetro $\mathbf{a}$ se modela como una cantidad determinista desconocida que toma valores en un conjunto acotado.

En este Capítulo estudiaremos restricciones convexas robustas con conjuntos de incertidumbre fijos de la siguiente forma:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U} \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{x}$ es la variable de decisión, $\boldsymbol{\xi}$ es el parámetro incierto que toma valores en el conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$. Asumiremos que $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ es una función convexa en $\mathbf{x}$ para cualquier $\boldsymbol{\xi}$ y que $\mathcal{U}$ es un conjunto convexo y compacto.

Cuando $\mathcal{U}$ es un conjunto infinito, la restricción robusta (3.1) tiene un número infinito de restricciones deterministas y un número finito de variables, tal problema recibe el nombre de programa semi-infinito [13] que en general son difíciles de manejar computacionalmente. Por lo tanto, es importante para las aplicaciones del enfoque robusto estudiar los casos donde las reformulaciones de (3.1) resultan en problemas manejables computacionalmente.

En la Sección A presentamos el problema de optimización lineal robusta y reformulaciones exactas para varios conjuntos de incertidumbre. En la Sección B estudiamos los modelos cónicos convexos robustos y los conjuntos de incertidumbre donde las reformulaciones son exactas.

A. Optimización lineal robusta

La optimización lineal robusta es una variante de la programación lineal que aborda problemas de toma de decisiones en los que existe incertidumbre en los datos del problema. A diferencia de la programación lineal tradicional, que asume que los parámetros del problema son conocidos con certeza, ahora se toma en cuenta la variabilidad de estos parámetros y se busca encontrar soluciones que sean resistentes a las peores condiciones dentro de ciertos conjuntos de incertidumbre.

Los conjuntos de incertidumbre representan las posibles variaciones en los parámetros del problema. Estos conjuntos suelen ser convexos para mantener la convexidad del problema. La función objetivo se modifica para reflejar la resistencia a la incertidumbre. En lugar de optimizar un único valor esperado, se busca optimizar el peor resultado posible dentro de los conjuntos de incertidumbre especificados. Las restricciones también se ajustan para garantizar que se cumplan bajo las peores condiciones dentro de los conjuntos de incertidumbre.

1) Formulación

Consideremos el siguiente problema de optimización lineal determinista:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned}$$

Asumiendo que $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ son inciertos y pueden tomar cualquier valor en un conjunto de incertidumbre dado, la optimización robusta busca tomar decisiones “seguras” que minimicen el costo frente a la realización de la incertidumbre en el peor de los casos y que las restricciones se satisfagan para todas las realizaciones de la incertidumbre, lo que resulta en el siguiente modelo de optimización lineal robusta:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \forall (\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{U}, \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{U}$ son conjuntos de incertidumbre para $\mathbf{c}$ y $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, respectivamente. La función objetivo consiste en minimizar el costo en el peor de los casos, que viene dado por la ma-

ximización de $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ sobre el conjunto de incertidumbre $\mathfrak{C}$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que:

- La función objetivo no es incierto, basta observar que el objetivo del peor de los casos se puede trasladar a las restricciones introduciendo una nueva variable t , resultando

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & t \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq t, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathfrak{C} \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \forall (\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{U}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier programa lineal robusto estático puede ser modelado por un objetivo determinista y restricciones robustas.

- El lado derecho de la restricción no es incierto, basta pasar el miembro derecho de la desigualdad al lado izquierdo.
- El conjunto de incertidumbre es compacto y convexo. Para los detalles de esta afirmación ver [2].

Ejemplo III.1. Consideremos una restricción robusta dada por

$$a_1 x + a_2 y \leq 1 \quad \forall a_i \in [-1, 1], i = 1, 2.$$

El coeficiente incierto $a = (a_1, a_2)$ toma valores en una caja bidimensional, por lo tanto esta restricción lineal robusta contiene un número infinito de restricciones lineales deterministas.

Ejemplo III.2. Consideremos otra restricción lineal robusta, cuyos coeficientes son deterministas pero el lado derecho es incierto:

$$2x + y \leq b, \quad \forall b \in [-1, 1].$$

Podemos observar que esta restricción lineal robusta incluye un número infinito de restricciones lineales deterministas. Dado que solo el lado derecho varía, la región factible de la restricción robusta queda definida por una única desigualdad: $2x + y \leq \min_{b \in [-1, 1]} b = -1$.

Ejemplo III.3. Consideremos la siguiente restricción lineal robusta:

$$a_1 x + a_2 y \leq 1, \quad \forall (a_1, a_2) \in \mathfrak{U},$$

donde, $\mathfrak{U} := \{(a_1, a_2) : a_i \in [-1, 1], i = 1, 2; |a_1| + |a_2| \leq 1.5\}$, es decir, los parámetros inciertos (a_1, a_2) , están contenidos en la caja $[-1, 1] \times [-1, 1]$ y además están restringidos

para que la desviación absoluta total de (a_1, a_2) desde el origen sea menor o igual a 1.5. En la Figura I se muestra la gráfica del conjunto de incertidumbre $\mathfrak{U}$.

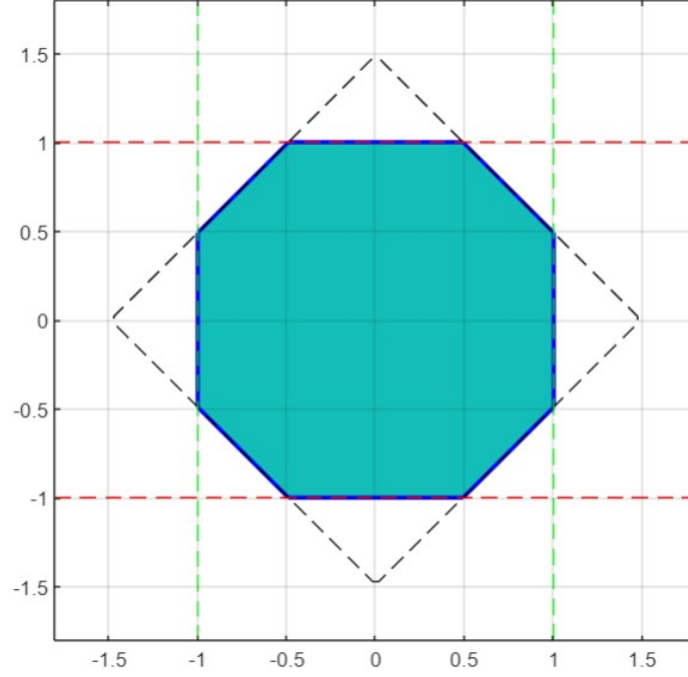


FIGURA I. Conjunto de incertidumbre $\mathfrak{U}$.

A continuación describimos algunos tipos de conjuntos de incertidumbre que permiten reformular el problema de optimización lineal robusto como un problema tratable computacionalmente.

2) Conjuntos de incertidumbre poliedrales

Consideremos una restricción lineal robusta con un conjunto de incertidumbre poliedral $\mathfrak{U}$ dado por:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathfrak{U} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{B}\mathbf{a} = \mathbf{d}\}. \quad (3.2)$$

El siguiente resultado, basado en la dualidad de programación lineal, nos da una reformulación para este tipo de restricción robusta.

Proposición III.4. *La restricción lineal robusta (3.2) puede ser reformulada como el siguiente conjunto de restricciones*

$$\begin{cases} \mathbf{d}^\top \mathbf{y} \leq b \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Prueba. Considerando el máximo sobre el conjunto $\mathfrak{U}$ en la restricción (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{a}} \quad & \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{B}\mathbf{a} = \mathbf{d} \\ & \mathbf{a} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

como el conjunto de incertidumbre $\mathfrak{U}$ es un politopo no vacío y compacto, el máximo es finito para cualquier $\mathbf{x}$, por lo tanto, se cumple la propiedad de dualidad fuerte de programación lineal. Escribiendo el problema dual, obtenemos

$$\min_{\mathbf{y}: \mathbf{B}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{x}} \mathbf{d}^\top \mathbf{y} \leq b, \iff \exists \mathbf{y} : \mathbf{d}^\top \mathbf{y} \leq b, \mathbf{B}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{x}$$

La equivalencia se debe a que el mínimo existe para cualquier $\mathbf{x}$ y es menor o igual a b , entonces debe existir $\mathbf{y}$ en el poliedro dual para que el valor objetivo del problema dual sea inferior a b . $\square$

Observación III.5. *La Proposición III.4 afirma que si el conjunto de incertidumbre es un poliedro, entonces una restricción lineal robusta es equivalente a un conjunto finito de restricciones lineales deterministas.*

A continuación, presentamos dos resultados relacionados con una clase importante de conjuntos de incertidumbre poliedrales. Si cada coeficiente incierto a_i de $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ puede variar dentro de un intervalo centrado en su valor nominal $\bar{a}_i$ con un ancho δ_i , es decir, $a_i \in [\bar{a}_i - \delta_i, \bar{a}_i + \delta_i]$ para $i = 1, \dots, n$, entonces el vector incierto $\mathbf{a}$ pertenece a un conjunto de incertidumbre tipo caja, definido como:

$$\mathfrak{U}_{\text{caja}} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : |a_i - \bar{a}_i| \leq \delta_i \ \forall i = 1, \dots, n\} = \{\bar{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\xi} : \|\boldsymbol{\xi}\|_\infty \leq 1\}$$

donde $\bar{\mathbf{a}}$ es el vector de valores nominales $\bar{a}_i$ y $\boldsymbol{\delta}$ es una matriz diagonal con δ_i en la diagonal. La norma ℓ_∞ está definida por $\|\boldsymbol{\xi}\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |\xi_i|$.

Corolario III.6 (Incertidumbre tipo caja). *La restricción lineal sobre un conjunto de incertidumbre de caja*

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b \quad \forall \mathbf{a} \in \mathfrak{U}_{\text{caja}}$$

puede ser reformulado como el siguiente conjunto de restricciones

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{a}}^\top \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n t_i \leq b \\ -t_i \leq \delta_i x_i \leq t_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.4)$$

El conjunto de incertidumbre tipo caja anterior contiene todo el rango de las desviaciones extremas de los parámetros de incertidumbre. Para controlar el tamaño del conjunto de incertidumbre y restringir la cantidad de incertidumbre considerada, se impone una restricción en la desviación total del valor nominal de la siguiente forma:

$$\mathcal{U}_{\text{pres}} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \delta\boldsymbol{\xi}, \|\boldsymbol{\xi}\|_{\infty} \leq 1, \|\boldsymbol{\xi}\|_1 \leq r\}$$

donde, la norma ℓ_1 está definida por $\|\boldsymbol{\xi}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$, el parámetro r controla el nivel de conservación de la restricción robusta. Si $r = 0$, entonces $\xi_i = 0$ para todo i y el conjunto de incertidumbre esta conformado por el valor nominal, es decir, $\mathcal{U}_{\text{pres}} = \{\bar{\mathbf{a}}\}$. Si $r = n$, entonces $\mathcal{U}_{\text{pres}} = \mathcal{U}_{\text{caja}}$.

Corolario III.7 (Incertidumbre presupuestaria). *La restricción lineal robusta sobre un conjunto de incertidumbre presupuestaria*

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{U}_{\text{pres}}, \quad (3.5)$$

puede ser reformulada como:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{x} + r\alpha \sum_{i=1}^n (v_i + w_i) \leq b \\ v_i + w_i + y_i - z_i = \delta_i x_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \alpha - y_i - z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \alpha \geq 0, v_i \geq 0, w_i \geq 0, y_i \geq 0, z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Prueba. La restricción (3.5) es equivalente a

$$\bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{x} + \max_{\substack{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\infty} \leq 1 \\ \|\boldsymbol{\xi}\|_1 \leq r}} \{\boldsymbol{\xi}^T (\delta \mathbf{x})\}.$$

Reformulando el problema de maximización sobre $\boldsymbol{\xi}$ en la intersección de las dos normas y escribiendo el problema dual correspondiente, obtenemos:

$$\begin{cases} \max_{\boldsymbol{\xi}, t} & (\delta \mathbf{x})^T \boldsymbol{\xi} \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^n t_i \leq r, \\ & \xi_i \leq 1, -\xi_i \leq 1, \\ & \xi_i \leq t_i, -\xi_i \leq t_i, \\ & i = 1, \dots, n. \end{cases} \iff \begin{cases} \min_{\alpha, v, w, y, z} & r\alpha + \sum_{i=1}^n (v_i + w_i) \\ \text{s.a.} & y_i^+ - y_i^- + z_i^+ - z_i^- = \delta_i x_i, \\ & \alpha - z_i^+ - z_i^- = 0, \\ & \alpha \geq 0, y_i^{\pm} \geq 0, z_i^{\pm} \geq 0, \\ & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Luego, el resultado es consecuencia de la Proposición III.4. □

3) Conjuntos de incertidumbre cónico lineal

Una forma de generalizar el conjunto de incertidumbre poliedral

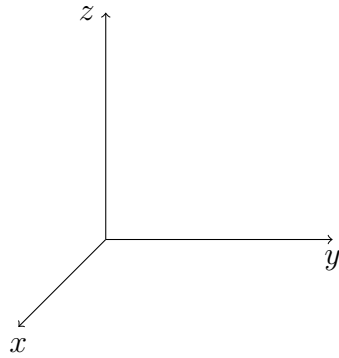
$$\mathcal{U} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{B}\mathbf{a} = \mathbf{d}\}$$

a un conjunto de restricciones convexas no lineales consiste en extender la restricción no negativa $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^n$ (ortante no negativo, el cual es un ejemplo de cono convexo) a una no lineal. A continuación damos la definición de cono convexo y cono dual.

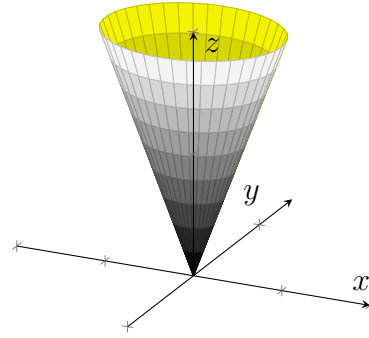
Definición III.8. (*Cono convexo*) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado no vacío. K se llama cono convexo cerrado si para cualquier escalar no negativo α, β y cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ se tiene que $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ pertenece a K .

Como ejemplos representativos de conos convexos tenemos:

- $K := \mathbb{R}_+^n$, el ortante no negativo.
- $L^n := \{(x_1, \dots, x_n) : \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \leq x_n\}$, conos de Lorentz, llamado también conos de segundo orden.
- $S_+^n = \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{M} = \mathbf{M}^\top, \mathbf{v}^\top \mathbf{M} \mathbf{v} \geq 0 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$, conos semidefinidos



(a) Octante no negativo $\mathbb{R}_+^3$



(b) Cono de Lorentz L^3

FIGURA II. Ejemplos de conos en $\mathbb{R}^3$.

Definición III.9. (*Cono dual*) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convexo cerrado. Su cono dual está dado por

$$K^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^\top \mathbf{y} \geq 0 \ \forall \mathbf{y} \in K\}.$$

Utilizando esta definición, podemos mostrar que el cono dual de $\mathbb{R}_+^n$, L^n y S_+^n son los mismos conjuntos.

Dado un cono convexo K podemos escribir $\mathbf{a} \in K$ como una desigualdad $\mathbf{a} \succeq_K \mathbf{0}$, el cual se denomina desigualdad cónica lineal, donde $\succeq_K$ define un orden parcial de modo que $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$ si y solo si $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in K$. Usando la restricción cónica lineal se define una restricción cónica lineal robusta como

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b, \forall \mathbf{a} \in \mathfrak{U} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}\mathbf{a} = \mathbf{d}, \mathbf{a} \succeq_K \mathbf{0}\} \quad (3.6)$$

La reformulación de (3.6) se realiza de manera análoga a la reformulación de una restricción lineal sobre un conjunto de incertidumbre poliedral. La única diferencia es que la dualidad de programación lineal se generaliza a la dualidad cónica lineal [14]. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado

Proposición III.10. *La restricción cónica lineal robusta sobre un conjunto de incertidumbre cónico lineal (3.6) puede ser reformulado de forma equivalente como*

$$\begin{cases} \mathbf{d}^\top \mathbf{y} \leq b \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{y} \succeq_{K^*} \mathbf{x}. \end{cases}$$

donde K^* es el cono dual de K .

La Proposición III.10 resulta útil para reformular restricciones robustas cónicas lineales cuando conocemos el cono dual de un cono K dado.

Conjunto de incertidumbre elipsoidal

Un conjunto de incertidumbre no lineal utilizado con frecuencia es el conjunto de incertidumbre elipsoidal que adopta la siguiente forma:

$$\mathfrak{U}_{\text{elip}} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})^\top \mathbf{E}(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) \leq 1\},$$

donde, $\bar{\mathbf{a}}$ representa el valor nominal del vector incierto $\mathbf{a}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^\top \succ 0$ (matriz simétrica definida positiva) determina la forma y el tamaño de la elipse. Si $\mathbf{E}$ es la matriz identidad entonces el elipsoide es la bola euclidiana de radio 1, con centro en $\bar{\mathbf{a}}$:

$$\mathfrak{U}_{\text{esf}} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\|_2 \leq 1\}.$$

En general, dado que $\mathbf{E} \succ 0$, existe una descomposición $\mathbf{E} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^\top$, donde $\mathbf{P}$ es una matriz ortonormal cuyas columnas son los autovectores de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores de $\mathbf{E}$. Luego, $(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})^\top \mathbf{E}(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) = [(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})^\top \mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2}][\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{P}^\top(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})]$, denotando por $\mathbf{v} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{P}^\top(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})$, entonces $\mathbf{a} \in \mathfrak{U}_{\text{elip}}$ si y

solo si $\mathbf{v}^\top \mathbf{v} \leq 1$. Esto nos dice que el elipsoide $\mathcal{U}_{\text{elip}}$ en el espacio de $\mathbf{a}$ se puede obtener de una bola euclidiana $\mathcal{U}_{\text{esf}}$ en el espacio de $\mathbf{v}$ por un transformación lineal $\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-1/2}$. Los ejes de $\mathcal{U}_{\text{elip}}$ pueden obtenerse aplicando $\mathbf{T}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Utilizando la transformación $\mathbf{T}$ podemos representar el elipsoide como

$$\mathcal{U}_{\text{elip}} = \{\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{T}\mathbf{v} : \|\mathbf{v}\|_2 \leq 1\} \quad (3.7)$$

Corolario III.11 (Conjunto de incertidumbre elipsoidal). *La restricción lineal robusta sobre un conjunto de incertidumbre elipsoidal (3.7),*

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{U}_{\text{elip}},$$

puede ser reformulado como

$$\begin{cases} \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + t \leq b, \\ \mathbf{e}_{n+1}^\top t \succeq_{K^*} \hat{\mathbf{T}}^\top \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.8)$$

donde, $\mathbf{e}_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)^\top$ y $\hat{\mathbf{T}}$ es la matriz formada al agregar una nueva columna de ceros a $\mathbf{T}$.

Prueba. Expresando el conjunto de incertidumbre elipsoidal (3.7) en la forma cónica lineal obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\text{elip}} &= \{\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{T}\mathbf{v}, \|\mathbf{v}\|_2 \leq 1\} \\ &= \{\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{T}\mathbf{v}, (\mathbf{v}, w) \in L^{n+1}, w = 1\}, \\ &= \{\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{e}_{n+1}^\top \hat{\mathbf{v}} = 1, \hat{\mathbf{v}} \in L^{n+1}\}, \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}^\top, w)^\top$. Como el cono dual de L^{n+1} es el mismo, entonces, la restricción lineal robusta se puede reformular como

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{a}}^\top \mathbf{x} + \max_{\substack{\hat{\mathbf{v}} \in L^{n+1} \\ \mathbf{e}_{n+1}^\top \hat{\mathbf{v}} = 1}} \{\hat{\mathbf{v}}^\top \hat{\mathbf{T}}^\top \mathbf{x}\} \leq b, \\ \iff &\bar{\mathbf{a}}^\top \mathbf{x} + \min_{\mathbf{e}_{n+1}^\top t \succeq_{K^*} \hat{\mathbf{T}}^\top \mathbf{x}} t \leq b, \quad (K^* = L^{n+1}) \\ \iff &\begin{cases} \bar{\mathbf{a}}^\top \mathbf{x} + t \leq b, \\ \mathbf{e}_{n+1}^\top t \succeq_{K^*} \hat{\mathbf{T}}^\top \mathbf{x}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Observación III.12. *Note que la reformulación (3.8) puede expresarse como una restricción*

de cono de segundo orden, en efecto

$$\mathbf{e}_{n+1}t \succeq_{K^*} \hat{\mathbf{T}}^\top \mathbf{x} \iff (-\mathbf{T}^\top \mathbf{x}, t) \in K^* = L^{n+1} \iff \|\mathbf{T}^\top \mathbf{x}\|_2 \leq t,$$

por lo tanto, el sistema (3.8) implica la siguiente restricción de cono de segundo orden

$$\bar{\mathbf{a}}\mathbf{x} + \|\mathbf{T}^\top \mathbf{x}\|_2 \leq b.$$

Ejemplo III.13. Consideremos una restricción lineal robusta en el plano dado por

$$a_1x + a_2y \leq 1 \forall (a_1, a_2) \in \mathfrak{U}_{\text{elip}},$$

donde, $\mathfrak{U}_{\text{elip}}$ viene dado por

$$\mathfrak{U}_{\text{elip}} = \left\{ (a_1, a_2) : \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \leq 1 \right\}$$

Realizando los cálculos, los autovalores de $\mathbf{E}$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1/4$ y los autovectores asociados son $\mathbf{q}_1 = (1, 1)^\top$ y $\mathbf{q}_2 = (-1, 1)^\top$ respectivamente. Luego la matriz $\mathbf{D} = \text{diag}(1, 1/4)$, $\mathbf{P} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]$, por lo tanto, la representación (3.7) adopta la siguiente forma

$$\mathfrak{U}_{\text{elip}} = \left\{ (a_1, a_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} : \|(v_1, v_2)\|_2 \leq 1 \right\}$$

Utilizando el Corolario III.11, la restricción lineal robusta puede ser reformulada como

$$\left\{ (x, y) : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq 1 \right\}$$

La Figura III ilustra el conjunto de incertidumbre $\mathfrak{U}_{\text{elip}}$ (color gris) y la restricción lineal robusta reformulada (color celeste).

