

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA



Tesis

**Diseño de Trayectorias Usando el Método Trapezoidal y el
Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden Aplicado al
Control Tracking de un Manipulador de Tres Grados de Libertad**

Para obtener el Título Profesional de Ingeniero Mecatrónico

Elaborado por

Jose David Ruiz Alvarado

 [0009-0007-7321-5052](https://orcid.org/0009-0007-7321-5052)

Asesor

MSc. Ing. Iván Arturo Calle Flores

 [0000-0001-8358-7836](https://orcid.org/0000-0001-8358-7836)

LIMA – PERÚ

2025

Citar/How to cite	Ruiz Alvarado [1]
Referencia/Reference	[1] J. Ruiz Alvarado, " <i>Diseño de Trayectorias Usando el Método Trapezoidal y el Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden Aplicado al Control Tracking de un Manipulador de Tres Grados de Libertad</i> " [Tesis de titulación]. Lima (Perú): Universidad Nacional de Ingeniería, 2025.
Estilo/Style: IEEE (2020)	

Citar/How to cite	(Ruiz, 2025)
Referencia/Reference	Ruiz, J. (2025). <i>Diseño de Trayectorias Usando el Método Trapezoidal y el Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden Aplicado al Control Tracking de un Manipulador de Tres Grados de Libertad</i> . [Tesis de titulación, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI.
Estilo/Style: APA (7ma ed.)	

Dedicatoria

A mis seres queridos, en especial a mi madre, que ha sido mi apoyo incondicional durante toda mi vida y siempre será mi motivación para lograr todas mis metas.

Agradecimientos

A mis compañeros, colegas y mentores.

Resumen

En la actualidad, la robótica desempeña un rol importante en los avances tecnológicos, siendo el seguimiento de trayectorias un pilar fundamental en el desarrollo de sistemas robóticos avanzados y esencial para diversas aplicaciones como soldadura, ensamblaje, pick-and-place, pintura y recubrimiento e impresión 3D. Bajo esta perspectiva, esta investigación se centra en el diseño de trayectorias en el espacio operacional mediante el uso del perfil de velocidad trapezoidal, el cual servirá para delimitar las velocidades y aceleraciones máximas de trabajo. Además, se emplea el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, el cual toma las variables cinemáticas definidas en el espacio de tareas y las transforma en variables cinemáticas en el espacio de juntas. En este algoritmo se hace uso del método empírico para la sintonización de ganancias. Posteriormente, con el objetivo de verificar que se respeten los valores permisibles de los actuadores y evaluar la suavidad y efectividad de las trayectorias generadas, se evalúan los resultados de las variables cinemáticas en el espacio de juntas, el error de posicionamiento y el tiempo de navegación.

Palabras clave — Manipulador robótico, seguimiento de trayectorias, control tracking, espacio de juntas, perfil de velocidad trapezoidal, cinemática inversa.

Abstract

Currently, robotics plays a significant role in technological advancements, with trajectory tracking being a fundamental pillar in the development of advanced robotic systems and essential for various applications such as welding, assembly, pick-and-place, painting and coating, and 3D printing. From this perspective, this research focuses on trajectory design in the operational space using a trapezoidal velocity profile, which defines the maximum working speed and acceleration limits. Additionally, a second-order inverse kinematics algorithm is used, which takes the kinematic variables defined in task space and transforms them into joint space kinematic variables. This algorithm employs an empirical method for gain tuning. Subsequently, in order to verify compliance with the permissible actuator values and to evaluate the smoothness and effectiveness of the generated trajectories, the results of the joint space kinematic variables, positioning error, and navigation time are analyzed.

Keywords — Robot manipulator, trajectory tracking, tracking control, joint space, trapezoidal velocity profile, inverse kinematics.

Índice

Resumen	v
Abstract.....	vi
Introducción.....	xvii
1. Generalidades.....	1
1.1 Antecedentes de la Investigación	1
1.2 Identificación y Descripción del Problema de Estudio	5
1.3 Formulación del Problema.....	7
1.3.1 Problema Principal	7
1.3.2 Problemas Específicos	7
1.4 Justificación e Importancia	7
1.5 Objetivos	8
1.5.1 Objetivo General.....	8
1.5.2 Objetivos Específicos	8
1.6 Hipótesis	8
1.6.1 Hipótesis General	8
1.6.2 Hipótesis Específicas.....	8
1.7 Variables y Operacionalización de Variables.....	9
1.7.1 Operacionalización de las Variables	9
1.8 Metodología de la Investigación	10
1.8.1 Unidad de Análisis.....	10
1.8.2 Tipo, Enfoque y Nivel de Investigación	10
1.8.3 Diseño de Investigación.....	11

1.8.4	Fuente de Información.....	11
1.8.5	Población y Muestra	12
1.8.6	Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos	12
1.8.7	Análisis y Procesamiento de Datos.....	12
2.	Marco Teórico y Marco Conceptual.....	13
2.1	Bases Teóricas.....	13
2.1.1	Cinemática Directa e Inversa de un Manipulador Robótico.....	13
2.1.2	Modelo Dinámico de un Manipulador Robótico.....	15
2.1.3	Dinámica Directa y Dinámica Inversa de un Manipulador Robótico	15
2.1.4	Control Tracking por Dinámica Inversa en el Espacio de Juntas	16
2.1.5	Cinemática Diferencial y Jacobiano Analítico	18
2.1.6	Singularidades Cinemáticas	19
2.1.7	Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden	20
2.1.8	Perfil de Velocidad Trapezoidal	22
2.1.9	Perfil de Velocidad Trapezoidal con Límites de Velocidad y Aceleración.....	25
2.1.10	Trayectorias en el Espacio Operacional.....	25
2.1.11	Manipulador Robótico de Tres Grados de Libertad R2D2.....	30
2.2	Marco Conceptual	32
3.	Desarrollo del Trabajo de Investigación	34
3.1	Cinemática del Manipulador Robótico R2D2	34
3.1.1	Cálculo de la Cinemática Directa del Manipulador	34
3.1.2	Cálculo de la Cinemática Inversa del Manipulador	36
3.1.3	Cálculo del Jacobiano Analítico y su Derivada	37

3.1.4	Cálculo de las Singularidades del Manipulador	38
3.2	Espacio Operacional y Definición de Trayectorias	40
3.2.1	Espacio Operacional	40
3.2.2	Definición de la Trayectoria Rectilínea.....	41
3.2.3	Definición de la Trayectoria Rectangular	42
3.2.4	Definición de la Trayectoria Circular	44
3.3	Parametrización de Trayectorias Usando el Perfil Trapezoidal	45
3.3.1	Perfil de Velocidad Trapezoidal para la trayectoria Rectilínea	46
3.3.2	Perfil de Velocidad Trapezoidal para la trayectoria Rectangular	47
3.3.3	Perfil de Velocidad Trapezoidal para la trayectoria Circular	48
3.4	Diseño de las Trayectorias en el Espacio Operacional	49
3.4.1	Diseño de Trayectoria Rectilínea	50
3.4.2	Diseño de Trayectoria Rectangular.....	51
3.4.3	Diseño de Trayectoria Circular	52
3.5	Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden	53
4.	Resultados, Contrastación de Hipótesis y Discusión de Resultados	56
4.1	Resultados Según la Variación de Parámetros del Perfil Trapezoidal	56
4.1.1	Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Rectilínea	57
4.1.2	Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Rectangular.....	66
4.1.3	Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Circular.....	75
4.2	Resultados Según las Ganancias del Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden.....	87
4.2.1	Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Rectilínea	87

4.2.2	Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Rectangular.....	93
4.2.3	Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Circular.....	99
4.3	Simulaciones 3D de las Trayectorias Diseñadas	108
4.4	Contrastación de las Hipótesis	114
4.4.1	Contrastación de la Hipótesis General.....	114
4.4.2	Contrastación de las Hipótesis Específicas	115
4.5	Discusión de Resultados	116
Conclusiones		118
Recomendaciones		119
Referencias Bibliográficas		120
Anexos.....		122

Lista de Tablas

Tabla 1 Operacionalización de las Variables	9
Tabla 2 Distancias Entre los Ejes de los Sistemas Coordinados del Robot	31
Tabla 3 Límites de Posición, Velocidad y Aceleración de los Motores de Manipulador...	32
Tabla 4 Parámetros Denavit-Hartenberg	35
Tabla 5 Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°1	60
Tabla 6 Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°2	63
Tabla 7 Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°3	66
Tabla 8 Resultados de la Trayectoria Rectangular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°1	69
Tabla 9 Resultados de la Trayectoria Rectangular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°2	72
Tabla 10 Resultados de la Trayectoria Rectangular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°3	75
Tabla 11 Resultados de la Trayectoria Circular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°1	78
Tabla 12 Resultados de la Trayectoria Circular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°2	81
Tabla 13 Resultados de la Trayectoria Circular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°3	84
Tabla 14 Comparación de Resultados para la Trayectoria Rectilínea Según el Perfil Trapezoidal.....	85
Tabla 15 Comparación de Resultados para la Trayectoria Rectangular Según el Perfil Trapezoidal.....	86

Tabla 16 Comparación de Resultados para la Trayectoria Circular Según el Perfil Trapezoidal.....	87
Tabla 17 Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°1...	89
Tabla 18 Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°2...	91
Tabla 19 Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°3...	93
Tabla 20 Resultados de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°1	95
Tabla 21 Resultados de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°2	97
Tabla 22 Resultados de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°3	99
Tabla 23 Resultados de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°1	101
Tabla 24 Resultados de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°2	103
Tabla 25 Resultados de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°3	105
Tabla 26 Comparación de Resultados para la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias	106
Tabla 27 Comparación de Resultados para la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias	107
Tabla 28 Comparación de Resultados para la Trayectoria Circular Según las Ganancias	108

Lista de Figuras

Figura 1 Instalaciones Anuales de Robots Industriales de los 15 Mayores Mercados de 2022	6
Figura 2 Convención y Parámetros Denavit–Hartenberg	14
Figura 3 Diagrama de Bloques del Control por Dinámica Inversa	17
Figura 4 Diagrama de Bloques del Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden	22
Figura 5 Perfil Trapezoidal vs tiempo en Términos de Posición, Velocidad y Aceleración	23
Figura 6 Representación Paramétrica de una Trayectoria en el Espacio	26
Figura 7 Representación Paramétrica de una Recta en el Espacio	28
Figura 8 Representación Paramétrica de una Circunferencia en el Espacio	29
Figura 9 Manipulador Robótico de Tres Grados de Libertad R2D2	30
Figura 10 Sistemas Coordinados de Cada uno de los Grados de Libertad del Manipulador	31
Figura 11 Asignación de Parámetros Denavit-Hartenberg del Manipulador R2D2	34
Figura 12 Esquema para el Cálculo de la Cinemática Inversa del Manipulador	36
Figura 13 Singularidad Posible del Manipulador Robótico R2D2	40
Figura 14 Espacio de Trabajo del Manipulador	41
Figura 15 Trayectoria Rectilínea de Referencia	42
Figura 16 Trayectoria Rectangular de Referencia	43
Figura 17 Trayectoria Circular de Referencia	45
Figura 18 Perfil Trapezoidal para la Trayectoria Rectilínea	47
Figura 19 Perfil Trapezoidal para la Trayectoria Rectangular	48
Figura 20 Perfil Trapezoidal para la Trayectoria Circular	49
Figura 21 Trayectoria Rectilínea en el Espacio Operacional	51
Figura 22 Trayectoria Rectangular en el Espacio Operacional	52

Figura 23 Trayectoria Circular en el Espacio Operacional.....	53
Figura 24 Diagrama de Flujo del Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden .	55
Figura 25 Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°1.....	58
Figura 26 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°1	59
Figura 27 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°1 ...	59
Figura 28 Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°2.....	61
Figura 29 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°2	62
Figura 30 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°2 ...	62
Figura 31 Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°3.....	64
Figura 32 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°3	65
Figura 33 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°3 ...	65
Figura 34 Perfiles de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°1	67
Figura 35 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°1	68
Figura 36 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°1	68
Figura 37 Perfiles de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°2	70
Figura 38 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°2.....	71
Figura 39 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°2	71
Figura 40 Perfiles de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°3	73
Figura 41 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°3.....	74
Figura 42 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°3	74
Figura 43 Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Circular - Prueba N°1	76
Figura 44 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular - Prueba N°1	77
Figura 45 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Circular - Prueba N°1	77
Figura 46 Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Circular - Prueba N°2	79
Figura 47 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular - Prueba N°2.....	80

Figura 48 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Circular - Prueba N°2.....	80
Figura 49 Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Circular - Prueba N°3.....	82
Figura 50 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular - Prueba N°3.....	83
Figura 51 Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Circular - Prueba N°3.....	83
Figura 52 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°1	88
Figura 53 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°1	88
Figura 54 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°2.....	90
Figura 55 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°2	90
Figura 56 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°3.....	92
Figura 57 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°3	92
Figura 58 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°1	94
Figura 59 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°1	94
Figura 60 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°2.....	96
Figura 61 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°2.....	96
Figura 62 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°3.....	98
Figura 63 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°3.....	98

Figura 64 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°1	100
Figura 65 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°1	100
Figura 66 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°2	102
Figura 67 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°2	102
Figura 68 Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°3	104
Figura 69 Errores Cinemáticos de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°3	104
Figura 70 Posición Inicial del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Rectilínea	109
Figura 71 Posición Final del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Rectilínea	110
Figura 72 Posición Inicial del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Rectangular...	111
Figura 73 Posición Final del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Rectangular....	112
Figura 74 Posición Inicial del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Circular	113
Figura 75 Posición Inicial del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Circular	114

Introducción

La presente investigación aborda el diseño de trayectorias en el espacio de trabajo, mediante el uso del perfil de velocidad trapezoidal y del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, con la finalidad de limitar las velocidades y aceleraciones articulares del manipulador robótico R2D2.

En el Capítulo 1, se presentan las generalidades de la investigación, lo cual incluye la problemática de la investigación, los objetivos e hipótesis tanto generales como específicas. Además, se realiza la operacionalización de variables y se desarrolla la metodología de la investigación, siendo esta un pilar esencial para el desarrollo de la tesis.

En el Capítulo 2, se establecen las bases teóricas sobre las cuales se desarrolla la investigación; además, se describen los términos pertinentes al marco conceptual, lo que permite un mejor entendimiento de las palabras claves del trabajo.

En el Capítulo 3, se describe el procedimiento del desarrollo de la investigación, empezando por el cálculo de la cinemática del manipulador robótico; después, se define el espacio operacional y las trayectorias a generar. Seguidamente, se parametrizan las trayectorias usando el perfil trapezoidal y se especifican en el espacio operacional. Finalmente, se aplica el algoritmo de cinemática inversa para determinar las variables cinemáticas en el espacio de juntas para su posterior análisis.

En el Capítulo 4, se exponen los resultados de las simulaciones realizadas en Matlab, donde se realizaron pruebas para diferentes valores de velocidad y aceleración en la generación del perfil trapezoidal. Además, se realiza la contrastación de hipótesis y la contrastación de resultados.

Para concluir, se plantean las conclusiones y recomendaciones de la investigación, la bibliografía citada y los anexos donde se especifican las herramientas utilizadas.

CAPÍTULO I

1. Generalidades

1.1 Antecedentes de la Investigación

Wang et al. (2015)¹ publicaron una investigación cuyo objetivo fue planificar la trayectoria de un robot soldador basada en la curva de Bézier para aplicaciones en grúas torre. Como objeto de estudio se utiliza un sistema de robot soldador, el cual está comprendido por un manipulador de seis grados de libertad, un localizador de soldadura y otros equipos de soldadura. Se plantea un modelo óptimo para la planificación de la trayectoria en el menor tiempo posible, el cual se establece mediante la curva de Bézier teniendo como principal característica el procesamiento de subsecciones. Asimismo, tomando en consideración las restricciones como la velocidad angular y aceleración de las juntas, se presentan los pasos específicos de la operación de optimización del algoritmo genético (AG). Para el análisis de los resultados de la planificación de la trayectoria se hace uso de la simulación numérica. Los resultados muestran una curva suave y estable, y una reducción significativa del tiempo de operación de 21.45 s a 14.22 s. Esto mejoró la eficiencia de trabajo del robot, cumpliendo así con los requisitos de las operaciones de soldadura. Los autores concluyen que el método planteado reduce significativamente el tiempo de movimiento y mejora la eficacia del trabajo, obteniendo así resultados satisfactorios.

¹ Wang, C., Wang, X., & Zheng, H. (2015). *Trajectory Planning for a Welding Robot Based on the Bezier Curve*. Zhengzhou.

Rodas (2016)² desarrolló una tesis de investigación que tenía como objetivo diseñar e implementar un algoritmo de planificación de trayectoria para un brazo robótico articulado de cinco grados de libertad utilizando visión artificial. Emplea una metodología de carácter experimental, ya que se diseña, ensambla y evalúa el prototipo para su correspondiente estudio. Se emplea un brazo robótico de 5 grados de libertad como unidad de análisis. Utiliza un sistema de visión artificial desarrollado en el software Microsoft Visual Studio 2012 como instrumento de análisis. Asimismo, utilizó las imágenes de dos cámaras web como entradas para el sistema desarrollado, cuyas salidas fueron las coordenadas cartesianas de la trayectoria recorrida por el efector final desde un punto de referencia inicial hasta uno final. Los resultados obtenidos en las pruebas indican una eficacia del 100% en el posicionamiento del efector final en el espacio, una precisión del 96.36% en el posicionamiento y un error absoluto promedio de 1.65 cm en el espacio cartesiano. El autor concluye que la planificación de trayectorias es eficaz dentro del volumen de trabajo permitiendo tomar objetos mediante una garra y resolver problemas que requieran posicionar el efector final del brazo robótico.

Tam (2019)³ redactó una tesis de investigación la cual tenía como objetivo diseñar un robot serial tipo articular de seis grados de libertad para el seguimiento de trayectorias cortas en tres dimensiones, controlado mediante la estrategia de control de par calculado. El autor utiliza la simulación numérica como metodología para la obtención y análisis de resultados. Para la aplicación se utiliza un manipulador serial de seis grados de libertad con articulaciones rotacionales y de configuración cinemática tipo articular, el cual fue diseñado en software CAD. El desarrollo de la investigación se basó en la obtención de los parámetros del robot, el cálculo de la cinemática y la dinámica inversas, y el diseño de las trayectorias definidas por curvas suaves las cuales seguirá el robot. Por otro lado, se realizó la simulación del generador de trayectorias y el controlador no-lineal basado en la

² Rodas, R. (2016). *Planificación de trayectoria para un brazo robótico articulado de cinco grados de libertad utilizando visión artificial*. Lima.

³ Tam, A. (2019). *Diseño y simulación de un robot serial tipo articular, de 6 grados de libertad, con articulaciones rotacionales, para el seguimiento de trayectorias cortas reales en 3D, controlado mediante la estrategia de control de par calculado*. Lima.

estrategia de control por par calculado que permitió el seguimiento de trayectorias. Los resultados obtenidos en las simulaciones demostraron la efectividad del controlador al seguir las trayectorias, pero con un pequeño error debido a la omisión de la inductancia de los motores. Finalmente, el autor concluye que la estrategia de control diseñada logra efectuar el seguimiento de trayectoria con un error aceptable.

Torre y Medina (2019)⁴ redactaron una tesis de investigación cuyo objetivo fue diseñar un sistema de control de trayectorias de robot articulado utilizando redes neuronales. Se utilizó un robot articulado de tres grados de libertad como unidad de análisis, el cual fue diseñado e implementado considerando la parte mecánica, eléctrica y electrónica. Por otro lado, se utilizaron redes neuronales para la planeación de la trayectoria en un espacio cartesiano, haciendo uso de simulaciones de las articulaciones y movimientos del robot utilizando un *toolbox* de Matlab. Los resultados obtenidos para cada una de las articulaciones mostraron variaciones pequeñas de 0.2 cm y 0.15 cm, así como en otros casos con variaciones mayores, obteniendo un porcentaje del 75% de aciertos en el desplazamiento de punto a punto. Los autores concluyen que tanto el diseño del robot como el control realizado tuvieron resultados satisfactorios; sin embargo, este diseño puede mejorarse.

Chavez (2022)⁵ publicó una tesis de investigación cuyo objetivo era desarrollar y analizar el desempeño de un controlador no lineal (adaptativo) para el control de diferentes trayectorias y compararlo mediante la medición del error frente a 3 estrategias de control lineal, en un manipulador robótico de 2DOF. Como metodología se utilizó la simulación numérica, con la que se comprobaron los resultados según las variables y entradas del sistema. La unidad de análisis de esta investigación fue un robot de 2DOF. Como instrumento de análisis se realizó una comparación entre diferentes métodos de control aplicados a la trayectoria trazada por el robot, siendo el control adaptativo el método

⁴ Torre, M., & Medina, J. (2019). *Control de Trayectorias de Robot Articulado Utilizando Redes Neuronales*. Lima. Obtenido de <https://hdl.handle.net/20.500.12867/3353>

⁵ Chavez Cornejo, R. (2022). *Análisis de desempeño en simulación de un controlador adaptativo en el control de trayectoria de un manipulador robotico de 2 grados de libertad*. Arequipa.

principal, el cual no requiere un modelo exacto del robot. Dicho método fue comparado con el control PD, control PD aumentado y el control por torque computado, tomando como referencia al error de posición de las juntas como medida de comparación. Las pruebas realizadas con cada uno de los tipos de control mostraron que el control adaptativo presentó los menores índices de error para cada uno de los casos, llegando incluso a obtener un error del 4% respecto a los demás tipos de control; asimismo, se obtuvieron bajos sobreimpulsos y cortos tiempos de subida respecto a los otros tipos de controles. El autor concluye, con base en los objetivos, que la mejor estrategia de control fue el control no lineal adaptativo, presentado los menores índices de error y los menores tiempos de respuesta; sin embargo, estos resultados acarrearán un error notable de velocidad según la complejidad de las trayectorias y los niveles altos de torque.

Choe et al. (2023)⁶ redactaron un artículo de investigación en el cual presentan un método de planificación de trayectorias elípticas con segmentos rectos verticales para operaciones pick-and-place de un robot en donde tanto los puntos de recogida como los de colocación se cambian aleatoriamente en el espacio de trabajo. El objeto de estudio es el espacio de trabajo de un robot tipo pick-and-place con altura libre. La metodología utilizada se basó en la simulación numérica para la obtención de resultados, en donde se planteó una trayectoria elíptica bisecada asimétrica óptima con dos segmentos rectos verticales, y un método para generar un perfil de movimiento adecuado a la geometría de la trayectoria elíptica basada en el radio de curvatura. Los resultados de la simulación evidencian que el método de planificación de trayectorias planteado permite disminuir el espacio de trabajo y el periodo de ciclo de la operación de pick-and-place, reduciendo la longitud y altura de la trayectoria, asegurando la continuidad y la suavidad de la velocidad, la aceleración, y da lugar a la suavidad en el movimiento de los actuadores del robot. Los autores concluyen que el planteamiento realizado conlleva a resultados satisfactorios

⁶ Choe, M. S., Jang, K. S., Kim, Y. H., Kim, K. H., & Yang, W.-C. (2023). *An Approach for Elliptical Trajectory Planning with Vertical Straight Line Segments of Pick-and-Place Robot Operation with Height Clearance*. Pyongyang.

mejorando la reducción del espacio de trabajo, el tiempo de operación y la suavidad de parámetros de la trayectoria.

Sun et al. (2023)⁷ desarrollaron un proyecto de investigación el cual tuvo como objetivo resolver el problema de seguimiento de trayectoria de alta precisión del sistema de robot de soldadura de pórtico bajo la influencia de factores inciertos. Se utilizó un robot de soldadura de pórtico como objeto de estudio, sobre el cual se desarrolló la estrategia de control de retroalimentación difusa adaptativa, y la estrategia de control difuso adaptativo de zona muerta, ambas basadas en el método de par calculado (AFF-DZAF-CTC), que compensa los errores de modelado y las perturbaciones externas. Se usan la teoría de tornillos y el álgebra de Lie para resolver el problema de alta complejidad de controladores en manipuladores de múltiples grados de libertad debido al modelado de la dinámica de Newton-Euler. En las pruebas de seguimiento de trayectoria realizadas se compara dicho método de control con la estrategia de control de par computarizado de retroalimentación difusa adaptativa (AFF-CTC) y la estrategia de control de par computarizado (CTC). Los resultados muestran que la estrategia de control diseñada (AFF-DZAF-CTC) no solo mejoró la eficiencia computacional, sino también eliminó eficazmente la influencia de los errores de modelado, las perturbaciones externas y los factores no lineales de zona muerta. De este modo, los autores concluyen que el modelo desarrollado se redujo la complejidad del algoritmo de la ecuación dinámica, se mejoró la eficiencia computacional, y se eliminó los errores por perturbaciones, demostrando la eficacia y superioridad del modelo frente a los otros dos modelos de control.

1.2 Identificación y Descripción del Problema de Estudio

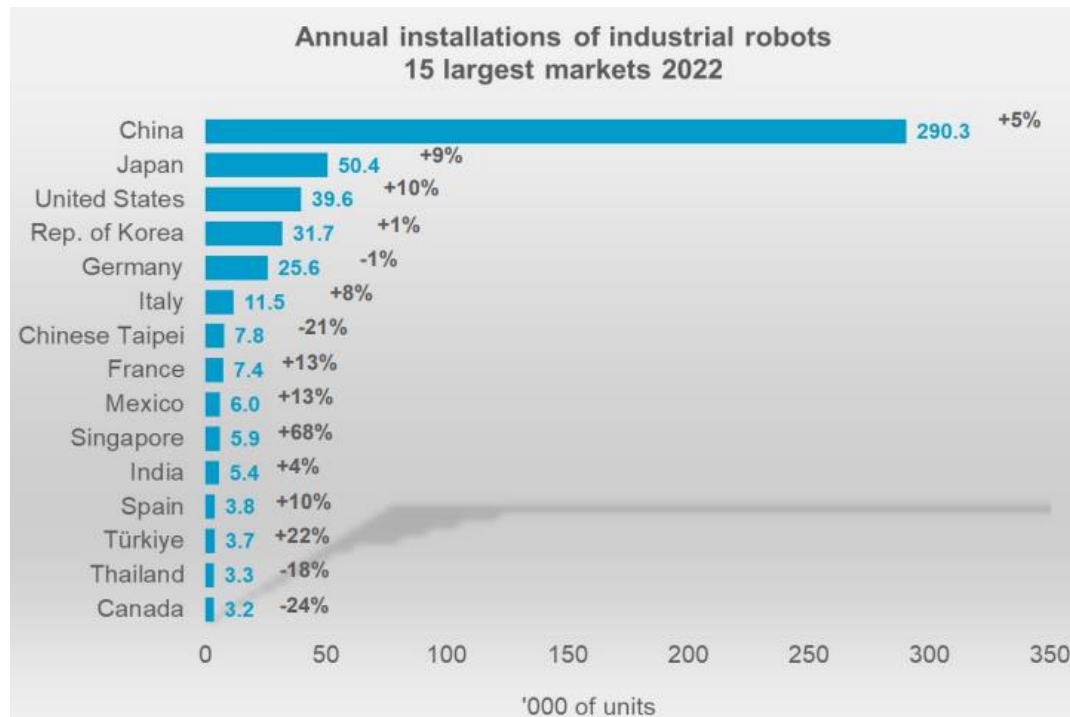
Hasta la década pasada, la industria de la robótica se limitaba a tareas altamente controladas en sectores específicos como la industria automotriz. Sin embargo, en la actualidad los robots se usan en diferentes sectores, y en una gran variedad de tareas, que van desde la agricultura de precisión hasta el cuidado de pacientes (Schwab, 2016).

⁷ Sun, H., Wang, H., Xu, Y., Yang, J., Ji, Y., Cheng, L., . . . Zhang, B. (2023). *Trajectory tracking control strategy of the gantry welding robot under the influence of uncertain factors*. China.

Según los datos del reporte de International Federation of Robotics (IFR) (2023) el país con mayores números de instalaciones de robots industriales acumuladas al año 2022 fue China, seguido por Japón, Estados Unidos, Corea y Alemania. Además, México es el país que más destaca en Latinoamérica, dicha información se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Instalaciones Anuales de Robots Industriales de los 15 Mayores Mercados de 2022



Nota. Adaptado de *World Robotics 2023 – Industrial Robots* [Gráfico], IFR, 2023, VDMA Services GmbH.

En el ámbito de los manipuladores robóticos, específicamente en las aplicaciones de seguimiento de trayectorias, uno de los principales problemas se centra en la planificación de trayectorias, lo cual implica determinar la posición, velocidad y aceleración en cada una de las juntas para una trayectoria geométrica específica desde una posición inicial hasta una posición final. En casos generales de funcionamiento a bajas velocidades y mientras que los ángulos de las juntas no se sobrepasen, se tiene poca influencia en la planificación de trayectorias; sin embargo, a velocidades altas de funcionamiento, las velocidades y aceleraciones en las juntas pueden exceder sus límites máximo permisibles, lo cual origina corrientes de funcionamiento elevadas. Esto se evidencia en vibraciones y sobrecalentamiento de los motores, y puede llegar a provocar accidentes graves como la

rotura de piezas del manipulador o incluso comprometer la seguridad de las personas involucradas en estas operaciones (Wang et al., 2015).

Lo que se plantea en la presente investigación es el diseño de trayectorias suaves y continuas, para ello se utiliza la parametrización de curvas en función a la longitud de arco usando el perfil trapezoidal para la obtención de los valores a lo largo de la trayectoria. Esto permitirá definir los valores máximos de velocidad y aceleración en cada una de las juntas, minimizando las vibraciones en los motores y logrando tiempos de navegación eficientes.

1.3 Formulación del Problema

1.3.1 Problema Principal

- ¿Es posible diseñar trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal aplicado al control tracking de un manipulador robótico de 3 GDL de manera eficiente?

1.3.2 Problemas Específicos

- ¿Cómo se comportan la velocidad y aceleración de las juntas en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal?
- ¿Qué tan satisfactorio es el tiempo de navegación en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal?
- ¿Es efectivo el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden en la obtención de trayectorias en el espacio de juntas planteado sobre el control tracking del manipulador de 3GDL?

1.4 Justificación e Importancia

El control tracking en manipuladores robóticos tiene una gran variedad de aplicaciones en industrias como la soldadura, pintura, medicina, ensamble de piezas, agricultura de precisión, investigación, etc. Por tal motivo es necesario un buen método de planificación de trayectorias acorde a la aplicación a desarrollar, la dinámica del manipulador y a los valores máximos permisibles de los actuadores que este posee.

Con base en lo mencionado, la presente investigación se justifica en el rol importante que desempeña la planificación de trayectorias en el control tracking de manipuladores, ya que la eficiencia y suavidad de dichas trayectorias depende de los valores de posición, velocidad y aceleración establecidos en cada una de las juntas del manipulador, en lo cual se basa la planificación de trayectorias.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo General

- Diseñar trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal aplicado al control tracking de un manipulador robótico de 3GDL.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Aplicar el método trapezoidal en la parametrización de trayectorias en el espacio operacional para limitar la velocidad y aceleración de las juntas.
- Determinar la variación del tiempo de navegación obtenido en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal.
- Evaluar la efectividad del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden en la obtención de trayectorias en el espacio de juntas aplicado al control tracking del manipulador de 3GDL.

1.6 Hipótesis

1.6.1 Hipótesis General

- El diseño de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal aplicado al control tracking de un manipulador robótico de 3GDL es eficiente.

1.6.2 Hipótesis Específicas

- Al aplicar el método trapezoidal a la planificación de trayectorias en el espacio operacional se obtienen valores permisibles de velocidad y aceleración en las juntas.
- El tiempo de navegación obtenido en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal es satisfactorio.

- Resulta efectivo el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden en la obtención de trayectorias en el espacio de juntas sobre el control tracking del manipulador de 3GDL.

1.7 Variables y Operacionalización de Variables

Hernández et al., (2014) definen a las variables como aquellos elementos o propiedades capaces de variar y dicha variación es susceptible a ser medida u observada.

En esta investigación se definen dos tipos de variables:

- Dependiente: Diseño de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal
- Independiente: Control tracking de un manipulador 3GDL

1.7.1 Operacionalización de las Variables

A continuación, se muestra el procedimiento metodológico el cual consta de descomponer de manera deductiva las variables que constituyen la investigación, empezando desde lo más general hacia lo más específico. Esto, con la finalidad de validar y demostrar la formulación de la hipótesis.

Tabla 1

Operacionalización de las Variables

Variables	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores	Escala de Medición	Unidad de Medición
Variable Independiente: Diseño de trayectorias usando el método trapezoidal	Planificación de trayectorias en el espacio siguiendo un perfil de velocidad y aceleración bien definido.	Definición de las posiciones, velocidades y aceleraciones en el espacio de juntas para una trayectoria deseada utilizando como base el método trapezoidal.	Tipos de trayectorias	Suavidad de las trayectorias	Ordinal	-
			Algoritmo de obtención de trayectorias en el espacio de juntas	Complejidad del algoritmo	Ordinal	-

Variable Dependiente: Control tracking de un manipulador 3GDL	Técnica utilizada para realizar el seguimiento del efector final de un manipulador a través de un camino predefinido.	Método de ingeniería aplicado a la electrónica de un manipulador robótico para la precisión en el seguimiento de trayectorias bien definidas considerando la dinámica del robot.	Comportamiento de los motores	Límites de velocidad y aceleración	Razón	rad/s y rad/s ²
			Tiempo de navegación	Tiempo Eficiencia en la navegación	Razón	Segundos

Nota. Elaboración propia.

1.8 Metodología de la Investigación

1.8.1 Unidad de Análisis

Como unidad de análisis se tiene el control tracking por dinámica inversa en el espacio de juntas de un manipulador de 3 GDL de bajo costo, con el cual se evaluarán la efectividad de la planificación de trayectorias, mediante los parámetros y variables de diseño.

1.8.2 Tipo, Enfoque y Nivel de Investigación

Las investigaciones aplicadas se identifican por tomar en cuenta los fines prácticos del conocimiento, es decir, su finalidad es utilizar el desarrollo del conocimiento técnico en una aplicación inmediata para solucionar una situación concreta (Escudero & Cortez, 2018).

De lo anterior descrito, se puede concluir que la presente investigación es de tipo aplicada, ya que busca resolver el problema de planificación de trayectorias aplicada al control tracking de un manipulador robótico.

El enfoque cuantitativo es un proceso secuencial que lleva a cabo un orden riguroso. Parte de una idea que es acotada generando así objetivos y preguntas de investigación con lo cual se revisa la literatura y se construye un marco teórico. De las preguntas se establecen hipótesis y definen variables; se traza un plan para probar estas

hipótesis; se miden las variables en un contexto determinado; asimismo, se analizan las mediciones obtenidas y se extraen las conclusiones respecto a las hipótesis (Hernández et al., 2014).

Según lo señalado, el enfoque de la presente investigación se define como cuantitativo, ya que utiliza la recolección de datos para probar las hipótesis usando la medición numérica y el análisis estadístico de los errores en la aplicación del planeamiento de trayectorias sobre el control tracking de un manipulador de 3GDL.

Los estudios de alcance explicativo tienen como objetivo explicar por qué motivo se produce un fenómeno y bajo qué condiciones se evidencia o por qué se relacionan dos o más variables. Se enfoca en responder a las causas de los sucesos y fenómenos físicos o sociales (Hernández et al., 2014).

Considerando lo expuesto, esta investigación tiene un nivel o alcance explicativo pues busca conocer cómo el diseño de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal logra mejorar la eficiencia del control tracking de un manipulador de 3GDL.

1.8.3 *Diseño de Investigación*

Un estudio experimental es aquel en el que se manipulan intencionalmente una o más variables independientes para analizar las consecuencias que esta manipulación tiene sobre una o más variables dependiente, todo esto bajo condiciones controladas por el investigador (Hernández et al., 2014).

Conforme a lo explicado, esta investigación posee un diseño experimental, pues se busca evaluar el control tracking de un manipulador 3 GDL el cual será aplicado con la planificación de trayectorias usando el método trapezoidal.

1.8.4 *Fuente de Información*

La presente investigación emplea fuentes de información primaria y secundaria. En las fuentes primarias se destacan los artículos científicos, tesis de pregrado y maestría, libros especializados en robótica, informes estadísticos de organismos internacionales y datos recolectados en las simulaciones de los diferentes tipos de trayectorias diseñadas.

Por otro lado, en las fuentes secundarias se evidencia el uso de softwares, guías de programación, manuales técnicos, entre otros.

1.8.5 Población y Muestra

La población o universo es definida por Hernández et al. (2014) como “Conjunto de todos los casos que concuerdan con determinadas especificaciones”. Para esta investigación se define a la población como todas las configuraciones de posición, velocidad y aceleración que se pueden tomar en cada una de las juntas del manipulador robótico; donde la posición es limitada por el espacio de trabajo y la velocidad y aceleración limitadas por las características de los motores situados en cada una de las juntas.

Por su parte, la muestra está conformada por los valores de posición, velocidad y aceleración diseñadas para cada una de las trayectorias a realizar sean estas rectilíneas, rectangulares o circulares.

1.8.6 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Como técnica de recolección de datos se utiliza el software MATLAB, donde se modela la dinámica del manipulador, se generan las trayectorias por medio de algoritmos y se obtienen los resultados, esto para diferentes trayectorias y con distintos parámetros de configuración.

A su vez, se realizan pruebas de funcionamiento real, donde los instrumentos de recolección de datos son los encoder de cada motor de las juntas, dichos datos son procesados en el microcontrolador y enviado hacia el Software MATLAB para su visualización y análisis.

1.8.7 Análisis y Procesamiento de Datos

Los datos obtenidos al diseñar los diferentes tipos de trayectorias son ploteados y analizados según las variaciones de los parámetros del perfil trapezoidal y las ganancias del algoritmo de cinemática inversa.

CAPÍTULO II

2. Marco Teórico y Marco Conceptual

2.1 Bases Teóricas

2.1.1 Cinemática Directa e Inversa de un Manipulador Robótico

Sea un manipulador robótico, el cual está conformado por n articulaciones y $n + 1$ eslabones, donde el eslabón 0 está típicamente fijado al suelo. Además, se entiende que cada una de las articulaciones proporciona al manipulador un único grado de libertad, el cual es correspondiente a la variable de dicha articulación.

El cálculo de la cinemática directa se deriva al encontrar una relación cinemática entre eslabones consecutivos y luego, utilizando un método recursivo, obtener la descripción general de la cinemática del manipulador. Con este objetivo, es indispensable definir un sistema de coordenadas asociado a cada eslabón, desde el Eslabón 0 hasta el Eslabón n (Siciliano et al., 2009).

De este modo, la transformación de coordenadas que representa la posición y orientación del sistema coordenado n respecto al sistema coordenado 0 viene dada por:

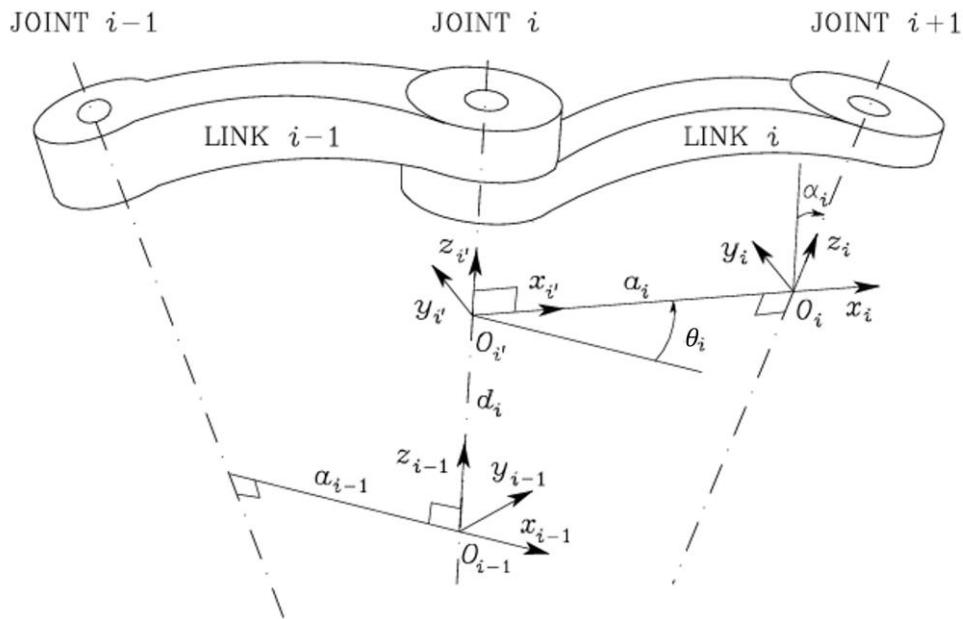
$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2) \cdots A_n^{n-1}(q_n) \quad (1)$$

Donde $A_i^{i-1}(q_i)$ representa la matriz de transformación homogénea del sistema coordenado i respecto al sistema coordenado $i - 1$, siguiendo la convención y los parámetros de Denavit–Hartenberg, como se muestra en la Figura 2.

$$A_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Figura 2

Convención y Parámetros Denavit–Hartenberg



Nota. Tomado de *Robotics, Modelling, Planning and Control* [Diagrama], Siciliano et al., 2009, Springer.