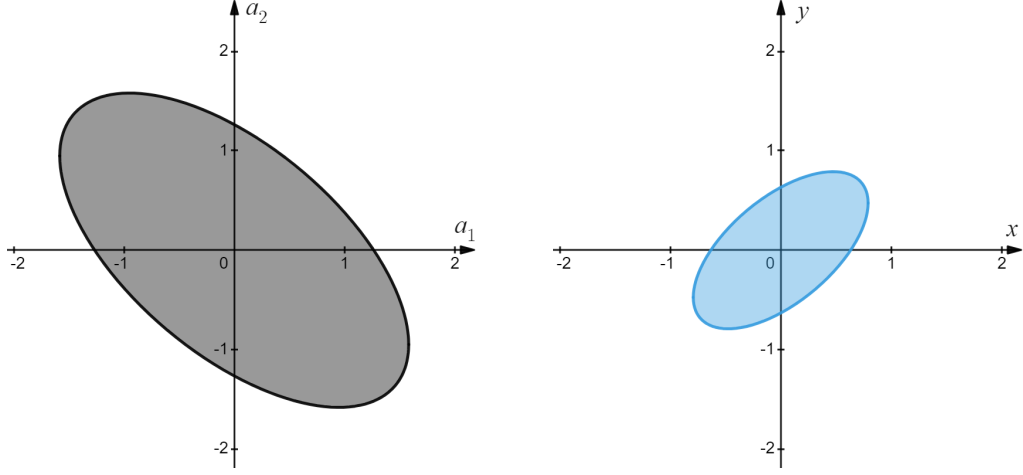


FIGURA III. Incertidumbre elipsoidal y región factible de la restricción robusta.

Las restricciones cónicas lineales deterministas obtenidas mediante las técnicas de reformulación explicadas anteriormente pueden ser implementadas y resueltas computacionalmente utilizando solvers modernos de optimización convexa como Mosek [15] y Matlab.

B. Optimización convexa robusta

La optimización convexa robusta, involucra restricciones no lineales por lo que la reformulación de dicho problema se torna mucho más complicada pudiendo resultar en restricciones no convexas, por lo tanto, difíciles de resolver. En esta sección estudiaremos las clases de restricciones no lineales robustas y conjuntos de incertidumbre asociados que conducen a reformulaciones computacionalmente manejables.

A continuación presentamos dos resultados importantes utilizados con frecuencia en la reformulación de restricciones cónicas robustas. La demostración detallada de estos resultados se encuentran en [14]. El primer resultado es una propiedad importante relacionada con las matrices semidefinidas positivas.

Teorema III.14 (Complemento de Schur). *Sea $\mathbf{M}$ una matriz conformada por bloques dada por:*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Asumamos además que $\mathbf{C}$ es invertible. El complemento de Schur de $\mathbf{M}$ con respecto a $\mathbf{C}$ está definido como:

$$\mathbf{M}_C := \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top.$$

Entonces se cumplen las siguientes equivalencias:

- $M \succ 0, \iff C \succ 0, M_C \succ 0.$
- Si $C \succ 0$, entonces $M \succeq 0, \iff M_C \succeq 0.$

Ejemplo III.15. Consideremos una matriz M con bloques dados por

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, $C \succ 0$ y

$$M_C = A - BB^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \succ 0$$

Por lo tanto $M \succ 0$, como puede verificarse calculando los autovalores de la matriz M .

El siguiente resultado se originó en la teoría de control y está relacionado con la propiedad de dualidad fuerte de un problema de optimización cuadrática no convexa con una única restricción cuadrática no convexa.

Teorema III.16 (S-lema). *Dados dos matrices simétricas A y B . Asumiendo que existe $\bar{z} : \bar{z}^T A \bar{z} > 0$. Se cumple la siguiente implicación*

$$z^T A z \geq 0 \Rightarrow z^T B z \geq 0 \quad (3.9)$$

si y sólo si existe un escalar $\kappa \geq 0$ tal que:

$$B - \kappa A \succeq 0, \quad (3.10)$$

es decir, $B - \kappa A$ es semidefinida positiva.

Ejemplo III.17. Consideremos las siguientes dos matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Para verificar si se cumple la implicación (3.9) basta probar si existe algún $\kappa \geq 0$ tal que se cumpla (3.10). En efecto, tenemos que

$$B - \kappa A = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} - \kappa & \frac{5}{8} - 2\kappa \\ \frac{5}{8} - 2\kappa & \frac{3}{8} - \kappa \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{8} - \kappa\right)^2 - \left(\frac{5}{8} - 2\kappa\right)^2 \geq 0, \frac{3}{8} - \kappa \geq 0.$$

Recordemos que una restricción convexa robusta tiene la siguiente forma general:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \quad \text{para todo } \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$$

en las siguientes dos secciones estudiaremos restricciones robustas donde, $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ es una función cóncava-convexa, es decir, f es convexa en $\mathbf{x}$ para cualquier $\boldsymbol{\xi}$ y cóncava en $\boldsymbol{\xi}$ para cualquier $\mathbf{x}$. Si bien una restricción lineal robusta está representada por una función bilineal $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{x}$ que tiene una estructura bien definida, no existe una forma única de expresar una función convexa no lineal arbitraria para una restricción no lineal robusta. Un tema central en la optimización convexa es estudiar algunas estructuras convexas que pueden usarse para representar una amplia gama de problemas convexos y conducir a modelos manejables para el cálculo. En particular, estudiaremos las siguientes dos clases de restricciones convexas: las restricciones cónicas de segundo orden robustas y las restricciones semidefinidas robustas.

1) Restricciones cónicas de segundo orden robustas

Una versión robusta de la restricción de cono de segundo orden con datos inciertos puede representarse como:

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d, \quad \forall (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d) \in \mathcal{U} \quad (3.11)$$

$$\iff (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d) \in L^{m+1}, \quad \forall (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d) \in \mathcal{U}. \quad (3.12)$$

donde, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Observación III.18. Las restricciones cuadráticas convexas son un tipo particular de restricciones de cono de segundo orden. En efecto, dada la restricción cuadrática convexa $\mathbf{xPx} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + g \leq 0$, si $\mathbf{P}$ es una matriz definida positiva, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{xPx} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + g &\leq 0 \\ \iff (\mathbf{Ax} + \mathbf{b})^\top (\mathbf{Ax} + \mathbf{b}) &\leq \mathbf{b}^\top \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} - g \\ \iff \|\mathbf{Ax} + \mathbf{b}\|_2 &\leq \mathbf{0}^\top \mathbf{x} + d \end{aligned}$$

donde, $\mathbf{P} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$, $\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}$ y $d = \sqrt{\mathbf{b}^\top \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} - g}$. Esto quiere decir que las restricciones cuadráticas convexas pueden representarse como restricciones de cono de segundo orden.

La reformulación de una restricción cónica de segundo orden robusta depende de la estructura del conjunto de incertidumbre. A continuación, consideramos tres tipos de conjuntos de

incertidumbre, que conducen a reformulaciones exactas y computacionalmente manejables.

Conjunto de incertidumbre de escenarios

El conjunto de incertidumbre más simple, relacionado con el trabajo de [16], es el que se define a partir de la cápsula convexa de un conjunto de escenarios de datos inciertos:

$$\mathfrak{U}_{\text{caps}} = \text{conv} \{(\mathbf{A}^\ell, \mathbf{b}^\ell, \mathbf{c}^\ell, d^\ell), \ell = 1, \dots, N\}. \quad (3.13)$$

El siguiente resultado describe la reformulación de una restricción cónica respecto a un conjunto de incertidumbre definido como la cápsula convexa de un conjunto de escenarios de datos inciertos.

Proposición III.19. *La restricción cónica de segundo orden robusta sobre el conjunto de incertidumbre (3.13), dada por*

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d \right) \in L^{m+1}, \quad \forall (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d) \in \mathfrak{U}_{\text{caps}} \quad (3.14)$$

puede ser reformulada como

$$\left(\mathbf{A}^\ell \mathbf{x} - \mathbf{b}^\ell, \quad (\mathbf{c}^\ell)^\top \mathbf{x} + d^\ell \right) \in L^{m+1}, \quad \forall \ell = 1, \dots, N. \quad (3.15)$$

Prueba. Si se cumple (3.14) entonces se verifica (3.15). Recíprocamente, supongamos ahora que $\mathbf{x}$ cumple (3.15), dada una realización arbitraria $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ del conjunto de incertidumbre $\mathfrak{U}_{\text{caps}}$, por definición de cápsula convexa, existen un número finito k de puntos extremos $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k \in \mathfrak{U}_{\text{caps}}$ y parámetros no negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, tales que

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \boldsymbol{\xi} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \boldsymbol{\xi}_j,$$

entonces,

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d \right) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\mathbf{A}^j \mathbf{x} - \mathbf{b}^j, \quad (\mathbf{c}^j)^\top \mathbf{x} + d^j \right). \quad (3.16)$$

Por hipótesis, $\mathbf{x}$ satisface (3.15), luego

$$\left(\mathbf{A}^j \mathbf{x} - \mathbf{b}^j, \quad (\mathbf{c}^j)^\top \mathbf{x} + d^j \right) \in L^{m+1}, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, k.$$

Debido a la convexidad del conjunto L^{m+1} el lado derecho de (3.16) también pertenece a

L^{m+1} , de donde concluimos que $\mathbf{x}$ satisface (3.15). $\square$

Conjunto de incertidumbre de intervalo

Un conjunto de incertidumbre de intervalo se define como el producto cartesiano de dos conjuntos de incertidumbre, el del lado derecho, $\mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}}$, y el del lado izquierdo $\mathfrak{U}^{\mathbf{c}, d}$, es decir:

$$\mathfrak{U}_{\text{interv}} := \mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}} \times \mathfrak{U}^{\mathbf{c}, d},$$

donde, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}}$ está definido por

$$\mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}} := \left\{ (\mathbf{A}, \mathbf{b}) : \mathbf{A}_{ij} \in I_{ij}, b_i \in K_i, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \right\}, \quad (3.17)$$

con $I_{ij} := [\bar{A}_{ij} - \delta A_{ij}, \bar{A}_{ij} + \delta A_{ij}]$, $K_i := [\bar{b}_i - \delta b_i, \bar{b}_i + \delta b_i]$ y $\mathfrak{U}^{\mathbf{c}, d}$ puede ser cualquier conjunto de incertidumbre de tipo cónico lineal. Siendo el conjunto de incertidumbre de intervalo un producto cartesiano de dos conjuntos de incertidumbre, la restricción robusta de cono de segundo orden (3.11) puede reescribirse como:

$$\max_{(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d$$

tomando el mínimo sobre $\mathfrak{U}^{\mathbf{c}, d}$, existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max_{(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq t, \quad \min_{(\mathbf{c}, d) \in \mathfrak{U}^{\mathbf{c}, d}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + d \geq t. \quad (3.18)$$

La segunda restricción en (3.18) es una restricción lineal robusta ya estudiada, por lo tanto, basta estudiar la primera restricción de cono de segundo orden robusta del lado izquierdo.

Proposición III.20. *La siguiente restricción de cono de segundo orden robusta*

$$\max_{(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq t \quad (3.19)$$

puede ser reformulada como una restricción cuadrática y un conjunto de restricciones lineales involucrando la norma ℓ_1 , es decir,

$$\begin{cases} y_1^2 + \dots + y_m^2 \leq t^2, \\ |\bar{\mathbf{a}}_i^\top \mathbf{x} - \bar{b}_i| + \|\delta_i \mathbf{x}\|_1 + \delta b_i \leq y_i, \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.20)$$

donde, $\bar{\mathbf{a}}_i$ representa los valores nominales de la i -ésima fila de la matriz $\mathbf{A}$, es decir, $\bar{\mathbf{a}}_i = (\bar{a}_{i1}, \dots, \bar{a}_{in})$; $\boldsymbol{\delta}_i$ representa una matriz diagonal cuyos elementos son δa_{ij} para $j = 1, \dots, n$.

Prueba. Notemos primero que el intervalo de incertidumbre $\mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}}$ (3.17) está definido restricción a restricción, es decir, cada fila i de $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ tiene un conjunto de incertidumbre de intervalo dado por

$$\mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{a}_i, b_i} = \left\{ (\mathbf{a}_i, b_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{a}}_i + \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\xi}, \|\boldsymbol{\xi}\|_\infty \leq 1, b_i = \bar{b}_i + \delta b_i \mu, |\mu| \leq 1 \right\},$$

donde, $\mathbf{a}_i$ representa la i -ésima fila de la matriz $\mathbf{A}$, luego tenemos que la restricción (3.19) es equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left(\max_{(\mathbf{a}_i, b_i) \in \mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{a}_i, b_i}} |\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i| \right)^2 \leq t^2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y_1^2 + \dots + y_m^2 \leq t^2, \\ \max_{(\mathbf{a}_i, b_i) \in \mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{a}_i, b_i}} |\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i| \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \end{cases} \end{aligned}$$

como $|\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i|$ puede escribirse como el máximo de $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i$ y $-\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + b_i$; teniendo en cuenta la definición del conjunto $\mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{a}_i, b_i}$, la segunda restricción es equivalente a

$$\max \left\{ \max_{\substack{\|\boldsymbol{\xi}\|_\infty \leq 1 \\ |\mu| \leq 1}} \{(\bar{\mathbf{a}}_i^\top \mathbf{x} - \bar{b}_i) + \boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\delta}_i \mathbf{x} - \delta b_i \mu\}, -(\bar{\mathbf{a}}_i^\top \mathbf{x} - \bar{b}_i) + \max_{\substack{\|\boldsymbol{\xi}\|_\infty \leq 1 \\ |\mu| \leq 1}} \{-\boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\delta}_i \mathbf{x} - \delta b_i \mu\} \right\} \leq y_i$$

calculando los máximos involucrados, obtenemos

$$|\bar{\mathbf{a}}_i^\top - \bar{b}_i| + \|\boldsymbol{\delta}_i \mathbf{x}\|_1 + \delta b_i \leq y_i,$$

por lo tanto, se cumple (3.20). □

Ejemplo III.21. Consideremos el caso particular en el que $\mathbf{A}$, en la restricción robusta (3.19) tiene solo una fila, es decir, es de la forma $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} - b$, con $(\mathbf{a}, b) \in \mathfrak{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{a}, b}$. Por la Proposición 3.20, esta restricción cónica de segundo orden robusta se convierte en

$$\max \{ |\mathbf{a}^\top \mathbf{x} - b| : \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\xi}, \|\boldsymbol{\xi}\|_\infty \leq 1, b = \bar{b} + \delta b \mu, |\mu| \leq 1 \} \leq t$$

el cual puede ser reformulado como

$$|\bar{\mathbf{a}}^\top \mathbf{x} - \bar{b}| + \sum_{j=1}^n \delta a_j |x_j| + \delta b \leq t \quad (3.21)$$

Con el objetivo de obtener una representación gráfica en el plano, consideremos siguientes valores numéricos $\bar{\mathbf{a}}^\top = [1, -1]$, $\bar{b} = 0$, $t = 4$, $\delta a_j = 1$ para $j = 1, 2$ y $\delta b = 1$. En el conjunto de incertidumbre consideremos $a_1 \in [0, 2]$, $a_2 \in [-2, 0]$ y $b \in [-1, 1]$. Luego, en (3.21) podemos identificar que la restricción nominal correspondiente es $|x - y| \leq 4$, mientras que la restricción robusta correspondiente es $|x - y| + |x| + |y| \leq 3$, esto se representa en la Figura IV en color rojo y celeste respectivamente.

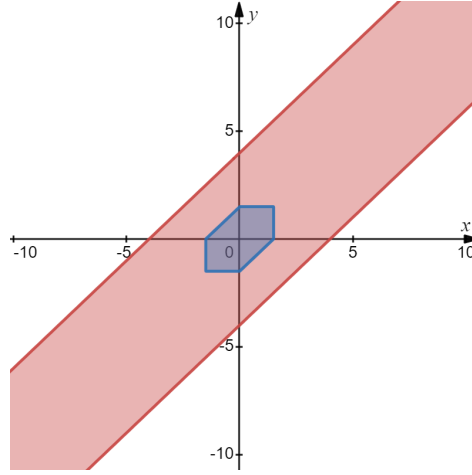


FIGURA IV. Región factible nominal (rojo) y robusta (celeste).

Conjunto de incertidumbre elipsoidal simple

En un conjunto de incertidumbre de intervalos $\mathcal{U}_{\text{interv}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}}$, cada fila de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ tiene una incertidumbre independiente, lo que facilita la reformulación de una restricción de cono de segundo orden robusta. Sin embargo, este tipo de conjunto de incertidumbre podría resultar ser muy conservador, ya que permite que la realización de la incertidumbre en el peor de los casos tome simultáneamente los puntos extremos de los intervalos de incertidumbre. El siguiente conjunto de incertidumbre, reduce el carácter conservador de las restricciones robustas, permitiendo que la incertidumbre de las las restricciones se acoplen y está dado por

$$\mathcal{U}_{\text{elip}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}} = \left\{ (\mathbf{A}, \mathbf{b}) : \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i \xi_i, \mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} + \sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i \xi_i, \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq 1 \right\}, \quad (3.22)$$

donde $\bar{\mathbf{A}}$ y $\bar{\mathbf{b}}$ son valores nominales de $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i$ son las desviaciones de los valores nominales. Notemos en particular que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ están controlados por el mismo factor incierto $\boldsymbol{\xi}$. El siguiente resultado está basado en [17].

Proposición III.22. *La restricción cónica robusta sobre el elipsoide (3.22)*

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \leq t, \quad \forall (\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{U}_{\text{elip}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}} \quad (3.23)$$

puede ser reformulada como la siguiente restricción positiva semidefinida

$$\begin{bmatrix} t - \kappa & (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}})^\top & \mathbf{0}^\top \\ \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}} & t\mathbf{I} & \mathbf{A}_b^x \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_b^x)^\top & \kappa\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \kappa \geq 0,$$

donde, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de dimensiones apropiadas; $\mathbf{A}_b^x$ es una matriz cuya i -ésima columna es igual a $\mathbf{A}_i\mathbf{x} - \mathbf{b}_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, k$.

Observación III.23. *La demostración de la Proposición III.22 hace el uso del S-Lema enunciado en el Teorema III.16 y técnicas de optimización cuadrática por lo que se incluyó en el Anexo B para su completitud.*

Ejemplo III.24. *Consideremos la siguiente restricción de cono de segundo orden robusta*

$$\sqrt{(\xi_1 x)^2 + (\xi_2 y)^2} \leq 1, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) : \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \leq 1. \quad (3.24)$$

Para expresar esta restricción en la forma de la restricción cónica robusta (3.23), basta notar que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \mathbf{0}, \bar{\mathbf{A}} = 0, \bar{\mathbf{b}} = 0, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}.$$

Aplicando la Proposición III.22, obtenemos la siguiente reformulación

$$\begin{bmatrix} 1 - \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & \kappa & 0 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \kappa \geq 0,$$

El cual puede ser reformulado, utilizando el complemento de Schur (Teorema III.14), como

$$\begin{bmatrix} \kappa - x^2 & 0 \\ 0 & \kappa - y^2 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1,$$

de donde obtenemos, $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$, es decir, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. La Figura V muestra la región factible (en color gris) que determina la restricción de cono de segundo orden robusta (3.24) dado en este ejemplo.