Por otro lado, la cinemática inversa se enfoca en el cálculo de las variables de las juntas a partir de una posición y orientación definidas del efector final. La resolución de esta problemática es de suma importancia para el seguimiento de movimientos deseados en el espacio operacional, ya que permite determinar las configuraciones correspondientes en las juntas para dicha ejecución del movimiento (Siciliano et al., 2009).

Existen múltiples métodos para el cálculo de la cinemática inversa de un manipulador, uno de ellos es el enfoque geométrico el cual se prefiere por dos principales razones. La primera porque la mayoría de los manipuladores en la actualidad son simples con parámetros de enlace nulos, esto es, a_i y/o d_i toman el valor de 0, resultando α_i en valores de 0 o $\pm\pi/2$. Y la segunda porque existen pocas técnicas capaces de manejar el problema de la cinemática inversa para configuraciones arbitrarias considerando que la complejidad aumenta con el número de grados de libertad (Spong et al., 2020).

El concepto general del método geométrico es encontrar la variable q_i realizando una proyección del manipulador sobre el plano $x_{i-1} - y_{i-1}$ y resolver un simple problema de trigonometría.

2.1.2 Modelo Dinámico de un Manipulador Robótico

El modelo dinámico de un robot manipulador facilita la interpretación de todos los fenómenos físicos presentes en su estructura mecánica, tales como efectos inerciales, fuerzas centrípetas y de Coriolis, par gravitacional y fricción que son fenómenos inherentes o característicos de la naturaleza dinámica del manipulador (Reyes, 2011).

Para un manipulador robótico de n grados de libertad, el modelo dinámico en el espacio de juntas basado en la formulación de Lagrange en su forma compacta se muestra en la Ecuación 3.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3)$$

Donde:

$q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: vector de posición de las juntas

$\dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: vector de velocidad de las juntas

$\ddot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: vector de aceleraciones de las juntas

$g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: vector de gravedad

$\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: vector de torques aplicados en las juntas

$D \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matriz de inercia

$C \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: matriz de fuerzas centrípetas y Coriolis

$F_v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: matriz de torques de fricción viscosa

2.1.3 Dinámica Directa y Dinámica Inversa de un Manipulador Robótico

La problemática de la dinámica directa radica en calcular las aceleraciones de las juntas $\ddot{q}(t)$ (en consecuencia, velocidades y posiciones), a partir de los torques articulares dados y/o fuerzas aplicadas en las juntas o efector final una vez que se conozca el estado inicial del sistema, es decir, posiciones iniciales $q(t_0)$ y velocidades iniciales $\dot{q}(t_0)$ (Siciliano et al., 2009).

Tomando como base la Ecuación 3, podemos expresar la aceleración como:

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)(\tau - \tau') \quad (4)$$

Donde:

$$\tau' = C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) \quad (5)$$

A partir de la Ecuación 4 podemos obtener las velocidades y posiciones de las juntas utilizando un método de integración numérica tomando como base un tiempo de muestreo Δt .

$$\dot{q}(t_{k+1}) = \dot{q}(t_k) + \ddot{q}(t_k)\Delta t \quad (6)$$

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\Delta t \quad (7)$$

Por el contrario, el problema de la dinámica inversa se centra en computar los torques aplicados en las juntas $\tau(t)$ necesario para generar el movimiento especificado por las aceleraciones $\ddot{q}(t)$, velocidades $\dot{q}(t)$ y posiciones $q(t)$ de las juntas.

2.1.4 Control Tracking por Dinámica Inversa en el Espacio de Juntas

Este tipo de control emplea la dinámica del manipulador como compensación en el lazo de retroalimentación con la finalidad de linealizar y desacoplar la dinámica no lineal del sistema (Reyes, 2011).

Considerando nuevamente el modelo dinámico de un manipulador de la Ecuación 3, y definiendo a u como la señal de control, obtenemos:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = u \quad (8)$$

El principal objetivo de la dinámica inversa es encontrar la ley de control u de tal forma que, al sustituirse en la Ecuación 8, dé como resultado un sistema lineal desacoplado. Así, eligiendo al vector u como:

$$u = D(q)y + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) \quad (9)$$

Siendo la matriz de inercia $D(q)$ invertible, el sistema se reduce a:

$$\ddot{q} = y \quad (10)$$

A la Ecuación 9 se le denomina control por dinámica inversa, ya que la ley de control u está basada en la dinámica inversa del manipulador, por otro lado, el sistema bajo la Ecuación 10 es lineal y desacoplado respecto al nuevo vector de entrada a definir y . Típicamente se elige una señal de control del tipo PD.

$$y = K_P(q_d - q) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + \ddot{q}_d \quad (11)$$

Donde q_d , $\dot{q}_d$ y $\ddot{q}_d$ son las posiciones, velocidades y aceleraciones deseadas de las juntas respectivamente. Asimismo, se definen los vectores de error de posición $\tilde{q}$, velocidad $\dot{\tilde{q}}$ y aceleración $\ddot{\tilde{q}}$.

$$\tilde{q} = q_d - q \quad (12)$$

$$\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (13)$$

$$\ddot{\tilde{q}} = \ddot{q}_d - \ddot{q} \quad (14)$$

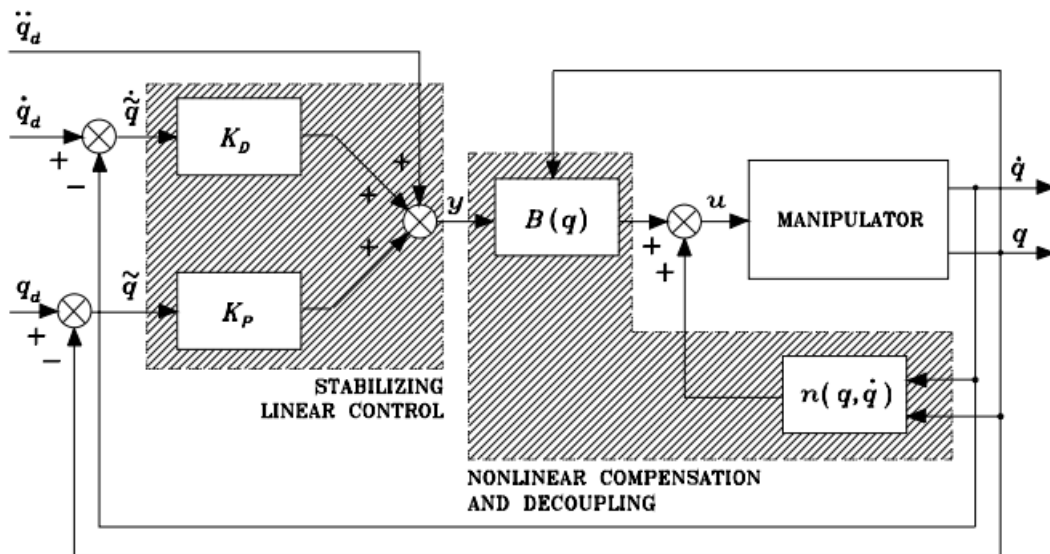
Finalmente, sustituyendo la Ecuación 11 en la Ecuación 10, y reemplazando los vectores de error, se obtiene la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden que expresa la dinámica del error de posición mientras se sigue la trayectoria deseada.

$$\ddot{\tilde{q}} + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q} = 0 \quad (15)$$

El diagrama de bloques se observa en la Figura 3, donde se pueden apreciar dos bucles de retroalimentación; un bucle interno basado en el modelo dinámico del manipulador y cuya función es obtener una relación entrada/salida lineal y desacoplada, y a su vez un bucle externo que opera sobre el error de seguimiento y cuya función es estabilizar el sistema global (Siciliano et al., 2009).

Figura 3

Diagrama de Bloques del Control por Dinámica Inversa



Nota. Tomado de *Robotics, Modelling, Planning and Control* [Diagrama], Siciliano et al., 2009, Springer.

2.1.5 Cinemática Diferencial y Jacobiano Analítico

Para poder controlar un manipulador robótico en el espacio, es imprescindible definir la posición y la orientación del efector final, a lo cual denominamos cinemática directa (Siciliano et al., 2009).

Una forma de expresar la cinemática directa en el espacio de tareas es hacerlo en términos de un número mínimo de parámetros, la cual se muestra en la Ecuación 16.

$$x_e = \begin{bmatrix} p_e \\ \phi_e \end{bmatrix} \quad (16)$$

Donde el vector p_e describe la posición del efector final y el vector ϕ_e su orientación. Además, teniendo en consideración la cinemática directa en el espacio articular $k(\cdot)$, la cual permite determinar las variables en el espacio de tareas a partir de las variables del espacio de juntas, podemos definir.

$$x_e = k(q) \quad (17)$$

Teniendo esto en consideración, es posible expresar la velocidad traslacional del efector final respecto al sistema de origen como la derivada temporal del vector p_e según la siguiente ecuación.

$$\dot{p}_e = \frac{\partial p_e}{\partial q} \dot{q} = J_P(q) \dot{q} \quad (18)$$

En lo que respecta a la velocidad rotacional del efector final, se determina como la derivada temporal del vector ϕ_e en su representación mínima en término de tres variables.

$$\dot{\phi}_e = \frac{\partial \phi_e}{\partial q} \dot{q} = J_\phi(q) \dot{q} \quad (19)$$

Tomando como punto de partida a las ecuaciones descritas, podemos obtener la ecuación de la cinemática diferencial como la derivada temporal de la cinemática directa.

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q) \dot{q} \quad (20)$$

Donde $J_A(q)$ se define como el Jacobiano analítico del manipulador.

$$J_A(q) = \frac{\partial k(q)}{\partial q} \quad (21)$$

Considerando solo la velocidad de traslación del efector final para un manipulador de tres grados de libertad, podemos definir los elementos de la matriz jacobiana de la siguiente forma.

$$J_A(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_x(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial k_x(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial k_x(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial k_y(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial k_y(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial k_y(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial k_z(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial k_z(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial k_z(q)}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (22)$$

De igual manera se procede con la derivada temporal del Jacobiano analítico.

$$\frac{\partial J_A(q)}{\partial q} = \dot{J}_A(q) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{11}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{12}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{13}}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{21}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{22}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{23}}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{31}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{32}}{\partial q_i} \dot{q}_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{33}}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

2.1.6 Singularidades Cinemáticas

Como se definió en la Ecuación 20, el Jacobiano analítico representa una relación entre el vector de velocidades de las juntas $\dot{q}$ y el vector de velocidades del efector final, esto conlleva que cualquier velocidad del efector final se pueda representar como combinaciones lineales de las columnas de la matriz jacobiana, tal y como se muestra en la Ecuación 24 (Spong et al., 2020).

$$\dot{x}_e = J_{A1}\dot{q}_1 + J_{A2}\dot{q}_2 + \dots + J_{An}\dot{q}_n \quad (24)$$

Sabiendo que el rango de una matriz es el número de columnas (o filas) linealmente independientes, para la matriz jacobiana siempre se cumple que $rank(J_A) \leq \min(6, n)$.

Al depender la matriz jacobiana directamente del vector q hace que esta no sea constante y, en consecuencia, su rango puede variar. Las configuraciones de q para las cuales el rango la matriz jacobiana es menor que su valor máximo se denominan singularidades o configuraciones singulares, un método para determinar aquellas

configuraciones para matrices jacobianas de orden tres es el método del determinante para el cálculo del rango de la matriz, tal como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\det(J_A(q)) = 0 \quad (25)$$

Determinar e identificar estas configuraciones singulares es importante por diversas razones.

- Las singularidades representan a aquellas configuraciones en las cuales se ve limitado el movimiento del manipulador, es decir, direcciones que son imposibles de alcanzar por el efector final.
- En las singularidades, las velocidades, fuerzas y torques limitados del efector final pueden corresponder a sus valores máximos o no limitados.
- Cuando el efector final está cerca de una singularidad no existirá una única solución para el problema de la cinemática inversa o puede haber infinitas soluciones.

2.1.7 Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden

Este tipo de algoritmo permite invertir una trayectoria de movimiento especificada en términos de posición, velocidad y aceleración; es decir, permite la obtención de las posiciones, velocidades y aceleraciones de las juntas a partir de la definición de la trayectoria en el espacio operacional (Siciliano et al., 2009).

Derivando la ecuación de la cinemática diferencial expresada en la Ecuación 20, podemos obtener la relación entre las aceleraciones en el espacio de juntas y las aceleraciones del espacio operacional.

$$\ddot{x}_e = J_A(q)\ddot{q} + \dot{J}_A(q, \dot{q})\dot{q} \quad (26)$$

Asumiendo que la matriz jacobiana J_A es cuadrada y no singular, podemos obtener las aceleraciones de las juntas con la ecuación.

$$\ddot{q} = J_A^{-1}(q)(\ddot{x}_e - \dot{J}_A(q, \dot{q})\dot{q}) \quad (27)$$

Para obtener las posiciones y velocidades se utilizan métodos de integración numérica, donde se evalúa la matriz jacobiana junto con las variables de las juntas en un

instante de tiempo anterior, lo cual genera un “drift” que causa que la configuración del efector final difiera de la configuración deseada (Siciliano et al., 2009).

Esto se puede corregir considerando el error entre la configuración del efector final y la configuración deseada, y sus derivadas.

$$e = x_d - x_e \quad (28)$$

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x}_e \quad (29)$$

$$\ddot{e} = \ddot{x}_d - \ddot{x}_e \quad (30)$$

Reemplazando la Ecuación 26 en la Ecuación 30 se tiene:

$$\ddot{e} = \ddot{x}_d - J_A(q)\ddot{q} - \dot{J}_A(q, \dot{q})\dot{q} \quad (31)$$

Por otro lado, conviene definir el siguiente vector de aceleración $\ddot{q}$, el cual está relacionado con el vector de error e .

$$\ddot{q} = J_A^{-1}(q)(\ddot{x}_d + K_D\dot{e} + K_P e - \dot{J}_A(q, \dot{q})\dot{q}) \quad (32)$$

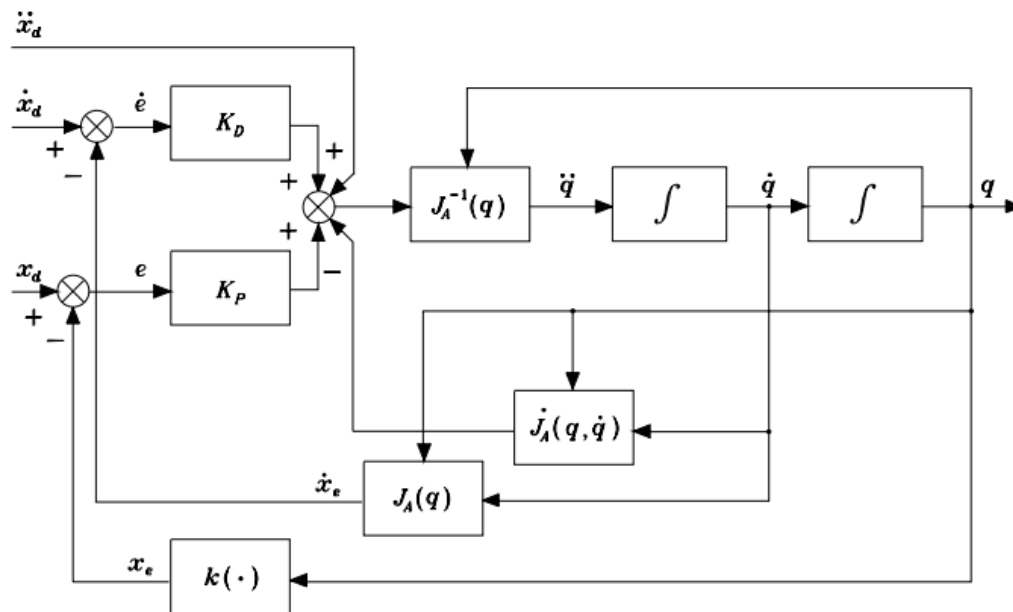
Donde K_D y K_P son matrices definidas positivas. Entonces, al reemplazar la Ecuación 32 en la Ecuación 31 se obtiene el siguiente sistema lineal del error.

$$e + K_D\dot{e} + K_P e = 0 \quad (33)$$

El cual es asintóticamente estable, lo que implica que la tasa de error converge a cero dependiendo de la elección de las matrices K_D y K_P . El algoritmo descrito se muestra en la Figura 4.

Figura 4

Diagrama de Bloques del Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden



Nota. Tomado de *Robotics, Modelling, Planning and Control* [Diagrama], Siciliano et al., 2009, Springer.

2.1.8 Perfil de Velocidad Trapezoidal

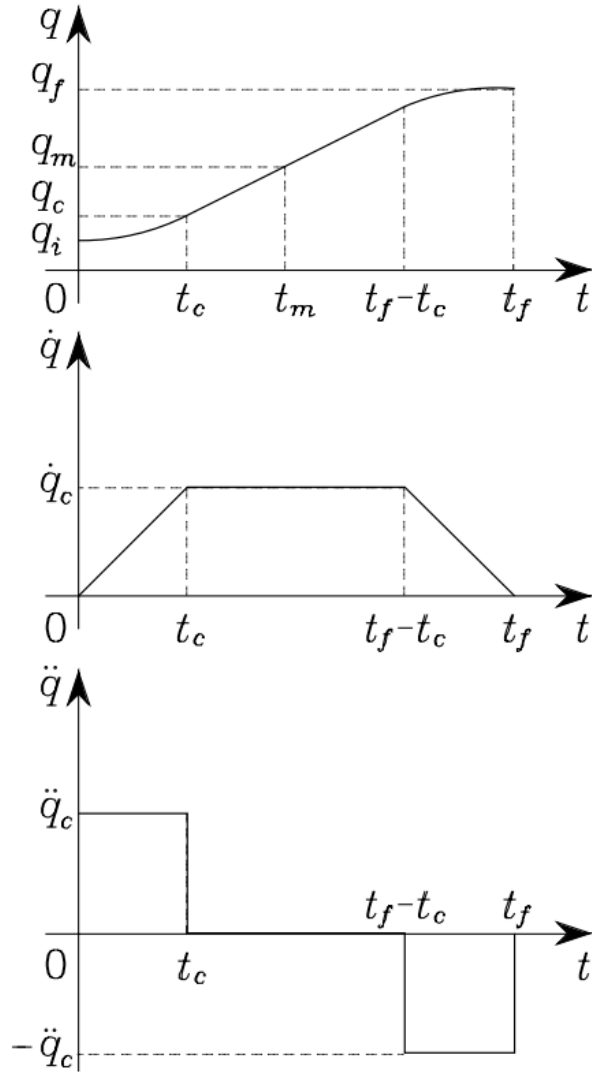
Este método de generación de trayectorias es usado comúnmente en el ámbito industrial, ya que permite verificar con facilidad las velocidades y aceleraciones que pueden ser soportadas por el manipulador robótico (Siciliano et al., 2009).

Consiste en asignar un perfil de velocidad trapezoidal, lo cual implica una aceleración constante en la fase inicial, una velocidad máxima constante denominada velocidad de cruce y una desaceleración constante en la fase de llegada. La trayectoria resultante está formada por un segmento de línea conectado por dos segmentos parabólicos en las posiciones inicial y final.

Los siguientes problemas se formulan suponiendo que el tiempo final t_f de duración de la trayectoria a realizar ya se ha establecido.

Figura 5

Perfil Trapezoidal vs tiempo en Términos de Posición, Velocidad y Aceleración



Nota. Tomado de *Robotics, Modelling, Planning and Control* [Diagrama], Siciliano et al., 2009, Springer.

Como se puede ver en la Figura 5 se asume que ambas velocidades inicial y final son nulas y los segmentos con aceleración constante $\ddot{q}$ tienen la misma duración. Además, de la simetría del perfil de velocidad trapezoidal se puede obtener la posición en el punto medio $q_m = (q_f + q_i)/2$ para un tiempo medio $t_m = t_f/2$.

La velocidad de cruce $\dot{q}_c$ se puede determinar como la pendiente entre los puntos q_c y q_m de la trayectoria, o bien en función de la aceleración de cruce $\ddot{q}_c$ (teniendo en cuenta que $\dot{q}(0) = 0$).

$$\dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c} \quad (34)$$

Reemplazando las expresiones q_m y t_m en la Ecuación 34 se obtiene lo siguiente.

$$\ddot{q}_c t_c = \frac{q_i + q_f - 2q_c}{t_f - 2t_c} \quad (35)$$

Por otro lado, en la trayectoria parabólica desde el punto q_i al punto q_c se cumple la siguiente ecuación.

$$q_c = q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t_c^2 \quad (36)$$

Reemplazando la Ecuación 36 en la Ecuación 35 se obtiene:

$$\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0 \quad (37)$$

Normalmente $\ddot{q}_c$ se especifica con la restricción $\text{sgn}(\ddot{q}_c) = \text{sgn}(q_f - q_i)$, por lo tanto, para t_f , q_i y q_f dados, se puede calcular t_c a partir de la siguiente ecuación.

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}} \quad (38)$$

Con base en la Ecuación 38, se establece que la aceleración está sujeta a:

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2} \quad (39)$$

Finalmente, para hallar la velocidad de cruce $\dot{q}_c$ se utiliza la Ecuación 34.

Especificar la aceleración de cruce $\ddot{q}_c$ no es la única manera de definir trayectorias usando el perfil de velocidad trapezoidal. Una opción es establecer la velocidad de cruce $\dot{q}_c$ con t_f , q_i y q_f dados, la cual está sujeta a la siguiente restricción.

$$\frac{|q_f - q_i|}{t_f} \leq |\dot{q}_c| \leq \frac{2|q_f - q_i|}{t_f} \quad (40)$$

Reemplazando $\dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c$ en la Ecuación 37 se calcula t_c según:

$$t_c = \frac{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}{\dot{q}_c} \quad (41)$$

Por último, al igual que en método anterior se calcula la aceleración de cruce $\ddot{q}_c$ utilizando la Ecuación 34.

Resumiendo, el primer método para la obtención de trayectorias se centra en especificar la aceleración de cruce $\ddot{q}_c$, mientras el segundo método se centra en especificar la velocidad de cruce $\dot{q}_c$, ambos con t_f , q_i y q_f dados.

2.1.9 Perfil de Velocidad Trapezoidal con Límites de Velocidad y Aceleración

En la práctica industrial, el usuario puede elegir el porcentaje de velocidad respecto a la velocidad máxima de trabajo permitida; esto con el objetivo de evitar casos donde, al especificar tiempos de navegación o duración de movimiento muy cortos, se produzcan valores de velocidades y/o aceleraciones bastante grandes, más allá de los límites permitidos por los actuadores del manipulador (Siciliano et al., 2009).

De este modo, dados q_i y q_f y definiendo la aceleración de cruce $\ddot{q}_c$ y la velocidad de cruce $\dot{q}_c$ como el porcentaje de la velocidad máxima de trabajo, es posible determinar el tiempo final de movimiento al reemplazar $\dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c$ en la Ecuación 37, según:

$$t_f = t_c + \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_c} \quad (42)$$

Por otro lado, se establece la restricción de aceleración de cruce con la ecuación $\text{sgn}(\ddot{q}_c) = \text{sgn}(q_f - q_i)$, asimismo la velocidad de cruce mantiene la restricción descrita en la Ecuación 40.

Finalmente, es posible expresar la trayectoria q en el tiempo y en función de los parámetros obtenidos, tal como se muestra a continuación.

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2; & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \dot{q}_c t_c \left(t - \frac{t_c}{2}\right); & t_c \leq t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2; & t_f - t_c \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (43)$$

2.1.10 Trayectorias en el Espacio Operacional

Cuando se requiere que el movimiento del efector final de un manipulador robótico siga una trayectoria definida geométricamente en el espacio operacional, es imprescindible planificar la trayectoria directamente en el mismo espacio, considerando las restricciones y características geométricas (Siciliano et al., 2009).

Sea p un vector (3×1) y $f(\sigma)$ una función vectorial continua definida en el intervalo $[\sigma_i, \sigma_f]$. Considerando la ecuación con referencia a su descripción geométrica.

$$p = f(\sigma) \quad (44)$$

Se le denomina trayectoria en el espacio a la secuencia de valores de p con el parámetro σ variando en $[\sigma_i, \sigma_f]$. Esta ecuación define la representación paramétrica de la trayectoria Γ .

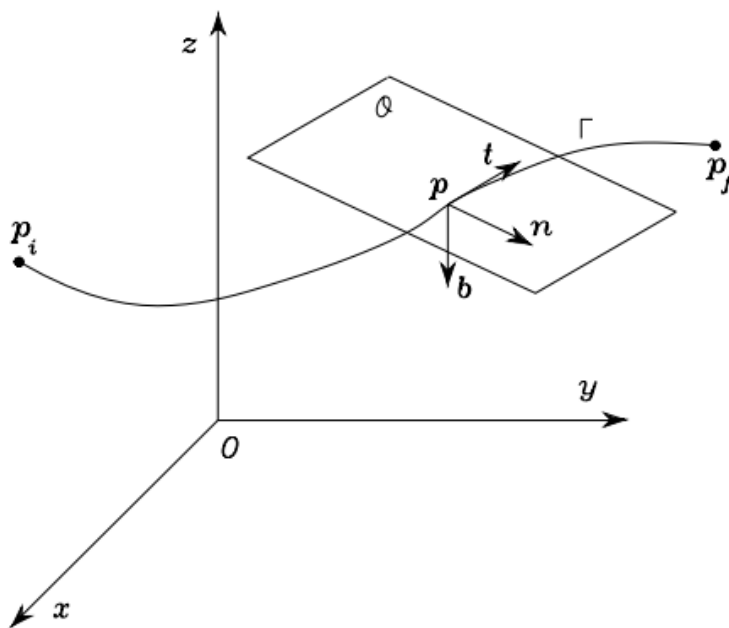
Sea p un punto de la trayectoria abierta Γ en que tiene una dirección establecida. La longitud del arco s del punto p es aquella longitud de arco con extremos p_i y p . De lo mencionado, se puede deducir que para cada valor de s corresponde un punto de la trayectoria bien definido; por lo tanto, esta longitud de arco puede utilizarse como una representación paramétrica de la trayectoria Γ , según:

$$p = f(s) \quad (45)$$

Con excepción de casos particulares, el vector p permite establecer tres vectores unitarios que caracterizan la trayectoria, y cuya orientación depende de la geometría de la trayectoria, lo cual se muestra en la Figura 6.

Figura 6

Representación Paramétrica de una Trayectoria en el Espacio



Nota. Tomado de *Robotics, Modelling, Planning and Control* [Diagrama], Siciliano et al., 2009, Springer.

El primero de estos vectores unitarios es t denominado vector unitario tangente, el cual está orientado a lo largo de la dirección inducida en la trayectoria por s .

$$t = \frac{dp}{ds} \quad (46)$$

El segundo vector unitario es n denominado vector unitario normal, el cual está orientado a lo largo de la línea que divide a p en un ángulo recto con t y se encuentra en el denominado plano osculante.

$$n = \frac{1}{\left\| \frac{d^2p}{ds^2} \right\|} \frac{d^2p}{ds^2} \quad (47)$$

El tercer vector unitario es b denominado vector unitario binormal el cual se obtiene del producto vectorial de t y n , siguiendo la convención de la mano derecha.

$$b = t \times n \quad (48)$$

2.1.10.1 Ruta Rectilínea

Dado el segmento recto que conecta a los puntos p_i y p_f mostrado en la Figura 7, es posible representar paramétricamente a esta trayectoria de la siguiente manera.

$$p(s) = p_i + \frac{s}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \quad (49)$$

Se aprecia que al evaluar la Ecuación 48 en 0 se obtiene p_i , y al hacerlo en $\|p_f - p_i\|$ se obtiene p_f , lo cual evidencia que la dirección inducida en la trayectoria Γ va desde p_i hacia p_f .

Por otro lado, al derivar la Ecuación 48 respecto al parámetro s :

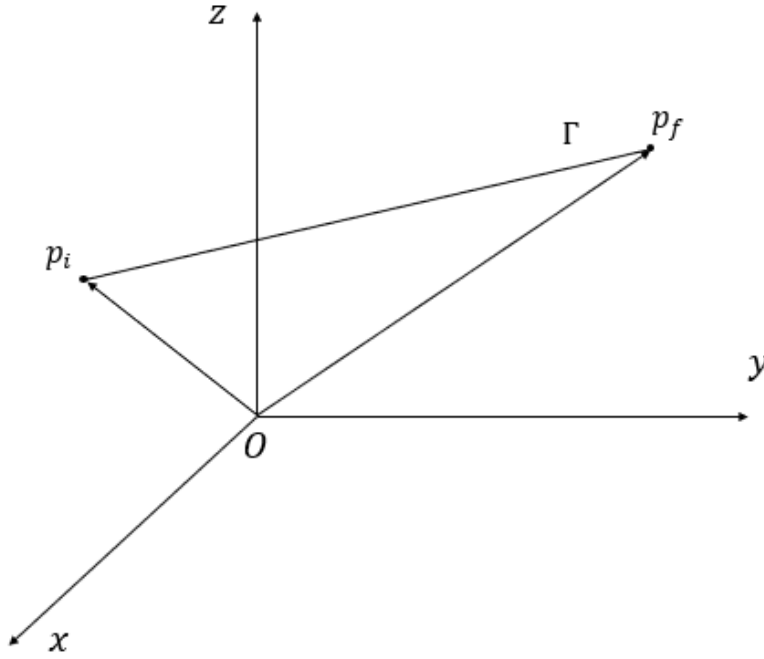
$$\frac{dp}{ds} = \frac{1}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \quad (50)$$

$$\frac{d^2p}{ds^2} = 0 \quad (51)$$

Nótese que para esta parametrización no es posible definir el sistema (t, n, b) de forma única, debido a la segunda derivada nula.

Figura 7

Representación Paramétrica de una Recta en el Espacio



Nota. Elaboración propia.

2.1.10.2 Ruta Circular

Antes de definir la representación paramétrica de una trayectoria circular en el espacio, se asume que la circunferencia se define con los siguientes parámetros.

- Vector unitario del eje de la circunferencia: r
- Vector posición de un punto en el eje de la circunferencia: d
- Vector posición de un punto en la circunferencia: p_i

Tomando en cuenta estos parámetros es posible definir el vector posición del centro de la circunferencia. Sea $\delta = p_i - d$, se debe cumplir la siguiente desigualdad para que la circunferencia no degenera en un punto.

$$|\delta^T r| < \|\delta\| \quad (52)$$

De esta manera el vector posición del centro de la circunferencia se define como:

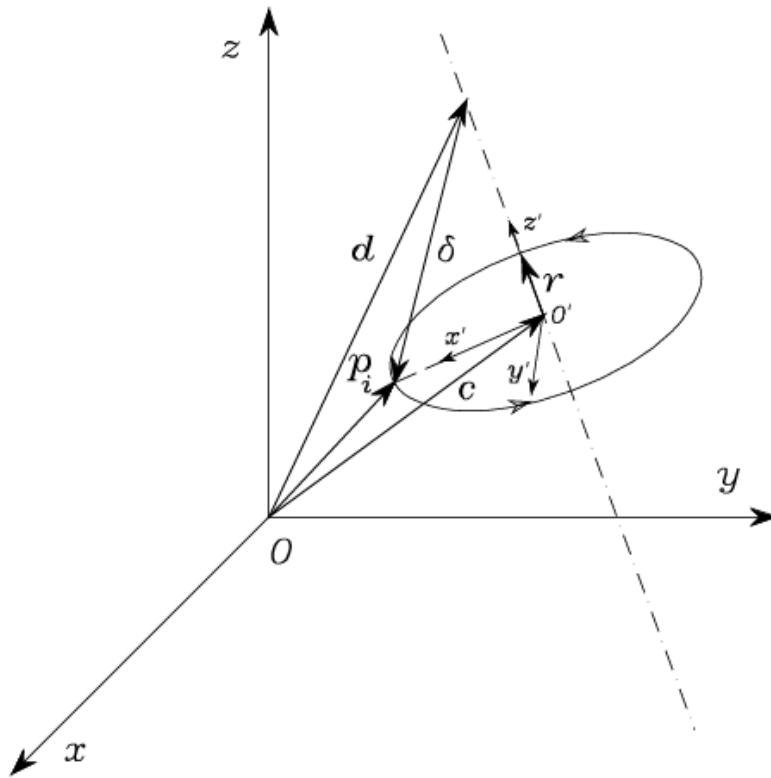
$$c = d + (\delta^T r)r \quad (53)$$

Ahora, para definir la representación paramétrica de la circunferencia, se puede tomar el sistema de referencia base $O' - x'y'z'$, cuyo origen coincide con el centro de la

circunferencia, donde el eje x' está orientado en la dirección $p_i - c$, el eje z' tiene la misma orientación que el vector r , y el eje y' cumple la regla de la mano derecha, tal como se muestra en la Figura 8.

Figura 8

Representación Paramétrica de una Circunferencia en el Espacio



Nota. Tomado de *Robotics, Modelling, Planning and Control* [Diagrama], Siciliano et al., 2009, Springer.

De este modo, la representación paramétrica en este sistema de referencia es:

$$p'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Donde $\rho = \|p_i - c\|$ se define como el radio de la circunferencia y se establece al punto p_i como el origen de la longitud de arco. De este modo, para el sistema de referencia inicial se tiene:

$$p(s) = c + Rp'(s) \quad (55)$$

Donde R es la matriz de rotación del sistema $O' - x'y'z'$ respecto al sistema $O - xyz$, la cual se puede representar como:

$$R = [x' \quad y' \quad z'] \quad (56)$$

Nótese que x', y', z' representan los vectores unitarios expresados en el sistema $O - xyz$. Derivando la Ecuación 54 respecto al parámetro s se obtiene:

$$\frac{dp}{ds} = R \begin{bmatrix} -\sin(s/\rho) \\ \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

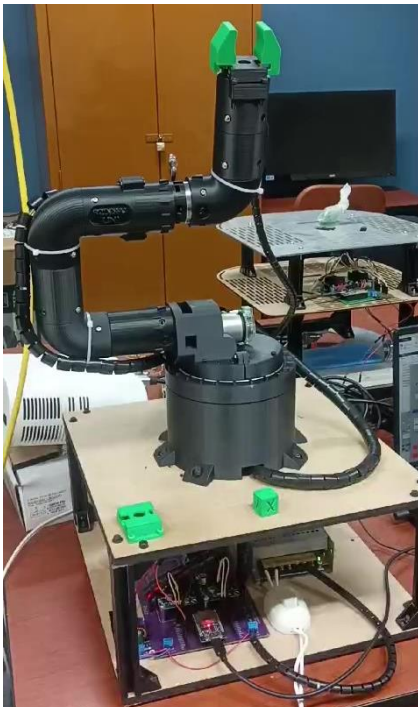
$$\frac{d^2p}{ds^2} = R \begin{bmatrix} -\cos(s/\rho)/\rho \\ -\sin(s/\rho)/\rho \\ 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

2.1.11 Manipulador Robótico de Tres Grados de Libertad R2D2

Esta investigación centra su aplicación en el manipulador robótico R2D2, el cual fue diseñado e implementado por el Laboratorio de Investigación en Inteligencia Artificial, Automatización, Robótica y Control (LIIAARC) en el año 2024. Este robot, mostrado en la Figura 9, cuenta con tres grados de libertad y usa como microcontrolador un ESP32 DevKit Doit V1, el cual destaca por su potencia, versatilidad y capacidad de procesamiento frente a otros microcontroladores de la misma gama; de esta manera sirve para manejar y ejecutar programas complejos y tener múltiples aplicaciones en investigaciones enfocadas al control de robots (Crisóstomo, 2024).

Figura 9

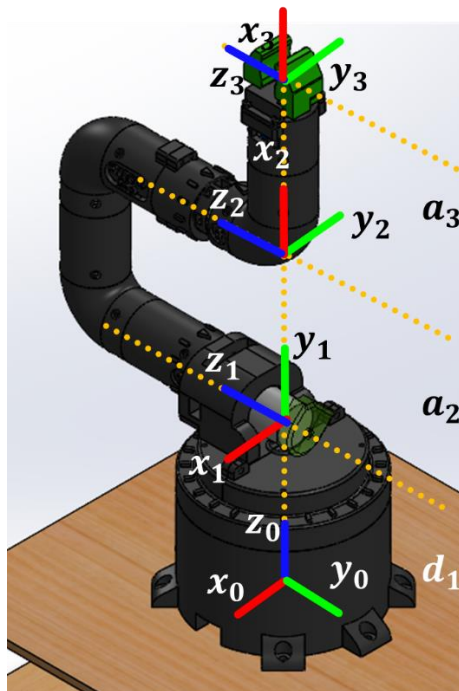
Manipulador Robótico de Tres Grados de Libertad R2D2



Por otra parte, se muestra la asignación de los sistemas de coordenadas del manipulador según la convención de Denavit – Hartenberg con la modificación Waldron – Paul, tal como se muestra en Figura 10.

Figura 10

Sistemas Coordenados de Cada uno de los Grados de Libertad del Manipulador



Nota. Elaborado con base en el modelo 3D del manipulador robótico proporcionado por el laboratorio LIIAARC.

Los valores de las distancias entre los ejes de los sistemas coordenados, los cuales fueron proporcionados por el laboratorio de investigación LIIAARC, se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2

Distancias Entre los Ejes de los Sistemas Coordenados del Robot

Eslabón i	$a_i(m)$	$d_i(m)$
1	0	$157.75 * 10^{-3}$
2	$143.61 * 10^{-1}$	0
3	$151.95 * 10^{-1}$	0

Nota. Elaboración propia.

Por otra parte, en la Tabla 3 se muestran los valores de los límites tanto de posición como velocidad y aceleración para cada uno de los ejes de salida de los motores correspondientes a cada una de las juntas del manipulador.

Tabla 3

Límites de Posición, Velocidad y Aceleración de los Motores de Manipulador

Motor	Modelo	Posición (°)		Velocidad (rad/s)		Aceleración (rad/s ²)	
		mín.	máx.	mín.	máx.	mín.	máx.
1	CHR-GM37-3429	-120	120	0	7.6	0	40
2	CHR-GM37-3429	0	180	0	8.5	0	40
3	GA25-371	-110	110	0	10.7	0	40

Nota. Elaboración propia.

2.2 Marco Conceptual

- **Robótica:** Se refiere al estudio y deseo de sintetizar algunas funciones humanas, como alguna actividad física o toma de decisiones, a través del uso de sensores, actuadores, mecanismos y computadoras (Craig, 2018).
- **Manipulador Robótico:** Un manipulador robótico se caracteriza por tener una base fija, además se componen de eslabones conectados por articulaciones para formar una cadena cinemática (Spong et al., 2020).
- **Grados de Libertad (GDL):** Característica de la estructura mecánica de un manipulador que determina de forma única su postura. Cada GDL suele estar asociado a una articulación y constituye una variable (Siciliano et al., 2009).
- **Trayectoria:** Recorrido que realiza un cuerpo que se desplaza por un determinado espacio (Pérez & Merino, 2021).
- **Espacio Operacional:** Espacio donde se especifica la tarea del manipulador y donde se define el vector de posición y orientación del efector final (Canudas de Wit et al., 2012).