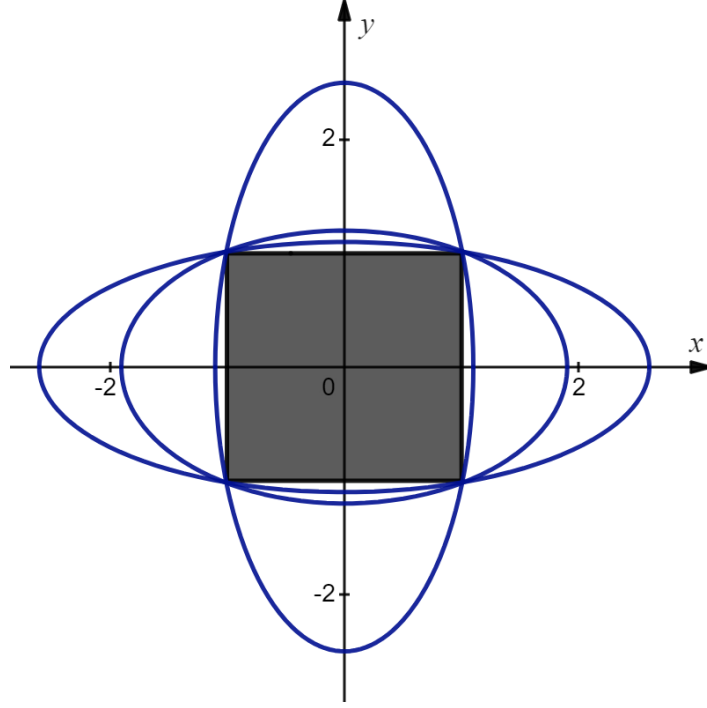


FIGURA V. Región factible de la restricción robusta (3.24).

2) Restricciones semidefinidas robustas

Una restricción semidefinida robusta está definida como

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{A}_m x_m \succeq \mathbf{B}, \quad \forall (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B}) \in \mathfrak{U}, \quad (3.25)$$

donde $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}$ significa que $\mathbf{A} - \mathbf{B} \succeq \mathbf{0}$, es decir $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \in S_+^n$. Por lo tanto, la restricción semidefinida robusta también puede ser expresada como

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{A}_m x_m - \mathbf{B} \in S_+^n, \quad \forall (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B}) \in \mathfrak{U}.$$

Las clases de conjuntos de incertidumbre $\mathfrak{U}$ para los cuales la restricción semidefinida positiva robusta admite una reformulación manejable son mucho más restringidas que las restricciones cónicas robustas. En particular, el conjunto de incertidumbre definida como la cápsula convexa de escenarios y el conjunto de incertidumbre elipsoidal de rango 2 admiten reformulaciones tratables.

Conjunto de incertidumbre de la cápsula convexa

Proposición III.25. *Dado, el conjunto de incertidumbre de la cápsula convexa*

$$\mathfrak{U}_{\text{caps}} = \text{conv}\{(\mathbf{A}_1^j, \dots, \mathbf{A}_m^j, \mathbf{B}^j), j = 1, \dots, N\},$$

entonces la restricción semidefinida robusta (3.25) puede ser reformulada como el conjunto de restricciones semidefinidas positivas determinísticas, para cada escenario en $\mathfrak{U}_{\text{caps}}$ dado por

$$\mathbf{A}_1^j x_1 + \dots + \mathbf{A}_m^j x_m \succeq \mathbf{B}^j, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

La prueba de este resultado es similar al caso de restricciones de cono de segundo orden robustas sobre conjuntos de incertidumbre de la cápsula convexa (Proposición III.19).

Ejemplo III.26. *Consideremos la siguiente restricción positiva semidefinida*

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x + y & -2x - y + 1 \\ -2x - y + 1 & x - 2y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

Esta matriz es simétrica y sus entradas son lineales en x y y , luego, la restricción puede ser escrito en la forma de (3.25) como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} y \succeq \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad (3.27)$$

Si asumimos que las matrices $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{B}$ son inciertas en un conjunto de incertidumbre de cápsula convexa

$$\mathfrak{U}_{\text{caps}} = \text{conv}\left\{\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & -2.5 \\ -2.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1^1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & -1.5 \\ -1.5 & -2.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2^1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 \\ -1.5 & -0.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^1}\right), \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 \\ -1.5 & 1.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1^2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2^2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^2}\right)\right\}.$$

Entonces, por la Proposición III.25 la restricción semidefinida robusta puede ser reformulada como las dos siguientes restricciones semidefinidas deterministas

$$\begin{bmatrix} x + y + 1 & -5x - 3y + 3 \\ -5x - 3y + 3 & x - 5y + 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} 3x + 3y - 1 & -3x - y + 1 \\ -3x - y + 1 & 3x - 3y + 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

La Figura VI muestra la región factible definida por la restricción semidefinida positiva (3.26)

(elipsoide de color celeste), así como la región factible definida por la versión robusta de (3.26) considerando el conjunto de incertidumbre de la cápsula convexa de escenarios (intersección del elipsoide verde con la región de color rojo)

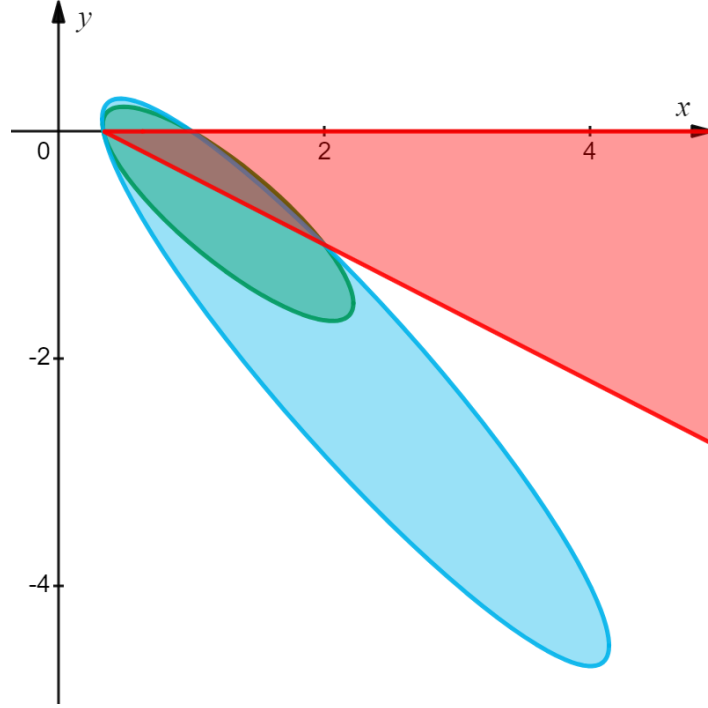


FIGURA VI. Región factible de una restricción robusta semidefinida positiva.

Conjunto de incertidumbre elipsoidal de rango 2

Es posible definir un conjunto de incertidumbre elipsoidal para restricciones robustas semidefinidas, siguiendo el modelo del conjunto de incertidumbre (3.22), sin embargo, con el objetivo de obtener una reformulación tratable, es necesario simplificar el modelo considerando solamente perturbaciones de rango 2 como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo III.27. Dada la restricción semidefinida positiva $\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i x_i \succeq \mathbf{0}$, consideremos una perturbación en su primera fila y primera columna por funciones lineales en $\boldsymbol{\xi}$ dada por

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i x_i = \sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{A}}_i x_i + \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{P}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\xi} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ es una matriz de funciones lineales en $\mathbf{x}$. Esta matriz de perturbación puede ser expresada como

$$\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{P}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\xi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^k \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_j(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{p}_j(\mathbf{x})^\top \end{bmatrix} \right) \xi_j.$$

donde $\mathbf{p}_j(\mathbf{x})^\top$ es la j -ésima fila de $\mathbf{P}(\mathbf{x})$. Podemos observar que, para cada ξ_i , la matriz de perturbación es de rango 2.

Generalizando el ejemplo anterior, dada una restricción semidefinida positiva de la forma $\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i x_i - \mathbf{B} \succeq \mathbf{0}$ y un vector $\mathbf{s}$ fijo, una perturbación de rango 2 de esta restricción está definida como

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i x_i - \mathbf{B} = \sum_{i=1}^m (\bar{\mathbf{A}}_i x_i - \bar{\mathbf{B}}) + \sum_{j=1}^k \left(\mathbf{p}_j(\mathbf{x}) \mathbf{s}^\top + \mathbf{s} \mathbf{p}_j(\mathbf{x})^\top \right) \xi_j \succeq \mathbf{0}, \quad \forall \xi : \|\xi\|_2 \leq 1.$$

Proposición III.28. *La restricción semidefinida positiva robusta*

$$\sum_{i=1}^m (\bar{\mathbf{A}}_i x_i - \bar{\mathbf{B}}) + \sum_{j=1}^k \left(\mathbf{p}_j(\mathbf{x}) \mathbf{s}^\top + \mathbf{s} \mathbf{p}_j(\mathbf{x})^\top \right) \xi_j \succeq \mathbf{0}, \quad \forall \xi : \|\xi\|_2 \leq 1. \quad (3.28)$$

puede reformularse como la siguiente restricción semidefinida positiva

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (\bar{\mathbf{A}}_i x_i - \bar{\mathbf{B}}) - \kappa \mathbf{s} \mathbf{s}^\top & \mathbf{P}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{x})^\top & \kappa \mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \kappa \geq 0,$$

La demostración de esta Proposición sigue las mismas ideas que el de la Proposición III.22 por lo que se incluyó en el Anexo B.

Observación III.29. *En general, a medida que el problema de optimización o los conjuntos de incertidumbre se vuelven más complejos la reformulación tratable (exacta) del problema robusto se hace inviable. Vimos por ejemplo que al reformular los problemas de optimización lineal robustos se convierten en problemas de cono de segundo orden (Observación III.12). Los problemas de cono de segundo orden robustos se convierten en problemas de optimización semidefinida (Proposición III.22). En [18], se proponen reformulaciones aproximadas para problemas de optimización cónica de manera que preserven la manejabilidad del problema original.*

IV. Optimización robusta ajustable

En este capítulo, abordaremos el estudio de la optimización robusta ajustable, una metodología que permite enfrentar problemas de toma de decisiones donde, además de existir incertidumbre en los datos, se introduce un nivel de flexibilidad o ajustabilidad en la solución óptima. Esto significa que las variables de decisión pueden ajustarse después de que se revela una parte de los datos inciertos. En general, este enfoque suele generar un mejor valor de la función objetivo en comparación con la optimización robusta estricta.

Consideremos la siguiente restricción robusta:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U},$$

donde, $\mathcal{U}$ representa el conjunto de incertidumbre, $\boldsymbol{\xi}$ es el parámetro incierto que toma valores dentro de $\mathcal{U}$, y $\mathbf{x}$ es la variable de decisión. La optimización robusta estricta, vista en el Capítulo III, busca una decisión robusta $\mathbf{x}$ que sea factible para todas las realizaciones de la incertidumbre en $\mathcal{U}$. Sin embargo, en muchas situaciones prácticas, esta decisión robusta puede no ser la opción más adecuada, especialmente en los siguientes dos casos:

- Restricciones de igualdad con parámetros inciertos. Un caso típico ocurre cuando las restricciones de igualdad incluyen parámetros inciertos. Por ejemplo, en el mercado eléctrico, el suministro de electricidad debe igualar la demanda en todo momento. Si consideramos la demanda de electricidad como un parámetro incierto, esta varía diariamente entre picos (máximo nivel de demanda) y valles (mínimo nivel de demanda). En este contexto, la decisión de generación debe depender de la demanda; de lo contrario, se corre el riesgo de romper el equilibrio entre generación y consumo, lo que podría llevar a problemas significativos en la operación del sistema eléctrico.
- Incertidumbre con estructuras dinámicas. Otro caso relevante surge cuando la incertidumbre tiene una naturaleza dinámica. En un mercado eléctrico diario, el operador del sistema debe decidir, con anticipación, qué generadores encender o apagar durante las próximas 24 horas, sin conocer exactamente la demanda del día siguiente. Esta decisión, conocida como "compromiso de unidades", implica determinar hoy las decisiones binarias (encender/apagar) conforme a las reglas del mercado. Como resultado, el plan de generación para el día siguiente no debe ser un valor fijo, sino que debe adaptarse a las fluctuaciones de la demanda. Este enfoque se conoce como un problema de toma de decisiones en dos etapas. La Figura VII ilustra la relación entre la estructura de las decisiones y la incertidumbre en este tipo de problemas.

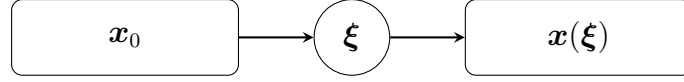


FIGURA VII. Esquema de un problema robusto de dos etapas.

En este esquema, $\mathbf{x}_0$ es el vector de las decisiones de encendido/apagado de los generadores para el día siguiente; $\boldsymbol{\xi}$ es el vector de demanda en las próximas 24 horas, considerado como un parámetro incierto; $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ es el vector de las decisiones de generación para las próximas 24 horas.

Observación IV.1. *Note que la decisión $\mathbf{x}_0$ se toma antes de conocer la demanda $\boldsymbol{\xi}$, por lo tanto, $\mathbf{x}_0$ no depende de $\boldsymbol{\xi}$, mientras que la decisión $\mathbf{x}$ se toma al día siguiente de que se realice la demanda $\boldsymbol{\xi}$, por lo que $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ es una función de $\boldsymbol{\xi}$.*

A. Optimización robusta lineal de dos etapas

En esta sección, se analizan formulaciones clave de un modelo de optimización lineal robusta en dos etapas. En particular, se examina una clase importante de problemas en los que el parámetro incierto se encuentra en el lado derecho de las restricciones lineales robustas, abordando también la complejidad asociada con este tipo de problemas. Finalmente, se describen los algoritmos existentes para su resolución. A continuación, se presentan las dos metodologías más utilizadas para formular un modelo de optimización lineal robusta en dos etapas: la formulación funcional y la formulación anidada.

1) Formulación funcional

Para implementar un modelo robusto de dos etapas, es necesario decidir cómo modelar la función objetivo, el conjunto de incertidumbre y las restricciones robustas siguiendo el principio básico de la optimización robusta: minimizar el costo objetivo del peor de los casos sobre el parámetro incierto.

- Asumamos que tanto la decisión de la primera etapa $\mathbf{x}_0$ como la decisión de la segunda etapa $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ incurren en costos dados por $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{g}^\top \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ respectivamente, entonces, el costo total en el peor de los casos está dado por el máximo del costo total sobre todos los parámetros inciertos $\boldsymbol{\xi}$ en un conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$, es decir, $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \mathbf{g}^\top \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$.
- Para establecer las restricciones en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}(\cdot)$, debemos tener en cuenta que las restricciones en la decisión de primera etapa $\mathbf{x}_0$ son similares a las de un problema de optimización determinista ya que no involucra parámetros inciertos, que en el caso

lineal pueden escribirse como $\mathbf{x}_0 \in X_0$, con

$$X_0 := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_0} : \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{b}_0\},$$

donde, la matriz $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{m_0 \times n_0}$ y el vector $\mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$ son cantidades deterministas.

La decisión de segunda etapa $\mathbf{x}(\cdot)$ en general depende de la decisión de la primera etapa por lo que escribiremos $\mathbf{x}(\cdot) \in X(\mathbf{x}_0)$, con

$$X(\mathbf{x}_0) = \left\{ \mathbf{x}(\cdot) : \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) \geq \mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U} \right\} \quad (4.1)$$

donde, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{m \times n_0}$, $\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^m$.

Asumiendo que la incertidumbre solo afecta al lado derecho en (4.1) y que tiene la siguiente forma $\mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}$, donde $\mathbf{D}$ y $\mathbf{h}$ son parámetros conocidos, obtenemos el siguiente modelo

$$\min_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\cdot)} \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \mathbf{g}^\top \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) \right\} \quad (4.2a)$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{x}_0 \in X_0, \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) \geq \mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}. \quad (4.2c)$$

El cual recibe el nombre de formulación funcional debido a que la variable de decisión de la segunda etapa $\mathbf{x}(\cdot)$ es modelado como una función de $\boldsymbol{\xi}$.

2) Formulación anidada

Desde el punto de vista computacional la formulación funcional tiene una desventaja debido a que la decisión funcional $\mathbf{x}(\cdot)$ puede ser de dimensión infinita. La formulación anidada es una forma equivalente de implementar la estructura de decisión en dos etapas que nos permite entender las propiedades de este tipo de problemas y desarrollar algoritmos para solucionarlo.

Para cada realización fija de $\boldsymbol{\xi}$ en el conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$, se debe resolver un problema de segunda etapa que minimice el costo de segunda etapa $\mathbf{g}^\top \mathbf{x}$ mientras se satisface las restricción (4.2c) para este valor fijado de $\boldsymbol{\xi}$, es decir, debemos resolver el siguiente problema

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{g}^\top \mathbf{x}$$

$$\text{s.a. } Bx \geq D\xi + h - Ax_0.$$

La decisión x en este problema es un vector de $\mathbb{R}^n$ (de dimensión finita) y el valor objetivo óptimo depende de ξ , por lo tanto, el costo de la segunda etapa en el peor de los casos viene dado por

$$V(x_0) = \max_{\xi \in \mathcal{U}} \min_x g^\top x \quad (4.3)$$

$$\text{s.a. } Bx \geq D\xi + h - Ax_0.$$

Finalmente, el problema lineal robusto de dos etapas minimiza el costo total $c^\top + V(x_0)$, es decir,

$$\min_{x_0 \in X_0} \left\{ c^\top x_0 + \max_{\xi \in \mathcal{U}} \min_{x \in Y(x_0, \xi)} g^\top x \right\}, \quad (4.4)$$

donde, el conjunto factible para la decisión x de segunda etapa, $Y(x_0, \xi)$, esta dado por

$$Y(x_0, \xi) = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \geq D\xi + h - Ax_0\}.$$

La reformulación (4.4) es conocida como formulación anidada de un problema de optimización lineal robusta de dos etapas debido a la estructura anidada min-max-min.

Formulación mediante la función valor

La formulación anidada (4.4) puede ser reescrito de la siguiente forma

$$\min_{x_0} c^\top x_0 + V(x_0) \quad (4.5)$$

$$\text{s.a. } x_0 \in X_0,$$

donde, $V(x_0)$ es el costo óptimo de segunda etapa definido en (4.3). $V(\cdot)$ también es llamada la función valor (recurso) del problema robusto de dos etapas por lo que la formulación (4.5) recibe el nombre de formulación función valor.

Observación IV.2. *La formulación (4.5) pone en evidencia que el problema de optimización lineal robusta de dos etapas solo depende de la decisión de primera etapa x_0 . Esto significa que que la única decisión que debe implementarse hoy antes de que se materialice la incertidumbre es la decisión de la primera etapa; mientras que la decisión de la segunda etapa $x(\xi)$ puede esperar su implementación hasta después que se materialice la incertidumbre. Por esta razón a x_0 también se le denomina decisión inmediata (here-and-now), mientras que la decisión de segunda etapa, $x(\xi)$, se le denomina decisión de esperar y ver (wait-and-see).*

La formulación (4.5) también muestra que las propiedades de la función valor $V(\cdot)$ son importantes para comprender mejor el problema de optimización robusta de dos etapas.

Las tres Proposiciones que siguen describen las propiedades importantes de la función valor.

Proposición IV.3. *La función $V(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_0)$, definida por*

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{g}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{B}\mathbf{x} \geq \mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

es convexa y lineal a trozos en $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_0)$.

Prueba. Asumiremos que el problema de segunda etapa tiene recurso relativamente completo, es decir, el problema de minimización en (4.6) es siempre factible para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}$ y $\mathbf{x}_0 \in X_0$. Bajo esta condición se cumple la propiedad de dualidad fuerte para (4.6) y su dual viene dado por

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{y}} \quad & (\mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{y} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{B}^\top \mathbf{y} = \mathbf{g} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Notemos que la región factible del problema dual anterior definida como

$$W = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{B}^\top \mathbf{y} = \mathbf{g}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}, \quad (4.8)$$

es independiente de $\boldsymbol{\xi}$ y $\mathbf{x}_0$. Solo los coeficientes de la función objetivo dependen linealmente de $\boldsymbol{\xi}$ y $\mathbf{x}_0$. Si W es un poliedro no vacío, entonces, por la propiedad de dualidad fuerte y la hipótesis de recurso relativamente completo, el problema (4.7) debe tener un máximo finito para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}$ y $\mathbf{x}_0 \in X_0$. Como W está en su formato estándar y todo problema lineal estándar factible tiene al menos un punto extremo [19], denotando por $\{\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^K\}$ a los puntos extremos de W , el problema (4.7) es equivalente maximizar su función objetivo lineal sobre los puntos extremo de W , es decir,

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_0) &= \max_{\mathbf{y}} \quad (\mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{y} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{y} \in \text{conv}\{\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^K\}, \\ &= \max_{i=1, \dots, K} (\mathbf{y}^i)^\top (\mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

de donde concluimos el resultado. □

Observación IV.4. *Teniendo en cuenta (4.6) la función valor puede reescribirse como*

$$V(\mathbf{x}_0) = \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}} V(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi})$$

Teniendo en cuenta la formulación (4.3) y (4.7), la función valor adopta la siguiente formulación

$$V(\mathbf{x}_0) = \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}} \max_{\mathbf{y} \in W} (\mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{y}, \quad (4.9)$$

cuyo objetivo es una función bilineal en $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{y}$.