- **Espacio de juntas:** Denota el espacio en que se define el vector conformado por las variables articulares de cada una de las juntas del manipulador (Canudas de Wit et al., 2012).
- **Control Tracking:** Acción de forzar al manipulador a seguir una trayectoria definida ya sea en el espacio operacional o en el espacio de juntas, esto incluyendo sus derivadas sucesivas que describen velocidades y aceleraciones deseadas (Canudas de Wit et al., 2012).
- **Cinemática Directa:** Consiste en determinar la posición y orientación del efector final partiendo de los valores de las variables de articulación del manipulador (Spong et al., 2020).
- **Cinemática Inversa:** Consiste en determinar los valores de las variables de las articulaciones partiendo de la posición y orientación del efector final del manipulador (Spong et al., 2020).

CAPÍTULO III

3. Desarrollo del Trabajo de Investigación

3.1 Cinemática del Manipulador Robótico R2D2

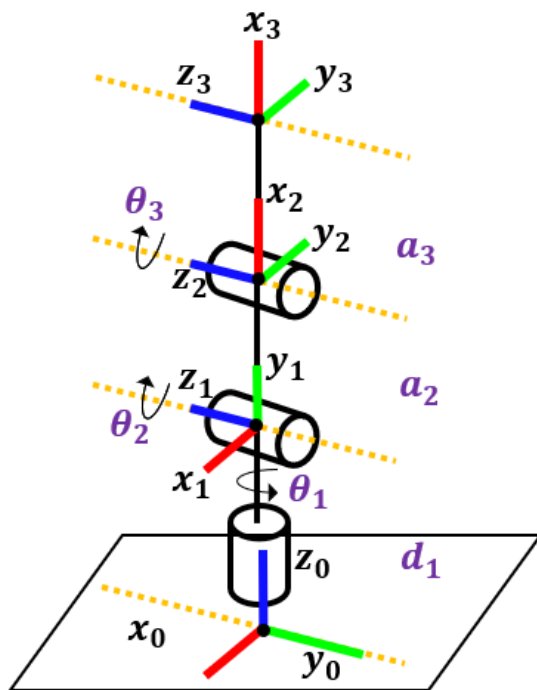
En esta sección se determina la cinemática directa, inversa y diferencial del manipulador robótico R2D2, además se calculan las singularidades caracterizadas por ser configuraciones a las cuales el robot no puede llegar.

3.1.1 Cálculo de la Cinemática Directa del Manipulador

A continuación, se muestra un esquema simplificado de los sistemas coordenados del manipulador robótico, así como los parámetros de su configuración.

Figura 11

Asignación de Parámetros Denavit-Hartenberg del Manipulador R2D2



Nota. Elaboración propia.

Para el cálculo de la cinemática directa, se determina en primer lugar los parámetros de Denavit – Hartenberg mostrados en la Tabla 4, basándose en la configuración mostrada en la Figura 11.

Tabla 4

Parámetros Denavit-Hartenberg

Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	0	$\pi/2$
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0

Nota. Elaboración propia.

Además, teniendo en cuenta la siguiente notación:

$$q_i = \theta_i$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\theta_i) = C_i$$

$$\sin(\theta_i) = S_i$$

Es posible calcular las matrices de transformación homogénea según la Ecuación 2, tal como se indica a continuación.

$$A_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & S_1 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta forma, la matriz de transformación homogénea del efector final respecto al sistema coordenado de origen queda definida por:

$$T_3^0(q_i) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(q_3)$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} R_3^0 & O_3^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & d_1 + a_2 S_2 + a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde se definen $\cos(\theta_2 + \theta_3) = C_{23}$ y $\sin(\theta_2 + \theta_3) = S_{23}$.

En consecuencia, es posible expresar la función de la cinemática directa solo tomando en cuenta la posición según la siguiente expresión.

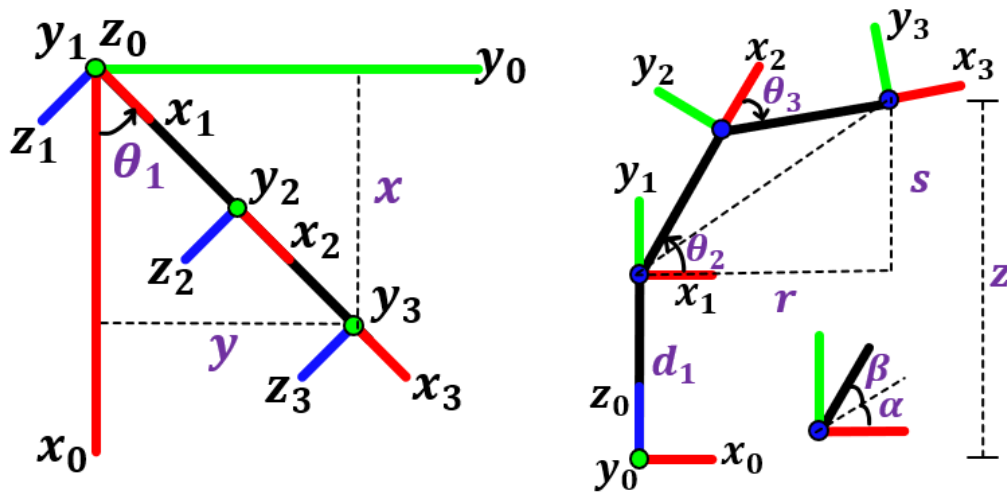
$$k(q) = \begin{bmatrix} C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ d_1 + a_2 S_2 + a_3 S_{23} \end{bmatrix}$$

3.1.2 Cálculo de la Cinemática Inversa del Manipulador

Utilizando el método geométrico, es posible calcular la cinemática inversa del manipulador. En esta investigación se utilizará la configuración donde el ángulo de la primera junta θ_1 es agudo y donde el segundo y tercer eslabón forman un ángulo θ_3 de valores negativos denominándose “codo arriba”, tal como se muestra en la Figura 12.

Figura 12

Esquema para el Cálculo de la Cinemática Inversa del Manipulador



Nota. Elaboración propia.

Para calcular los ángulos de posición en las juntas se definen los siguientes términos tomando como referencia la imagen anterior.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$s = z - d_1$$

$$D = \cos(\theta_3) = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

De esta forma podemos expresar θ_3 como:

$$\theta_3 = \arctan(\pm\sqrt{1 - D^2}, D)$$

Tomando θ_3 como un ángulo negativo, como se indicó anteriormente, se define:

$$\theta_3 = \arctan(-\sqrt{1 - D^2}, D)$$

Por otro lado, se calcula θ_1 según:

$$\theta_1 = \arctan(y, x)$$

También es posible definir los ángulos α y β con las siguientes expresiones:

$$\alpha = \arctan(s, r)$$

$$\beta = \arctan(a_3S_3, a_2 + a_3C_3)$$

Debe notarse que según las expresiones de α y β se puede deducir que el ángulo α es positivo mientras que el ángulo β toma un signo negativo. De este modo, podemos calcular el ángulo θ_2 de la siguiente forma:

$$\theta_2 = |\alpha| + |\beta|$$

$$\theta_2 = \alpha - \beta$$

3.1.3 Cálculo del Jacobiano Analítico y su Derivada

La matriz Jacobiana $J_A(q)$ se puede calcular al reemplazar el vector de cinemática directa $k(q)$ en la Ecuación 21.

$$k(q) = \begin{bmatrix} k_x(q) \\ k_y(q) \\ k_z(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2C_2 + a_3C_{23}) \\ S_1(a_2C_2 + a_3C_{23}) \\ d_1 + a_2S_2 + a_3S_{23} \end{bmatrix}$$

Una vez determinadas las derivadas parciales, se obtiene:

$$J_A(q) = \begin{bmatrix} -S_1(a_2C_2 + a_3C_{23}) & -C_1(a_2S_2 + a_3S_{23}) & -C_1a_3S_{23} \\ C_1(a_2C_2 + a_3C_{23}) & -S_1(a_2S_2 + a_3S_{23}) & -S_1a_3S_{23} \\ 0 & a_2C_2 + a_3C_{23} & a_3C_{23} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, se calcula la derivada de la matriz Jacobiana utilizando la Ecuación 23 procediendo término por término.

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{11}}{\partial q_i} \dot{q}_i = -S_1[-a_2 S_2 \dot{q}_2 - a_3 S_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)] - C_1 \dot{q}_1 [a_2 C_2 + a_3 C_{23}]$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{12}}{\partial q_i} \dot{q}_i = -C_1[a_2 C_2 \dot{q}_2 + a_3 C_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)] + S_1 \dot{q}_1 [a_2 S_2 + a_3 S_{23}]$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{13}}{\partial q_i} \dot{q}_i = a_3 S_1 S_{23} \dot{q}_1 - a_3 C_1 C_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{21}}{\partial q_i} \dot{q}_i = C_1[-a_2 S_2 \dot{q}_2 - a_3 S_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)] - S_1 \dot{q}_1 [a_2 C_2 + a_3 C_{23}]$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{22}}{\partial q_i} \dot{q}_i = -S_1[a_2 C_2 \dot{q}_2 + a_3 C_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)] - C_1 \dot{q}_1 [a_2 S_2 + a_3 S_{23}]$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{23}}{\partial q_i} \dot{q}_i = -a_3 C_1 S_{23} \dot{q}_1 - a_3 S_1 C_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{31}}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{32}}{\partial q_i} \dot{q}_i = -a_2 S_2 \dot{q}_2 - a_3 S_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J_A)_{33}}{\partial q_i} \dot{q}_i = -a_2 S_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

3.1.4 Cálculo de las Singularidades del Manipulador

Para el cálculo de las singularidades se utilizará el método del determinante mostrado en la Ecuación 20 aplicado a la matriz jacobiana calculada anteriormente.

$$\begin{vmatrix} -S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) & -C_1(a_2 S_2 + a_3 S_{23}) & -C_1 a_3 S_{23} \\ C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) & -S_1(a_2 S_2 + a_3 S_{23}) & -S_1 a_3 S_{23} \\ 0 & a_2 C_2 + a_3 C_{23} & a_3 C_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$$a_2 a_3 [\cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) - \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2)] [a_3 \cos(q_2 + q_3) + a_2 \cos(q_2)] = 0$$

$$[\sin(q_2 - (q_2 + q_3))] [a_3 \cos(q_2 + q_3) + a_2 \cos(q_2)] = 0$$

$$[\sin(q_3)] [a_3 \cos(q_2 + q_3) + a_2 \cos(q_2)] = 0$$

Igualando a cero la primera expresión entre corchetes, se obtiene:

$$\sin(q_3) = 0$$

$$q_3 = \pm n\pi$$

Tomando como base un rango entre 0° y 360° , q_3 toma los siguientes valores:

$$q_3 = 0^\circ$$

$$q_3 = 180^\circ$$

Igualando a cero la segunda expresión entre corchetes, se obtiene:

$$a_3 \cos(q_2 + q_3) + a_2 \cos(q_2) = 0$$

Como un primer caso, se toma $q_3 = 0^\circ$.

$$(a_3 + a_2) \cos(q_2) = 0$$

$$\cos(q_2) = 0$$

$$q_2 = n\pi \pm 90^\circ$$

Tomando como base un rango entre 0° y 360° , q_2 toma los siguientes valores:

$$q_2 = 90^\circ$$

$$q_2 = 270^\circ$$

Como segundo caso, se toma $q_3 = 180^\circ$.

$$(a_2 - a_3) \cos(q_2) = 0$$

$$\cos(q_2) = 0$$

$$q_2 = n\pi \pm 90^\circ$$

Tomando como base un rango entre 0° y 360° , q_2 toma los siguientes valores:

$$q_2 = 90^\circ$$

$$q_2 = 270^\circ$$

Con base en lo calculado se establecen los cuatro casos de singularidades, que se muestran a continuación, para el rango de ángulos establecidos.

$$q_2 = 90^\circ \wedge q_3 = 0^\circ$$

$$q_2 = 90^\circ \wedge q_3 = 180^\circ$$

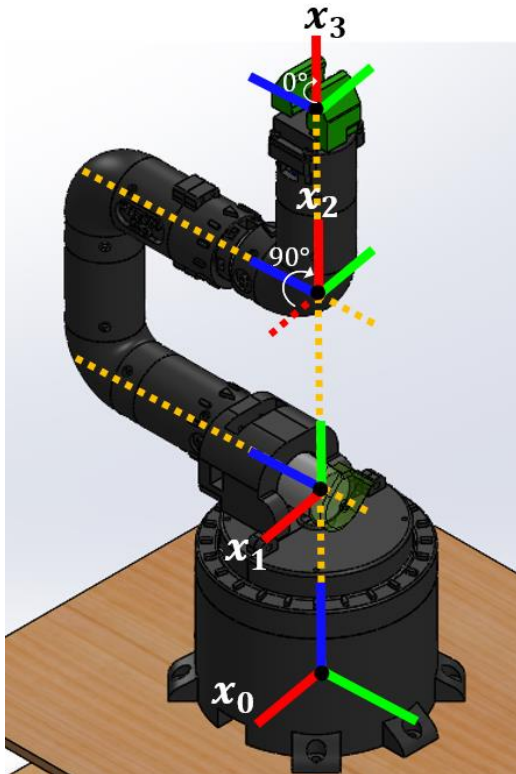
$$q_2 = 270^\circ \wedge q_3 = 0^\circ$$

$$q_2 = 270^\circ \wedge q_3 = 180^\circ$$

De estas cuatro singularidades, las tres últimas son imposibles de alcanzar debido a las restricciones mecánicas del manipulador, sin embargo, la primera es posible alcanzar y puede ocasionar los problemas descritos de singularidad, esta es mostrada en la Figura 13.

Figura 13

Singularidad Posible del Manipulador Robótico R2D2



Nota. Elaboración propia.

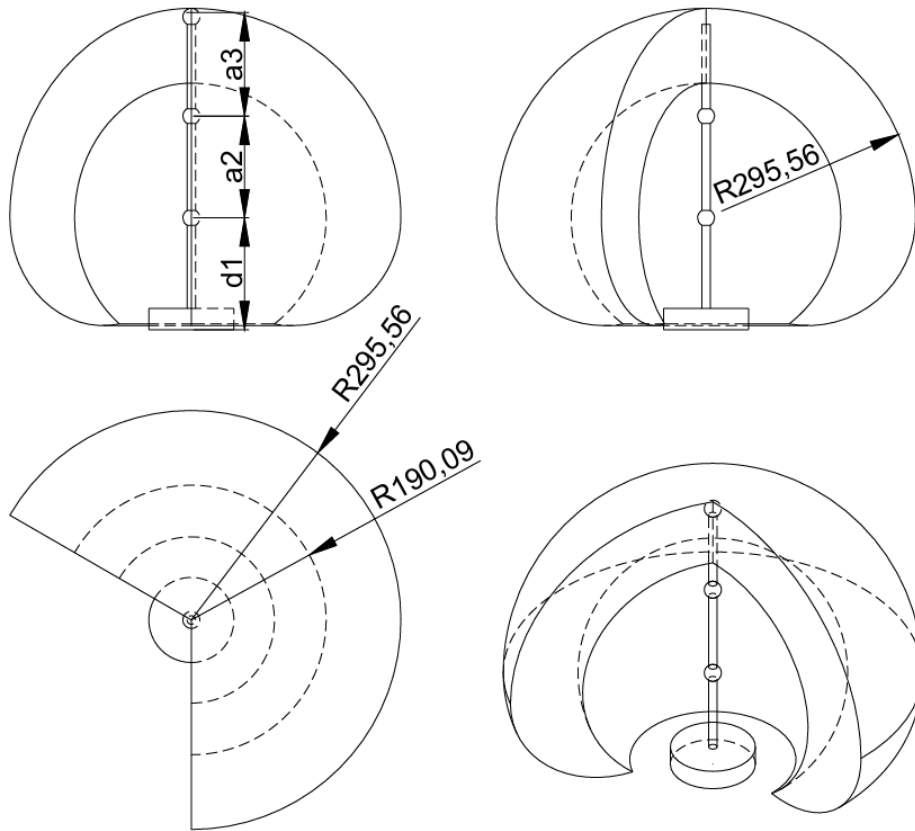
3.2 Espacio Operacional y Definición de Trayectorias

3.2.1 Espacio Operacional

Tomando como referencia los límites de las posiciones angulares de las juntas mostradas en la Tabla 3, las longitudes de los eslabones del manipulador mostradas en la Tabla 2 y la configuración de cinemática inversa del mismo, se establece el espacio operacional o de tareas mostrado en la Figura 14. Este espacio es caracterizado por contener todas aquellas configuraciones a las cuales el efector final del robot puede llegar; asimismo, sirve como base para la definición de las trayectorias de referencia, puesto que son todos aquellos puntos por los cuales se moverá el efector final.

Figura 14

Espacio de Trabajo del Manipulador



Nota. Elaboración propia.

3.2.2 Definición de la Trayectoria Rectilínea

Para definir esta trayectoria, se toma como punto de partida el espacio operacional delimitado en el ítem anterior; de este modo, al ser una recta, bastará con definir el punto inicial (p_0) y final (p_f) de dicha trayectoria, siempre y cuando esté dentro del espacio operacional del manipulador. Los valores de estos puntos elegidos se muestran a continuación.

$$p_0 = (0.25; 0.0; 0.20)m$$

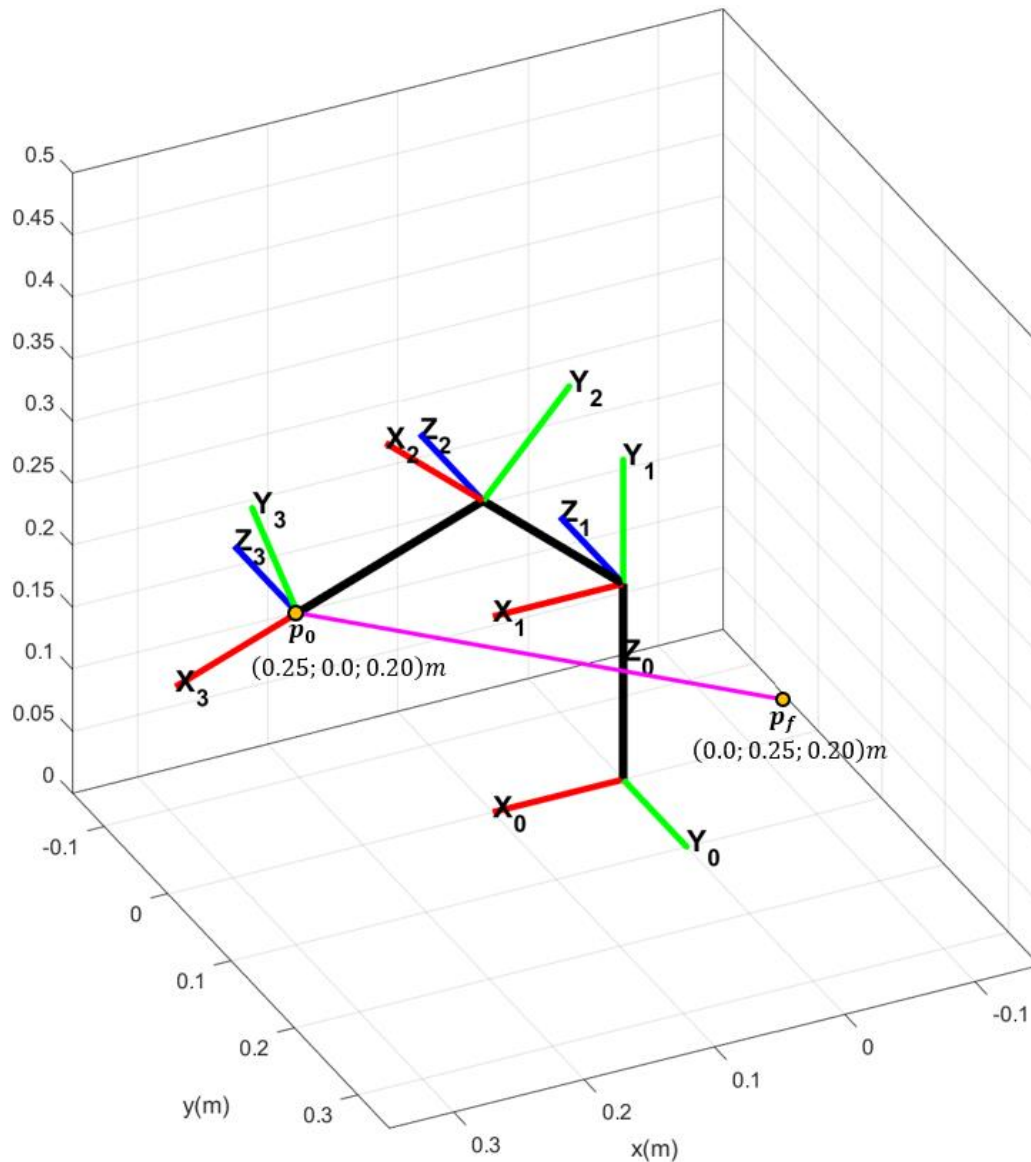
$$p_f = (0.00; 0.25; 0.20)m$$

En la primera sección del Anexo B se muestra el código en el software Matlab para la generación de esta trayectoria, siendo p_0 el punto inicial y p_f el punto final; por otro lado,

se calcula la longitud de esta trayectoria, denotada como s_f . En la Figura 15 se muestra el ploteo del manipulador y la trayectoria de referencia generada.

Figura 15

Trayectoria Rectilínea de Referencia



Nota. Elaboración propia.

3.2.3 Definición de la Trayectoria Rectangular

De manera similar a la definición de trayectoria rectilínea, para definir una trayectoria rectangular se eligen cinco puntos de paso, siendo el primero igual al último. Estos puntos son elegidos adecuadamente siguiendo las restricciones del espacio operacional. Los valores elegidos para estos puntos se muestran a continuación.

$$p_0 = p_4 = (0.18; 0.11; 0.08)m$$

$$p_1 = (0.18; 0.11; 0.33)m$$

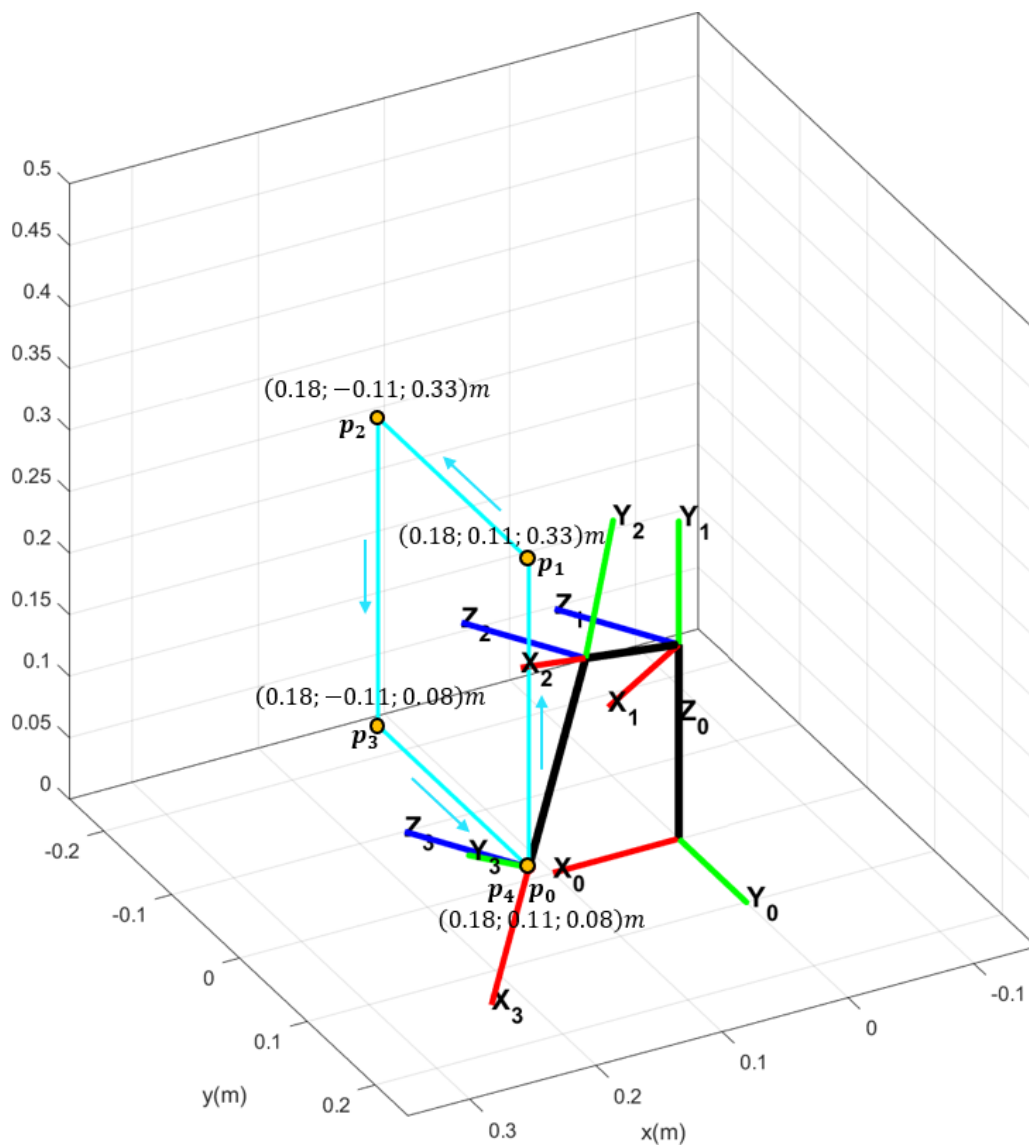
$$p_2 = (0.18; -0.11; 0.33)m$$

$$p_3 = (0.18; -0.11; 0.08)m$$

En la primera sección del Anexo C se muestra el código en Matlab para la generación de esta trayectoria, siendo p_0 , p_1 , p_2 , p_3 y p_4 los puntos de paso; además, en la Figura 16 se muestra el ploteo del manipulador y la trayectoria de referencia.

Figura 16

Trayectoria Rectangular de Referencia



Nota. Elaboración propia.

3.2.4 Definición de la Trayectoria Circular

La definición de una trayectoria circular en el espacio operacional se realiza especificando el vector del eje sobre el cual se trazará el círculo (r), un punto en dicho eje (d) y la posición donde se iniciará la trayectoria alrededor de este eje (p_0); además, si es requerido, se especifica el ángulo del arco de circunferencia a recorrer ($arco$). A continuación, se muestran los valores elegidos para cada uno de los parámetros.

$$r = (1; 0; 0)$$

$$d = (0.20; 0.00; 0.20)$$

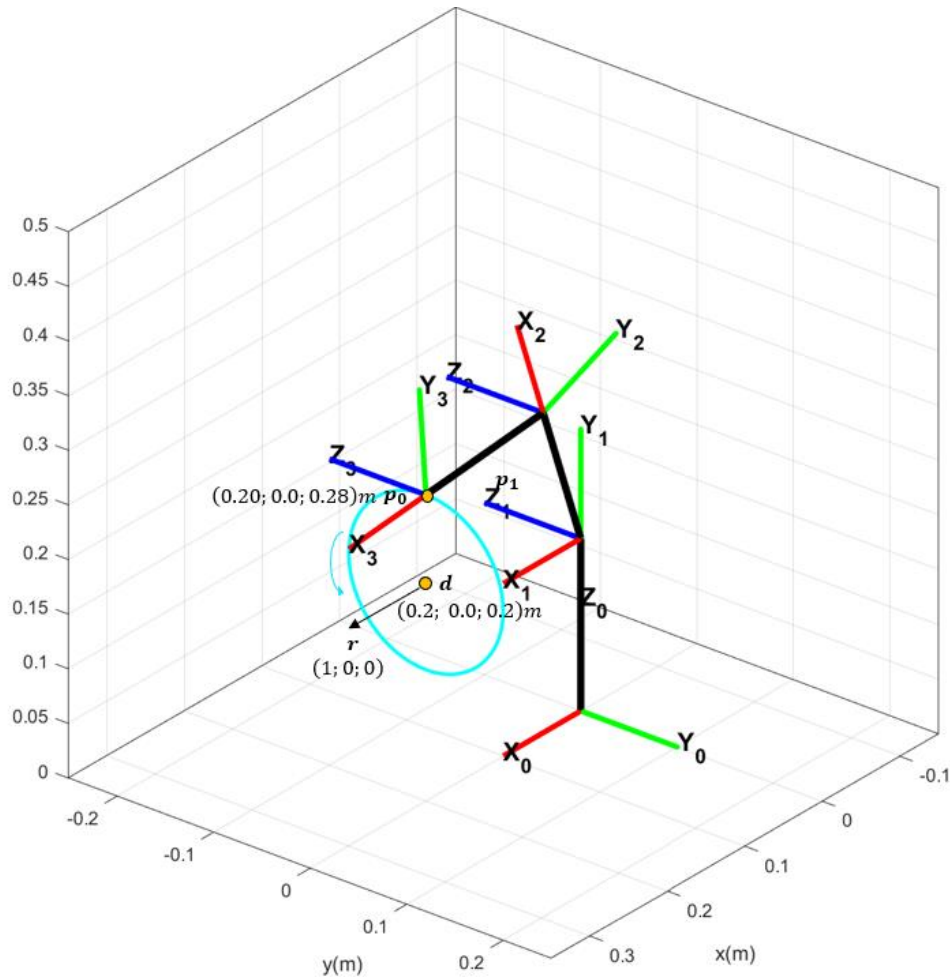
$$p_0 = (0.20; 0.00; 0.28)$$

$$arco = 3\pi/2$$

En la primera sección del Anexo D se muestra el código en el software Matlab para la generación de esta trayectoria, donde se establecen los valores mencionados; por otro lado, se calcula la longitud de esta trayectoria, denotada como s_f , el radio (rho), el centro del círculo (c) y la matriz de rotación (R) para los sistemas local y global del círculo. En la Figura 17 se muestra el ploteo del manipulador y la trayectoria de referencia generada.

Figura 17

Trayectoria Circular de Referencia



Nota. Elaboración propia.

3.3 Parametrización de Trayectorias Usando el Perfil Trapezoidal

Una vez definida la trayectoria a planificar y hallada la longitud de dicha trayectoria, se procede a parametrizar esta curva en función de su longitud usando el parámetro s y el perfil de velocidad trapezoidal.

En el Anexo E se muestra el código en el software Matlab de la función “trapez_time”, la cual es utilizada en el código principal. Esta función tiene como entradas la posición inicial q_i y final q_f , la velocidad de cruceo máxima $dqc_{m\acute{a}x}$, la aceleración máxima $ddqc$, el porcentaje de la velocidad de cruceo máxima que se utiliza para la parametrización y el tiempo de muestreo T_s al cual se le ha establecido un valor de 5 ms. Como salidas se tiene los vectores de posición q , velocidad dq y aceleración ddq , el tiempo

de navegación o tiempo final t_f empleado para recorrer la trayectoria, el vector de tiempos T utilizado para almacenar los tiempos correspondientes a cada uno de los puntos de la trayectoria y, finalmente, el error denotado con la variable err .

A continuación, se explica paso a paso el desarrollo del código mencionado.

En la primera sección del código se calcula la longitud total de la trayectoria Δ mediante la diferencia de la posición inicial y final; además, se realiza la corrección de signo de la aceleración. Por otro lado, se halla la velocidad de cruce utilizando el porcentaje máximo de velocidad y se realiza su corrección de signo.

En la segunda sección del código se determina el tiempo final o de navegación usando la velocidad y aceleración de cruce y reemplazando en la Ecuación 42 mostrada en el marco teórico; también, se realiza el ajuste de la velocidad de cruce tomando como base los límites establecidos en la Ecuación 40. Asimismo, se genera el vector de tiempos, utilizando el tiempo de muestreo T_s y el tiempo final calculado previamente; finalmente, se crea un vector para guardar todos los puntos de la trayectoria parametrizada.

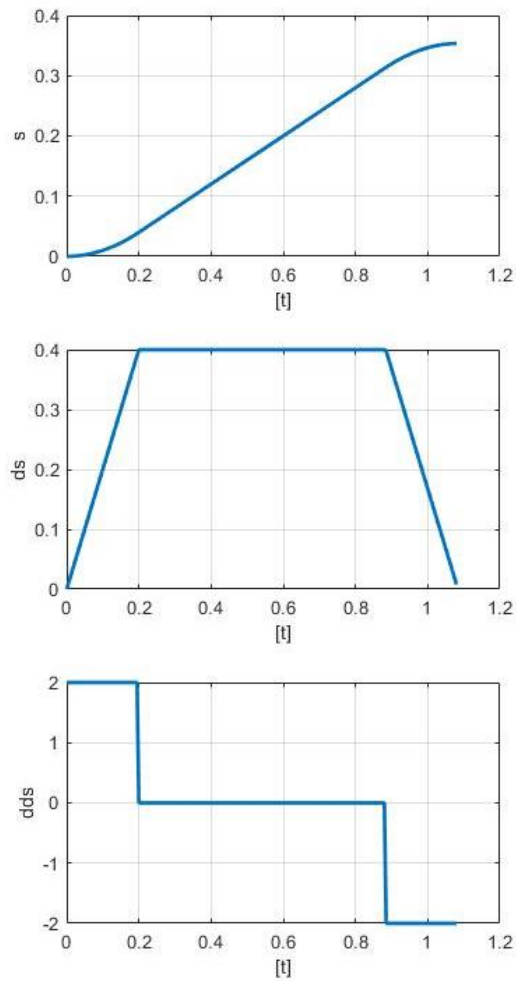
En la tercera sección del código se separa el tiempo de simulación en tres partes para poder definir en cada una de ellas las variables de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo, tomando como unidad el tiempo de muestreo establecido. En el caso de la posición se utiliza la Ecuación 43, mientras que para la velocidad y aceleración se utilizan la velocidad y aceleración de cruce.

3.3.1 Perfil de Velocidad Trapezoidal para la trayectoria Rectilínea

En la segunda sección del Anexo B se muestra el código en el software Matlab para la parametrización del perfil trapezoidal de una trayectoria rectilínea, dando como resultado los parámetros de posición s , velocidad ds y aceleración dds para cada uno de los puntos de la trayectoria. Se consideraron valores estándar para los parámetros de porcentaje de velocidad máxima, velocidad máxima y aceleración máxima; en la Figura 18 se muestra el plot de este perfil obtenido del código programado.

Figura 18

Perfil Trapezoidal para la Trayectoria Rectilínea



Nota. Elaboración propia.

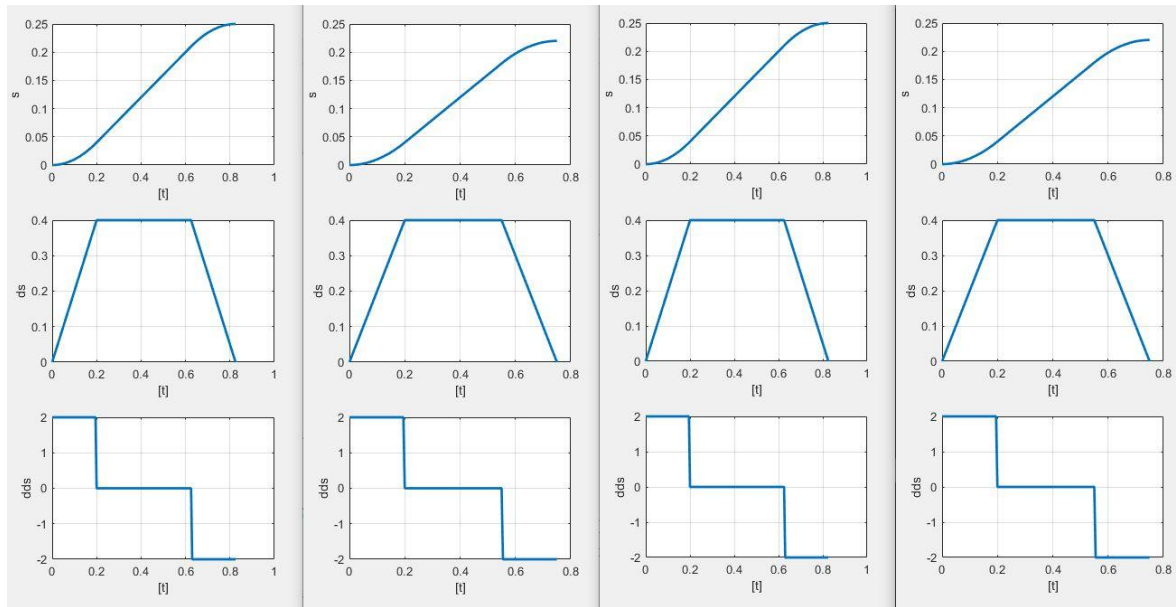
3.3.2 Perfil de Velocidad Trapezoidal para la trayectoria Rectangular

En la segunda sección del Anexo C se muestra el código en el software Matlab para la parametrización del perfil trapezoidal de una trayectoria rectangular, dando como resultado los parámetros de posición s , velocidad ds y aceleración dds para cada uno de los puntos de la trayectoria. Para este caso, al ser una trayectoria conformada por cuatro trayectorias rectilíneas, se obtienen cuatro perfiles de velocidad trapezoidal correspondientes a cada una de las trayectorias rectilíneas. Además, se consideraron valores estándar para los parámetros de porcentaje de velocidad máxima, velocidad

máxima y aceleración máxima. En la Figura 19 se muestra el ploteo de este perfil obtenido del código programado.

Figura 19

Perfil Trapezoidal para la Trayectoria Rectangular



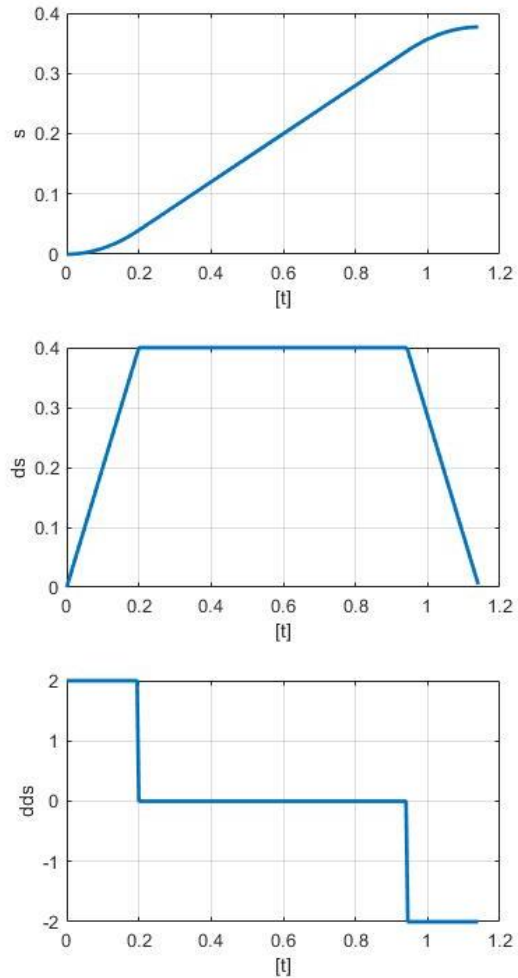
Nota. Elaboración propia.

3.3.3 Perfil de Velocidad Trapezoidal para la trayectoria Circular

En la segunda sección del Anexo D se muestra el código en el software Matlab para la parametrización del perfil trapezoidal de una trayectoria circular, dando como resultado los parámetros de posición s , velocidad ds y aceleración dds para cada uno de los puntos de la trayectoria. Se consideraron los mismos valores usados previamente para los parámetros de porcentaje de velocidad máxima, velocidad máxima y aceleración máxima; en la Figura 20 se muestra el ploteo de este perfil obtenido del código programado.

Figura 20

Perfil Trapezoidal para la Trayectoria Circular



Nota. Elaboración propia.

3.4 Diseño de las Trayectorias en el Espacio Operacional

Una vez realizada la parametrización de las trayectorias de referencia en función de la longitud de la trayectoria, se procede a utilizar este parámetro para la generación de la trayectoria en el espacio operacional, es decir, en función de las coordenadas del sistema base.