Proposición IV.5. *La función de valor $V(\mathbf{x}_0)$ es convexa y lineal a trozos en $\mathbf{x}_0$*

Prueba. Intercambiando los operadores de maximización en (4.9) obtenemos

$$V(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{y} \in W} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}} \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{y}, \quad (4.10)$$

Asumiendo que el conjunto de incertidumbre $\mathfrak{U}$ es un politopo, entonces es la cápsula convexa de un número finito de puntos extremos, es decir, $\mathfrak{U} = \text{conv}\{\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^M\}$. Dado que el problema de maximización interna en (4.10) es un problema de optimización lineal sobre la variable $\boldsymbol{\xi}$, el máximo se alcanza en un punto extremo de $\mathfrak{U}$, de manera análoga para el conjunto factible W definido en (4.8). Por lo tanto, podemos reescribir la función de valor como

$$V(\mathbf{x}_0) = \max_{i=1, \dots, M} \max_{j=1, \dots, K} -(\mathbf{y}^j)^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_0 + (\mathbf{D}\boldsymbol{\xi}^i + \mathbf{h})^\top \mathbf{y}^j \quad (4.11)$$

de donde, obtenemos que $V(\cdot)$ es una función convexa y lineal a trozos pues es el máximo de un número finito de funciones lineales. $\square$

El siguiente resultado describe las propiedades de los problemas de optimización lineal robusta de dos etapas.

Proposición IV.6. *El problema de optimización lineal robusta de dos etapas con incertidumbre del lado derecho es un problema de optimización convexa con una función objetivo convexa lineal por partes y una región factible poliédrica, como se muestra a continuación.*

$$\min_{\mathbf{x}_0 \in X_0} \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + \max_{i=1, \dots, M} \max_{j=1, \dots, K} -(\mathbf{y}^j)^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_0 + (\mathbf{D}\boldsymbol{\xi}^i + \mathbf{h})^\top \mathbf{y}^j \right\},$$

el cual se puede reformular como el siguiente programa lineal determinista

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_0, t} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + t \\ \text{s.a.} \quad & (\mathbf{D}\boldsymbol{\xi}^i + \mathbf{h})^\top \mathbf{y}^j \leq t + (\mathbf{y}^j)^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_0 \quad \forall i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, K, \\ & \mathbf{x}_0 \in X_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Observación IV.7. *Note que la formulación funcional (4.2) involucra variables de decisión de dimensión infinita, lo que dificulta su solución, mientras que la formulación anidada (4.4)*

y su reformulación (4.12) proporcionan problemas de optimización en espacios de dimensión finita.

3) Complejidad de los problemas lineales robustos de dos etapas

A continuación detallamos la complejidad de resolver los problemas (4.4) (formulación anidada) y (4.12) (formulación lineal).

- Resolver la reformulación anidada (4.4), implica resolver un problema de minimización de una función convexa lineal a trozos, $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + V(\mathbf{x}_0)$, sujeta a restricciones lineales en $\mathbf{x}_0$, por lo que es necesario poder evaluar la función valor $V(\mathbf{x}_0)$ en cualquier $\mathbf{x}_0 \in X_0$, esto es equivalente a resolver el problema (4.10) cuya función objetivo es bilineal en $\boldsymbol{\xi}$ y $\mathbf{y}$. La región factible de (4.10) consta de restricciones lineales sobre $\boldsymbol{\xi}$ y $\mathbf{y}$ por separado. Tal problema se denomina programa bilineal y la resolución de este tipo de problemas es fuertemente NP-difícil [20]. Además, podemos ver que cualquier programa bilineal se puede reducir a un problema de optimización lineal robusta de dos etapas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \max_{\mathbf{B}^\top \mathbf{y} = \mathbf{g}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}} \mathbf{a}^\top \mathbf{y} + \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\xi} \\ &= \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \min_{\mathbf{B} \mathbf{x} \geq \mathbf{D} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{a}} \mathbf{g}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\xi} \\ &= \min_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}} \left\{ 0 + \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \min_{\mathbf{B} \mathbf{x} \geq \mathbf{D} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{a}} \mathbf{g}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\xi} \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, resolver problemas de optimización robusta lineal de dos etapas es fuertemente NP-difícil.

- La dificultad para resolver la formulación lineal (4.12) radica en el hecho que las partes lineales, $-(\mathbf{y}^j)^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_0 + (\mathbf{D} \boldsymbol{\xi}^i + \mathbf{h})^\top \mathbf{y}^j$, que definen $V(\mathbf{x}_0)$ para cada i, j dados en (4.11), no se conocen de antemano ya que los puntos extremos $\mathbf{y}_j$ de W y $\boldsymbol{\xi}_i$ de $\mathcal{U}$ son desconocidos. Los datos son las restricciones lineales en el conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$ y la región factible W del problema de maximización dual.

Encontrar todos los puntos extremos de un politopo a partir de sus restricciones lineales es un problema computacionalmente difícil. Por ejemplo, determinar el número total de puntos extremos de un politopo es fuertemente NP-difícil [21], esto implica que es poco probable encontrar un algoritmo de tiempo polinomial aún para hallar una solución aproximada. Por lo tanto, formular directamente el programa lineal (4.12) es computacionalmente difícil, a menos que el número de puntos extremos de $\mathcal{U}$ y W sea pequeño.

Aún así, existe la posibilidad de desarrollar buenos algoritmos que permitan resolver este tipo de problemas.

4) Algoritmos basados en oráculos

A continuación definimos algunos conceptos básicos, utilizados en los métodos numéricos para resolver problemas de optimización. Los algoritmos se suelen diseñar para resolver una familia de problemas con estructura común (en el presente contexto, familia de problemas lineales robustos de dos etapas) en lugar de una instancia específica de un problema, de acuerdo a la siguiente definición

Definición IV.8. *Una familia de problemas lineales robustos de dos etapas, denotado por $\mathcal{F}$, es el conjunto de problemas que tienen la formulación (4.5), cuyos datos son $(X_0, \mathfrak{U}, \mathbf{c}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D})$, donde, X_0 y $\mathfrak{U}$ son politopos.*

Definición IV.9 (Oráculo). *Un oráculo $\mathcal{O}$ para la familia de problemas $\mathcal{F}$ se define como una función que toma como datos de entrada $(X_0, \mathfrak{U}, \mathbf{c}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D})$ y genera un valor $V(\mathbf{x}_0)$ y un subgradiente $\partial V(\mathbf{x}_0)$ de $V(\cdot)$ en $\mathbf{x}_0$.*

Si el valor de $V(\mathbf{x}_0)$ y de $\partial V(\mathbf{x}_0)$ son exactos, que dice que el oráculo $\mathcal{O}$ es exacto; en caso contrario diremos que $\mathcal{O}$ es un oráculo inexacto.

Definición IV.10 (Solución ϵ -óptimo). *Dado un problema de optimización, una solución $\mathbf{x}$ es ϵ -óptima si cumple la siguiente desigualdad.*

$$f(\mathbf{x}) \leq f^* + \epsilon,$$

donde, $f(\mathbf{x})$ es el valor de la función objetivo para la solución $\mathbf{x}$, f^ es el valor óptimo de la función objetivo que buscamos minimizar y $\epsilon \geq 0$, es un valor pequeño que nos indica cuánto nos alejamos del óptimo.*

La noción de ϵ -óptimo permite caracterizar puntos que están cerca de ser óptimos ya que, en general, en la práctica los algoritmos sólo pueden calcular soluciones subóptimas.

Definición IV.11 (Algoritmo basado en oráculos). *Un algoritmo para resolver problemas de la familia $\mathcal{F}$ usando el oráculo $\mathcal{O}$ es un conjunto de reglas que genera una secuencia de puntos $\mathbf{x}_0^1, \mathbf{x}_0^2, \dots$, para cada problema en $\mathcal{F}$ de manera que en cualquier punto $\mathbf{x}_0^k$ el algoritmo utiliza toda la información obtenida del oráculo hasta el paso k y produce un nuevo punto $\mathbf{x}_0^{k+1}$, es decir, $\mathbf{x}_0^{k+1}(\mathbf{x}_0^1, \mathcal{O}(\mathbf{x}_0^1); \dots; \mathbf{x}_0^k, \mathcal{O}(\mathbf{x}_0^k))$, en un número finito de pasos, el algoritmo termina con un punto que es factible y ϵ -óptimo para el problema.*

Ahora procederemos a describir un par de algoritmos basados en oráculos que nos permitirá resolver los problemas de optimización lineal robusta de dos etapas: el algoritmo de descomposición de Benders y su variante denominado generación de columnas.

5) Descomposición de Benders

El algoritmo de descomposición de Benders fue desarrollado para resolver problemas de programación lineal entera mixta [22]. Comenzaremos aplicando este algoritmo para resolver problemas de optimización lineal robusto de dos etapas con un oráculo exacto que proporcione el valor y un subgradiente de la función valor (4.3). Asumiremos que conocemos una cota inferior L para el valor objetivo del problema de la segunda etapa para cualquier $\mathbf{x}_0 \in X_0$ (existe bajo la hipótesis de que el problema de la segunda etapa tenga un recurso relativamente completo y que $X_0, \mathcal{U}, Y$ son no vacíos y compactos) .

Podemos iniciar el Algoritmo 1 resolviendo el problema de la primera etapa

$$\min_{\mathbf{x}_0 \in X_0} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0.$$

Denotando una solución óptima como $\mathbf{x}_0^{-1}$, procedemos a evaluar el oráculo $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0^{-1})$ para encontrar una desigualdad válida en la forma (4.13b) y actualizamos la cota superior. Luego, podemos iniciar con el ciclo mientras.

Algoritmo 1: Benders para optimización lineal robusta de dos etapas

Entrada: Una cota inferior L en la función de valor

Salida : Una solución ϵ -óptima

- 1: Inicializar: $i \leftarrow -1$
 - 2: Establecer: CotaInferior $\leftarrow -\infty$, CotaSuperior $\leftarrow +\infty$
 - 3: **mientras** CotaSuperior – CotaInferior $> \epsilon$ **hacer**
 - 4: resolver el problema maestro

$$v^i = \min_{\mathbf{x}_0 \in X_0, t \geq L} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + t \quad (4.13a)$$

$$\text{s.a. } (D\xi^j + \mathbf{h})^\top \mathbf{y}^j \leq t + (\mathbf{y}^j)^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{x}_0, j = 0, 1, \dots, i \quad (4.13b)$$

Denote una solución óptima por $\mathbf{x}_0^i$ y el valor objetivo óptimo por v^i .
 - 5: Evaluar: $(V^{i+1}, \xi^{i+1}, \mathbf{y}^{i+1}) \leftarrow \mathcal{O}(\mathbf{x}_0^i)$
 - 6: Actualizar CotaInferior $\leftarrow v^i$
 - 7: Actualizar CotaSuperior $\leftarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0^i + V^{i+1}$
 - 8: Actualizar $i \leftarrow i + 1$
 - 9: **fin**
 - 10: Salida $\mathbf{x}_0^i$.
-

El problema de optimización (4.13) aproxima la función valor $V(\cdot)$ desde abajo mediante una función lineal convexa por partes en (4.13b). A estas desigualdades lineales las llamamos desigualdades válidas o cortes de Benders para aproximar $V(\cdot)$. El problema (4.13) es denominado problema maestro, y el problema resuelto por el oráculo es denominado subproblema. Resolviendo el problema maestro (4.13) se obtiene una solución $\mathbf{x}_0^i$, que es candidata a solución

óptima de primera etapa. Luego, el algoritmo consulta al oráculo resolviendo el subproblema $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0^i)$ en $\mathbf{x}_0^i$ para obtener una nueva desigualdad válida con nuevos puntos extremos $\boldsymbol{\xi}^{i+1} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{y}^{i+1} \in W$. Esta nueva desigualdad válida inferior se aproxima a $V(\cdot)$ y se agrega al problema maestro en la siguiente iteración.

El oráculo también nos da el valor óptimo V^{i+1} de la función de segunda etapa $V(\cdot)$ evaluada en $\mathbf{x}_0^i$ que, al combinarse con el costo de la primera etapa $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0^i$, da una cota superior al costo óptimo total del problema de optimización lineal robusta de dos etapas.

Oráculo exacto

El oráculo exacto resuelve el problema de la segunda etapa en una decisión dada de la primera etapa. El Algoritmo 2 brinda los detalles del problema del oráculo.

Algoritmo 2: Oráculo exacto $\mathcal{O}$

Entrada: Una decisión de primera etapa $\mathbf{x}_0 \in X_0$

Salida : El costo óptimo $\bar{V}$ del problema de la segunda etapa (4.3) y una desigualdad válida en la forma de (3.2.19b)

1: Resolver el subproblema

$$\begin{aligned} \bar{V} = \max_{\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}} & (\mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{y} \\ \text{s.a. } & \mathbf{B}^\top \mathbf{y} = \mathbf{g}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \\ & \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Denote una solución óptima por $\boldsymbol{\xi}^*, \mathbf{y}^*$.

2: Generar un corte válido para $V(\cdot)$ dado por $(\mathbf{D}\boldsymbol{\xi}^* + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)\mathbf{y}^* \leq t$.

3: Salida $(\bar{V}, \boldsymbol{\xi}^*, \mathbf{y}^*)$.

El algoritmo de descomposición de Benders con el oráculo exacto siempre termina en un número finito de iteraciones, en efecto, como las soluciones óptimas devueltas por el oráculo, $\boldsymbol{\xi}^*, \mathbf{y}^*$ son los puntos extremos de $\mathcal{U}$ y W , respectivamente, entonces dado que estos conjuntos son politopos con un número finito de puntos extremos, el algoritmo eventualmente enumeraría todos los puntos extremos, terminando en un número finito de pasos.

Oráculo inexacto

Debido a la complejidad de evaluar la función valor $V(x_0)$, un problema clasificado como NP-difícil, el uso de un oráculo exacto puede resultar ineficiente. En su lugar, es más práctico emplear un oráculo inexacto que proporcione una solución subóptima al problema de

la segunda etapa. El Algoritmo 3 ofrece esta alternativa, utilizando el método de direcciones alternas (ADM, por sus siglas en inglés). Este método, en cada iteración, fija una de las variables mientras maximiza la otra. Dado que la función objetivo es bilineal, al fijar una variable, el objetivo se convierte en una función lineal respecto a la otra. De este modo, en cada iteración, el método resuelve un problema de optimización lineal

Además, el ADM produce una secuencia de valores no decrecientes

$$V_{\mathbf{y}}^i \leq V_{\xi}^i \leq V_{\mathbf{y}}^{i+1} \leq V_{\xi}^{i+1} \leq \dots$$

Por lo tanto, dado que el problema de la segunda etapa (4.3) siempre tiene una solución óptima para cualquier $\mathbf{x}_0$, el método de direcciones alternas garantiza su terminación. Al finalizar, identifica el par $(\mathbf{y}^i, \xi^i)$, donde cada elemento es un punto extremo del politopo correspondiente. Sin embargo, es posible que esta solución represente únicamente un máximo local del problema de la segunda etapa, es decir, $V_{\xi}^i \leq V(\mathbf{x}_0)$. A pesar de ello, el corte generado es siempre válido para $V(\cdot)$.

Se puede reemplazar el oráculo exacto $\mathcal{O}$ del Algoritmo 1 por el oráculo inexacto $\mathcal{O}_{ADM}$ descrito en el Algoritmo 3. Siguiendo un razonamiento similar sobre la enumeración de los puntos extremos de $\mathcal{U}$ y W , el algoritmo de Benders garantiza su terminación en un número finito de pasos. Sin embargo, es importante destacar que la solución obtenida, x_0 puede ser subóptima.

Algoritmo 3: Oráculo inexacto $\mathcal{O}_{ADM}$

Entrada: Una decisión de primera etapa $\mathbf{x}_0 \in X_0$ y un punto extremo $\xi^0 \in \mathcal{U}$

Salida : Una solución óptima local del problema de la segunda etapa (4.3) y una aproximación lineal inferior de $V(\cdot)$.

- 1: Inicializar: $i \leftarrow 0, V_{\mathbf{y}}^0 \leftarrow -\infty, V_{\xi}^0 \leftarrow \infty$
 - 2: **mientras** $V_{\xi}^i - V_{\mathbf{y}}^i > \epsilon$ **hacer**
 - 3: Resolver $\max_{\mathbf{y}} \{(\mathbf{D}\xi^i + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{y} : \mathbf{B}^\top \mathbf{y} = \mathbf{g}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$
 para obtener el costo óptimo $V_{\mathbf{y}}^{i+1}$ y una solución óptima $\mathbf{y}^{i+1}$.
 - 4: Resolver $\max_{\xi \in \mathcal{U}} (\mathbf{D}\xi + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{y}^{i+1}$
 para obtener el costo óptimo V_{ξ}^{i+1} y la solución óptima ξ^{i+1}
 - 5: $i \leftarrow i + 1$
 - 6: **fin**
 - 7: Salida $V_{\xi}^i, \xi^i, \mathbf{y}^i$ y una aproximación lineal inferior $(\mathbf{D}\xi^i + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{y}^i \leq t$.
-

6) Generación de columnas y restricciones

A diferencia del Algoritmo de Benders que en cada iteración genera un corte de Benders para la función valor, El Algoritmo 4 genera muchos cortes de Benders en cada iteración. Por lo que se puede considerar como una aceleración del algoritmo de Benders.

De las formulaciones (4.5), (4.3) y (4.6) tenemos que

$$\min_{\mathbf{x}_0 \in X_0} \left\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} V(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_0) \right\}$$

Aplicando la reformulación del epígrafo obtenemos

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}_0 \in X_0, t} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + t \\ & \text{s.a. } V(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_0) \leq t \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U} \\ & = \min_{\mathbf{x}_0 \in X_0, t} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + t \\ & \text{s.a. } \min_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{g}^\top \mathbf{x} : \mathbf{B}\mathbf{x} \geq \mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \} \leq t \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Considerando $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^M$ puntos extremos de $\mathcal{U}$ y $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^M$ las variables correspondientes asociadas con estos puntos extremos obtenemos la siguiente reformulación

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}_0 \in X_0, t, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^M} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + t \\ & \text{s.a. } \mathbf{g}^\top \mathbf{x}^i \leq t \quad \forall i = 1, \dots, M \\ & \quad \mathbf{D}\boldsymbol{\xi}^i + \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{B}\mathbf{x}^i \quad \forall i = 1, \dots, M \end{aligned} \tag{4.14}$$

Comparando (4.12) con la nueva reformulación del problema de optimización robusta lineal de dos etapas (4.14) tenemos las siguientes diferencias:

- La formulación (4.12) tiene como variables a $\mathbf{x}_0$ y t mientras que (4.14) tiene M variables adicionales $\mathbf{x}^i$ que son variables de segunda etapa para cada escenario del parámetro incierto $\boldsymbol{\xi}^i$.
- La formulación (4.12) involucra los puntos extremos $\mathbf{y}^i$ del politopo W asociado con el problema dual, mientras la nueva formulación involucra las variables primales $\mathbf{x}^i$.
- El número de restricciones lineales de la formulación (4.12) es KM , donde, K es el número de puntos extremos en el politopo W , mientras el número de restricciones lineales en (4.14) es $(m+1)M$, donde, m es el número de filas de la matriz B . En la práctica m suele ser mucho menor que K .

De la comparación anterior podemos concluir que la nueva formulación (4.14) tiene muchas más variables y menos restricciones que la formulación (4.12). El Algoritmo 4, está basado en la nueva reformulación (4.14). Para una solución candidata de primera etapa $\mathbf{x}_0$, se identifica el peor de los casos $\boldsymbol{\xi}^i \in \mathcal{U}$ para el problema de segunda etapa y genera un conjunto de nuevas restricciones para $\boldsymbol{\xi}^i$, agregando nuevas restricciones y las nuevas variables asociadas $\mathbf{x}^i$. A diferencia del Algoritmo 1 que agrega solo restricciones, el Algoritmo 4, agrega nuevas restricciones y las nuevas variables asociadas $\mathbf{x}^i$.

En el paso 5 del Algoritmo 4, el oráculo exacto funciona como en el Algoritmo 1 con la diferencia que ahora también debería devolver una solución óptima del problema de minimización interna (4.6). El oráculo inexacto, Algoritmo 3, también puede ser utilizado.