3.4.1 Diseño de Trayectoria Rectilínea

Utilizando la Ecuación 49 es posible representar la matriz de posición PD en el espacio operacional, asimismo, se calculan las matrices de velocidad dPD y aceleración $ddPD$ a partir de las derivadas de la posición.

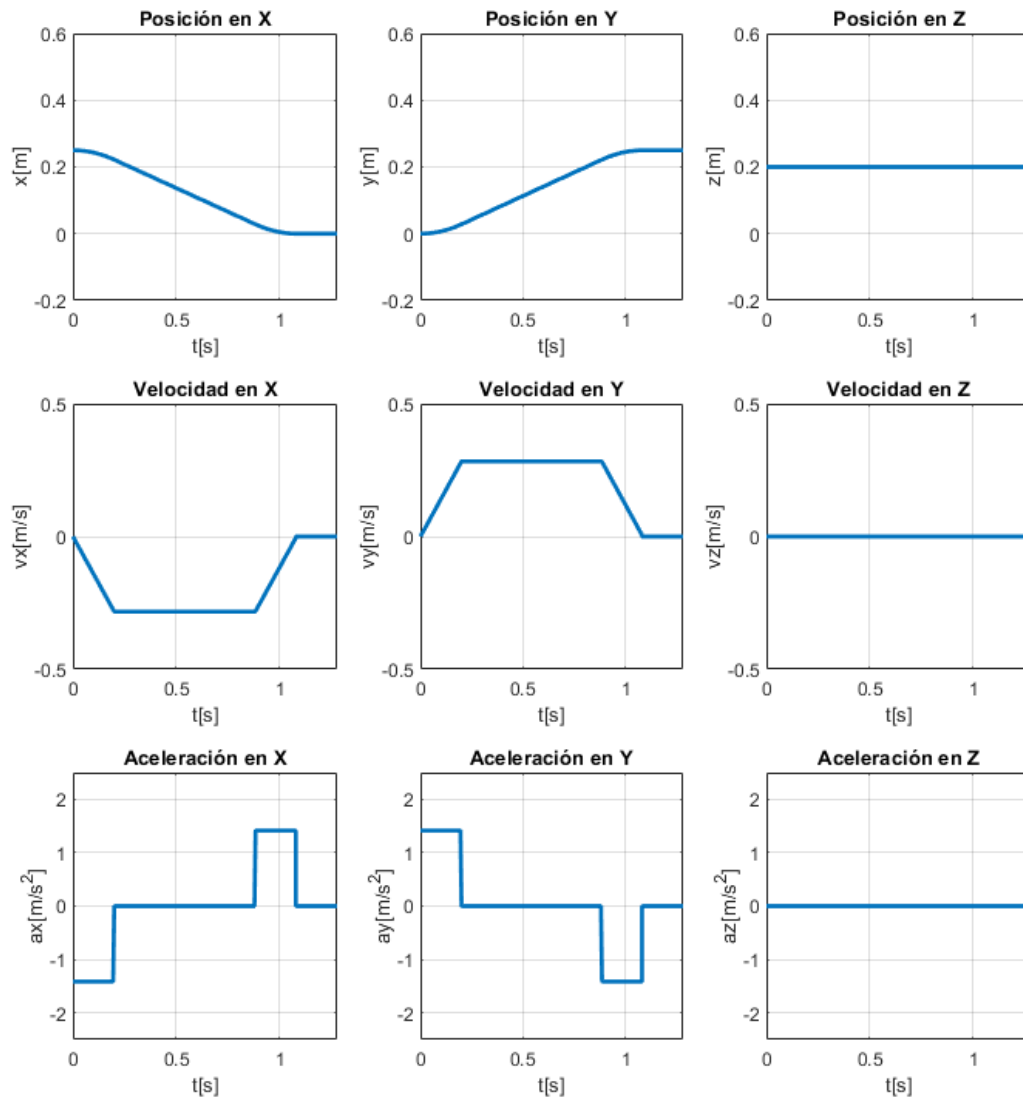
En la tercera sección del Anexo B se muestra el código en el software Matlab para la generación de trayectoria, donde se puede apreciar las matrices PD , dPD y $ddPD$ en función del parámetro s y sus derivadas.

Por otro lado, se adiciona un tiempo tt para detener al manipulador, esto con la finalidad de que la aceleración y velocidad sean cero en el punto final de la trayectoria. Para este tiempo se adicionan vectores nulos en el caso de la velocidad y aceleración, y se repite el último vector para la posición. Finalmente se analiza la validez de la trayectoria, utilizando la función “check_trayectoria”, cuya programación se muestra en el Anexo G, en esta función se evalúa y aplica la cinemática inversa a cada uno de los vectores de posición de la matriz de posiciones PD para demostrar su validez; además, una vez halladas las posiciones angulares de las juntas para cada uno de los vectores de posición, se aplican los límites descritos en la Tabla 3 para reafirmar que los valores sean válidos.

En la Figura 21 se puede apreciar las gráficas de las posiciones, velocidades y aceleraciones en el espacio operacional para el tiempo total de navegación determinado.

Figura 21

Trayectoria Rectilínea en el Espacio Operacional



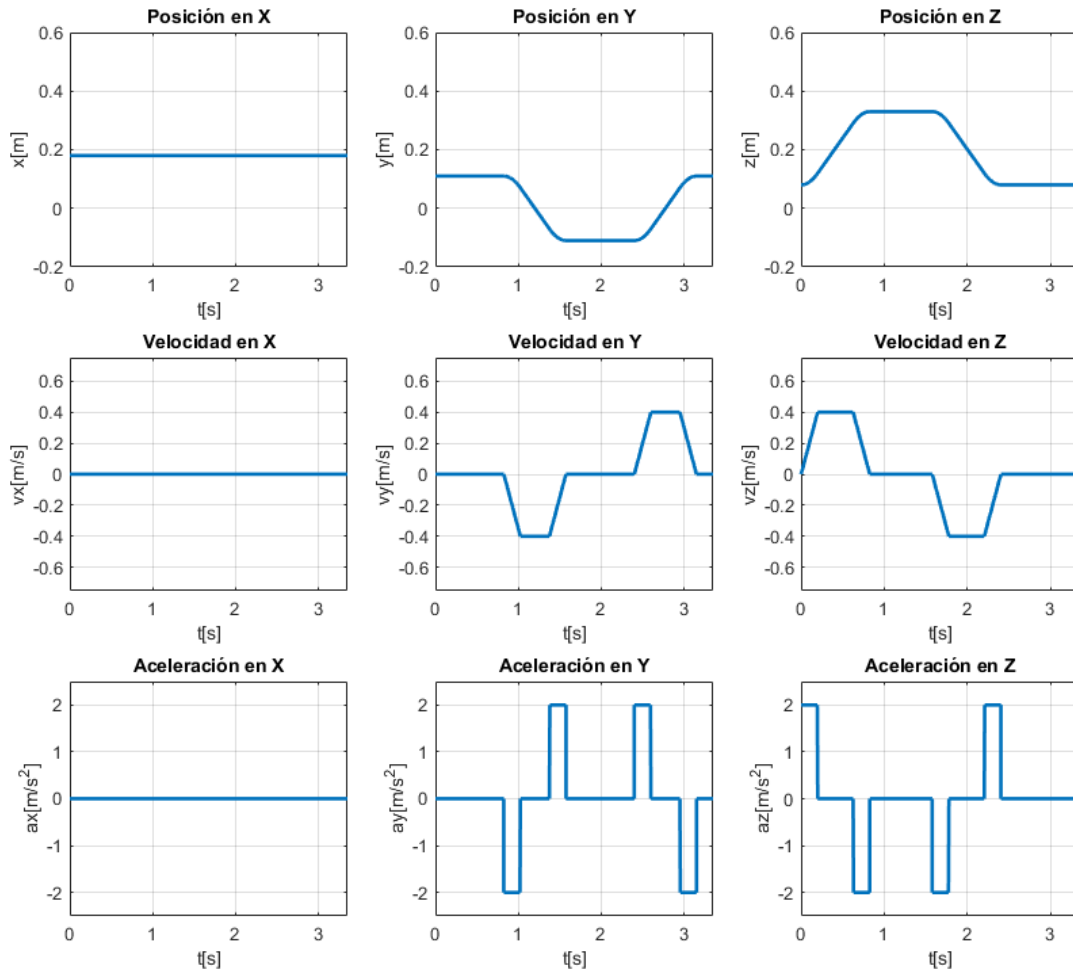
Nota. Elaboración propia.

3.4.2 Diseño de Trayectoria Rectangular

De forma similar, en la segunda sección del Anexo C se muestra el código en el software Matlab para la generación de esta trayectoria. Al ser formada por cuatro trayectorias rectilíneas, se utilizan las mismas ecuaciones y se realiza un bucle en el cual las matrices de posición PD , velocidad dPD y aceleración $ddPD$ se van acumulando con cada iteración. Del mismo modo, se adiciona un tiempo tt para detener al manipulador y se realiza la validación de la trayectoria. Las gráficas de las posiciones, velocidades y aceleraciones generadas se muestran en la Figura 22.

Figura 22

Trayectoria Rectangular en el Espacio Operacional



Nota. Elaboración propia.

3.4.3 Diseño de Trayectoria Circular

Para esta trayectoria, se toma como punto de partida a la Ecuación 55, donde se calcula la matriz de posiciones PD en el espacio operacional; asimismo, al derivar esta ecuación es posible obtener las matrices de velocidad dPD y aceleración $ddPD$.

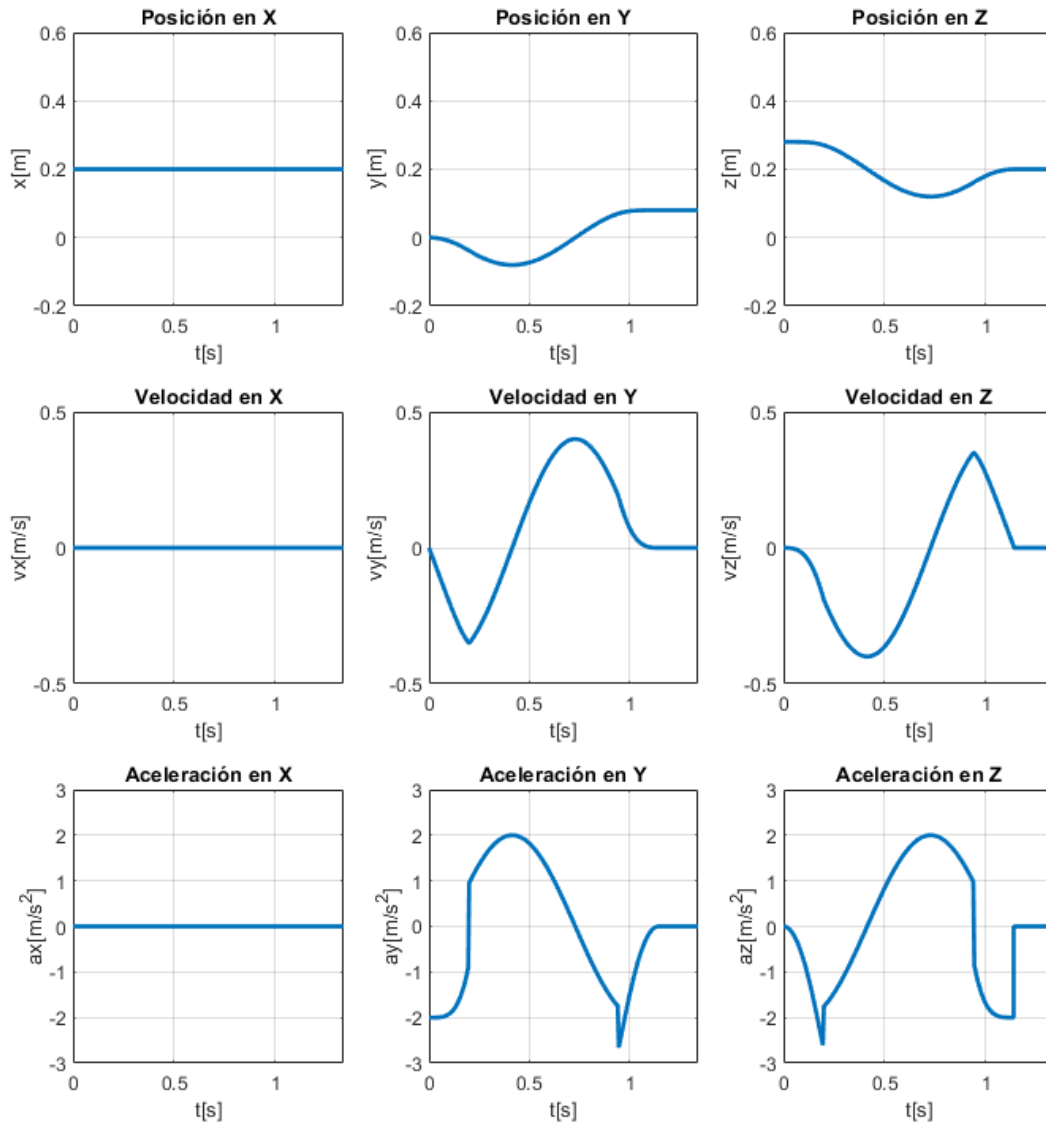
En la tercera sección del Anexo D se muestra el código en el software Matlab para la generación de esta trayectoria, donde se puede evidenciar las matrices PD , dPD y $ddPD$ en función del parámetro s y sus derivadas.

Análogamente a los casos anteriores, se añade un tiempo tt para la detención del manipulador, estableciendo las velocidades y aceleraciones en cero; finalmente, se corrobora que la trayectoria generada sea válida y esté dentro de los límites permisibles.

En la Figura 23 se muestran las gráficas de las posiciones, velocidades y aceleraciones en el espacio operacional para el tiempo total de navegación determinado.

Figura 23

Trayectoria Circular en el Espacio Operacional



Nota. Elaboración propia.

3.5 Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden

Este algoritmo se encarga de transformar los vectores de posición PD , velocidad dPD y aceleración $ddPD$ del manipulador en el espacio operacional, los cuales fueron generados a partir de las trayectorias, en las posiciones, velocidades y aceleraciones deseadas en el espacio de juntas.

En el Anexo F se muestra el código en el software Matlab tanto de la configuración inicial del manipulador como del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, el cual se procede a explicar detalladamente a continuación.

En la primera sección del código se establece la configuración inicial del manipulador; esto implica asignar la posición inicial deseada en el espacio operacional denotada con la variable x_o y se halla la cinemática inversa en este punto para poder encontrar los valores angulares de las juntas. Con esto ya se tiene la posición inicial deseada en el espacio de juntas denotada por qd , y se elige una velocidad inicial deseada nula dqd .

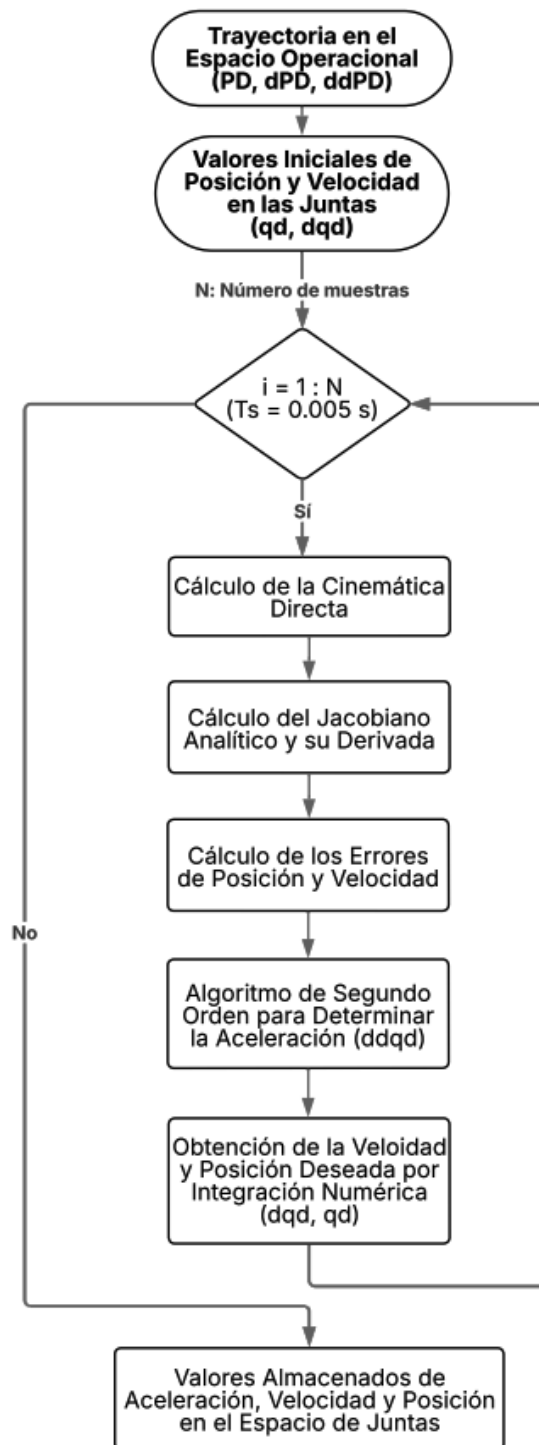
En la segunda sección del código se implementa el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, se inicia determinando el número de muestras N a partir de la dimensión de la matriz de posiciones en el espacio operacional. Una vez determinado el número de muestras, se crea un bucle “for” donde se calculará en cada iteración la posición, velocidad y aceleración en el espacio operacional.

Dentro del bucle se mapean las posiciones, velocidades y aceleraciones deseadas en el espacio operacional; después se calcula la cinemática directa de la posición deseada actual en el espacio de juntas. También se realiza el cálculo del jacobiano analítico y su derivada para los valores actuales. Con esto, es posible determinar los errores de posición y velocidad en el espacio operacional, los cuales sirven para poder calcular la aceleración deseada en el espacio de juntas haciendo uso del algoritmo principal. Por otra parte, es necesario limitar estas aceleraciones calculadas utilizando los límites descritos en la Tabla 3. Finalmente, a partir de la aceleración calculada, es posible determinar la velocidad y posición en el espacio de juntas utilizando el método de integración numérica y el tiempo de muestreo. Todos estos valores hallados son almacenados en una matriz para su posterior análisis y ploteo.

A continuación, se muestra el diagrama de flujo del algoritmo en la Figura 24.

Figura 24

Diagrama de Flujo del Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden



Nota. Elaboración propia.

CAPÍTULO IV

4. Resultados, Contrastación de Hipótesis y Discusión de Resultados

El presente capítulo expone los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas en Matlab de las variables de interés: posición, velocidad y aceleración de las juntas de los motores del manipulador y sus variaciones según los parámetros del perfil trapezoidal y de las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Por un lado, se varían los parámetros velocidad máxima, factor de velocidad y aceleración máxima para poder establecer los límites de los mismos, los cuales conllevan obtener un error mínimo en la generación de la trayectoria. Por otro lado, se varían las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden con la finalidad de minimizar las oscilaciones y errores en la obtención de las velocidades y aceleraciones en el espacio de juntas.

Para cada simulación se muestran los límites de velocidad y aceleración en el espacio de juntas, así como los porcentajes de error máximo generados para la posición y velocidad en el espacio de tareas; además, se expone el tiempo de navegación que implica cada una de las trayectorias y su respectiva longitud.

Finalmente, se contrastan la hipótesis general y las específicas formuladas en el primer capítulo, y se discuten los resultados obtenidos en cada una de las pruebas.

4.1 Resultados Según la Variación de Parámetros del Perfil Trapezoidal

En las siguientes pruebas, con la finalidad de analizar el comportamiento de las diferentes variables de análisis, se evalúan diferentes valores para las variables de

velocidad máxima de crucero ($ds_{m\acute{a}x}$), factor de velocidad máxima ($factor$) y aceleración máxima ($dds_{m\acute{a}x}$), las cuales influyen directamente en la generación del perfil trapezoidal.

4.1.1 Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Rectilínea

En todas las pruebas realizadas se mantuvieron constantes las ganancias en el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, tomando los siguientes valores hallados con el método de oscilación sostenida de Ziegler-Nichols.

$$K_p = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

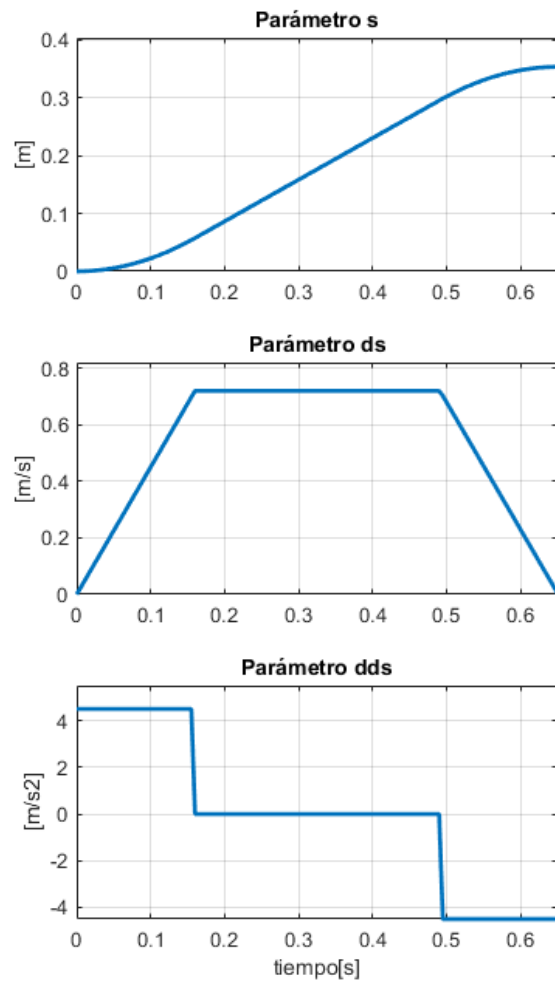
- Para la primera prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 90\%; dds_{m\acute{a}x} = 4.5 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 25, 26 y 27 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria rectilínea, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de crucero y del factor de velocidad máxima.

Figura 25

Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°1



Nota. Elaboración propia.

Figura 26

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°1

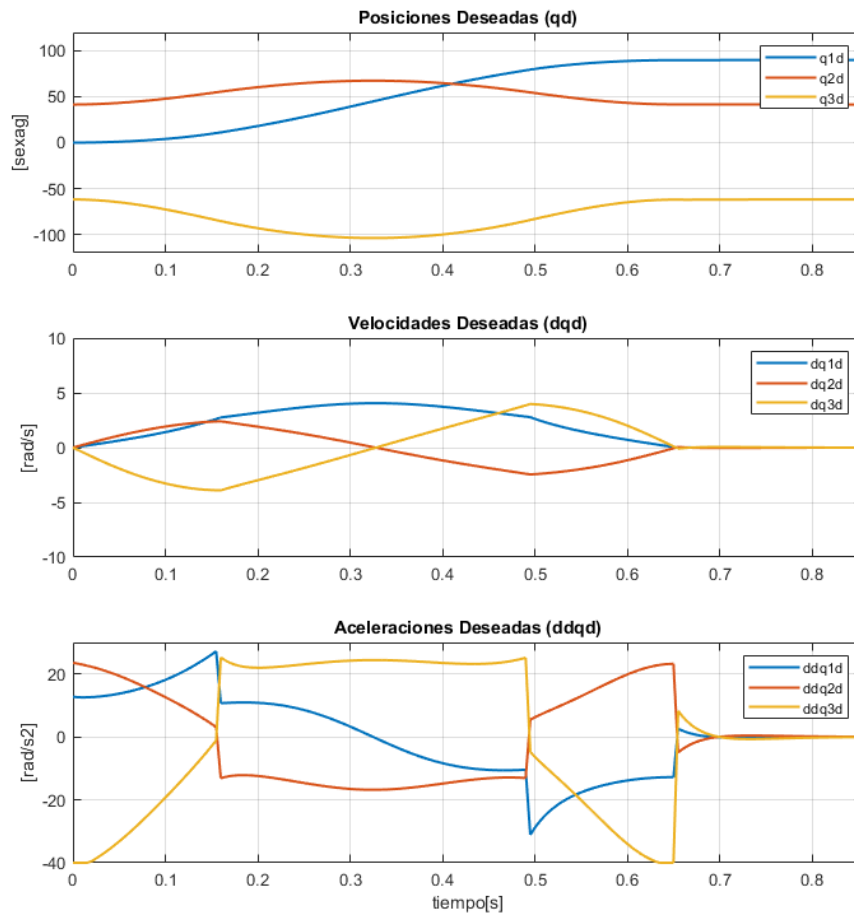
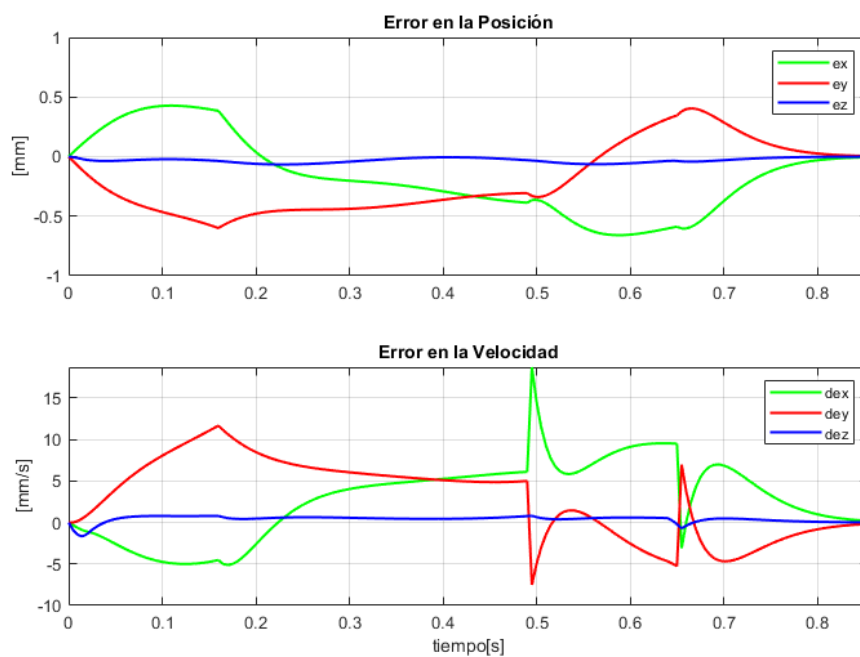


Figura 27

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°1



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 5.

Tabla 5

Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°1

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3536		
Tiempo de Navegación (s)	0.6510		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	4.0571	2.4505	3.9826
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	31.1056	23.5513	40.00
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.6595	0.60	0.0659
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	18.7257	11.6773	1.6690

Nota. Elaboración propia.

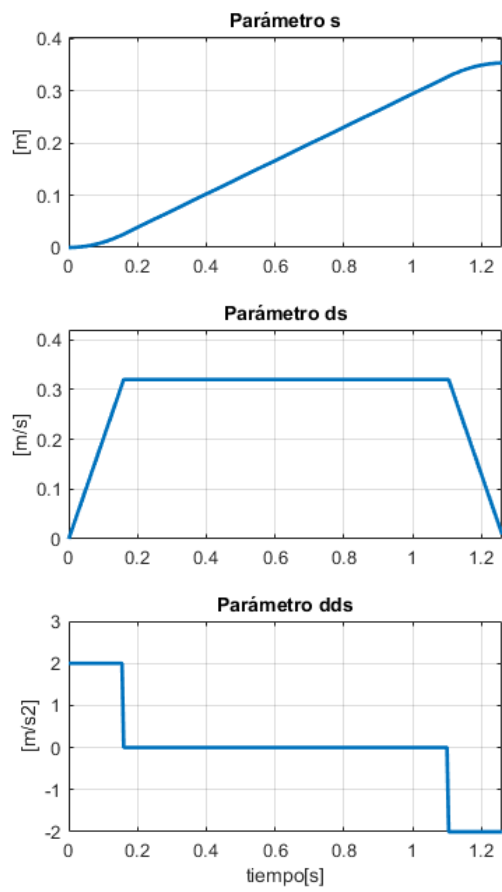
- Para la segunda prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 40\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.0 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 28, 29 y 30 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria rectilínea, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de crucero y del factor de velocidad máxima.

Figura 28

Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°2



Nota. Elaboración propia.

Figura 29

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°2

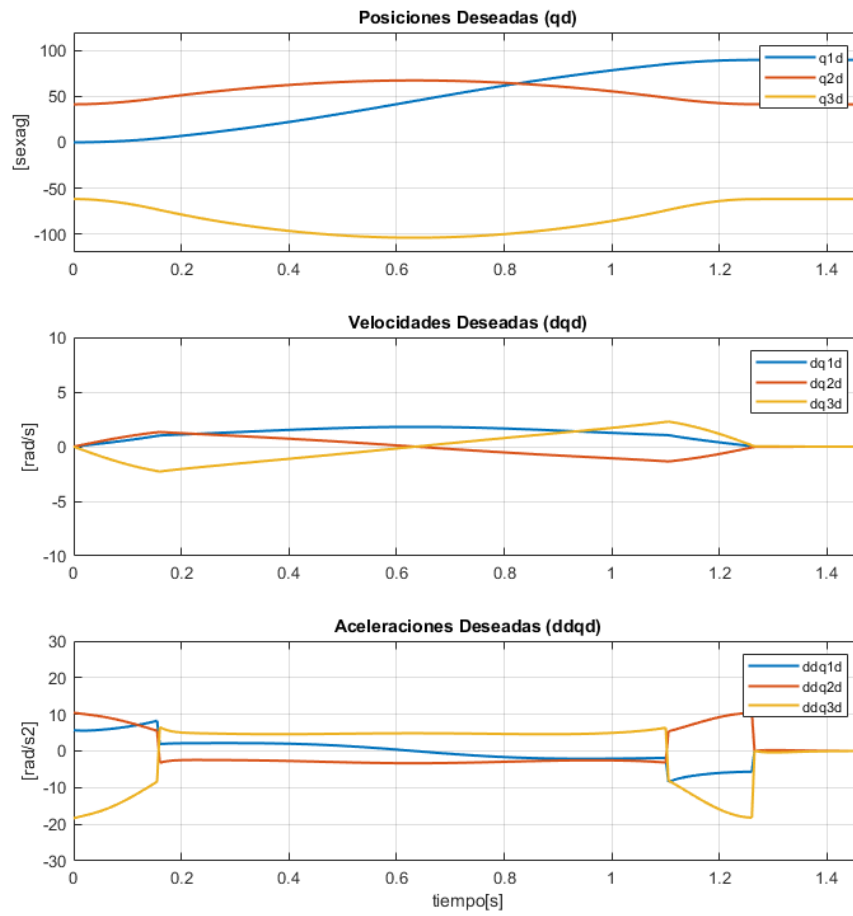
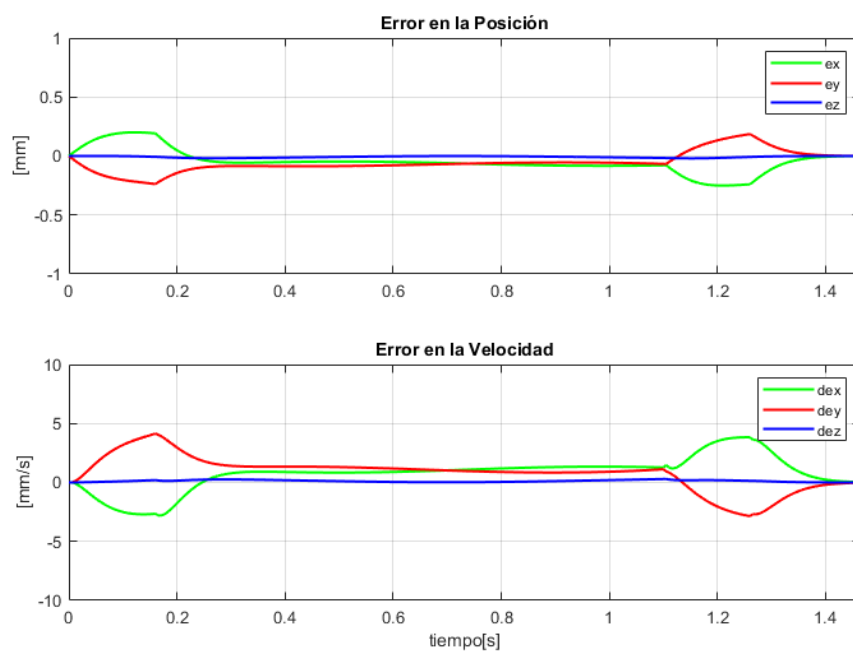


Figura 30

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°2



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 6.

Tabla 6

Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°2

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3536		
Tiempo de Navegación (s)	1.2649		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.8085	1.3558	2.2956
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	8.4474	10.4672	18.3711
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.2505	0.2375	0.0197
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	3.8327	4.1384	0.2965

Nota. Elaboración propia.

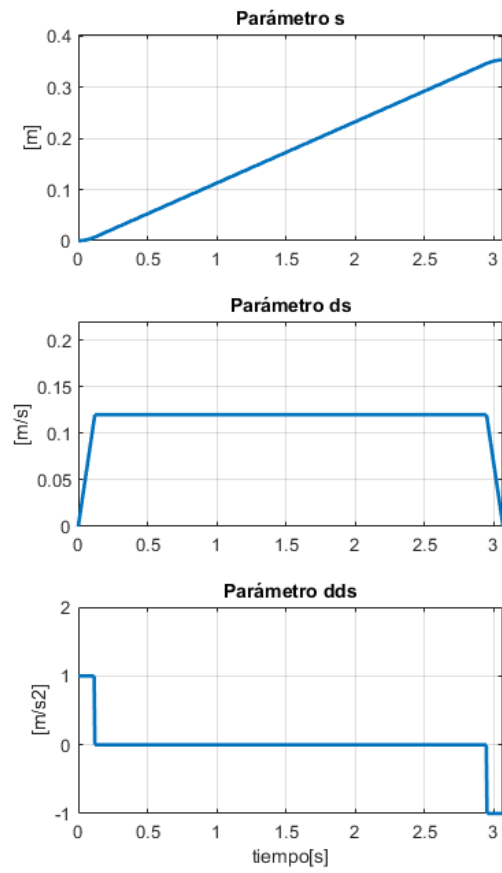
- Para la tercera prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 15\%; dds_{m\acute{a}x} = 1.0 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 31, 32 y 33 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria rectilínea, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de crucero y del factor de velocidad máxima.

Figura 31

Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°3



Nota. Elaboración propia.

Figura 32

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°3

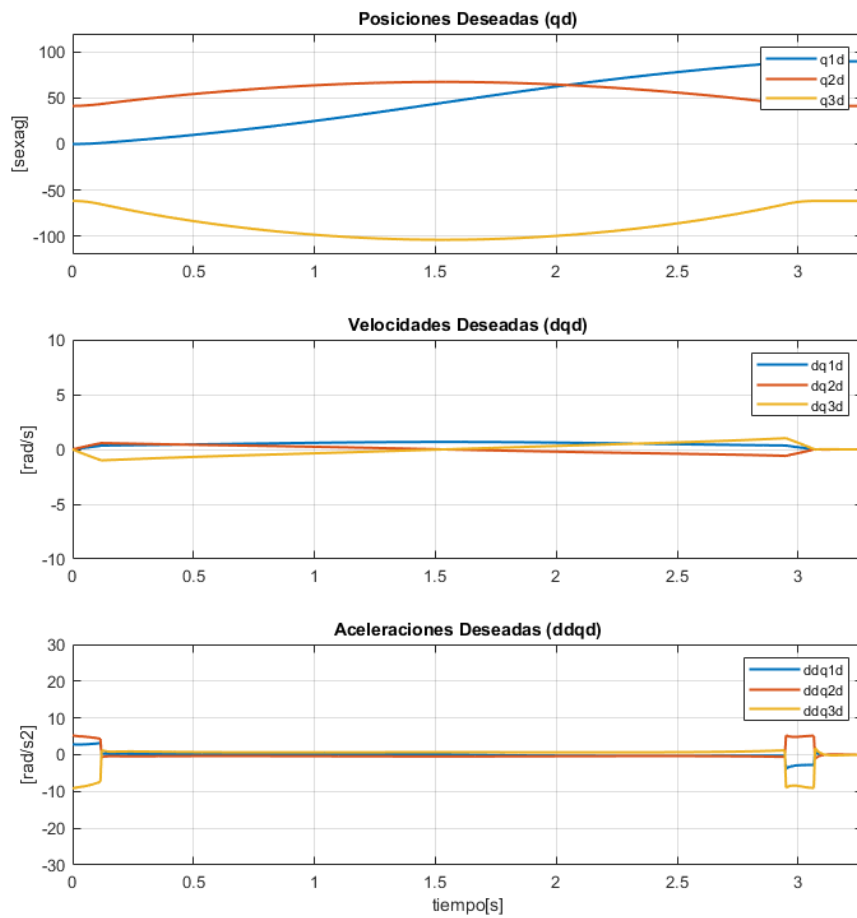
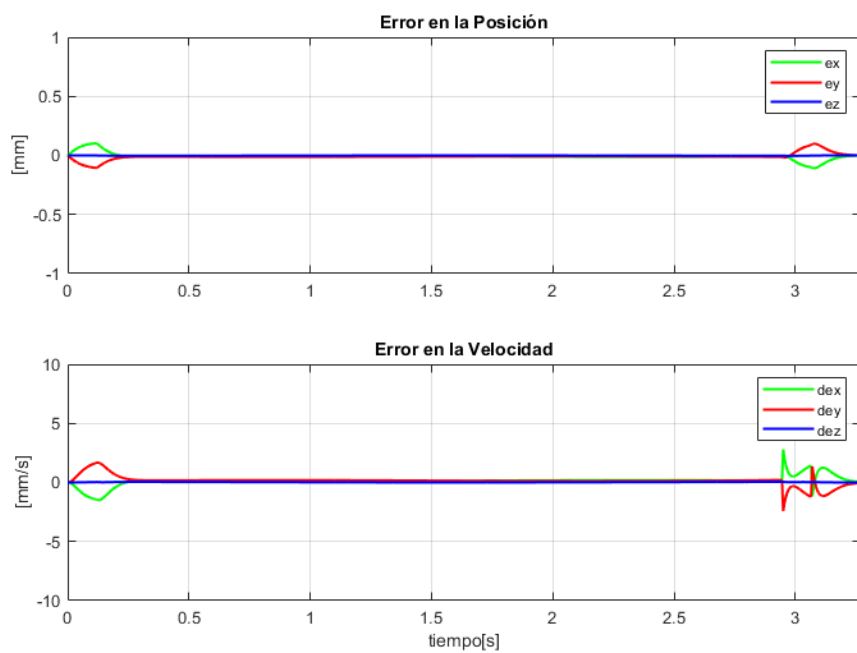


Figura 33

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectilínea - Prueba N°3



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 7.

Tabla 7

Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°3

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3536		
Tiempo de Navegación (s)	3.0663		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	0.6787	0.5904	1.0264
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	3.7408	5.2751	9.1855
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.1082	0.1064	0.0036
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	2.7898	2.4195	0.0555

Nota. Elaboración propia.

4.1.2 Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Rectangular

En todas las pruebas realizadas se mantuvieron constantes las ganancias en el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, tomando los siguientes valores hallados con el método de oscilación sostenida de Ziegler-Nichols.

$$K_p = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

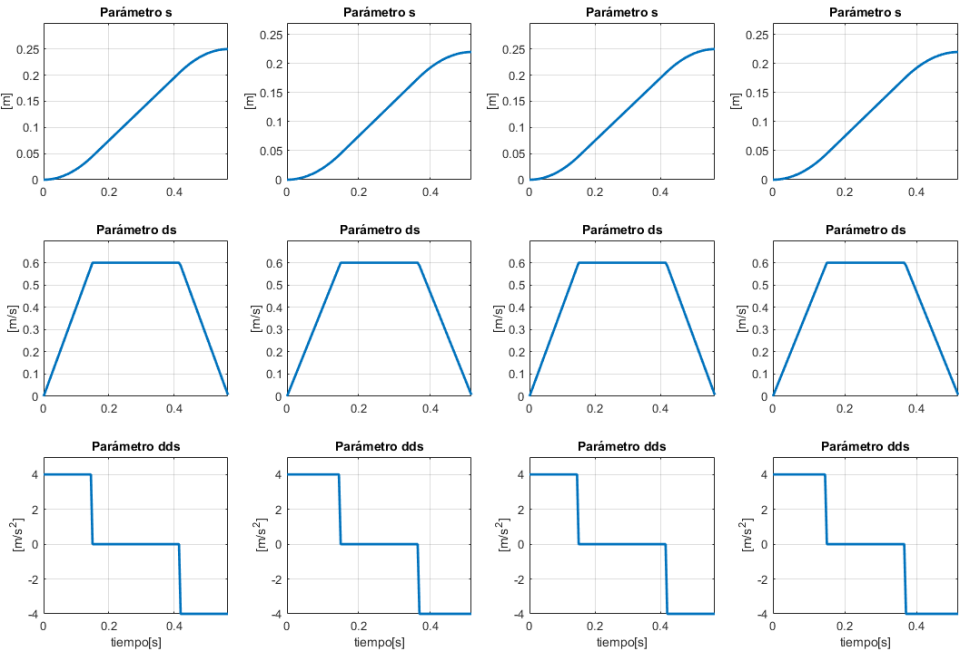
- Para la primera prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 75\%; dds_{m\acute{a}x} = 4.0 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 34, 35 y 36 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria rectangular, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de cruce y del factor de velocidad máxima.

Figura 34

Perfiles de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°1



Nota. Elaboración propia.

Figura 35

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°1

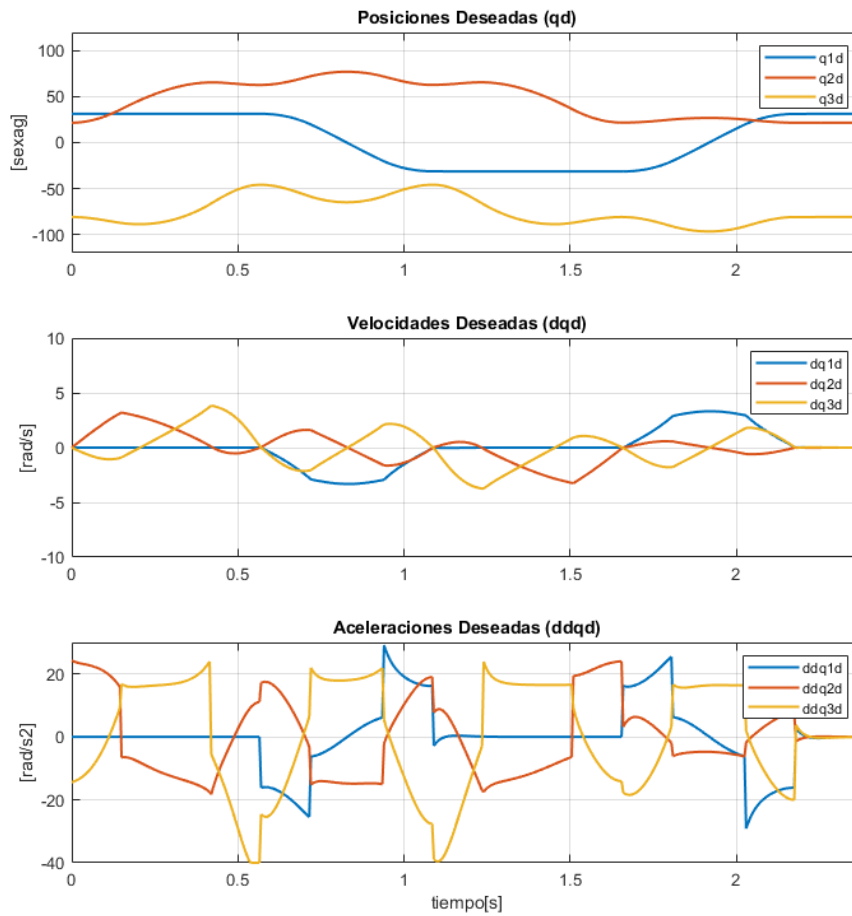
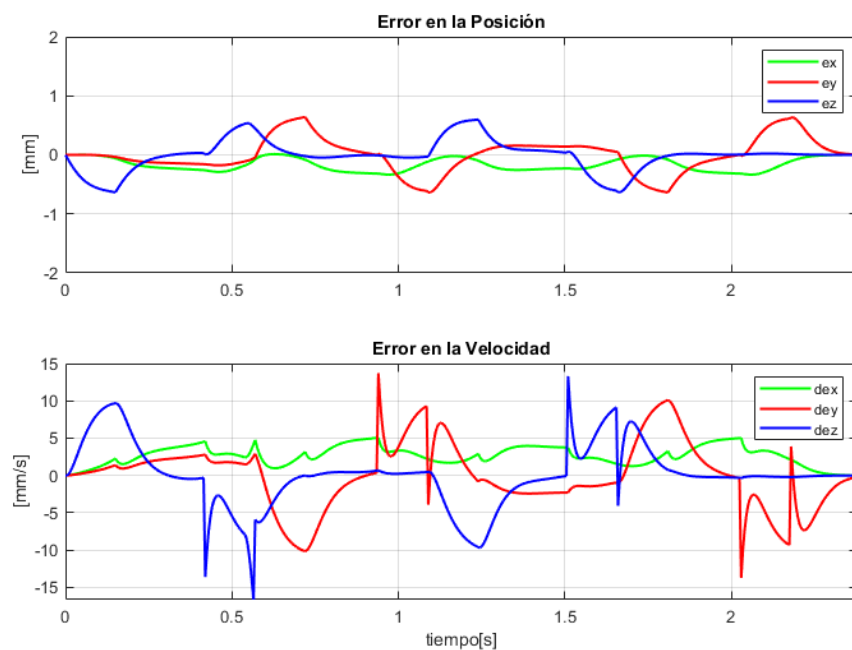


Figura 36

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°1



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 8.

Tabla 8

Resultados de la Trayectoria Rectangular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°1

Longitud de la Trayectoria (m)	0.9400		
Tiempo de Navegación (s)	2.1667		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	3.3186	3.2509	3.8283
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	29.1388	24.2608	40.00
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.3357	0.6402	0.6345
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	5.0661	13.7351	16.6428

Nota. Elaboración propia.

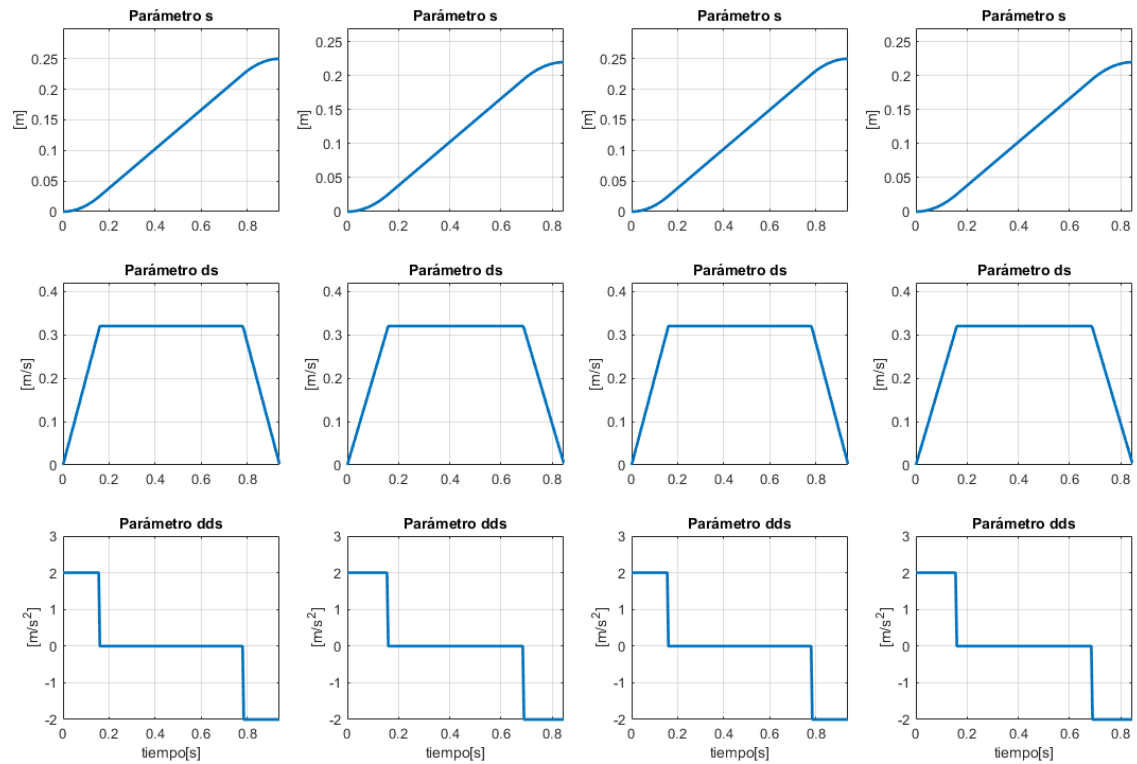
- Para la segunda prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 40\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.0 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 37, 38 y 39 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria rectangular, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de cruce y del factor de velocidad máxima.

Figura 37

Perfiles de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°2



Nota. Elaboración propia.

Figura 38

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°2

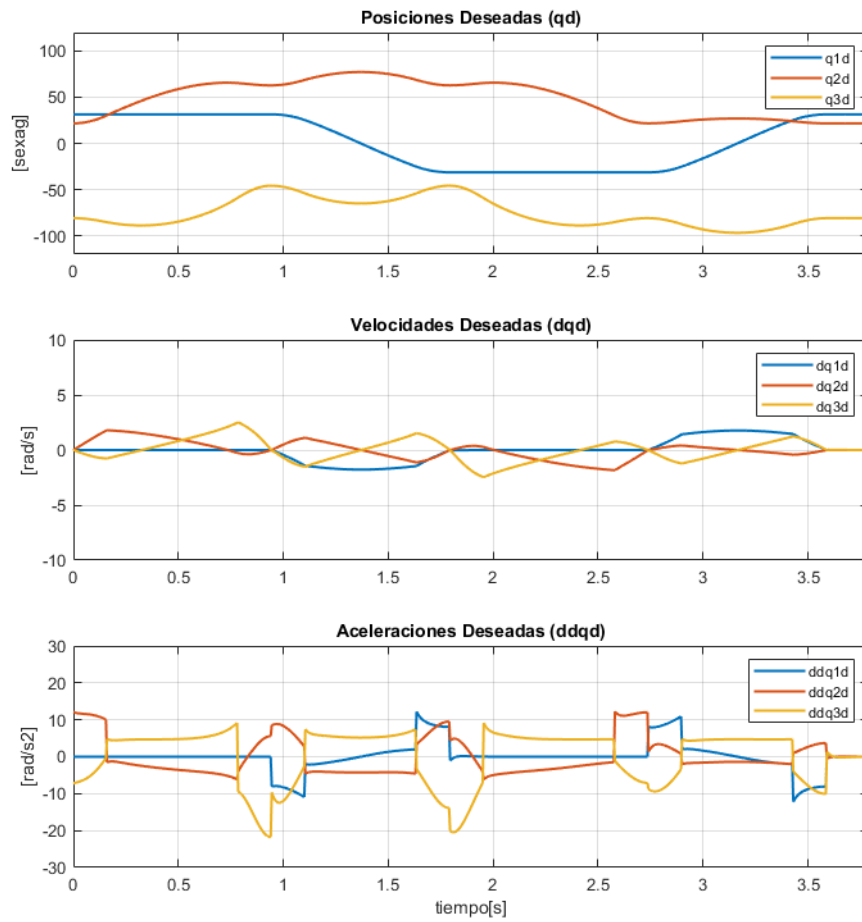
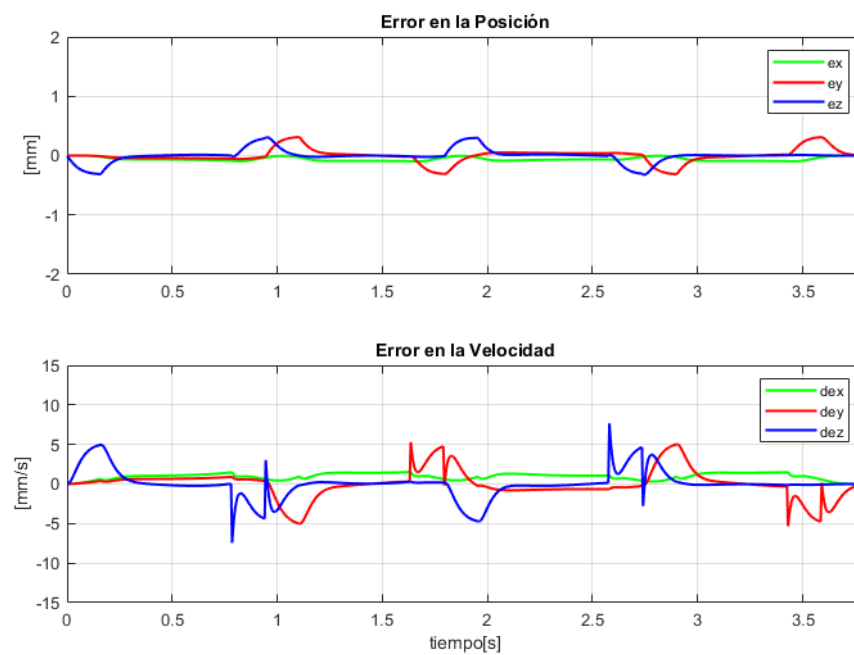


Figura 39

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°2



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 9.

Tabla 9

Resultados de la Trayectoria Rectangular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°2

Longitud de la Trayectoria (m)	0.9400		
Tiempo de Navegación (s)	3.5775		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.7762	1.8342	2.5178
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	12.2221	12.2430	21.7676
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.0993	0.3151	0.3238
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	1.5275	5.3189	7.6569

Nota. Elaboración propia.

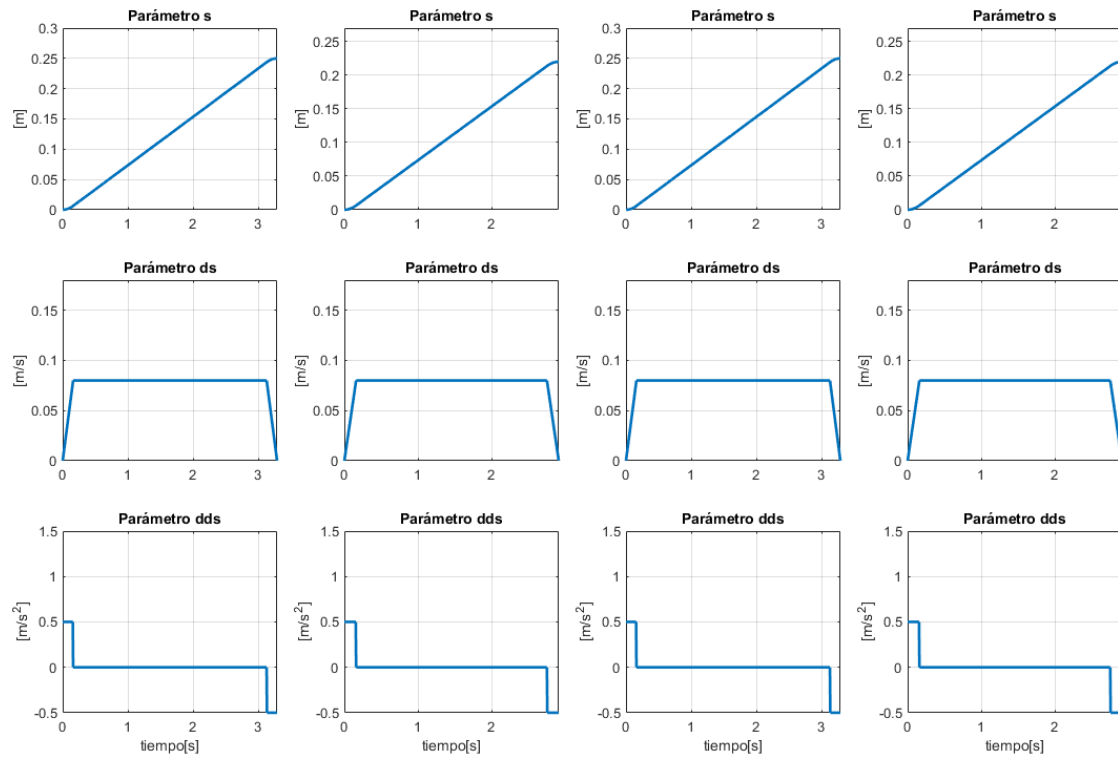
- Para la tercera prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 10\%; dds_{m\acute{a}x} = 0.5 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 40, 41 y 42 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria rectangular, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de cruce y del factor de velocidad máxima.

Figura 40

Perfiles de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°3



Nota. Elaboración propia.

Figura 41

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°3

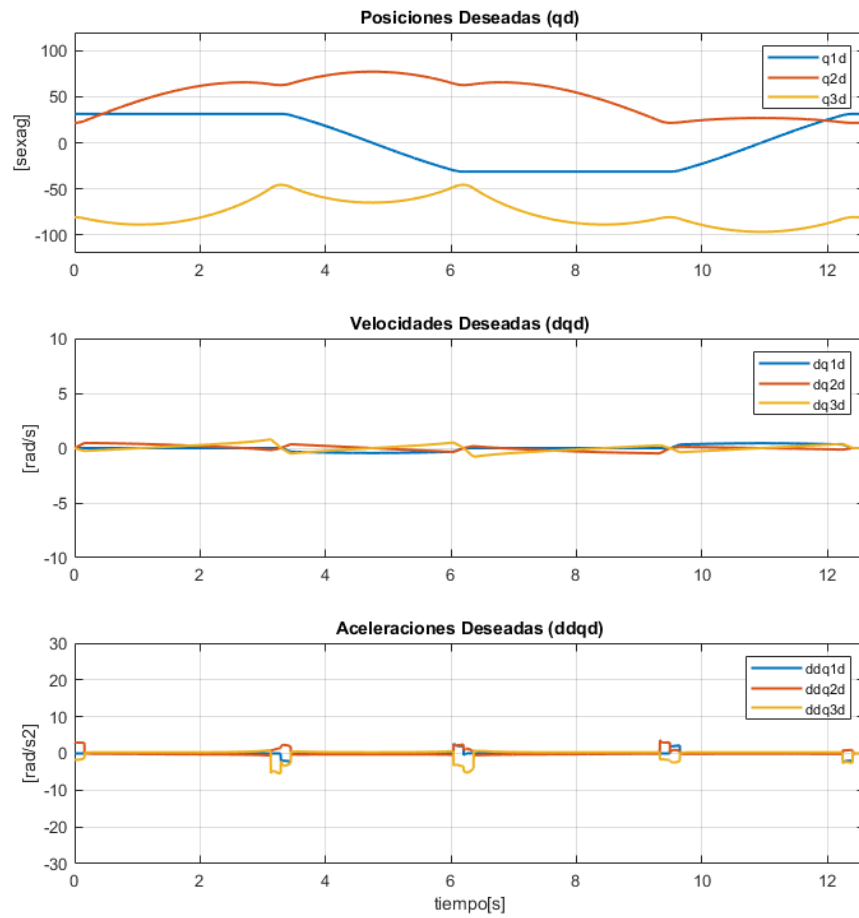
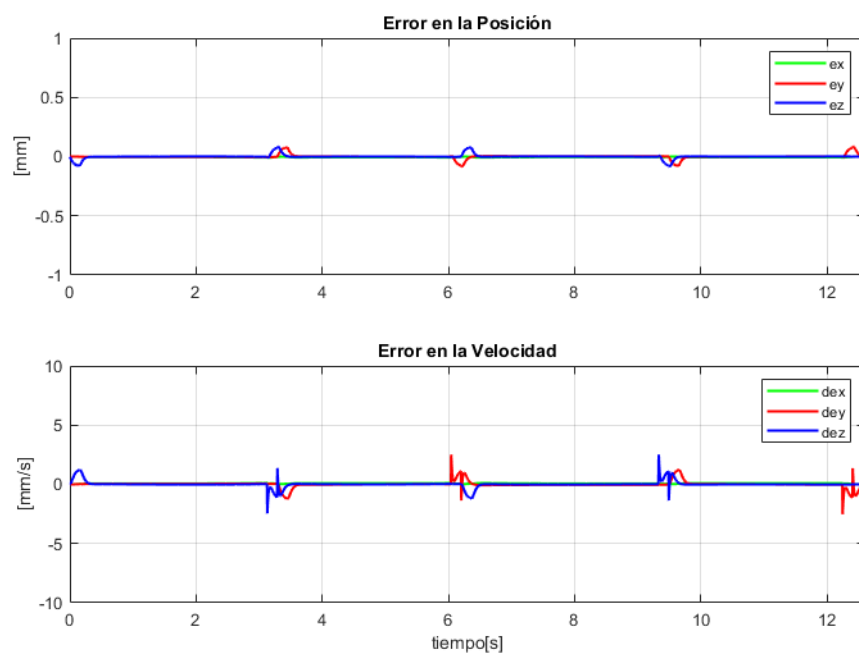


Figura 42

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Rectangular - Prueba N°3



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 10.

Tabla 10

Resultados de la Trayectoria Rectangular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°3

Longitud de la Trayectoria (m)	0.9400		
Tiempo de Navegación (s)	12.3900		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	0.4444	0.4791	0.8012
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	2.7523	3.6938	5.4595
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.0077	0.0856	0.0856
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	0.1186	2.5211	2.5178

Nota. Elaboración propia.

4.1.3 Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Circular

En todas las pruebas realizadas se mantuvieron constantes las ganancias en el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, tomando los siguientes valores hallados con el método de oscilación sostenida de Ziegler-Nichols.

$$K_p = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

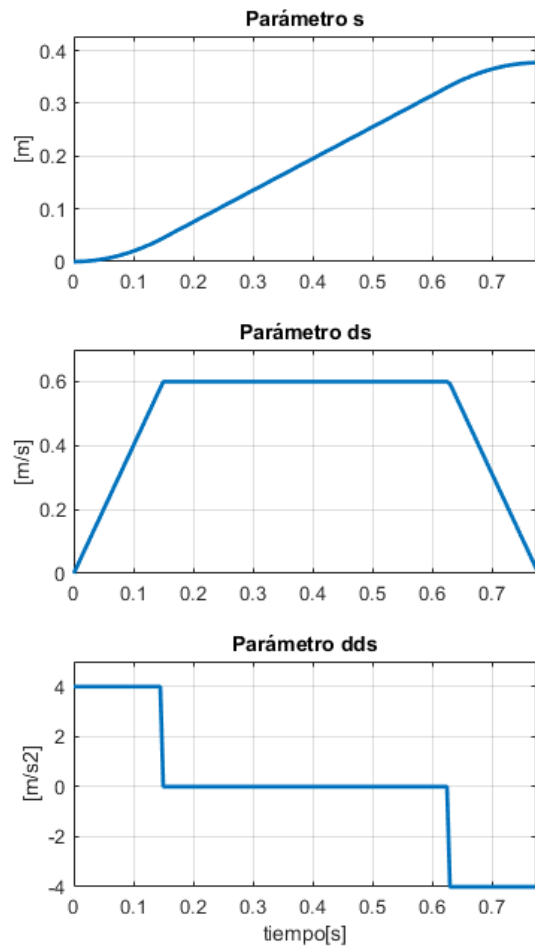
- Para la primera prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 75\%; dds_{m\acute{a}x} = 4.0 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 43, 44 y 45 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria rectangular, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de crucero y del factor de velocidad máxima.

Figura 43

Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Circular - Prueba N°1



Nota. Elaboración propia.

Figura 44

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular - Prueba N°1

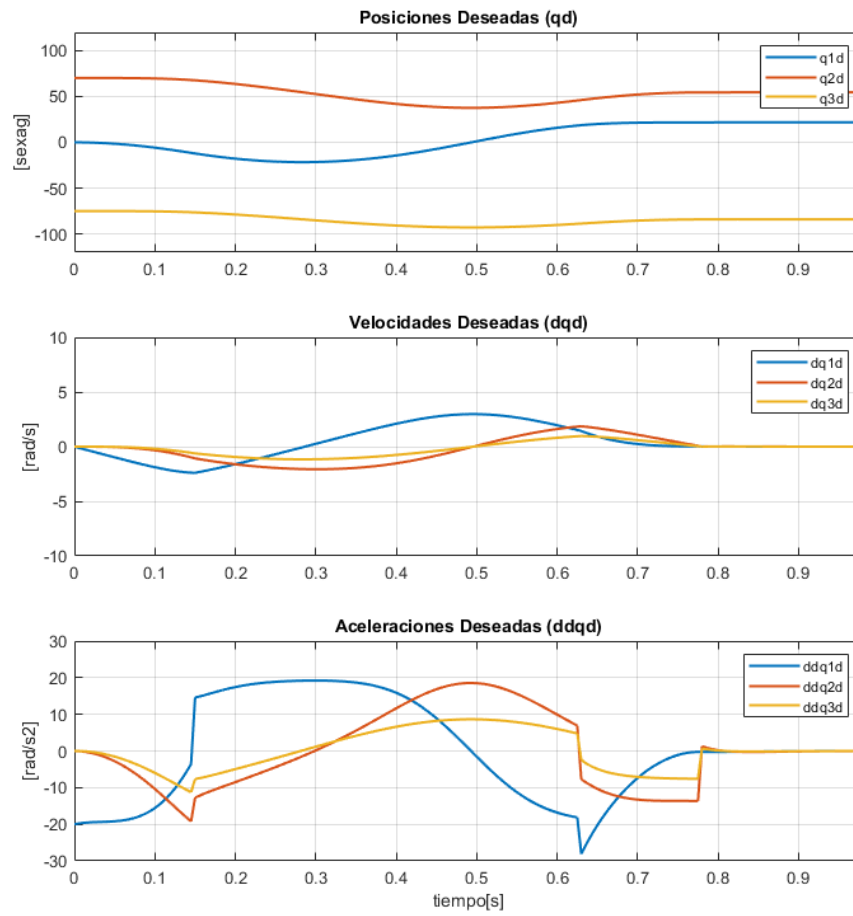
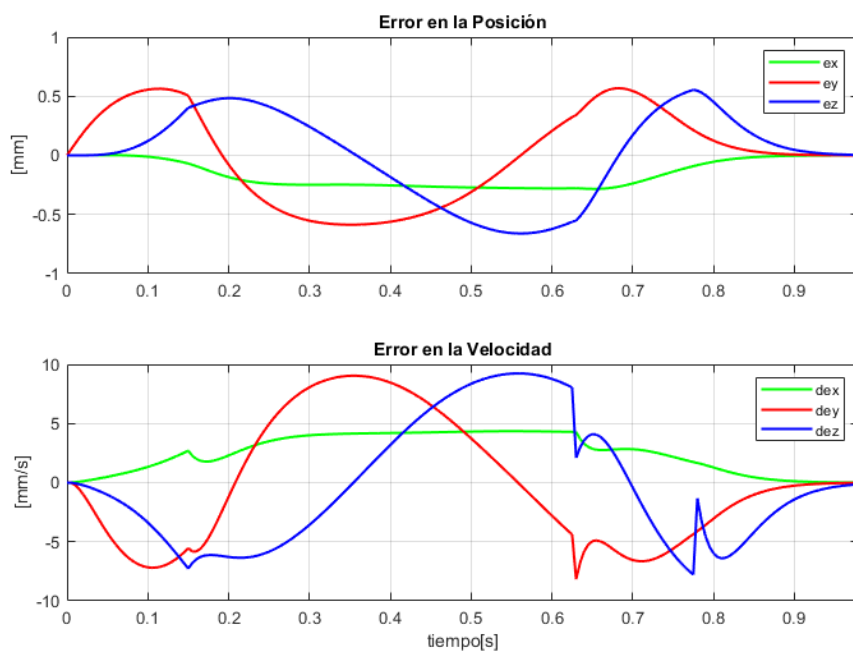


Figura 45

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Circular - Prueba N°1



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 10.

Tabla 11

Resultados de la Trayectoria Circular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°1

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3770		
Tiempo de Navegación (s)	0.7783		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	2.9756	2.0660	1.1599
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	28.0861	19.2305	11.2489
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.2834	0.5864	0.6606
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	4.3481	9.0394	9.2340

Nota. Elaboración propia.

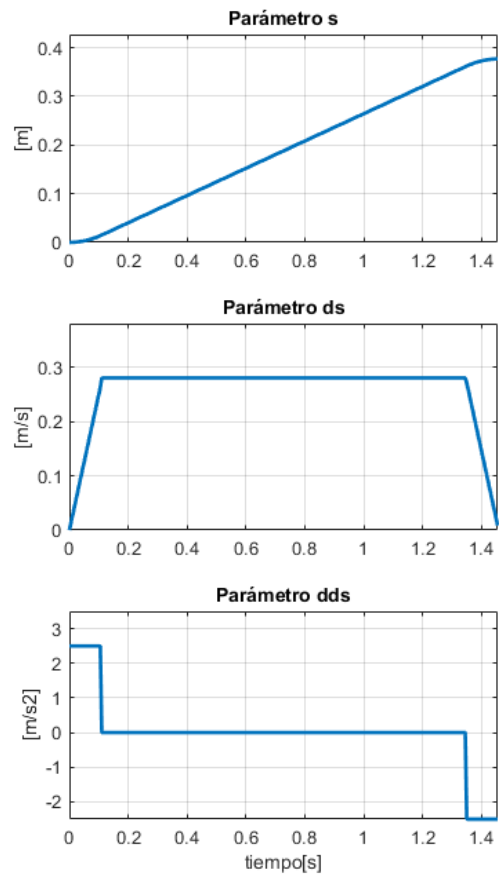
- Para la segunda prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 35\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 46, 47 y 48 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria circular, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de crucero y del factor de velocidad máxima.

Figura 46

Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Circular - Prueba N°2



Nota. Elaboración propia.

Figura 47

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular - Prueba N°2

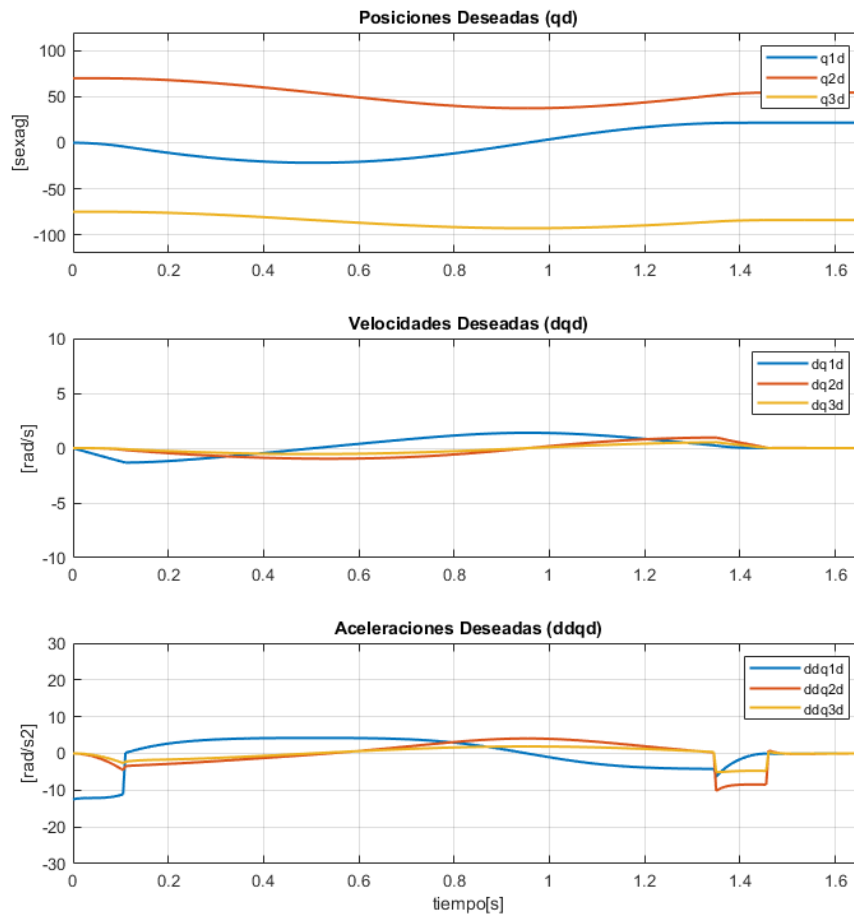
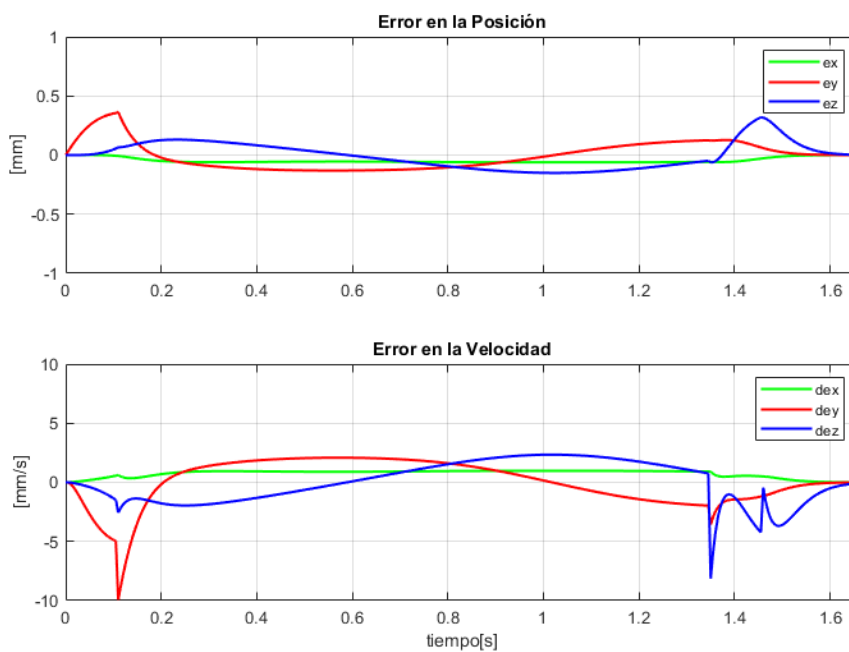


Figura 48

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Circular - Prueba N°2



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 12.

Tabla 12

Resultados de la Trayectoria Circular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°2

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3770		
Tiempo de Navegación (s)	1.4584		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.3968	0.9686	0.5440
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	12.5000	10.2029	5.0795
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.0614	0.3640	0.3193
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	0.9733	9.9346	8.1468

Nota. Elaboración propia.

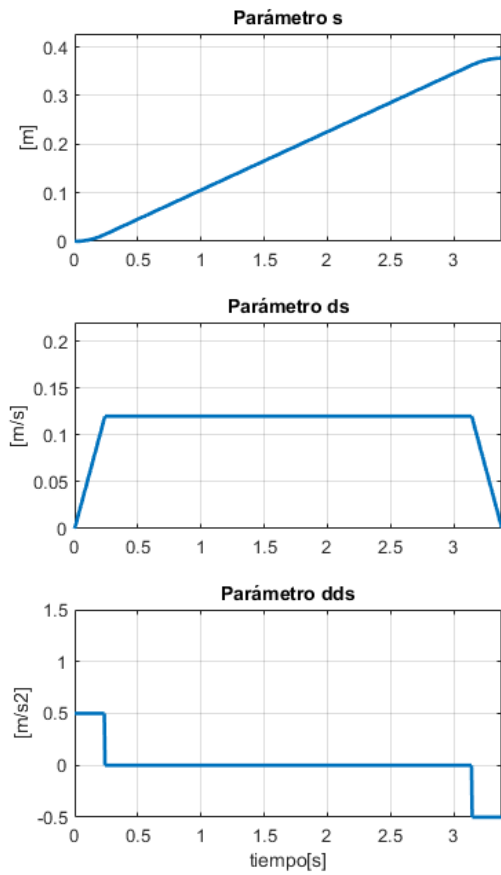
- Para la tercera prueba se establecen los siguientes valores en las variables.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 15\%; dds_{m\acute{a}x} = 0.5 \frac{m}{s^2}$$

En las Figuras 49, 50 y 51 se presentan los resultados correspondientes al perfil de velocidad trapezoidal, las variables cinemáticas, así como los errores de posición y velocidad asociados a la trayectoria circular, considerando los valores establecidos de velocidad máxima de cruce y del factor de velocidad máxima.

Figura 49

Perfil de Velocidad Trapezoidal de la Trayectoria Circular - Prueba N°3



Nota. Elaboración propia.

Figura 50

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular - Prueba N°3

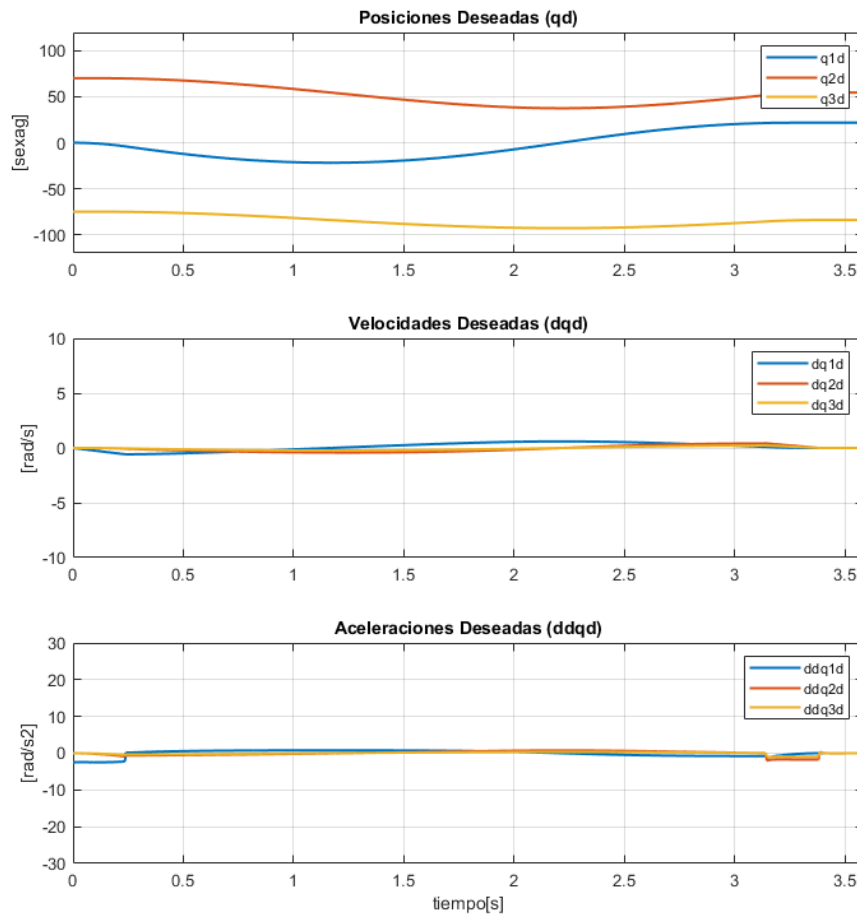
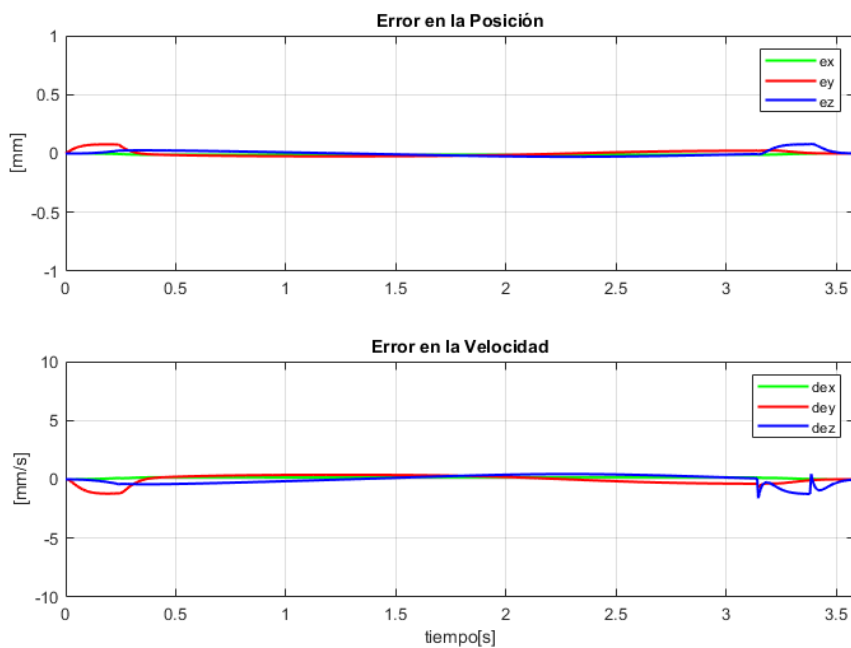


Figura 51

Errores de Posición y Velocidad de la Trayectoria Circular - Prueba N°3



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 13.