Algoritmo 4: Generación de columnas y restricciones

Entrada: Una cota inferior L en la función de valor

Salida : Una solución ϵ -óptima $\mathbf{x}_0$ para (4.4)

- 1: Inicializar: $i \leftarrow 0$
- 2: Establecer: $\text{CotaInferior} \leftarrow -\infty$, $\text{CotaSuperior} \leftarrow +\infty$
- 3: **mientras** $\text{CotaSuperior} - \text{CotaInferior} > \epsilon$ **hacer**
- 4: resolver el problema maestro

$$\begin{aligned}
 v^i = \min_{\mathbf{x}_0 \in X_0, t \geq L, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^i} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 + t \\
 \text{s.a. } & \mathbf{g}^\top \mathbf{x}^j \leq t, \quad \forall j = 1, \dots, i, \\
 & D\boldsymbol{\xi}^j + \mathbf{h} - A\mathbf{x}_0 \leq B\mathbf{x}^j, \quad \forall j = 1, \dots, i.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

- 5: Denote una solución óptima por $\mathbf{x}_0^i$ y el valor objetivo óptimo por v^i .
 - 6: Consulta el oráculo: Evaluar: $(V^{i+1}, \boldsymbol{\xi}^{i+1}, \mathbf{x}^{i+1}) \leftarrow \mathcal{O}(\mathbf{x}_0^i)$
 - 7: Actualizar $\text{CotaInferior} \leftarrow v^i$
 - 8: Actualizar $\text{CotaSuperior} \leftarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0^i + V^{i+1}$
 - 9: Actualizar $i \leftarrow i + 1$
 - 9: **fin**
 - 10: Salida $\mathbf{x}_0^i$.
-

B. Modelos de optimización robusta ajustable

En esta sección se presentan modelos de optimización robusta ajustable aplicados al sector eléctrico, que consideran diversas fuentes de incertidumbre. Se describen dos tipos principales de incertidumbre: Incertidumbre a largo plazo, relacionada con el crecimiento de la demanda de electricidad de un año a otro e incertidumbre a corto plazo, asociada a la producción de energía renovable, que depende de condiciones climáticas variables a lo largo de las horas del día. Posteriormente, se detalla la formulación de estos modelos y los métodos

para resolverlos. Finalmente, se describe un modelo general enfocado en la planificación de la expansión de la transmisión en un sistema eléctrico.

1) Incertidumbre a corto y largo plazo

En el ámbito de planificación energética la incertidumbre afecta diversos parámetros. Dependiendo de la naturaleza de la incertidumbre es necesario representarla de manera adecuada dentro de un modelo de optimización.

La incertidumbre a corto plazo se representa convenientemente mediante escenarios. Dependiendo del sistema eléctrico, un escenario puede representar una hora, un día o una semana (estos dos últimos con pasos por horas). La incertidumbre a corto plazo comprende:

- Variabilidad de la demanda a lo largo de las horas del día.
- Producción de unidades generadoras dependientes del clima, por ejemplo la producción de las unidades de energía solar y eólica cambia de manera impredecible a lo largo de las horas de cada día.
- Fallas de equipos, incluye las líneas de transmisión y las unidades generadoras que pueden fallar en cualquier momento del día.

La incertidumbre a largo plazo se representa de forma conveniente mediante conjuntos robustos que suelen construirse utilizando datos históricos. Dentro de la incertidumbre a largo plazo tenemos:

- Crecimiento de la demanda máxima, es decir, el cambio en la demanda máxima en diferentes lugares de un año a otro en todo el sistema eléctrico.
- Costo de inversión en líneas de transmisión, que suelen conocerse al inicio del horizonte de estudio, pero cambian a lo largo del mismo.
- Costo de inversión en unidades generadoras, se conocen al inicio del horizonte de estudio, pero varían a lo largo del mismo.
- Costos de combustible, de la misma forma, se conocen al inicio del horizonte de estudio, pero cambian a lo largo del mismo.
- Cambios regulatorios, el marco regulativo que rige el sistema eléctrico considerado puede cambiar a lo largo del horizonte de estudio.

2) Formulación y solución del modelo

Los modelos de optimización estocástica robusta ajustable (ARSO por sus siglas en inglés) combinan la protección robusta (relacionada con la seguridad del sistema y son decisiones difíciles de cambiar) y un modelo estocástico (relacionada con un riesgo limitado y cuyas decisiones son fáciles de modificar). En el Capítulo II vimos que un problema ARSO tiene la siguiente forma

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \min_{\mathbf{y} \in Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\zeta}}[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})]. \quad (4.16)$$

Este problema involucra tres niveles.

- El primer nivel, con variables de decisión $\mathbf{x}$, representa una estrategia de planificación previa a la realización de la incertidumbre busca minimizar la función objetivo.
- El segundo nivel, con variables $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$, representa la realización de la incertidumbre a largo plazo de la peor manera posible dentro de un conjunto de incertidumbre, por lo que se busca maximizar la función objetivo.
- El tercer nivel, con variables $\mathbf{y} \in Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})$, representa las acciones de mitigación por parte del operador una vez que se realice la incertidumbre a largo plazo e involucra una serie de condiciones operativas inciertas a corto plazo representadas a través de escenarios por el vector de parámetros $\boldsymbol{\zeta}$. Por tanto, el tercer nivel busca minimizar la función objetivo.

La función objetivo que se minimizará es el valor esperado del objetivo f sobre los parámetros de incertidumbre a corto plazo $\boldsymbol{\zeta}$ bajo la peor realización de incertidumbre a largo plazo $\boldsymbol{\xi}$ dentro del conjunto robusto $\mathcal{U}$.

La solución del problema (4.16) generalmente se basa en tres pasos:

1. Reformular el problema de minimización de tercer nivel aplicando dualidad, dado que el problema de tercer nivel es un problema de minimización, su problema dual será un problema de maximización.
2. Fusionar el problema de segundo nivel que es un problema de maximización y el problema dual obtenido en el tercer nivel, que también es un problema de maximización.
3. Resolver mediante descomposición el problema resultante de dos niveles que consiste en el problema de primer nivel y el problema fusionado..

3) Planificación de expansión de transmisión

En esta sección describimos un modelo de optimización estocástica robusta ajustable de dos etapas para la planificación de expansión de la transmisión. Las decisiones de inversión están relacionadas con la construcción de nuevas líneas de transmisión. La incertidumbre a largo plazo considerada incluye: demanda pico, disponibilidad estocástica de la capacidad de producción y la capacidad de producción convencional disponible, en un periodo de un año. La incertidumbre a corto plazo incluye: la variabilidad de la demanda a lo largo de las horas del día y la generación de producción dependiente del clima a lo largo de las horas del día [11].

El siguiente ejemplo ilustra un caso simple, que servirá para comprender mejor el caso general.

Ejemplo IV.12. *Un planificador de expansión de transmisión tiene la opción de construir solo una de dos líneas de transmisión alternativas de capacidad 2 o 4 para conectar los nodos eléctricos 1 y 2. El costo unitario de construcción de las líneas de transmisión es 1. En el nodo 1 se dispone de un generador de capacidad ilimitada y costo unitario de producción de 5, mientras que en el nodo 2 se dispone de otro generador de capacidad ilimitada y costo unitario de producción de 10. En el año objetivo, el pico de la demanda ubicado en el nodo 2 puede tomar únicamente dos valores, 3 o 5. Cualquiera que sea la realización de la demanda pico, se deben considerar dos condiciones de operación (escenarios): demanda pico 1 con probabilidad 1/4, y demanda pico 1/2 con probabilidad 3/4.*

Si x representa la capacidad de la línea de transmisión a construir, d la demanda pico desconocida, $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}$ la producción de las unidades en los nodos 1 y 2 respectivamente, en el escenario 1 (demanda d), y $y_1^{(2)}, y_2^{(2)}$, la producción de las unidades en los nodos 1 y 2, respectivamente, en el escenario 2 (demanda $\frac{1}{2}d$), un modelo de optimización para que el planificador de transmisión decida qué línea de transmisión construir es:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{2,4\}} \quad & \max_{d \in \{3,5\}} \quad \min_{\substack{y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \geq 0 \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)} \geq 0}} \quad z = 1x + \frac{1}{4} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{3}{4} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 1d \\ & y_1^{(1)} \leq x \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \frac{1}{2}d \\ & y_1^{(2)} \leq x \end{aligned}$$

Dado su simplicidad, el problema se puede resolver mediante enumeración.

- Consideremos primero que el planificador construye la línea de capacidad $x = 2$. Luego,

el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{d \in \{3,5\}} \quad & \min_{\substack{y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \geq 0 \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)} \geq 0}} \quad z = 2 + \frac{1}{4} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{3}{4} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 1d \\ & y_1^{(1)} \leq 2 \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \frac{1}{2}d \\ & y_1^{(2)} \leq 2 \end{aligned}$$

Para resolver este problema consideremos los dos valores para la demanda pico d , 3 y 5.

- Si la demanda pico es $d = 3$ el problema a resolver es

$$\begin{aligned} \min_{\substack{y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \geq 0 \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)} \geq 0}} \quad & z = 2 + \frac{1}{4} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{3}{4} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 3 \\ & y_1^{(1)} \leq 2 \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \frac{3}{2} \\ & y_1^{(2)} \leq 2, \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1^{(1)} = 2$, $y_2^{(1)} = 1$, $y_1^{(2)} = \frac{3}{2}$, $y_2^{(2)} = 0$ y $z = 12.625$.

- Si la demanda pico es $d = 5$ el problema a resolver es

$$\begin{aligned} \min_{\substack{y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \geq 0 \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)} \geq 0}} \quad & z = 2 + \frac{1}{4} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{3}{4} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 5 \\ & y_1^{(1)} \leq 2 \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \frac{5}{2} \\ & y_1^{(2)} \leq 2, \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1^{(1)} = 2$, $y_2^{(1)} = 3$, $y_1^{(2)} = 2$, $y_2^{(2)} = \frac{1}{2}$ y $z = 23.25$. Teniendo en cuenta los resultados anteriores y el hecho de que en este nivel se busca el costo máximo (realización de la incertidumbre a largo plazo), la solución en el caso de $x = 2$ es $d = 5$ y $z = 23.25$.

- Consideremos ahora que el planificador construye la línea de capacidad $x = 4$. Luego, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{d \in \{3,5\}} \quad & \min_{\substack{y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \geq 0 \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)} \geq 0}} \quad z = 4 + \frac{1}{4} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{3}{4} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 1d \\ & y_1^{(1)} \leq 4 \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \frac{1}{2}d \\ & y_1^{(2)} \leq 4 \end{aligned}$$

Para resolver este problema consideremos los dos valores para la demanda pico d , 3 y 5.

- Si la demanda pico es $d = 3$ el problema a resolver es

$$\begin{aligned} \min_{\substack{y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \geq 0 \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)} \geq 0}} \quad & z = 4 + \frac{1}{4} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{3}{4} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 3 \\ & y_1^{(1)} \leq 4 \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \frac{3}{2} \\ & y_1^{(2)} \leq 4, \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1^{(1)} = 3, y_2^{(1)} = 0, y_1^{(2)} = \frac{3}{2}, y_2^{(2)} = 0$ y $z = 13.375$.

- Si la demanda pico es $d = 5$ el problema a resolver es

$$\begin{aligned} \min_{\substack{y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \geq 0 \\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)} \geq 0}} \quad & z = 4 + \frac{1}{4} \left(5y_1^{(1)} + 10y_2^{(1)} \right) + \frac{3}{4} \left(5y_1^{(2)} + 10y_2^{(2)} \right) \\ \text{s.a.} \quad & y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 5 \\ & y_1^{(1)} \leq 4 \\ & y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \frac{5}{2} \\ & y_1^{(2)} \leq 4, \end{aligned}$$

cuya solución es $y_1^{(1)} = 4, y_2^{(1)} = 1, y_1^{(2)} = \frac{5}{2}, y_2^{(2)} = 0$ y $z = 20.875$.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y el hecho de que en este nivel se persigue el coste máximo, la solución en el caso de $x = 4$ es $d = 5$ y $z = 20.875$.

Finalmente, considerando las dos alternativas de inversión y que el planificador busca el costo mínimo, la solución es $x = 4$, $d = 5$, $y_1^{(1)} = 4$, $y_2^{(1)} = 1$, $y_1^{(2)} = \frac{5}{2}$, $y_2^{(2)} = 0$ y $z = 20.875$. Concluimos que el planificador construye la línea de transmisión más grande ($x = 4$) para estar protegido contra el alto costo del generador en el nodo 2.

Descripción del modelo general

Tomando como referencia [11], comenzaremos introduciendo las notaciones empleadas en la formulación del modelo.

Índices y conjuntos

c	Unidades convencionales.
d	Demandas.
n	Nodos.
s	Unidades estocásticas.
ℓ	Líneas de transmisión.
$s(\ell)$	Nodo fuente de la línea de transmisión ℓ .
$r(\ell)$	Nodo receptor de la línea de transmisión ℓ .
ω	Escenarios de operación.
A_z^C	Conjunto de unidades convencionales en la zona z .
A_z^D	Conjunto de demandas en la zona z .
A_z^S	Conjunto de unidades estocásticas en la zona z .
A^Z	Conjunto de todas las zonas.
Ω^C	Conjunto de todas las unidades convencionales.
Ω_n^C	Conjunto de unidades convencionales ubicadas en el nodo n .
Ω^D	Conjunto de todas las demandas.
Ω_n^D	Conjunto de demandas ubicadas en el nodo n .
Ω^G	Conjunto de todas las unidades
Ω^L	Conjunto de todas las líneas de transmisión.
Ω^{L^c}	Conjunto de líneas de transmisión candidatas. $\Omega_{L^c}^L := \Omega^L \setminus \Omega^{L^c}$
Ω^N	Conjunto de todos los nodos.
Ω^S	Conjunto de todas las unidades estocásticas.
Ω_n^S	Conjunto de unidades estocásticas ubicadas en el nodo n .
Ω^W	Conjunto de todos los escenarios.

Variables y constantes del primer nivel

x_ℓ	Variable binaria. Es igual a 1 si se construye la línea y 0 en otro caso.
I_ℓ	Costo de inversión anual de la línea de transmisión ℓ (constante).

P^{Inv} Presupuesto de inversión para la construcción de nuevas líneas (constante).

Variables y constantes del segundo nivel

Variables:

$\bar{D}_d$ Carga de potencia máxima futura de la demanda d (MW).

$\bar{y}_c^C$ Capacidad futura de la unidad convencional c (MW).

$\bar{y}_s^S$ Capacidad futura de la unidad estocástica s (MW).

Constantes:

$\bar{D}_d^{esp}$ Nivel esperado de la potencia pico futura para la demanda d (MW).

$\bar{D}_d^{max}$ Cota superior de la potencia pico futura para la demanda d (MW).

$\bar{P}_s^{Sesp}$ Nivel esperado de la capacidad futura de la unidad estocástica s (MW).

$\bar{P}_s^{Smin}$ Cota inferior para la capacidad futura de la unidad estocástica s (MW).

$\bar{P}_c^{Cesp}$ Nivel esperado de la capacidad futura de la unidad convencional c (MW).

$\bar{P}_c^{Cmin}$ Cota inferior para la capacidad futura de la unidad convencional c (MW).

Γ_z^S Parámetro de presupuesto de incertidumbre para las unidades estocásticas en la zona z .

Γ_z^C Parámetro de presupuesto de incertidumbre para las unidades convencionales en la zona z .

Γ_z^D Parámetro de presupuesto de incertidumbre para las demandas en la zona z .

Variables y constantes del tercer nivel

Variables:

f_ℓ^ω Flujo de potencia a través de la línea de transmisión ℓ en el escenario ω (MW).

$y_s^{S\omega}$ Generación de energía de la unidad estocástica s en el escenario ω (MW).

$y_c^{C\omega}$ Generación de energía de la unidad convencional c en el escenario ω (MW).

$y_d^{U\omega}$ Energía no servida de la demanda d en el escenario ω (MW).

θ_n^ω Ángulo de voltaje en el nodo n en el escenario ω (rad).

Constantes:

C_c^S Costo de producción de la unidad estocástica s (\$/MWh).

C_c^C Costo de producción de la unidad convencional c (\$/MWh).

C_d^U Costo de la energía no servida para la demanda d (\$/MWh).

$e_s^{S\omega}$ Coeficiente de disponibilidad de unidades de producción estocásticas s en el escenario ω .

$e_c^{C\omega}$ Coeficiente asociado a la disponibilidad de producción de la unidad c en el

	escenario ω .
$e_d^{D\omega}$	Coficiente asociado al nivel de demanda d en el escenario ω .
σ^ω	Peso del escenario ω .

Otras constantes

b_ℓ	Susceptancia de la línea de transmisión ℓ (S).
$f_\ell^{\max}$	Capacidad de la línea de transmisión ℓ (MW).
β	Parámetro para hacer comparable la inversión y el costo de operación (horas).

Formulación

La formulación para el problema de expansión de la transmisión esta dada por

$$\min_{\mathcal{X}_1} \max_{\mathcal{X}_2} \min_{\mathcal{X}_3} f(x_{\Omega^L+}, y_{\Omega^S}^{Sw}, y_{\Omega^C}^{Cw}, y_{\Omega^D}^{Uw}) \quad (4.17)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{x_\ell \in \Omega^{L^c}} I_\ell x_\ell \leq P^{\text{Inv}} \quad (4.18)$$

$$x_\ell \in \{0, 1\} : \forall x_\ell \in \Omega^{L^c}; \quad x_\ell = 1 : \forall x_\ell \in \Omega_{L^c}^L \quad (4.19)$$

$$\text{s.a.} \quad \bar{P}_s^{\text{Smin}} \leq \bar{y}_s^S \leq \bar{P}_s^{\text{Sexp}}, \quad \forall s \in \Omega^S \quad (4.20)$$

$$\sum_{s \in \Lambda_z^S} \frac{\bar{P}_s^{\text{Sexp}} - \bar{y}_s^S}{\bar{P}_s^{\text{Sexp}} - \bar{P}_s^{\text{Smin}}} \leq \Gamma_z^S, \quad \forall z \in \Lambda^Z \quad (4.21)$$

$$\bar{P}_c^{\text{Cmin}} \leq \bar{y}_c^C \leq \bar{P}_c^{\text{Cexp}}, \quad \forall c \in \Omega^C \quad (4.22)$$

$$\sum_{c \in \Lambda_z^C} \frac{\bar{P}_c^{\text{Cexp}} - \bar{y}_c^C}{\bar{P}_c^{\text{Cexp}} - \bar{P}_c^{\text{Cmin}}} \leq \Gamma_z^C, \quad \forall z \in \Lambda^Z \quad (4.23)$$

$$\bar{D}_d^{\text{esp}} \leq \bar{D}_d \leq \bar{D}_d^{\text{max}}, \quad \forall d \in \Omega^D \quad (4.24)$$

$$\sum_{d \in \Lambda_z^D} \frac{\bar{D}_d - \bar{D}_d^{\text{esp}}}{\bar{D}_d^{\text{max}} - \bar{D}_d^{\text{esp}}} \leq \Gamma_z^D, \quad \forall z \in \Lambda^Z \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & \sum_{s \in \Omega_n^S} y_s^{Sw} + \sum_{c \in \Omega_n^C} y_c^{Cw} + \sum_{\ell: r(\ell) \in \Omega_n} f_\ell^\omega - \sum_{\ell: s(\ell) \in \Omega_n} f_\ell^\omega \\ & = \sum_{d \in \Omega_n^D} e_d^{D\omega} \bar{D}_d - \sum_{d \in \Omega_n^D} y_d^{U\omega}, \quad \forall (n, \omega) \in \Omega^N \cdot \Omega^W \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$f_\ell^\omega = x_\ell b_\ell \left(\theta_{s(\ell)}^\omega - \theta_{r(\ell)}^\omega \right), \quad \forall (\ell, \omega) \in \Omega^L \cdot \Omega^W \quad (4.27)$$

$$-f_\ell^{\max} \leq f_\ell^\omega \leq f_\ell^{\max}, \quad \forall (\ell, \omega) \in \Omega^L \cdot \Omega^W \quad (4.28)$$

$$0 \leq y_s^{Sw} \leq e_s^{Sw} \bar{y}_s^S, \quad \forall (s, \omega) \in \Omega^S \cdot \Omega^W \quad (4.29)$$

$$0 \leq y_c^{Cw} \leq e_c^{Cw} \bar{y}_c^C, \quad \forall (c, \omega) \in \Omega^C \cdot \Omega^W \quad (4.30)$$

$$0 \leq y_d^{U\omega} \leq e_d^{D\omega} \bar{D}_d, \quad \forall (d, \omega) \in \Omega^D \cdot \Omega^W \quad (4.31)$$

$$-\pi \leq \theta_n^\omega \leq \pi, \quad \forall (n, \omega) \in \Omega^N \setminus n = \text{ref.} \cdot \Omega^W \quad (4.32)$$

$$\theta_m^\omega = 0, m = \text{ref.}, \quad \forall \omega \in \Omega^W \quad (4.33)$$

donde, la notación $\forall(a, b) \in \Omega^1 \cdot \Omega^2$ se utiliza para abreviar $\forall a \in \Omega^1, \forall b \in \Omega^2$,

$$\mathcal{X}_1 = \{x_\ell \in \Omega^{L^c}\}, \quad (4.34)$$

$$\mathcal{X}_2 = \{(\bar{y}_s^S, \bar{y}_c^C, \bar{D}_d) \mid \forall(s, c, d) \in \Omega^S \cdot \Omega^C \cdot \Omega^D\}, \quad (4.35)$$

$$\mathcal{X}_3 = \{(\bar{y}_s^{S\omega}, \bar{y}_c^{C\omega}, \bar{y}_d^{U\omega}, f_\ell^\omega, \theta_n^\omega) \mid \forall(s, c, d, \ell, n, \omega) \in \Omega^S \cdot \Omega^C \cdot \Omega^D \cdot \Omega^L \cdot \Omega^N \cdot \Omega^W\} \quad (4.36)$$

La función objetivo $f(x_{\Omega^{L^c}}, y_{\Omega^S}^{Sw}, y_{\Omega^C}^{Cw}, y_{\Omega^D}^{Uw})$ viene dada por:

$$\sum_{x_\ell \in \Omega^{L^c}} I_\ell x_\ell + \sum_{\omega \in \Omega^W} \beta \sigma^\omega \left(\sum_{s \in \Omega^S} C_s^S y_s^{S\omega} + \sum_{c \in \Omega^C} C_c^C y_c^{C\omega} + \sum_{d \in \Omega^D} C_d^D y_d^{U\omega} \right)$$

El primer sumando, $\sum_{x_\ell \in \Omega^{L^c}} I_\ell x_\ell$, representa el costo de inversión anual en las líneas de transmisión, mientras que el segundo sumando corresponde al costo de operación esperado considerando diferentes realizaciones de la incertidumbre a corto plazo (disponibilidad de producción de unidades estocásticas, nivel de unidades convencionales y demanda) bajo la peor realización de la incertidumbre a largo plazo (capacidad estocástica instalada, capacidad convencional instalada y demanda pico).