Tabla 13

Resultados de la Trayectoria Circular Según el Perfil Trapezoidal - Prueba N°3

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3770		
Tiempo de Navegación (s)	3.3816		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	0.5997	0.4156	0.2335
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	2.50	2.0115	1.0410
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.0113	0.0771	0.0805
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	0.1800	1.2114	1.6013

Nota. Elaboración propia.

Con base en los resultados obtenidos en todas las pruebas de las tres trayectorias se observa lo siguiente.

En la primera prueba de la trayectoria rectilínea, donde se establecen los valores de velocidad de cruce en 0.72 m/s y aceleración de cruce en 4.5 m/s^2 , se destaca la aceleración en las juntas, la cual llega al límite máximo establecido en la Tabla 3, mientras que la velocidad y posición se mantienen en valores aceptables y definiendo una trayectoria suave recorrida en 0.65 s ; por su parte, los errores de posición y velocidad en el espacio operacional llegan a un máximo de 0.66 mm y 18.72 mm/s respectivamente, lo cual es medianamente aceptable. Por otro lado, en la segunda prueba, con valores de velocidad de cruce en 0.32 m/s y aceleración de cruce en 2.0 m/s^2 , se observan valores de velocidad y aceleración en las juntas menores a 50% de los límites establecidos para una trayectoria recorrida en 1.26 s , en cuanto a los errores de posición y velocidad en el espacio operacional estos llegan a los límites máximos de 0.25 mm y 4.13 mm/s respectivamente. Finalmente, en la tercera prueba, donde se definieron los valores de velocidad de cruce en 0.12 m/s y aceleración de cruce en 1.0 m/s^2 , se destacan los valores bajos en aceleración y velocidad en las juntas, definiendo así una trayectoria suave, pero con un tiempo de recorrido de 3.03 s ; mientras que los errores de posición y

velocidad en el espacio operacional llegan a un máximo de 0.10 mm y 2.78 mm/s respectivamente. Estos resultados se detallan de forma ordenada en la Tabla 14.

Tabla 14

Comparación de Resultados para la Trayectoria Rectilínea Según el Perfil Trapezoidal

Longitud de la Trayectoria (m)		0.3536		
Prueba	Nº1	Nº2	Nº3	
Velocidad de Crucero (m/s)	0.72	0.32	0.12	
Aceleración de Crucero máxima (m/s^2)	4.5	2.0	1.0	
Tiempo de Navegación (s)	0.6510	1.2649	3.0663	
Velocidad Máxima en Q (rad/s)	4.0571	2.2956	1.0264	
Aceleración Máxima en Q (rad/s^2)	40.0	18.3711	9.1855	
Error Máximo de Posición en X (mm)	0.6595	0.2505	0.1082	
Error Máximo de Velocidad en X (mm/s)	18.7257	4.1384	2.7898	

Nota. "Q" hace referencia al Espacio de Juntas, mientras que "X" al Espacio de Tareas. Elaboración propia.

Para la trayectoria rectangular, en su primera prueba, donde se establecen valores de velocidad de crucero en 0.6 m/s y aceleración de crucero en 4.0 m/s^2 , se evidencian valores altos en la aceleración y velocidad para un tiempo de recorrido de 2.16 s , pese a ello, se mantienen bajos los errores de posición y velocidad, llegando a valores de 0.64 mm y 16.64 mm/s respectivamente. Por otro lado, para la segunda prueba, con valores de velocidad de crucero en 0.32 m/s y aceleración de crucero en 2.0 m/s^2 , se tienen valores de aceleración y velocidad en el espacio de juntas dentro de los límites aceptables con un tiempo de navegación de 3.57 s , mientras que los errores de posición y velocidad en el espacio operacional se mantienen en valores bajos de 0.32 mm y 7.65 mm/s respectivamente. Finalmente, en la tercera prueba, con valores de velocidad de crucero en 0.08 m/s y aceleración de crucero en 0.5 m/s^2 , se obtienen valores mínimos en velocidad y aceleración en las juntas, pero con un tiempo de navegación de 12.39 s ; a su vez, los errores de posición y velocidad en el espacio operacional se mantienen en valores muy bajos de 0.08 mm y 2.52 mm/s respectivamente. Estos resultados se detallan de forma ordenada en la Tabla 15.

Tabla 15*Comparación de Resultados para la Trayectoria Rectangular Según el Perfil Trapezoidal*

Longitud de la Trayectoria (m)		0.9400		
Prueba	N°1	N°2	N°3	
Velocidad de Crucero (m/s)	0.6	0.32	0.08	
Aceleración de Crucero máxima (m/s^2)	4.0	2.0	0.5	
Tiempo de Navegación (s)	2.1667	3.5775	12.39	
Velocidad Máxima en Q (rad/s)	3.8283	2.5178	0.8012	
Aceleración Máxima en Q (rad/s^2)	40.00	21.7676	5.4595	
Error Máximo de Posición en X (mm)	0.6402	0.3238	0.0856	
Error Máximo de Velocidad en X (mm/s)	16.6428	7.6569	2.5211	

Nota. "Q" hace referencia al Espacio de Juntas, mientras que "X" al Espacio de Tareas. Elaboración propia.

Asimismo, para la trayectoria circular, en su primera prueba, con valores de velocidad de crucero en $0.6 m/s$ y aceleración de crucero en $4.0 m/s^2$, se obtiene una trayectoria suave con un tiempo de navegación de $.77 s$, pero con valores altos de aceleración en las juntas, en contraste, los errores de posición y velocidad en el espacio operacional toman un máximo de $0.66 mm$ y $9.23 mm/s$ respectivamente. Mientras tanto, para la segunda prueba, donde se usaron valores de velocidad de crucero en $0.28 m/s$ y aceleración de crucero en $2.5 m/s^2$, se observan valores bajos en las variables cinemáticas de las juntas para un tiempo de recorrido de $1.45 s$, y los errores de posición y velocidad en el espacio operacional toman un máximo de $0.36 mm$ y $9.93 mm/s$ respectivamente. Finalmente, en la tercera prueba, con valores establecidos de velocidad de crucero en $0.12 m/s$ y aceleración de crucero en $0.5 m/s^2$, se obtuvieron valores muy bajos de velocidad y aceleración en el espacio de juntas, pero se evidencia un tiempo de navegación de $3.38 s$; de igual modo, los errores de posición y velocidad en el espacio operacional fueron los más bajos posibles, tomando un máximo de $0.08 mm$ y $1.60 mm/s$ respectivamente. Estos resultados se detallan de forma ordenada en la Tabla 16.

Tabla 16*Comparación de Resultados para la Trayectoria Circular Según el Perfil Trapezoidal*

Longitud de la Trayectoria (m)		0.3770		
Prueba	N°1	N°2	N°3	
Velocidad de Crucero (m/s)	0.6	0.28	0.12	
Aceleración de Crucero máxima (m/s²)	4.0	2.5	0.5	
Tiempo de Navegación (s)	0.7783	1.4584	3.3816	
Velocidad Máxima en Q (rad/s)	2.9756	1.3968	0.5997	
Aceleración Máxima en Q (rad/s²)	28.0861	12.5000	2.50	
Error Máximo de Posición en X (mm)	0.6606	0.3640	0.0805	
Error Máximo de Velocidad en X (mm/s)	9.2340	9.9346	1.6013	

Nota. "Q" hace referencia al Espacio de Juntas, mientras que "X" al Espacio de Tareas. Elaboración propia.

4.2 Resultados Según las Ganancias del Algoritmo de Cinemática Inversa de Segundo Orden

En las siguientes pruebas, con el propósito de visualizar el comportamiento de las diferentes variables de análisis, tales como posición, velocidad, aceleración y errores, se evalúan diferentes valores de las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, para este algoritmo se utilizan las ganancias proporcional y derivativa.

4.2.1 Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Rectilínea

En todas las pruebas realizadas se mantuvieron constantes los parámetros para la generación del perfil trapezoidal, tomando los siguientes valores.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 40\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.0 \frac{m}{s^2}$$

- Para la primera prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 2600 & 0 & 0 \\ 0 & 2600 & 0 \\ 0 & 0 & 2600 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 52 y 53 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria rectilínea, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 52

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°1

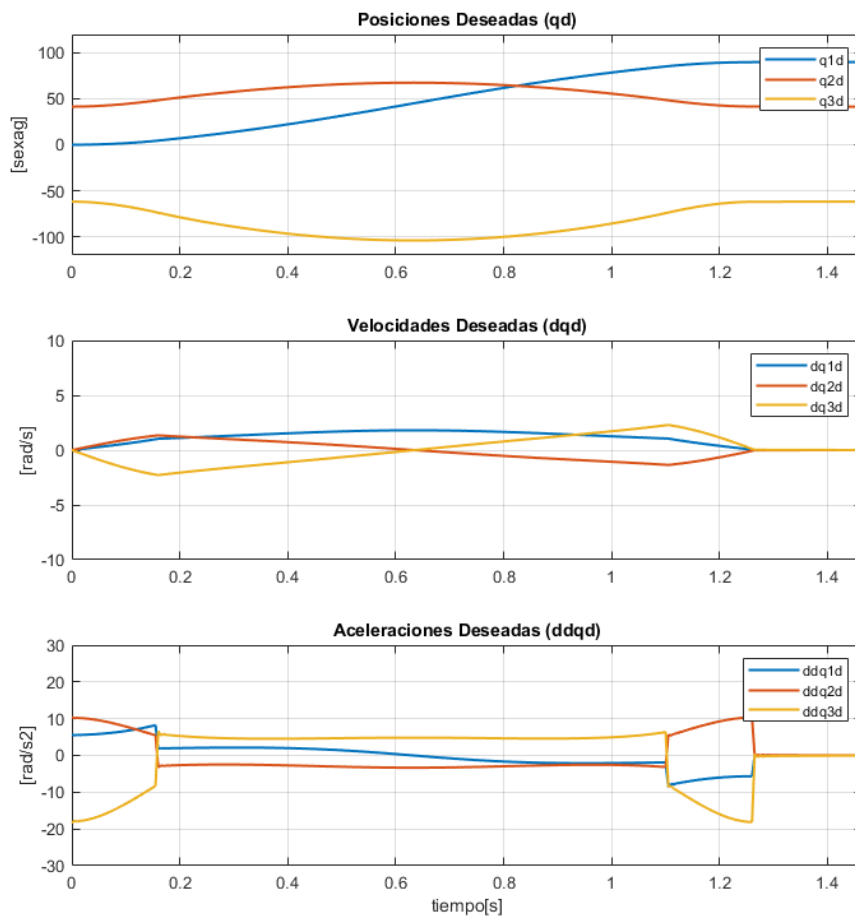
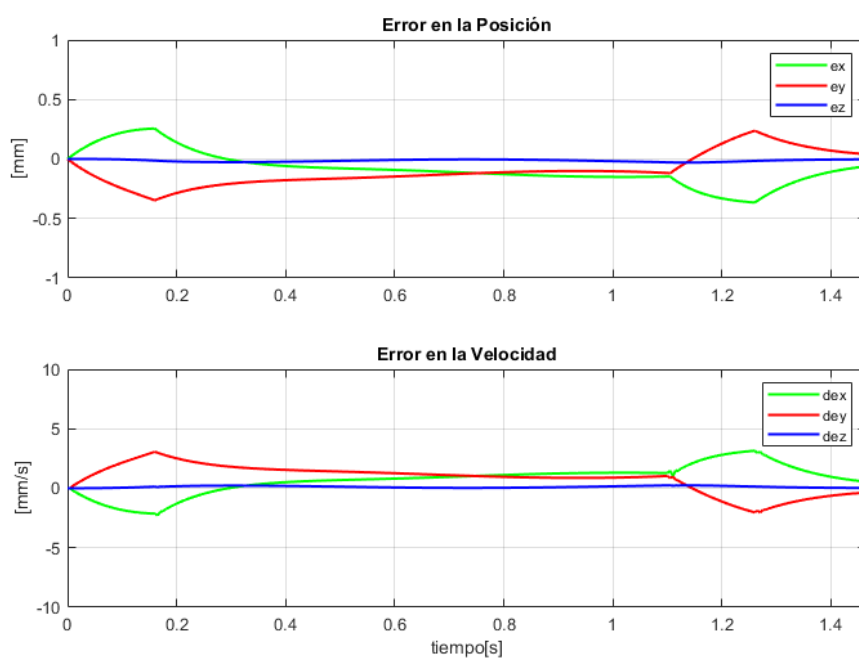


Figura 53

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°1



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 17.

Tabla 17

Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°1

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3536		
Tiempo de Navegación (s)	1.2649		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.8071	1.3563	2.2970
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	8.6832	10.4672	18.3711
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.3660	0.3475	0.0301
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	3.1573	3.0634	0.2507

Nota. Elaboración propia.

- Para la segunda prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 54 y 55 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria rectilínea, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 54

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°2

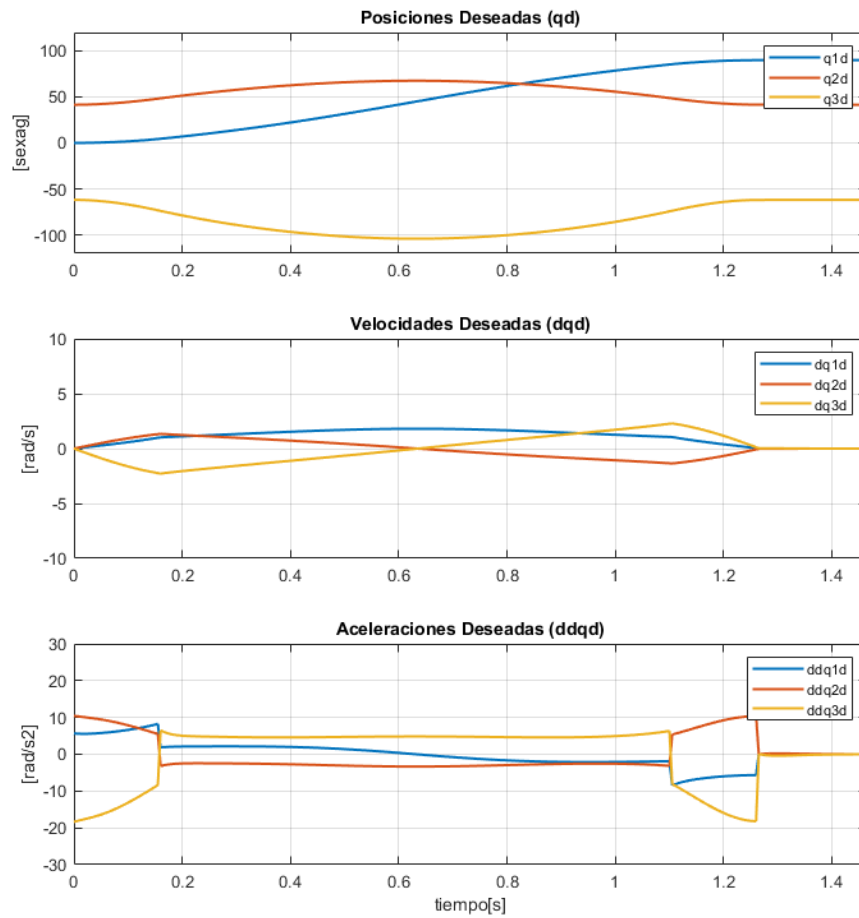
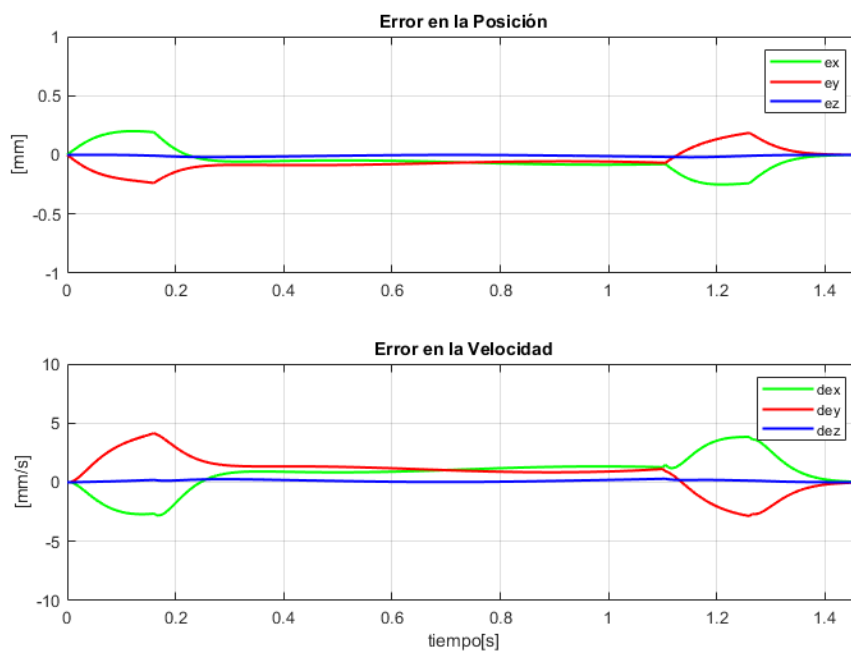


Figura 55

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°2



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 18.

Tabla 18

Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°2

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3536		
Tiempo de Navegación (s)	1.2649		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.8085	1.3558	2.2956
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	8.4474	10.4672	18.3711
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.2505	0.2375	0.0197
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	3.8327	4.1384	0.2965

Nota. Elaboración propia.

- Para la tercera prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 56 y 57 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria rectilínea, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 56

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°3

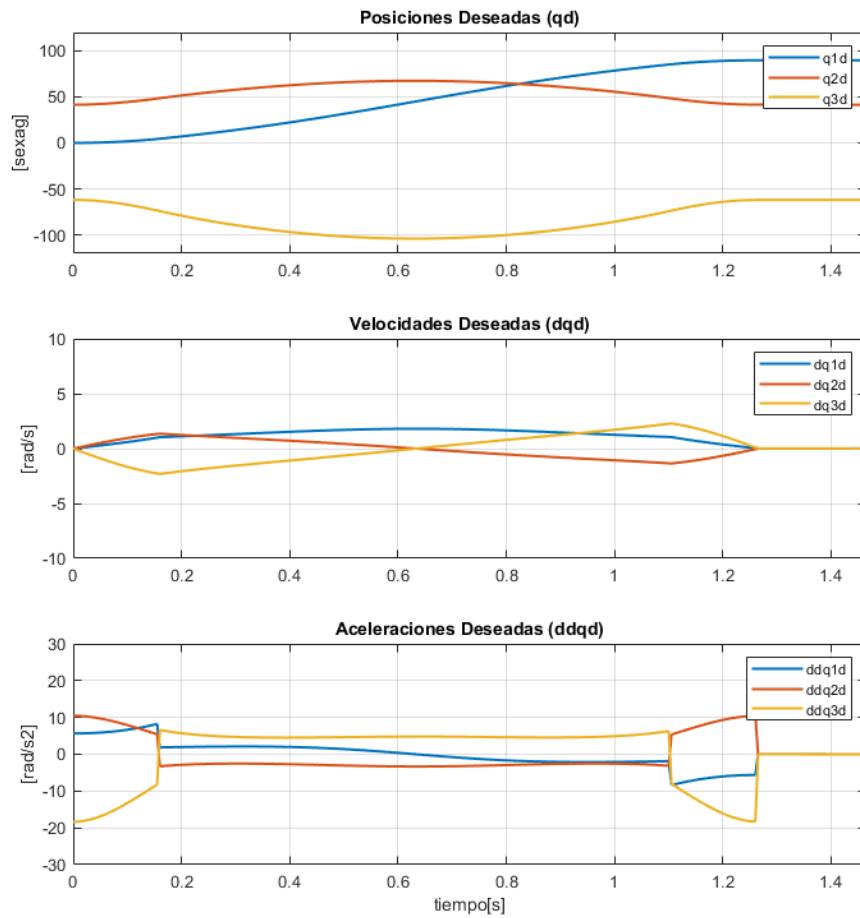
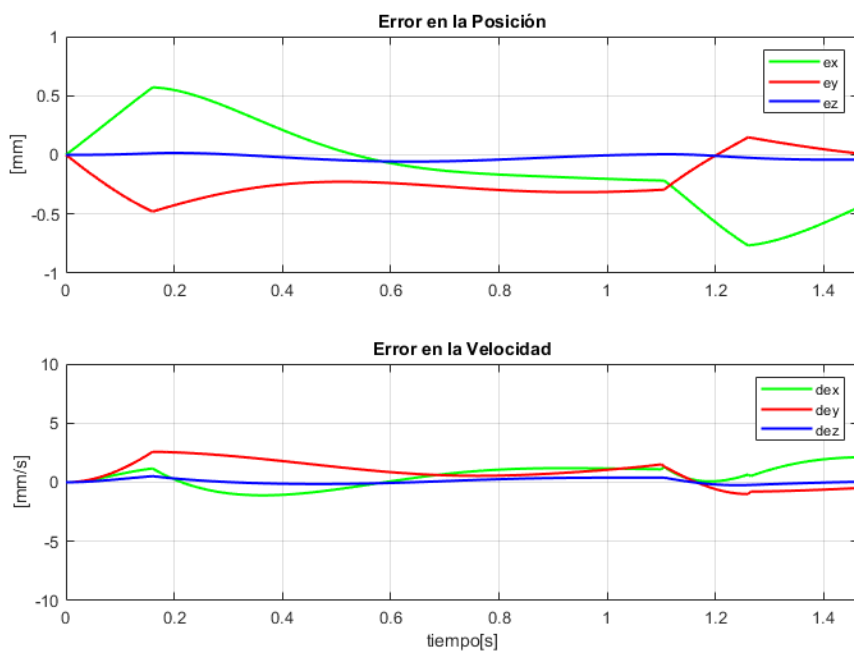


Figura 57

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°3



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 19.

Tabla 19

Resultados de la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias - Prueba N°3

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3536		
Tiempo de Navegación (s)	1.2649		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.8060	1.3623	2.3096
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	8.3903	10.4672	18.3711
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.7658	0.4792	0.0568
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	2.1134	2.5751	0.5139

Nota. Elaboración propia.

4.2.2 Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Rectangular

En todas las pruebas realizadas se mantuvieron constantes los parámetros para la generación del perfil trapezoidal, tomando los siguientes valores.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 40\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.0 \frac{m}{s^2}$$

- Para la primera prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 2200 & 0 & 0 \\ 0 & 2200 & 0 \\ 0 & 0 & 2200 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 250 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 58 y 59 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria rectangular, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 58

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°1

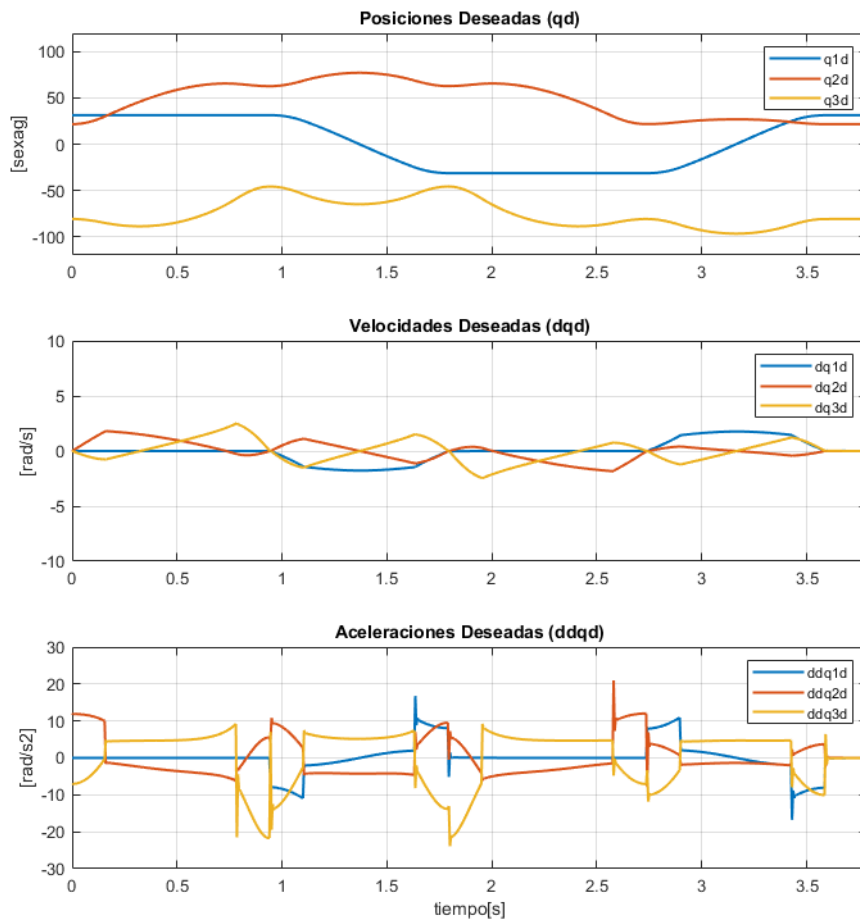
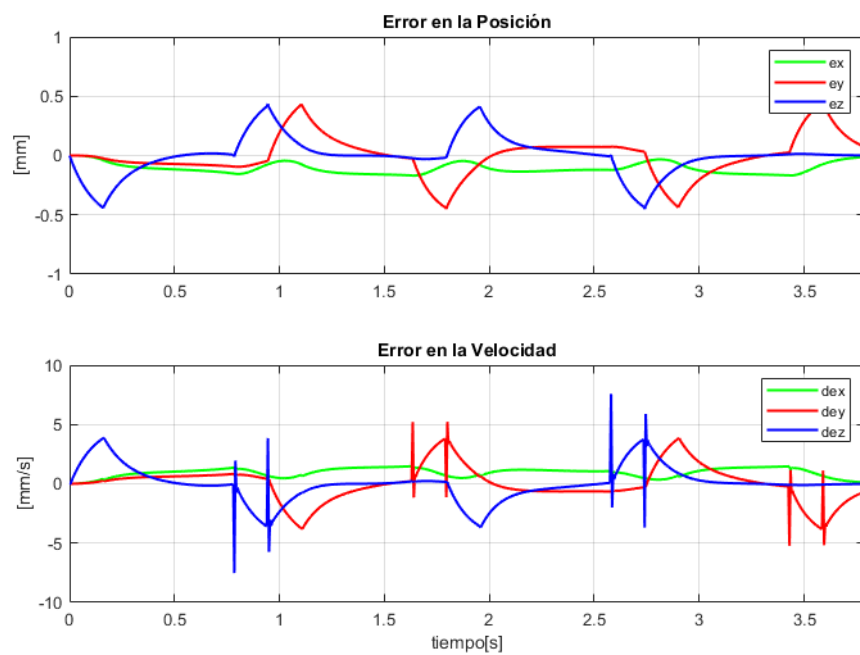


Figura 59

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°1



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 20.

Tabla 20

Resultados de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°1

Longitud de la Trayectoria (m)	0.9400		
Tiempo de Navegación (s)	3.5775		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.7733	1.8334	2.5213
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	16.7906	20.9662	23.8945
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.1695	0.4495	0.4518
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	1.4859	5.2276	7.5806

Nota. Elaboración propia.

- Para la segunda prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 60 y 61 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria rectangular, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 60

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°2

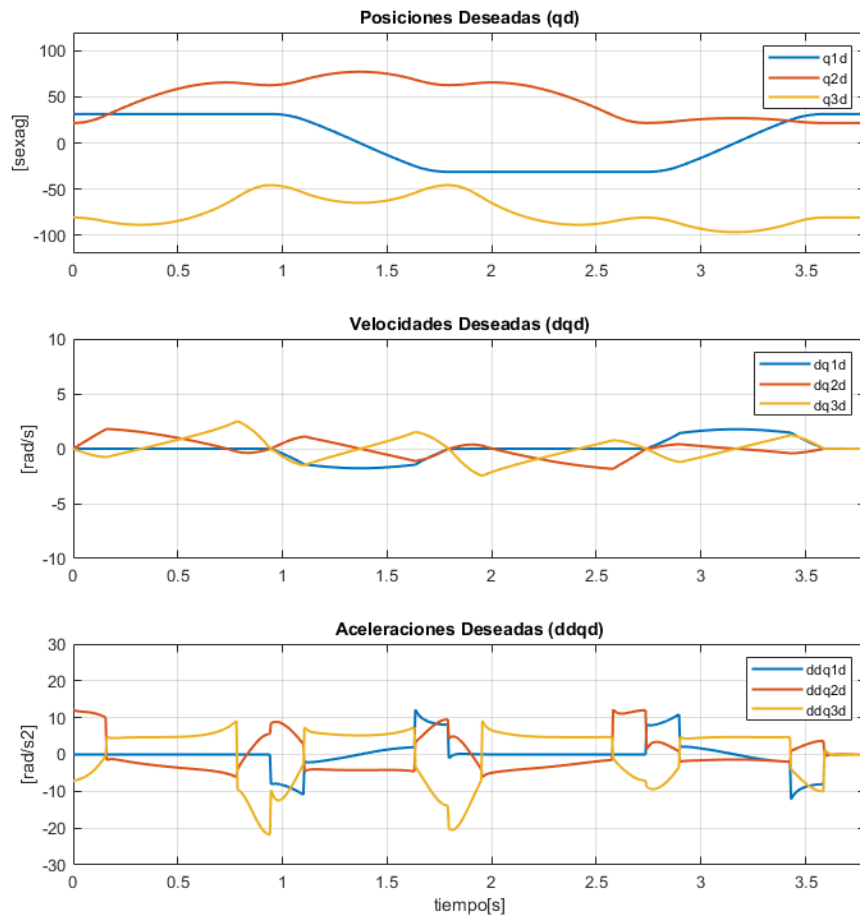
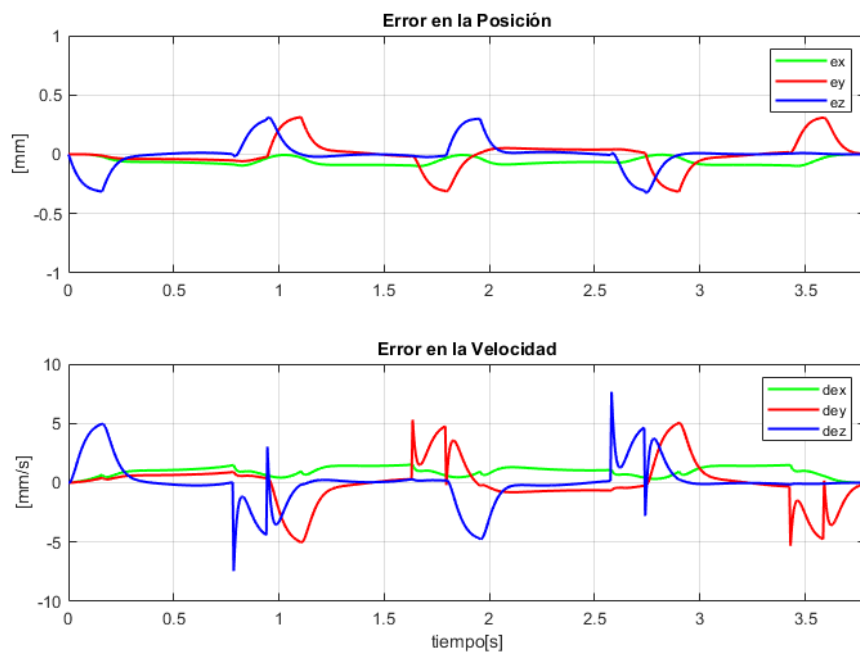


Figura 61

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°2



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 21.

Tabla 21

Resultados de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°2

Longitud de la Trayectoria (m)	0.9400		
Tiempo de Navegación (s)	3.5775		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.7762	1.8342	2.5178
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	12.2221	12.2430	21.7676
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.0993	0.3151	0.3238
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	1.5275	5.3189	7.6569

Nota. Elaboración propia.

- Para la tercera prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 62 y 63 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria rectangular, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 62

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°3

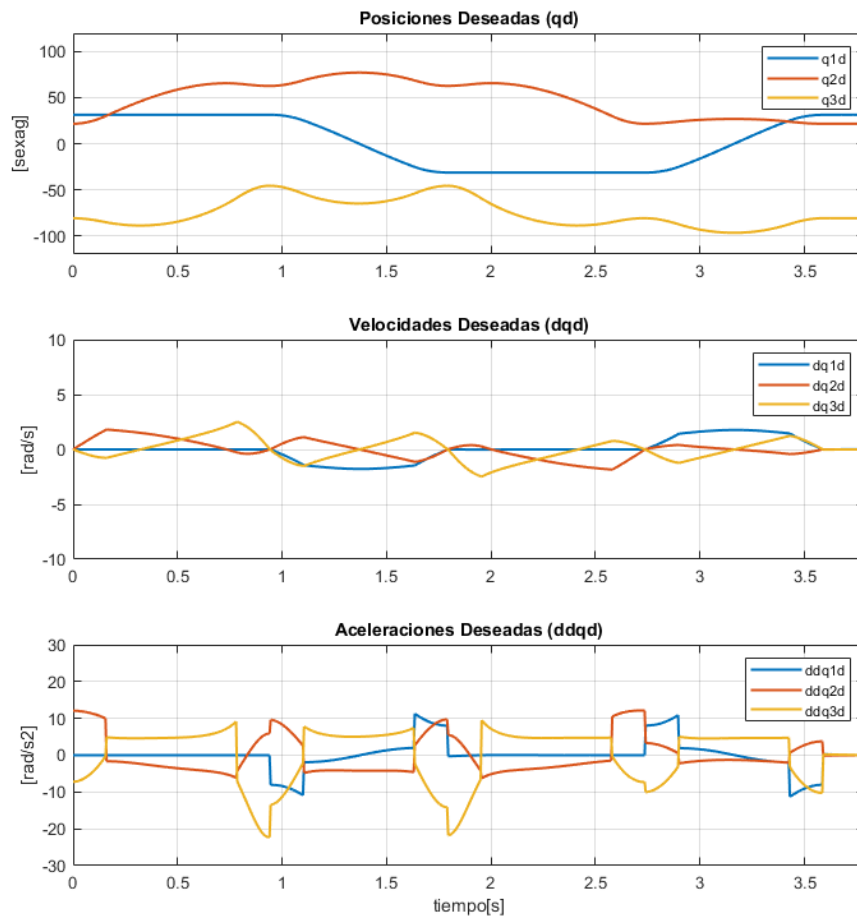
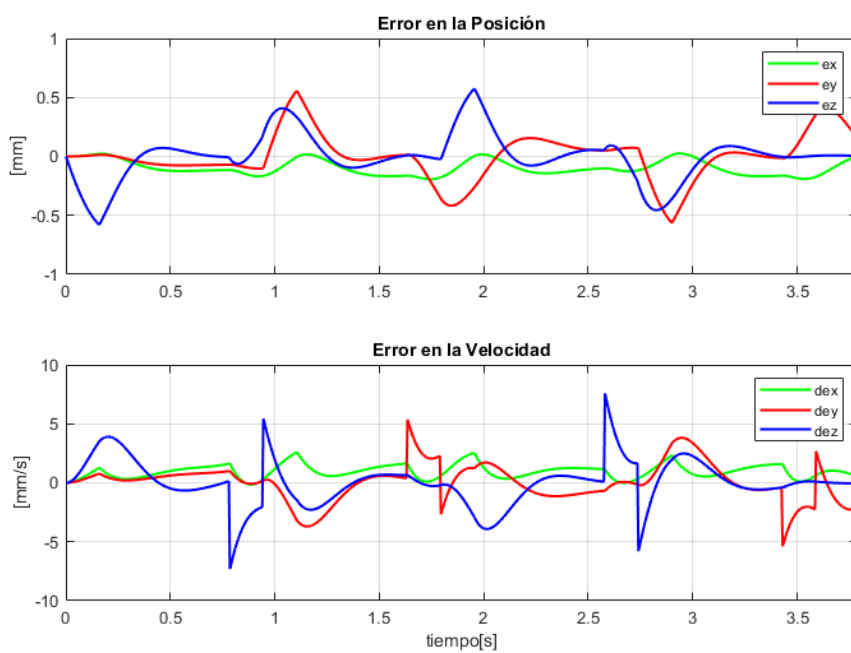


Figura 63

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°3



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 22.

Tabla 22

Resultados de la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias - Prueba N°3

Longitud de la Trayectoria (m)	0.9400		
Tiempo de Navegación (s)	3.5775		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.7748	1.8335	2.5157
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	11.3047	12.1521	22.3109
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.1930	0.5647	0.5801
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	2.6167	5.3845	7.5836

Nota. Elaboración propia.