Las restricciones (4.18)-(4.19) pertenecen al problema de primer nivel. La restricción (4.18) establece un límite en el presupuesto de inversión, mientras que las restricciones (4.19) utilizan variables binarias para modelar la construcción de posibles líneas de transmisión.

Las restricciones (4.20)-(4.25) forman parte del problema de segundo nivel. Las restricciones (4.20)-(4.21) definen un presupuesto de incertidumbre para la capacidad disponible de las unidades estocásticas en el año objetivo y limitan este presupuesto a un valor máximo por zona z . El parámetro de presupuesto de incertidumbre Γ_z^S puede variar dentro del intervalo $[0, |A_z^S|]$. Si $A_z^S = 0$, no existe incertidumbre a largo plazo sobre la capacidad estocástica, mientras que si $\Gamma_z^S = |A_z^S|$, se considera máxima incertidumbre para la capacidad estocástica disponible en el año objetivo.

De manera similar, las restricciones (4.22)-(4.23) definen un presupuesto de incertidumbre para la capacidad disponible de las unidades convencionales en el año objetivo, limitado a un valor máximo por zona z . El parámetro del presupuesto Γ_z^C varía dentro del intervalo $[0, |A_z^C|]$. Si $A_z^C = 0$, no hay incertidumbre sobre la capacidad convencional, si $\Gamma_z^C = |A_z^C|$, se considera máxima incertidumbre. Análogamente, en las restricciones (4.24)-(4.25), establecen el presupuesto de incertidumbre para la demanda pico futura en el año objetivo, donde el parámetro Γ_z^D puede variar dentro del intervalo $[0, |A_z^D|]$.

Las restricciones (4.26)-(4.33) corresponden al problema de tercer nivel. Las restricciones (4.26) garantizan el balance de potencia nodal para cada nodo y escenario (incertidumbre

a corto plazo). Las restricciones (4.27) definen los flujos de potencia a través de cada línea y escenario. Las restricciones (4.28) imponen límites a los flujos de potencia por línea y escenario. Las restricciones (4.29) establecen límites al nivel de producción de cada unidad estocástica en cada escenario. Las restricciones (4.30) regulan el nivel de producción de cada unidad convencional en cada escenario. Las restricciones (4.31) limitan la cantidad de demanda desatendida por cada demanda y escenario. Las restricciones (4.32) imponen límites a los ángulos de tensión por cada nodo y escenario. Finalmente, las restricciones (4.33) especifican el nodo de referencia para cada escenario.

En cuanto a las variables de optimización, el conjunto (4.34) contiene las variables asociadas al problema de primer nivel, mientras que los conjuntos (4.35) y (4.36) agrupan las variables correspondientes a los problemas de segundo y tercer nivel, respectivamente.

Observación IV.13. *El problema anterior incluye el conjunto de restricciones no lineales (4.27)*

$$f_\ell^\omega = x_\ell b_\ell \left(\theta_{s(\ell)}^\omega - \theta_{r(\ell)}^\omega \right), \forall \ell \in \Omega^L, \forall \omega \in \Omega^W$$

que complica la solución del problema. Sin embargo este conjunto de restricciones junto con las restricciones (4.28) dados por

$$-f_\ell^{\max} \leq f_\ell^\omega \leq f_\ell^{\max}, \forall \ell \in \Omega^L, \forall \omega \in \Omega^W$$

pueden ser linealizados de la siguiente forma

$$-(1 - x_\ell)M \leq \frac{f_\ell^\omega}{b_\ell} - (\theta_{s(\ell)}^\omega - \theta_{r(\ell)}^\omega) \leq (1 - x_\ell)M, \forall \ell \in \Omega^L, \forall \omega \in \Omega^W, \quad (4.37)$$

$$-x_\ell f_\ell^{\max} \leq f_\ell^\omega \leq x_\ell f_\ell^{\max}, \forall \ell \in \Omega^L, \forall \omega \in \Omega^W \quad (4.38)$$

donde M , es una constante positiva suficientemente grande.

V. Aplicación a un Problema de Energía

A. Caso de estudio

Consideremos un sistema de energía compuesto por tres áreas, con los siguientes datos:

- El nodo 1 alberga un área de generación renovable con una capacidad instalada mínima y futura esperada de 140 y 200 MW, respectivamente y un costo de producción igual a \$2/MWh. El nodo 2 contiene un área de generación convencional con una capacidad instalada mínima y futura esperada de 80 y 100 MW, respectivamente, y un costo de producción de \$20 MWh.
- Ambas áreas de generación (nodo 1 y 2) suministrarán energía a una zona de consumo ubicada en el nodo 3 cuya demanda esperada es de 64 MW y su demanda máxima es 80 MW. El costo de la energía no suministrada en esta área es de \$200/MWh.
- Existen dos posibles líneas de transmisión que podrían conectar cada área de generación con el área de demanda, como se ilustra en la Figura VIII. Cada línea tiene una susceptancia de 100 S y una capacidad de 50 MW. La Línea 1, que conecta la zona de producción renovable y de demanda, tiene un costo de inversión anual de 2 millones de dólares. La Línea 2, que conecta la zona de producción convencional y de demanda, tiene un costo anual de 3 millones de dólares.
- Se asume que no hay límite en el presupuesto de inversión. Se consideran dos escenarios operativos con igual probabilidad de ocurrencia de 0.5 para representar las condiciones de operación futuras en el año objetivo. En el primer escenario se estima una disponibilidad del 75 % de producción renovable, un 100 % de producción convencional y un 50 % de demanda pico. En el segundo escenario se prevee una disponibilidad de un 25 % de procesamiento renovable, un 100 % de producción convencional y un 75 % de demanda pico.

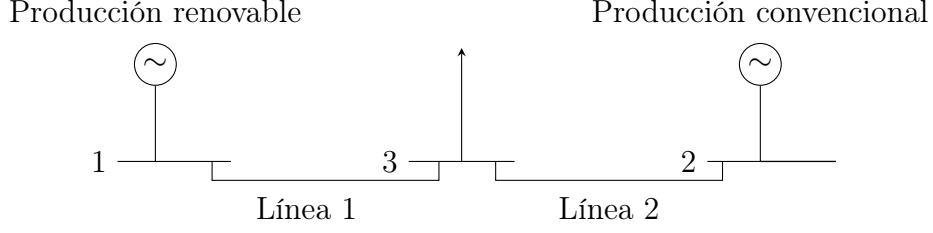


FIGURA VIII. Caso de estudio de la planificación de expansión de transmisión.

1) Formulación del problema

A continuación, damos la formulación del modelo ARSO para el caso de estudio. Nuestro objetivo es determinar el mejor plan de expansión de transmisión. Denotamos por Γ^S , Γ^C , Γ^D los parámetros de incertidumbre presupuestaria que se tomarán en cuenta en nuestro modelo y que se modificarán para lograr diferentes soluciones.

$$\begin{aligned} & \min_{\{x_1, x_2\}} \max_{\{\bar{P}^S, \bar{P}^C, \bar{D}\}} \min_{\substack{\{P^{S1}, P^{C1}, P^{U1}, f_1^1, f_2^1, \theta_1^1, \theta_2^1\}; \\ \{P^{S2}, P^{C2}, P^{U2}, f_1^2, f_2^2, \theta_1^2, \theta_2^2\}}} \\ & 2 \times 10^6 x_1 + 3 \times 10^6 x_2 + \frac{1}{2} 8760 (2P^{S1} + 20P^{C1} + 200P^{U1}) + \frac{1}{2} 8760 (2P^{S2} + 20P^{C2} + 200P^{U2}) \\ & \text{s.a.} \end{aligned}$$

Restricciones del primer nivel:

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

Restricciones del segundo nivel:

$$140 \leq \bar{P}^S \leq 200, \quad 200 - \bar{P}^S \leq 60\Gamma^S$$

$$80 \leq \bar{P}^C \leq 100, \quad 100 - \bar{P}^C \leq 20\Gamma^C$$

$$64 \leq \bar{D} \leq 80, \quad \bar{D} - 64 \leq 16\Gamma^D$$

Restricciones del tercer nivel:

$$P^{S1} = f_1^1, \quad P^{C1} = f_2^1, \quad 0.5\bar{D} - P^{U1} = f_1^1 + f_2^1$$

$$f_1^1 = x_1 100\theta_1^1, \quad f_2^1 = x_2 100\theta_2^1$$

$$-50 \leq f_1^1 \leq 50, \quad -50 \leq f_2^1 \leq 50$$

$$0 \leq P^{S1} \leq 0.75\bar{P}^S, \quad 0 \leq P^{C1} \leq 1.0\bar{P}^C, \quad 0 \leq P^{U1} \leq 0.5\bar{D}$$

$$P^{S2} = f_1^2, \quad P^{C2} = f_2^2, \quad 0.75\bar{D} - P^{U2} = f_1^2 + f_2^2$$

$$f_1^2 = x_1 100\theta_1^2, \quad f_2^2 = x_2 100\theta_2^2$$

$$-50 \leq f_1^2 \leq 50, \quad -50 \leq f_2^2 \leq 50$$

$$0 \leq P^{S2} \leq 0.25\bar{P}^S, \quad 0 \leq P^{C2} \leq 1.0\bar{P}^C, \quad 0 \leq P^{U2} \leq 0.75\bar{D},$$

donde, x_1 y x_2 son variables binarias que representan la construcción de las líneas de transmisión 1 y 2 respectivamente. Las variables $\bar{P}^S$, $\bar{P}^C$, $\bar{D}$ describen la incertidumbre a largo plazo en relación con la capacidad estocástica futura, la capacidad convencional futura y la demanda máxima futura, respectivamente. Las variables operativas correspondientes al primer escenario son P^{S1} , P^{C1} , P^{U1} , f_1^1 , f_2^1 , θ_1^1 , θ_2^1 , mientras que P^{S2} , P^{C2} , P^{U2} , f_1^2 , f_2^2 , θ_1^2 y θ_2^2 son las variables operativas correspondientes al segundo escenario.

2) Reformulación del problema

El problema de optimización planteado en nuestro caso de estudio no puede resolverse de forma directa. Por ello, es necesario fusionar los problemas de segundo y tercer nivel, para luego descomponer el problema resultante en dos niveles mediante un procedimiento de descomposición tipo Benders [23]. En este contexto, presentamos la versión linealizada del problema de tercer nivel. Dado que es necesario derivar el problema dual, la variable dual de cada restricción se indica entre paréntesis en la restricción correspondiente.

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\{P^{S1}, P^{C1}, P^{U1}, f_1^1, f_2^1, \theta_1^1, \theta_2^1\}; \\ \{P^{S2}, P^{C2}, P^{U2}, f_1^2, f_2^2, \theta_1^2, \theta_2^2\}}} & 2 \times 10^6 x_1 + 3 \times 10^6 x_2 + \frac{1}{2} 8760 (2P^{S1} + 20P^{C1} + 200P^{U1}) \\ & + \frac{1}{2} 8760 (2P^{S2} + 20P^{C2} + 200P^{U2}). \end{aligned}$$

s.a.

Restricciones del primer escenario:

$$\begin{aligned} P^{S1} &= f_1^1 \quad (\alpha_1^1) \\ P^{C1} &= f_2^1 \quad (\alpha_2^1) \\ 0.5\bar{D} - P^{U1} &= f_1^1 + f_2^1 \quad (\alpha_3^1) \\ -(1 - x_1)10^6 - \left(\frac{f_1^1}{100} - \theta_1^1\right) &\leq 0 \quad (\beta_{11}^{\min 1}) \\ \frac{f_1^1}{100} - \theta_1^1 &\leq (1 - x_1)10^6 \quad (\beta_{11}^{\max 1}) \\ -x_1 50 - f_1^1 &\leq 0 \quad (\beta_{12}^{\min 1}) \\ f_1^1 &\leq x_1 50 \quad (\beta_{12}^{\max 1}) \\ -(1 - x_2)10^6 - \left(\frac{f_2^1}{100} - \theta_2^1\right) &\leq 0 \quad (\beta_{21}^{\min 1}) \\ \frac{f_2^1}{100} - \theta_2^1 &\leq (1 - x_2)10^6 \quad (\beta_{21}^{\max 1}) \\ -x_2 50 - f_2^1 &\leq 0 \quad (\beta_{22}^{\min 1}) \\ f_2^1 &\leq x_2 50 \quad (\beta_{22}^{\max 1}) \\ -P^{S1} &\leq 0 \quad (\gamma_1^{\min 1}) \\ P^{S1} &\leq 0.75\bar{P}^S \quad (\gamma_1^{\max 1}) \end{aligned}$$

$$-P^{C1} \leq 0 \quad (\gamma_2^{\min 1})$$

$$P^{C1} \leq 1.0\bar{P}^C \quad (\gamma_2^{\max 1})$$

$$-P^{U1} \leq 0 \quad (\gamma_3^{\min 1})$$

$$P^{U1} \leq 0.5\bar{D} \quad (\gamma_3^{\max 1})$$

Restricciones del segundo escenario:

$$P^{S2} = f_1^2 \quad (\alpha_1^2)$$

$$P^{C2} = f_2^2 \quad (\alpha_2^2)$$

$$0.75\bar{D} - P^{U2} = f_1^2 + f_2^2 \quad (\alpha_3^2)$$

$$-(1-x_1)10^6 - \left(\frac{f_1^2}{100} - \theta_1^2\right) \leq 0 \quad (\beta_{11}^{\min 2})$$

$$\frac{f_1^2}{100} - \theta_1^2 \leq (1-x_1)10^6 \quad (\beta_{11}^{\max 2})$$

$$-x_150 - f_1^2 \leq 0 \quad (\beta_{12}^{\min 2})$$

$$f_1^2 \leq x_150 \quad (\beta_{12}^{\max 2})$$

$$-(1-x_2)10^6 - \left(\frac{f_2^2}{100} - \theta_2^2\right) \leq 0 \quad (\beta_{21}^{\min 2})$$

$$\frac{f_2^2}{100} - \theta_2^2 \leq (1-x_2)10^6 \quad (\beta_{21}^{\max 2})$$

$$-x_250 - f_2^2 \leq 0 \quad (\beta_{22}^{\min 2})$$

$$f_2^2 \leq x_250 \quad (\beta_{22}^{\max 2})$$

$$-P^{S2} \leq 0 \quad (\gamma_1^{\min 2})$$

$$P^{S2} \leq 0.25\bar{P}^S \quad (\gamma_1^{\max 2})$$

$$-P^{C2} \leq 0 \quad (\gamma_2^{\min 2})$$

$$P^{C2} \leq 1.0\bar{P}^C \quad (\gamma_2^{\max 2})$$

$$-P^{U2} \leq 0 \quad (\gamma_3^{\min 2})$$

$$P^{U2} \leq 0.75\bar{D} \quad (\gamma_3^{\max 2})$$

Subproblema

Dado que tanto el problema de segundo nivel como el dual del problema de tercer nivel son problemas de maximización, pueden fusionarse en un único problema de optimización. El problema que resulta de fusionar los problemas de segundo y el problema dual del tercer nivel se denominará subproblema y viene dado por:

$$\begin{aligned} \max \quad & -[(1-x_1)10^6\beta_{11}^{\max 1} + (1-x_1)10^6\beta_{11}^{\min 1} + x_150\beta_{12}^{\max 1} + x_150\beta_{12}^{\min 1} \\ & + (1-x_2)10^6\beta_{21}^{\max 1} + (1-x_2)10^6\beta_{21}^{\min 1} + x_250\beta_{22}^{\max 1} + x_250\beta_{22}^{\min 1} \\ & + 0.75\bar{P}^S\gamma_1^{\max 1} + 1.0\bar{P}^C\gamma_2^{\max 1} + 0.5\bar{D}\gamma_3^{\max 1} - 0.5\bar{D}\alpha_3^1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - x_1)10^6\beta_{11}^{\max 2} + (1 - x_1)10^6\beta_{11}^{\min 2} + x_150\beta_{12}^{\max 2} + x_150\beta_{12}^{\min 2} \\
& + (1 - x_2)10^6\beta_{21}^{\max 2} + (1 - x_2)10^6\beta_{21}^{\min 2} + x_250\beta_{22}^{\max 2} + x_250\beta_{22}^{\min 2} \\
& + 0.25\bar{P}^S\gamma_1^{\max 2} + 1.0\bar{P}^C\gamma_2^{\max 2} + 0.75\bar{D}\gamma_3^{\max 2} - 0.75\bar{D}\alpha_3^2]
\end{aligned}$$

s.a.

Restricciones del problema de segundo nivel:

$$140 \leq \bar{P}^S \leq 200, \quad 200 - \bar{P}^S \leq 60\Gamma^S$$

$$80 \leq \bar{P}^C \leq 100, \quad 100 - \bar{P}^C \leq 20\Gamma^C$$

$$64 \leq \bar{D} \leq 80, \quad \bar{D} - 64 \leq 16\Gamma^D$$

Restricciones duales para el primer escenario:

$$\frac{1}{2}8760 \times 2 + \alpha_1^1 + \gamma_1^{\max 1} - \gamma_1^{\min 1} = 0$$

$$\frac{1}{2}8760 \times 20 + \alpha_2^1 + \gamma_2^{\max 1} - \gamma_2^{\min 1} = 0$$

$$\frac{1}{2}8760 \times 200 - \alpha_3^1 + \gamma_3^{\max 1} - \gamma_3^{\min 1} = 0$$

$$-\alpha_1^1 - \alpha_3^1 - \frac{\beta_{11}^{\min 1}}{100} + \frac{\beta_{11}^{\max 1}}{100} - \beta_{12}^{\min 1} + \beta_{12}^{\max 1} = 0$$

$$-\alpha_2^1 - \alpha_3^1 - \frac{\beta_{21}^{\min 1}}{100} + \frac{\beta_{21}^{\max 1}}{100} - \beta_{22}^{\min 1} + \beta_{22}^{\max 1} = 0$$

$$\beta_{11}^{\min 1} - \beta_{11}^{\max 1} = 0$$

$$\beta_{21}^{\min 1} - \beta_{21}^{\max 1} = 0$$

Restricciones duales para el segundo escenario:

$$\frac{1}{2}8760 \times 2 + \alpha_1^2 + \gamma_1^{\max 2} - \gamma_1^{\min 2} = 0$$

$$\frac{1}{2}8760 \times 20 + \alpha_2^2 + \gamma_2^{\max 2} - \gamma_2^{\min 2} = 0$$

$$\frac{1}{2}8760 \times 200 - \alpha_3^2 + \gamma_3^{\max 2} - \gamma_3^{\min 2} = 0$$

$$-\alpha_1^2 - \alpha_3^2 - \frac{\beta_{11}^{\min 2}}{100} + \frac{\beta_{11}^{\max 2}}{100} - \beta_{12}^{\min 2} + \beta_{12}^{\max 2} = 0$$

$$-\alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \frac{\beta_{21}^{\min 2}}{100} + \frac{\beta_{21}^{\max 2}}{100} - \beta_{22}^{\min 2} + \beta_{22}^{\max 2} = 0$$

$$\beta_{11}^{\min 2} - \beta_{11}^{\max 2} = 0$$

$$\beta_{21}^{\min 2} - \beta_{21}^{\max 2} = 0$$

Las variables de optimización de este problema están compuestas por: las variables de segundo nivel $\bar{P}^S, \bar{P}^C, \bar{D}$ (al que denominaremos variables de salida del sibproblema); las variables duales irrestrictas, $\alpha_1^s, \alpha_2^s, \alpha_3^s$, con $s = 1, 2$ y las variables duales no negativas $\beta_{11}^{\min s}, \beta_{12}^{\min s}, \beta_{21}^{\min s}, \beta_{22}^{\min s}, \gamma_1^{\min s}, \gamma_2^{\min s}, \gamma_3^{\min s}, \beta_{11}^{\max s}, \beta_{12}^{\max s}, \beta_{21}^{\max s}, \beta_{22}^{\max s}, \gamma_1^{\max s}, \gamma_2^{\max s}, \gamma_3^{\max s}$, para $s = 1, 2$.