4.2.3 Posición, Velocidad y Aceleración para la Trayectoria Circular

En todas las pruebas realizadas se mantuvieron constantes los parámetros para la generación del perfil trapezoidal, tomando los siguientes valores.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 35\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

- Para la primera prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 2800 & 0 & 0 \\ 0 & 2800 & 0 \\ 0 & 0 & 2800 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 350 & 0 & 0 \\ 0 & 350 & 0 \\ 0 & 0 & 350 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 64 y 65 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria circular, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 64

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°1

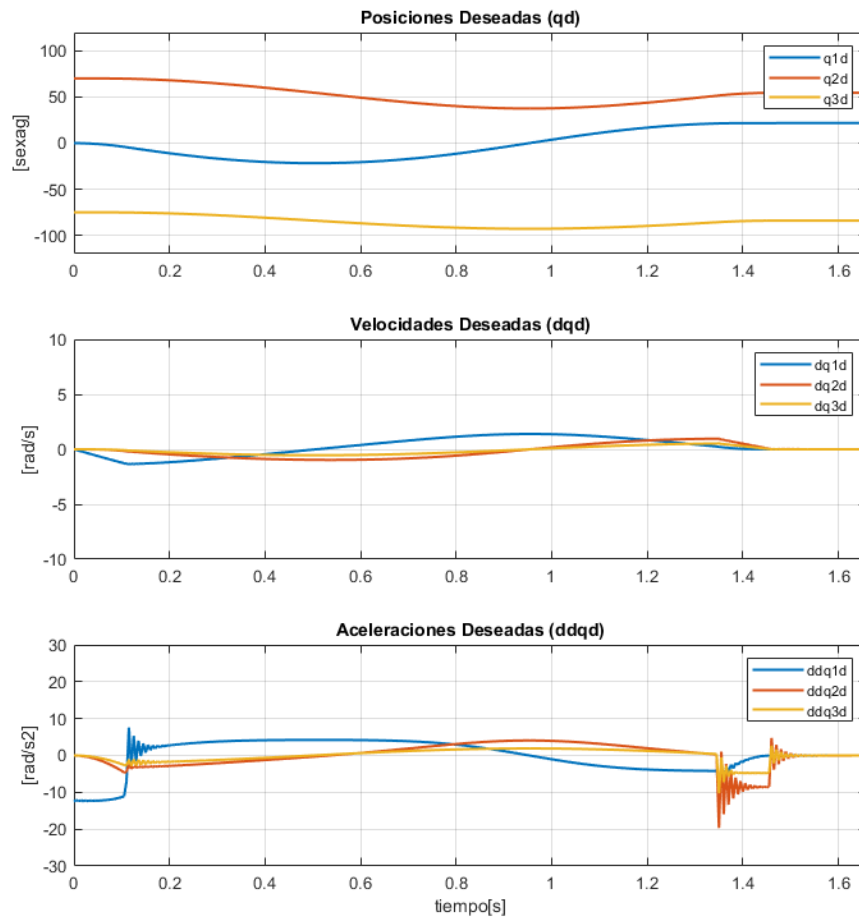
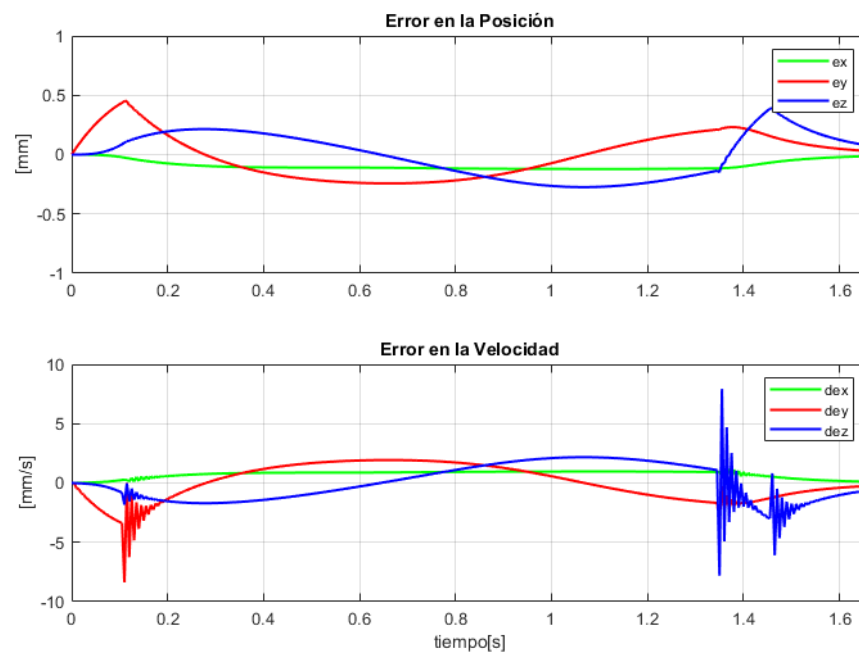


Figura 65

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°1



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla. 23

Tabla 23

Resultados de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°1

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3770		
Tiempo de Navegación (s)	1.4584		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.3946	0.9674	0.5437
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	12.5000	19.6854	10.2695
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.1214	0.4523	0.3911
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	1.2129	8.3737	7.9275

Nota. Elaboración propia.

- Para la segunda prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 66 y 67 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria circular, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 66

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°2

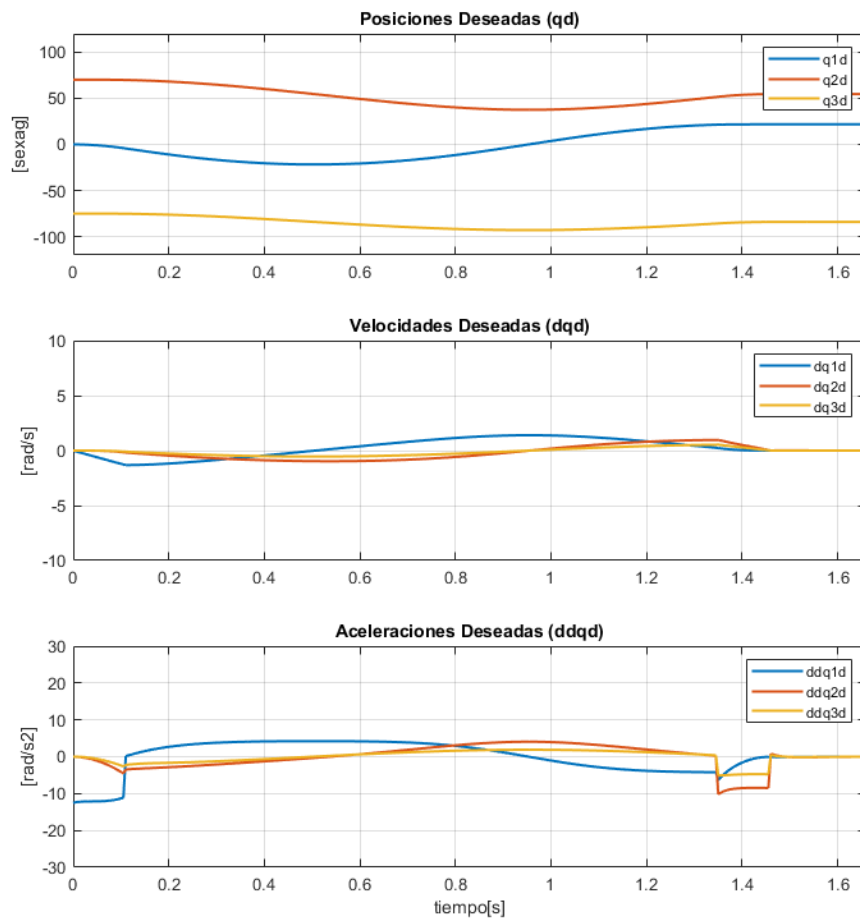
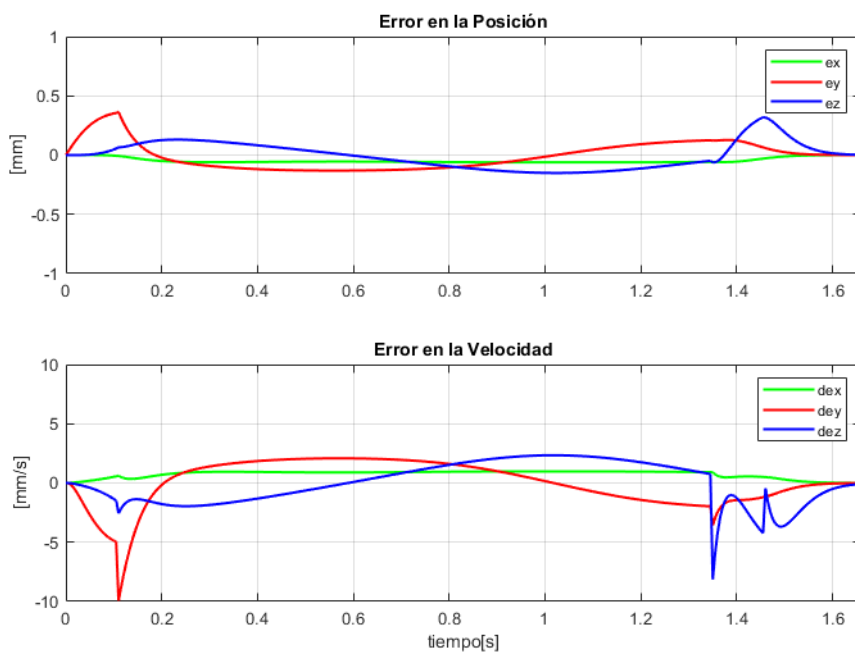


Figura 67

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°2



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 24.

Tabla 24

Resultados de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°2

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3770		
Tiempo de Navegación (s)	1.4584		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.3968	0.9686	0.5440
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	12.50	10.2029	5.0795
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.0614	0.3640	0.3193
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	0.9733	9.9346	8.1468

Nota. Elaboración propia.

- Para la tercera prueba se establecen los siguientes valores en las ganancias.

$$K_p = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

En las Figuras 68 y 69 se presentan los resultados correspondientes a las variables cinemáticas y a los errores cinemáticos asociados a la trayectoria circular, considerando los valores establecidos para las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden.

Figura 68

Variables Cinemáticas de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°3

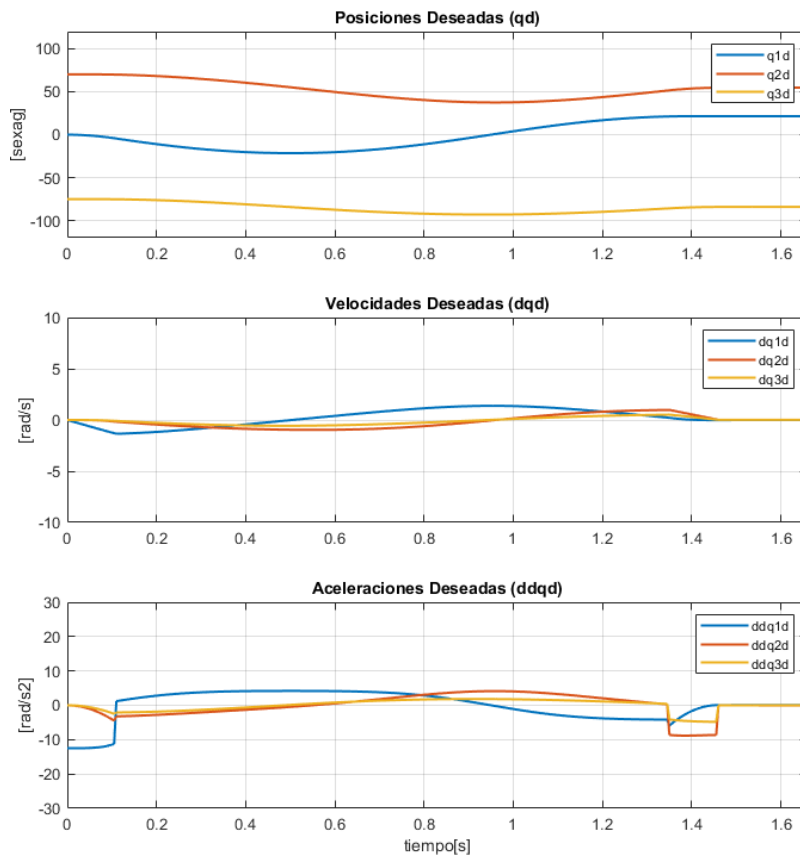
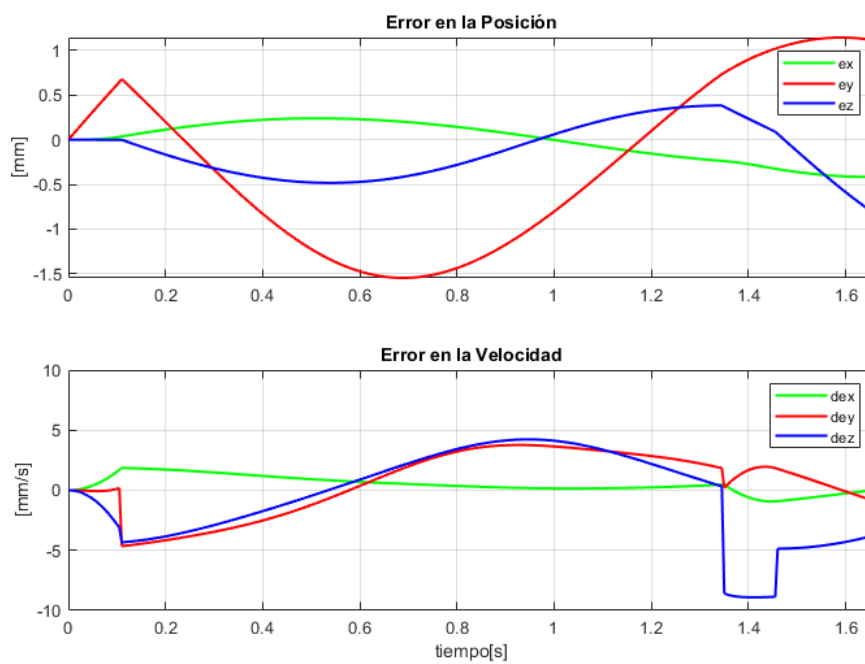


Figura 69

Errores Cinemáticos de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°3



Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 25.

Tabla 25

Resultados de la Trayectoria Circular Según las Ganancias - Prueba N°3

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3770		
Tiempo de Navegación (s)	1.4584		
Espacio de Juntas	Junta 1	Junta 2	Junta 3
Velocidad Máxima (<i>rad/s</i>)	1.3814	0.9778	0.5637
Aceleración Máxima (<i>rad/s²</i>)	12.50	8.8311	4.8375
Espacio Operacional	Eje X	Eje Y	Eje Z
Error Máximo de Posición (<i>mm</i>)	0.4166	1.5450	0.8273
Error Máximo de Velocidad (<i>mm/s</i>)	1.8597	4.6517	8.9106

Nota. Elaboración propia.

Con base en los resultados de las pruebas realizadas en los tipos de trayectorias, se puede deducir lo siguiente.

Para la primera prueba de la trayectoria rectilínea, donde se definieron las ganancias proporcional y derivativa en 2600 y 300 respectivamente, se puede observar una trayectoria suave generada, además, se presentan oscilaciones leves en la aceleración, a su vez, los errores de posición y velocidad en el espacio operacional se mantienen bajos, pero con oscilaciones leves. En cambio, en la segunda prueba, para ganancias proporcional y derivativa en 800 y 50 respectivamente, se puede notar que no existen oscilaciones y las trayectorias son suaves y definidas, manteniendo el error de posición y velocidad en el espacio operacional muy bajo. Finalmente, en la última prueba, para ganancias proporcional y derivativa en 25 y 5 respectivamente, se obtienen resultados muy similares al caso anterior, pero con la diferencia de que, en este último, los errores de posición en el espacio operacional son ligeramente mayores al caso anterior, mientras que los errores de velocidad son menores para el caso de los dos primeros ejes. Estos resultados se detallan de forma ordenada en la Tabla 26.

Tabla 26*Comparación de Resultados para la Trayectoria Rectilínea Según las Ganancias*

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3536		
Prueba	N°1	N°2	N°3
Ganancia Proporcional (<i>matriz 3x3</i>)	2600	800	25
Ganancia Derivativa (<i>matriz 3x3</i>)	300	50	5
Velocidad Máxima en Q (<i>rad/s</i>)	2.2970	2.2956	2.3096
Aceleración Máxima en Q (<i>rad/s²</i>)	18.3711	18.3711	18.3711
Error Máximo de Posición en X (<i>mm</i>)	0.3660	0.2505	0.7658
Error Máximo de Velocidad en X (<i>mm/s</i>)	3.1573	4.1384	2.5751
Grado de Oscilaciones	Leve	Nulo	Nulo

Nota. “Q” hace referencia al Espacio de Juntas, mientras que “X” al Espacio de Tareas. Elaboración propia.

En la trayectoria rectangular, para su primera prueba, donde se establecieron las ganancias proporcional y derivativa en 2200 y 250 respectivamente, se pueden observar pequeñas oscilaciones de la aceleración en el espacio de juntas a pesar de no presentar valores cercanos a los límites; esto se ve reflejado en el error de velocidad en el espacio operacional, donde las leves oscilaciones son notorias. Para la segunda prueba, con valores de las ganancias proporcional y derivativa en 800 y 50 respectivamente, se puede notar una trayectoria suave y sin oscilaciones en el espacio de juntas; por su parte, los errores de posición y velocidad en el espacio operacional se mantienen en valores aceptables. Finalmente, en la tercera prueba, para valores de las ganancias proporcional y derivativa en 100 y 10 respectivamente, se presentan trayectorias en el espacio de juntas suaves y estables, mientras que los errores de posición y aceleración en el espacio operacional se mantienen bajos, pero ligeramente mayores que en el caso anterior. Estos resultados se detallan de forma ordenada en la Tabla 27.

Tabla 27*Comparación de Resultados para la Trayectoria Rectangular Según las Ganancias*

Longitud de la Trayectoria (m)		0.9400		
Prueba	N°1	N°2	N°3	
Ganancia Proporcional (<i>matriz 3x3</i>)	2200	800	100	
Ganancia Derivativa (<i>matriz 3x3</i>)	250	50	10	
Velocidad Máxima en Q (<i>rad/s</i>)	2.5213	2.5178	2.5157	
Aceleración Máxima en Q (<i>rad/s²</i>)	23.8945	21.7676	22.3109	
Error Máximo de Posición en X (<i>mm</i>)	0.4518	0.3238	0.5801	
Error Máximo de Velocidad en X (<i>mm/s</i>)	7.5806	7.6569	7.5836	
Grado de Oscilaciones	Leve	Nulo	Nulo	

Nota. "Q" hace referencia al Espacio de Juntas, mientras que "X" al Espacio de Tareas. Elaboración propia.

Por su parte, para la trayectoria circular, en su primera prueba se definen las ganancias proporcional y derivativa en 2800 y 350 respectivamente; aquí las oscilaciones en la aceleración del espacio de juntas son más pronunciadas, a pesar de no sobrepasar los límites establecidos; esto tiene un efecto directo sobre el error de velocidad en el espacio operacional donde se producen las mismas oscilaciones. Por otro lado, en la segunda prueba, con valores en las ganancias proporcional y derivativa en 800 y 50 respectivamente, se observa una trayectoria en el espacio operacional suave y sin oscilaciones, mientras que los errores se mantienen bajos y estables. Finalmente, en la tercera prueba, donde se establecieron las ganancias proporcional y derivativa en 12 y 0.2 respectivamente, al igual que en el caso anterior, se puede observar que las trayectorias son suaves, bien definidas y sin oscilaciones; mientras que los errores en el espacio operacional se mantienen bajos, pero siendo ligeramente mayores a la segunda prueba. Estos resultados se detallan de forma ordenada en la Tabla 28.

Tabla 28*Comparación de Resultados para la Trayectoria Circular Según las Ganancias*

Longitud de la Trayectoria (m)	0.3770		
Prueba	N°1	N°2	N°3
Ganancia Proporcional (<i>matriz 3x3</i>)	2800	800	12
Ganancia Derivativa (<i>matriz 3x3</i>)	350	50	0.2
Velocidad Máxima en Q (<i>rad/s</i>)	1.3946	1.3968	1.3814
Aceleración Máxima en Q (<i>rad/s²</i>)	19.6854	12.50	12.50
Error Máximo de Posición en X (<i>mm</i>)	0.4523	0.3640	1.5450
Error Máximo de Velocidad en X (<i>mm/s</i>)	8.3737	9.9346	8.9106
Grado de Oscilaciones	Moderado	Nulo	Nulo

Nota. “Q” hace referencia al Espacio de Juntas, mientras que “X” al Espacio de Tareas. Elaboración propia.

4.3 Simulaciones 3D de las Trayectorias Diseñadas

A continuación, se presentan las tres trayectorias diseñadas en el espacio tridimensional (3D), utilizando los siguientes valores como ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, aplicadas en cada caso. Estas ganancias fueron determinadas como las más adecuadas para la correcta ejecución del algoritmo, de acuerdo con las pruebas realizadas previamente.

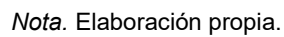
$$K_p = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}; K_d = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

- Para la trayectoria rectilínea se tomó como modelo la segunda prueba realizada según la variación de parámetros del perfil trapezoidal, siendo estos los siguientes.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 40\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.0 \frac{m}{s^2}$$

En la Figura 70 se muestra la posición inicial del efector final la cual corresponde al punto $p_0 = (0.25; 0.0; 0.20)m$ en el espacio tridimensional o espacio de tareas, además se puede observar la trayectoria rectilínea de referencia a seguir en color magenta.

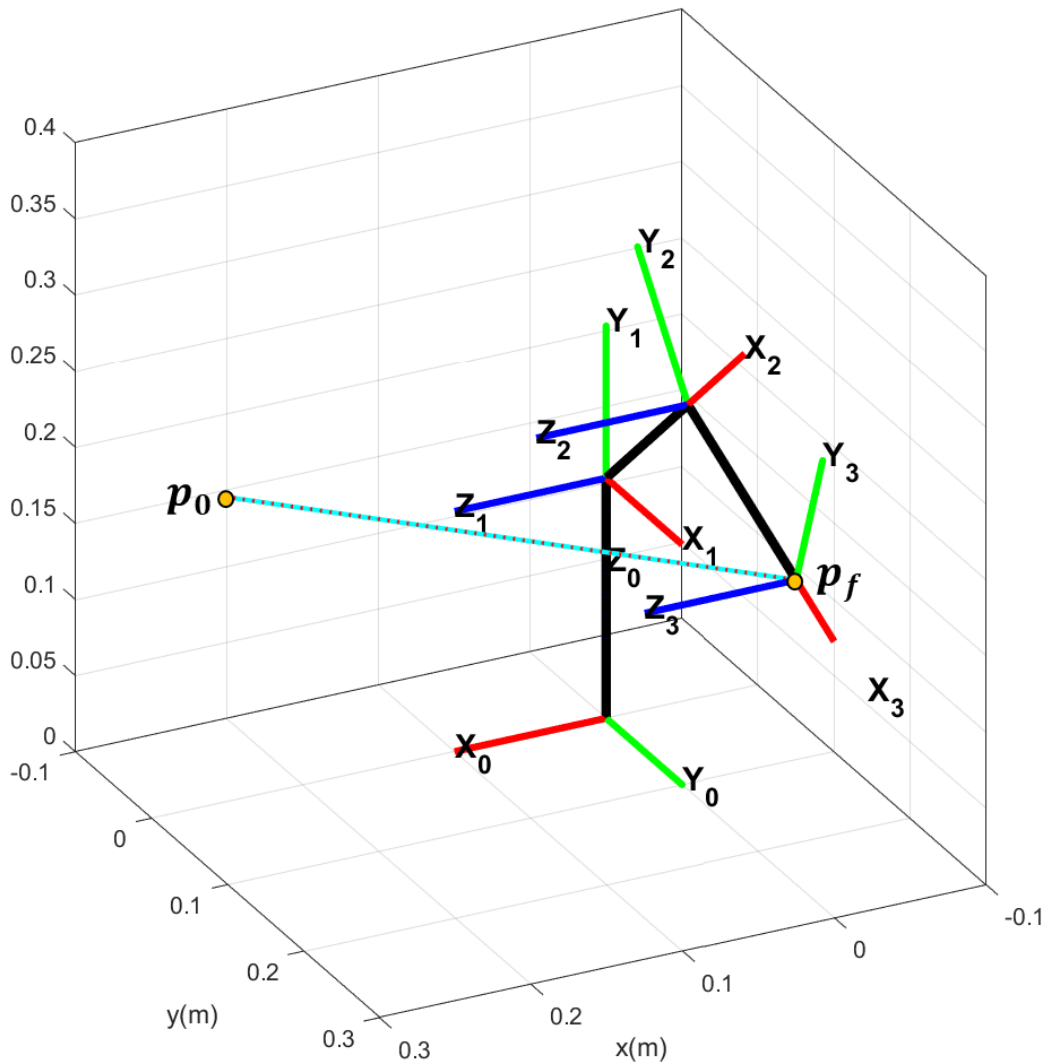
Posición Inicial del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Rectilínea



109

Figura 71

Posición Final del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Rectilínea



Nota. Elaboración propia.

- Para la trayectoria rectangular se tomó como modelo la segunda prueba realizada según la variación de parámetros del perfil trapezoidal, siendo estos los siguientes.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 40\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.0 \frac{m}{s^2}$$

En la Figura 72 se muestra la posición inicial del efecto final la cual corresponde al punto $p_0 = (0.18; 0.11; 0.08)m$ en el espacio tridimensional o espacio de tareas, además se pueden observar los puntos de paso de la trayectoria rectangular los cuales corresponden a $p_1 = (0.18; 0.11; 0.08)m$, $p_2 = (0.18; 0.11; 0.08)m$, y $p_3 = (0.18; 0.11; 0.08)m$ respectivamente y en ese orden, terminando en el punto donde se inició.

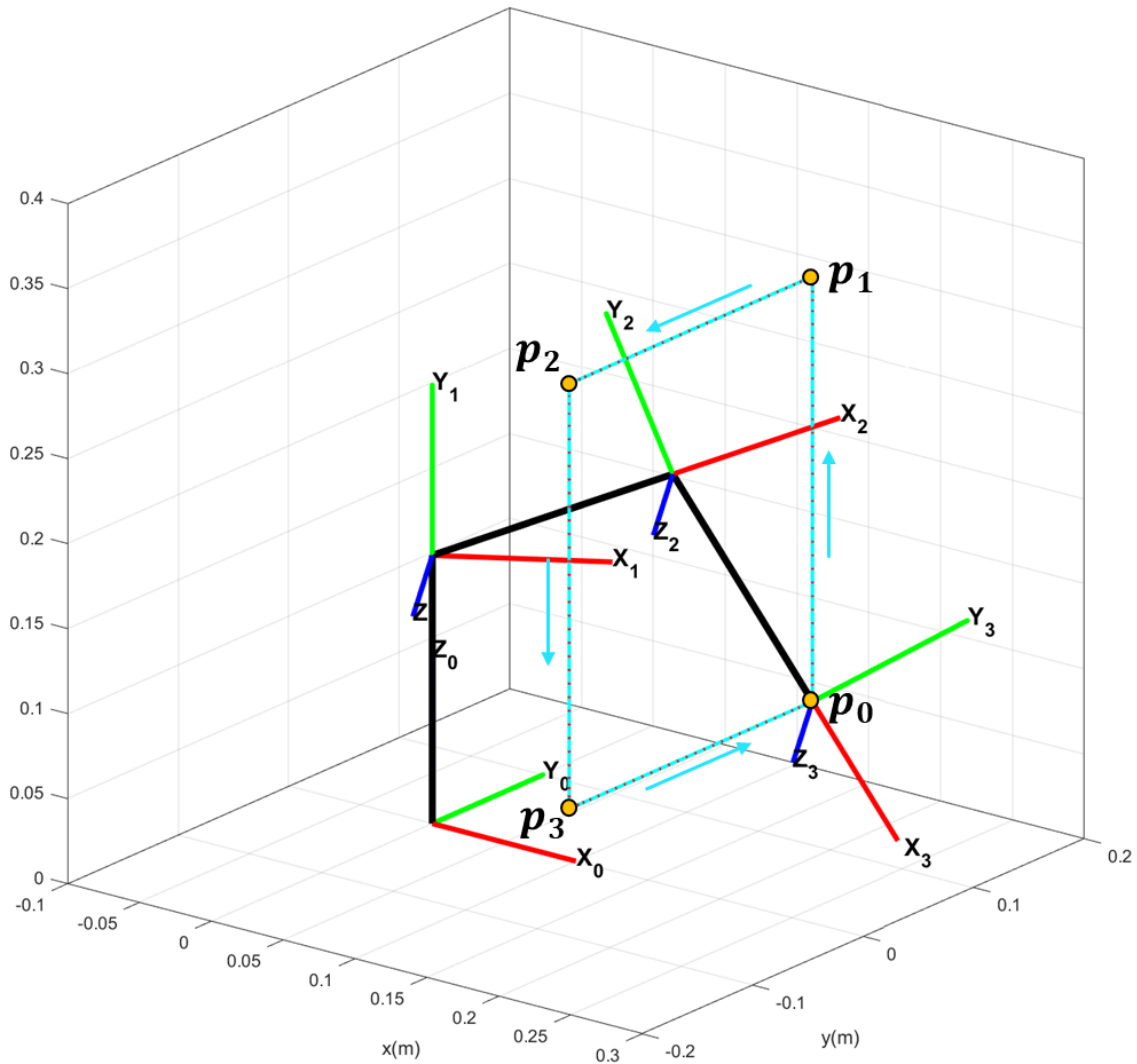
Posición Inicial del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Rectangular



111

Figura 73

Posición Final del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Rectangular



Nota. Elaboración propia.

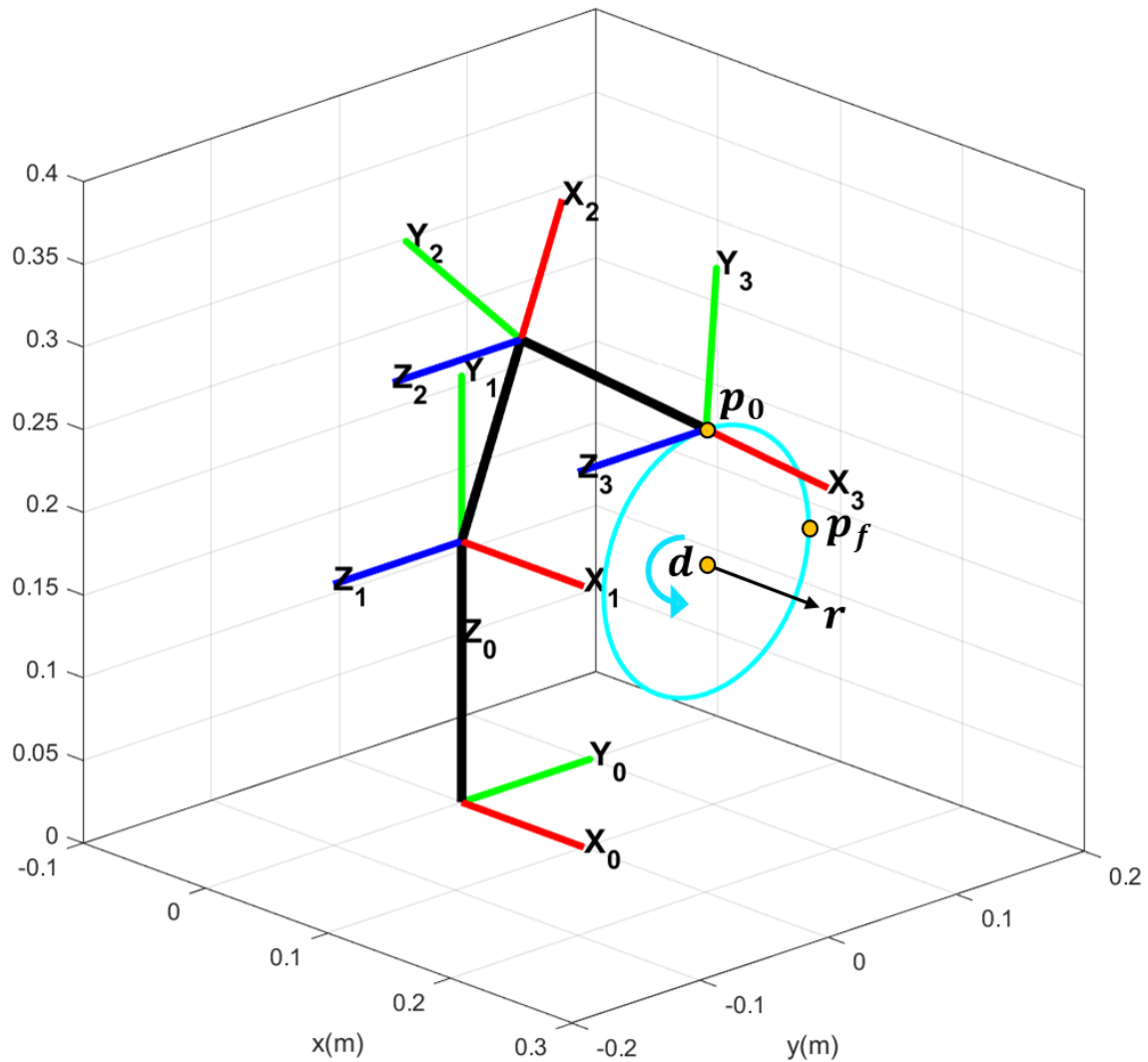
- Para la trayectoria circular se tomó como modelo la segunda prueba realizada según la variación de parámetros del perfil trapezoidal, siendo estos los siguientes.

$$ds_{m\acute{a}x} = 0.8 \frac{m}{s}; factor = 35\%; dds_{m\acute{a}x} = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

En la Figura 74 se muestra la posición inicial del efecto final la cual corresponde al punto $p_0 = (0.20; 0.0; 0.28)m$ en el espacio tridimensional o espacio de tareas, además se puede observar la trayectoria circular de referencia a seguir en color magenta. Por otro lado, se puede notar el eje $r = (1; 0; 0)$ sobre el cual se trazará la trayectoria circular en sentido antihorario y el centro del mismo como el punto $d = (0.20; 0.0; 0.20)m$.

Figura 74

Posición Inicial del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Circular

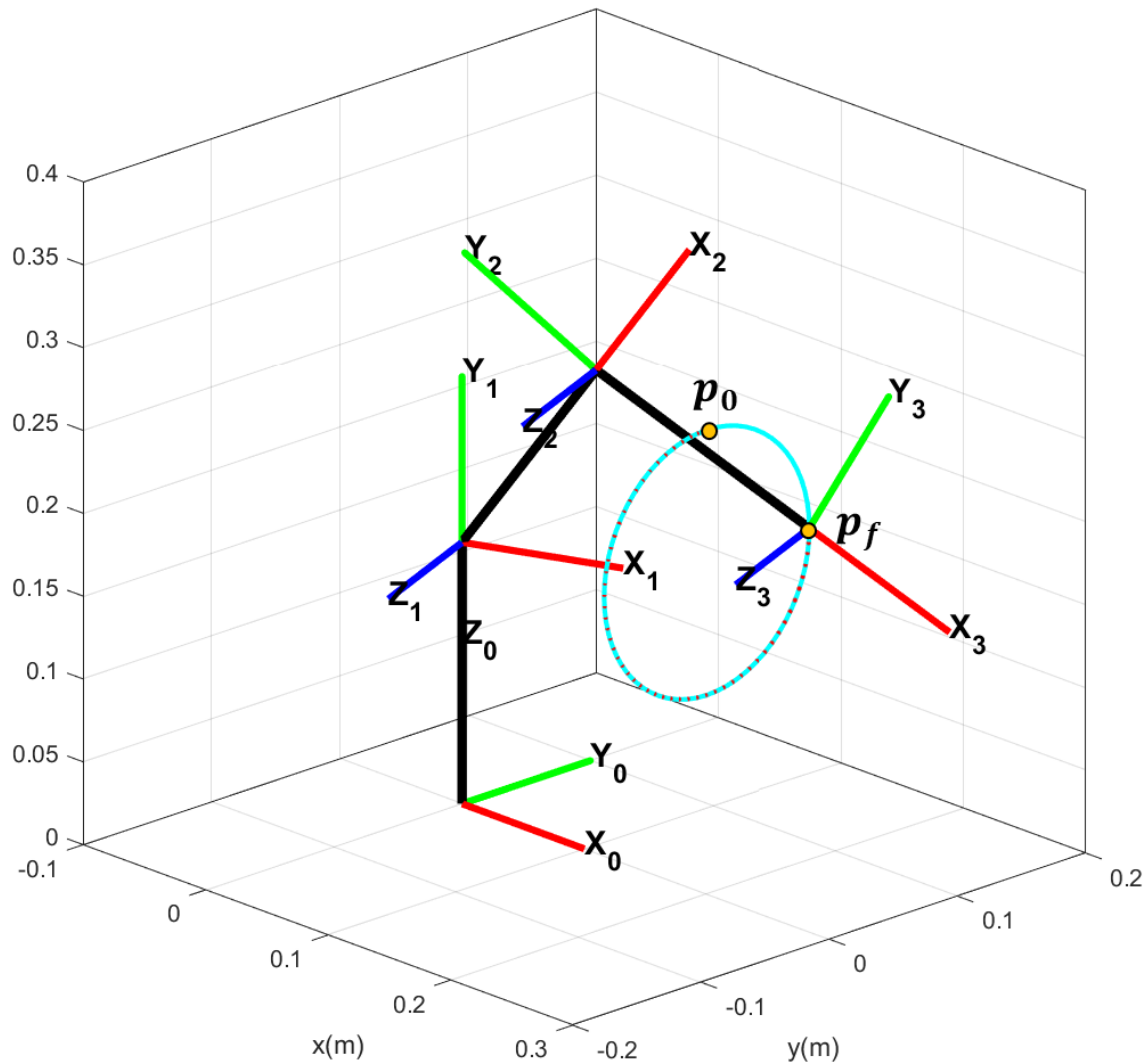


Nota. Elaboración propia.

Por otro lado, en la Figura 75 se muestra en línea punteada color rojo, la trayectoria recorrida por el efecto final al realizar la planificación de la trayectoria con el método trapezoidal y el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden. Donde el punto final p_f se ve determinado por el ángulo de rotación $arco = 3\pi/2$ respecto al eje r de la trayectoria circular definida.

Figura 75

Posición Inicial del Efecto Final para Realizar la Trayectoria Circular



Nota. Elaboración propia.

4.4 Contrastación de las Hipótesis

4.4.1 Contrastación de la Hipótesis General

Hi: El diseño de trayectorias usando el método trapezoidal aplicado al control tracking de un manipulador robótico de 3GDL es eficiente.

Ho: El diseño de trayectorias usando el método trapezoidal aplicado al control tracking de un manipulador robótico de 3GDL no es eficiente.

Decisión:

Con base en los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas, se observa que las trayectorias de posición, velocidad y aceleración generadas mediante el método

trapezoidal y el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden presentan un comportamiento suave, sin oscilaciones y dentro de los límites permisibles de los motores. Por otro lado, los errores absolutos, tanto de posición como de velocidad, no superan los valores de 1 mm y 10 mm/s respectivamente. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis de investigación.

4.4.2 Contrastación de las Hipótesis Específicas

Hi: Al aplicar el método trapezoidal a la planificación de trayectorias en el espacio operacional se obtienen valores permisibles de velocidad y aceleración en las juntas.

Ho: Al aplicar el método trapezoidal a la planificación de trayectorias en el espacio operacional no se obtienen valores permisibles de velocidad y aceleración en las juntas.

Decisión:

Según los resultados obtenidos en las simulaciones se confirma que los valores de velocidad y aceleración de las juntas del manipulador se mantienen dentro de los límites permisibles de los motores, siendo los valores máximos recomendados para la velocidad de crucero 0.4 m/s y para la aceleración máxima 2.5 m/s^2 . Por tal motivo, se admite la hipótesis de investigación.

Hi: El tiempo de navegación obtenido en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal es satisfactorio.

Ho: El tiempo de navegación obtenido en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal no es satisfactorio.

Decisión:

Como se observa en los resultados, los tiempos de navegación pueden variar dependiendo de los valores asignados a las variables del perfil trapezoidal, siendo estas la velocidad de crucero y la aceleración máxima, en las pruebas se puede apreciar valores de tiempo de navegación permitidos entre 1 s y 4 s para una trayectoria de 0.35 m , lo cual es aceptable para los valores estándar y depende de la aplicación que se dé al seguimiento de trayectoria. Por lo tanto, se acepta la hipótesis de investigación y se rechaza la hipótesis nula.

Hi: Resulta efectivo el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden en la obtención de trayectorias en el espacio de juntas sobre el control tracking del manipulador de 3GDL.

Ho: No resulta efectivo el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden en la obtención de trayectorias en el espacio de juntas sobre el control tracking del manipulador de 3GDL.

Decisión:

Como se pudo evidenciar en los resultados de las pruebas realizadas, el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden adaptado para el manipulador robótico R2D2 cumple su función de manera efectiva, lo cual queda demostrado por la suavidad de las gráficas de posición, velocidad y aceleración en el espacio de juntas y los errores absolutos bajos. Por consiguiente, se acepta la hipótesis de investigación y se rechaza la hipótesis nula.

4.5 Discusión de Resultados

A partir de las pruebas realizadas, se observa una mejora en la suavidad y estabilidad sin presencia de oscilaciones en las trayectorias planificadas en el espacio de juntas, cuando se emplean las ganancias adecuadas y los parámetros de perfil trapezoidal idóneos conforme a las limitaciones de las juntas. Estos resultados son similares a los obtenidos por Choe et al. (2023), donde su método de planificación de trayectorias planteado para la operación de pick-and-place asegura la continuidad y suavidad de la velocidad y la aceleración del efector final del manipulador.

Otro punto a resaltar son los límites de velocidad y aceleración máxima en el espacio de juntas, los cuales derivan directamente de la especificación de la velocidad de crucero y de la aceleración de crucero en la generación del perfil de velocidad trapezoidal. Al asignar valores adecuados, se limitan las variables cinemáticas en el espacio operacional y se manipula el tiempo de navegación, pudiendo ser este mayor o menor dependiendo de las aplicaciones del seguimiento de trayectorias. Esto concuerda con la investigación realizada por Wang et al. (2015), donde desarrollan un modelo para la

planificación de trayectorias mediante la curva Bézier, el cual reduce el tiempo de navegación y mejora la eficacia del trabajo.