Dado que el subproblema asume valores fijos de las variables de primer nivel (x_1, x_2) del problema original y el objetivo general es la minimización, el valor óptimo de su función objetivo sumado al costo de inversión correspondiente, representa una cota superior para el valor óptimo del problema original.

Problema maestro

El problema maestro se formula para una iteración genérica ν , después de haber realizado las iteraciones $k = 1, \dots, \nu - 1$. Los datos de entrada para este problema maestro son las variables de salida del subproblema para todas las iteraciones ya realizadas, es decir:

$$\bar{P}^S[k], \bar{P}^C[k], \bar{D}[k], \quad k = 0, \dots, \nu - 1,$$

el número de iteración está representado mediante $[k]$. Las variables de optimización de este problema maestro, necesarias para resolver el siguiente subproblema, son: x_1, x_2 . Teniendo en cuenta la formulación inicial, el problema maestro se define como:

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{\{x_1, x_2, \eta\}; \\ \{P^{S1[k]}, P^{C1[k]}, P^{U1[k]}, f_1^{1[k]}, f_2^{1[k]}, \theta_1^{1[k]}, \theta_2^{1[k]}, k=1, \dots, \nu\}; \\ \{P^{S2[k]}, P^{C2[k]}, P^{U2[k]}, f_1^{2[k]}, f_2^{2[k]}, \theta_1^{2[k]}, \theta_2^{2[k]}, k=1, \dots, \nu\}}} & 2 \times 10^6 x_1 + 3 \times 10^6 x_2 + \eta \\ \text{s.a.} & \\ & \eta \geq \frac{1}{2} 8760 \left(2P^{S1[k]} + 20P^{C1[k]} + 200P^{U1[k]} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} 8760 \left(2P^{S2[k]} + 20P^{C2[k]} + 200P^{U2[k]} \right), \quad k = 1, \dots, \nu \\ & P^{S1[k]} = f_1^{1[k]}, \quad P^{C1[k]} = f_2^{1[k]}, \\ & 0.5\bar{D}^{[k-1]} - P^{U1[k]} = f_1^{1[k]} + f_2^{1[k]}, \quad k = 1, \dots, \nu \\ & P^{S1[k]} = f_1^{1[k]}, \quad P^{C1[k]} = f_2^{1[k]}, \\ & 0.5\bar{D}^{[k-1]} - P^{U1[k]} = f_1^{1[k]} + f_2^{1[k]}, \quad k = 1, \dots, \nu \\ & -(1 - x_1)10^6 - \left(\frac{f_1^{1[k]}}{100} - \theta_1^{1[k]} \right) \leq 0, \quad k = 1, \dots, \nu \\ & \frac{f_1^{1[k]}}{100} - \theta_1^{1[k]} \leq (1 - x_1)10^6, \quad k = 1, \dots, \nu \\ & -x_1 50 - f_1^{1[k]} \leq 0, \quad k = 1, \dots, \nu \\ & f_1^{1[k]} \leq x_1 50, \quad k = 1, \dots, \nu \\ & -(1 - x_2)10^6 - \left(\frac{f_2^{1[k]}}{100} - \theta_2^{1[k]} \right) \leq 0, \quad k = 1, \dots, \nu \\ & \frac{f_2^{1[k]}}{100} - \theta_2^{1[k]} \leq (1 - x_2)10^6, \quad k = 1, \dots, \nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_2 50 - f_2^{1[k]} \leq 0, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& f_2^{1[k]} \leq x_2 \cdot 50, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& 0 \leq P^{S1[k]} \leq 0.75 \bar{P}^{S[k-1]}, \quad 0 \leq P^{C1[k]} \leq 1.0 \bar{P}^{C[k-1]}, \\
& 0 \leq P^{U1[k]} \leq 0.5 \bar{D}^{[k-1]}, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& P^{S2[k]} = f_1^{2[k]}, \quad P^{C2[k]} = f_2^{2[k]}, \\
& 0.75 \bar{D}^{[k-1]} - P^{U2[k]} = f_1^{2[k]} + f_2^{2[k]}, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& -(1 - x_1) 10^6 - \left(\frac{f_1^{2[k]}}{100} - \theta_1^{2[k]} \right) \leq 0, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& \frac{f_1^{2[k]}}{100} - \theta_1^{2[k]} \leq (1 - x_1) 10^6, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& -x_1 50 - f_1^{2[k]} \leq 0, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& f_1^{2[k]} \leq x_1 50, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& -(1 - x_2) 10^6 - \left(\frac{f_2^{2[k]}}{100} - \theta_2^{2[k]} \right) \leq 0, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& \frac{f_2^{2[k]}}{100} - \theta_2^{2[k]} \leq (1 - x_2) 10^6, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& -x_2 50 - f_2^{2[k]} \leq 0, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& f_2^{2[k]} \leq x_2 50, \quad k = 1, \dots, \nu \\
& 0 \leq P^{S2[k]} \leq 0.25 \bar{P}^{S[k-1]}, \quad 0 \leq P^{C2[k]} \leq 1.0 \bar{P}^{C[k-1]}, \\
& 0 \leq P^{U2[k]} \leq 0.75 \bar{D}^{[k-1]}, \quad k = 1, \dots, \nu.
\end{aligned}$$

Este problema maestro es una relajación del problema original, por lo tanto, su valor objetivo óptimo actúa como una cota inferior para el valor objetivo óptimo del problema original.

3) Solución del problema

A continuación, describimos un algoritmo basado en el método de Benders [24], diseñado para resolver el problema planteado. Este enfoque combina el subproblema y el problema maestro definidos previamente.

Dados los valores de los parámetros de incertidumbre presupuestaria Γ^S , Γ^C y Γ^D el procedimiento iterativo de solución viene dado por el siguiente algoritmo:

Algoritmo 5: Benders para modelos ARSO

- 1: **Inicialización:** Establece el contador de iteraciones $k = 1$ y asigna valores iniciales para las variables de incertidumbre a largo plazo $\bar{P}^S[0]$, $\bar{P}^C[0]$ y $\bar{D}[0]$
- 2: **Resolución del problema maestro:** Usando los valores $\bar{P}^S[k-1]$, $\bar{P}^C[k-1]$ y $\bar{D}[k-1]$, resolver el problema maestro para obtener las soluciones $x_1^{[k]}$ y $x_2^{[k]}$.
- 3: **Resolución del subproblema:** Con las soluciones $x_1^{[k]}$ y $x_2^{[k]}$ resolver el subproblema para obtener los nuevos valores $\bar{P}^S[k]$, $\bar{P}^C[k]$ y $\bar{D}[k]$.
- 4: **Criterio de parada:** Comparar las cotas inferior y superior
 - La cota inferior corresponde al valor de la función objetivo del problema maestro.
 - La cota superior se calcula como la suma del valor objetivo del subproblema y el costo de inversión asociado

Si ambas cotas son suficientemente cercanas, finalizar. En caso contrario, actualizar $k \leftarrow k + 1$ y regresar al paso 2.

B. Análisis y discusión de resultados

En esta sección se presentan los resultados de los experimentos computacionales realizados con el modelo ARSO aplicado al caso de estudio descrito en la sección anterior. La implementación se llevó a cabo en Julia 1.6.7 empleando el paquete JuMP [25], los problemas se resolvieron usando Gurobi 11.0.1 [26].

Las simulaciones se ejecutaron en un equipo con un procesador Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 a 2.40 GHz, con 8 GB de memoria RAM y sistema operativo Windows. La implementación completa del modelo, junto con los códigos y datos utilizados, está disponible en https://github.com/AmericoCh/ARSO_Models.git.

1) Comparación de costos del modelo ARSO y determinista

Para evaluar la utilidad del modelo ARSO planteado en nuestro caso de estudio, se incluyó un análisis comparativo con el modelo determinista asociado, el cual no considera incertidumbre robusta ($\Gamma^S = \Gamma^C = \Gamma^U = 0$) ni estocástica (sin considerar incertidumbre modelada mediante escenarios probabilísticos). Para este propósito, se utilizaron los valores esperados de las variables que representan las capacidades instaladas: $\bar{P}^S = 200$, $\bar{P}^C = 100$ y $\bar{D} = 64$. Asimismo, en ausencia de incertidumbre estocástica, las variables operativas están representadas por, (P^S, P^C, P^U) . El modelo determinístico obtenido se encuentra detallado en el Anexo B.

La Figura IX muestra la comparación entre los costos totales del modelo ARSO y el

modelo determinista para los siguientes valores simétricos de los parámetros:

$$\Gamma^S = \Gamma^C = \Gamma^U \in \{0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\},$$

que representan el nivel de incertidumbre en la generación renovable, convencional y la demanda, respectivamente.

Los resultados muestran cómo los costos del modelo ARSO aumentan al incrementar la incertidumbre, este costo extra puede interpretarse como una inversión para reducir el riesgo y evitar fallas operativas bajo incertidumbre. Por otro lado, el modelo determinista presenta un costo total constante ya que asume valores promedio para los parámetros, ignorando la incertidumbre en las variables lo que puede llevar a decisiones poco robustas en la práctica, puede subestimar costos reales, lo que resulta en un riesgo significativo si los parámetros reales se desvían de sus valores promedio. En el caso particular de $\Gamma^S = \Gamma^C = \Gamma^U = 0.0$, se observa que el costo del modelo determinista coincide con el costo del modelo ARSO.

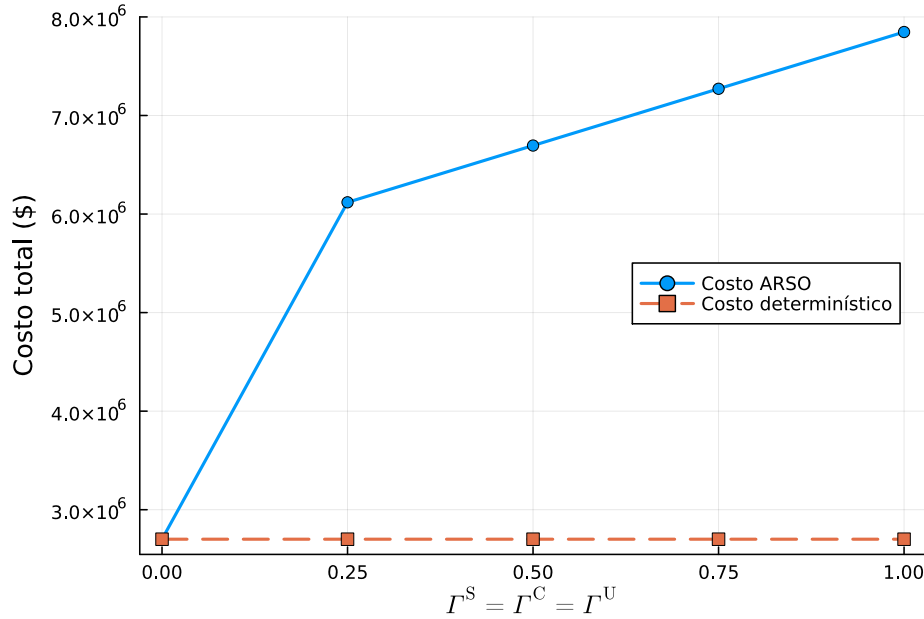


FIGURA IX. Comparación del costo ARSO y determinístico (caso simétrico).

La Figura X compara el costo ARSO frente al costo determinista para otras cinco configuraciones asimétricos definidos por los parámetros de incertidumbre ($\Gamma^S, \Gamma^C, \Gamma^D$). Por ejemplo, la configuración con $(\Gamma^S, \Gamma^C, \Gamma^D) = (0.4, 0.7, 0.9)$ implica una alta incertidumbre en todas las dimensiones, mientras que en otros escenarios las incertidumbres están concentradas en menos parámetros. Esta flexibilidad convierte al modelo ARSO como una alternativa superior al modelo determinista, especialmente en sistemas energéticos con una alta participación de generación renovable. El modelo ARSO garantiza decisiones de inversión y operación más seguras y sostenibles, al mismo tiempo que minimiza los riesgos y maximiza la resiliencia del sistema frente a condiciones adversas.

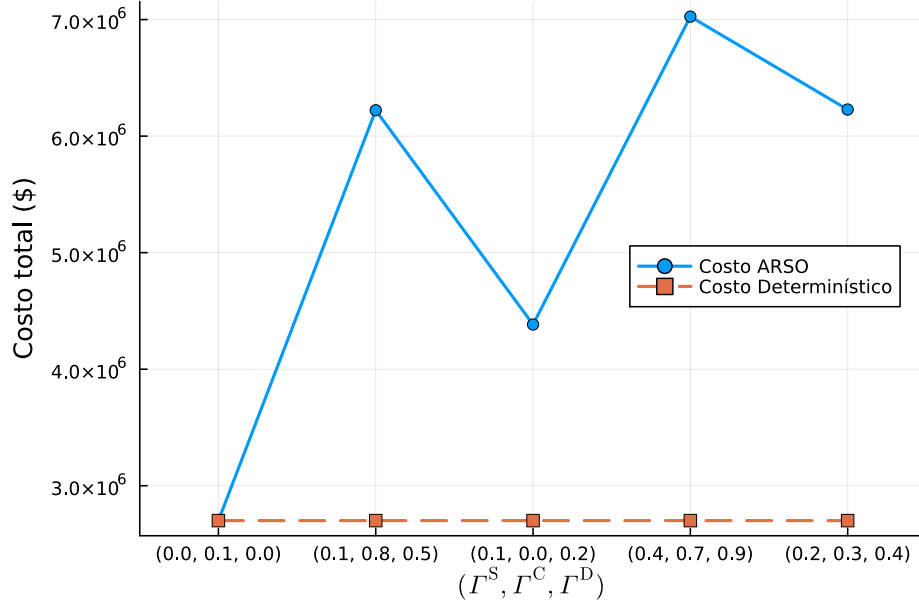


FIGURA X. Comparación del costo ARSO y determinístico (caso asimétrico).

2) Impacto de la incertidumbre en el modelo ARSO

La Tabla I resume los resultados del caso de estudio considerando distintas configuraciones definidas por combinaciones específicas de los parámetros de incertidumbre Γ^S , Γ^C y Γ^D). Cada configuración representa diferentes niveles de incertidumbre, se incluyen tanto casos simétricos (1 a 5, donde, $\Gamma^S = \Gamma^C = \Gamma^D$) como casos asimétricos (6 a 10, donde, $\Gamma^S, \Gamma^C, \Gamma^D$ tienen valores diferentes).

El modelo ARSO ajusta dinámicamente las decisiones de inversión x_1 y x_2 junto con las capacidades instaladas bajo incertidumbre a medida que aumentan los niveles de incertidumbre. Por ejemplo, en la configuración 1, $x_1 = 1, x_2 = 0$ y las capacidades instaladas $\bar{P}^S, \bar{P}^C, \bar{D}$ toman sus valores esperados. En configuraciones con mayor incertidumbre, 5 y 6, los valores de $\bar{P}^S, \bar{P}^C, \bar{D}$ se ajustan proporcionalmente para minimizar el impacto del riesgo.

A medida que aumentan los niveles de incertidumbre, el costo objetivo también incrementa, como se muestra en las configuraciones 1,3 y 5, reflejando la naturaleza conservadora del modelo en escenarios más adversos.

Los resultados adicionales correspondientes a las soluciones de las variables operativas y el flujo por escenario están detallados en Tabla III del Anexo B.

TABLA I
Resultados del caso de estudio bajo diferentes configuraciones

Config.	Γ^S	Γ^C	Γ^D	Objetivo	x_1	x_2	$\bar{P}^S$	$\bar{P}^C$	$\bar{D}$
1	0.0	0.0	0.0	2.70080×10^6	1	0	200.0	100.0	64.0
2	0.25	0.25	0.25	6.11909×10^6	1	1	185.0	95.0	68.0
3	0.5	0.5	0.5	6.69506×10^6	1	1	170.0	90.0	72.0
4	0.75	0.75	0.75	7.27103×10^6	1	1	155.0	85.0	76.0
5	1.0	1.0	1.0	7.84700×10^6	1	1	140.0	80.0	80.0
6	0.0	0.1	0.0	2.70080×10^6	1	0	200.0	98.0	64.0
7	0.1	0.8	0.5	6.22202×10^6	1	1	194.0	84.0	72.0
8	0.1	0.0	0.2	4.38360×10^6	1	0	194.0	100.0	67.2
9	0.4	0.7	0.9	7.02531×10^6	1	1	176.0	86.0	78.4
10	0.2	0.3	0.4	6.22815×10^6	1	1	188.0	94.0	70.4

3) Análisis de las soluciones del modelo ARSO y el modelo determinista

Al comparar la Tabla I con la Tabla II, se observa que el modelo ARSO invierte en ambas líneas, excepto en las configuraciones con bajo nivel de incertidumbre (1, 6 y 8). Es particularmente interesante notar que, en el segundo escenario de la configuración 8, se permite la presencia de energía no servida ($P^{U2} = 1.9\text{MW}$), como se detalla en la Tabla III del Anexo B. En contraste, el modelo determinista únicamente invierte en la línea 1 y no permite energía no servida ($P^U = 0.0$).

Este resultado destaca la relevancia del modelo ARSO al incorporar flexibilidad para permitir energía no servida, lo cual refleja un comportamiento más realista de los sistemas energéticos. Dicha capacidad es fundamental en escenarios donde las condiciones adversas o la alta incertidumbre pueden limitar la generación renovable o la capacidad operativa, haciendo del modelo ARSO una herramienta más adecuada para la planificación robusta y sostenible.

TABLA II
Soluciones del problema determinista asociado con el modelo ARSO.

Parámetro	Valor
Costo total (\$)	2.7008×10^6
Decisión de inversión en línea 1 (x_1)	1
Decisión de inversión en línea 2 (x_2)	0
Generación renovable (P^S)	40.0
Generación convencional (P^C)	0.0
Energía no servida (P^U)	0.0
Flujo en línea 1 (f_1)	40.0
Flujo en línea 2 (f_2)	0.0

4) Convergencia del algoritmo de Benders para modelos ARSO

Para inicializar el Algoritmo 5, es necesario fijar valores para las variables de incertidumbre a largo plazo $\bar{P}^S[0]$, $\bar{P}^C[0]$ y $\bar{D}[0]$. Los resultados obtenidos en la Tabla I se obtuvieron fijando estos valores a (1,1,1), en este caso el algoritmo converge a la solución óptima en 2 iteraciones, para todas las configuraciones consideradas. En general, la convergencia del Algoritmo de Benders para modelos ARSO, depende de la elección del punto inicial y de los parámetros de incertidumbre presupuestaria asociado.

En el análisis realizado, se observa que puntos iniciales como (0, 0, 0) y (2, 4, 6) permiten que el algoritmo de Benders converja de manera eficiente en solo dos iteraciones para todas las configuraciones consideradas. En particular, la Figura XI(a), ilustra la convergencia para el punto inicial (2, 4, 6) bajo la Configuración 7, mientras que la Figura XI(b) muestra la convergencia para el punto inicial (0, 0, 0) bajo la Configuración 9.

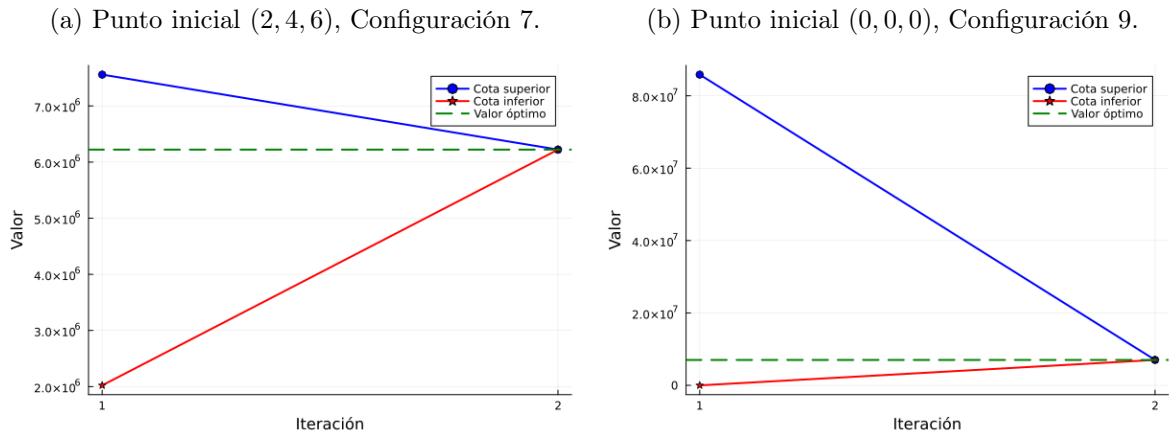


FIGURA XI. Convergencia del Algoritmo 5 para el caso de estudio.

Por otro lado, al considerar el punto inicial $(\bar{P}^{S[0]}, \bar{P}^{C[0]}, \bar{D}^{I[0]}) = (2, 2, 2)$, se observa que las Configuraciones 1 y 6 no logran converger, mientras que las demás sí. En la Figura XII(a) se muestra el caso de no convergencia para el punto inicial $(2, 2, 2)$ bajo la Configuración 1. Se puede apreciar que en la segunda iteración las cotas inferior y superior no están correctamente definidas, sin embargo, estas proporcionan un valor subóptimo muy cercano al óptimo. Cabe destacar que, en este caso, la cota superior coincide con el valor óptimo.

Finalmente, al considerar el punto inicial $(200, 90, 72)$ el algoritmo de Benders no converge en las Configuraciones 1, 6 y 8, mientras que en las demás sí lo hace. La Figura XII(b) ilustra el caso de no convergencia para este punto inicial bajo la Configuración 8. Se observa que el valor óptimo se encuentra significativamente alejado de las cotas proporcionadas por el algoritmo de Benders.

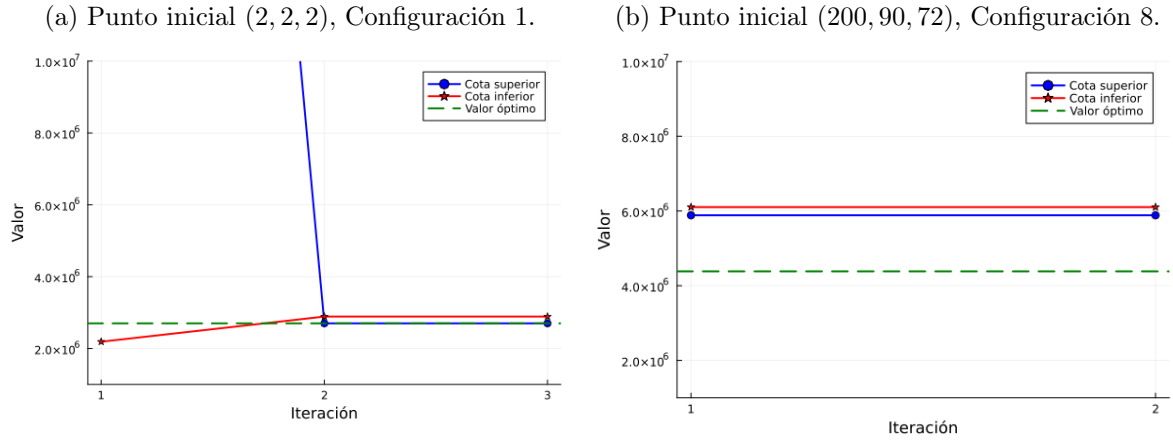


FIGURA XII. No convergencia del Algoritmo 5 para el caso de estudio.

A pesar de la sensibilidad a las condiciones iniciales y a la estructura del problema, el modelo ARSO, junto con el algoritmo de Benders es una herramienta eficaz para abordar la incertidumbre y optimización robusta, además estos resultados enfatizan la importancia de un diseño minucioso tanto en la formulación del problema como en la implementación del algoritmo.

VI. Conclusiones y perspectivas

A continuación describimos las conclusiones del trabajo y las perspectivas de investigación futuras.

A. Conclusiones

- La incertidumbre es un elemento que se debe tener en cuenta en el proceso de toma de decisiones, por lo que la metodología de optimización robusta es efectiva para abordar problemas sujetos a incertidumbre como los problemas energéticos. Los ejemplos y resultados obtenidos demuestran la capacidad de esta técnica para generar soluciones resistentes a variaciones imprevistas.
- La disponibilidad de datos y los avances en el software de optimización permiten utilizar la teoría de optimización robusta para poder incluir la incertidumbre en nuestros modelos y comprender mejor las consecuencias de dichos acontecimientos inciertos.
- La aplicación de optimización robusta a problemas energéticos puede conducir a una mejora significativa en la eficiencia operativa. Las soluciones robustas permiten una operación más estable y rentable en condiciones de incertidumbre.
- Se puede concluir que la optimización robusta contribuye a la reducción de costos operativos y a la mitigación de riesgos en la gestión de sistemas energéticos. Esto es crucial en un contexto donde la volatilidad de los precios energéticos y las condiciones climáticas inciertas son comunes.

B. Perspectivas para trabajos futuros

- En nuestro caso de estudio de la planificación de expansión de transmisión se consideró un problema pequeño con datos artificiales, una línea de trabajo futuro es considerar un problema de tamaño real por ejemplo en el sistema eléctrico del Perú.
- Otra línea de investigación consiste en la aplicación de la optimización robusta a las Redes Inteligentes (Smart Grids) en la gestión de la generación y la distribución de energía.
- También podemos explorar cómo la optimización robusta puede contribuir a la reducción del impacto ambiental de las operaciones energéticas.

VII. Referencias Bibliográficas

- [1] J. R. Birge y F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*. Springer New York, 2011. DOI: [10.1007/978-1-4614-0237-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0237-4). dirección: <https://doi.org/10.1007%2F978-1-4614-0237-4>.
- [2] A. Ben-Tal, L. E. Ghaoui y A. Nemirovski, *Robust Optimization* (Princeton Series in Applied Mathematics). Princeton University Press, 2009, vol. 28, págs. 1-542, ISBN: 978-1-4008-3105-0.
- [3] D. Bertsimas y M. Sim, “The price of robustness,” *Operations research*, vol. 52, n.º 1, págs. 35-53, 2004.
- [4] A. Ben-Tal, A. Goryashko, E. Guslitzer y A. Nemirovski, “Adjustable robust solutions of uncertain linear programs,” *Mathematical programming*, vol. 99, n.º 2, págs. 351-376, 2004. dirección: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:14602774>.
- [5] A. Schöbel, “Generalized light robustness and the trade-off between robustness and nominal quality,” *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 80, n.º 2, págs. 161-191, 2014.
- [6] A. Ben-Tal, D. Bertsimas y D. B. Brown, “A soft robust model for optimization under ambiguity,” *Operations research*, vol. 58, n.º 4-part-2, págs. 1220-1234, 2010.
- [7] A. L. Soyster, “Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming,” *Operations research*, vol. 21, n.º 5, págs. 1154-1157, 1973.
- [8] A. Atamtürk, “Strong formulations of robust mixed 0–1 programming,” *Mathematical programming*, vol. 108, págs. 235-250, 2006.
- [9] M. Fischetti y M. Monaci, “Light robustness,” *Robust and online large-scale optimization: Models and techniques for transportation systems*, págs. 61-84, 2009.

- [10] P. Kouvelis y G. Yu, *Robust discrete optimization and its applications*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 14.
- [11] X. Zhang y A. J. Conejo, “Robust Transmission Expansion Planning Representing Long- and Short-Term Uncertainty,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 33, n.º 2, págs. 1329-1338, 2018. DOI: [10.1109/TPWRS.2017.2717944](https://doi.org/10.1109/TPWRS.2017.2717944).
- [12] D. Bertsimas, D. B. Brown y C. Caramanis, “Theory and applications of robust optimization,” *SIAM review*, vol. 53, n.º 3, págs. 464-501, 2011.
- [13] M. A. Goberna y M. López-Cerdá, *Linear semi-infinite optimization*. John Wiley & Sons Ltd, 1998.
- [14] A. Ben-Tal y A. Nemirovski, *Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications*. SIAM, 2001.
- [15] E. D. Andersen y K. D. Andersen, “The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm,” *High performance optimization*, págs. 197-232, 2000.
- [16] J. M. Mulvey, R. J. Vanderbei y S. A. Zenios, “Robust optimization of large-scale systems,” *Operations research*, vol. 43, n.º 2, págs. 264-281, 1995.
- [17] A. Ben-Tal y A. Nemirovski, “Robust convex optimization,” *Mathematics of operations research*, vol. 23, n.º 4, págs. 769-805, 1998.
- [18] D. Bertsimas y M. Sim, “Tractable approximations to robust conic optimization problems,” *Mathematical programming*, vol. 107, n.º 1-2, págs. 5-36, 2006.
- [19] D. Bertsimas y J. N. Tsitsiklis, *Introduction to linear optimization*. Athena scientific Belmont, MA, 1997, vol. 6.
- [20] P. Hansen, B. Jaumard y G. Savard, “New branch-and-bound rules for linear bilevel programming,” *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, vol. 13, n.º 5, págs. 1194-1217, 1992.
- [21] M. E. Dyer, “The complexity of vertex enumeration methods,” *Mathematics of Operations Research*, vol. 8, n.º 3, págs. 381-402, 1983.

- [22] J. Benders, “Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems.,” *Numerische Mathematik*, vol. 4, págs. 238-252, 1962. dirección: <http://eudml.org/doc/131533>.
- [23] B. Zeng y L. Zhao, “Solving two-stage robust optimization problems using a column-and-constraint generation method,” *Operations Research Letters*, vol. 41, n.º 5, págs. 457-461, 2013.
- [24] D. Bertsimas, E. Litvinov, X. A. Sun, J. Zhao y T. Zheng, “Adaptive robust optimization for the security constrained unit commitment problem,” *IEEE transactions on power systems*, vol. 28, n.º 1, págs. 52-63, 2012.
- [25] M. Lubin, O. Dowson, J. Dias Garcia, J. Huchette, B. Legat y J. P. Vielma, “JuMP 1.0: Recent improvements to a modeling language for mathematical optimization,” *Mathematical Programming Computation*, 2023. DOI: [10.1007/s12532-023-00239-3](https://doi.org/10.1007/s12532-023-00239-3).
- [26] Gurobi Optimization, LLC, *Gurobi Optimizer Reference Manual*, 2024. dirección: <https://www.gurobi.com>.

Anexos

En este Anexo se presentan las demostraciones de algunos resultados importantes enunciados en el trabajo, así como algunos resultados complementarios correspondientes al caso de estudio.

Anexo 1: Pruebas adicionales

Proposición. (*Proposición III.22*) *La restricción cónica robusta sobre el elipsoide*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq t, \quad \forall (\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{U}_{\text{elip}}^{\mathbf{A}, \mathbf{b}}$$

puede ser reformulada como la siguiente restricción positiva semidefinida

$$\begin{bmatrix} t - \kappa & (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}})^\top & \mathbf{0}^\top \\ \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}} & t\mathbf{I} & \mathbf{A}_b^x \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_b^x)^\top & \kappa\mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \kappa \geq 0,$$

donde, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de dimensiones apropiadas; $\mathbf{A}_b^x$ es una matriz cuya i -ésima columna es igual a $\mathbf{A}_i\mathbf{x} - \mathbf{b}_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, k$.

Prueba. La restricción cónica robusta es equivalente a

$$\max_{\|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq 1} \left\| (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}) + \mathbf{A}_b^x \boldsymbol{\xi} \right\|_2 \leq t,$$

elevando al cuadrado ambos miembros de esta desigualdad obtenemos, obtenemos

$$\left((\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}) + \mathbf{A}_b^x \boldsymbol{\xi} \right)^\top \left((\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}) + \mathbf{A}_b^x \boldsymbol{\xi} \right) \leq t^2, \quad \forall \boldsymbol{\xi} : \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq 1 \quad (0.1)$$

Partiendo de (0.1) tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} t & ((\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}) + \mathbf{A}_b^x \boldsymbol{\xi})^\top \\ (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}) + \mathbf{A}_b^x \boldsymbol{\xi} & t\mathbf{I} \end{bmatrix}}_M \succeq \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} : \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq 1, \\ & \iff \mathbf{y}^\top M \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} : \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq 1, \forall \mathbf{y} = (v, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{m+1}, \\ & \iff tv^2 + 2v(\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}})^\top \mathbf{w} + t\mathbf{w}^\top \mathbf{w} + 2v\boldsymbol{\xi}^\top (\mathbf{A}_b^x)^\top \mathbf{w} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} : \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq 1, \forall (v, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{m+1}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\min_{\|\xi\|_2 \leq 1} 2v\xi^\top (A_b^x)^\top w = -\|2v(A_b^x)^\top w\| = \min_{\xi^\top \xi \leq v^2} 2\xi^\top (A_b^x)^\top w$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & tv^2 + 2v(\bar{A}x - \bar{b})^\top w + tw^\top w + \min_{\xi^\top \xi \leq v^2} 2v\xi^\top (A_b^x)^\top w \geq 0 \quad \forall (v, w) \in \mathbb{R}^{m+1}, \\ \Leftrightarrow & tv^2 + 2v(\bar{A}x - \bar{b})^\top v + \tau v^\top v + 2\xi^\top (A_b^x)^\top w \geq 0 \quad \forall z = (v, w, \xi) \in \mathbb{R}^{m+k+1} : \xi^\top \xi \leq v^2, \\ \Leftrightarrow & z^\top \begin{bmatrix} t & (\bar{A}x - \bar{b})^\top & \mathbf{0}^\top \\ \bar{A}x - \bar{b} & tI & A_b^x \\ \mathbf{0} & (A_b^x)^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} z \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^{m+k+1} : z^\top \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & -I \end{bmatrix} z \geq 0 \end{aligned}$$

Esta última equivalencia significa que

$$z^\top \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & -I \end{bmatrix} z \geq 0 \Rightarrow z^\top \begin{bmatrix} t & (\bar{A}x - \bar{b})^\top & \mathbf{0}^\top \\ \bar{A}x - \bar{b} & tI & A_b^x \\ \mathbf{0} & (A_b^x)^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} z \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^{m+k+1},$$

luego, aplicando el Teorema III.16 (S-lemma) debe existir $\kappa \geq 0$:

$$\begin{bmatrix} t & (\bar{A}x - \bar{b})^\top & \mathbf{0}^\top \\ \bar{A}x - \bar{b} & tI & A_b^x \\ \mathbf{0} & (A_b^x)^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \kappa \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & -I \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \kappa \geq 0,$$

de donde se concluye el resultado. □

Proposición. (Proposición III.28) La restricción semidefinida positiva robusta

$$\sum_{i=1}^m (\bar{A}_i x_i - \bar{B}) + \sum_{j=1}^k \left(p_j(x) s^\top + s p_j(x)^\top \right) \xi_j \succeq \mathbf{0}, \quad \forall \xi : \|\xi\|_2 \leq 1. \quad (0.2)$$

puede reformularse como la siguiente restricción semidefinida positiva

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (\bar{A}_i x_i - \bar{B}) - \kappa s s^\top & P(x) \\ P(x)^\top & \kappa I \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \kappa \geq 0,$$

Prueba. Denotando por $D(x) = \sum_{i=1}^m (\bar{A}_i x_i - \bar{B})$, por definición de una matriz positiva

semidefinida, la restricción (0.2) es equivalente a

$$z^\top D(x)z + 2 \sum_{j=1}^k z^\top p_j(x) s^\top z \xi_j \geq 0, \quad \forall z, \xi : \|\xi\| \leq 1, \quad (0.3)$$

reescribiendo el segundo sumando y teniendo en cuenta que

$$\min_{\|\xi\|_2 \leq 1} 2(s^\top z)z^\top P(x)\xi = -|s^\top z| \|z^\top P(x)\| = \min_{\xi^\top \xi \leq z^\top s s^\top z} 2z^\top P(x)\xi$$

La restricción (0.3) es equivalente a

$$z^\top D(x)z + 2z^\top P(x)\xi \geq 0, \quad \forall z, \xi : \xi^\top \xi \leq z^\top s s^\top z,$$

el cual puede ser escrito en su forma matricial como

$$\begin{bmatrix} s s^\top & \\ & -I \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} D(x) & P(x) \\ P(x)^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0},$$

El resultado se sigue aplicando el Teorema III.16. □

Es importante resaltar el uso de dos técnicas en la demostración de estos resultados:

- La primera es la homogeneización, que consiste en elevar una restricción cuadrática, por ejemplo (0.1), desde el espacio ξ a un espacio de dimensión superior (v, w, ξ) haciendo que el término constante de las funciones cuadráticas resultantes sea cero.
- La segunda técnica es el uso del Teorema III.16 (S-Lema).

Anexo 2: Resultados complementarios

El problema determinista asociado al modelo ARSO de nuestro caso de estudio adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\substack{\{x_1, x_2\}; \\ \{P^S, P^C, P^U, f_1, f_2, \theta_1, \theta_2\}}} && 2 \times 10^6 x_1 + 3 \times 10^6 x_2 + 8760(2P^S + 20P^C + 200P^U) \\
 & \text{s.a.} && x_1, x_2 \in \{0, 1\} & (1) \\
 & && P^S = f_1, \quad P^C = f_2, \quad 0.5\bar{D} - P^U = f_1 + f_2 & (2) \\
 & && f_1 = x_1 100\theta_1, \quad f_2 = x_2 100\theta_2 & (3) \\
 & && -50 \leq f_1 \leq 50, \quad -50 \leq f_2 \leq 50 & (4) \\
 & && 0 \leq P^S \leq 0.625\bar{P}^S & (5) \\
 & && 0 \leq P^C \leq 1.0\bar{P}^C & (6) \\
 & && 0 \leq P^U \leq 0.625\bar{D} & (7)
 \end{aligned}$$

donde, $\bar{P}^S = 200$, $\bar{P}^C = 100$, $\bar{D} = 64$. Las restricciones (3) complican el problema; sin embargo, pueden ser linealizadas y junto con las restricciones (4), reemplazadas por el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned}
 & -M(1 - x_1) - \left(\frac{f_1}{100} - \theta_1 \right) \leq 0 \\
 & \quad \frac{f_1}{100} - \theta_1 \leq M(1 - x_1) \\
 & \quad -x_1 50 - f_1 \leq 0 \\
 & \quad f_1 \leq x_1 50 \\
 & -M(1 - x_2) - \left(\frac{f_2}{100} - \theta_2 \right) \leq 0 \\
 & \quad \frac{f_2}{100} - \theta_2 \leq M(1 - x_2) \\
 & \quad -x_2 50 - f_2 \leq 0 \\
 & \quad f_2 \leq x_2 50
 \end{aligned}$$

donde, M es una constante suficientemente grande.

La Tabla III contiene las soluciones de las variables operativas y flujos para cada uno de los dos escenarios del caso de estudio.

TABLA III
Soluciones óptimas de las variables operativas y flujos por escenarios.

Config.	Escenario 1							Escenario 2						
	P^{S1}	P^{C1}	P^{U1}	f_1^1	f_2^1	θ_1^1	θ_2^1	P^{S2}	P^{C2}	P^{U2}	f_1^2	f_2^2	θ_1^2	θ_2^2
1	32.0	0.0	0.0	32.0	0.0	0.32	10000.0	48.0	0.0	0.0	48.0	0.0	0.48	10000.0
2	34.0	0.0	0.0	34.0	0.0	0.34	0.0	46.25	4.75	0.0	46.25	4.75	0.4625	0.0475
3	36.0	0.0	0.0	36.0	0.0	0.36	0.0	42.5	11.5	0.0	42.5	11.5	0.425	0.115
4	38.0	0.0	0.0	38.0	0.0	0.38	0.0	38.75	18.25	0.0	38.75	18.25	0.3875	0.1825
5	40.0	0.0	0.0	40.0	0.0	0.4	0.0	35.0	25.0	0.0	35.0	25.0	0.35	0.25
6	32.0	0.0	0.0	32.0	0.0	0.32	10000.0	48.0	0.0	0.0	48.0	0.0	0.48	10000.0
7	36.0	0.0	0.0	36.0	0.0	0.36	0.0	48.5	5.5	0.0	48.5	5.5	0.485	0.055
8	33.6	0.0	0.0	33.6	0.0	0.336	10000.0	48.5	0.0	1.9	48.5	0.0	0.485	10000.0
9	39.2	0.0	0.0	39.2	0.0	0.392	0.0	44.0	14.8	0.0	44.0	14.8	0.44	0.148
10	35.2	0.0	0.0	35.2	0.0	0.352	0.0	47.0	5.8	0.0	47.0	5.8	0.47	0.058