Finalmente, se recalcan los resultados obtenidos al modificar las ganancias del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden, donde en las pruebas realizadas para la trayectoria rectilínea se obtienen errores absolutos en la posición menores a 0.3 mm ; por otro lado, en las pruebas para la trayectoria rectangular se obtienen errores menores a 0.4 mm ; por último, en las pruebas de trayectoria circular se evidencian errores menores a 0.5 mm . En función del rango máximo del manipulador, estos errores representan un 0.07% , 0.08% y 0.11% , lo cual demuestra la mejora del error para diferentes parámetros y efectividad del algoritmo.

Conclusiones

Mediante la utilización del perfil trapezoidal en la generación de trayectorias en el espacio operacional se logró producir trayectorias suaves y estables en el espacio de juntas. Además, las velocidades y aceleraciones generadas se mantuvieron dentro de los límites permisibles de los actuadores, lo que garantiza un comportamiento dinámico seguro y eficiente durante el seguimiento de trayectorias.

Se logró aplicar el método del perfil de velocidad trapezoidal satisfactoriamente, especificando la velocidad de crucero y la aceleración máxima, esto ayudó a limitar los valores de velocidad y aceleración en las juntas, de tal manera que no se excedan los límites permisibles definidos en los motores del manipulador. Para el caso de la trayectoria rectilínea se obtuvo un límite para la velocidad de crucero de 0.4 m/s y para la aceleración máxima de 2.0 m/s^2 ; por otro lado, los límites de velocidad de crucero y aceleración para la trayectoria rectangular fueron 0.32 m/s y 2.0 m/s^2 ; por último, para la trayectoria circular se obtuvieron los valores de 0.3 m/s y 2.5 m/s^2 para la velocidad de crucero y aceleración máxima.

Con base en los resultados obtenidos en las simulaciones, se halló un tiempo de navegación mínimo de 1.27 s para la trayectoria rectilínea, 3.58 s para la trayectoria rectangular y 1.46 s para la trayectoria circular, siendo estos los valores mínimos en los cuales la trayectoria realizada presenta un recorrido suave y en los límites permisibles. Estos tiempos pueden tomar valores mayores al elegir valores menores de velocidad y aceleración en el perfil de velocidad trapezoidal.

El algoritmo de cinemática inversa de segundo orden fue aplicado con efectividad y logró resultados satisfactorios, los cuales se demuestran en la mejora en la reducción del error absoluto de posición de las trayectorias generadas, conforme a las ganancias determinadas.

Recomendaciones

Definir las referencias de las trayectorias a generar respetando los límites del espacio de trabajo del manipulador robótico con la finalidad de evitar errores por singularidad o por inexistencia de la cinemática inversa del manipulador en configuraciones específicas.

Respetar los valores límites de velocidad de cruce y aceleración máxima en la generación del perfil trapezoidal con el objetivo de no sobrepasar los valores permisibles de velocidad y aceleración en las juntas de los actuadores del manipulador robótico.

Definir nuevos tipos de trayectorias como *splines*, lemniscatas o curvas de Bézier y aplicar el método del perfil de velocidad trapezoidal con la obtención de puntos en el espacio operacional para su diseño. Asimismo, combinar diferentes trayectorias para formar figuras más complejas para múltiples aplicaciones.

Si bien es cierto, el método empírico de sintonización utilizado permitió obtener resultados muy satisfactorios y errores mínimos, se recomienda utilizar otros métodos de sintonización que puedan reducir aún más el error de posición en el espacio operacional para aplicaciones que impliquen errores casi nulos.

Referencias Bibliográficas

- Canudas de Wit, C., Siciliano, B., & Bastin, G. (2012). *Theory of Robot Control*. Springer.
- Chavez Cornejo, R. (2022). *Análisis de desempeño en simulación de un controlador adaptativo en el control de trayectoria de un manipulador robotico de 2 grados de libertad*. [Tesis de pregrado, Universidad Católica de Santa María]. Repositorio de la Universidad Católica Santa María. Obtenido de <https://repositorio.ucsm.edu.pe/handle/20.500.12920/12048>
- Choe, M. S., Jang, K. S., Kim, Y. H., Kim, K. H., & Yang, W.-C. (2023). *An Approach for Elliptical Trajectory Planning with Vertical Straight Line Segments of Pick-and-Place Robot Operation with Height Clearance*. Hindawi. Obtenido de <https://doi.org/10.1155/2023/7419178>
- Craig, J. (2018). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Pearson.
- Crisóstomo, J. (2024). *Mejora de Control de Posición de un Robot de Tres Grados de Libertad Mediante el Empleo de un Controlador Descentralizado por Retroalimentación de Posición y Velocidad*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI.
- Escudero, C., & Cortez, L. (2018). *Técnicas y métodos cualitativos para la investigación científica*. Editorial UTMACH.
- Hernández, S., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta ed.). McGraw Hill.
- International Federation of Robotics (IFR). (2023). *World Robotics 2023 – Industrial Robots*. VDMA Services GmbH. Obtenido de <https://ifr.org/wr-industrial-robots/>
- Pérez, J., & Merino, M. (6 de Mayo de 2021). *Trayectoria - Qué es, tipos, definición y concepto*. Obtenido de Definicion.de: <https://definicion.de/trayectoria/>
- Reyes, F. (2011). *Robótica. Control de robots manipuladores*. Alfaomega Grupo Editor.
- Rodas, R. (2016). *Planificación de trayectoria para un brazo robótico articulado de cinco grados de libertad utilizando visión artificial*. Lima: [Tesis de pregrado, Universidad

- Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.14076/5467>
- Schwab, K. (2016). *The Fourth Industrial Revolution*. World Economic Forum.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). *Robotics, Modelling, Planning and Control*. Springer.
- Spong, M., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). *Robot Modeling and Control* (Segunda ed.). Jhon Wiley & Sons.
- Sun, H., Wang, H., Xu, Y., Yang, J., Ji, Y., Cheng, L., . . . Zhang, B. (2023). *Trajectory tracking control strategy of the gantry welding robot under the influence of uncertain factors*. Sage. Obtenido de <https://doi.org/10.1177/00202940221122233>
- Tam, A. (2019). *Diseño y simulación de un robot serial tipo articular, de 6 grados de libertad, con articulaciones rotacionales, para el seguimiento de trayectorias cortas reales en 3D, controlado mediante la estrategia de control de par calculado*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. Repositorio institucional Cybertesis UNI. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.14076/20190>
- Torre, M., & Medina, J. (2019). *Control de Trayectorias de Robot Articulado Utilizando Redes Neuronales*. [Tesis de pregrado, Universidad Tecnológica del Perú]. Repositorio institucional de la UTP. Obtenido de <https://hdl.handle.net/20.500.12867/3353>
- Wang, C., Wang, X., & Zheng, H. (2015). *Trajectory Planning for a Welding Robot Based on the Bezier Curve*. SERSC. Obtenido de <http://dx.doi.org/10.14257/ijca.2015.8.2.33>

Anexos

Anexo A Matriz de Consistencia	1
Anexo B Código de Generación de Trayectoria Rectilínea.....	2
Anexo C Código de Generación de Trayectoria Rectangular	3
Anexo D Código de Generación de Trayectoria Circular	5
Anexo E Código de la Función de Obtención de Parámetros Utilizando el Perfil de Velocidad Trapezoidal.....	7
Anexo F Código del Algoritmo de Cinemática Inversa.....	8
Anexo G Código de la Clase para Guardar las Funciones Utilizadas	10

Anexo A Matriz de Consistencia

Problema General	Objetivo General	Hipótesis General	Variables	Indicadores
¿Es posible diseñar trayectorias usando el método trapezoidal aplicado al control tracking de un manipulador robótico de 3GDL de manera eficiente?	Diseñar trayectorias usando el método trapezoidal aplicado al control tracking de un manipulador robótico de 3GDL.	El diseño de trayectorias usando el método trapezoidal aplicado al control tracking de un manipulador robótico de 3GDL es eficiente.	Variable Independiente: Planificación de trayectorias usando el método trapezoidal	Complejidad del modelo Suavidad de la trayectoria
Problemas Específicos	Objetivos Específicos	Hipótesis Específicas		
¿Cómo se comportan la velocidad y aceleración de las juntas en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal?	Aplicar el método trapezoidal en la parametrización de trayectorias en el espacio operacional para limitar la velocidad y aceleración de las juntas.	Al aplicar el método trapezoidal a la planificación de trayectorias en el espacio operacional se obtienen valores permisibles de velocidad y aceleración en las juntas.	Variable Dependiente: Control tracking de un manipulador 3GDL	Límites de velocidad y aceleración Tiempo y eficiencia de navegación
¿Qué tan satisfactorio es el tiempo de navegación en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal?	Determinar la variación del tiempo de navegación obtenido en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal.	El tiempo de navegación obtenido en la planificación de trayectorias en el espacio operacional usando el método trapezoidal es satisfactorio.		
¿Es efectivo el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden en la obtención de trayectorias en el espacio de juntas planteado sobre el control tracking del manipulador de 3GDL?	Evaluar la efectividad del algoritmo de cinemática inversa de segundo orden en la obtención de trayectorias en el espacio de juntas aplicado al control tracking del manipulador de 3GDL	Resulta efectivo el algoritmo de cinemática inversa de segundo orden en la obtención de trayectorias en el espacio de juntas sobre el control tracking del manipulador de 3GDL.		

Nota. Elaboración Propia.

Anexo B Código de Generación de Trayectoria Rectilínea

```
% PLANIFICACIÓN DE RUTA RECTILÍNEA (usando perfil trapezoidal)
% Generación de la trayectoria fuera del bucle
clc; clearvars; close all
load_parameters
robot = R2D2M1(ROBOT_DATA); %Creamos el objeto robot
ax = robot.crear_figura(); % Plotea en home (definido en la clase)

%-----%
% 1. DEFINICIÓN DE LA TRAYECTORIA RECTILÍNEA
%-----%
% 1.1. POSICIÓN INICIAL
po = [0.25;0.0;0.2];
% 1.2. POSICIÓN FINAL
pf = [0.0;0.25;0.2];
% 1.3. LONGITUD DE LA TRAYECTORIA
sf = norm(pf - po);
% 1.4. PLOTEO DE LA TRAYECTORIA DE REFERENCIA
plot3([po(1) pf(1)], [po(2) pf(2)], [po(3)
pf(3)], 'Color', 'c', 'LineWidth', 1)
% 1.5. TIEMPO DE MUESTREO
Ts = 0.005;

%-----%
% 2. PERFIL DE VELOCIDAD TRAPEZOIDAL PARA EL PARAMETRO "s"
%-----%
% 2.1. PARAMETROS DEL PERFIL TRAPEZOIDAL
factor = 0.4; % Porcentaje de la velocidad máxima
ds_max = 1.0; % Velocidad máxima
dds_max = 2.0; % Aceleración máxima
% 2.2. PERFIL DE VELOCIDAD TRAPEZOIDAL
[T,s,ds,dds,tnav,err] = trapez_time(0,sf,factor,ds_max,dds_max,Ts);
fprintf('TIEMPO DE MOVIMIENTO PLANIFICADO = %2.4f\n',tnav)
% 2.3. PLOTEO DEL PERFIL TRAPEZOIDAL
figure('Name', 'Parámetro s', 'Position', [100 100 400 800])
subplot(3,1,1)
plot(T, s, "LineWidth", 2)
grid on
xlabel(' [t] ');
ylabel('s');
subplot(3,1,2)
plot(T, ds, "LineWidth", 2)
grid on
xlabel(' [t] ');
ylabel('ds');
subplot(3,1,3)
plot(T, dds, "LineWidth", 2)
grid on
xlabel(' [t] ');
ylabel('dds');

%-----%
% 3. GENERACIÓN DE LA TRAYECTORIA RECTILÍNEA EN EL ESPACIO OPERACIONAL
%-----%
% 3.1. TRAYECTORIA EN EL SISTEMA GLOBAL
PD = po*ones(1,length(T)) + 1/sf*(pf - po).*s';
```

```

dPD = 1/sf*(pf - po).*ds';
ddPD = 1/sf*(pf - po).*dds';
% 3.2. TIEMPO ADICIONAL PARA DETENER EL ROBOT
tt = 0.2;
Tadd = (T(end):Ts:T(end)+tt)';
T = [T; Tadd];
% 3.3. ADICIÓN DE PUNTOS A LA TRAYECTORIA
NNN = length(Tadd);
PD = [PD PD(:,end)*ones(1,NNN)];
dPD = [dPD zeros(3,NNN)];
ddPD = [ddPD zeros(3,NNN)];
% 3.4. ANÁLISIS DE LA VALIDEZ DE LA TRAYECTORIA
[FLAG,p_error,q_error]=robot.check_trayectoria(PD);
if(FLAG==1)
    disp('El siguiente punto no tiene cinematica inversa')
    disp(p_error')
    error('FIN')
elseif(FLAG==2)
    disp('q1 esta fuera de límites')
    disp(q_error')
    error('FIN')
elseif(FLAG==3)
    disp('q2 esta fuera de límites')
    disp(q_error')
    error('FIN')
elseif(FLAG==4)
    disp('q3 esta fuera de límites')
    disp(q_error')
    error('FIN')
end

```

Anexo C Código de Generación de Trayectoria Rectangular

```

% PLANIFICACIÓN DE RUTA RECTANGULAR (usando perfil trapezoidal)
% Generación de la trayectoria fuera del bucle
clc; clearvars; close all
load_parameters
robot = R2D2M1(ROBOT_DATA); % Creamos el objeto robot
ax = robot.crear_figura(); % Plotea en home (definido en la clase)

%-----%
% 1. DEFINICIÓN DE LA TRAYECTORIA RECTANGULAR
%-----%
% 1.1. VÉRTICES DE LA TRAYECTORIA
p0 = [180;110;80]*1e-3;
p1 = [180;110;330]*1e-3;
p2 = [180;-110;330]*1e-3;
p3 = [180;-110;80]*1e-3;
p4 = [180;110;80]*1e-3;
PP = [p0 p1 p2 p3 p4]; % Matriz de puntos (3x5)
% 1.2. PLOTEO DE LA TRAYECTORIA DE REFERENCIA
plot3(PP(1,:), PP(2,:), PP(3,:), "LineWidth",2, "Color", 'c')
plot3(p0(1),p0(2),p0(3), 'or', p1(1),p1(2),p1(3), 'xr')
plot3(p2(1),p2(2),p2(3), 'or', p3(1),p3(2),p3(3), 'xr')
% 1.3. TIEMPO DE MUESTREO
Ts = 0.005;

```

```

%-----%
% 2. PERFIL DE VELOCIDAD TRAPEZOIDAL PARA EL PARÁMETRO "s"
%-----%
Tnav = 0;
T = [];
pd = [];
dpd = [];
ddpd = [];
for i=1:size(PP,2)-1
    % 2.1. PUNTO DE INICIO Y FINAL PARA CADA SEGMENTO
    po = PP(:,i);
    pf = PP(:,i+1);
    % 2.2. LONGITUD DE CADA TRAYECTORIA RECTILÍNEA
    sf = norm(pf - po);
    % 2.3. PARÁMETROS DEL PERFIL TRAPEZOIDAL
    factor = 0.4; % Porcentaje de la velocidad máxima
    ds_max = 1.0; % Velocidad máxima
    dds_max = 2.0; % Aceleración máxima
    % 2.4. PERFIL DE VELOCIDAD TRAPEZOIDAL
    [Tr,s,ds,dds,tnav,err] = trapez_time(0,sf,factor,ds_max,dds_max,Ts);
    Tnav = Tnav + tnav; %Tiempo de navegación acumulado
    % 2.5. PLOTEO DEL PERFIL TRAPEZOIDAL
    figure('Name', 'Parámetro s', 'Position', [100 100 400 800])
    subplot(3,1,1)
    plot(Tr, s, "LineWidth",2)
    grid on
    xlabel('[t]');
    ylabel('s');
    subplot(3,1,2)
    plot(Tr, ds, "LineWidth",2)
    grid on
    xlabel('[t]');
    ylabel('ds');
    subplot(3,1,3)
    plot(Tr, dds, "LineWidth",2)
    grid on
    xlabel('[t]');
    ylabel('dds');
    % 2.6. TRAYECTORIA EN EL SISTEMA GLOBAL
    p = po*ones(1,length(Tr)) + 1/sf*(pf - po).*s';
    dp = 1/sf*(pf - po).*ds';
    ddp = 1/sf*(pf - po).*dds';
    % 2.7. SE GUARDAN LOS RESULTADOS
    pd = [pd p];
    dpd = [dpd dp];
    ddpd = [ddpd ddp];
    T = [T;Tr];
end
fprintf('TIEMPO DE MOVIMIENTO PLANIFICADO = %2.4f\n',Tnav)
% 2.8. TIEMPO ADICIONAL PARA DETENER EL ROBOT
tt = 0.2;
Tadd = (T(end):Ts:T(end)+tt)';
T = [T; Tadd];
% 2.9. ADICIÓN DE PUNTOS A LA TRAYECTORIA
NNN = length(Tadd);
PD = [pd pd(:,end)*ones(1,NNN)];
dPD = [dpd zeros(3,NNN)];
ddPD = [ddpd zeros(3,NNN)];
% 2.10. ANÁLISIS DE LA VALIDEZ DE LA TRAYECTORIA

```

```

[FLAG,p_error,q_error]=robot.check_trayectoria(PD);
if(FLAG==1)
    disp('El siguiente punto no tiene cinematica inversa')
    disp(p_error')
    error('FIN')
elseif(FLAG==2)
    disp('q1 esta fuera de limites')
    disp(q_error')
    error('FIN')
elseif(FLAG==3)
    disp('q2 esta fuera de limites')
    disp(q_error')
    error('FIN')
elseif(FLAG==4)
    disp('q3 esta fuera de limites')
    disp(q_error')
    error('FIN')
end

```

Anexo D Código de Generación de Trayectoria Circular

```

% PLANIFICACIÓN DE RUTA CIRCULAR (usando perfil trapezoidal)
% Generación de la trayectoria fuera del bucle
clc; clearvars; close all
load_parameters
robot = R2D2M1(ROBOT_DATA); %Creamos el objeto robot
ax = robot.crear_figura(); % Plotea en home (definido en la clase)

%-----%
% 1. DEFINICIÓN DE LA TRAYECTORIA CIRCULAR
%-----%
% 1.1. PARÁMETROS DEL CÍRCULO
r = [1;0;0]; % Vector unitario del eje
d = [0.2;0.0;0.2]; % Punto en el eje (puede ser el centro)
po = [0.2;0.0;0.28]; % Posición inicial en el círculo [0.2;0.0;0.28]
arco = 3*pi/2; % Arco a recorrer según el ángulo
% 1.2. CÁLCULO DEL CENTRO Y RADIO DEL CÍRCULO
[sf,rho,c,R] = Params_Circle(d,r,po,arco);
% sf: Longitud de la trayectoria circular
% rho: Radio
% c: Centro de la circunferencia
% R: Matriz de rotación
% 1.3. PLOTEO DE LA TRAYECTORIA DE REFERENCIA
drawCircle(ax,rho,c,r,'c')
% 1.4. TIEMPO DE MUESTREO
Ts = 0.005;

%-----%
% 2. PERFIL DE VELOCIDAD TRAPEZOIDAL PARA EL PARAMETRO "s"
%-----%
% 2.1. PARÁMETROS
factor = 0.4; %Porcentaje de la velocidad de crucero
ds_max = 1.0; % Velocidad máxima
dds_max = 2.0; % Aceleración máxima
% 2.2. PERFIL DE VELOCIDAD TRAPEZOIDAL
[T,s,ds,dds,tnav,err] = trapez_time(0,sf,factor,ds_max, dds_max, Ts);
fprintf('TIEMPO DE MOVIMIENTO PLANIFICADO = %2.4f\n',tnav)

```

```

% 2.3. PLOTEO DEL PERFIL TRAPEZOIDAL
figure('Name', 'Parametro s', 'Position', [100 100 400 800])
subplot(3,1,1)
plot(T, s, "LineWidth",2)
grid on
xlabel('t');
ylabel('s');
subplot(3,1,2)
plot(T, ds, "LineWidth",2)
grid on
xlabel('t');
ylabel('ds');
subplot(3,1,3)
plot(T, dds, "LineWidth",2)
grid on
xlabel('t');
ylabel('dds');

%-----%
% 3. GENERACIÓN DE LA TRAYECTORIA CIRCULAR EN EL ESPACIO OPERACIONAL
%-----%
% 3.1. TRAYECTORIA EN EL SISTEMA LOCAL
sn = s'/rho; % Hacemos que sea vector fila
cos_sn = cos(sn);
sin_sn = sin(sn);
pp = [rho*cos(sn); rho*sin(sn); zeros(1,length(s))];
% 3.2. TRAYECTORIA EN EL SISTEMA GLOBAL
PD = c + R*pp;
dPD = [-ds'.*sin(sn); ds'.*cos(sn); zeros(1,length(s))];
dPD = R*dPD;
ddPD = [-ds'.^2.*cos(sn)/rho - dds'.*sin(sn); ...
        -ds'.^2.*sin(sn)/rho + dds'.*cos(sn);
        zeros(1,length(s))];
ddPD = R*ddPD;
% 3.3. TIEMPO ADICIONAL PARA DETENER EL ROBOT
tt = 0.2;
Tadd = (T(end):Ts:T(end)+tt)';
T = [T; Tadd];
% 3.4. ADICIÓN DE PUNTOS A LA TRAYECTORIA
NNN = length(Tadd);
PD = [PD PD(:,end)*ones(1,NNN)];
dPD = [dPD zeros(3,NNN)];
ddPD = [ddPD zeros(3,NNN)];
% 3.5. ANÁLISIS DE LA VALIDEZ DE LA TRAYECTORIA
[FLAG,p_error,q_error]=robot.check_trayectoria(PD);
if(FLAG==1)
    disp('El siguiente punto no tiene cinematica inversa')
    disp(p_error)
    error('FIN')
elseif(FLAG==2)
    disp('q1 esta fuera de límites')
    disp(q_error)
    error('FIN')
elseif(FLAG==3)
    disp('q2 esta fuera de límites')
    disp(q_error)
    error('FIN')
elseif(FLAG==4)
    disp('q3 esta fuera de límites')
    disp(q_error)

```

```

        error('FIN')
end

```

Anexo E Código de la Función de Obtención de Parámetros Utilizando el Perfil de Velocidad Trapezoidal

```

function [T,q,dq,ddq,tf,err] = trapez_time(qi,qf,factor,dqc_MAX,ddqc,Ts)
%     Perfil de velocidad trapezoidal especificando el porcentaje
%     de la velocidad máxima a usar y la aceleración máxima
%
%     qi,qf: Posición inicial y final
%     factor: Porcentaje de la velocidad máxima (0-1)
%     dqc_MAX: Velocidad máxima
%     ddqc: Aceleración
%     Ts: Tiempo de muestreo
%
%     T: Vector de tiempos
%     q,dq,ddq: Vectores de posición, velocidad y aceleración
%     tf: Tiempo de movimiento
%     err: Flag de error. Si err = 0 entonces "dqc" es válido.

%-----%
% 1. INICIALIZACIÓN DE VARIABLES
%-----%
% 1.1. DELTA DE POSICIÓN Y CORRECCIÓN DEL SIGNO DE LA ACELERACIÓN
delta = qf - qi;
if(sign(ddqc)~=sign(delta))
    ddqc = -ddqc;
end
% 1.2. VELOCIDAD DE CRUCERO
dqc = factor*dqc_MAX;
% 1.3. CORRECCIÓN DEL SIGNO DE LA VELOCIDAD
dqc = sign(delta)*abs(dqc);

%-----%
% 2. CÁLCULO DE LOS TIEMPOS
%-----%
% 2.1. CALCULAMOS LOS TIEMPOS CON LAS VELOCIDADES INICIALES
tc = dqc/ddqc;
tf = tc + delta/dqc;
% 2.2. AJUSTAMOS LAS VARIABLES SI LA CONFIGURACIÓN INICIAL NO ES VÁLIDA
dqr = abs(delta)/tf;
err = 0;
if abs(dqc)<=dqr
    err = 1;
    dqc = dqr;
    tc = dqc/ddqc;
    tf = tc + delta/dqc;
    fprintf('La velocidad de cruce es muy pequeña\n')
    fprintf('Corrección de velocidad: dqc = %2.4f\n',dqc)
elseif abs(dqc)>2*dqr
    err = 2;
    dqc = 2*dqr;
    tc = dqc/ddqc;
    tf = tc + delta/dqc;
    fprintf('La velocidad de cruce es muy grande\n')
    fprintf('Corrección de velocidad: dqc = %2.4f\n',dqc)
end

```

```

% 2.3 VECTOR DE TIEMPO
T = (0:Ts:tf)';
% 2.4. SEPARAMOS MEMORIA PARA LA TRAYECTORIA
n = size(T,1);
ddq = zeros(n,1);

%-----%
% 3. CÁLCULO DE LA TRAYECTORIA
%-----%
% Hallamos los índices de transición del perfil de velocidad
n1 = max(1, fix(n*tc/tf));
n2 = n - n1;
% Posición
q = [qi + 0.5*ddqc*T(1:n1).^2;
      qi + dqc*(T(n1 + 1:n2) - 0.5*tc);
      qf - 0.5*ddqc*(tf - T(n2 + 1:n)).^2];
% Velocidad
dq = [ddqc*T(1:n1);
      dqc*ones(n2 - n1,1);
      ddqc*(tf - T(n2 + 1:n))];
% Aceleración
ddq(1:n1) = ddqc*ones(1,n1);
ddq(n2+1:n) = -ddqc*ones(1,n1);

```

Anexo F Código del Algoritmo de Cinemática Inversa

```

%-----%
% 1. CONFIGURACIÓN INICIAL DEL MANIPULADOR
%-----%
% 1.1. PARÁMETROS PARA LA POSICIÓN
d1 = ROBOT_DATA.d1;
a2 = ROBOT_DATA.a2;
a3 = ROBOT_DATA.a3;
% 1.2. POSICIÓN Y VELOCIDAD INICIAL
xo = PD(:,1); % Inicia en el primer punto de la trayectoria deseada
%xo = [a3; 0.00; d1+a2]; % Inicia en Home (q1=0; q2=pi/2; q3=-pi/2)
% 1.3. CONFIGURACIÓN INICIAL
[q1d,q2d,q3d,FLAG] = robot.cinematica_inversa(xo(1),xo(2),xo(3));
if(FLAG==1)
    error("error")
end
qd = [q1d;q2d;q3d]; % Posición deseada inicial
dq = [0;0;0]; % Velocidad deseada inicial igual a cero
% 1.4. PLOTEO DEL ROBOT EN LA CONFIGURACIÓN INICIAL
robot.plotear_configuracion(qd);

%-----%
% 2. ALGORITMO DE CINEMÁTICA INVERSA DE SEGUNDO ORDEN
%-----%
% 2.1. PARÁMETROS DEL ALGORITMO
Kp = diag([400, 400, 400]); % [100, 100, 100]
Kd = diag([50, 50, 50]); % [10, 10, 10]
e = zeros(3,1);
de = zeros(3,1);
% 2.2. MATRICES PARA GUARDAR RESULTADOS
N = size(PD,2); % Número de puntos
Qd = zeros(3,N); % Para guardar "qd"

```

```

DQd = zeros(3,N);
DDQd = zeros(3,N);
Xe = zeros(N,3);      % Vector operacional
Ep = zeros(N,3);      % Error en la posición
dEp = zeros(N,3);      % Error en la velocidad
% Lazo
pause
for i = 1:N
    %-----%
    % SEÑALES DE REFERENCIA
    %-----%
    pd = PD(:,i);      % Posición deseada en el espacio
    dpd = dPD(:,i);    % Velocidad deseada en el espacio
    ddpd = ddPD(:,i);  % Aceleración deseada en el espacio
    % SE GUARDAN LAS SEÑALES
    Qd(:,i) = qd;      % Posición deseada en las juntas
    DQd(:,i) = dqd;    % Velocidad deseada en las juntas

    %-----%
    % ALGORITMO DE CINEMÁTICA INVERSA DE SEGUNDO ORDEN
    %-----%
    % CINEMÁTICA OPERACIONAL
    xe = robot.funcion_k(qd);
    Xe(i,:) = xe;
    % CÁLCULO DE LOS JACOBIANOS
    Ja = robot.Ja(qd);
    dJa = robot.dJa(qd, dqd);
    % CÁLCULO DE LOS ERRORES
    e = pd - xe;      % Posición
    v = Ja*dqd;
    de = dpd - v;      % Velocidad
    Ep(i,:) = e;
    dEp(i,:) = de;
    % ALGORITMO DE SEGUNDO ORDEN Y LIMITACIÓN DE LA ACELERACIÓN
    ddqd = Ja \ (ddpd + Kd*de + Kp*e - dJa*dqd);
    if(abs(ddqd(1))>robot.ROBOT_DATA.ddq1_max)
        ddqd(1) = sign(ddqd(1))*robot.ROBOT_DATA.ddq1_max;
    end
    if(abs(ddqd(2))>robot.ROBOT_DATA.ddq2_max)
        ddqd(2) = sign(ddqd(2))*robot.ROBOT_DATA.ddq2_max;
    end
    if(abs(ddqd(3))>robot.ROBOT_DATA.ddq3_max)
        ddqd(3) = sign(ddqd(3))*robot.ROBOT_DATA.ddq3_max;
    end
    DDQd(:,i) = ddqd;

    %-----%
    % ACTUALIZACIÓN DE LA VELOCIDAD Y LA POSICIÓN
    %-----%
    dqd = dqd + Ts*ddqd;
    qd = qd + Ts*dqd;

    %-----%
    % PLOTEO DEL ROBOT PARA CADA POSICIÓN GENERADA
    %-----%
    if(rem(i-1,5)==0)
        robot.plotear_configuracion(qd);
        plot3(ax,x(1),x(2),x(3),'.b')
        pause(0.1)
    end
end
end

```

Anexo G Código de la Clase para Guardar las Funciones Utilizadas

```
classdef R2D2M1 < handle
    % R2D2M1
    properties %Valores Predeterminados si no se da ninguna información
        ROBOT_DATA
        h1
        h2
        h3
        h_link1
        h_link2
        h_link3
    end

    methods
        function this = R2D2M1(data)
            % Constructor
            this.ROBOT_DATA = data;
        end

        function [q1,q2,q3,FLAG]=cinematica_inversa(this,x,y,z)
            % Cinemática inversa
            %
            % SALIDAS
            %     q: Configuración de las juntas
            %     FLAG: 0(Todo OK), 1(Error)
            FLAG = 0;

            %-----%
            % 1. LONGITUDES DEL BRAZO
            %-----%
            d1 = this.ROBOT_DATA.d1;
            a2 = this.ROBOT_DATA.a2;
            a3 = this.ROBOT_DATA.a3;

            %-----%
            % 2. CINEMATICA INVERSA
            %-----%
            % 3.1. EMPEZAMOS CON "q1=theta1"
            q1 = atan2(y,x);
            % 3.2. SEGUIMOS CON "q3=theta3"
            %     -> Hallamos "D"
            s = z - d1;
            r2 = x^2 + y^2;
            r = sqrt(r2);
            D_num = r2 + s^2 - (a2^2 + a3^2);
            D_den = 2*a2*a3;
            D = D_num/D_den;
            if(abs(D)>1)
                FLAG = 1;
                q1 = -100;q2 = -100;q3 = -100;
                return
            end
            %     -> Hallamos "q3"
            q3 = atan2(-sqrt(1-D*D), D);
            % 3.3. SEGUIMOS CON "q2=theta2"
            alfa = atan2(s,r);
            beta = atan2(a3*sin(q3), a2+a3*cos(q3));
            q2 = alfa - beta;
            % MENSAJES
        end
    end
end
```

```

    %fprintf('q1:%2.4f, %2.4f(sexag)\n', q1, q1*180/pi)
    %fprintf('q2:%2.4f, %2.4f(sexag)\n', q2, q2*180/pi)
    %fprintf('q3:%2.4f, %2.4f(sexag)\n', q3, q3*180/pi)
end

function [FLAG,p_error,q_error]=check_trayectoria(this, PD)
% Chequea los puntos
% PD: Matriz 3xNN de puntos.

%-----%
% 1. LIMITES
%-----%
q1_max = this.ROBOT_DATA.q1_max*pi/180;
q1_min = this.ROBOT_DATA.q1_min*pi/180;
q2_max = this.ROBOT_DATA.q2_max*pi/180;
q2_min = this.ROBOT_DATA.q2_min*pi/180;
q3_max = this.ROBOT_DATA.q3_max*pi/180;
q3_min = this.ROBOT_DATA.q3_min*pi/180;

%-----%
% 2. CHEQUEAMOS
%-----%
FLAG = 0;
NN = size(PD,2);
p_error = [];
q_error = [];
for i=1:NN
    pd = PD(:,i);
    x=pd(1); y=pd(2); z=pd(3);
    [q1,q2,q3,FLAG_pd] = this.cinematica_inversa(x,y,z);
    % CHEQUEAMOS SI HAY SOLUCIÓN CINEMÁTICA INVERSA
    if(FLAG_pd==1)
        FLAG = 1;
        p_error = pd;
        q_error = [q1;q2;q3];
        return
    end
    % CHEQUEAMOS q1
    if(q1>q1_max || q1<q1_min)
        FLAG = 2;
        p_error = pd;
        q_error = [q1;q2;q3]*180/pi;
        return
    end
    % CHEQUEAMOS q2
    if(q2>q2_max || q2<q2_min)
        FLAG = 3;
        p_error = pd;
        q_error = [q1;q2;q3]*180/pi;
        return
    end
    % CHEQUEAMOS q3
    if(q3>q3_max || q3<q3_min)
        FLAG = 4;
        p_error = pd;
        q_error = [q1;q2;q3]*180/pi;
        return
    end
end
end
end

```

```

function [T01,T02,T03] = cinematica_directa(this,q)
    % Cinemática directa

    %-----%
    % 1. LEEMOS PARÁMETROS DE ENTRADA
    %-----%
    q1 = q(1);
    q2 = q(2);
    q3 = q(3);

    %-----%
    % 2. SISTEMAS COORDENADOS
    %-----%
    % 2.1. SISTEMA COORDENADO {1}
    theta1 = q1;
    d1      = this.ROBOT_DATA.d1;
    a1      = 0;
    alpha1 = pi/2;
    A1 = matriz_homogenea_DH(theta1,d1,a1,alpha1);
    T01 = A1;
    % 2.2. SISTEMA COORDENADO {2}
    theta2 = q2;
    d2      = 0;
    a2      = this.ROBOT_DATA.a2;
    alpha2 = 0;
    A2 = matriz_homogenea_DH(theta2,d2,a2,alpha2);
    T02 = A1*A2;
    % 2.3. SISTEMA COORDENADO {3}
    theta3 = q3;
    d3      = 0;
    a3      = this.ROBOT_DATA.a3;
    alpha3 = 0;
    A3 = matriz_homogenea_DH(theta3,d3,a3,alpha3);
    T03 = T02*A3;
end

function x = funcion_k(this, q)
    % funcion_k Cinemática directa operacional

    %-----%
    % 1. LEEMOS PARÁMETROS
    %-----%
    d1 = this.ROBOT_DATA.d1;
    a2 = this.ROBOT_DATA.a2;
    a3 = this.ROBOT_DATA.a3;
    q1 = q(1);
    q2 = q(2);
    q3 = q(3);

    %-----%
    % 2. CINEMÁTICA OPERACIONAL
    %-----%
    xx = cos(q1)*(a2*cos(q2) + a3*cos(q2+q3));
    yy = sin(q1)*(a2*cos(q2) + a3*cos(q2+q3));
    zz = d1 + a2*sin(q2) + a3*sin(q2+q3);
    x  = [xx;yy;zz];
end

function Ja = Ja(this, q)

```

```

% Jacobiano analítico

%-----%
% 1. LEEMOS PARÁMETROS
%-----%
a2 = this.ROBOT_DATA.a2;
a3 = this.ROBOT_DATA.a3;
q1 = q(1);
q2 = q(2);
q3 = q(3);

%-----%
% 2. JACOBIANO ANALÍTICO
%-----%
s1 = sin(q1);      s2 = sin(q2);
c1 = cos(q1);      c2 = cos(q2);
s23 = sin(q2+q3);  c23 = cos(q2+q3);
Ja = [-s1*(a3*c23 + a2*c2), -c1*(a3*s23 + a2*s2), -a3*s23*c1;
      c1*(a3*c23 + a2*c2), -s1*(a3*s23 + a2*s2), -a3*s23*s1;
      0,                    a3*c23 + a2*c2,          a3*c23];

end

function dJa = dJa(this, q, dq)
% Derivada del Jacobiano analítico

%-----%
% 1. LEEMOS PARÁMETROS
%-----%
a2 = this.ROBOT_DATA.a2;
a3 = this.ROBOT_DATA.a3;
q1 = q(1);
q2 = q(2);
q3 = q(3);
dq1 = dq(1);
dq2 = dq(2);
dq3 = dq(3);

%-----%
% 2. DERIVADA DEL JACOBIANO ANALÍTICO
%-----%
% 2.1. VARIABLES
s1 = sin(q1);      c1 = cos(q1);
s2 = sin(q2);      c2 = cos(q2);
s23 = sin(q2+q3);  c23 = cos(q2+q3);
aux1 = a2*s2 + a3*s23;
aux2 = a2*c2 + a3*c23;
aux3 = a3*s23*s1;
aux4 = a3*s23*c1;
aux5 = a3*c23*c1;
aux6 = a3*c23*s1;
% 2.2. DERIVADA
dJa = zeros(3,3);
dJa(1,1) = -c1*aux2*dq1 + s1*aux1*dq2 + aux3*dq3;
dJa(1,2) = s1*aux1*dq1 - c1*aux2*dq2 - aux5*dq3;
dJa(1,3) = aux3*dq1 - aux5*dq2 - aux5*dq3;
dJa(2,1) = -s1*aux2*dq1 - c1*aux1*dq2 - aux4*dq3;
dJa(2,2) = -c1*aux1*dq1 - s1*aux2*dq2 - aux6*dq3;
dJa(2,3) = -aux4*dq1 - aux6*dq2 - aux6*dq3;
dJa(3,1) = 0;
dJa(3,2) = -aux1*dq2 - a3*s23*dq3;

```

```

        dJa(3,3) = -a3*s23*(dq2 + dq3);
    end

%----- FUNCIONES DE PLOTEO -----%
function ax = crear_figura(this)
    % CINEMÁTICA EN LA POSICIÓN HOME
    q1 = 0;
    q2 = pi/2;
    q3 = -pi/2;
    [T01,T02,T03] = this.cinematica_directa([q1,q2,q3]);
    % CREAMOS FIGURA
    figure('Name', 'ROBOT', 'Position', [100 100 800 700])
    ax = axes;
    axis(ax, [-0.15 0.35 -0.25 0.25 0 0.5])
    hold(ax, "on")
    grid(ax, "on")
    axis(ax, "square")
    set(gca, 'box', 'on')
    xlabel('x(m)')
    ylabel('y(m)')
    % SISTEMAS COORDENADOS
    T0 = eye(4);
    plot_frame(ax,T0,'frame','0','length',0.1,'view',3);
    this.h1 = plot_frame(ax,T01,'frame','1','length',0.1);
    this.h2 = plot_frame(ax,T02,'frame','2','length',0.1);
    this.h3 = plot_frame(ax,T03,'frame','3','length',0.1);
    this.h_link1 = plot_link_DH(ax,T01,T0,'k');
    this.h_link2 = plot_link_DH(ax,T02,T01,'k');
    this.h_link3 = plot_link_DH(ax,T03,T02,'k');
end

function plotear_configuracion(this,q)
    [T01,T02,T03] = this.cinematica_directa(q);
    plot_frame(this.h1, T01);
    plot_frame(this.h2, T02);
    plot_frame(this.h3, T03);
    T0 = eye(4);
    plot_link_DH(this.h_link1,T01,T0);
    plot_link_DH(this.h_link2,T02,T01);
    plot_link_DH(this.h_link3,T03,T02);
end
end
end

```